Hamilton-Formalismus in der Beschleunigerphysik

Sonja Bartkowski, Dimitrios Skodras

Technische Universität Dortmund

11.06.2015

Gliederung

Lagrangeformalismus

- **Generalisierte Koordinaten** $q_k(t)$, $k = 1 \ldots f$
  - f: Anzahl Freiheitsgrade
  - Beschreiben System vollständig
- **Kinetische Energie** $T(q_k, \dot{q}_k) = \sum_i^N \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2$
- **Potentielle Energie** $U(q_k, t) = -\sum_{i=1}^N \int \vec{F}_i d\vec{r}_i$
- **Lagrange-Funktion** $L(q_k, \dot{q}_k, t) = T(q_k, \dot{q}_k) - U(q_k, t)$

Lagrangeformalismus

Prinzip der extremalen Wirkung:

$$\delta S = \delta \int_{t_0}^{t_1} L(q_k, \dot{q}_k, t) dt = 0$$

$\Rightarrow$ Euler-Lagrange-Gleichung (Bewegungsgleichungen)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

Hamiltonformalismus

- **Hamiltonfunktion** $H = \sum_k p_q \dot{q}_k - L(q_k, \dot{q}_k, t)$
  - **Kanonisch konjugierte Impulse** $p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$
  - $\Rightarrow \quad H = H(p_k, q_k, t)$

Bewegungsgleichungen:

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}, \quad \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

Hamiltonformalismus

- **Hamiltonfunktion** $H = \sum_k p_q \dot{q}_k - L(q_k, \dot{q}_k, t)$
  - **Kanonisch konjugierte Impulse** $p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$
  - $\Rightarrow \quad H = H(p_k, q_k, t)$

Bewegungsgleichungen:

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}, \quad \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

Kanonische Transformationen

Transformation $q, p, H \to Q, P, \mathcal{H}$

- **kanonisch**, falls $\dot{Q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P}$, $\dot{P} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q}$

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L(q, p) dt = \delta \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(Q, P) dt = 0$$

mit $\mathcal{L} = P\dot{Q} - \mathcal{H}(Q, P, t)$

Kanonische Transformationen

Transformation $q, p, H \rightarrow Q, P, \mathcal{H}$

- **kanonisch**, falls $\dot{Q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P}$, $\dot{P} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q}$

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L(q, p) dt = \delta \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(Q, P) dt = 0$$

mit $\mathcal{L} = P\dot{Q} - \mathcal{H}(Q, P, t)$

Es folgt

$$L = \mathcal{L} + \frac{dF}{dt}$$

mit $F = F(q, p, Q, P)$ der **erzeugenden Funktion**

Kanonische Transformationen

Transformation $q, p, H \rightarrow Q, P, \mathcal{H}$

- **kanonisch**, falls $\dot{Q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P}$, $\dot{P} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q}$

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L(q, p) dt = \delta \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(Q, P) dt = 0$$

mit $\mathcal{L} = P\dot{Q} - \mathcal{H}(Q, P, t)$

Es folgt

$$L = \mathcal{L} + \frac{dF}{dt}$$

mit $F = F(q, p, Q, P)$ der **erzeugenden Funktion**

Kanonische Transformationen

Folgende Erzeugende sind besonders einfach:

Erzeugende F	Transformation
$F_1(q, Q, t)$	$p = \frac{\partial F_1}{\partial q},\ P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q},\ \mathcal{H} = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}$
$F_2(q, P, t) - QP$	$p = \frac{\partial F_2}{\partial q},\ Q = \frac{\partial F_2}{\partial P},\ \mathcal{H} = H + \frac{\partial F_2}{\partial t}$
$F_3(p, Q, t) + qp$	$q = -\frac{\partial F_3}{\partial p},\ P = -\frac{\partial F_3}{\partial Q},\ \mathcal{H} = H + \frac{\partial F_3}{\partial t}$
$F_4(p, P, t) + pq - PQ$	$q = -\frac{\partial F_4}{\partial p},\ Q = -\frac{\partial F_4}{\partial P},\ \mathcal{H} = H + \frac{\partial F_4}{\partial t}$

Beispiel: F_2

Unabhängige Variable

Bisher t als unabhängige Variable.
Wegen

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = \delta \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{k=1}^{n} p_k dq_k - H dt \right) = 0$$

definiere $q_0 = t$, $p_0 = -H$

$$\Rightarrow \quad \delta \int_{t_0}^{t_1} \sum_{k=0}^{n} p_k dq_k = 0$$

Unabhängige Variable

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \sum_{k=0}^{n} p_k dq_k = 0$$

Wähle neue unabhängige Koordinate! z.B. $s = q_n$ und $\mathcal{H} = -p_n$

Man erhält $\mathcal{H}$ durch auflösen

$$p_0 = -H(q_1 \dots q_n, p_1 \dots p_n, t = q_0)$$
$$\Leftrightarrow -p_n = \mathcal{H}(q_0 \dots q_{n-1}, p_0 \dots p_{n-1}, q_n = s)$$

Unabhängige Variable

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \sum_{k=0}^{n} p_k dq_k = 0$$

Wähle neue unabhängige Koordinate! z.B. $s = q_n$ und $\mathcal{H} = -p_n$
Man erhält $\mathcal{H}$ durch auflösen

$$p_0 = -H(q_1 \dots q_n, p_1 \dots p_n, t = q_0)$$
$$\Leftrightarrow -p_n = \mathcal{H}(q_0 \dots q_{n-1}, p_0 \dots p_{n-1}, q_n = s)$$

Bewegungsgleichungen:

$$q_i' = \frac{dq_i}{ds} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}; \; p_i' = \frac{dp_i}{ds} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}; \; i = 0 \dots n-1$$

Unabhängige Variable

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \sum_{k=0}^{n} p_k dq_k = 0$$

Wähle neue unabhängige Koordinate! z.B. $s = q_n$ und $\mathcal{H} = -p_n$
Man erhält $\mathcal{H}$ durch auflösen

$$p_0 = -H(q_1 \ldots q_n, p_1 \ldots p_n, t = q_0)$$
$$\Leftrightarrow -p_n = \mathcal{H}(q_0 \ldots q_{n-1}, p_0 \ldots p_{n-1}, q_n = s)$$

Bewegungsgleichungen:

$$q_i' = \frac{dq_i}{ds} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i};\ p_i' = \frac{dp_i}{ds} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i};\ i = 0 \ldots n-1$$

Hamiltonfunktion

Elektromagnetische Potenziale:

$$\mathrm{div}\ \mathbf{B} = 0 \rightarrow \mathbf{B} = \mathrm{rot}\ \mathbf{A}$$

$$\mathrm{rot}\ \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}} = -\mathrm{rot}\ \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \rightarrow \mathbf{E} = -\mathrm{grad}\ \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t\ddot{\mathrm{O}}}$$

Aus Euler-Lagrange-Gleichung für die Lorentzkraft:

$$\mathbf{F} = e(\mathbf{E} + \dot{q} \times \mathbf{B}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial U}{\partial q}$$

$$U = e(\phi - \dot{q} \cdot \mathbf{A})$$

Hamiltonfunktion

Elektromagnetische Potenziale:

$$\mathrm{div}\ \mathbf{B} = 0 \rightarrow \mathbf{B} = \ \mathrm{rot}\ \mathbf{A}$$

$$\mathrm{rot}\ \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}} = -\ \mathrm{rot}\ \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \rightarrow \mathbf{E} = -\ \mathrm{grad}\ \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t \ddot{\mathrm{O}}}$$

Aus Euler-Lagrange-Gleichung für die Lorentzkraft:

$$\mathbf{F} = e(\mathbf{E} + \dot{q} \times \mathbf{B}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial U}{\partial q}$$

$$U = e(\phi - \dot{q} \cdot \mathbf{A})$$

Hamiltonfunktion

Lagrangefunktion:

$$L = T - U = \frac{1}{2} m\dot{q}^2 + e\dot{q} \cdot \mathbf{A} - e\phi$$

Legendretransformation:

$$\underbrace{\mathbf{p}}_{kan.} = \underbrace{m\mathbf{v}}_{mech.} + e\mathbf{A}$$

$$\begin{aligned} H &= \mathbf{p}\dot{q} - L = (m\mathbf{v} + e\mathbf{A}) \cdot \mathbf{v} - \frac{1}{2} m\mathbf{v}^2 - e\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} + e\phi \\ &= \frac{1}{2} m\mathbf{v}^2 + e\phi \end{aligned}$$

Hamiltonfunktion

Lagrangefunktion:

$$L = T - U = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + e\dot{q} \cdot \mathbf{A} - e\phi$$

Legendretransformation:

$$\underbrace{\mathbf{p}}_{kan.} = \underbrace{m\mathbf{v}}_{mech.} + e\mathbf{A}$$

$$H = \mathbf{p}\dot{q} - L = (m\mathbf{v} + e\mathbf{A}) \cdot \mathbf{v} - \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 - e\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} + e\phi$$

$$= \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 + e\phi$$

Relativistische Erweiterung

Ohne Feld:

$$H = \sqrt{\mathbf{p}_{\text{mech}}^2 c^2 + m^2 c^4}, \qquad \mathbf{p}_{\text{mech}} = \gamma m \mathbf{v}$$

Mit Feld:

$$H = \sqrt{(\mathbf{p}_{\text{kan}} - e\mathbf{A})^2 c^2 + m^2 c^4} + e\phi$$

Relativistische Lagrangefunktion:

$$L = -\frac{mc^2}{\gamma} + e\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - e\phi \neq T - U$$

Relativistische Erweiterung

Ohne Feld:

$$H = \sqrt{\mathbf{p}_{\text{mech}}^2 c^2 + m^2 c^4}, \qquad \mathbf{p}_{\text{mech}} = \gamma m \mathbf{v}$$

Mit Feld:

$$H = \sqrt{(\mathbf{p}_{\text{kan}} - e\mathbf{A})^2 c^2 + m^2 c^4} + e\phi$$

Relativistische Lagrangefunktion:

$$L = -\frac{mc^2}{\gamma} + e\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - e\phi \neq T - U$$

Transformation ins mitbewegete System

Neue Koordinaten $(Q_1, Q_2, Q_3) = (x, y, s)$ bzgl. Sollbahn $r_0(s)$:

$$\mathbf{r}(s) = \rho \mathbf{e}_x(s) + x \mathbf{e}_x(s) + y \mathbf{e}_y(s) \qquad \rho = \text{Krümmungsradius}$$

bild malen

Transformation ins mitbewegete System

Neue Koordinaten $(Q_1, Q_2, Q_3) = (x, y, s)$ bzgl. Sollbahn $r_0(s)$:

$$\mathbf{r}(s) = \rho \mathbf{e}_x(s) + x \mathbf{e}_x(s) + y \mathbf{e}_y(s) \qquad \rho = \text{Krümmungsradius}$$

bild malen

Transformation ins mitbewegete System

Frenet-Gleichungen (Torsion $\tau = 0$):

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}_s}{\mathrm{d}s} = -\frac{1}{\rho}\mathbf{e}_x; \quad \frac{\mathrm{d}\mathbf{e}_x}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{\rho}\mathbf{e}_s; \quad \frac{\mathrm{d}\mathbf{e}_y}{\mathrm{d}s} = 0$$

Erzeugende der kanonischen Transformation:

$$F = F_3(\mathbf{p}, \mathbf{Q}) + \mathbf{q} \cdot \mathbf{p}, \qquad F_3 = -\mathbf{r}(s) \cdot \mathbf{p}$$

Neue Impulse (P_x, P_y, P_s):

$$P_x = \mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_x; \qquad P_y = \mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_y;$$

$$P_s = \left(\rho\frac{1}{\rho}\mathbf{e}_s + x\frac{1}{\rho}\mathbf{e}_s\right)\mathbf{p} = \left(1 + \frac{x}{\rho}\right)\mathbf{p}\mathbf{e}_s$$

Transformation ins mitbewegete System

Frenet-Gleichungen (Torsion $\tau = 0$):

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}_s}{\mathrm{d}s} = -\frac{1}{\rho}\mathbf{e}_x; \quad \frac{\mathrm{d}\mathbf{e}_x}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{\rho}\mathbf{e}_s; \quad \frac{\mathrm{d}\mathbf{e}_y}{\mathrm{d}s} = 0$$

Erzeugende der kanonischen Transformation:

$$F = F_3(\mathbf{p}, \mathbf{Q}) + \mathbf{q} \cdot \mathbf{p}, \qquad F_3 = -\mathbf{r}(s) \cdot \mathbf{p}$$

Neue Impulse (P_x, P_y, P_s):

$$P_x = \mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_x; \qquad P_y = \mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_y;$$

$$P_s = \left(\rho\frac{1}{\rho}\mathbf{e}_s + x\frac{1}{\rho}\mathbf{e}_s\right)\mathbf{p} = \left(1 + \frac{x}{\rho}\right)\mathbf{p}\mathbf{e}_s$$

senkrechte Magnetfelder

senkrechte Magnetfelder

- Enthält dynamische Informationen (Wechselwirkungen)

senkrechte Magnetfelder

- Enthält dynamische Informationen (Wechselwirkungen)
- Beschreibt Übergang ähnlich Streuung von Startzustand i zu Endzustand f

senkrechte Magnetfelder

- Enthält dynamische Informationen (Wechselwirkungen)
- Beschreibt Übergang ähnlich Streuung von Startzustand i zu Endzustand f
- Betragsquadrat $|M|^2$ kann als Wahrscheinlichkeit für Reaktion betrachtet werden

senkrechte Magnetfelder

- Enthält dynamische Informationen (Wechselwirkungen)
- Beschreibt Übergang ähnlich Streuung von Startzustand i zu Endzustand f
- Betragsquadrat $|M|^2$ kann als Wahrscheinlichkeit für Reaktion betrachtet werden

Ein erster Ausdruck:

$$M = \langle K l \nu \left| \mathcal{H} \right| D \rangle$$

kleine Winkel zur Sollbahn

kleine Impulsabweichungen zum Sollimpuls

Wirkungs-Winkel-Variablen

Bewegung periodisch in den kanonisch konjugierten Variablen p, q
$\Rightarrow$ **Wirkungs-Variable** $J = \oint pdq = const$

Transformation, so dass J Impulsvariable ist

- Gut für Störungsrechnungen
- Für adiabatische Änderungen eines Parameters λ

$$\frac{d\lambda}{dt} \ll \frac{\lambda}{T_0}, \quad T_0\text{: Periodendauer}$$

bleibt J erhalten

Wirkungs-Winkel-Variablen

Bewegung periodisch in den kanonisch konjugierten Variablen p, q
$\Rightarrow$ **Wirkungs-Variable** $J = \oint pdq = const$

Transformation, so dass J Impulsvariable ist

- Gut für Störungsrechnungen
- Für adiabatische Änderungen eines Parameters λ

$$\frac{d\lambda}{dt} \ll \frac{\lambda}{T_0}, \quad T_0\text{: Periodendauer}$$

bleibt J erhalten

Wirkungs-Winkel-Variablen

Erinnerung Betatron-Bewegung:

$$x(s) = a\sqrt{\beta(s)}\cos(\phi(s) + \phi_0)$$

Trafo $x, p_x \to \phi, J$:

$$F_1(x, \phi, s) = -\frac{x^2}{2\beta(s)}\left[\tan\phi - \frac{1}{2}\beta'(s)\right]$$

Wirkungs-Winkel-Variablen

Erinnerung Betatron-Bewegung:

$$x(s) = a\sqrt{\beta(s)}\cos(\phi(s) + \phi_0)$$

Trafo $x, p_x \to \phi, J$:

$$F_1(x, \phi, s) = -\frac{x^2}{2\beta(s)}\left[\tan\phi - \frac{1}{2}\beta'(s)\right]$$

$$\Rightarrow p_x = x' = \frac{\partial F_1}{\partial x} = -\frac{x}{\beta}\left[\tan\phi - \frac{\beta'}{2}\right]$$

$$J = -\frac{\partial F_1}{\partial \phi} = \frac{x^2}{2\beta\cos^2\psi}$$

Wirkungs-Winkel-Variablen

Erinnerung Betatron-Bewegung:

$$x(s) = a\sqrt{\beta(s)}\cos(\phi(s) + \phi_0)$$

Trafo $x, p_x \rightarrow \phi, J$:

$$F_1(x, \phi, s) = -\frac{x^2}{2\beta(s)}\left[\tan\phi - \frac{1}{2}\beta'(s)\right]$$

$$\Rightarrow p_x = x' = \frac{\partial F_1}{\partial x} = -\frac{x}{\beta}\left[\tan\phi - \frac{\beta'}{2}\right]$$

$$J = -\frac{\partial F_1}{\partial \phi} = \frac{x^2}{2\beta\cos^2\psi}$$

Wirkungs-Winkel-Variablen

Resultat dieser Trafo:

$$J = \frac{1}{2\pi} \oint p_x dx = \frac{a^2}{2} = \frac{\varepsilon}{2}$$

$$H_{WW} = H_0 + \frac{\partial F_1}{\partial s} = \frac{J}{\beta(s)}$$

$$\phi' = \frac{\partial H_{WW}}{\partial J} = \frac{1}{\beta(s)} \Rightarrow \phi(s) = \int_0^s \frac{ds'}{\beta(s')} + \phi_0$$

Beispiel: Gradientenfehler

Erinnerung: Zerlegung des Magnetfeldes

$$\frac{e}{p}B_y = \frac{e}{p}B_{y,0} + \frac{e}{p}\frac{\partial B_y}{\partial x} + \frac{e}{p}\frac{1}{2}\frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} + \cdots = \frac{1}{R} - kx + \frac{1}{2}mx^2 + \ldots$$

Habe nun das Quadrupolfeld einen Fehler Δk:

$$H_{WW}(\phi, J, s) = \frac{J}{\beta(s)} - \frac{1}{2}\Delta k(s)x^2$$

Beispiel: Gradientenfehler

Erinnerung: Zerlegung des Magnetfeldes

$$\frac{e}{p}B_y = \frac{e}{p}B_{y,0} + \frac{e}{p}\frac{\partial B_y}{\partial x} + \frac{e}{p}\frac{1}{2}\frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} + \cdots = \frac{1}{R} - kx + \frac{1}{2}mx^2 + \ldots$$

Habe nun das Quadrupolfeld einen Fehler Δk:

$$H_{WW}(\phi, J, s) = \frac{J}{\beta(s)} - \frac{1}{2}\Delta k(s)x^2$$

Beispiel: Gradientenfehler

$$H_{WW}(\phi, J, s) = \frac{J}{\beta(s)} - \frac{1}{2}\Delta k(s)x^2$$

Anzahl der Betatronschwingungen pro Umlauf:

$$Q = \frac{1}{2\pi}\oint d\phi = \frac{1}{2\pi}\oint \frac{d\phi}{ds}ds$$

mit $\frac{d\phi}{ds} = \frac{\partial H_{WW}}{\partial J} = \frac{1}{\beta} - \frac{\beta}{2}\Delta k(1 + \cos 2\phi)$

$$Q = \underbrace{\frac{1}{2}\oint \frac{ds}{\beta(s)}}_{Q_0} - \frac{1}{4}\oint \beta(s)\Delta k ds - \underbrace{\frac{1}{4\pi}\oint \beta(s)\Delta k(s)\cos 2\phi ds}_{=0,\ \text{falls}\ Q_0 \neq \frac{n}{2}}$$

Beispiel: Gradientenfehler

$$H_{WW}(\phi, J, s) = \frac{J}{\beta(s)} - \frac{1}{2}\Delta k(s) x^2$$

Anzahl der Betatronschwingungen pro Umlauf:

$$Q = \frac{1}{2\pi}\oint d\phi = \frac{1}{2\pi}\oint \frac{d\phi}{ds} ds$$

mit $\frac{d\phi}{ds} = \frac{\partial H_{WW}}{\partial J} = \frac{1}{\beta} - \frac{\beta}{2}\Delta k(1 + \cos 2\phi)$

$$Q = \underbrace{\frac{1}{2}\oint \frac{ds}{\beta(s)}}_{Q_0} - \frac{1}{4}\oint \beta(s)\Delta k ds - \underbrace{\frac{1}{4\pi}\oint \beta(s)\Delta k(s)\cos 2\phi ds}_{=0,\ \text{falls}\ Q_0 \neq \frac{n}{2}}$$

Beispiel: Sextupol

- Sextupolterm Magnetfeld: $\frac{e}{p} B_y = \frac{1}{2} m x^2$
- Potential: $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$

$$H_{WW}(\phi, J, s) = \frac{J}{\beta(s)} - \frac{e}{p} A = \frac{J}{\beta(s)} + \frac{m}{6} x^3$$
$$= \frac{J}{\beta(s)} + \frac{m}{24} (2J\beta)^{3/2} \left(\cos 3\phi + 3 \cos \phi\right)$$

Beispiel: Sextupol

- Sextupolterm Magnetfeld: $\frac{e}{p}B_y = \frac{1}{2}mx^2$
- Potential: $\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}$

$$\begin{aligned} H_{WW}(\phi, J, s) &= \frac{J}{\beta(s)} - \frac{e}{p}A = \frac{J}{\beta(s)} + \frac{m}{6}x^3 \\ &= \frac{J}{\beta(s)} + \frac{m}{24}(2J\beta)^{3/2}\left(\cos 3\phi + 3\cos\phi\right) \end{aligned}$$

Analoge Rechnung

$$Q = \frac{1}{2}\int \frac{\partial H_{WW}}{ds} ds = Q_0$$

für $Q_0 \neq \pm n, \pm\frac{n}{3}$.

Beispiel: Sextupol

- Sextupolterm Magnetfeld: $\frac{e}{p} B_y = \frac{1}{2} m x^2$
- Potential: $\vec{B} = \text{rot}\, \vec{A}$

$$H_{WW}(\phi, J, s) = \frac{J}{\beta(s)} - \frac{e}{p} A = \frac{J}{\beta(s)} + \frac{m}{6} x^3$$
$$= \frac{J}{\beta(s)} + \frac{m}{24} (2J\beta)^{3/2} (\cos 3\phi + 3 \cos \phi)$$

Analoge Rechnung

$$Q = \frac{1}{2} \int \frac{\partial H_{WW}}{ds} ds = Q_0$$

für $Q_0 \neq \pm n, \pm \frac{n}{3}$.

- kein Tune Shift durch Sextupol

Beispiel: Sextupol

- Sextupolterm Magnetfeld: $\frac{e}{p} B_y = \frac{1}{2} m x^2$
- Potential: $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$

$$\begin{aligned} H_{WW}(\phi, J, s) &= \frac{J}{\beta(s)} - \frac{e}{p} A = \frac{J}{\beta(s)} + \frac{m}{6} x^3 \\ &= \frac{J}{\beta(s)} + \frac{m}{24} (2J\beta)^{3/2} \left(\cos 3\phi + 3\cos\phi\right) \end{aligned}$$

Analoge Rechnung

$$Q = \frac{1}{2} \int \frac{\partial H_{WW}}{ds} ds = Q_0$$

für $Q_0 \neq \pm n, \pm \frac{n}{3}$.

- kein Tune Shift durch Sextupol

Sextupol-Resonanzen

- Was, wenn doch $Q = \pm n, \pm\frac{n}{3}$ gilt?
- $\Rightarrow$ Wechsel in Koordinaten, in denen der ungestörte Hamiltonian $H_{WW} = \frac{J}{\beta(s)}$ nicht mehr von s abhängt!

$$\tilde{\phi} = \phi - \int_0^s \frac{ds'}{\beta(s')} + \frac{Q}{R}s = \phi_0 + \frac{Q}{R}s$$

mit R: mittlere Radius des Rings.

Sextupol-Resonanzen

- Was, wenn doch $Q = \pm n, \pm \frac{n}{3}$ gilt?
- $\Rightarrow$ Wechsel in Koordinaten, in denen der ungestörte Hamiltonian $H_{WW} = \frac{J}{\beta(s)}$ nicht mehr von s abhängt!

$$\tilde{\phi} = \phi - \int_0^s \frac{ds'}{\beta(s')} + \frac{Q}{R}s = \phi_0 + \frac{Q}{R}s$$

mit R: mittlere Radius des Rings.

$$\Rightarrow \tilde{J} = J \quad \text{und} \quad \tilde{H}_{WW}(\tilde{\phi}, J, s) = \frac{Q}{R}J$$

Sextupol-Resonanzen

- Was, wenn doch $Q = \pm n, \pm \frac{n}{3}$ gilt?
- $\Rightarrow$ Wechsel in Koordinaten, in denen der ungestörte Hamiltonian $H_{WW} = \frac{J}{\beta(s)}$ nicht mehr von s abhängt!

$$\tilde{\phi} = \phi - \int_0^s \frac{ds'}{\beta(s')} + \frac{Q}{R}s = \phi_0 + \frac{Q}{R}s$$

mit R: mittlere Radius des Rings.

$$\Rightarrow \tilde{J} = J \quad \text{und} \quad \tilde{H}_{WW}(\tilde{\phi}, J, s) = \frac{Q}{R}J$$

Sextupol-Resonanzen

Gleichzeitig Zerlegung Betatron-Phase in umlaufperiodischen und nicht umlaufperiodischen Teil:

$$\phi = \tilde{\phi} + \int_0^s \frac{ds'}{\beta(s')} - \frac{Q}{R}s = \tilde{\phi} + \tau(s)$$

$$\tilde{H}_{WW} = \frac{Q}{R}J + \frac{m}{24}(2J\beta(s))^{3/2}\left[3\cos\tilde{\phi}\cos\tau - 3\sin\tilde{\phi}\sin\tau \right. \\ \left. + \cos 3\tilde{\phi}\cos 3\tau - \sin 3\tilde{\phi}\sin 3\tau\right]$$

Sextupol-Resonanzen

Gleichzeitig Zerlegung Betatron-Phase in umlaufperiodischen und nicht umlaufperiodischen Teil:

$$\phi = \tilde{\phi} + \int_0^s \frac{ds'}{\beta(s')} - \frac{Q}{R} s = \tilde{\phi} + \tau(s)$$

$$\tilde{H}_{WW} = \frac{Q}{R} J + \frac{m}{24} (2J\beta(s))^{3/2} \Big[3\cos\tilde{\phi}\cos\tau - 3\sin\tilde{\phi}\sin\tau \\ + \cos 3\tilde{\phi}\cos 3\tau - \sin 3\tilde{\phi}\sin 3\tau \Big]$$

Sextupol-Resonanzen

Fourierentwicklung in Azimuthalwinkel $\theta = \frac{s}{R}$

- Resonanz, wenn Teilchenbewegung und Störstellen gemeinsame Fourierkomponenten haben!

$$\tilde{H}_{WW}(\tilde{\phi}, J, s) = \frac{Q}{R} J + \frac{(2J)^{3/2}}{24} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Big[3A_n \cos(n\theta + \tilde{\phi}) + 3B_n \sin(n\theta - \tilde{\phi}) + C_n \cos(n\theta + 3\tilde{\phi}) + D_n \sin(n\theta - 3\tilde{\phi}) \Big]$$

Sextupol-Resonanzen

Fourierentwicklung in Azimuthalwinkel $\theta = \frac{s}{R}$

- Resonanz, wenn Teilchenbewegung und Störstellen gemeinsame Fourierkomponenten haben!

$$\tilde{H}_{WW}(\tilde{\phi}, J, s) = \frac{Q}{R} J + \frac{(2J)^{3/2}}{24} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Big[3A_n \cos(n\theta + \tilde{\phi}) + 3B_n \sin(n\theta - \tilde{\phi}) + C_n \cos(n\theta + 3\tilde{\phi}) + D_n \sin(n\theta - 3\tilde{\phi}) \Big]$$

$$A_n = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi R} \beta^{3/2} m \cos(\tau - n\theta) ds, \quad B_n = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi R} \beta^{3/2} m \sin(\tau + n\theta) ds$$

$$C_n = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi R} \beta^{3/2} m \cos(3\tau - n\theta) ds, \quad D_n = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi R} \beta^{3/2} m \sin(3\tau + n\theta) ds$$

Sextupol-Resonanzen

Fourierentwicklung in Azimuthalwinkel $\theta = \frac{s}{R}$

- Resonanz, wenn Teilchenbewegung und Störstellen gemeinsame Fourierkomponenten haben!

$$\tilde{H}_{WW}(\tilde{\phi}, J, s) = \frac{Q}{R}J + \frac{(2J)^{3/2}}{24} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Big[3A_n \cos(n\theta + \tilde{\phi}) + 3B_n \sin(n\theta - \tilde{\phi}) + C_n \cos(n\theta + 3\tilde{\phi}) + D_n \sin(n\theta - 3\tilde{\phi}) \Big]$$

$$A_n = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi R} \beta^{3/2} m \cos(\tau - n\theta) ds, \quad B_n = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi R} \beta^{3/2} m \sin(\tau + n\theta) ds$$

$$C_n = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi R} \beta^{3/2} m \cos(3\tau - n\theta) ds, \quad D_n = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi R} \beta^{3/2} m \sin(3\tau + n\theta) ds$$

Sextupol-Resonanzen

$$\tilde{\phi} = \phi_0 + Q\theta$$

Ganzzahlige Resonanzen

$$n\theta \pm \tilde{\phi} = n\theta \pm Q\theta \pm \phi_0 \quad \Leftrightarrow \quad Q = \pm n$$

Dipolfehler!

Drittelzahlige Resonanzen

$$n\theta \pm 3\tilde{\phi} = (n \pm 3Q)\theta \pm 3\tilde{\phi} \quad \Leftrightarrow \quad Q = \pm\frac{n}{3}$$

Sextupol-Resonanzen

Bestimmung C_n und D_n

- $Q = \pm\frac{n}{3}$
- Resubstitution von $\tau = \int_0^s \frac{ds'}{\beta(s')} - Q\theta = \phi(s) - Q\theta$

$$\Rightarrow \quad C = \frac{1}{2\pi R}\int_0^{2\pi R} \beta^{3/2} m \cos 3\phi(s) ds$$

$$D = \frac{1}{2\pi R}\int_0^{2\pi R} \beta^{3/2} m \sin 3\phi(s) ds$$

Sextupol-Resonanzen

Bestimmung C_n und D_n

- $Q = \pm\frac{n}{3}$
- Resubstitution von $\tau = \int\limits_0^s \frac{ds'}{\beta(s')} - Q\theta = \phi(s) - Q\theta$

$$\Rightarrow \quad C = \frac{1}{2\pi R} \int\limits_0^{2\pi R} \beta^{3/2} m \cos 3\phi(s) ds$$

$$D = \frac{1}{2\pi R} \int\limits_0^{2\pi R} \beta^{3/2} m \sin 3\phi(s) ds$$

Sextupol-Resonanzen

$$C = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi R} \beta^{3/2} m \cos 3\phi(s) ds, \quad D = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi R} \beta^{3/2} m \sin 3\phi(s) ds$$

- Tastet $m(s)$ mit $cos 3\phi$ und $\sin 3\phi$ ab (dreifachen Betatronphase)
- Gewichtet mit $\beta^{3/2}(s)$
- $\Rightarrow$ C und D für alle n.

Große Resonanzen für gleichartige Sextupole im Abstand 120°.

Sextupol-Resonanzen

$$C = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi R} \beta^{3/2} m \cos 3\phi(s) ds, \quad D = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi R} \beta^{3/2} m \sin 3\phi(s) ds$$

- Tastet $m(s)$ mit $cos 3\phi$ und $\sin 3\phi$ ab (dreifachen Betatronphase)
- Gewichtet mit $\beta^{3/2}(s)$
- $\Rightarrow$ C und D für alle n.

Große Resonanzen für gleichartige Sextupole im Abstand 120°.

Drittelresonanz verschwindet für Sextupole gleicher Stärke und entgegengesetzter Polarität in Abstand von 60°.

Sextupol-Resonanzen

$$C = \frac{1}{2\pi R}\int\limits_0^{2\pi R} \beta^{3/2} m \cos 3\phi(s) ds, \quad D = \frac{1}{2\pi R}\int\limits_0^{2\pi R} \beta^{3/2} m \sin 3\phi(s) ds$$

- Tastet $m(s)$ mit $cos3\phi$ und $\sin 3\phi$ ab (dreifachen Betatronphase)
- Gewichtet mit $\beta^{3/2}(s)$
- $\Rightarrow$ C und D für alle n.

Große Resonanzen für gleichartige Sextupole im Abstand 120°. Drittelresonanz verschwindet für Sextupole gleicher Stärke und entgegengesetzter Polarität in Abstand von 60°.

Verhalten in Resonanznähe

Fixpunkte

Oktupol

Kopplung

Gegenwart vieler Nichtlinearitäten