Hamilton-Formalismus in der Beschleunigerphysik

Sonja Bartkowski, Dimitrios Skodras

Technische Universität Dortmund

11.06.2015

Gliederung

Hamiltonfunktion

Elektromagnetische Potenziale:

$$\mathrm{div}\ \mathbf{B} = 0 \rightarrow \mathbf{B} = \ \mathrm{rot}\ \mathbf{A}$$

$$\mathrm{rot}\ \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}} = -\ \mathrm{rot}\ \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \rightarrow \mathbf{E} = -\ \mathrm{grad}\ \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

Aus Euler-Lagrange-Gleichung für die Lorentzkraft:

$$\mathbf{F} = e(\mathbf{E} + \dot{q} \times \mathbf{B}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial U}{\partial q}$$

$$U = e(\phi - \dot{q} \cdot \mathbf{A})$$

Hamiltonfunktion

Elektromagnetische Potenziale:

$$\mathrm{div}\ \mathbf{B} = 0 \rightarrow \mathbf{B} = \ \mathrm{rot}\ \mathbf{A}$$

$$\mathrm{rot}\ \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}} = -\ \mathrm{rot}\ \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \rightarrow \mathbf{E} = -\ \mathrm{grad}\ \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

Aus Euler-Lagrange-Gleichung für die Lorentzkraft:

$$\mathbf{F} = e(\mathbf{E} + \dot{q} \times \mathbf{B}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial U}{\partial q}$$

$$U = e(\phi - \dot{q} \cdot \mathbf{A})$$

Hamiltonfunktion

Lagrangefunktion:

$$L = T - U = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + e\dot{q} \cdot \mathbf{A} - e\phi$$

Legendretransformation:

$$\underbrace{\mathbf{p}}_{kan.} = \underbrace{m\mathbf{v}}_{mech.} + e\mathbf{A}$$

$$H = \mathbf{p}\dot{q} - L = (m\mathbf{v} + e\mathbf{A}) \cdot \mathbf{v} - \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 - e\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} + e\phi$$

$$= \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 + e\phi$$

Hamiltonfunktion

Lagrangefunktion:

$$L = T - U = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 + e\dot{q} \cdot \mathbf{A} - e\phi$$

Legendretransformation:

$$\underbrace{\mathbf{p}}_{kan.} = \underbrace{m\mathbf{v}}_{mech.} + e\mathbf{A}$$

$$\begin{aligned} H &= \mathbf{p}\dot{q} - L = (m\mathbf{v} + e\mathbf{A}) \cdot \mathbf{v} - \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 - e\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} + e\phi \\ &= \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 + e\phi \end{aligned}$$

Relativistische Erweiterung

Ohne Feld:

$$H = \sqrt{\mathbf{p}_{\text{mech}}^2 c^2 + m^2 c^4}, \qquad \mathbf{p}_{\text{mech}} = \gamma m \mathbf{v}$$

Mit Feld:

$$H = \sqrt{(\mathbf{p}_{\text{kan}} - e\mathbf{A})^2 c^2 + m^2 c^4} + e\phi$$

Relativistische Lagrangefunktion:

$$L = -\frac{mc^2}{\gamma} + e\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - e\phi \neq T - U$$

Relativistische Erweiterung

Ohne Feld:

$$H = \sqrt{\mathbf{p}_{\mathrm{mech}}^2 c^2 + m^2 c^4}, \qquad \mathbf{p}_{\mathrm{mech}} = \gamma m \mathbf{v}$$

Mit Feld:

$$H = \sqrt{(\mathbf{p}_{\mathrm{kan}} - e\mathbf{A})^2 c^2 + m^2 c^4} + e\phi$$

Relativistische Lagrangefunktion:

$$L = -\frac{mc^2}{\gamma} + e\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - e\phi \neq T - U$$

Transformation ins mitbewegete System

Neue Koordinaten $(Q_1, Q_2, Q_3) = (x, y, s)$ bzgl. Sollbahn $r_0(s)$:

$$\mathbf{r}(s) = \rho \mathbf{e}_x(s) + x \mathbf{e}_x(s) + y \mathbf{e}_y(s) \qquad \rho = \text{Krümmungsradius}$$

bild malen

Transformation ins mitbewegete System

Neue Koordinaten $(Q_1, Q_2, Q_3) = (x, y, s)$ bzgl. Sollbahn $r_0(s)$:

$$\mathbf{r}(s) = \rho \mathbf{e}_x(s) + x\mathbf{e}_x(s) + y\mathbf{e}_y(s) \qquad \rho = \text{Krümmungsradius}$$

bild malen

Transformation ins mitbewegete System

Frenet-Gleichungen (Torsion $\tau = 0$):

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}_s}{\mathrm{d}s} = -\frac{1}{\rho}\mathbf{e}_x; \quad \frac{\mathrm{d}\mathbf{e}_x}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{\rho}\mathbf{e}_s; \quad \frac{\mathrm{d}\mathbf{e}_y}{\mathrm{d}s} = 0$$

Erzeugende der kanonischen Transformation:

$$F = F_3(\mathbf{p}, \mathbf{Q}) + \mathbf{q} \cdot \mathbf{p}, \qquad F_3 = -\mathbf{r}(s) \cdot \mathbf{p}$$

Neue Impulse (P_x, P_y, P_s):

$$P_x = \mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_x; \qquad P_y = \mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_y;$$
$$P_s = \left(\rho\frac{1}{\rho}\mathbf{e}_s + x\frac{1}{\rho}\mathbf{e}_s\right)\mathbf{p} = \left(1 + \frac{x}{\rho}\right)\mathbf{p}\mathbf{e}_s$$

Transformation ins mitbewegete System

Frenet-Gleichungen (Torsion $\tau = 0$):

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}_s}{\mathrm{d}s} = -\frac{1}{\rho}\mathbf{e}_x; \quad \frac{\mathrm{d}\mathbf{e}_x}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{\rho}\mathbf{e}_s; \quad \frac{\mathrm{d}\mathbf{e}_y}{\mathrm{d}s} = 0$$

Erzeugende der kanonischen Transformation:

$$F = F_3(\mathbf{p}, \mathbf{Q}) + \mathbf{q} \cdot \mathbf{p}, \qquad F_3 = -\mathbf{r}(s) \cdot \mathbf{p}$$

Neue Impulse (P_x, P_y, P_s):

$$P_x = \mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_x; \qquad P_y = \mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_y;$$
$$P_s = \left(\rho\frac{1}{\rho}\mathbf{e}_s + x\frac{1}{\rho}\mathbf{e}_s\right)\mathbf{p} = \left(1 + \frac{x}{\rho}\right)\mathbf{p}\mathbf{e}_s$$

Hamiltonfunktion

Neue Hamiltonfunktion H':

$$H'(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) = c\sqrt{(P_x - e\tilde{A}_x)^2 + (P_y - e\tilde{A}_y)^2 + \frac{(P_s - e\tilde{A}_s)^2}{\left(1 + \frac{x}{\rho}\right)} + m^2c^2} + e\phi(\mathbf{Q})$$

Nun mit s als unabhängige Variable:

$$H'_s = -P_s = -e\tilde{A}_s - \left(1 + \frac{x}{\rho}\right) \times \sqrt{\frac{(H' - e\phi)^2}{c^2} - (P_x - e\tilde{A}_x)^2 - (P_y - e\tilde{A}_y)^2 - m^2c^2}$$

Hamiltonfunktion

Neue Hamiltonfunktion H':

$$H'(\mathbf{Q},\mathbf{P},t) = c\sqrt{(P_x - e\tilde{A}_x)^2 + (P_y - e\tilde{A}_y)^2 + \frac{(P_s - e\tilde{A}_s)^2}{\left(1+\frac{x}{\rho}\right)} + m^2c^2} + e\phi(\mathbf{Q})$$

Nun mit s als unabhängige Variable:

$$H'_s = -P_s = -e\tilde{A}_s - \left(1+\frac{x}{\rho}\right) \times \sqrt{\frac{(H' - e\phi)^2}{c^2} - (P_x - e\tilde{A}_x)^2 - (P_y - e\tilde{A}_y)^2 - m^2c^2}$$

senkrechte Magnetfelder

senkrechte Magnetfelder

- Enthält dynamische Informationen (Wechselwirkungen)

senkrechte Magnetfelder

- Enthält dynamische Informationen (Wechselwirkungen)
- Beschreibt Übergang ähnlich Streuung von Startzustand i zu Endzustand f

senkrechte Magnetfelder

- Enthält dynamische Informationen (Wechselwirkungen)
- Beschreibt Übergang ähnlich Streuung von Startzustand i zu Endzustand f
- Betragsquadrat $|M|^2$ kann als Wahrscheinlichkeit für Reaktion betrachtet werden

senkrechte Magnetfelder

- Enthält dynamische Informationen (Wechselwirkungen)
- Beschreibt Übergang ähnlich Streuung von Startzustand i zu Endzustand f
- Betragsquadrat $|M|^2$ kann als Wahrscheinlichkeit für Reaktion betrachtet werden

Ein erster Ausdruck:

$$M = \langle KI\nu \left|\mathcal{H}\right| D\rangle$$

kleine Winkel zur Sollbahn

kleine Impulsabweichungen zum Sollimpuls

Bedeutende Größen

Beispiel: Gradientenfehler

Beispiel: Sextupol

Beispiel: Sextupol

Verhalten in Resonanznähe

Fixpunkte

Oktupol

Kopplung

Gegenwart vieler Nichtlinearitäten