

# Hamilton-Formalismus in der Beschleunigerphysik

Sonja Bartkowski, Dimitrios Skodras

Technische Universität Dortmund

11.06.2015

- 1 Grundlagen
  - Lagrangeformalismus
  - Hamiltonformalismus
- 2 Geladene Teilchen im EM-Feld
  - Relativistik
  - Transformation ins mitbewegte System
  - Beispiele
- 3 Transformation auf Wirkungs-Winkel-Variablen
  - Gradientenfehler
  - Sextupole
- 4 Resonanzen
  - Sextupol
- 5 Ausblick

- **Generalisierte Koordinaten**  $q_k(t)$ ,  $k = 1 \dots f$ 
  - $f$ : Anzahl Freiheitsgrade
  - Beschreiben System vollständig
- **Kinetische Energie**  $T(q_k, \dot{q}_k) = \sum_i^N \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2$
- **Potentielle Energie**  $U(q_k, t) = - \sum_{i=1}^N \int \vec{F}_i d\vec{r}_i$
- **Lagrange-Funktion**  $L(q_k, \dot{q}_k, t) = T(q_k, \dot{q}_k) - U(q_k, t)$

Prinzip der extremalen Wirkung:

$$\delta S = \delta \int_{t_0}^{t_1} L(q_k, \dot{q}_k, t) dt = 0$$

$\Rightarrow$  Euler-Lagrange-Gleichung (Bewegungsgleichungen)

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$$

- **Hamiltonfunktion**  $H = \sum_k p_k \dot{q}_k - L(q_k, \dot{q}_k, t)$ 
  - **Kanonisch konjugierte Impulse**  $p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$
  - $\Rightarrow H = H(p_k, q_k, t)$

Bewegungsgleichungen:

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}, \quad \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

- **Hamiltonfunktion**  $H = \sum_k p_k \dot{q}_k - L(q_k, \dot{q}_k, t)$ 
  - **Kanonisch konjugierte Impulse**  $p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$
  - $\Rightarrow H = H(p_k, q_k, t)$

Bewegungsgleichungen:

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}, \quad \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

Transformation  $q, p, H \rightarrow Q, P, \mathcal{H}$

- **kanonisch**, falls  $\dot{Q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P}$ ,  $\dot{P} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q}$

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L(q, p) dt = \delta \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(Q, P) dt = 0$$

mit  $\mathcal{L} = P\dot{Q} - \mathcal{H}(Q, P, t)$

Transformation  $q, p, H \rightarrow Q, P, \mathcal{H}$

- **kanonisch**, falls  $\dot{Q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P}$ ,  $\dot{P} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q}$

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L(q, p) dt = \delta \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(Q, P) dt = 0$$

mit  $\mathcal{L} = P\dot{Q} - \mathcal{H}(Q, P, t)$

Es folgt

$$L = \mathcal{L} + \frac{dF}{dt}$$

mit  $F = F(q, p, Q, P)$  der **erzeugenden Funktion**



Transformation  $q, p, H \rightarrow Q, P, \mathcal{H}$

- **kanonisch**, falls  $\dot{Q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P}$ ,  $\dot{P} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial Q}$

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L(q, p) dt = \delta \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(Q, P) dt = 0$$

mit  $\mathcal{L} = P\dot{Q} - \mathcal{H}(Q, P, t)$

Es folgt

$$L = \mathcal{L} + \frac{dF}{dt}$$

mit  $F = F(q, p, Q, P)$  der **erzeugenden Funktion**

Folgende Erzeugende sind besonders einfach:

Erzeugende $F$	Transformation
$F_1(q, Q, t)$	$p = \frac{\partial F_1}{\partial q}, P = -\frac{\partial F_1}{\partial Q}, \mathcal{H} = H + \frac{\partial F_1}{\partial t}$
$F_2(q, P, t) - QP$	$p = \frac{\partial F_2}{\partial q}, Q = \frac{\partial F_2}{\partial P}, \mathcal{H} = H - \frac{\partial F_2}{\partial t}$
$F_3(p, Q, t) + qp$	$q = -\frac{\partial F_3}{\partial p}, P = -\frac{\partial F_3}{\partial Q}, \mathcal{H} = H + \frac{\partial F_3}{\partial t}$
$F_4(p, P, t) + pq - PQ$	$q = -\frac{\partial F_4}{\partial p}, Q = -\frac{\partial F_4}{\partial P}, \mathcal{H} = H + \frac{\partial F_4}{\partial t}$

Beispiel:  $F_2$

Bisher  $t$  als unabhängige Variable.

Wegen

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = \delta \int_{t_0}^{t_1} \left( \sum_{k=1}^n p_k dq_k - H dt \right) = 0$$

definiere  $q_0 = t$ ,  $p_0 = -H$

$$\Rightarrow \delta \int_{t_0}^{t_1} \sum_{k=0}^n p_k dq_k = 0$$

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \sum_{k=0}^n p_k dq_k = 0$$

Wähle neue unabhängige Koordinate! z.B.  $s = q_n$  und  $\mathcal{H} = -p_n$

Man erhält  $\mathcal{H}$  durch auflösen

$$p_0 = -H(q_1 \dots q_n, p_1 \dots p_n, t = q_0)$$

$$\Leftrightarrow -p_n = \mathcal{H}(q_0 \dots q_{n-1}, p_0 \dots p_{n-1}, q_n = s)$$

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \sum_{k=0}^n p_k dq_k = 0$$

Wähle neue unabhängige Koordinate! z.B.  $s = q_n$  und  $\mathcal{H} = -p_n$   
Man erhält  $\mathcal{H}$  durch auflösen

$$\begin{aligned} p_0 &= -H(q_1 \dots q_n, p_1 \dots p_n, t = q_0) \\ \Leftrightarrow -p_n &= \mathcal{H}(q_0 \dots q_{n-1}, p_0 \dots p_{n-1}, q_n = s) \end{aligned}$$

Bewegungsgleichungen:

$$q'_i = \frac{dq_i}{ds} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}; \quad p'_i = \frac{dp_i}{ds} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}; \quad i = 0 \dots n-1$$

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \sum_{k=0}^n p_k dq_k = 0$$

Wähle neue unabhängige Koordinate! z.B.  $s = q_n$  und  $\mathcal{H} = -p_n$   
Man erhält  $\mathcal{H}$  durch auflösen

$$\begin{aligned} p_0 &= -H(q_1 \dots q_n, p_1 \dots p_n, t = q_0) \\ \Leftrightarrow -p_n &= \mathcal{H}(q_0 \dots q_{n-1}, p_0 \dots p_{n-1}, q_n = s) \end{aligned}$$

Bewegungsgleichungen:

$$q'_i = \frac{dq_i}{ds} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}; \quad p'_i = \frac{dp_i}{ds} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}; \quad i = 0 \dots n-1$$

Elektromagnetische Potenziale:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \rightarrow \mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}} = -\operatorname{rot} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \rightarrow \mathbf{E} = -\operatorname{grad} \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

Aus Euler-Lagrange-Gleichung für die Lorentzkraft:

$$\mathbf{F} = e(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{q}} \times \mathbf{B}) = \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}}$$

$$U = e(\phi - \dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{A})$$

Elektromagnetische Potenziale:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \rightarrow \mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}} = -\operatorname{rot} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \rightarrow \mathbf{E} = -\operatorname{grad} \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

Aus Euler-Lagrange-Gleichung für die Lorentzkraft:

$$\mathbf{F} = e(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{q}} \times \mathbf{B}) = \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}}$$

$$U = e(\phi - \dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{A})$$



# Hamiltonfunktion

Lagrangefunktion:

$$L = T - U = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{q}}^2 + e\dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{A} - e\phi$$

Legendretransformation:

$$\underbrace{\mathbf{p}}_{\text{kan.}} = \underbrace{m\mathbf{v}}_{\text{mech.}} + e\mathbf{A}$$

$$\begin{aligned} H = \mathbf{p}\dot{\mathbf{q}} - L &= (m\mathbf{v} + e\mathbf{A}) \cdot \mathbf{v} - \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 - e\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} + e\phi \\ &= \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 + e\phi \end{aligned}$$

Lagrangefunktion:

$$L = T - U = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{q}}^2 + e\dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{A} - e\phi$$

Legendretransformation:

$$\underbrace{\mathbf{p}}_{\text{kan.}} = \underbrace{m\mathbf{v}}_{\text{mech.}} + e\mathbf{A}$$

$$\begin{aligned} H = \mathbf{p}\dot{\mathbf{q}} - L &= (m\mathbf{v} + e\mathbf{A}) \cdot \mathbf{v} - \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 - e\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} + e\phi \\ &= \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 + e\phi \end{aligned}$$

# Relativistische Erweiterung

Ohne Feld:

$$H = \sqrt{\mathbf{p}_{\text{mech}}^2 c^2 + m^2 c^4}, \quad \mathbf{p}_{\text{mech}} = \gamma m \mathbf{v}$$

Mit Feld:

$$H = \sqrt{(\mathbf{p}_{\text{kan}} - e\mathbf{A})^2 c^2 + m^2 c^4} + e\phi$$

Relativistische Lagrangefunktion:

$$L = -\frac{mc^2}{\gamma} + e\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - e\phi \neq T - U$$

Ohne Feld:

$$H = \sqrt{\mathbf{p}_{\text{mech}}^2 c^2 + m^2 c^4}, \quad \mathbf{p}_{\text{mech}} = \gamma m \mathbf{v}$$

Mit Feld:

$$H = \sqrt{(\mathbf{p}_{\text{kan}} - e\mathbf{A})^2 c^2 + m^2 c^4} + e\phi$$

Relativistische Lagrangefunktion:

$$L = -\frac{mc^2}{\gamma} + e\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - e\phi \neq T - U$$

# Transformation ins mitbewegete System

Neue Koordinaten  $(Q_1, Q_2, Q_3) = (x, y, s)$  bzgl. Sollbahn  $r_0(s)$ :

$$\mathbf{r}(s) = \rho \mathbf{e}_x(s) + x \mathbf{e}_x(s) + y \mathbf{e}_y(s) \quad \rho = \text{Krümmungsradius}$$

bild malen

Neue Koordinaten  $(Q_1, Q_2, Q_3) = (x, y, s)$  bzgl. Sollbahn  $r_0(s)$ :

$$\mathbf{r}(s) = \rho \mathbf{e}_x(s) + x \mathbf{e}_x(s) + y \mathbf{e}_y(s) \quad \rho = \text{Krümmungsradius}$$

bild malen

# Transformation ins mitbewegete System

Frenet-Gleichungen (Torsion  $\tau = 0$ ):

$$\frac{d\mathbf{e}_s}{ds} = -\frac{1}{\rho}\mathbf{e}_x; \quad \frac{d\mathbf{e}_x}{ds} = \frac{1}{\rho}\mathbf{e}_s; \quad \frac{d\mathbf{e}_y}{ds} = 0$$

Erzeugende der kanonischen Transformation:

$$F = F_3(\mathbf{p}, \mathbf{Q}) + \mathbf{q} \cdot \mathbf{p}, \quad F_3 = -\mathbf{r}(s) \cdot \mathbf{p}$$

Neue Impulse ( $P_x, P_y, P_s$ ):

$$\begin{aligned} P_x &= \mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_x; & P_y &= \mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_y; \\ P_s &= \left( \rho \frac{1}{\rho} \mathbf{e}_s + x \frac{1}{\rho} \mathbf{e}_s \right) \mathbf{p} = \left( 1 + \frac{x}{\rho} \right) \mathbf{p} \mathbf{e}_s \end{aligned}$$

Frenet-Gleichungen (Torsion  $\tau = 0$ ):

$$\frac{d\mathbf{e}_s}{ds} = -\frac{1}{\rho}\mathbf{e}_x; \quad \frac{d\mathbf{e}_x}{ds} = \frac{1}{\rho}\mathbf{e}_s; \quad \frac{d\mathbf{e}_y}{ds} = 0$$

Erzeugende der kanonischen Transformation:

$$F = F_3(\mathbf{p}, \mathbf{Q}) + \mathbf{q} \cdot \mathbf{p}, \quad F_3 = -\mathbf{r}(s) \cdot \mathbf{p}$$

Neue Impulse ( $P_x, P_y, P_s$ ):

$$\begin{aligned} P_x &= \mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_x; & P_y &= \mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_y; \\ P_s &= \left( \rho \frac{1}{\rho} \mathbf{e}_s + x \frac{1}{\rho} \mathbf{e}_s \right) \mathbf{p} = \left( 1 + \frac{x}{\rho} \right) \mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_s \end{aligned}$$



Neue Hamiltonfunktion  $H'$ :

$$H'(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) = c \sqrt{(P_x - e\tilde{A}_x)^2 + (P_y - e\tilde{A}_y)^2 + \frac{(P_s - e\tilde{A}_s)^2}{\left(1 + \frac{x}{\rho}\right)} + m^2 c^2} + e\phi(\mathbf{Q})$$

Nun mit  $s$  als unabhängige Variable:

$$H'_s = -P_s = -e\tilde{A}_s - \left(1 + \frac{x}{\rho}\right) \times \sqrt{\frac{(H' - e\phi)^2}{c^2} - (P_x - e\tilde{A}_x)^2 - (P_y - e\tilde{A}_y)^2 - m^2 c^2}$$

Neue Hamiltonfunktion  $H'$ :

$$H'(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) = c \sqrt{(P_x - e\tilde{A}_x)^2 + (P_y - e\tilde{A}_y)^2 + \frac{(P_s - e\tilde{A}_s)^2}{\left(1 + \frac{x}{\rho}\right)} + m^2 c^2} + e\phi(\mathbf{Q})$$

Nun mit  $s$  als unabhängige Variable:

$$H'_s = -P_s = -e\tilde{A}_s - \left(1 + \frac{x}{\rho}\right) \times \sqrt{\frac{(H' - e\phi)^2}{c^2} - (P_x - e\tilde{A}_x)^2 - (P_y - e\tilde{A}_y)^2 - m^2 c^2}$$

Bedingung:

$$\tilde{A}_x = \tilde{A}_y = 0$$

Hamiltonfunktion:

$$H_s = -e\tilde{A}_s - \left(1 + \frac{x}{\rho}\right) p_{\text{mech}} \sqrt{1 - \left(\frac{P_x}{p_{\text{mech}}}\right)^2 - \left(\frac{P_y}{p_{\text{mech}}}\right)^2}$$

Bedingung:

$$\tilde{A}_x = \tilde{A}_y = 0$$

Hamiltonfunktion:

$$H_s = -e\tilde{A}_s - \left(1 + \frac{x}{\rho}\right) p_{\text{mech}} \sqrt{1 - \left(\frac{P_x}{p_{\text{mech}}}\right)^2 - \left(\frac{P_y}{p_{\text{mech}}}\right)^2}$$

Bedingung:

$$P_x, P_y \ll p_{\text{mech}}$$

Hamiltonfunktion:

$$H_s \approx -e\tilde{A}_s - \left(1 + \frac{x}{\rho}\right) \cdot \left(p_{\text{mech}} - \frac{P_x}{2p_{\text{mech}}} - \frac{P_y}{2p_{\text{mech}}}\right)$$

# Vertikales Ablenkefeld $B_0$ , Quadrupolmagnet zur Fokussierung

Bedingung:

$$B_y = B_0 - gx; \quad g = -\frac{\partial B_y}{\partial x}$$

Zugehöriges Vektorpotential:

$$A'_s \cong -B_0 x + g \left( \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} \right) + \frac{B_0}{\rho} \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3, y^3)$$

Hamiltonfunktion:

$$H_s \approx -e\tilde{A}'_s - \left( 1 + \frac{x}{\rho} \right) \cdot \left( p_{\text{mech}} - \frac{P_x}{2p_{\text{mech}}} - \frac{P_y}{2p_{\text{mech}}} \right)$$

# Vertikales Ablenkkfeld $B_0$ , Quadrupolmagnet zur Fokussierung

Bedingung:

$$B_y = B_0 - gx; \quad g = -\frac{\partial B_y}{\partial x}$$

Zugehöriges Vektorpotential:

$$A'_s \cong -B_0 x + g \left( \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} \right) + \frac{B_0}{\rho} \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3, y^3)$$

Hamiltonfunktion:

$$H_s \approx -e\tilde{A}'_s - \left( 1 + \frac{x}{\rho} \right) \cdot \left( p_{\text{mech}} - \frac{P_x}{2p_{\text{mech}}} - \frac{P_y}{2p_{\text{mech}}} \right)$$

Bedingung:

$$p_{\text{mech}} = p_0 + \Delta p; \quad p_0 = e\rho B$$

Hamiltonfunktion ( $k = eg/p_0$ ):

$$\begin{aligned} H_s &\approx \left(1 + \frac{x}{\rho}\right) \left[ -eA'_s - p_0 - \Delta p + \left( \frac{P_x}{2p_0} + \frac{P_y}{2p_0} \right) \cdot \left( 1 - \frac{\Delta p}{p_0} \right) \right] \\ &\approx + p_0 \left[ \left( \frac{1}{\rho^2} - k \right) \frac{x^2}{2} + k \frac{y^2}{2} \right] + \frac{P_x}{2p_0} + \frac{P_y}{2p_0} - \Delta p \frac{x}{\rho} \end{aligned}$$



Bedingung:

$$p_{\text{mech}} = p_0 + \Delta p; \quad p_0 = e\rho B$$

Hamiltonfunktion ( $k = eg/p_0$ ):

$$\begin{aligned} H_s &\approx \left(1 + \frac{x}{\rho}\right) \left[ -eA'_s - p_0 - \Delta p + \left( \frac{P_x}{2p_0} + \frac{P_y}{2p_0} \right) \cdot \left( 1 - \frac{\Delta p}{p_0} \right) \right] \\ &\approx + p_0 \left[ \left( \frac{1}{\rho^2} - k \right) \frac{x^2}{2} + k \frac{y^2}{2} \right] + \frac{P_x}{2p_0} + \frac{P_y}{2p_0} - \Delta p \frac{x}{\rho} \end{aligned}$$

mit  $(\bar{P}_\alpha = P_\alpha/p_0)$ :

$$H_0 = \frac{H_s}{p_0} = \left( \frac{1}{\rho^2} - k \right) \frac{x^2}{2} + k \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2} (\bar{P}_x^2 + \bar{P}_y^2) - \frac{x}{\rho} \frac{\Delta p}{p_0}$$

Hamiltongleichungen:

$$x' = \frac{\partial H}{\partial \bar{P}_x} = \bar{P}_x$$

$$y' = \frac{\partial H}{\partial \bar{P}_y} = \bar{P}_y$$

$$\bar{P}_x' = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\left( \frac{1}{\rho^2} - k \right) x + \frac{1}{\rho} \frac{\Delta p}{p_0}$$

$$\bar{P}_y' = -\frac{\partial H}{\partial y} = -ky$$

mit ( $\bar{P}_\alpha = P_\alpha/p_0$ ):

$$H_0 = \frac{H_s}{p_0} = \left( \frac{1}{\rho^2} - k \right) \frac{x^2}{2} + k \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2} (\bar{P}_x^2 + \bar{P}_y^2) - \frac{x}{\rho} \frac{\Delta p}{p_0}$$

Hamiltongleichungen:

$$x' = \frac{\partial H}{\partial \bar{P}_x} = \bar{P}_x$$

$$y' = \frac{\partial H}{\partial \bar{P}_y} = \bar{P}_y$$

$$\bar{P}_x' = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\left( \frac{1}{\rho^2} - k \right) x + \frac{1}{\rho} \frac{\Delta p}{p_0}$$

$$\bar{P}_y' = -\frac{\partial H}{\partial y} = -ky$$

Bewegung periodisch in den kanonisch konjugierten Variablen  $p, q$   
 $\Rightarrow$  **Wirkungs-Variable**  $J = \oint pdq = \text{const}$

Transformation, so dass  $J$  Impulsvariable ist

- Gut für Störungsrechnungen
- Für adiabatische Änderungen eines Parameters  $\lambda$

$$\frac{d\lambda}{dt} \ll \frac{\lambda}{T_0}, \quad T_0: \text{Periodendauer}$$

bleibt  $J$  erhalten

Bewegung periodisch in den kanonisch konjugierten Variablen  $p, q$   
 $\Rightarrow$  **Wirkungs-Variable**  $J = \oint pdq = \text{const}$

Transformation, so dass  $J$  Impulsvariable ist

- Gut für Störungsrechnungen
- Für adiabatische Änderungen eines Parameters  $\lambda$

$$\frac{d\lambda}{dt} \ll \frac{\lambda}{T_0}, \quad T_0: \text{Periodendauer}$$

bleibt  $J$  erhalten

Erinnerung Betatron-Bewegung:

$$x(s) = a\sqrt{\beta(s)} \cos(\phi(s) + \phi_0)$$

Trafo  $x, p_x \rightarrow \phi, J$ :

$$F_1(x, \phi, s) = -\frac{x^2}{2\beta(s)} \left[ \tan \phi - \frac{1}{2}\beta'(s) \right]$$

Erinnerung Betatron-Bewegung:

$$x(s) = a\sqrt{\beta(s)} \cos(\phi(s) + \phi_0)$$

Trafo  $x, p_x \rightarrow \phi, J$ :

$$F_1(x, \phi, s) = -\frac{x^2}{2\beta(s)} \left[ \tan \phi - \frac{1}{2}\beta'(s) \right]$$

$$\Rightarrow p_x = x' = \frac{\partial F_1}{\partial x} = -\frac{x}{\beta} \left[ \tan \phi - \frac{\beta'}{2} \right]$$

$$J = -\frac{\partial F_1}{\partial \phi} = \frac{x^2}{2\beta \cos^2 \phi}$$

Erinnerung Betatron-Bewegung:

$$x(s) = a\sqrt{\beta(s)} \cos(\phi(s) + \phi_0)$$

Trafo  $x, p_x \rightarrow \phi, J$ :

$$F_1(x, \phi, s) = -\frac{x^2}{2\beta(s)} \left[ \tan \phi - \frac{1}{2}\beta'(s) \right]$$

$$\Rightarrow p_x = x' = \frac{\partial F_1}{\partial x} = -\frac{x}{\beta} \left[ \tan \phi - \frac{\beta'}{2} \right]$$

$$J = -\frac{\partial F_1}{\partial \phi} = \frac{x^2}{2\beta \cos^2 \phi}$$



Resultat dieser Trafo:

$$J = \frac{1}{2\pi} \oint p_x dx = \frac{a^2}{2} = \frac{\varepsilon}{2}$$

$$H_{WW} = H_0 + \frac{\partial F_1}{\partial s} = \frac{J}{\beta(s)}$$

$$\phi' = \frac{\partial H_{WW}}{\partial J} = \frac{1}{\beta(s)} \Rightarrow \phi(s) = \int_0^s \frac{ds'}{\beta(s')} + \phi_0$$

Erinnerung: Zerlegung des Magnetfeldes

$$\frac{e}{p}B_y = \frac{e}{p}B_{y,0} + \frac{e}{p}\frac{\partial B_y}{\partial x} + \frac{e}{p}\frac{1}{2}\frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} + \dots = \frac{1}{R} - kx + \frac{1}{2}mx^2 + \dots$$

Habe nun das einen Fehler  $\Delta k$  in Quadrupolform:

$$H_{WW}(\phi, J, s) = \frac{J}{\beta(s)} - \frac{1}{2}\Delta k(s)x^2$$

Erinnerung: Zerlegung des Magnetfeldes

$$\frac{e}{p}B_y = \frac{e}{p}B_{y,0} + \frac{e}{p}\frac{\partial B_y}{\partial x} + \frac{e}{p}\frac{1}{2}\frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} + \dots = \frac{1}{R} - kx + \frac{1}{2}mx^2 + \dots$$

Habe nun das einen Fehler  $\Delta k$  in Quadrupolform:

$$H_{WW}(\phi, J, s) = \frac{J}{\beta(s)} - \frac{1}{2}\Delta k(s)x^2$$

$$H_{WW}(\phi, J, s) = \frac{J}{\beta(s)} - \frac{1}{2} \Delta k(s) x^2$$

Anzahl der Betatronschwingungen pro Umlauf:

$$Q = \frac{1}{2\pi} \oint d\phi = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{d\phi}{ds} ds$$

mit  $\frac{d\phi}{ds} = \frac{\partial H_{WW}}{\partial J} = \frac{1}{\beta} - \frac{\beta}{2} \Delta k (1 + \cos 2\phi)$

$$Q = \underbrace{\frac{1}{2} \oint \frac{ds}{\beta(s)}}_{Q_0} - \frac{1}{4} \oint \beta(s) \Delta k ds - \underbrace{\frac{1}{4\pi} \oint \beta(s) \Delta k(s) \cos 2\phi ds}_{=0, \text{ falls } Q_0 \neq \frac{n}{2}}$$

$$H_{WW}(\phi, J, s) = \frac{J}{\beta(s)} - \frac{1}{2} \Delta k(s) x^2$$

Anzahl der Betatronschwingungen pro Umlauf:

$$Q = \frac{1}{2\pi} \oint d\phi = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{d\phi}{ds} ds$$

mit  $\frac{d\phi}{ds} = \frac{\partial H_{WW}}{\partial J} = \frac{1}{\beta} - \frac{\beta}{2} \Delta k (1 + \cos 2\phi)$

$$Q = \underbrace{\frac{1}{2} \oint \frac{ds}{\beta(s)}}_{Q_0} - \frac{1}{4} \oint \beta(s) \Delta k ds - \underbrace{\frac{1}{4\pi} \oint \beta(s) \Delta k(s) \cos 2\phi ds}_{=0, \text{ falls } Q_0 \neq \frac{n}{2}}$$

# Beispiel: Sextupol

- Sextupolterm Magnetfeld:  $\frac{e}{p}B_y = \frac{1}{2}mx^2$
- Potential:  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$

$$\begin{aligned}H_{WW}(\phi, J, s) &= \frac{J}{\beta(s)} - \frac{e}{p}A = \frac{J}{\beta(s)} + \frac{m}{6}x^3 \\&= \frac{J}{\beta(s)} + \frac{m}{24}(2J\beta)^{3/2}(\cos 3\phi + 3\cos \phi)\end{aligned}$$

# Beispiel: Sextupol

- Sextupolterm Magnetfeld:  $\frac{e}{p}B_y = \frac{1}{2}mx^2$
- Potential:  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$

$$\begin{aligned}H_{WW}(\phi, J, s) &= \frac{J}{\beta(s)} - \frac{e}{p}A = \frac{J}{\beta(s)} + \frac{m}{6}x^3 \\&= \frac{J}{\beta(s)} + \frac{m}{24}(2J\beta)^{3/2}(\cos 3\phi + 3\cos \phi)\end{aligned}$$

Analoge Rechnung

$$Q = \frac{1}{2} \int \frac{\partial H_{WW}}{\partial s} ds = Q_0$$

für  $Q_0 \neq \pm n, \pm \frac{n}{3}$ .

# Beispiel: Sextupol

- Sextupolterm Magnetfeld:  $\frac{e}{p}B_y = \frac{1}{2}mx^2$
- Potential:  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$

$$\begin{aligned}H_{WW}(\phi, J, s) &= \frac{J}{\beta(s)} - \frac{e}{p}A = \frac{J}{\beta(s)} + \frac{m}{6}x^3 \\&= \frac{J}{\beta(s)} + \frac{m}{24}(2J\beta)^{3/2}(\cos 3\phi + 3\cos \phi)\end{aligned}$$

Analoge Rechnung

$$Q = \frac{1}{2} \int \frac{\partial H_{WW}}{\partial s} ds = Q_0$$

für  $Q_0 \neq \pm n, \pm \frac{n}{3}$ .

- kein Tune Shift durch Sextupol



# Beispiel: Sextupol

- Sextupolterm Magnetfeld:  $\frac{e}{p}B_y = \frac{1}{2}mx^2$
- Potential:  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$

$$\begin{aligned}H_{WW}(\phi, J, s) &= \frac{J}{\beta(s)} - \frac{e}{p}A = \frac{J}{\beta(s)} + \frac{m}{6}x^3 \\&= \frac{J}{\beta(s)} + \frac{m}{24}(2J\beta)^{3/2}(\cos 3\phi + 3\cos \phi)\end{aligned}$$

Analoge Rechnung

$$Q = \frac{1}{2} \int \frac{\partial H_{WW}}{\partial s} ds = Q_0$$

für  $Q_0 \neq \pm n, \pm \frac{n}{3}$ .

- kein Tune Shift durch Sextupol

- Was, wenn doch  $Q = \pm n, \pm \frac{n}{3}$  gilt?
- $\Rightarrow$  Wechsel in Koordinaten, in denen der ungestörte Hamiltonian  $H_{WW} = \frac{J}{\beta(s)}$  nicht mehr von  $s$  abhängt!

$$\tilde{\phi} = \phi - \int_0^s \frac{ds'}{\beta(s')} + \frac{Q}{R}s = \phi_0 + \frac{Q}{R}s$$

mit  $R$ : mittlere Radius des Rings.

- Was, wenn doch  $Q = \pm n, \pm \frac{n}{3}$  gilt?
- $\Rightarrow$  Wechsel in Koordinaten, in denen der ungestörte Hamiltonian  $H_{WW} = \frac{J}{\beta(s)}$  nicht mehr von  $s$  abhängt!

$$\tilde{\phi} = \phi - \int_0^s \frac{ds'}{\beta(s')} + \frac{Q}{R}s = \phi_0 + \frac{Q}{R}s$$

mit  $R$ : mittlere Radius des Rings.

$$\Rightarrow \tilde{J} = J \quad \text{und} \quad \tilde{H}_{WW}(\tilde{\phi}, J, s) = \frac{Q}{R}J$$

- Was, wenn doch  $Q = \pm n, \pm \frac{n}{3}$  gilt?
- $\Rightarrow$  Wechsel in Koordinaten, in denen der ungestörte Hamiltonian  $H_{WW} = \frac{J}{\beta(s)}$  nicht mehr von  $s$  abhängt!

$$\tilde{\phi} = \phi - \int_0^s \frac{ds'}{\beta(s')} + \frac{Q}{R}s = \phi_0 + \frac{Q}{R}s$$

mit  $R$ : mittlere Radius des Rings.

$$\Rightarrow \tilde{J} = J \quad \text{und} \quad \tilde{H}_{WW}(\tilde{\phi}, J, s) = \frac{Q}{R}J$$

Gleichzeitig Zerlegung Betatron-Phase in umlaufperiodischen und nicht umlaufperiodischen Teil:

$$\phi = \tilde{\phi} + \int_0^s \frac{ds'}{\beta(s')} - \frac{Q}{R}s = \tilde{\phi} + \tau(s)$$

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{WW} = \frac{Q}{R}J + \frac{m}{24}(2J\beta(s))^{3/2} & \left[ 3 \cos \tilde{\phi} \cos \tau - 3 \sin \tilde{\phi} \sin \tau \right. \\ & \left. + \cos 3\tilde{\phi} \cos 3\tau - \sin 3\tilde{\phi} \sin 3\tau \right] \end{aligned}$$

Gleichzeitig Zerlegung Betatron-Phase in umlaufperiodischen und nicht umlaufperiodischen Teil:

$$\phi = \tilde{\phi} + \int_0^s \frac{ds'}{\beta(s')} - \frac{Q}{R}s = \tilde{\phi} + \tau(s)$$

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{WW} = \frac{Q}{R}J + \frac{m}{24}(2J\beta(s))^{3/2} & \left[ 3 \cos \tilde{\phi} \cos \tau - 3 \sin \tilde{\phi} \sin \tau \right. \\ & \left. + \cos 3\tilde{\phi} \cos 3\tau - \sin 3\tilde{\phi} \sin 3\tau \right] \end{aligned}$$

# Sextupol-Resonanzen

Fourierentwicklung in Azimuthalwinkel  $\theta = \frac{s}{R}$

- Resonanz, wenn Teilchenbewegung und Störstellen gemeinsame Fourierkomponenten haben!

$$\tilde{H}_{WW}(\tilde{\phi}, J, s) = \frac{Q}{R}J + \frac{(2J)^{3/2}}{24} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ 3A_n \cos(n\theta + \tilde{\phi}) + 3B_n \sin(n\theta - \tilde{\phi}) \right. \\ \left. + C_n \cos(n\theta + 3\tilde{\phi}) + D_n \sin(n\theta - 3\tilde{\phi}) \right]$$

# Sextupol-Resonanzen

Fourierentwicklung in Azimuthalwinkel  $\theta = \frac{s}{R}$

- Resonanz, wenn Teilchenbewegung und Störstellen gemeinsame Fourierkomponenten haben!

$$\tilde{H}_{WW}(\tilde{\phi}, J, s) = \frac{Q}{R}J + \frac{(2J)^{3/2}}{24} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ 3A_n \cos(n\theta + \tilde{\phi}) + 3B_n \sin(n\theta - \tilde{\phi}) \right. \\ \left. + C_n \cos(n\theta + 3\tilde{\phi}) + D_n \sin(n\theta - 3\tilde{\phi}) \right]$$

$$A_n = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi R} \beta^{3/2} m \cos(\tau - n\theta) ds, \quad B_n = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi R} \beta^{3/2} m \sin(\tau + n\theta) ds$$

$$C_n = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi R} \beta^{3/2} m \cos(3\tau - n\theta) ds, \quad D_n = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi R} \beta^{3/2} m \sin(3\tau + n\theta) ds$$



# Sextupol-Resonanzen

Fourierentwicklung in Azimuthalwinkel  $\theta = \frac{s}{R}$

- Resonanz, wenn Teilchenbewegung und Störstellen gemeinsame Fourierkomponenten haben!

$$\tilde{H}_{WW}(\tilde{\phi}, J, s) = \frac{Q}{R}J + \frac{(2J)^{3/2}}{24} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ 3A_n \cos(n\theta + \tilde{\phi}) + 3B_n \sin(n\theta - \tilde{\phi}) + C_n \cos(n\theta + 3\tilde{\phi}) + D_n \sin(n\theta - 3\tilde{\phi}) \right]$$

$$A_n = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi R} \beta^{3/2} m \cos(\tau - n\theta) ds, \quad B_n = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi R} \beta^{3/2} m \sin(\tau + n\theta) ds$$

$$C_n = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi R} \beta^{3/2} m \cos(3\tau - n\theta) ds, \quad D_n = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi R} \beta^{3/2} m \sin(3\tau + n\theta) ds$$

$$\tilde{\phi} = \phi_0 + Q\theta$$

Ganzzahlige Resonanzen

$$n\theta \pm \tilde{\phi} = n\theta \pm Q\theta \pm \phi_0 \quad \Leftrightarrow \quad Q = \pm n$$

Dipolfehler!

Drittelzahlige Resonanzen

$$n\theta \pm 3\tilde{\phi} = (n \pm 3Q)\theta \pm 3\tilde{\phi} \quad \Leftrightarrow \quad Q = \pm \frac{n}{3}$$

Bestimmung  $C_n$  und  $D_n$

- $Q = \pm \frac{n}{3}$

- Resubstitution von  $\tau = \int_0^s \frac{ds'}{\beta(s')} - Q\theta = \phi(s) - Q\theta$

$$\Rightarrow C = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi R} \beta^{3/2} m \cos 3\phi(s) ds$$

$$D = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi R} \beta^{3/2} m \sin 3\phi(s) ds$$

Bestimmung  $C_n$  und  $D_n$

- $Q = \pm \frac{n}{3}$

- Resubstitution von  $\tau = \int_0^s \frac{ds'}{\beta(s')} - Q\theta = \phi(s) - Q\theta$

$$\Rightarrow C = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi R} \beta^{3/2} m \cos 3\phi(s) ds$$

$$D = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi R} \beta^{3/2} m \sin 3\phi(s) ds$$

$$C = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi R} \beta^{3/2} m \cos 3\phi(s) ds, \quad D = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi R} \beta^{3/2} m \sin 3\phi(s) ds$$

- Tastet  $m(s)$  mit  $\cos 3\phi$  und  $\sin 3\phi$  ab (dreifachen Betatronphase)
- Gewichtet mit  $\beta^{3/2}(s)$
- $\Rightarrow C$  und  $D$  für alle  $n$ .

Große Resonanzen für gleichartige Sextupole im Abstand  $120^\circ$ .

$$C = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi R} \beta^{3/2} m \cos 3\phi(s) ds, \quad D = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi R} \beta^{3/2} m \sin 3\phi(s) ds$$

- Tastet  $m(s)$  mit  $\cos 3\phi$  und  $\sin 3\phi$  ab (dreifachen Betatronphase)
- Gewichtet mit  $\beta^{3/2}(s)$
- $\Rightarrow C$  und  $D$  für alle  $n$ .

Große Resonanzen für gleichartige Sextupole im Abstand  $120^\circ$ .  
Drittelresonanz verschwindet für Sextupole gleicher Stärke und entgegengesetzter Polarität in Abstand von  $60^\circ$ .

$$C = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi R} \beta^{3/2} m \cos 3\phi(s) ds, \quad D = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi R} \beta^{3/2} m \sin 3\phi(s) ds$$

- Tastet  $m(s)$  mit  $\cos 3\phi$  und  $\sin 3\phi$  ab (dreifachen Betatronphase)
- Gewichtet mit  $\beta^{3/2}(s)$
- $\Rightarrow C$  und  $D$  für alle  $n$ .

Große Resonanzen für gleichartige Sextupole im Abstand  $120^\circ$ .  
Drittelresonanz verschwindet für Sextupole gleicher Stärke und entgegengesetzter Polarität in Abstand von  $60^\circ$ .

Betrachte Nähe von Drittelresonanz ( $Q = n/3 + \delta Q$ ):

$$n\theta - 3\tilde{\phi} = n\theta - 3(Q + \delta Q)\theta - 3\phi_0 = -3(\delta Q)\theta - 3\phi_0$$

geringe Änderung pro Umlauf, jedoch weiterhin schnelle Oszillation von  $H_{WW}$  mit  $\tilde{\phi}$ .

→ Trafo auf langsame Winkelvariable:

$$F_2(\tilde{\phi}, \tilde{J}, s) = \left( \tilde{\phi} - \frac{ns}{3R} \right) \cdot \tilde{J}$$

$$J = \tilde{J}, \quad \phi_{\text{rot}} = \tilde{\phi} - \frac{n}{3}\theta$$



Betrachte Nähe von Drittelresonanz ( $Q = n/3 + \delta Q$ ):

$$n\theta - 3\tilde{\phi} = n\theta - 3(Q + \delta Q)\theta - 3\phi_0 = -3(\delta Q)\theta - 3\phi_0$$

geringe Änderung pro Umlauf, jedoch weiterhin schnelle Oszillation von  $H_{WW}$  mit  $\tilde{\phi}$ .

→ Trafo auf langsame Winkelvariable:

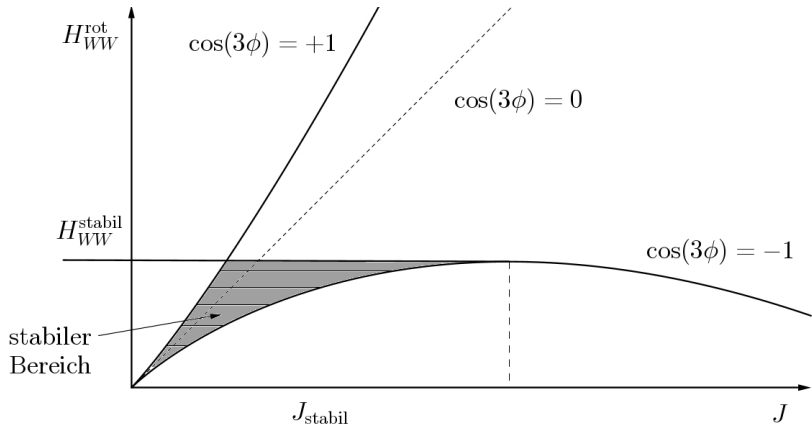
$$F_2(\tilde{\phi}, \tilde{J}, s) = \left( \tilde{\phi} - \frac{ns}{3R} \right) \cdot \tilde{J}$$

$$J = \tilde{J}, \quad \phi_{\text{rot}} = \tilde{\phi} - \frac{n}{3}\theta$$

$$\begin{aligned}H_{WW}^{\text{rot}} &= H_{WW} + \frac{\partial F_2}{\partial s} = \frac{Q}{R}J - \frac{n}{3R}J + \frac{(2J)^{3/2}}{24R} \\&\quad \times \sum_{n=0}^{\infty} C \cos(n\theta - 3\tilde{\phi}) + D \sin((n\theta - 3\tilde{\phi})) \\&= \frac{\delta Q}{R}J + \frac{(2J)^{3/2}}{24R} (C \cos(3\phi_{\text{rot}}) - D \sin(3\phi_{\text{rot}})) \\&= \frac{\delta Q}{R}J + \frac{(2J)^{3/2}}{24R} \sqrt{C^2 + D^2} \cos\left(3\phi_{\text{rot}} + \text{atan}\left(\frac{D}{C}\right)\right) \\&\sim AJ + BJ^{3/2} \cos(3\phi)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}H_{WW}^{\text{rot}} &= H_{WW} + \frac{\partial F_2}{\partial s} = \frac{Q}{R}J - \frac{n}{3R}J + \frac{(2J)^{3/2}}{24R} \\&\quad \times \sum_{n=0}^{\infty} C \cos(n\theta - 3\tilde{\phi}) + D \sin((n\theta - 3\tilde{\phi})) \\&= \frac{\delta Q}{R}J + \frac{(2J)^{3/2}}{24R} (C \cos(3\phi_{\text{rot}}) - D \sin(3\phi_{\text{rot}})) \\&= \frac{\delta Q}{R}J + \frac{(2J)^{3/2}}{24R} \sqrt{C^2 + D^2} \cos\left(3\phi_{\text{rot}} + \text{atan}\left(\frac{D}{C}\right)\right) \\&\sim AJ + BJ^{3/2} \cos(3\phi)\end{aligned}$$

# Verhalten in Resonanznähe



In stabilem Bereich gibt es für kleine  $H_{WW}^{\text{rot}}$  immer ein passendes  $J$ , unabhängig von  $\phi$ . Dies gilt bis:

$$(J_{\text{stabil}}, H_{WW}^{\text{stabil}}) = \left( 32 \left( \frac{\delta Q}{\sqrt{C^2 + D^2}} \right)^2, \frac{32}{3R} \frac{(\delta Q)^3}{C^2 + D^2} \right)$$

In stabilem Bereich gibt es für kleine  $H_{WW}^{\text{rot}}$  immer ein passendes  $J$ , unabhängig von  $\phi$ . Dies gilt bis:

$$(J_{\text{stabil}}, H_{WW}^{\text{stabil}}) = \left( 32 \left( \frac{\delta Q}{\sqrt{C^2 + D^2}} \right)^2, \frac{32}{3R} \frac{(\delta Q)^3}{C^2 + D^2} \right)$$

Fixpunkte ändern sich nicht mit  $s$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial H_{WW}^{\text{rot}}}{\partial J} &= A + \frac{3}{2}BJ^{1/2} \cos(3\phi_{\text{rot}} + \phi_0) = 0 \\ -\frac{\partial H_{WW}^{\text{rot}}}{\partial \phi_{\text{rot}}} &= \sin(3\phi_{\text{rot}} + \phi_0) = 0 \\ \rightarrow \phi_{\text{rot}} &= -\frac{\phi_0}{3} + \left(0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right) \\ \rightarrow \cos(3\phi_{\text{rot}} + \phi_0) &= \pm 1 \quad (\text{abh. A,B-VZ})\end{aligned}$$

Fixpunkte ändern sich nicht mit  $s$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial H_{WW}^{\text{rot}}}{\partial J} &= A + \frac{3}{2}BJ^{1/2} \cos(3\phi_{\text{rot}} + \phi_0) = 0 \\ -\frac{\partial H_{WW}^{\text{rot}}}{\partial \phi_{\text{rot}}} &= \sin(3\phi_{\text{rot}} + \phi_0) = 0 \\ \rightarrow \phi_{\text{rot}} &= -\frac{\phi_0}{3} + \left(0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right) \\ \rightarrow \cos(3\phi_{\text{rot}} + \phi_0) &= \pm 1 \quad (\text{abh. A,B-VZ})\end{aligned}$$



Hamiltonfunktion mit Oktupolpotenzial  $A_s = C(2J\beta)^2 \cos(\phi)^4$ :

$$H_{WW} = \frac{J}{\beta} + \frac{C}{2} \beta^2 J^2 (\cos(4\phi) + 4 \cos(2\phi) + 3)$$

Betatronphasenvorschub:

$$\frac{\partial H_{WW}}{\partial J} = \frac{1}{\beta} + C \beta^2 J \left( \underbrace{\cos(4\phi)}_{\text{Res 4.Ord}} + 4 \cos(2\phi) + \underbrace{3}_{\text{Tune shift}} \right)$$

Die Hälfte der Fixpunkte des Oktupols sind instabil, zeichnen sich also durch Bifurkation der Trajektorie aus.

Hamiltonfunktion mit Oktupolpotenzial  $A_s = C(2J\beta)^2 \cos(\phi)^4$ :

$$H_{WW} = \frac{J}{\beta} + \frac{C}{2} \beta^2 J^2 (\cos(4\phi) + 4 \cos(2\phi) + 3)$$

Betatronphasenvorschub:

$$\frac{\partial H_{WW}}{\partial J} = \frac{1}{\beta} + C\beta^2 J \left( \underbrace{\cos(4\phi)}_{\text{Res 4.Ord}} + 4 \cos(2\phi) + \underbrace{3}_{\text{Tune shift}} \right)$$

Die Hälfte der Fixpunkte des Oktupols sind instabil, zeichnen sich also durch Bifurkation der Trajektorie aus.

- Bisher  $y = 0$
  - $c \cdot y^n$  im Vektorpotential sind analog zu horizontalen Komponente
  - $x^n \cdot y^m$  führen zu Kopplung
- mehrdimensionale Beschreibung notwendig (Erhaltungssätze gelten oft bis 4 Dimensionen)

- Bisher  $y = 0$
  - $c \cdot y^n$  im Vektorpotential sind analog zu horizontalen Komponente
  - $x^n \cdot y^m$  führen zu Kopplung
- mehrdimensionale Beschreibung notwendig (Erhaltungssätze gelten oft bis 4 Dimensionen)

- Bei Nichtlinearitäten mit  $x^n \cdot y^m$  alle  $Q_x/Q_y$  resonant mit  $nQ_x + mQ_y = p$
- Resonanzen bis 10. Ordnung bei  $p$ -Ring, 4. Ordnung bei  $e^-$ -Ring
- isolierte Resonanzen sind deterministisch
- Chirikov-Kriterium für chaotisches Verhalten vieler Resonanzen