

Hamilton-Formalismus in der Beschleunigerphysik

Sonja Bartkowski, Dimitrios Skodras

Technische Universität Dortmund

11.06.2015

Gliederung

- 1 Grundlagen
- 2 Geladene Teilchen im EM-Feld
 - Relativistik
 - Transformation ins mitbewegte System
 - Beispiele
- 3 Transformation auf Wirkungs-Winkel-Variable
 - Bedeutung der Wirkungs-Winkel-Variablen
 - Beispiele
- 4 Resonanzen
- 5 Ausblick

Hamiltonfunktion

Elektromagnetische Potenziale:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \rightarrow \mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}} = -\operatorname{rot} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \rightarrow \mathbf{E} = -\operatorname{grad} \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

Aus Euler-Lagrange-Gleichung für die Lorentzkraft:

$$\mathbf{F} = e(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{q}} \times \mathbf{B}) = \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}}$$

$$U = e(\phi - \dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{A})$$

Hamiltonfunktion

Elektromagnetische Potenziale:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \rightarrow \mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}} = -\operatorname{rot} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \rightarrow \mathbf{E} = -\operatorname{grad} \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

Aus Euler-Lagrange-Gleichung für die Lorentzkraft:

$$\mathbf{F} = e(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{q}} \times \mathbf{B}) = \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}}$$

$$U = e(\phi - \dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{A})$$

Hamiltonfunktion

Lagrangefunktion:

$$L = T - U = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{q}}^2 + e\dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{A} - e\phi$$

Legendretransformation:

$$\underbrace{\mathbf{p}}_{\text{kan.}} = \underbrace{m\mathbf{v}}_{\text{mech.}} + e\mathbf{A}$$

$$\begin{aligned} H &= \mathbf{p}\dot{\mathbf{q}} - L = (m\mathbf{v} + e\mathbf{A}) \cdot \mathbf{v} - \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 - e\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} + e\phi \\ &= \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 + e\phi \end{aligned}$$

Hamiltonfunktion

Lagrangefunktion:

$$L = T - U = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{q}}^2 + e\dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{A} - e\phi$$

Legendretransformation:

$$\underbrace{\mathbf{p}}_{\text{kan.}} = \underbrace{m\mathbf{v}}_{\text{mech.}} + e\mathbf{A}$$

$$\begin{aligned} H &= \mathbf{p}\dot{\mathbf{q}} - L = (m\mathbf{v} + e\mathbf{A}) \cdot \mathbf{v} - \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 - e\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} + e\phi \\ &= \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 + e\phi \end{aligned}$$

Relativistische Erweiterung

Ohne Feld:

$$H = \sqrt{\mathbf{p}_{\text{mech}}^2 c^2 + m^2 c^4}, \quad \mathbf{p}_{\text{mech}} = \gamma m \mathbf{v}$$

Mit Feld:

$$H = \sqrt{(\mathbf{p}_{\text{kan}} - e\mathbf{A})^2 c^2 + m^2 c^4} + e\phi$$

Relativistische Lagrangefunktion:

$$L = -\frac{mc^2}{\gamma} + e\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - e\phi \neq T - U$$

Relativistische Erweiterung

Ohne Feld:

$$H = \sqrt{\mathbf{p}_{\text{mech}}^2 c^2 + m^2 c^4}, \quad \mathbf{p}_{\text{mech}} = \gamma m \mathbf{v}$$

Mit Feld:

$$H = \sqrt{(\mathbf{p}_{\text{kan}} - e\mathbf{A})^2 c^2 + m^2 c^4} + e\phi$$

Relativistische Lagrangefunktion:

$$L = -\frac{mc^2}{\gamma} + e\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - e\phi \neq T - U$$

Transformation ins mitbewegte System

Neue Koordinaten $(Q_1, Q_2, Q_3) = (x, y, s)$ bzgl. Sollbahn $r_0(s)$:

$$\mathbf{r}(s) = \rho \mathbf{e}_x(s) + x \mathbf{e}_x(s) + y \mathbf{e}_y(s) \quad \rho = \text{Krümmungsradius}$$

bild malen

Transformation ins mitbewegte System

Neue Koordinaten $(Q_1, Q_2, Q_3) = (x, y, s)$ bzgl. Sollbahn $r_0(s)$:

$$\mathbf{r}(s) = \rho \mathbf{e}_x(s) + x \mathbf{e}_x(s) + y \mathbf{e}_y(s) \quad \rho = \text{Krümmungsradius}$$

bild malen

Transformation ins mitbewegte System

Frenet-Gleichungen (Torsion $\tau = 0$):

$$\frac{d\mathbf{e}_s}{ds} = -\frac{1}{\rho}\mathbf{e}_x; \quad \frac{d\mathbf{e}_x}{ds} = \frac{1}{\rho}\mathbf{e}_s; \quad \frac{d\mathbf{e}_y}{ds} = 0$$

Erzeugende der kanonischen Transformation:

$$F = F_3(\mathbf{p}, \mathbf{Q}) + \mathbf{q} \cdot \mathbf{p}, \quad F_3 = -\mathbf{r}(s) \cdot \mathbf{p}$$

Neue Impulse (P_x, P_y, P_s):

$$\begin{aligned} P_x &= \mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_x; & P_y &= \mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_y; \\ P_s &= \left(\rho \frac{1}{\rho} \mathbf{e}_s + x \frac{1}{\rho} \mathbf{e}_s \right) \mathbf{p} = \left(1 + \frac{x}{\rho} \right) \mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_s \end{aligned}$$

Transformation ins mitbewegte System

Frenet-Gleichungen (Torsion $\tau = 0$):

$$\frac{d\mathbf{e}_s}{ds} = -\frac{1}{\rho}\mathbf{e}_x; \quad \frac{d\mathbf{e}_x}{ds} = \frac{1}{\rho}\mathbf{e}_s; \quad \frac{d\mathbf{e}_y}{ds} = 0$$

Erzeugende der kanonischen Transformation:

$$F = F_3(\mathbf{p}, \mathbf{Q}) + \mathbf{q} \cdot \mathbf{p}, \quad F_3 = -\mathbf{r}(s) \cdot \mathbf{p}$$

Neue Impulse (P_x, P_y, P_s):

$$\begin{aligned} P_x &= \mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_x; & P_y &= \mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_y; \\ P_s &= \left(\rho \frac{1}{\rho} \mathbf{e}_s + x \frac{1}{\rho} \mathbf{e}_s \right) \mathbf{p} = \left(1 + \frac{x}{\rho} \right) \mathbf{p} \mathbf{e}_s \end{aligned}$$

senkrechte Magnetfelder

senkrechte Magnetfelder

- Enthält dynamische Informationen (Wechselwirkungen)

senkrechte Magnetfelder

- Enthält dynamische Informationen (Wechselwirkungen)
- Beschreibt Übergang ähnlich Streuung von Startzustand i zu Endzustand f

senkrechte Magnetfelder

- Enthält dynamische Informationen (Wechselwirkungen)
- Beschreibt Übergang ähnlich Streuung von Startzustand i zu Endzustand f
- Betragsquadrat $|M|^2$ kann als Wahrscheinlichkeit für Reaktion betrachtet werden

senkrechte Magnetfelder

- Enthält dynamische Informationen (Wechselwirkungen)
- Beschreibt Übergang ähnlich Streuung von Startzustand i zu Endzustand f
- Betragsquadrat $|M|^2$ kann als Wahrscheinlichkeit für Reaktion betrachtet werden

Ein erster Ausdruck:

$$M = \langle K | I \nu | \mathcal{H} | D \rangle$$

kleine Winkel zur Sollbahn

kleine Impulsabweichungen zum Sollimpuls

Bedeutende Größen

Beispiel: Gradientenfehler

Beispiel: Sextupol

Beispiel: Sextupol

Verhalten in Resonanznähe

Fixpunkte

Oktupol

Kopplung

Gegenwart vieler Nichtlinearitäten