

Versuch 353 - Das Relaxationsverhalten eines RC-Kreises

TU Dortmund, Fakultät Physik
Anfänger-Praktikum

Jan Adam

jan.adam@tu-dortmund.de

Dimitrios Skodras

dimitrios.skodras@tu-dortmund.de

23.Oktober 2012

Inhaltsverzeichnis

1	Theorie	2
2	Durchführung	4
2.1	Bestimmung von RC - Methode 1	4
2.2	Bestimmung von RC - Methode 2	4
2.3	Messung der Phasenverschiebung	4
2.4	Integrierglied	4
3	Auswertung	4
3.1	Auf- und Entladung des Kondensators	4
3.2	Frequenzabhängige Amplituden	6
3.3	Frequenzabhängige Phasenverschiebung	7
3.4	RC-Glied als Integrator	7

1 Theorie

Relaxation bezeichnet das Zurückkehren eines angeregten Systems in seinen Ruhezustand. Wird beispielsweise ein stark gedämpftes Pendel ausgelenkt, so entsteht eine Rückstellkraft, die es wieder in seine Ruheposition zurückführt. Die asymptotische Annäherung wird durch das Relaxationsverhalten beschrieben.

In diesem Versuch soll ein RC-Kreis auf sein Relaxationsverhalten untersucht werden. Dieser besteht aus einem Kondensator mit der Kapazität C , der über einen Widerstand R mit einer Spannung U_0 auf- und entladen wird.

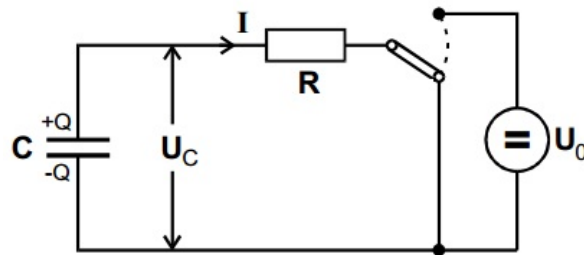


Abbildung 1: Schaltbild des Versuchs: RC-Glied wird über konstante Spannung geladen und entladen

Mit Hilfe des Kirchhoffschen und Ohmschen Gesetztes lässt sich fürs Auf- und Entladen die folgende Differentialgleichung für dieses System herleiten:

$$\dot{Q}(t) = -\frac{1}{RC}Q(t) \quad (1)$$

deren Lösungen folgende Exponentialfunktionen sind:

$$Q(t) = Q_0(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}) \quad (2)$$

$$Q(t) = Q_0e^{-\frac{1}{RC}t}. \quad (3)$$

Der Exponent $-\frac{1}{RC}$ beschreibt dabei, wie schnell sich die Ladung des Kondensators ändert, bzw. wie schnell sich das System seinem Endzustand nähert. RC ermöglicht es somit allgemein, qualitative Aussagen über relaxative Systeme zu treffen und wird deshalb auch als Zeitkonstante τ des Relaxationsvorganges bezeichnet.

Zunächst wird das RC-Element mit einer relativ niederfrequenten ($\omega \ll \frac{1}{RC}$) Rechteckspannung U_0 betrieben. Die Frequenz wird so gewählt, damit sich der Kondensator bei jedem Phasendurchlauf immer noch vollständig auf- und entladen kann. Im späteren Verlauf wird die Frequenz jedoch erhöht. Es bildet sich schließlich eine Phasenverschiebung

$$\varphi(\omega) = \arctan(-\omega RC) \quad (4)$$

zwischen der Kondensatorspannung und der Generatorspannung heraus, da sich der Kondensator wegen des Widerstandes nicht instantan entladen kann.

Bei weiterer Erhöhung der Frequenz ist die Dauer der Phase irgendwann nicht mehr lang genug, um den Kondensator vollständig zu entladen, bzw. ihn vollständig aufzuladen. Die Amplitude der Kondensatorspannung erreicht dann nicht mehr den Maximalwert U_0 und hat keinen Nulldurchlauf mehr. Aus dem Ansatz

$$U_c(t) = A(\omega)\cos(\omega t + \varphi\{\omega\})$$

folgt unter Verwendung des zweiten Kirchhoffschen Gesetztes und einiger Umformungen

$$A(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{1 + \omega^2(RC)^2}}. \quad (5)$$

Gleichung (5) beschreibt die reduzierte Amplitudenhöhe in Abhängigkeit von der Frequenz ω . Das RC-Glied behindert somit den Durchfluss des Wechselstroms bei höheren Frequenzen und wird deshalb auch als Tiefpass bezeichnet, da es Ströme mit langsamen Frequenzen ungehindert durchfließen lässt, während hochfrequente Signale abgemildert werden.

Bei hohen Frequenzen $\omega \gg \frac{1}{RC}$ arbeitet der RC-Kreis des weiteren als Integrator. Beliebige eingegebene Signale können am Kondensator in integrierter Form abgegriffen werden, ähnlich als würde man eine Funktion integrieren.

Ansatz ist auch hier die Maschenregel

$$U(t) = U_R(t) + U_c(t) = I(t)R + U_c(t),$$

welche umgeformt werden kann in

$$U(t) = RC \cdot \frac{dU_c}{dt} + U_c(t).$$

Durch zeitliche Integration und Näherungen ergibt sich schließlich

$$U(t) = \frac{1}{RC} \int_0^t U(t')dt'. \quad (6)$$

Gleichung (6) zeigt das Verhältnis zwischen der angelegten Wechselspannung $U(t)$ und der am Kondensator abgegriffenen Spannung U_c . Wie man sehen kann, taucht wieder die Konstante $\frac{1}{RC}$ als charakteristische Größe auf. Diesmal ist sie der Proportionalitätsfaktor zwischen den beiden Spannungen.

2 Durchführung

2.1 Bestimmung von RC - Methode 1

Zunächst soll die Zeitkonstante RC bestimmt werden. Hierzu erzeugt der Generator eine Rechteckspannung mit einer hinreichend kleinen Frequenz $\omega \ll \frac{1}{RC}$, damit der Kondensator noch vollständig auf- und entladen wird und zunächst vom Wechselstrom unbeeinflusst bleibt. Zu verschiedenen Zeitpunkten wird während der Entladung die Kondensatorspannung U_c gemessen und die Daten später halblogarithmisch aufgetragen. Die Steigung der sich ergebenden Geraden entspricht der Konstanten RC.

2.2 Bestimmung von RC - Methode 2

Im nächsten Schritt wird der Schaltkreis mit einer Sinusspannung betrieben und die Frequenz ω schrittweise erhöht. Zu jeder Frequenz wird die Amplitude der Kondensatorspannung gemessen und alles als Graph dargestellt. Zu zeigen ist, dass bei höheren Frequenzen die Amplitude abnimmt, da die Phasendauer des Stroms zu kurz wird um den Kondensator noch vollständig aufzuladen, bzw. zu entladen. Desweiteren lässt sich mit Gleichung (5) ebenfalls RC bestimmen. Die beiden Werte sollen anschließend miteinander verglichen und diskutiert werden.

2.3 Messung der Phasenverschiebung

Der Versuchsaufbau bleibt gleich, diesmal wird jedoch anstelle der Amplitude die Phasenverschiebung φ zwischen der Kondensatorspannung und der Generatorspannung gemessen und überprüft, ob diese der Gleichung (4) genügt.

2.4 Integrierglied

Abschließend soll verifiziert werden, inwieweit das RC-Glied als Integrator arbeitet. Hierzu werden vom Generator nacheinander eine Sinus-, Dreieck-, und zwei verschiedene Rechteckspannungen erzeugt. Für die erfolgreiche Integration wird eine entsprechend hohe Frequenz gewählt und die erzeugten Graphen werden übereinander aufgetragen.

3 Auswertung

Hauptbetrachtungspunkt dieses Experiments ist die Bestimmung der Zeitkonstanten des bereitgestellten RC-Gliedes nach verschiedenen Methoden

3.1 Auf- und Entladung des Kondensators

Nach dem oben aufgeführten Schaltbild wurde das RC-Glied aufgebaut. Es wurde mit einer niederfrequenten Rechteckspannung betrieben. Dadurch wird der Kondensator über eine halbe Periode aufgeladen und danach entladen. Die Frequenz hierbei beträgt $f =$

42 Hz und die Ladespannung $U = 5 \text{ V}$. Der in der folgenden Abbildung¹ dargestellter exponentieller Abfall entspricht der Entladekurve des Kondensators.

Um die Zeitkonstante RC zu ermitteln wird zu vielen Zeiten (x-Achse) die Spannung (y-Achse) gemessen und in halblogarithmischem Koordinatensystem aufgeführt. Durch diese Skalierung wird der Exponent der Exponentialfunktion einer Geraden gleichgesetzt. Eine Ausgleichsgerade aus linearer Ausgleichsrechnung hat eine Steigung, die $\frac{1}{RC}$ entspricht.

t/ms	U/V
0,0	5,00
0,1	4,62
0,2	4,32
0,3	3,96
0,4	3,66
0,5	3,42
0,6	3,16
0,7	2,92
0,8	2,72
0,9	2,50
1,0	2,32
1,1	2,16
1,2	2,00
1,7	1,36
2,2	0,94
2,7	0,64
3,2	0,44
3,7	0,30
4,2	0,20
4,7	0,12
5,2	0,08
5,7	0,04

Tabelle 3.1: Exponentieller Abstieg der Spannung in Abhängigkeit der Zeit

¹Bei Abbildungen vom Oszilloskop ist die x-Achse die Zeitachse mit dem als M bezeichneten Wert pro Kästchen, sowie die y-Achse die Spannungsachse mit dem als CH1/CH2 bezeichneten Wert pro Kästchen mit 0-Niveau beim an der linken Seite angebrachten Pfeil

Die Steigung der Ausgleichsgeraden, durch GNUPLOT ermittelt, beläuft sich auf etwa $-7.62 \cdot 10^2$. Somit ergibt sich für die Exponentialfunktion:

$$U(t) = U_0 \cdot \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \quad \text{mit} \quad RC = 1,307 \cdot (1 \pm 2,84 \cdot 10^{-3})\text{ms} \quad (7)$$

3.2 Frequenzabhängige Amplituden

Indem das RC-Glied nun mit Sinusspannung höherer Frequenz betrieben wird, reicht die Periodendauer nicht aus, um den Kondensator komplett aufzuladen beziehungsweise zu entladen. Somit ergibt sich eine frequenzabhängige Amplitude der Kondensatorspannung, die entsprechend des oben aufgeführten Schaltbildes durch einen Millivoltmeter ermittelt wird. Die Generatorspannungsamplitude ist frequenzunabhängig bei

U

$= 3.4 \text{ V.}$

f/Hz	$\frac{A(\omega)}{U_0}$
0	1
10	0.64
50	0.6
100	0.49
150	0.4
200	0.33
250	0.27
300	0.23
350	0.20
400	0.18
500	0.14
600	0.12
700	0.100
800	0.098
900	0.074
1000	0.068
1200	0.053
1400	0.044
1600	0.038
1800	0.032
2000	0.024

Die Messwerte geben ein Verhältnis von $\frac{A(\omega)}{U}$, welches indirekt proportional zu ω ist. Die genaue Abhängigkeit entspricht der aus Gleichung (5) mit einem Wert für die Zeitkonstante, welche von GNUPLOT durch Ausgleichsrechnung ermittelt wird. So kann man die Formel aufführen

$$A(\omega) = \frac{5\text{V}}{\sqrt{1 + \omega^2(RC)^2}} \quad \text{mit} \quad RC = 2.76 \cdot (1 \pm 0,116)\text{ms} \quad (8)$$

Dass der RC-Wert hier von dem unter 4.1 genannten abweicht, liegt an dem Innenwiderstand von $R_i = 600 \, \Omega$.

3.3 Frequenzabhängige Phasenverschiebung

Bei steigender Frequenz stellt sich eine Phasenverschiebung zwischen der Generatorspannung U_0 und der Kondensatorspannung U_C ein. Dies läuft auf die Trägheit des RC-Gliedes hinaus, welche zunehmende Werte für ϕ hervorruft. Bei einem Zweikanal-Oszilloskop wird der Generator am ersten Eingang und das RC-Glied am zweiten Eingang verbunden, so dass die Kathodenstrahlen beider Sinusspannungen simultan angezeigt werden können.

Nun wird die zeitliche Differenz der Nulldurchläufe a beider Schwingungen, sowie ihre Periodendauer b ermittelt und aus ihnen ϕ in Abhängigkeit der Frequenz der Kondensatorspannung gemäß dem Ausdruck

$$\phi = \frac{a}{b} \cdot 2\pi \quad (9)$$

bestimmt.

Die von GNUPLOT gefittete Ausgleichsfunktion $f(x)$ gibt als RC-Parameter $1.311 \cdot (1 \pm 0,036)\text{ms}$ aus. ϕ ist proportional zum arcustangens von ω . Für große Werte von ω beeinflusst die Zeitkonstante das Ergebnis unerheblich und der arcustangens nähert sich $\frac{\pi}{2}$ an, wie in Abbildung (??) abzusehen ist.

3.4 RC-Glied als Integrator

Bei gleichbleibender Schaltung soll nun mit dem Oszilloskop die Integrierfunktion des RC-Gliedes gezeigt werden. Hierzu werden vier verschiedene Spannungstypen angelegt und mit der Ausgabe des Kondensators verglichen. An den Beispielen ist die Funktionsfähigkeit deutlich erkennbar.

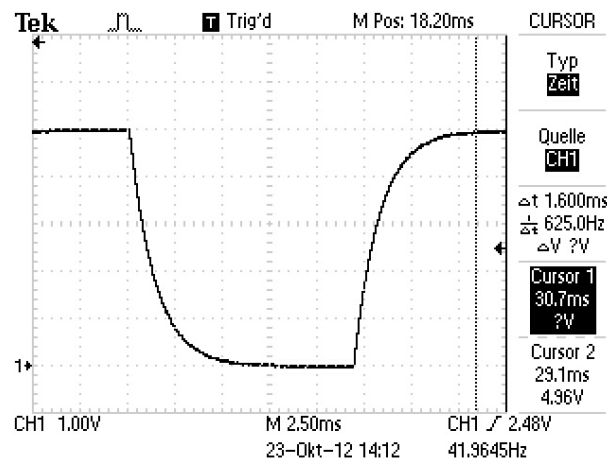


Abbildung 2: Exponentielle Endladung des Kondensators

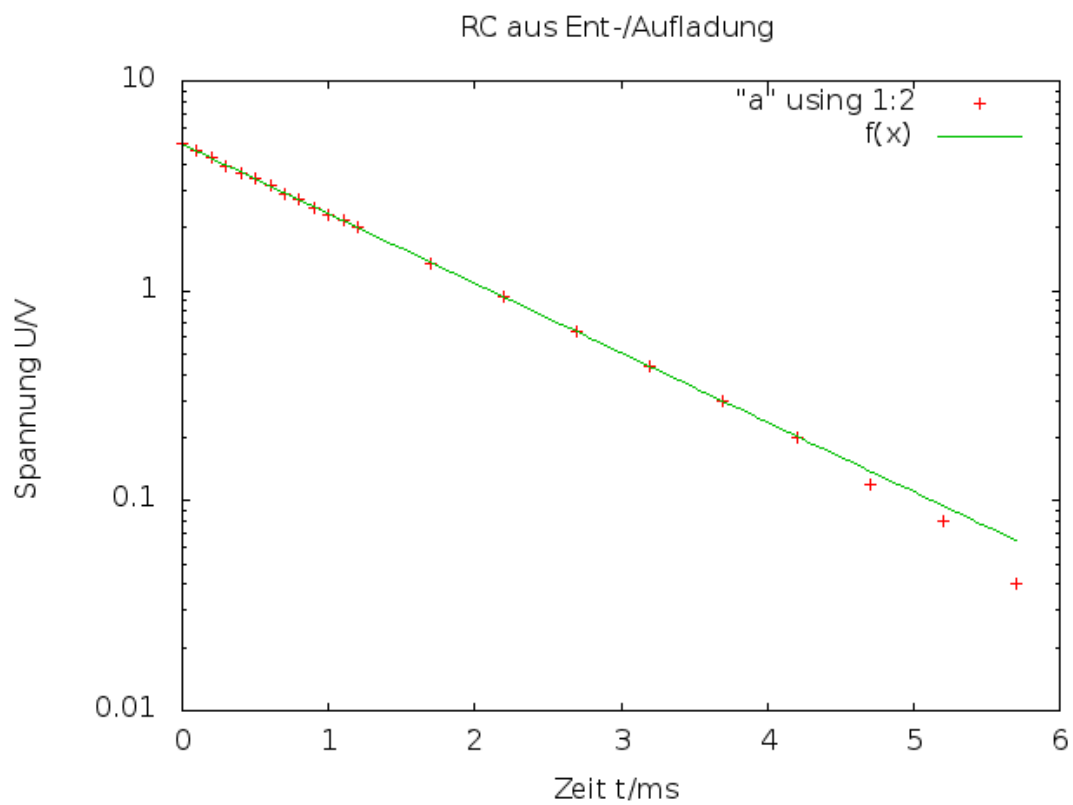


Abbildung 3: Graph zu Tabelle (??)

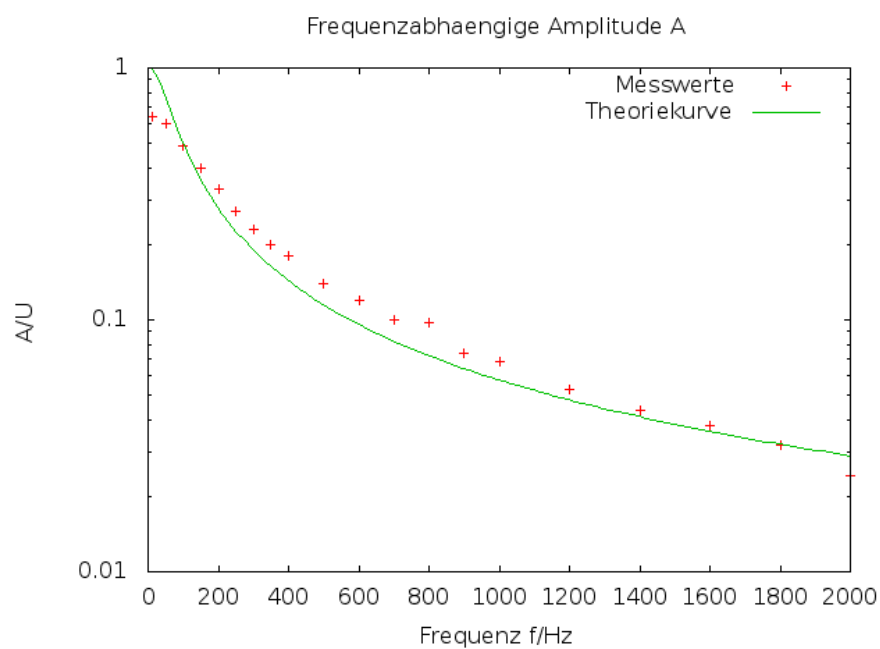


Abbildung 4: Die Amplitude der Kondensatorspannung in Abhängigkeit der Frequenz

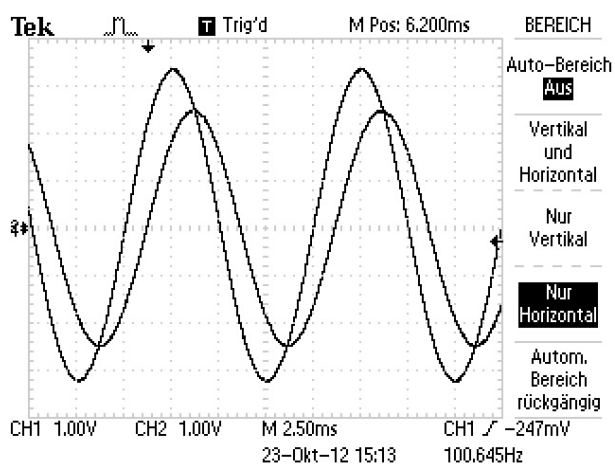


Abbildung 5: Phasenverschobene Kondensator- und Sinusspannung

f/Hz	a/ms	b/ms
100	1.14	9.91
200	0.80	5.00
400	0.50	2.50
1000	0.23	1.00
2000	0.118	0.50

Tabelle 3.2: a und b in Abhängigkeit der Frequenz

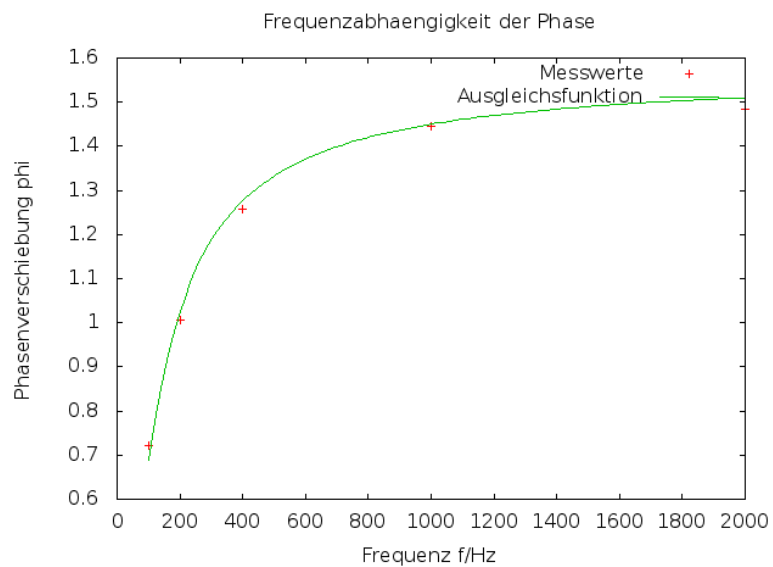


Abbildung 6: Arcustangensabhängigkeit zwischen der Frequenz und der Phasenverschiebung

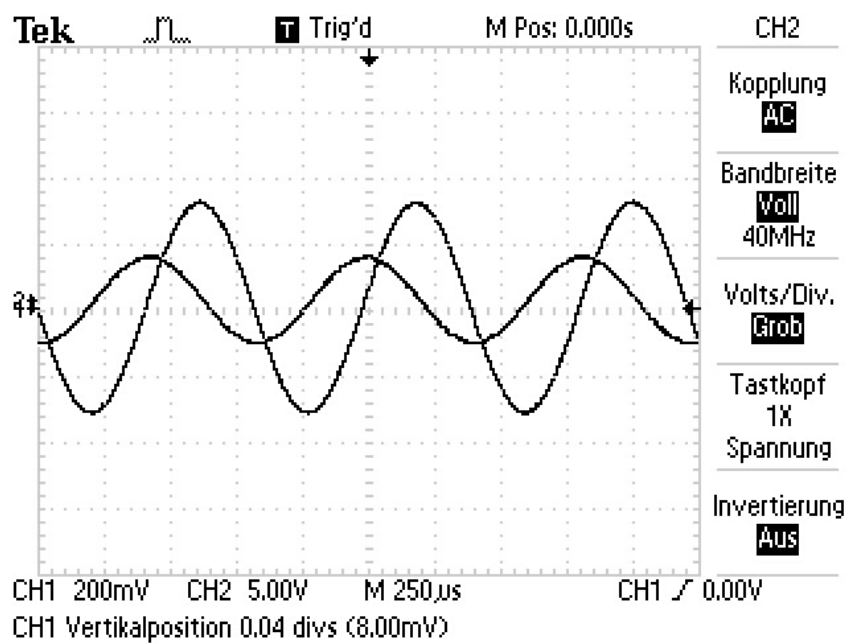


Abbildung 7: Sinus zu Cosinus

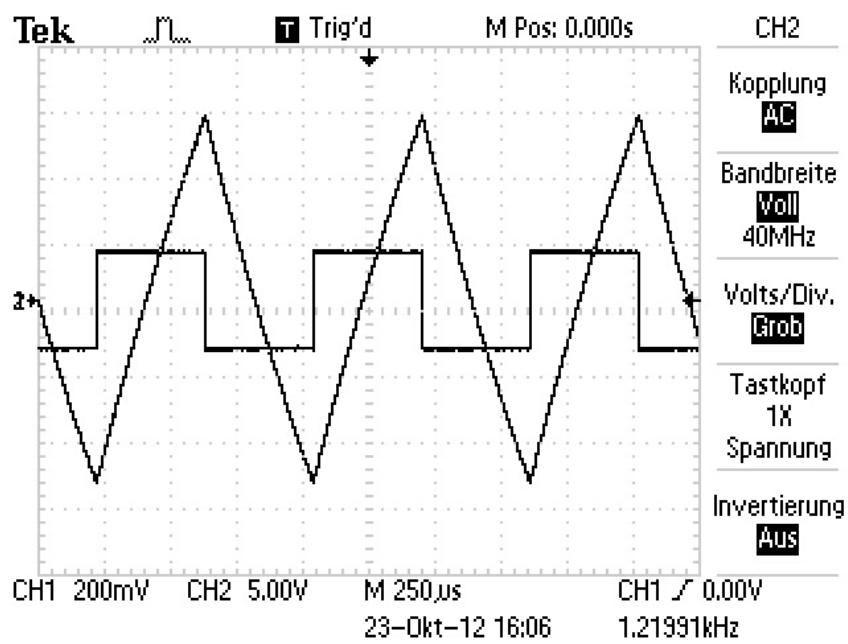


Abbildung 8: Rechteck zu Dreieck 1

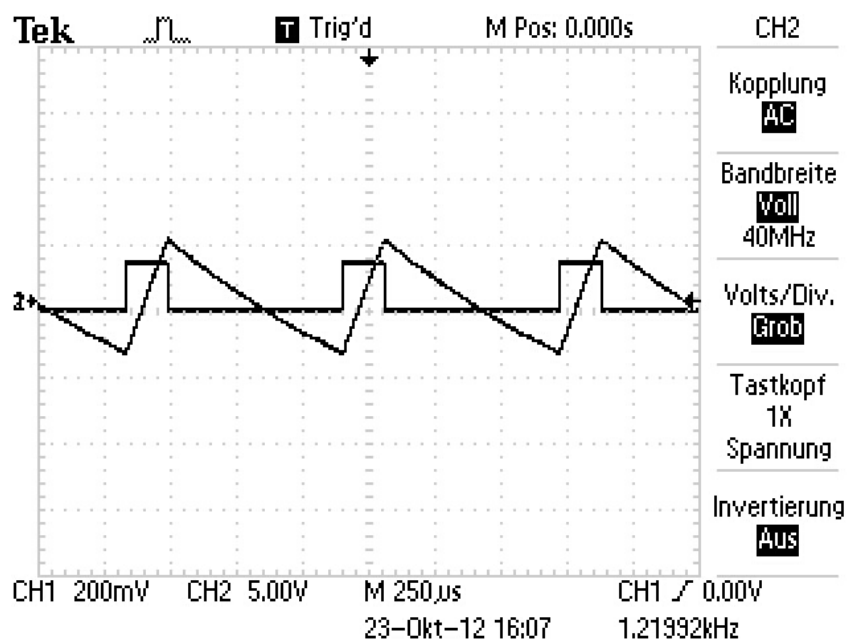


Abbildung 9: Rechteck zu Dreieck 2

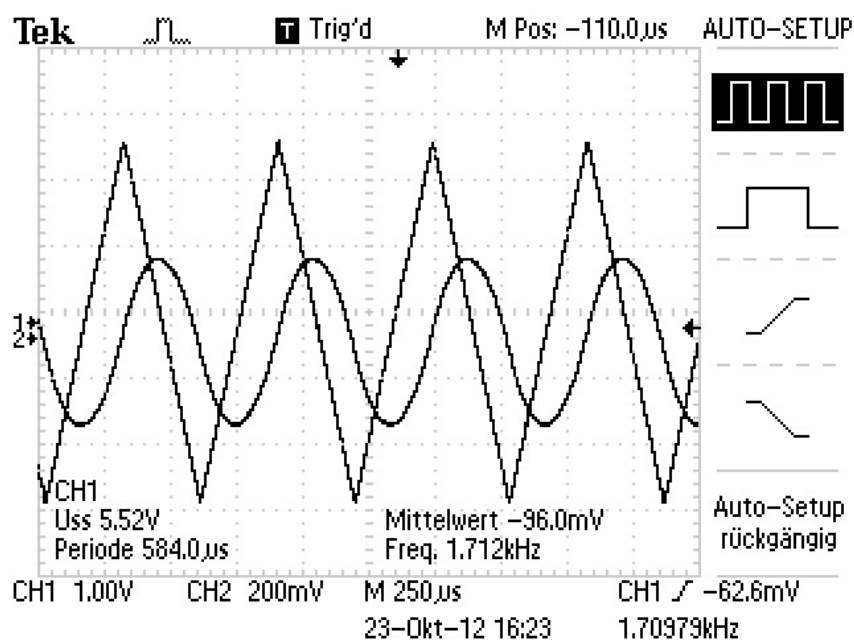


Abbildung 10: Dreieck zu Parabelbögen