

Das Kugelfall Viskosimeter nach Höppler

**TU Dortmund, Fakultät Physik
Anfänger-Praktikum**

Jan Adam

jan.adam@tu-dortmund.de

Dimitrios Skodras

dimitrios.skodras@tu-dortmund.de

04.12.12

Inhaltsverzeichnis

1	Theorie	3
2	Aufbau	3
3	Durchführung	4
4	Auswertung	4
4.1	Fehlerrechnung	4
4.2	Viskosität des Wassers	5
4.3	Anwendung der Andrade-Gleichung	6

1 Theorie

Auf bewegte Körper in Flüssigkeiten oder Gasen wirkt, ähnlich wie auf rollende oder gleitende Körper, eine Reibungskraft

$$\vec{F}_R = -6\pi\eta\vec{v}r, \quad (1)$$

die der Bewegung entgegen wirkt. Wichtig ist hier die Viskosität η , eine Stoffeigenschaft, die das Fließverhalten von Flüssigkeiten und Gasen beschreibt und proportional auf die Reibungskraft einwirkt. Sie ist zudem die einzige stoffspezifische Größe, die Einfluss auf die Reibungskraft hat. Die restlichen Größen hängen lediglich von der Körpergeometrie ab, sodass man die Viskosität mit einer für den Versuch vereinfachten Formel ermitteln lässt. K ist der Parameter, welcher jene Geometriegrößen, sowie die Fallhöhe enthält, t die gemessene Fallzeit, und die beiden Dichten die Kugeldichte ρ_K und die Flüssigkeitsdichte ρ_{Fl} .

$$\eta = K(\rho_K - \rho_{Fl}) \cdot t \quad (2)$$

Zu beachten ist, dass die Stokes'sche Reibung (1) nur für laminare Flüssigkeiten gilt. Laminare Flüssigkeiten bilden keine Verwirbelungen, sondern umfließen den Körper homogen. Eine Flüssigkeit wird als laminar bezeichnet, wenn ihre Reynoldszahl

$$Re = \frac{\rho v d}{\eta} = \frac{v d}{\nu} \quad (3)$$

unter dem kritischen Wert von 2000 bleibt. Ab diesem Wert werden Flüssigkeiten nicht mehr als laminar bezeichnet, jedoch können sich Verwirbelungen schon viel früher bilden, so dass $Re \ll 2000$ sein sollte.

2 Aufbau

Beim Kugelfall-Viskosimeters nach Höppler handelt es sich um zwei ineinander eingelassene Hohlzylinder aus Glas, welche mit Flüssigkeiten befüllt und hermetisch abgeschlossen werden können. Auf Abbildung 1¹ ist das Viskosimeter zu erkennen.

Der innere Zylinder weist Markierungen auf, durch die eine Strecke von 10cm abgesteckt werden. Er wird während des Versuchs mit der Flüssigkeit befüllt, deren Viskosität bestimmt werden soll und man legt eine Kugel hinein, deren Durchmesser nur geringfügig kleiner ist, als der des Zylinders. An einem Schanier kann man das Viskosimeter vertikal drehen, so dass die Kugel abzusinken beginnt. Dank der Markierungen kann man durch Messen der Zeit errechnen, welche Geschwindigkeit die Kugel erreicht. Über ein Thermometer kann abgelesen werden, welche Temperatur die

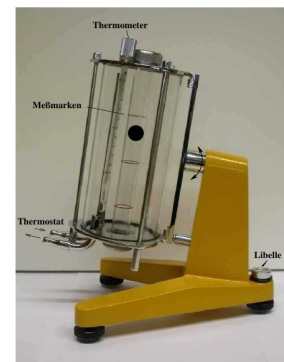


Abbildung 1: Viskosimeter

¹Viskosimeter nach Höppler - Das Bild ist aus der Versuchsanleitung entnommen

Probe zur Zeit hat und mit einer Libelle wird sichergestellt, dass das Viskosimeter im richtigen Winkel steht.

Der äußere Zylinder hat zwei Anschlüsse, durch die temperiertes Wasser fließen und man somit die Temperatur der Probe beliebig verändern kann. Dies ist wichtig, da die Viskosität stark Temperaturabhängig ist und man sie so für verschiedene Temperaturen messen kann.

3 Durchführung

Im durgeführten Versuch soll die Viskosität von destillierem Wasser mit Hilfe des Kugelfall-Viskosimeters nach Höppler bestimmt werden. Dabei wird eine Kugel in einen, mit destilliertem Wasser gefüllten, Zylinder gelegt und dieser so aufgestellt, dass die Kugel hindurchfällt. Wichtig ist dabei, dass der Kugeldurchmesser nur geringfügig kleiner ist als der des Zylinders und dass dieser leicht geneigt ist, damit die Kugel nicht chaotisch an die Ränder stößt und Wirbel verursacht, sondern gleichmäßig herabgleitet.

Beim Fallen wirken folgende Kräfte auf die Kugel: die Gewichtskraft F_g , die die Kugel nach unten beschleunigt, die Auftriebskraft F_A , die die Kugel nach oben treibt und die Reibungskraft (1), die proportional zur Fallgeschwindigkeit ist und ihr entgegen wirkt. Nach dem Fallenlassen nimmt die Geschwindigkeit der Kugel zunächst immer weiter zu, bis sich durch Zunahme der Reibungskraft ein Kräftegleichgewicht einstellt und die Kugel mit konstanter Geschwindigkeit absinkt. Es wird nun die Zeit gemessen, die die Kugel braucht um eine gewisse Strecke $d\vec{s}$ zurückzulegen. Hieraus lässt sich die Geschwindigkeit der Kugel und schließlich mit (2) die Viskosität des Wassers errechnen.

Der Versuch wird zweimal bei Raumtemperatur mit verschiedenen Kugeln und dann mit nur einer Kugel bei verschiedenen Wassertemperaturen von 20° bis 50° C durchgeführt, da die Viskosität stark von der Temperatur abhängig ist. Halblogarithmisches Auftragen der Daten ermöglicht ein Ablesen der Konstanten A und B aus Gleichung

$$\eta(T) = Ae^{\left(\frac{B}{T}\right)}, \quad (4)$$

welche die Viskosität in Abhängigkeit von der Temperatur beschreibt.

4 Auswertung

4.1 Fehlerrechnung

Da viele für die Auswertung notwendigen Größen fehlerbehaftet sind, ist es wichtig, den Einfluss dieser Fehler auf die ermittelten Größen herauszufinden. Neben den von den Messapparaturen verursachten Fehlern dienen der Mittelwert

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i, \quad (5)$$

\bar{x} = Mittelwert, N = Anzahl der Messungen

die Gaußsche Fehlerfortpflanzung

$$\Delta G = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial G}{\partial x_i} \cdot \Delta x_i \right)^2}, \quad (6)$$

x_i = Variable, Δx_i = Fehler der Variable

und die Varianz

$$s = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_i (x_i - \bar{x})^2}. \quad (7)$$

4.2 Viskosität des Wassers

$t_{kl}[\text{s}]$	$t_{kl}[\text{s}]$ Forts.	$t_{gr}[\text{s}]$	$t_{gr}[\text{s}]$ Forts.
12,42	12,01	71,10	71,13
12,30	12,30	71,00	71,56
11,98	11,95	71,35	70,93
12,30	11,89	71,52	71,43
12,10	11,90	71,38	70,90
12,03	12,20	71,32	71,10
12,02	12,23	71,18	71,06
11,79	12,15	71,03	71,90
11,98	11,92	70,96	71,21
11,88	12,09	71,05	71,36
$\bar{t}_{kl}[\text{s}]$	12,072	$\bar{t}_{gr}[\text{s}]$	71,223
$s_{kl}[\text{s}]$	0,173	$s_{gr}[\text{s}]$	0,253

Tabelle 1: Messzeiten für beide Kugeln durch das Fallrohr

Zur Ermittlung der Viskosität wird Formel (2) verwandt. Der Versuch wird mit zwei verschiedenen Kugeln durchgeführt, wobei für eine die Apparaturkonstante K_{kl} bekannt ist. Mit der ebenfalls gegebenen Masse der kleinen Kugel, sowie ihrem gemessenen

Durchmesser lässt sich die Dichte ρ_{kl} ermitteln. Die Dichte von Wasser wird aus Literaturangaben entnommen. Um die Apparaturkonstante K_{gr} sind neben der errechneten Viskosität die Dichte ρ_{gr} aus gemessenem Durchmesser und gemessener Masse nötig.

Größe	Wert	Fehler
d_{kl}	1,37 mm	0,02 mm ²
d_{gr}	1,38 mm	0,02 mm
m_{kl}	4,4531 g	-
m_{gr}	5,0 g	0,1 g ³
ρ_{kl}	13,556 $\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$	0,048 $\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$
ρ_{gr}	15,220 $\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$	0,111 $\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$
ρ_{Fl}	0,998 $\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ ⁴	-
K_{kl}	0,07640 $\frac{\text{mPa} \cdot \text{cm}^3}{\text{g}}$	-

Tabelle 2: relevante Kenngrößen

Aus den nun bekannten Größen ermittelt sich η mit dem Fehler aus (6) zu

$$\eta(\rho, t) = (11,583 \pm 0,180) \text{ mPa} \cdot \text{s}. \quad (8)$$

Die gesuchte Apparaturkonstante K_{gr} lässt sich nun errechnen durch Gleichsetzen:

$$K_{gr}(\rho_{gr} - \rho_{Fl}) \cdot t_{gr} = K_{kl}(\rho_{kl} - \rho_{Fl}) \cdot t_{kl} \Leftrightarrow K_{gr} = K_{kl} \frac{(\rho_{kl} - \rho_{Fl})}{(\rho_{gr} - \rho_{Fl})} \cdot \frac{t_{kl}}{t_{gr}}$$

$$K_{gr} = (0,01143 \pm 3,547 \cdot 10^{-3}) \frac{\text{mPa} \cdot \text{cm}^3}{\text{g}} \quad (9)$$

Um die Verwendung genannter Formeln zur Ermittlung der Viskosität zu rechtfertigen, muss die Reynoldszahl für diesen Versuch ermittelt und mit der kritischen Reynoldszahl verglichen werden. Nach (3) ergibt sich

$$Re = \frac{1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 0,00833 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 0,014 \text{m}}{0,0115 \text{Pa} \cdot \text{s}} \approx 10 \ll 2000, \quad (10)$$

weshalb man von einer laminaren Flüssigkeit sprechen darf und die benutzten Formeln legitim sind.

4.3 Anwendung der Andrade-Gleichung

Um die Koeffizienten A und B aus Gleichung (4) zu ermitteln, wird die Fallzeit zu verschiedenen Temperaturen gemessen.

²von Schieblehre angegebener Fehler

³kleinste Größenordnung der Messung durch Waage

⁴Wasser.de (2010), Dichtetabelle von Wasser bei verschiedenen Temperaturen URL: www.wasser.de/aktuell/forum

T [°C]	$\frac{1}{T}$	$t_1[s]$	$t_2[s]$	$\bar{t}[s]$	Δt	$\ln(t)$
21	0,0476	81,16	81,04	81,10	0,06	4,396
26	0,0385	72,87	72,92	72,90	0,02	4,289
29	0,0345	68,27	68,41	68,34	0,07	4,224
32	0,0313	64,44	64,15	64,30	0,14	4,163
35	0,0286	60,41	60,69	60,55	0,14	4,103
38	0,0263	57,61	57,55	57,58	0,03	4,053
41	0,0244	54,61	54,04	54,33	0,29	3,995
44	0,0227	51,32	51,83	51,58	0,25	3,943
47	0,0213	49,00	49,24	49,12	0,12	3,894
50	0,0200	46,58	46,24	46,41	0,17	3,838
53	0,0189	44,47	44,80	44,64	0,17	3,799

Tabelle 3: Durch Temperaturerhöhung verringerte Fallzeit

Um aus dem Exponentialzusammenhang eine lineare Beziehung herzustellen, um durch lineare Regression mittels GNUplot die Koeffizienten zu bestimmen, werden folgende Umformungsschritte unternommen:

$$\begin{aligned}
\eta(T) &= A \exp\left(\frac{B}{T}\right) \\
\ln\left(\frac{\eta}{A}\right) &= \frac{B}{T} \\
\ln[\underbrace{K_{gr}(\rho_{gr} - \rho_{Fl})}_{=c}] + \underbrace{\ln(t)}_{=y} &= \underbrace{\frac{B}{T}}_{=a \cdot x} + \ln(A) \\
y &= a \cdot x + \underbrace{\ln\left(\frac{A}{c}\right)}_{=b} \\
y &= a \cdot x + b
\end{aligned}$$

$$\text{mit } a = 21,048 \pm 1,72 \quad \text{und} \quad b = 3,464 \pm 0,05. \quad (11)$$

Zurücktransferiert erhält man wieder A und B zu

$$A = c \cdot e^b = 5,193 \pm 0,05 \quad (12)$$

$$B = a = 21,048 \pm 1,72 \quad (13)$$

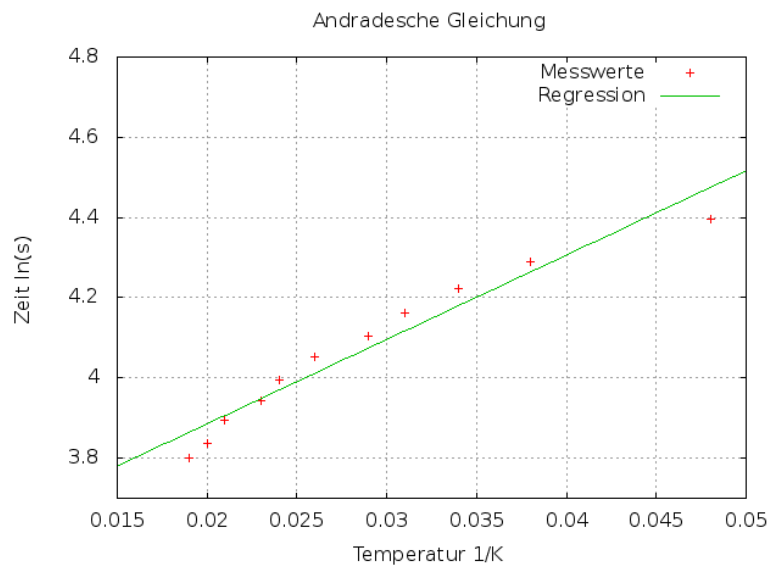


Abbildung 2: lineare Abhängigkeit von $\frac{1}{T}$ und $\ln(t)$

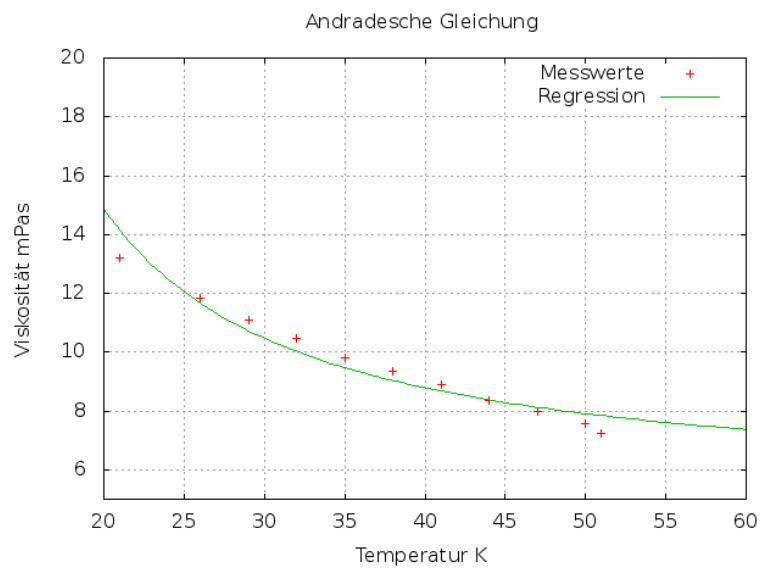


Abbildung 3: endgültige Andrade-Gleichung