Versuch V304: Das Magnetische Moment

1 Ziel

Ziel des Versuches ist die Messung des magnetischen Momentes eines Permanentmagnetens auf vier unterschiedliche Arten.

2 Stichworte

Biot-Savartsche Gesetz, Drehimpuls, Drehmoment, Gravitation, Helmholtz-Spulen, Kreisel, magnetischer Dipol, magnetisches Moment, magnetische Induktion, Maxwellsche Gleichungen, Trägheitsmoment, Präzession

3 Theoretische Grundlagen

Ein Magnet bildet einen magnetischen Dipol mit einem positiven und negativen Magnetpol. Die Polstärke p des positiven und negativen Poles sind dabei immer gleich groß und kommen als Paar vor. Anders als in der Elektrostatik kommen magnetische Monopole in der Natur nicht vor sondern nur als magnetische Dipole. Hierbei ist das magnetische Moment $\vec{\mu}$ durch

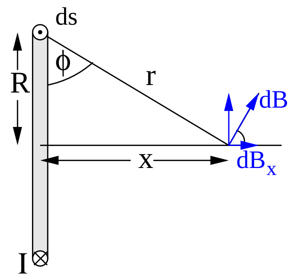
$$\vec{\mu} = p \cdot \vec{l} \tag{1}$$

definiert, wobei $\vec{l}$ der Abstand zwischen dem positiven und negativen Pol ist. Eine Leiterschleife, die von einem Strom I durchflossen wird, stellt einen magnetischen Dipol mit dem Dipolmoment $\vec{\mu} = I \cdot \vec{A}$ dar, der von einem Magnetfeld $\vec{H}$ umgeben ist, dessen Betrag die magnetische Feldstärke ist.

In einem homogenen Magnetfeld wirkt auf einen Dipol[1] eine Kraft, die ein Drehmoment $\vec{\mathrm{D}} = \vec{\mu} \times \vec{\mathrm{B}}$ erzeugt. Der Dipol erfährt hierbei solange eine Drehung, bis das magnetische Moment $\vec{\mu}$ und die magnetische Flußdichte $\vec{\mathrm{B}}$ gleichgerichtet sind.

Zum Aufbau eines homogenen Magnetfeldes werden häufig zwei gleichsinnig vom Strom I durchflossene Kreisspulen so angeordnet, daß die Achsen zusammenfallen und daß der gegenseitige Abstand der Spulen dem Spulenradius R entspricht. Das Magnetfeld im Inneren des Helmholtz-Spulenpaares ist

[1] Im folgenden wird mit Dipol ein magnetischer Dipol bezeichnet. Dabei kann es sich um einen Permanentmagneten oder auch um einen stromdurchflossenen Leiter handeln.



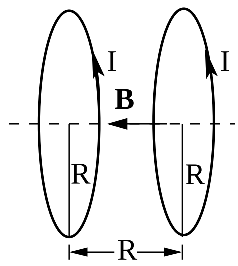


Abbildung 1: (a) Magnetfeld einer Leiterschleife und (b) Helmholtz-Spulen

auf der Symmetrieachse homogen und läßt sich aus aus dem Biot-Savartschen Gesetz

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 \, I}{4\,\pi} \, \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3} \tag{2}$$

für eine stromdurchflossene Spule mit einer Windung

$$\vec{B}(x) = \frac{\mu_0 \, I}{2} \, \frac{R^2}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \cdot \hat{x} \tag{3}$$

herleiten. Das Feld im Zentrum des Helmholtz-Spulenpaares findet man durch Überlagerung der Einzelfelder, wobei der Ursprung im Idealfall in der Mitte des Spulenpaares gelegt wird. In diesem Experiment unterscheidet sich der Spulenradius R geringfügig vom Abstand d = 2 · x, sodaß der allgemeine Fall berechnet wird. Das Feld in der Mitte der Helmholtz-Spulen ergibt sich dann zu

$$B(0) = B_1(x) + B_1(-x) = \frac{\mu_0 \, I \, R^2}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \tag{4}$$

Der Feldgradient $\frac{dB}{dx}$ entlang der Symmetrieachse ergibt sich dann zu:

$$\frac{dB}{dx} = -3\,\mu_0 \, I \, R^2 \frac{x}{(R^2 + x^2)^{5/2}} \tag{5}$$

Im Idealfall verschwindet der Feldgradient auf der Symmetrieachse in einen relativ großen Bereich, sodaß sich ein nahezu homogenes Feld ergibt.

4 Vorbereitung

- Stellen Sie mindestens 5 Größen des elektrisch und magnetischen Feldes gegenüber und erklären Sie die Gemeinsamkeiten.
- Berechnen Sie für einen Strom vom I=1 A die magnetische Flußdichte B im Inneren des Helmholtz-Spulenpaares.

5 Aufgaben

Bestimmen Sie das magnetische Moment der Kugel

- unter Ausnutzung der Gravitation.
- unter Ausnutzung der Schwingungsdauer T.
- unter Ausnutzung der Präzession und
- über den Feldgradienten eines externen Magnetfeldes und vergleichen Sie die Ergebnisse.

6 Versuchsaufbau

Der Versuchsaufbau ist in Abb. 2 dargestellt. Ein kleiner zylindrischer Permanentmagnet befindet sich in der Mitte einer Billiardkugel, dessen magnetisches Moment μ_{Dipol} in Richtung des Stiels gerichtet ist, der sich auf der Kugel befindet. Das äußere Magnetfeld wird durch ein Helmholtz-Spulenpaar erzeugt, dessen Spulen einen Abstand von d = 0.138 m und einen Radius von $R_{\text{Spule}} = 0.109$ m haben.

In der Mitte der Helmholtz-Spulen befindet sich ein Messingzylinder, auf dem sich die Kugel mit dem Permanentmagneten mittels eines Luftkissens

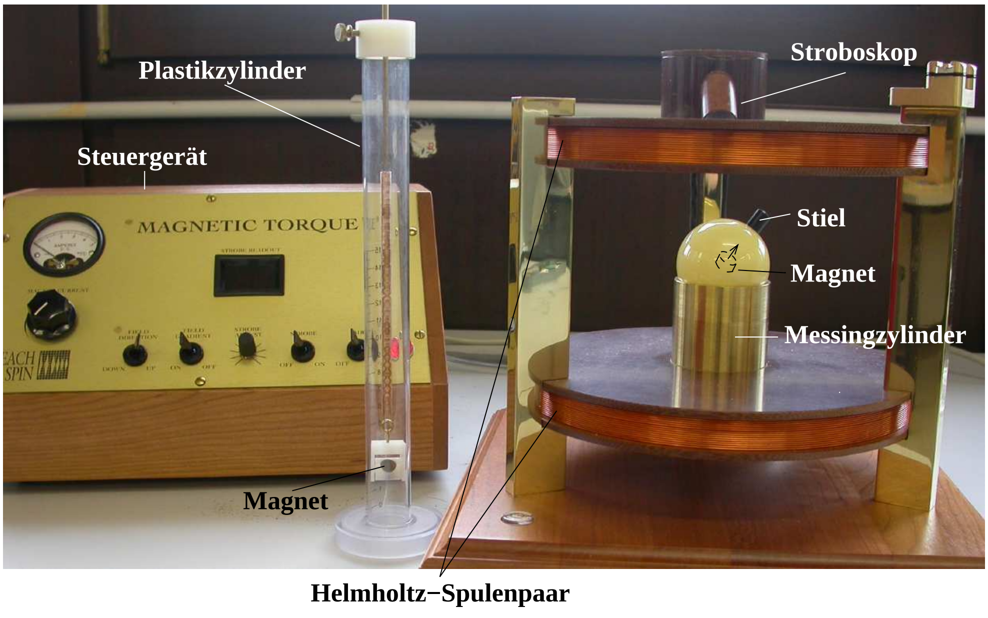


Abbildung 2: Experimenteller Aufbau

reibungsfrei bewegen kann. Zur Bestimmung der Drehbewegung befindet sich ein Stroboskop an der oberen Spule des Helmholtz-Spulenpaares. Der Spulenstrom und somit auch das externe Magnetfeld, das Stoboskop und das Luftkissen können über ein Steuergerät angesteuert werden. Sie haben dabei die Möglichkeit den Spulenstrom, die Feldrichtung, den Feldgradienten und das Stroboskop einzustellen. Da bei großer Belastung (d.h. großen Strömen) die Temperatur des Spulendrahtes steigt, und somit auch der Widerstand des Drahtes, kann bei längerer Belastung der Spulenstrom sinken. Das Magnetfeld kann dann seine maximale Stärke nicht erreichen! Drehen Sie aus diesem Grund den Spulenstrom immer herunter, wenn Sie das externe Magnetfeld nicht benötigen.

Bei der letzten Meßmethode wird das magnetische Moment μ_{Magnet} eines Magneten gemessen, der in einem Plastikzylinder an einer Feder angehängt ist. Der Plastikzylinder wird hierzu auf den Messingzylinder gesteckt und die Auslenkung im Magnetfeld gemessen. Der Magnet ist drehbar aufgehängt und richtet sich unter Einfluß des Magnetfeldes in Feldrichtung aus. Je nach Ausrichtung, die durch einen Pfeil am Magneten gekennzeichnet ist, wirkt eine Kraft auf den Magneten.

7 Durchführung und Auswertung

Zuerst sollen die Apparatekonstanten bestimmt werden. Die geometrischen Abmessungen der Helmholtz-Spulen wurden im vorherigen Kapitel angegeben. Überprüfen Sie die dort gemachten Angaben. Messen Sie den Radius $\mathrm{r_K}$ der Billiardkugel und deren Masse $\mathrm{m_K}$ und berechnen Sie aus den gewonnenen Ergebnissen das Trägheitsmoment $J_K = 2/5\, m_K\, r_K^2$. Hierbei kann die Kugel in guter Näherung als eine Vollkugel angesehen werden. Bestimmen Sie die Länge des Stiels, der sich an der Billiardkugel befindet.

• Bestimmung des magnetischen Momentes eines Magnetens unter Ausnutzung der Gravitation:

Bei dieser statischen Methode wirkt auf eine Masse m die Gravitationskraft $\vec{\mathrm{F}}_\mathrm{g} = \mathrm{m} \cdot \vec{\mathrm{g}}$, die ein Drehmoment $\vec{\mathrm{D}}_\mathrm{g} = \mathrm{m} \cdot (\vec{\mathrm{r}} \times \vec{\mathrm{g}})$ auf die Billiardkuger ausübt (Abb. 3). Die verschiebbare Masse m ist auf eine Aluminiumstange gesteckt, die wiederum in den Stiel der Kugel gesteckt werden kann. Der für die Berechnung des Drehmoments relevante Abstand r ist die Strecke von der aufgesteckten Masse m bis zum Anfang des Stiels. Die geometrischen Abmessungen der Kugel wurden dabei so gewählt, daß $|\vec{r}|$ dem Abstand zwischen dem Schwerpunkt der Masse und dem Zentrum der Kugel entspricht.

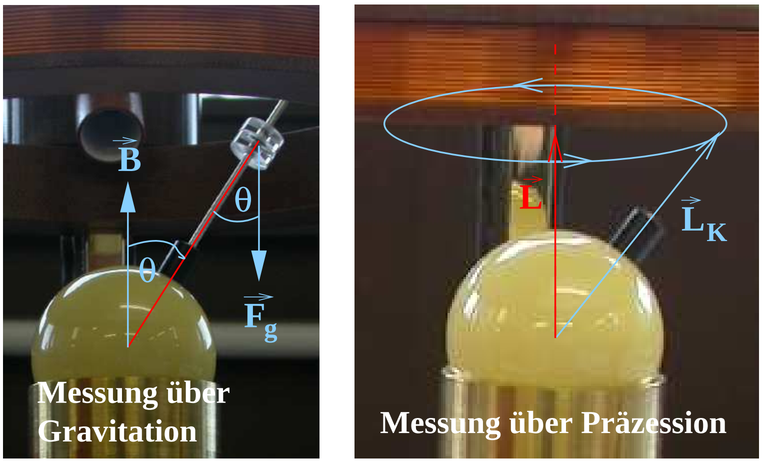


Abbildung 3: (links) Kräftegleichgewicht bei dem Messung unter Ausnutzung der Gravitation. (rechts) Messung unter Ausnutzung der Präzession.

Der Gravitationskraft wirkt das Magnetfeld $\vec{B}$ der Helmholtz-Spulen entgegen. Bei **einer** gegebenen Magnetfeldstärke liegt ein Gleichgewicht vor, zwischen dem Drehmoment $\vec{D}_B = \vec{\mu}_{Dipol} \times \vec{B}$ und dem Drehmoment $\vec{D}_g$, welches die Gravitation verursacht.

$$\vec{\mu}_{Dipol} \times \vec{B} = m \cdot (\vec{r} \times \vec{g}) \tag{6}$$

Die Kreuzprodukte kann man durch $r\,m\,g\,\sin(\theta) = \mu_{Dipol}\,B\,\sin(\theta)$ ersetzten, wobei θ der von der Aluminiumstange und dem Magnetfeld (bzw. der Gravitationskraft) eingeschlossene Winkel ist (siehe Abb. 3). Da $\vec{g}$ und $\vec{B}$ parallel sind, fällt die Winkelabhängigkeit weg und man kann das magnetische Moment μ_{Dipol} über den Abstand r und das Magnetfeld der Helmholtz-Spulen bestimmen.

$$\mu_{Dipol} \cdot B = m \cdot r \cdot g \tag{7}$$

Im Experiment wird eine Aluminiumstange mit einer verschiebbaren Masse m in die Billardkugel gesteckt und auf den Messingzylinder in der Mitte der Helmholtz-Spulen gesetzt. Führen Sie folgende Messungen für mindestens 10 Abstände r durch. Schalten Sie das Gebläse für das Luftkissen an und stellen Sie die Feldrichtung auf "up" (Feldgradient "off"). Regeln Sie für ein gegebenes r das Magnetfeld $\vec{B}$ so ein, daß sich das System in einem Kräftegleichgewicht befindet. Notieren Sie sich das eingestellte Magnetfeld und den Abstand r . Wiederholen Sie die Messung mindestens 9 mal. Tragen Sie r gegen B auf und berechnen Sie Mithilfe linearer Ausgleichsrechnung das magnetische Moment μ_{Dipol} der Kugel. Hinweis: Die verschiebbare Masse kann als Punktmasse angesehen werden und die Masse der Aluminiumstange kann bei der Berechnung von μ vernachlässigt werden.

- **Bestimmung des magnetischen Momentes über die Schwingungsdauer eines Magnetens:**

Bei dieser Meßmethode wird die Billiardkugel in Schwingung versetzt. Die Kugel verhält sich im homogenen magnetischem Feld der Helmholtz-Spulen wie ein harmonischer Oszillator, dessen Bewegung sich durch

$$-|\vec{\mu}_{Dipol} \times \vec{B}| = \vec{J_K} \cdot \frac{d^2\theta}{d\,t^2} \tag{8}$$

beschreiben läßt. Die Lösung dieser Differentialgleichung ist die Schwingungsdauer T der oszillierenden Kugel. Das magnetische Moment μ_{Dipol} läßt sich dann quantitativ über das Trägheitsmoment J_K der Kugel, der Magnetfeldstärke B und der Schwingungsdauer

$$T^2 = \frac{4\,\pi^2\,J_K}{\mu_{Dipol}}\,\frac{1}{B} \tag{9}$$

bestimmen. Im Experiment wird zum Messen der Schwingungsdauer T die Kugel auf das Luftkissen gesetzt und das Magnetfeld eingeschaltet. Dann wird der Stiel an der Kugel um einen **kleinen Winkel** ausgelenkt. Die Kugel führt dann wie ein Pendel Schwingungen aus und läßt sich mathematisch wie ein harmonischen Oszillator behandeln. Messen Sie für mindestens 10 Stromstärken I die Periodendauer T, wobei zur Verbesserung der Genauigkeit über 10 Perioden gemittelt werden soll. Tragen Sie T^2 gegen $1/B$ auf und berechnen Sie das magnetische Moment μ_{Dipol} des Dipols mittels linearer Regression.

- **Bestimmung des magnetischen Momentes über die Präzession eines Magnetens:**

In diesem Versuchsteil wird die Präzession der rotierenden Kugel für die Bestimmung des magnetischen Momentes μ_{Dipol} ausgenutzt. Wirkt eine äußere Kraft auf die Drehachse eines rotierenden Körpers, dann bewegt sich die Drehachse (Figurenachse) des Kreisels auf einem Kegelmantel um die Drehimpulsachse $\vec{\mathrm{L}}$. Die Bewegung der Figurenachse wird dabei Präzession genannt. Nachdem die Billiardkugel in Rotation versetzt wurde, wird sie um einen kleinen Winkel ausgelenkt. Durch die Rotation bleibt die Auslenkung stabil. Bei eingeschaltetem Magnetfeld wirkt eine äußere Kraft auf die Kugel und sie beginnt zu präzedieren. Die Präzessionsbewegung läßt sich durch die Differentialgleichung

$$\vec{\mu}_{Dipol} \times \vec{B} = \frac{d\vec{L_K}}{dt} \tag{10}$$

beschreiben, wobei die Präzessionsfrequenz Ω_p

$$\Omega_p = \frac{\mu\, B}{|L_K|} \tag{11}$$

eine Lösung der Differentialgleichung ist. Den Drehimpuls $\mathrm{L_K} = \mathrm{J_K}\,\omega$ der Kugel kann man über das Trägheitsmoment J_K der Billiardkugel und deren Kreisfrequenz $\omega = 2\,\pi\nu$ bestimmen. Da sich die Präzessionsfrequenz Ω_p aus der Zeit T_p für einen Umlauf berechnen läßt. Läßt sich das magnetische Moment μ_{Dipol} der Kugel aus der Zeit T_p für eine Periode und aus der Magnetfeldstärke über

$$\frac{1}{T_p} = \frac{\mu_{Dipol}}{2\,\pi\, L_K}\, B \tag{12}$$

berechnen.

Um die Messung durchzuführen, muß die Rotationsfrequenz $\nu = \omega/2\,\pi$ der Kugel konstant gehalten werden. Die kann durch ein Stroboskop kontrolliert werden, welches in gleichen Zeitabständen Lichtblitze aussendet. Auf der Billiardkugel befindet sich eine weiße Markierung, die man unter dem Stroboskoplicht beobachtet. Erscheint die Markierung stationär, dann hat die Kugel die am Gerät eingestellte Frequenz. Um eine konstante Frequenz zu gewährleisten, ist einerseits sofort nach Erreichen der eingestellten Frequenz mit dem Messen zu beginnen und andererseits die Frequenz geeignet zu wählen, da diese exponentiell von der Zeit abhängt. Geeignet sind Frequenzen zwischen $\nu = 4\ Hz$ und $\nu = 6\ Hz$, da hier der Abfall der Exponentialkurve bereits hinreichend langsam geschieht (etwa 2 Hz pro Minute).

Für die Messung wird die Kugel auf das Luftkissen gesetzt und das Stroboskop auf eine feste Frequenz zwischen $\nu = 4\ Hz$ und $\nu = 6\ Hz$ eingestellt. Das Magnetfeld bleibt zunächst aus. Dann wird die Billiardkugel in Rotation versetzt und mit einigen gezielten Berührungen (mit einem Stift oder einem Fingernagel) aus der senkrechten Position ausgelenkt. Achten Sie darauf, daß die Rotation der Kugel stabil ist und nicht "eiert", sonst kommt es beim Einschalten des Magnetfeldes zu Nutationsbewegungen. Beobachten Sie dann den weißen Punkt auf dem Stiel der Kugel. Ist die eingestellte Frequenz erreicht, erscheint der Punkt stationär und das Magnetfeld wird eingeschaltet. Messen Sie dann die Zeit T_p für einen Umlauf des Stiels. Führen Sie die Messung für mindestens 10 Magnetfeldstärken durch und messen Sie die die Umlaufzeit der Präzession mindestens 3 mal für eine Magnetfeldstärke. Tragen Sie ihre gemittelten, reziproken Periodendauern $(1/T_p)$ gegen die magnetische Flußdichte B auf und ermitteln Sie mittels linearer Regression das magnetische Moment μ_{Dipol} der Kugel.

Vergleichen Sie die Ergebnisse für das magnetische Moment μ_{Dipol} des Dipols die Sie aus den einzelnen Messungen erhalten haben. Welche Meßmethode ist genauer?

• **Bestimmung des magnetischen Momentes über den Feldgradienten eines inhomogenen Magnetfeldes:**

In diesem Versuchteil wird das magnetische Moment eines Magneten bestimmt, der sich in einem inhomogenen magnetischen Feld befindet. Die Kraft, die das inhomogene Magnetfeld auf den Dipol ausübt, läßt sich durch den Feldgradienten dB/dx (Gleichung 5) und das magnetische Moment $\mu_{Magnet,x}$ über

$$F_{Magnet} = \mu_{Magnet,x} \frac{dB}{dx} \tag{13}$$

ausdrücken. Zur Bestimmung der Kraft F_{Magnet} wird der Magnet an eine Feder gehängt. Die Gegenkraft ist die an der Feder angreifende Kraft $F_{Feder} = k \cdot x$, die sich durch das Hookesche Gesetz berechnen läßt, wobei k die Federkonstante ist. Liegt ein Kräftegleichgewicht vor, dann gilt:

$$k\,x = \mu_{Magnet} \frac{dB_x}{dx} \tag{14}$$

Für die Bestimmung des magnetischen Momentes müssen zwei unabhängige Messungen durchgeführt werden. Stecken Sie hierzu den Plastikzylinder auf den Messingzylinder. Zuerst muß die Federkonstante bestimmt werden. Hängen Sie hierzu nacheinander Gewichte von je 1 g an den Magneten und messen Sie die Auslenkung. Ermitteln Sie aus diesen Daten die Federkonstante k mittels linearer Ausgleichsrechnung. Für die zweite Messung muß das inhomogene Magnetfeld eingeschaltet werden (Feldgradient "ON"). Der Magnet wird so justiert, daß er sich bei ausgeschaltetem Magnetfeld in der Mitte der Helmholtzspulen befindet. Von diesem Punkt wird die Auslenkung mit eingeschaltetem Magnetfeld gemessen. Stellt man den Strom für die Helmholtz-Spulen an, kommt es zu einer Schingungsbewegung des Magnetens an der Feder. Sobald diese aufhört, sich also das Kräftegleichgewicht eingestellt hat, wird die Auslenkung gemessen. Wiederholen Sie die Messung für mindestens 10 Magnetfeldstärken. Tragen Sie die Auslenkung als Funktion des Feldgradienten auf und ermitteln Sie das magnetische Moment mittels linearer Regression.

Literatur

[1] K. Lüders, R.O. Pohl, Einführung in die Physik (Elektrizitätslehre und Optik), Springer Verlag (2006)