Das Kugelfall Viskosimeter nach Höppler

TU Dortmund, Fakultät Physik

Anfänger-Praktikum

Jan Adam
jan.adam@tu-dortmund.de

Dimitrios Skodras
dimitrios.skodras@tu-dortmund.de

04.12.12

Inhaltsverzeichnis

1 Theorie

Auf bewegte Körper in Flüssigkeiten oder Gasen wirkt, ähnlich wie auf rollende oder gleitende Körper, eine Reibungskraft

$$\vec{F}_R = -6\pi\eta\vec{v}r, \tag{1}$$

die der Bewegung entgegen wirkt. Wichtig ist hier die Viskosität η, eine Stoffeigenschaft, die das Fließverhalten von Flüssigkeiten und Gasen beschreibt und proportional auf die Reibungskraft einwirkt. Sie ist zudem die einzige stoffspezifische Größe, die Einfluss auf die Reibungskraft hat. η errechnet sich über

$$\eta = K(\rho_K - \rho_{Fl}) \cdot t. \tag{2}$$

Dabei ist K die Apparaturkonstante, welcher jene Geometriegrößen, sowie die Fallhöhe enthält. t entspricht der gemessenen Fallzeit und ρ_K und ρ_{Fl} der Kugel- bzw. der Flüssigkeitsdichte. Die restlichen Größen hängen lediglich von der Körpergeometrie ab, sodass man die Viskosität mit der oben angegebenen Formel ermitteln lässt.

Zu beachten ist, dass die durch Gleichung (1) beschriebene Stokes'sche Reibung nur für laminare Flüssigkeiten gilt. Laminare Flüssigkeiten bilden keine Verwirbelungen, sondern umfließen den Körper homogen. Eine Flüssigkeit wird als laminar bezeichnet, wenn ihre Reynoldszahl

$$Re = \frac{\rho v d}{\eta} = \frac{vd}{\nu} \tag{3}$$

unter dem kritischen Wert von 2000 bleibt. Ab diesem Wert werden Flüssigkeiten nicht mehr als laminar bezeichnet, jedoch können sich Verwirbelungen schon viel früher bilden, so dass $Re \ll 2000$ sein sollte.

2 Aufbau

Beim Kugelfall-Viskosimeters nach Höppler handelt es sich um zwei ineinander eingelassene Hohlzylinder aus Glas, welche mit Flüssigkeiten befüllt und hermetisch abgeschlossen werden können. Auf Abbildung 1 [1] ist das Viskosimeter zu erkennen.
Der innere Zylinder weißt Markierunge auf, durch die eine Strecke von $x = 10$ cm abgemessen wird. Er wird während des Versuchs mit der Flüssigkeit befüllt, deren Viskosität bestimmt werden soll. Dazu legt man eine Kugel hinein, deren Durchmesser nur geringfügig kleiner ist, als der des Zylinders. An einem Schanier kann man das Viskosimeter vertikal drehen, so dass die Kugel abzusinken beginnt. Durch das Messen der Zeit, die die Kugel

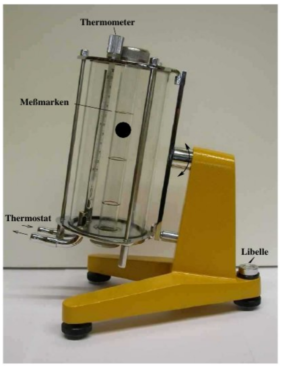

Abbildung 1: Viskosimeter

[1] Viskosimeter nach Höppler - Das Bild ist aus der Versuchsanleitung entnommen

benötigt um die Markierungen zu passieren kann man errechnen,
welche Geschwindigkeit die Kugel erreicht.
Beim Fallen wirken folgende Kräfte auf die Kugel: die Gewichtskraft F_g, die die Kugel nach unten beschleunigt, die Auftriebskraft F_A, die die Kugel nach oben treibt und die Reibungskraft (1), die proportional zur Fallgeschwindigkeit ist und ihr entgegen wirkt.
Nach dem Fallenlassen nimmt die Geschwindigkeit der Kugel zunächst immer weiter zu, bis sich schließlich durch Zunahme der Reibungskraft ein Kräftegleichgewicht einstellt und die Kugel mit konstanter Geschwindigkeit absinkt.
Über ein Thermometer wird dabei abgelesen, welche Temperatur die Probe zur Zeit hat und mit einer Libelle wird sichergestellt, dass das Viskosimeter im richtigen Winkel steht.
Der äußere Zylinder hat zwei Anschlüsse, durch die temperiertes Wasser fließen kann und somit die Temperatur der Probe veränderbar wird. Dies ist wichtig, da die Viskosität stark Temperaturabhängig ist und so eine Temperaturabhängigkeit dargestellt werden kann.

3 Durchführung

Im durchgeführten Versuch soll die Viskosität von destillierem Wasser mit Hilfe des Kugelfall-Viskosimeters nach Höppler bestimmt werden. Dabei wird eine Kugel in einen mit destilliertem Wasser gefüllten Zylinder gelegt und dieser so aufgestellt, dass die Kugel hindurchfällt. Wichtig ist dabei, dass der Kugeldurchmesser nur geringfügig kleiner ist als der des Zylinders und dass dieser leicht geneigt ist, damit die Kugel nicht chaotisch an die Ränder stößt und Wirbel verursacht, sondern gleichmäßig herabgleitet.
Sobald die Kugel gleichmäßig absinkt wird die Zeit gemessen, die die Kugel braucht um eine Strecke $d = 10cm$ zurückzulegen. Hieraus lässt sich die Geschwindigkeit der Kugel und schließlich mit Gleichung (2) die Viskosität des Wassers errechnen.
Der Versuch wird zweimal bei Raumtemperatur mit verschiedenen Kugeln und dann mit nur einer Kugel bei verschiedenen Wassertemperaturen von 20° bis 50° C durchgeführt, da die Viskosität stark von der Temperatur abhängig ist. Halblogarithmisches Auftragen der Daten ermöglicht ein Ablesen der Konstanten A und B aus der Andradeschen Gleichung

$$\eta(T) = Ae^{\left(\frac{B}{T}\right)}, \tag{4}$$

welche die Viskosität in Abhängigkeit von der Temperatur beschreibt.

4 Auswertung

4.1 Fehlerrechnung

Da viele für die Auswertung notwendigen Größen fehlerbehaftet sind, ist es wichtig, den Einfluss dieser Fehler auf die ermittelten Größen herauszufinden. Neben den, von den Messapparaturen verursachten Fehlern, dienen der Mittelwert

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i, \tag{5}$$

$\bar{x}$ = Mittelwert, N = Anzahl der Messungen

die Gaußsche Fehlerfortpflanzung

$$\Delta G = \sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial G}{\partial x_i}\cdot \Delta x_i\right)^2}, \tag{6}$$

x_i = Variable, Δx_i = Fehler der Variable

und die Standardabweichung des Mittelwerts

$$\bar{s} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)}\sum_{i}^{N}(x_i - \bar{x})^2}. \tag{7}$$

4.2 Viskosität des Wassers

t_{kl}[s]	t_{kl}[s] Forts.	t_{gr}[s]	t_{gr}[s] Forts.
12,42	12,01	71,10	71,13
12,30	12,30	71,00	71,56
11,98	11,95	71,35	70,93
12,30	11,89	71,52	71,43
12,10	11,90	71,38	70,90
12,03	12,20	71,32	71,10
12,02	12,23	71,18	71,06
11,79	12,15	71,03	71,90
11,98	11,92	70,96	71,21
11,88	12,09	71,05	71,36
$\bar{t}_{kl}$[s]	12,072	$\bar{t}_{gr}[s]$	71,223
$\bar{s}_{kl}$[s]	0,039	$\bar{s}_{gr}$[s]	0,057

Tabelle 1: Messzeiten für beide Kugeln durch das Fallrohr

Zur Ermittlung der Viskosität wird Formel (2) verwandt. Der Versuch wird mit zwei verschiedenen Kugeln durchgeführt, wobei für eine die Apparaturkonstante K_{kl} bekannt ist. Mit der ebenfalls gegebenen Masse der kleinen Kugel, sowie ihrem gemessenen

Durchmesser lässt sich die Dichte ρ_{kl} ermitteln. Die Dichte von Wasser wird aus Literaturangaben entnommen. Um die Apparaturkonstante K_{gr} zu bestimmen, sind neben der errechneten Viskosität die Dichte ρ_{gr} aus gemessenem Durchmesser und gemessener Masse nötig.

Der Fehler der Durchmesser $\mathrm{d}_{kl/gr}$ wird durch den auf der Schieblehre angegebene Fehler verwandt. Jener Fehler der Massen $\mathrm{m}_{kl/gr}$ entspricht der kleinsten Größenordnung der zur Messung benutzten Waage. Die Dichte von Wasser als benötigter Wert wurde aus (wissenschaft-technik-ethik.de von Dr.-Ing H. Grimm, Wasser und Dichte/Dichtetabelle - URL: www.wissenschaft-technik-ethik.de/wasser_dichte.html) entnommen. Die Fehler der Dichten $\rho_{kl/gr}$ ergeben sich aus (6) zu

$$\Delta\rho_{kl} = \sqrt{\left(\frac{\partial\rho_{kl}}{\partial d_{kl}}\Delta d_{kl}\right)^2 + \left(\frac{\partial\rho_{kl}}{\partial m_{kl}}\Delta m_{kl}\right)^2} = \rho_{kl}\sqrt{\left(-3\frac{\Delta d_{kl}}{cm}\right)^2 + \left(\frac{\Delta m_{kl}}{g}\right)^2}$$
$$= 0,020\frac{g}{cm^3} \tag{8}$$
$$\Delta\rho_{gr} = \sqrt{\left(\frac{\partial\rho_{gr}}{\partial d_{gr}}\Delta d_{gr}\right)^2 + \left(\frac{\partial\rho_{gr}}{\partial m_{gr}}\Delta m_{gr}\right)^2} = \rho_{gr}\sqrt{\left(-3\frac{\Delta d_{gr}}{cm}\right)^2 + \left(\frac{\Delta m_{gr}}{g}\right)^2}$$
$$= 0,364\frac{g}{cm^3} \quad \text{mit} \quad \rho = \frac{m}{\frac{1}{6}\pi d^3} \tag{9}$$

Größe	Wert	Fehler
d_{kl}	13,7 mm	0,02 mm
d_{gr}	13,8 mm	0,02 mm
m_{kl}	4,4531 g	-
m_{gr}	5,0 g	0,1 g
ρ_{kl}	3,308 $\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$	0,020 $\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$
ρ_{gr}	3,634 $\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$	0,364 $\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$
ρ_{Fl}	0,998 $\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$	-
K_{kl}	0,07640 $\frac{\mathrm{mPa}\cdot\mathrm{cm}^3}{\mathrm{g}}$	-

Tabelle 2: relevante Kenngrößen

Aus den nun bekannten Größen ermittelt sich η mit dem Fehler aus (6) zu

$$\eta = K_{kl}(\rho_{kl} - \rho_{Fl})\bar{t}_{kl} = 0,07640\frac{\mathrm{mPa}\cdot\mathrm{cm}^3}{\mathrm{g}} \cdot \left(3,308\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3} - 0,998\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}\right) \cdot 12,072\mathrm{s}$$
$$= 2,131\mathrm{mPas} \tag{10}$$

$$\Delta\eta = \sqrt{\left(\frac{\partial\eta}{\partial\rho_{kl}}\Delta\rho_{kl}\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\bar{s}_{kl}\right)^2} = \eta\sqrt{\left(\frac{\Delta\rho_{kl}}{(\rho_{kl}-\rho_{Fl})}\right)^2 + \left(\frac{\bar{s}_{kl}}{t}\right)^2}$$
$$= 0,085\text{mPas} \tag{11}$$

Die gesuchte Apparaturkonstante K_{gr} lässt sich nun errechnen durch Gleichsetzen:

$$K_{gr}(\rho_{gr}-\rho_{Fl})\cdot t_{gr} = K_{kl}(\rho_{kl}-\rho_{Fl})\cdot t_{kl} \Leftrightarrow K_{gr} = K_{kl}\frac{(\rho_{kl}-\rho_{Fl})}{(\rho_{gr}-\rho_{Fl})}\cdot\frac{t_{kl}}{t_{gr}}$$
$$K_{gr} = 0,01135\,\frac{\text{mPa}\cdot\text{cm}^3}{\text{g}} \tag{12}$$

$$\Delta K_{gr} = \sqrt{\left(\frac{\partial K_{gr}}{\partial\rho_{kl}}\Delta\rho_{kl}\right)^2 + \left(\frac{\partial K_{gr}}{\partial\rho_{gr}}\Delta\rho_{gr}\right)^2 + \left(\frac{\partial K_{gr}}{\partial t_{kl}}\bar{s}_{kl}\right)^2 + \left(\frac{\partial K_{gr}}{\partial t_{gr}}\bar{s}_{gr}\right)^2}$$
$$= K_{gr}\sqrt{\left(\frac{\Delta\rho_{kl}}{(\rho_{kl}-\rho_{Fl})}\right)^2 + \left(-\frac{\Delta\rho_{gl}}{(\rho_{gl}-\rho_{Fl}}\right)^2 + \left(\frac{\bar{s}_{kl}}{t}\right)^2 + \left(\frac{\bar{s}_{gr}}{t}\right)^2}$$
$$= 0,00176\,\frac{\text{mPa}\cdot\text{cm}^3}{\text{g}} \tag{13}$$

Um die Verwendung genannter Formeln zur Ermittlung der Viskosität zu rechtfertigen, muss die Reynoldszahl für diesen Versuch ermittelt und mit der kritischen Reynoldszahl verglichen werden. Nach (3) ergibt sich

$$Re = \frac{d_{kl}\cdot\rho_{Fl}}{\eta}\cdot\frac{x}{t_{kl}} = \frac{998\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\cdot 0,00828\frac{\text{m}}{\text{s}}\cdot 0,0137\text{m}}{0,002313\text{Pa}\cdot\text{s}} \approx 49 \ll 2000, \tag{14}$$

weshalb man von einer laminaren Flüssigkeit sprechen darf und das Verwenden der Formeln legitim ist.

4.3 Anwendung der Andrade-Gleichung

Um die Koeffizienten A und B aus Gleichung (4) zu ermitteln, wird die Fallzeit zu verschiedenen Temperaturen gemessen.

T [K]	$\frac{1}{\mathrm{T}}[\frac{1}{\mathrm{K}}]$	t_1[s]	t_2[s]	$\bar{t}$[s]	Δt	$\ln(\frac{\bar{t}}{t})$
294	0,00340	81,16	81,04	81,10	0,06	4,396
299	0,00334	72,87	72,92	72,90	0,02	4,289
302	0,00331	68,27	68,41	68,34	0,07	4,224
305	0,00328	64,44	64,15	64,30	0,14	4,163
308	0,00325	60,41	60,69	60,55	0,14	4,103
311	0,00321	57,61	57,55	57,58	0,03	4,053
314	0,00318	54,61	54,04	54,33	0,29	3,995
317	0,00315	51,32	51,83	51,58	0,25	3,943
320	0,00312	49,00	49,24	49,12	0,12	3,894
323	0,00309	46,58	46,24	46,41	0,17	3,838
326	0,00307	44,47	44,80	44,64	0,17	3,799

Tabelle 3: Durch Temperaturerhöhung verringerte Fallzeit

Um aus dem Exponentialzusammenhang eine lineare Beziehung herzustellen, werden folgende Umformungsschritte unternommen, damit dann durch lineare Regression mittels GNUplot die Koeffizienten bestimmt werden können:

$$\eta(T) = A \exp\left(\frac{B}{T}\right)$$

$$\ln\left[\underbrace{\frac{K_{gr}(\rho_{gr} - \rho_{Fl})}{A}}_{=\exp\left(\frac{1}{b}\right)} \cdot \underbrace{t}_{=\exp(y)}\right] = \underbrace{\frac{B}{T}}_{=a \cdot x}$$

$$y = a \cdot x + b$$

$$\text{mit } a = 1783,29 \pm 24,4 \quad \text{und} \quad b = -5,18 \pm 0,08. \tag{15}$$

Zurücktransferiert erhält man wieder A und B zu

$$A = \mathbf{e}^b = 5,63 \cdot 10^{-3} \pm 1,6 \cdot 10^{-5} \tag{16}$$

$$B = a = 1783,29 \pm 24,4 \tag{17}$$

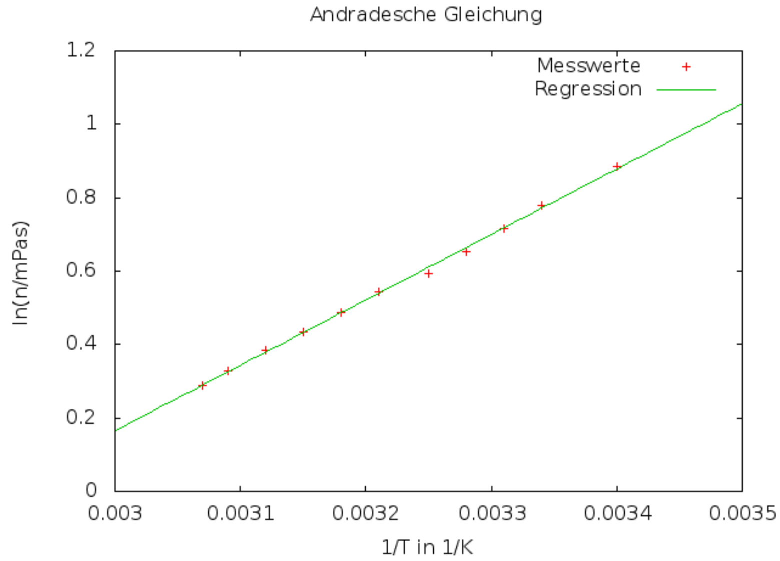

Abbildung 2: lineare Abhängigkeit von $\frac{1}{T}$ und $\ln(\frac{\eta}{\mathrm{mPas}})$

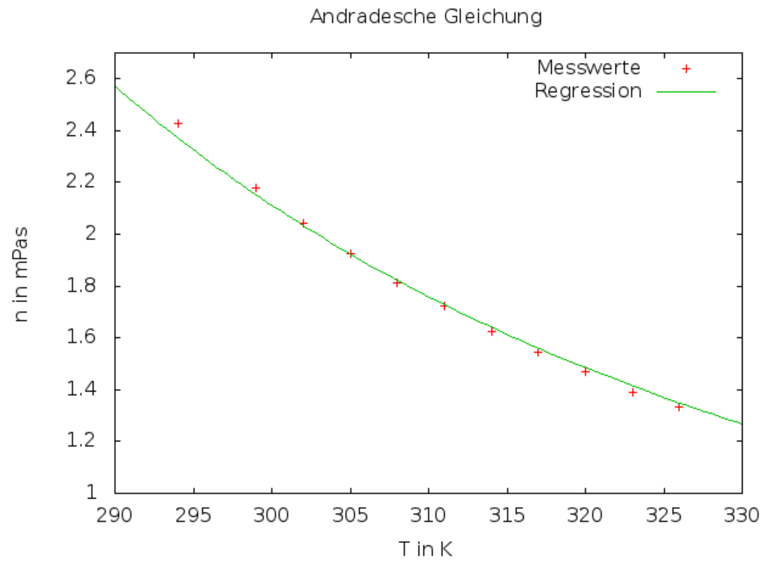

Abbildung 3: endgültige Andrade-Gleichung

5 Diskussion

Im Vergleich zu Referenzwerten (wissenschaft-technik-ethik.de von Dr.-Ing H. Grimm, Eigenschaften von Wasser - URL: www.wissenschaft-technik-ethik.de/wasser_eigenschaften.html) stellt sich heraus, dass die ermittelte Viskosität von

$$\eta = 2,131\text{mPas} \pm 0,085\text{mPas}$$

um mehr als das doppelte abweicht. Da sie durch Gleichung (2) ermittelt wird, sind nur zwei Fehlerquellen möglich. Zum einen die Dichte der kleinen Kugel ρ_{kl}, sowie die Zeit t_{kl}. Da die benötigte Zeit 20 Mal gemessen wurde, fällt sie als Ursache wahrscheinlich aus. Somit bleibt die Dichte, die aus der gegebenen Masse m_{kl} und dem gemessenen Durchmesser d_{kl} nach (9) zusammengesetzt ist. Nach dem Durchmesser aufgelöst ergibt sich

$$d = \sqrt[3]{\frac{6\, m_{kl}\, K_{kl}\, t_{kl}}{\pi\, (\eta + \rho_{Fl}\, K_{kl}\, t_{kl})}} = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 4,4531\text{g} \cdot 0,0764\, \frac{\text{mPas} \cdot \text{cm}^3}{\text{g}} \cdot 12,072\,\text{s}}{\pi \left(1\,\text{mPas} + 0,998 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \cdot 0,0764\, \frac{\text{mPas} \cdot \text{cm}^3}{\text{g}} \cdot 12,072\,\text{s}\right)}}$$
$$= 16,0\text{mm} \neq 13,7\text{mm}, \tag{18}$$

was eine Messungenauigkeit von 2,3 mm (14,4 %) bedeutet.

Desweiteren ist es auffällig, dass die zur Ermittlung der Apparaturkonstante gemessene Zeit t_{gr} in Tabelle 1 um etwa zehn Sekunden von der Messung von t aus Tabelle 3 bei gleicher Temperatur von 21 °C abweicht. Es handelt sich hierbei um einen systematischen Fehler. Möglicherweise ist die Versuchskugel beim Wechsel der Kugel im Viskosimeter versehentlich verwechselt worden.