

Versuch 304 - Das Magnetische Moment

**TU Dortmund, Fakultät Physik
Anfänger-Praktikum**

Jan Adam

jan.adam@tu-dortmund.de

Dimitrios Skodras

dimitrios.skodras@tu-dortmund.de

18.Dezember 2012

Inhaltsverzeichnis

1	Theorie	3
2	Aufbau	3
3	Durchführung	3
3.1	Gravitation	3
3.2	Harmonischer Oszillator	4
3.3	Präzession	4
4	Auswertung	4
4.1	Fehlerrechnung	4
4.2	Ermittlung der Apparaturkonstanten	5
4.3	Ermittlung durch Ausnutzen der Gravitation	5
4.4	Ermittlung durch Schwingungsdauer	7
4.5	Ermittlung durch Präzission	9
5	Diskussion	11

1 Theorie

Aus der Maxwell-Gleichung

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (1)$$

folgt direkt, dass es keine magnetischen Monopole gibt. Von der Komplexität her kommt ein magnetischer Dipol einem Monopol am nächsten, dessen magnetisches Moment in diesem Versuch bestimmt werden soll. Der Dipol wird dazu in ein homogenes Magnetfeld eingeführt, welches mit einem Drehmoment auf den Dipol einwirkt, bis der Dipol und die Feldlinien des homogenen Magnetfeldes wieder gleichgerichtet sind. Ein homogenes Magnetfeld kann man durch ein sogenanntes Helmholtz-Spulenpaar erzeugen. Es werden dazu zwei Spulen im Abstand R voneinander aufgestellt. Dabei bezeichnet R den Radius der beiden Spulen. Werden nun beide Spulen gleichgerichtet von einem Gleichstrom durchflossen, so entsteht in ihrem Inneren durch Superposition der einzelnen Felder ein nahezu homogenes Magnetfeld.

2 Aufbau

Der im Versuch verwendete Dipol ist in eine kleine Vollkugel eingelassen. Die Kugel liegt in einer passenden Vertiefung, in der die Kugel nicht herumrollen kann. Von unten wird Luft eingeblasen, so dass die Kugel nahezu reibungsfrei auf dem Luftkissen schwebt. Der gesamte Aufbau befindet sich im Inneren eines Helmholtzspulenpaares, deren Durchmesser jedoch nicht ganz dem Spulenabstand entspricht. Ihr Magnetfeld errechnet sich über das Biot-Savartsche Gesetz

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3} \quad (2)$$

zu

$$B(0) = \frac{\mu_0 I R^2}{(R^2 + x^2)^{3/2}} \quad (3)$$

Der Feldgradient $\frac{dB}{dx}$ entlang der Symmetrieachse errechnet sich entsprechend zu

$$\frac{dB}{dx} = -3\mu_0 I R^2 \frac{x}{(R^2 + x^2)^{5/2}} \quad (4)$$

3 Durchführung

Das magnetische Moment des Dipols wird nun auf drei verschiedene Weisen berechnet.

3.1 Gravitation

In die Kugel mit dem Dipol wird ein etwa 20cm langer Stab gesteckt, an dem ein bewegliches Gewicht befestigt ist. Der Stab wird nun senkrecht zum Magnetfeld ausgerichtet, damit ihn einerseits ein Drehmoment durch die Gewichtskraft und andererseits ein Drehmoment durch das Magnetfeld wirkt. Beide Momente greifen die Kugel antiparallel an. Es wird nun so lange der Spulenstrom und dadurch auch das Magnetfeld erhöht,

bis beide Drehmomente im Gleichgewicht liegen und der Stab ruht. Im Gleichgewicht gilt:

$$\vec{\mu}_{Dipol} \times \vec{B} = m \cdot (\vec{r} \times \vec{g}) \quad (5)$$

auf Grund der Winkelgleichheit lassen sich die Kreuzprodukte vereinfachen zu:

$$\mu_{Dipol} \cdot B = m \cdot r \cdot g \quad (6)$$

Indem der Abstand der Masse zur Kugel variiert wird, wird die benötigte B-Feldstärke für verschiedene Drehmomente bestimmt. Eine lineare Ausgleichsrechnung mittels Gleichung (6) bestimmt das magnetische Moment des Dipols.

3.2 Harmonischer Oszillator

Das durch das homogene B-Feld erzeugte Drehmoment ist eine rücktreibende Kraft. Entfernt man den zuvor angebrachten Stab und die Masse und lenkt die Kugel dann aus ihrer Ruhelage aus, so verhält sie sich wie ein harmonischer Oszillator und schwingt mit einer festen Frequenz hin und her. Die Bewegung kann durch folgende Differentialgleichung beschrieben werden:

$$-|\vec{\mu}_{Dipol} \times \vec{B}| = J_K \cdot \frac{d^2\Theta}{dt^2}. \quad (7)$$

Deren Lösung ist:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 J_K}{\mu_{Dipol} B} \quad (8)$$

Gemessen wird die Schwingungsdauer für verschiedene Magnetfeldstärken und durch lineare Ausgleichsrechnung wird mittels Gleichung (8) das magnetische Moment errechnet.

3.3 Präzession

4 Auswertung

4.1 Fehlerrechnung

Da viele für die Auswertung notwendigen Größen fehlerbehaftet sind, ist es wichtig, den Einfluss dieser Fehler auf die ermittelten Größen herauszufinden. Neben den von den Messapparaturen verursachten Fehlern dienen der Mittelwert

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i, \quad (9)$$

\bar{x} = Mittelwert, N = Anzahl der Messungen

die Gaußsche Fehlerfortpflanzung
und die Standardabweichung des Mittelwerts

$$\Delta G = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial G}{\partial x_i} \cdot \Delta x_i \right)^2}, \quad (10)$$

x_i = Variable, Δx_i = Fehler der Variable

$$\bar{s} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_i^N (x_i - \bar{x})^2}. \quad (11)$$

4.2 Ermittlung der Apparaturkonstanten

Für die Auswertung des Experiments sind einige, für die Apparatur individuellen Werte nötig. So die Daten des genutzten Helmholtz-Spulenpaars, sowie der Billiardkugel. Sie wurden zu Versuchsbeginn aufgenommen. Der Fehler der Masse ergibt sich aus der kleinsten angezeigten Größenordnung der zur Messung benutzten Waage. Der Fehler des Durchmessers wird von der Schieblehre abgelesen.

$$d_H = 0,138\text{m}$$

$$R_H = 0,109\text{m}$$

$$N = 195$$

$$m_K = 142,53\text{g} \pm 0,01\text{g}$$

$$2r_K = 53,65\text{mm} \pm 0,05\text{mm}$$

Das Trägheitsmoment der Billiardkugel J_K wird ermittelt und der Fehler nach (10) berechnet.

$$\begin{aligned} J_K &= \frac{2}{5} m_K r_K^2 \\ &= 4,102 \cdot 10^{-5} \text{ kgm}^2 \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \Delta J_K &= \sqrt{\left(\frac{\partial J_K}{\partial m_K} \Delta m_K \right)^2 + \left(\frac{\partial J_K}{\partial r_K} \Delta r_K \right)^2} = J_K \sqrt{\left(\frac{\Delta m_K}{m_K} \right)^2 + \left(\frac{2 \Delta r_K}{r_K} \right)^2} \\ &= 4,122 \cdot 10^{-9} \text{ kgm}^2 \end{aligned} \quad (13)$$

4.3 Bestimmung des magnetischen Momentes eines Magnetens unter Ausnutzung der Gravitation

Das von der Stromstärke I erzeugte Magnetfeld $B(I)$ wirkt ein Drehmoment auf die kleine Masse $m_{kl} = 1,36 \text{ g}$ zur Ausgleichung des vom Gravitationsfeld erzeugte Drehmoment.

i	r in mm	I in A	B in mT
1	45,00	1,62	2,20
2	50,00	1,75	2,37
3	55,00	1,85	2,51
4	60,00	1,93	2,62
5	65,00	2,10	2,85
6	70,00	2,20	2,98
7	75,00	2,30	3,12
8	80,00	2,42	3,28
9	85,00	2,51	3,40
10	90,85	2,64	3,58

Tabelle 1: Magnetfeld B in Abhängigkeit des Abstands r der kleinen Masse

Eine lineare Regression nach Gleichung (??) durch GNUplot führt zu folgenden Parametern.

$$B = a \cdot r + b$$

mit

$$\begin{aligned} a &= (0,030 \pm 5,0 \cdot 10^{-4}) \frac{\text{mT}}{\text{mm}} \\ b &= (0,853 \pm 0,035) \text{ mT} \end{aligned} \tag{14}$$

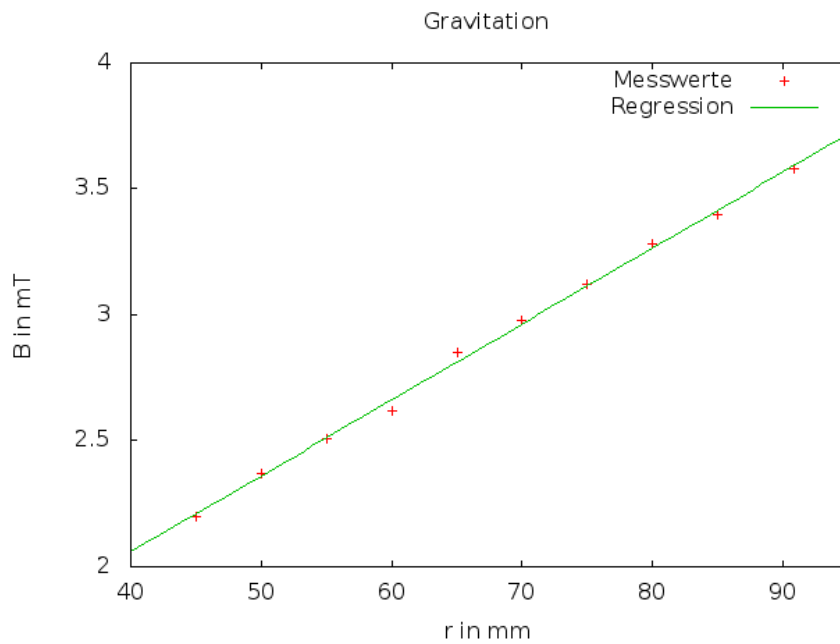


Abbildung 1: lineare Abhängigkeit von r und B

Nun lässt sich das magnetische Moment μ_{Grav} mitsamt Fehler angeben:

$$\begin{aligned}\mu_{Grav} &= \frac{m_{kl} g}{a} \\ &= 0,445 \text{ Am}^2\end{aligned}\tag{15}$$

$$\begin{aligned}\Delta\mu_{Grav} &= \sqrt{\left(\frac{\partial\mu}{\partial m_{kl}}\Delta m_{kl}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mu}{\partial a}\Delta a\right)^2} = \mu\sqrt{\left(\frac{\Delta m_{kl}}{m_{kl}}\right)^2 + \left(\frac{-\Delta a}{a}\right)^2} \\ &= 5,0 \cdot 10^{-4} \text{ Am}^2\end{aligned}\tag{16}$$

4.4 Bestimmung des magnetischen Momentes über die Schwingungsdauer eines Magnetens

Um größere Fehler durch Start-Stopp-Verzögerung zu vermeiden, wird über zehn Schwingungsperioden gemessen und das für jede Stromstärke drei mal.

i	I in A	$^1T_{10}$ in s	$^2T_{10}$ in s	$^3T_{10}$ in s	\bar{T}_{10} in s	$1/B$ in 1/mT	T^2 in s ²
1	0,4	25,72	25,44	25,72	25,63	1,844	6,567
2	0,8	18,22	18,25	18,22	18,23	0,922	3,323
3	1,2	15,13	14,94	15,00	15,02	0,615	2,257
4	1,6	12,91	12,90	12,87	12,89	0,461	1,662
5	2,0	11,50	11,59	11,50	11,53	0,369	1,329
6	2,4	10,69	10,59	10,53	10,60	0,307	1,124
7	2,8	9,81	9,75	9,81	9,79	0,263	0,958
8	3,2	9,10	9,13	9,16	9,13	0,230	0,834
9	3,6	8,62	8,63	8,69	8,65	0,205	0,748
10	4,0	8,28	8,22	8,22	8,24	0,184	0,679

Tabelle 2: Die Schwingungsdauer T in Abhängigkeit der Stromstärke I

Gleichung (??) liefert die Abhängigkeit, die durch GNUplot mittels linearer Regression gefittet und mit folgenden Parametern beschrieben wird.

$$T^2 = c \cdot \frac{1}{B} + d$$

mit

$$\begin{aligned}
c &= (3,554 \pm 0,012) \frac{\text{mT}}{\text{s}^2} \\
d &= (0,029 \pm 0,009) \text{s}^2
\end{aligned} \tag{17}$$

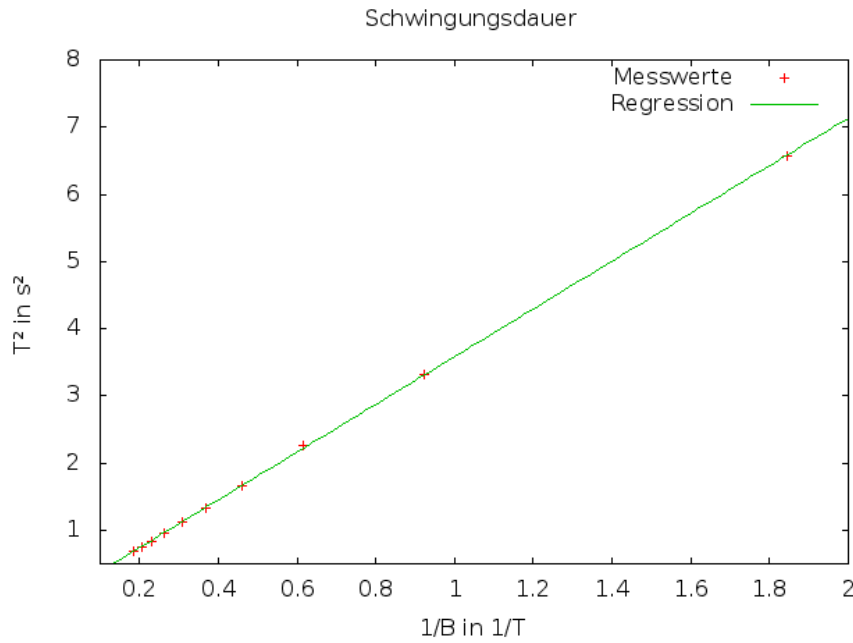


Abbildung 2: lineare Abhängigkeit von $\frac{1}{B}$ und T^2

Das magnetische Moment μ_{Schw} wird nun mitsamt Fehler angegeben:

$$\begin{aligned}\mu_{Schw} &= \frac{4\pi^2 J_K g}{c} \\ &= 0,446 \text{ Am}^2\end{aligned}\tag{18}$$

$$\begin{aligned}\Delta\mu_{Schw} &= \sqrt{\left(\frac{\partial\mu}{\partial J_K}\Delta J_K\right)^2 + \left(\frac{\partial\mu}{\partial c}\Delta c\right)^2} = \mu\sqrt{\left(\frac{\Delta J_K}{J_K}\right)^2 + \left(\frac{-\Delta c}{c}\right)^2} \\ &= 0,012 \text{ Am}^2\end{aligned}\tag{19}$$

4.5 Bestimmung des magnetischen Momentes über die Präzession eines Magneten

Bei einer Stroboskopfrequenz ν_{Strob} von 4,5 Hz erschien der weiße Punkt am Stiel der Billardkugel bei jedem Lichtimpuls am gleichen Ort. Die vier markierten Werte in Tabelle 3 entstehen durch Messen über zwei Präzessionsperioden, sodass hier nur der halbierte Wert in den Mittelwert \bar{T}_p einfließt.

i	I in A	1T_p in s	2T_p in s	3T_p in s	\bar{T}_p in s	B in mT	$1/T$ in 1/s
1	0,4	24,63	24,78	25,25	24,89	0,542	0,040
2	0,8	13,87	13,53	13,82	13,74	1,085	0,073
3	1,2	9,38	9,31	9,16	9,28	1,627	0,108
4	1,6	7,10	7,41	7,60	7,37	2,170	0,136
5	2,0	5,97	5,84	5,88	5,90	2,712	0,170
6	2,4	4,84	5,25	4,97	5,02	3,255	0,199
7	2,8	7,94	4,32	4,41	4,23	3,797	0,236
8	3,2	7,53	3,75	4,03	3,85	4,339	0,260
9	3,6	6,85	3,47	3,46	3,45	4,882	0,290
10	4,0	6,09	3,09	3,16	3,10	5,424	0,323

Tabelle 3: Die Präzessionsdauer T in Abhängigkeit der Stromstärke I

Aus Gleichung (??) lassen sich durch GNUplot mittels linearer Ausgleichsrechnung die zur Bestimmung des magnetischen Moments μ nötigen Parameter bestimmen.

$$\frac{1}{T} = e \cdot B + f$$

mit

$$\begin{aligned} e &= (0,0576 \pm 5,79 \cdot 10^{-4}) \frac{1}{\text{mTs}} \\ f &= (0,0117 \pm 1,95 \cdot 10^{-3}) \frac{1}{\text{s}} \end{aligned} \tag{20}$$

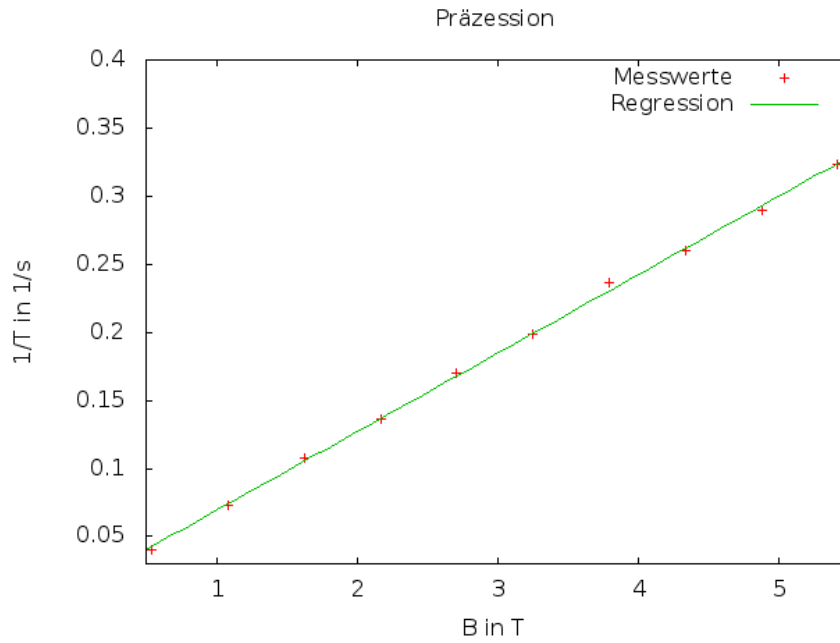


Abbildung 3: lineare Abhängigkeit von $\frac{1}{B}$ und T^2

Das magnetische Moment μ_{Praez} wird nun mitsamt Fehler angeben:

$$\begin{aligned}\mu_{Praez} &= 4\pi^2 J_K \nu_{Strob} \cdot e \\ &= 0,420 \text{ Am}^2\end{aligned}\tag{21}$$

$$\begin{aligned}\Delta\mu_{Praez} &= \sqrt{\left(\frac{\partial\mu}{\partial J_K} \Delta J_K\right)^2 + \left(\frac{\partial\mu}{\partial e} \Delta e\right)^2} = \mu \sqrt{\left(\frac{\Delta J_K}{J_K}\right)^2 + \left(\frac{\Delta e}{e}\right)^2} \\ &= 5,79 \cdot 10^{-4} \text{ Am}^2\end{aligned}\tag{22}$$

5 Diskussion

Übersichtlich zusammengestellt nochmal das magnetische Moment, errechnet aus drei verschiedenen Ansätzen.

$$\begin{aligned}\mu_{Grav} &= 0,445 \pm 5,0 \cdot 10^{-4} \text{ Am}^2 \\ \mu_{Schw} &= 0,446 \pm 1,2 \cdot 10^{-2} \text{ Am}^2 \\ \mu_{Praez} &= 0,420 \pm 5,8 \cdot 10^{-4} \text{ Am}^2\end{aligned}$$

Da bei keiner Methode der ermittelte Wert stark von den anderen beiden abweicht,

ist davon auszugehen, dass der Wert des magnetischen Moments des Magneten inmitten der Billiardkugel sich in der Nähe von $0,44 \text{ Am}^2$ befindet. Schwierig beim Ansatz mit Ausnutzung der Gravitation ist die nötige Genauigkeit der Apparatur zur Einstellung der Stromstärke. So ist es schwer möglich, die kleine Masse m_{kl} zur Ruhe zu bringen. Des Weiteren gestaltet sich die Methode der Präzession als fehleranfällig, da die Synchronisation von Stroboskopfrequenz und Drehfrequenz der Kugel nicht Restlos gelingt. Über eine Präzessionsrotation hinweg nimmt die Eigenrotation der Kugel sehr stark ab und bleibt nicht fest bei den 4,5Hz. Zudem war eine Nutation nicht restlos vermeidbar, was ebenfalls Einfluss auf das Ergebnis hat. Vermutlich wurde die Kugel um einen zu großen Winkel ausgelenkt, so dass eine Nutation begünstigt wurde. Die Betrachtung des Magneten als harmonischen Oszillator verhilft vermutlich zum besten Ergebnis. Durch die Messung über 10 Schwingungsperioden und die leicht feststellbare Dauer einer Periode, wodurch die Abweichungen der einzelnen Messungen untereinander sehr gering sind und dass die Kugel durch das Luftkissen fast garnicht abgebremst wird, ist diese Aussage berechtigt.