

Physikalisches Anfängerpraktikum
Universität Dortmund / Fachbereich Physik

Protokoll zu Versuch 602
Röntgen Emissions- und Absorptionsspektren
am 08.11.2005
110-jähriges Jubiläum der Entdeckung der Röntgen-Strahlung

von
Christophe Cauet und Tobias Brambach
Protokoll vom 14. November 2005

1 Einleitung

Anders als die äußeren Hüllenelektronen eines Atoms, die sowohl mit sichtbarem Licht, als auch UV- und IR-Strahlung zu untersuchen sind, ist Zugang zum inneren Teil der Atomhülle eines elektronenreichen Atoms nur mit energiereicher Röntgenstrahlung möglich. Sie befindet sich im elektromagnetischen Spektrum bei Wellenlängen $\lambda < 1 \text{ nm}$, Frequenzen $\nu > 300 \text{ PHz}$ und einem Energiebereich von 10 eV bis 100 keV.

Wir wollen jetzt zunächst die Erzeugung der Röntgenstrahlung und das resultierende Emissionsspektrum beschreiben um anschließend die Wechselwirkung von Röntgenstrahlung mit Materie - speziell die Absorptionsspektren - zu betrachten. Weiterhin interessieren uns Verfahren zur Energie- und Intensitätsmessung bei Röntgenstrahlung.

2 Theorie

2.1 Zusammensetzung der Röntgenstrahlung

Dringen Elektronen in Materie ein, so können sie ihre kinetische Energie in vielen aufeinanderfolgenden Ionisationsprozessen schrittweise verlieren. Bei höherenergetischen Elektronen besteht zudem die Möglichkeit, dass sie tiefer in die Kernhülle eindringen und damit in den Einflussbereich des elektrischen Feldes des Kerns gelangen. Durch die Coulomb-Wechselwirkung werden sie aus ihrer geradlinigen Bahn abgelenkt. Wir wissen, dass beschleunigte Ladungen elektromagnetische Strahlung emittieren. Die Emissionswahrscheinlichkeit liegt hier direkt proportional zum Quadrat der Kernladungszahl z . Die Abstrahlung liegt nach quantenmechanischer Betrachtung bevorzugt senkrecht zur Elektronengeschwindigkeit. Die in diesem Prozess entstehende Strahlung wird **Bremsstrahlung** genannt. Das Energiespektrum der Bremsstrahlungsquanten ist kontinuierlich bis zu einem Maximalwert, der gleich der gesamten kinetischen Energie des „gebremsten“ Elektrons ist.

In Konkurrenz zu diesem Prozess können Elektronen auch eine Ionisation im Inneren der Atomhülle hervorrufen. Besitzt das einfallende Elektron mindestens die Bindungsenergie des Hüllenelektrons, so kann es dieses aus seinem Niveau schlagen. Der Zustand ist jedoch instabil, so dass die Rückkehr des Elektrons in seinen Grundzustand mit einer Relaxationszeit in der Größenordnung von 10^{-8} s liegt. In einer kaskadenartigen Reaktion werden Lücken in niedrigen Schalen von höher liegenden Elektronen aufgefüllt, welche wiederum Lücken freigeben für höhere Elektronen und

so fort. Die freiwerdenden Bindungsenergien werden als Lichtquanten mit diskreten Energien emittiert. Die Energiebeträge sind gegeben durch die Energiedifferenzen der beteiligten Schalen:

$$E_{\text{Photon}} = h\nu = E_n - E_m \quad (2.1)$$

(h =PLANCKsches Wirkungsquantum, ν =Frequenz der Strahlung, E_n und E_m =Energieniveaus in der Elektronenhülle des Atoms)

Da es sich bei dem Spektrum der emittierten Strahlung um ein stoffspezifisches handelt, spricht man hier auch von **charakteristischer Röntgenstrahlung**.

2.2 Entstehung der Röntgenstrahlung

Die Erzeugung der Röntgenstrahlung geschieht im wesentlichen mit einer modifizierten Kathodenstrahlröhre.

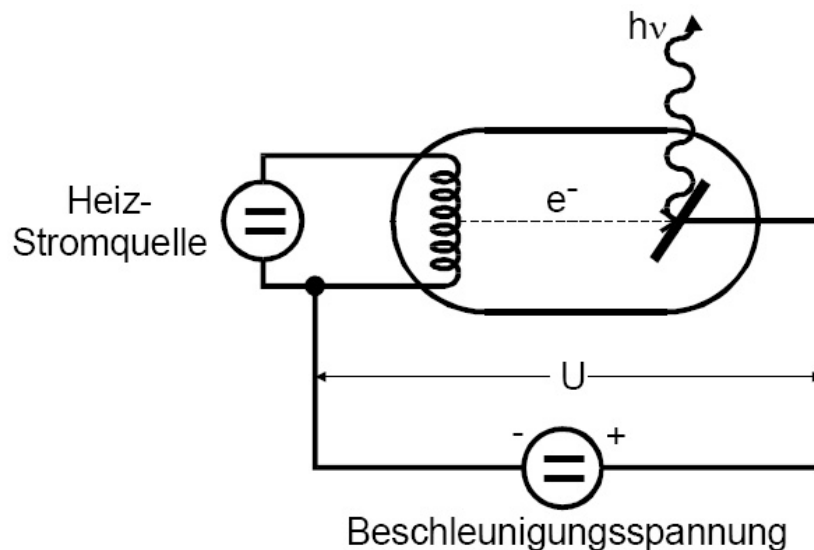


Abbildung 1: Aufbau einer Röntgenröhre

Abbildung 1 zeigt den Glühdraht (Kathode) im Inneren der evakuierten Röhre. Dieser erzeugt durch thermische Emission freie Elektronen. Über ein elektrisches Feld wird eine Beschleunigungsspannung angelegt, die die Elektronen in Richtung der Anode beschleunigt. Bei dem Auftreffen der Elektronen auf der Kupferanode entsteht dann durch die in 2.1 beschriebenen Vorgänge die Röntgenstrahlung.

2.3 Röntgen-Emissionsspektrum ohne Feinstruktur

Der durch die Bremsstrahlung zum Spektrum beigetragene Strahlungsanteil hat einen Maximalwert E_{max} , der sich leicht durch eine Energiebetrachtung herausfinden lässt. Dieser ist gleich der kinetischen Energie E_{kin} der Elektronen. Da diese proportional zur verwendeten Beschleunigungsspannung ist, ergibt sich folgender Zusammenhang:

$$E_{max} = h\nu_{max} = e_0 U \quad (2.2)$$

(e_0 = Elementarladung)

Schwieriger sind die Linien der charakteristischen Strahlung zu bestimmen. Sie lassen sich über (2.1) errechnen, benötigen jedoch dazu die Energieniveaus der Elektronen des emittierenden Atoms. Diese ergeben sich aus der SCHRÖDINGER-Gleichung für das betreffende Atom. Zur einfacheren Behandlung des Problems, reduzieren wir dies von einem Viel-Elektronen-System auf eine sogenannte **Einelektronenanregung**. Es wird die Annahme gemacht, dass sich das „emittierende“ Elektron in einem Coulomb-Feld befindet, dass sich aus dem Kernfeld und den Feldern der restlichen Hüllenelektronen zusammensetzt. Das emittierende Elektron hat also die potentielle Energie:

$$U = -\frac{z_{eff}e_0^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (2.3)$$

(ϵ_0 = Influenz, r = Ortskoordinate)

Mit Verweis auf das Skript zu V604 Kap.2 bekommen wir die Energie-Eigenwerte:

$$E_n = -R_\infty z_{eff}^2 \frac{1}{n^2} \quad (2.4)$$

(R_∞ = Rydberg-Energie, z_{eff} = effektive Kernladungszahl, n = Hauptquantenzahl)

Beim Übergang eines Elektrons von der m-ten zur n-ten Schale wird eine Energie vom Betrage

$$h\nu_{m,n} = R_\infty z_{eff,n,m}^2 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) \quad (2.5)$$

frei. Die Lage der Linien im charakteristischen Spektrum lässt sich jetzt durch einfaches Durchzählen der Hauptquantenzahlen n und m mit allen natürlichen Zahlen (Bedingung: $n < m$) bestimmen. Es muss erwähnt werden, dass es sich bei der Formel (2.4) nur um eine gültige Näherung für kleine z handelt. In nächsten Abschnitt

wird eine bessere Näherung beschrieben. Die berechneten Linien können dann entsprechend ihrer Hauptquantenzahl benannt werden. Die Bezeichnung erfolgt aus historischen Gründen. Die Schale mit $n = 1$ wird als K-Schale bezeichnet, darauf mit $n > 1$ dem Alphabet folgend, folgen die L,M,N,O-Schalen und so weiter.

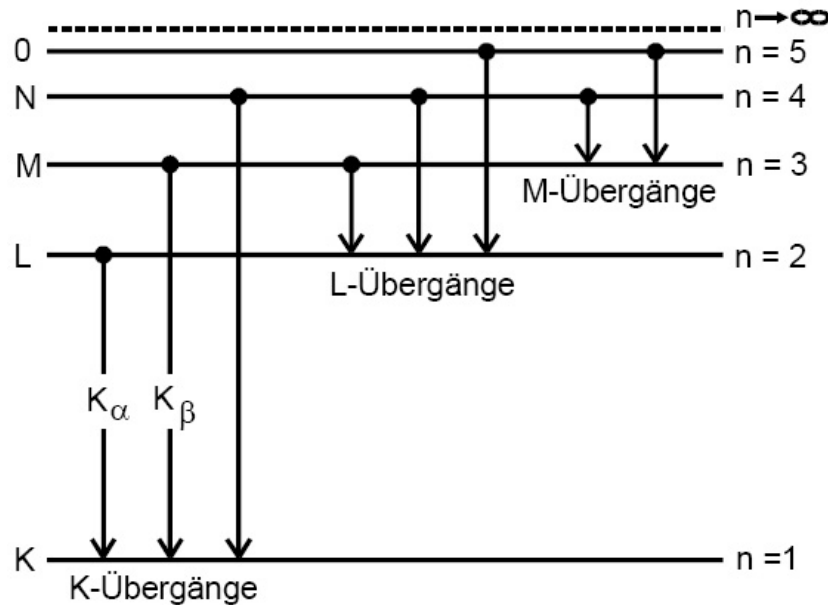


Abbildung 2: Darstellung der möglichen Röntgenübergänge ohne Feinstruktur und nicht maßstäblich

Abbildung 2 zeigt die ersten Schalen und möglichen Übergänge. Die Länge der Pfeile ist ein Indikator für die Energie der Strahlung. Im Gegensatz zur Gestalt von optischen Spektren, die direkt vom Bindungszustand der äusseren Elektronen abhängt und somit starke Unterschiede aufweisen kann, ist diese im Bereich der Röntgenstrahlung stets ein Linienspektrum, das sich mit höheren Frequenzen nur monoton verschiebt.

2.4 Röntgen-Emissionspektrum mit Feinstruktur

Eine bessere Näherung der Zusammenhänge gelingt über die Betrachtung der Feinstruktur der Atome. Verschiedene Effekte zusammengefasst ergeben im Rahmen der *Störungsrechnung* die **SOMMERFELDSche Feinstrukturformel**. In erster Näherung:

$$E_{n,j} = -R_{\infty} \left\{ z_{eff1}^2 \cdot \frac{1}{n^2} + \alpha^2 z_{eff2}^4 \cdot \frac{1}{n^3} \left(\frac{1}{\frac{1}{2}} - \frac{3}{4n} \right) \right\} \quad (2.6)$$

(j = Gesamtdrehimpulsquantenzahl: Zusammengesetzt aus der Bahndrehimpulsquantenzahl ℓ mit $j = \ell + \frac{1}{2}$ oder $j = \ell - \frac{1}{2}$ und der Spinquantenzahl $s = \frac{1}{2}$)

Es werden hier wieder effektive Kernladungen benutzt. Wir wollen diese im folgenden durch sogenannte **Abschirmungszahlen** σ und s ausdrücken:

$$z_{eff1} = z - \sigma$$

$$z_{eff2} = z - s$$

Diese beiden Größen beschreiben die Abschwächung des Kernfeldes durch unbeteiligte Elektronen der Atomhülle. σ wird auch als **Konstante der vollständigen Abschirmung** bezeichnet. Sie wird im wesentlichen bestimmt durch die Hüllenelektronen, deren Ladungsverteilung in der n -ten Schale ihr Maximum erreicht, jedoch auch der Einfluss der äusseren Elektronen nicht zu vernachlässigen ist. Anders verhält es sich mit der **Konstante der inneren Abschirmung**. s wird nur durch Elektronen der n -ten Schale bestimmt. Eine Abhängigkeit von der gesamten Kernladung ist kaum zu erkennen. Beide Konstanten sind direkt von n und ℓ abhängig. Die Gleichung (2.6) lässt sich jetzt so schreiben:

$$E_{n,j} = -R_{\infty} \left\{ (z - \sigma_{n,\ell})^2 \cdot \frac{1}{n^2} + \alpha^2 (z - s_{n,\ell})^4 \cdot \frac{1}{n^3} \cdot \left(\frac{1}{j + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4n} \right) \right\} \quad (2.7)$$

Da es zur gegebenen Hauptquantenzahl n mehrere ℓ - und j -Werte gibt, folgt aus (2.7) eine Aufspaltung der Energieniveaus in mehrere Unterniveaus. Diese bezeichnet man als **Feinstruktur-Aufspaltung**. Dazu können jetzt einige Überlegungen angestellt werden:

$$l_{max} = n - 1$$

Daraus lässt sich die Anzahl der Feinstruktur-niveaus für jedes einzelne Energieniveau bestimmen. Die K-Elektronen ($n = 1$) können demzufolge keinen Bahndrehimpuls besitzen. Es ist daher für alle K-Elektronen $j = \frac{1}{2}$, woraus für die K-Schale folgt, dass sie keine Feinstrukturaufspaltung besitzt. Die L-Schale mit $n = 2$ hat als mögliche Bahndrehimpulsquantenzahlen $\ell = 0$ und $\ell = 1$. Folgende Kombinationen sind somit möglich: $[j = \frac{3}{2}, \ell = 1]$, $[j = \frac{1}{2}, \ell = 1]$, $[j = \frac{1}{2}, \ell = 0]$. Die L-Schale besitzt also insgesamt drei Unterniveaus. Analog kann man die Anzahl an Unterniveaus der M-Schale auf 5 bestimmen ($n = 3$, $\ell_{max} = 2$). Ähnlich Abbildung 2 können wir in Abbildung 3 die Feinstruktur-niveaus anschaulich darstellen.

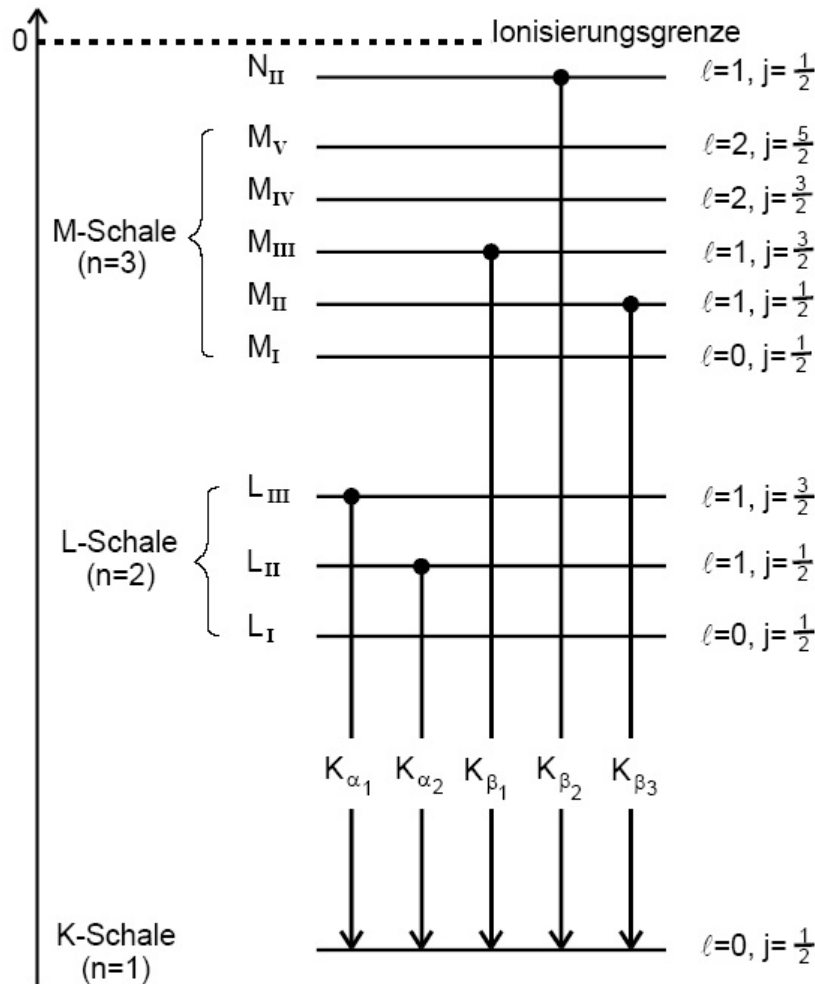


Abbildung 3: Feinstruktur-Aufspaltung der K-,L- und M-Schale, mögliche K-Übergänge

Man erkennt hier, dass nicht alle Kombinationen an Übergängen möglich zu sein scheinen. Tatsächlich werden die beobachteten Übergänge durch **Auswahlregeln** festgelegt. Zwei grundlegende Einschränkungen lauten: Der Bahndrehimpuls zwischen zwei beteiligten Energieniveaus darf sich nur um $\Delta\ell = \pm 1$ ändern und die Übergangswahrscheinlichkeit nimmt für $\Delta n \geq 3$ drastisch ab. Für einen Übergang zwischen den beiden Niveaus mit den Quantenzahlen n, ℓ, j und n', ℓ', j' bekommt man aus (2.7):

$$E = R_{\infty} \left\{ \frac{(z - \sigma_{n\ell})^2}{n^2} - \frac{(z - \sigma_{n'\ell'})^2}{n'^2} + \alpha^2 \frac{(z - s_{n\ell})^4}{n^3} \left(\frac{1}{j + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4n} \right) - \alpha^2 \frac{(z - s_{n'\ell'})^4}{n'^3} \left(\frac{1}{j' + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4n'} \right) \right\} \quad (2.8)$$

Ziel des Experimentes ist es jetzt, einige Abschirmungszahlen σ und s für Atome verschiedener Elemente zu bestimmen. Zur tatsächlichen Berechnung ist jedoch der

Weg über die Energien der Emissionslinien nur bedingt geeignet. Eine andere Möglichkeit dazu soll im nächsten Kapitel betrachtet werden.

2.5 Das Absorptionsspektrum

Beim Durchgang durch Materie, tritt eine Schwächung der Strahlintensität auf. Diese ist material- und energieabhängig und wird in erster Linie durch Absorption aber auch in geringem Umfang durch Streuung der Röntgenquanten hervorgerufen. Die Absorption beruht auf einem als **innerer Photo-Effekt** bekannten Phänomen. Durch Wechselwirkung mit einem Hüllenelektron des Absorberatoms, wird dieses aus seiner Bindung entfernt.

$$h\nu = E_B + E_{kin} \quad (2.9)$$

(2.9) macht deutlich, dass dieser Prozess erst dann möglich wird, wenn die Energie des Röntgenquants ($h\nu$) mindestens gleich der Bindungsenergie E_B des Hüllennatoms ist. Die überschüssige Energie wird in Form von kinetischer Energie an das Elektron übertragen. Die Wahrscheinlichkeit für die Photoabsorption ist direkt proportional zur Kernladungszahl z des Absorbers und der Quantenenergie $h\nu$. Der Absorptionskoeffizient μ lässt sich in einem Energiebereich unter 100 keV annähern:

$$\mu \propto z^5 E^{-3,5} \quad (2.10)$$

Gelingt es einem Quant ein Elektron aus seiner Bahn zu schlagen so kann man jetzt wiederum anhand energetischer Betrachtungen für die K-Schale folgende Energie aufstellen:

$$h\nu_{K_{Abs}} = E_{1, \frac{1}{2}} - E_{\infty} = R_{\infty} \left\{ (z - \sigma_{1,0})^2 + \alpha^2 (z - s_{1,0})^4 \cdot \frac{1}{4} \right\} \quad (2.11)$$

Da sich in der K-Schale jedoch nur wenig Elektronen aufhalten, verschwindet unsere Konstante der inneren Abschirmung $s_{1,0}$ aus (2.11) vollständig. Betrachtet man die restliche (2.11) so erkennt man, dass sich die Abschirmungszahl $\sigma_{1,0}$ aus einer einfachen Messung von $h\nu_{K_{Abs}}$ bestimmen lässt. Eine weitere Möglichkeit zur Bestimmung der Abschirmungszahlen über die Absorptionsspektren soll am Beispiel der 3

L-Absorptionsenergien verdeutlicht werden.

$$h\nu_{L_{Abs,I}} = E_{2,0,\frac{1}{2}} - E_{\infty} = R_{\infty} \left\{ \frac{(z - \sigma_{2,0})^2}{8} + \alpha^2 \frac{z - \sigma_{2,0}}{8} \cdot \frac{5}{8} \right\} \quad (2.12)$$

$$h\nu_{L_{Abs,II}} = E_{2,1,\frac{1}{2}} - E_{\infty} = R_{\infty} \left\{ \frac{(z - \sigma_{2,1})^2}{4} + \alpha^2 \frac{z - \sigma_{2,1}}{8} \cdot \frac{5}{8} \right\} \quad (2.13)$$

$$h\nu_{L_{Abs,III}} = E_{2,1,\frac{3}{2}} - E_{\infty} = R_{\infty} \left\{ \frac{(z - \sigma_{2,1})^2}{4} + \alpha^2 \frac{z - \sigma_{2,1}}{8} \cdot \frac{1}{8} \right\} \quad (2.14)$$

Bildet man jetzt die Differenz der Energien $h\nu_{L_{Abs,II}}$ und $h\nu_{L_{Abs,III}}$ mit (2.13) und (2.14), so erhält man:

$$h\nu_{L_{Abs,II}} - h\nu_{L_{Abs,III}} = R_{\infty} \alpha^2 \frac{(z - \sigma_{2,1})^4}{16} \quad (2.15)$$

Über diese Differenz lässt sich dann die Abschirmzahl $s_{2,1}$ errechnen. Die experimentelle Bestimmung erfolgt dabei nach folgendem Muster. Zuerst bestrahlt man eine dünne Scheibe des zu untersuchenden Material mit monoenergetischer Röntgenstrahlung und misst die Intensität der durchgehenden Strahlung in Abhängigkeit zur Energie. Abbildung 4 zeigt ein mögliches Absorptionsspektrum. Deutlich sind die L-Kanten und die K-Kante zu erkennen.

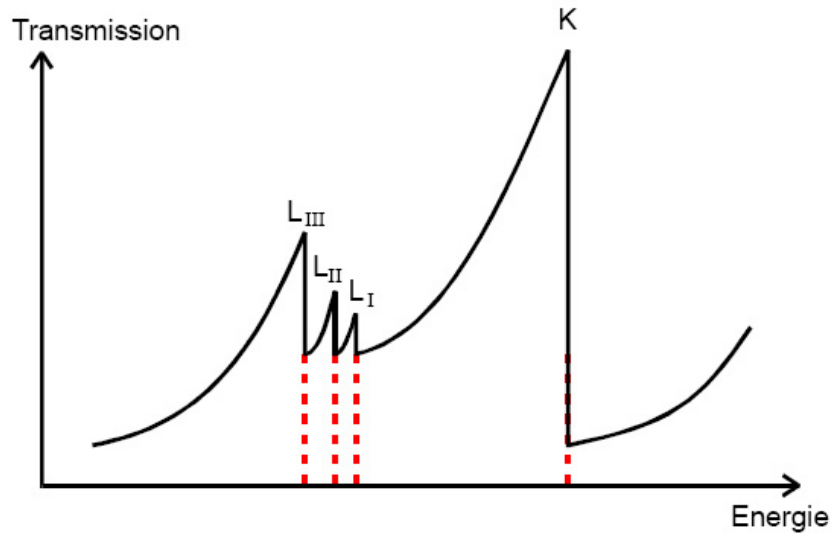


Abbildung 4: Beispielhaftes Röntgen-Absorptionsspektrum
mit K- und L-Kanten

(2.10) kann man entnehmen, dass der Absorptionskoeffizient mit Anstieg der Quantenenergie abnimmt und die Transmission zunimmt. Reicht die Quantenenergie aus um ein Elektron aus einer der Schalen des Absorberatoms zu entfernen, so erhalten wir im Idealfall an dieser Stelle der Kurve eine Unstetigkeitsstelle, welche man als **Absorptionskante** bezeichnet. Die Lage dieser Kante ist identisch mit den Absorp-

tionsenergien $h\nu_{Abs}$. Wie oben beschrieben, besitzt die K-Schale keine Feinstruktur-niveaus, so dass wir hier nur eine K-Kante beobachten können. Die L-Schale verfügt jedoch auf Grund ihrer Feinstruktur über 3 separate Kanten deren Energien berechnet werden können und uns somit wie oben angeregt, $s_{2,1}$ liefern.

Randeffekte der Bestrahlung von Materie mit Röntgenstrahlung sind die *Fluoreszenz-Strahlung* und *Compton-Effekte*, auf die wir jedoch nicht näher eingehen wollen. Zu erwähnen ist jedoch noch, dass die angesprochene Streuung der Röntgenquanten nur bei elektronenarmen Atomen mit $z < 13$ eine Rolle spielt. In diesem Experiment werden jedoch mit so leichten Atomen keine Versuche durchgeführt.

2.6 Intensitäts- und Energie-Messung der Röntgenstrahlung

Die Intensität der Röntgenstrahlung ist eine zur Zahl der Quanten pro Flächen- und Zeit-Einheit proportionale Messgröße. Wir verwenden das Geiger-Müller-Zählrohr, aufgrund seiner einfachen Handhabbarkeit, zur Messung der Intensität und nutzen hierbei die ionisierende Wirkung der Röntgenstrahlung. Die große Zahl, der an der Messung beteiligten Quanten erlaubt eine Bestimmung der Energien über **Interferenzerscheinungen**, die sich beim Eindringen von Röntgenstrahlung in Kristalle einstellen. Abbildung 5 zeigt die *räumlich periodische* Anordnung der Atome im Kristall. Die einfallende Strahlung wird an den Elektronenhüllen der Gitteratome elastisch gestreut. Konstruktive Interferenz ist nur für den Fall möglich, in dem der Gangunterschied Δ benachbarter Strahlen ein ganzzahliges Vielfaches der Wellenlänge λ ist.

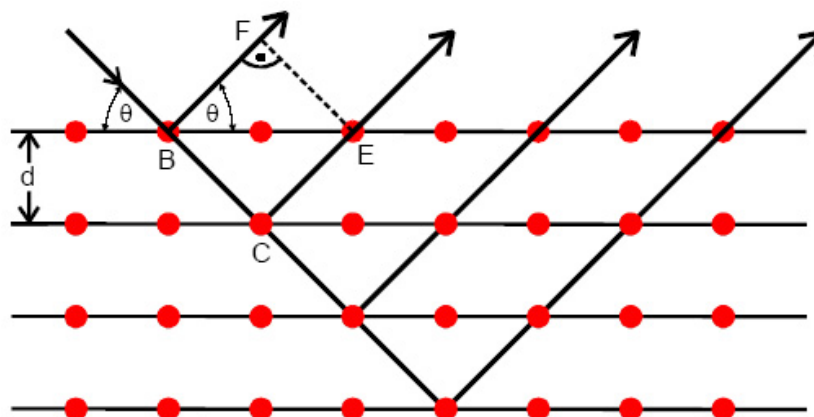


Abbildung 5: Interferenzbildung im 2dim-Kristallgitter

Winkel mit merklich erhöhten Intensitäten lassen sich über die **BRAGGSche Reflexionsbedingung** (2.16) bestimmen. Geometrische Überlegungen führen auf:

$$2d \cdot \sin \theta = n\lambda \quad (2.16)$$

$$n = 1, 2, 3,$$

(n = Interferenzordnung)

Über die Beziehung

$$E = h\nu = h \frac{c}{\lambda} \quad (2.17)$$

(c = Vakuumlichtgeschwindigkeit)

können wir (2.16) umschreiben und bekommen:

$$E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{hc \cdot n}{2d \sin \theta} \quad (2.18)$$

Bei gegebenem Netzaufstand d (siehe Abbildung 5) und gegebener Interferenzordnung haben wir jetzt mit (2.18) die Möglichkeit, den Zusammenhang zwischen der Röntgen-Energie E und dem Beugungswinkel θ zu bestimmen. Jetzt können wir also über eine Messung der Beugungswinkel direkt die Energie der Röntgen-Quanten ermitteln. Weiterhin gelingt es über die Bragg-Reflexion an einem Kristall, aus einem Strahl mit kontinuierlichem Energiespektrum einen nahezu monoenergetischen zu erzeugen.

3 Versuchsaufbau und Durchführung

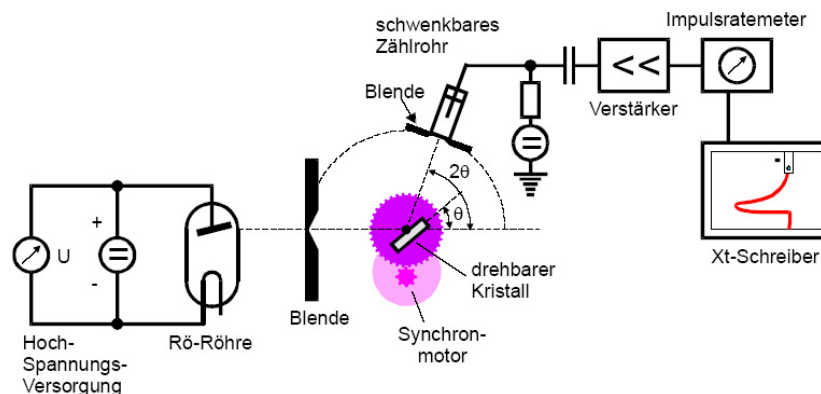


Abbildung 6: Aufbau der Messapparatur

Der Versuchsaufbau ist in Abbildung 6 schematisch dargestellt. Der in der Röntgenröhre erzeugte Strahl, trifft nach Durchlaufen einer Blende auf den drehbaren Kristall ($d = 2,01 \text{ \AA}$). Es tritt nur die Interferenzordnung $n = 1$ auf. Nach Reflexion an diesem trifft der unter der BRAGGbedingung gestreute Teilstrahl auf das Zählrohr, bzw. durchläuft vorher noch die zu untersuchende Materie. Die Zählung erfolgt dann über ein Impulsratemeter und kann über einen daran angeschlossenen Xt-Schreiber gegen die Zeit aufgetragen werden. Da die Emission der Röntgenquanten ein statistischer Prozess ist, müssen die Schwankungen durch eine geeignete Wahl der Zeitkonstante am Impulsratemeter ausgeglichen werden. Dieses mittelt die gemessenen Impulse über einen einstellbaren Zeitraum, was jedoch auch zur Folge hat, dass schnelle Änderungen der Messrate, wie sie etwa an den Absorptionskanten auftreten, nicht mehr korrekt dargestellt werden können.

Es gilt nun vor Beginn des Versuchs einige Vorversuche zu Kalibrierung der Apparatur vorzunehmen. Zuerst muss überprüft werden ob die BRAGGbedingung gegeben ist. Konkret muss verifiziert werden, dass die Neigungswinkel des Kristalls und des Zählrohrs in einem Verhältnis von 1 : 2 stehen. Anschließend sollte durch kurze Messungen die Empfindlichkeit des Zählrohrs und des Schreibers auf einen geeigneten Wert eingestellt und die Zeitkonstante festgelegt werden.

Die Messungen erfolgen dann automatisch. Ein Synchronmotor bewegt sowohl Kristall als auch Zählrohr mit konstantem Winkelverhältnis, so dass die Werte - ebenfalls automatisch - von dem Xt-Schreiber aufgetragen werden. Einzig gilt es, während des Messvorgangs von Hand θ -Winkelmarken an dem Schreiberdiagramm einzutragen, die an der Winkelskala abzulesen sind.

4 Auswertung

Das Hauptproblem in der Auswertung ist die Bestimmung der Winkel, und somit der Quantenenergien, unter denen die jeweiligen Absorptionskanten gemessen wurden. Die dazu notwendige Vorgehensweise wird im nächsten Kapitel erläutert und anschließend für die einzelnen Messungen angewendet.

4.1 Bestimmung der Winkel und Energien der Absorptionskanten

Die Unstetigkeiten der Theoriefunktionen sind in den Messergebnissen für die Absorptionskurven nicht genau zu erkennen, da die Messapparatur die Zahl der einfallenden Quanten über einen bestimmten Zeitraum mittelt, um deren statistische Schwankungen abzumildern. Da wir trotzdem einen möglichst genauen Wert für den

Winkel θ ermitteln wollen, muss der höchste und der niedrigste Punkt an der jeweiligen Kante bestimmt werden. Dazu werden zusätzlich zu den Extremwerten noch jeweils zwei markante Punkte rechts- und links der selben ermittelt, und daraus der Mittelwert nach der Formel

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{n=0}^N x_n \quad (4.1)$$

errechnet. Der beste Schätzwert für einen absoluten Fehler auf diesen Mittelwert errechnet sich dann aus

$$s_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{n=0}^n (\bar{c} - x_n)^2}. \quad (4.2)$$

Aus den beiden ermittelten Mittelwerten für das Minimum und das Maximum wird wiederum das Mittel gebildet um die Höhe a für eine Mittelwertslinie für die Unstetigkeit zu bestimmen. Wobei sich der Fehler hier aus

$$\Delta a = \frac{\Delta Max + \Delta Min}{2} \quad (4.3)$$

ergibt. Da Entwicklungen von reellen Funktionen am Orte der ursprünglichen Unstetigkeit den Mittelwert der Funktionswerte direkt vor und nach derselben annehmen, können wir unsere Kante am Schnittpunkt der Mittelwertslinie mit dem Xt-Plot vermuten. Den Winkel θ berechnen wir dann aus dem abgelesenen Abschnitt auf der horizontalen Achse b , indem wir eine Verhältnisgleichung zwischen Winkelbereich in dem gemessen wurde $\hat{\theta}$ und der Breite des Diagramms \hat{b} erstellen.

$$\theta = \frac{b \cdot \hat{\theta}}{\hat{b}} \quad (4.4)$$

Aus Gründen der Übersicht werden die abgelesenen Werte an den Kanten sowie die Winkel θ und die daraus resultierenden Quantenenergien E bei der jeweiligen Bestimmung der Abschirmungszahlen angegeben. Diese berechnen sich nach der BRAGG'schen Reflexionsbedingung aus (2.18).

Aufgrund der sehr steil abfallenden Flanken, fallen die Fehler auf die Mittelwertslinie kaum noch ins Gewicht, da θ nicht genauer aus dem Diagramm abgelesen werden kann. Sie müssen also nicht weiter betrachtet werden. Aus dem gleichen Grund, können auch die Fehler aus der Bestimmung der halben Intensität bei den Kupfer Emissionslinien vernachlässigt werden. Selbst bei einem Irrtum von $\Delta y = 1 \text{ cm}$ auf die Mittelwertslinie/die halbe Intensität, wäre der ablesbare Fehler auf der x-Achse $\Delta x \leq 1 \text{ mm}$. Das entspricht bei der gewählten Auflösung $\Delta \theta \leq 0.1^\circ$. D.h. die im Fol-

genden bestimmten Fehler von $\Delta y \approx 0.1 \text{ cm} \Rightarrow \Delta \theta \approx 0.01^\circ$ unterscheiden sich um eine Größenordnung von der Genauigkeit der Skala der Messapparatur ($\Delta \theta \approx 0.2^\circ$), was eine weitere Betrachtung und Fortpflanzung des Fehlers sinnlos macht.

4.2 Bestimmung des Energetischen Auflösungsvermögens der Apparatur

Zunächst wird die Winkelbreite der Emissionslinien (in der Skizze $\theta_{1/2}$) und daraus die beiden Winkel $\theta_{\alpha 1}$ und $\theta_{\alpha 2}$ bestimmt.

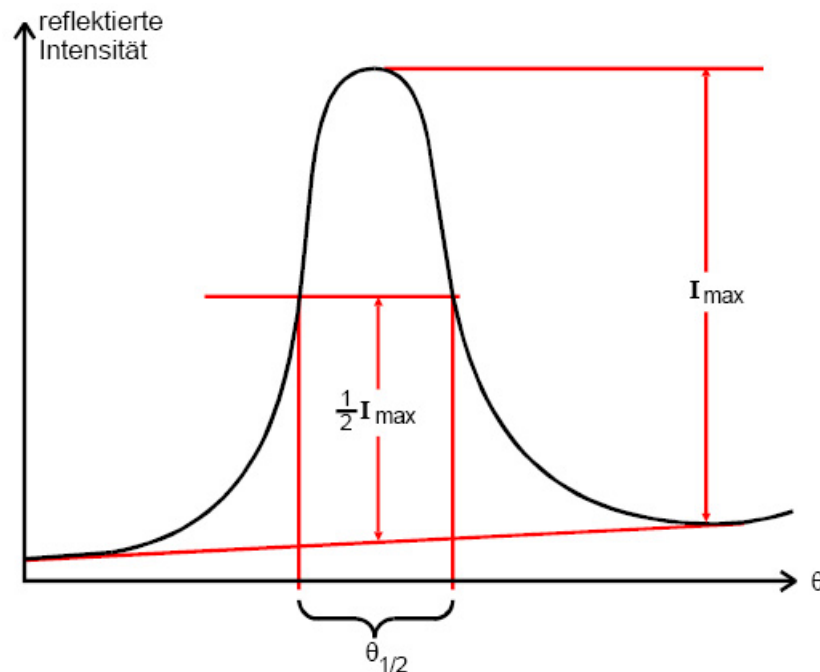


Abbildung 7: Skizze zur Definition der Winkelauflösung bei einer Emissionslinie

$$\theta_{\alpha 1} = 22.94^\circ$$

$$\theta_{\alpha 2} = 21.95^\circ$$

Aus (2.18) können wir nun die beiden Energien E_1 und E_2 ermitteln, wobei dann für die Energieauflösung δE gilt

$$\delta E = E_1 - E_2. \quad (4.5)$$

Wir erhalten dann als Energieauflösung für die Energie der E_α Linie

$$\delta E = (8.251 - 7.913) \text{ keV} = 0.337 \text{ keV}.$$

Die maximale Energie ergibt sich aus einer Extrapolation auf die Intensität 0. Der Grenzwinkel θ_{Gr} lässt sich zu

$$\theta_{Gr} = 10.14^\circ \quad (4.6)$$

bestimmen. Aus (2.18) folgt dann für die Maximalenergie

$$E_{Gr} = 17.514 \text{ keV}. \quad (4.7)$$

Die Beschleunigungsspannung an der Röntgenröhre lag dabei etwa bei $U \approx 20 \text{ kV}$. Die Differenz zwischen der Maximalenergie und der aus der Beschleunigungsspannung theoretisch zu erwartenden maximalen Energie lässt sich durch die Art der Messung erklären. Da die Klicks aus dem Geiger-Müller-Zählrohr über einen gewissen Zeitraum gemittelt werden, wird die Messung am Ende des Spektrums (hohe Quantenenergie) unscharf, da hochenergetische Quanten nur recht selten vorkommen.

4.3 Bestimmung der Abschirmungszahlen σ_1 und σ_2 für $^{29}\text{Kupfer}$

Zur Abschätzung der Abschirmungszahlen σ_1 und σ_2 benötigen wir für den vorliegenden Fall einer Emissionslinienmessung beim $^{29}\text{Kupfer}$ die Beziehungen

$$\sigma_1 = z - \sqrt{\frac{E_\beta}{R_\infty}} \quad (4.8)$$

$$\sigma_2 = z - \sqrt{-\frac{E_\alpha - R_\infty(z - \sigma_1)^2}{\frac{1}{4}R_\infty}} \quad (4.9)$$

Die Winkel θ_α und θ_β an denen die beiden zugehörigen K-Linien liegen bestimmen wir zu

$$\theta_\alpha = 22.44^\circ$$

$$\theta_\beta = 19.86^\circ.$$

Mit (2.18) erhalten wir die für die Energie

$$E_{\alpha} = 8.078 \text{ keV}$$

$$E_{\beta} = 9.077 \text{ keV}$$

und können mit (4.8) und (4.9) nun noch

$$\sigma_1 = 3.17$$

$$\sigma_2 = 11.86$$

ermitteln.

4.4 Bestimmung der Abschirmungszahlen $\sigma_{1,0}$ für $_{32}\text{Germanium}$, $_{37}\text{Rubidium}$ und $_{38}\text{Strontium}$

Max [cm](± 0.05)	Min [cm](± 0.05)
13.60	5.60
13.50	5.65
13.55	5.65
13.50	5.70
13.60	5.65

Tabelle 1: Bestimmung der Extrema an der K-Kante bei $_{32}\text{Germanium}$

Aus Tabelle 1 ergeben sich mit (4.1) und (4.2) die Mittelwerte

$$\overline{Max} = (13.550 \pm 0.022) \text{ cm}$$

$$\overline{Min} = (5.650 \pm 0.016) \text{ cm.}$$

und somit eine Höhe a der Mittelwertslinie von

$$a = (9.600 \pm 0.019) \text{ cm}$$

Aus den Messergebnissen kann man nun θ ablesen und auf

$$\theta = 16.24^{\circ}$$

bestimmen. Hier wird kein weiterer Fehler angenommen, da der Fehler auf a , wie oben argumentiert, im Ablesefehler verschwindet. Aus (2.18) erhalten wir dann für

die Energie

$$E = 11.026 \text{ keV}$$

und können dann mit (2.11)

$$\sigma_{1,0} = 3.78$$

bestimmen. Die Konstante $s_{1,0}$ in (2.11) verschwindet, da sich innerhalb der K-Schale wie oben erwähnt, nur wenig Elektronen aufhalten,

Max [cm](± 0.05)	Min [cm](± 0.05)
18.90	6.70
18.65	6.90
18.70	6.85
18.35	6.80
18.70	6.80

Tabelle 2: Bestimmung der Extrema an der K-Kante bei $_{37}\text{Rubidium}$

Analog erhalten wir aus Tabelle 2 für $_{37}\text{Rubidium}$ für \overline{Max} , \overline{Min} , a , θ und E

$$\overline{Max} = (18.660 \pm 0.089) \text{ cm}$$

$$\overline{Min} = (6.810 \pm 0.033) \text{ cm.}$$

$$a = (12.265 \pm 0.061) \text{ cm}$$

$$\theta = 11.71^\circ$$

$$E = 15.197 \text{ keV}$$

und können nun wieder

$$\sigma_{1,0} = 3.96$$

ermitteln. Schließlich erhalten wir für $_{38}\text{Strontium}$ gemäß der Werte aus Tabelle 3:

Max [cm](± 0.05)	Min [cm](± 0.05)
9.10	3.45
9.00	3.55
8.95	3.55
9.05	3.50
9.15	3.60

Tabelle 3: Bestimmung der Extrema an der K-Kante bei $_{38}\text{Strontium}$

$$\overline{Max} = (9.050 \pm 0.035) \text{ cm}$$

$$\overline{Min} = (3.530 \pm 0.026) \text{ cm.}$$

$$a = (6.290 \pm 0.030) \text{ cm}$$

$$\theta = 11.20^\circ$$

$$E = 15.87 \text{ keV}$$

und bestimmen dann

$$\sigma_{1,0} = 4.25 .$$

4.5 Bestimmung der Abschirmungszahlen $s_{2,1}$ für $_{73}\text{Tantal}$ und $_{79}\text{Gold}$

L-III Max [cm](± 0.05)	L-III Min [cm](± 0.05)
23.30	7.80
22.90	8.10
23.00	7.90
22.90	8.60
23.20	8.30

Tabelle 4: Bestimmung der Extrema an der L-III-Kante bei $_{73}\text{Tantal}$

Aus Tabelle 4 erhalten wir analog zum letzten Kapitel

$$\overline{Max_{III}} = (23.060 \pm 0.081) \text{ cm}$$

$$\overline{Min_{III}} = (8.14 \pm 0.14) \text{ cm.}$$

$$a_{III} = (14.60 \pm 0.11) \text{ cm}$$

$$\theta_{III} = 18.30^\circ$$

$$E_{III} = 9.821 \text{ keV}$$

L-II Max [cm](± 0.05)	L-II Min [cm](± 0.05)
13.90	10.60
13.35	11.10
13.70	10.70
13.30	11.00
13.60	10.70

Tabelle 5: Bestimmung der Extrema an der L-II-Kante bei $_{73}\text{Tantal}$

Aus Tabelle 5 können wir

$$\overline{Max_{II}} = (13.570 \pm 0.11) \text{ cm}$$

$$\overline{Min_{II}} = (10.820 \pm 0.097) \text{ cm.}$$

$$a_{II} = (12.20 \pm 0.10) \text{ cm}$$

$$\theta_{II} = 16.14^\circ$$

$$E_{II} = 11.093 \text{ keV}$$

berechnen. Zur Berechnung der Abschirmungszahlen $s_{2,1}$ benutzen wir nun für

$$E = E_{II} - E_{III} \tag{4.10}$$

die Näherung

$$s_{2,1} = z - \sqrt{\left(\frac{4}{\alpha} \sqrt{\frac{E}{R_{\infty}}} - \frac{5E}{R_{\infty}}\right) \left(1 + \frac{19}{32} \alpha^2 \frac{E}{R_{\infty}}\right)} \quad (4.11)$$

und können dann $s_{2,1}$ zu

$$s_{2,1} = 3.93$$

berechnen.

L-III Max [cm](± 0.05)	L-III Min [cm](± 0.05)
20.90	8.60
20.60	9.00
20.70	8.90
20.50	8.80
20.60	9.10

Tabelle 6: Bestimmung der Extrema an der L-III-Kante bei $_{79}\text{Gold}$

Für Gold erhalten wir an der L_{III} -Kante die Werte aus Tabelle 6 und

$$\overline{Max_{III}} = (20.660 \pm 0.068) \text{ cm}$$

$$\overline{Min_{III}} = (8.880 \pm 0.086) \text{ cm.}$$

$$a_{III} = (14.770 \pm 0.077) \text{ cm}$$

$$\theta_{III} = 15.12^\circ$$

$$E_{III} = 11.828 \text{ keV}$$

L-II Max [cm](± 0.05)	L-II Min [cm](± 0.05)
13.50	9.80
13.05	10.10
13.15	9.85
13.20	10.10
13.40	9.90

Tabelle 7: Bestimmung der Extrema an der L-II-Kante bei $_{79}\text{Gold}$

Aus Tabelle 7 erhalten wir

$$\overline{Max_{II}} = (13.260 \pm 0.083) \text{ cm}$$

$$\overline{Min_{II}} = (9.950 \pm 0.063) \text{ cm.}$$

$$a_{II} = (11.650 \pm 0.073) \text{ cm}$$

$$\theta_{II} = 3.05^\circ$$

$$E_{II} = 13.662 \text{ keV.}$$

mit (4.10) folgt dann aus (4.11)

$$s_{2,1} = 4.01 .$$

5 Diskussion

Die erhaltenen Xt-Plots erwiesen sich bei der Bestimmung der Kennlinien und Kanten allesamt als brauchbar. Auf Kosten der Winkelauflösung konnte das statistisch bedingte Zittern in den Kurven in Grenzen gehalten werden, so dass die dadurch resultierenden statistischen Unsicherheiten durch die Ungenauigkeit der Messapparatur (vor allem der Winkelskala) überdeckt wurden.

Die Bestimmung der Absorptionskanten war weitestgehend problemlos möglich, ebenso die Ermittlung der Emissionslinien der Kupferanode, so dass recht genaue Ergebnisse, im Rahmen der Ungenauigkeit der Messapparatur und des Ablesens derselben, vorliegen dürften. Dabei bleibt jedoch zu erwähnen, dass die Ungenauigkeit insbesondere bei den Messungen an den schwereren Elementen Tantal und Gold erheblich höher sein dürften als bei den anderen. Das ist auf die Differenzbildung bei den Energien zurückzuführen, bei der der absolute Fehler auf die Energie erhöht wird, der Bezugswert jedoch um mehr als eine Größenordnung schrumpft, was eine empfindliche Erhöhung des relativen Fehlers zur Folge hat.

6 Literatur Bildnachweise

Sämtliche Abbildungen in den Abschnitten 2 und 3 sind aus dem Praktikumsskript entnommen.

Röntgen Emissions- und Absorptionsspektren (602) Experimentelle Übungen für Physiker

Version vom 14. November 2005

<http://berners-lee.physik.uni-dortmund.de/praktikum/AP-Anleitungen/Optik/Versuch\%20Nr.602.pdf>