

Versuch 304 - Das Magnetische Moment

**TU Dortmund, Fakultät Physik
Anfänger-Praktikum**

Jan Adam

jan.adam@tu-dortmund.de

Dimitrios Skodras

dimitrios.skodras@tu-dortmund.de

18.Dezember 2012

Inhaltsverzeichnis

1	Theorie	3
1.1	Gravitation	3
1.2	Harmonischer Oszillator	3
1.3	Präzession	4
2	Aufbau	4
3	Durchführung	5
3.1	Gravitation	5
3.2	Harmonischer Oszillator	5
3.3	Präzession	5
4	Auswertung	5
4.1	Fehlerrechnung	5
4.2	Ermittlung der Apparaturkonstanten	6
4.3	Ermittlung durch Ausnutzen der Gravitation	7
4.4	Ermittlung durch Schwingungsdauer	8
4.5	Ermittlung durch Präzission	10
5	Diskussion	12

1 Theorie

Aus der Maxwell-Gleichung

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (1)$$

folgt direkt, dass es keine magnetischen Monopole gibt. In diesem Versuch wird daher das magnetische Moment μ eines Dipols bestimmt. Der Dipol befindet sich während des Versuchs in einem homogenen Magnetfeld, wodurch er eine Kraft erfährt. Aus dem Verhalten des Dipols im magnetischen Feld, kann man dann auf Eigenschaften seines Dipolfeldes schließen. Ein entsprechendes homogenes Magnetfeld kann man durch ein sogenanntes Helmholtz-Spulenpaar erzeugen. Es werden dazu zwei Spulen in einem Abstand voneinander aufgestellt, der gleich dem Spulenradius ist. Werden nun beide Spulen gleichgerichtet von einem Gleichstrom durchflossen, so entsteht in der Mitte ihrer Symmetrieachse durch Superposition der einzelnen Felder ein nahezu homogenes Magnetfeld. Das magnetische Moment ist ein Maß für die Stärke eines magnetischen Dipols und ist wie folgt definiert:

In einem homogenen Magnetfeld wirkt auf einen Dipol das Drehmoment

$$\vec{D} = \vec{\mu} \times \vec{B}, \quad (2)$$

$$\vec{\mu} = \text{Dipolmoment}$$

welches solange ihn in eine Lage dreht, in der der Dipol und die Feldlinien des homogenen Magnetfeldes wieder gleichgerichtet sind.

1.1 Gravitation

Wird in die Kugel mit dem Dipol ein etwa 20 cm langer Stab gesteckt, an dem ein bewegliches Gewicht befestigt ist und dieser Stab nun senkrecht zum Magnetfeld ausgerichtet, so wirkt auf ihn einerseits ein Drehmoment durch die Gewichtskraft und andererseits ein Drehmoment durch das Magnetfeld. Beide Momente greifen die Kugel antiparallel an. Erhöht man nun so lange der Spulenstrom und dadurch auch die Stärke des Magnetfeldes, bis beide Drehmomente im Gleichgewicht liegen und der Stab ruht, so gilt:

$$\vec{\mu}_{Dipol} \times \vec{B} = m \cdot (\vec{r} \times \vec{g}). \quad (3)$$

Auf Grund der Winkelgleichheit lassen sich die Kreuzprodukte vereinfachen zu:

$$\mu_{Dipol} \cdot B = m \cdot r \cdot g. \quad (4)$$

1.2 Harmonischer Oszillator

Das durch das homogene B-Feld erzeugte Drehmoment beinhaltet eine rücktreibende Kraft. Lenkt man die Kugel aus ihrer Ruhelage aus, so verhält sie sich wie ein harmonischer Oszillator und schwingt mit einer festen Frequenz hin und her. Die Bewegung kann

durch folgende Differentialgleichung beschrieben werden:

$$-|\vec{\mu}_{Dipol} \times \vec{B}| = J_K \cdot \frac{d^2\Theta}{dt^2}. \quad (5)$$

Deren Lösung ist:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 J_K}{\mu_{Dipol}} \frac{1}{B} \quad (6)$$

T = Schwingungsperiode, μ_{Dipol} = Magnetisches Moment des Dipols, B = magnetische Flussdichte, J_K = Trägheitsmoment der Kugel

1.3 Präzession

Wirkt eine äußere Kraft auf die Drehachse eines Körpers, so beginnt diese, um den Richtungsvektor der Kraft zu rotieren. Dies wird als Präzession bezeichnet. Die Präzessionsbewegung lässt sich durch folgende Differentialgleichung beschreiben:

$$\vec{\mu}_{Dipol} \times \vec{B} = \frac{d\vec{L}_K}{dt} \quad (7)$$

Hierbei ist Ω_p die Präzessionsfrequenz und eine Lösung dieser Differentialgleichung.

$$\Omega_p = \frac{\mu B}{|L_K|} \quad (8)$$

lässt sich dabei in

$$\frac{1}{T} = \frac{\mu_{Dipol}}{2\pi L_K} B \quad (9)$$

$$L_K = J_K \omega = \text{Drehimpuls}$$

umstellen.

2 Aufbau

Der im Versuch verwandte Dipol ist in eine kleine Vollkugel eingelassen. Die Kugel liegt in einer passenden Vertiefung, in die von unten Luft eingeblasen wird. Die Kugel schwebt dann nahezu reibungsfrei auf dem Luftkissen. Der gesamte Aufbau befindet sich im Inneren eines Helmholtzspulenpaares, deren Radius jedoch nicht ganz dem Spulenabstand entspricht. Das Magnetfeld ist somit leicht inhomogen, da sich der Dipol jedoch sehr zentral auf der Symmetrieachse befindet kann dies vernachlässigt werden.

Das Magnetfeld der Spulen errechnet sich über das Biot-Savartsche Gesetz

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3} \quad (10)$$

zu

$$B(0) = \frac{\mu_0 I R^2 N}{(R^2 + x^2)^{3/2}}. \quad (11)$$

3 Durchführung

Das magnetische Moment des Dipols wird nun auf drei verschiedene Weisen berechnet.

3.1 Gravitation

In die Kugel wird ein Stab mit einer beweglichen Masse am Ende gesteckt. Und das Magnetfeld so lange erhöht, bis ein Kräftegleichgewicht herrscht. Indem der Abstand der Masse zur Kugel variiert wird, kann die benötigte B-Feldstärke für verschiedene Drehmomente bestimmt werden. Eine lineare Ausgleichsrechnung mittels Gleichung (4) bestimmt das magnetische Moment des Dipols.

3.2 Harmonischer Oszillator

Die Kugel wird im harmonischen B-Feld um einen kleinen Winkel ausgelenkt und dadurch in Schwingung versetzt. Gemessen wird die Schwingungsdauer für verschiedene Magnetfeldstärken und durch lineare Ausgleichsrechnung wird mittels Gleichung (6) das magnetische Moment errechnet.

3.3 Präzession

Die Kugel wird in Präzession versetzt, indem die Drehachse nach dem Andrehen leicht gekippt wird und erst dann das magnetische Feld eingeschaltet wird. Die Kugel beginnt dann um die Feldlinien zu Präzessieren. Wichtig ist, dass die Kugel bei jeder Messung mit der gleichen Geschwindigkeit rotiert. Um dies zu realisieren wird mit einem Stroboskop sichergestellt, dass die auf der Kugel angebrachte Markierung unter dem Stroboskoplicht stationär erscheint. Ist dies der Fall, so rotiert die Kugel bei jeder Messung mit der gleichen Frequenz. Als Rotationsfrequenz wird für die Kugel ein Wert zwischen 4 Hz und 6 Hz gewählt, da die Rotationsfrequenz mit der Zeit exponentiell abnimmt und dieser Betrag nur bei langsamen Frequenzen hinreichend klein ist.

4 Auswertung

4.1 Fehlerrechnung

Da viele für die Auswertung notwendigen Größen fehlerbehaftet sind, ist es wichtig, den Einfluss dieser Fehler auf die ermittelten Größen herauszufinden. Neben den von den

Messapparaturen verursachten Fehlern dienen der Mittelwert

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i, \quad (12)$$

\bar{x} = Mittelwert, N = Anzahl der Messungen

die Gaußsche Fehlerfortpflanzung

$$\Delta G = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial G}{\partial x_i} \cdot \Delta x_i \right)^2}, \quad (13)$$

x_i = Variable, Δx_i = Fehler der Variable

und die Standardabweichung des Mittelwerts

$$\bar{s} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_i^N (x_i - \bar{x})^2}. \quad (14)$$

4.2 Ermittlung der Apparaturkonstanten

Für die Auswertung des Experiments sind einige, für die Apparatur individuellen Werte nötig. So die Daten des genutzten Helmholtz-Spulenpaars, sowie der Billiardkugel. Sie wurden zu Versuchsbeginn aufgenommen. Der Fehler der Masse ergibt sich aus der kleinsten angezeigten Größenordnung der zur Messung benutzten Waage. Der Fehler des Durchmessers wird von der Schieblehre abgelesen.

$$d_H = 0,138\text{m}$$

$$R_H = 0,109\text{m}$$

$$N = 195$$

$$m_K = 142,53\text{g} \pm 0,01\text{g}$$

$$2r_K = 53,65\text{mm} \pm 0,05\text{mm}$$

Das Trägheitsmoment der Billiardkugel J_K wird ermittelt und der Fehler nach Gleichung (13) berechnet.

$$J_K = \frac{2}{5} m_K r_K^2$$

$$= 4,102 \cdot 10^{-5} \text{ kgm}^2 \quad (15)$$

$$\Delta J_K = \sqrt{\left(\frac{\partial J_K}{\partial m_K} \Delta m_K\right)^2 + \left(\frac{\partial J_K}{\partial r_K} \Delta r_K\right)^2} = J_K \sqrt{\left(\frac{\Delta m_K}{m_K}\right)^2 + \left(\frac{2 \Delta r_K}{r_K}\right)^2}$$

$$= 4,122 \cdot 10^{-9} \text{ kgm}^2 \quad (16)$$

4.3 Bestimmung des magnetischen Momentes eines Magnetens unter Ausnutzung der Gravitation

Das von der Stromstärke I erzeugte Magnetfeld $B(I)$ wirkt ein Drehmoment auf die kleine Masse $m_{kl} = 1,36 \text{ g}$ zur Ausgleichung des vom Gravitationsfeld erzeugten Drehmoments. In Tabelle 1 sind die Messwerte r und I mit einem Ablesefehler, sowie das aus Gleichung (11) errechnete Magnetfeld B , dessen Fehler sich ergibt zu

$$\Delta B = \sqrt{\left(\frac{\partial B}{\partial I} \Delta I\right)^2} = B \frac{\Delta I}{I}. \quad (17)$$

i	r [mm]	Δr [mm]	I [A]	ΔI [A]	B [mT]	ΔB [mT]
1	45,00	0,05	1,62	0,2	2,20	0,44
2	50,00	0,05	1,75	0,2	2,37	0,47
3	55,00	0,05	1,85	0,2	2,51	0,50
4	60,00	0,05	1,93	0,2	2,62	0,52
5	65,00	0,05	2,10	0,2	2,85	0,57
6	70,00	0,05	2,20	0,2	2,98	0,60
7	75,00	0,05	2,30	0,2	3,12	0,62
8	80,00	0,05	2,42	0,2	3,28	0,66
9	85,00	0,05	2,51	0,2	3,40	0,68
10	90,85	0,05	2,64	0,2	3,58	0,72

Tabelle 1: Magnetfeld B in Abhängigkeit des Abstands r der kleinen Masse

Eine lineare Regression der vorangehenden Tabelle, dargestellt in Abbildung 1 nach Gleichung (4) durch GNUplot führt zu folgenden Parametern.

$$B = a \cdot r + b$$

mit

$$\begin{aligned} a &= (3,01 \cdot 10^{-2} \pm 5 \cdot 10^{-4}) \frac{\text{mT}}{\text{mm}} \\ b &= (0,853 \pm 0,035) \text{ mT} \end{aligned} \quad (18)$$

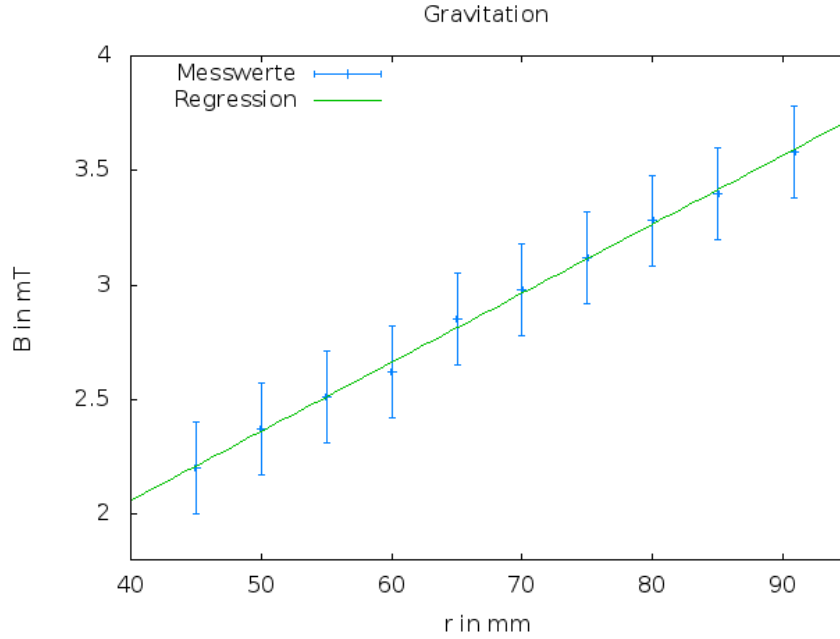


Abbildung 1: lineare Abhängigkeit von r und B

Nun lässt sich das magnetische Moment μ_{Grav} mitsamt Fehler angeben:

$$\begin{aligned} \mu_{Grav} &= \frac{m_{kl} g}{a} \\ &= 0,445 \text{ Am}^2 \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \Delta\mu_{Grav} &= \sqrt{\left(\frac{\partial\mu}{\partial m_{kl}} \Delta m_{kl}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mu}{\partial a} \Delta a\right)^2} = \mu_{Grav} \sqrt{\left(\frac{\Delta m_{kl}}{m_{kl}}\right)^2 + \left(\frac{-\Delta a}{a}\right)^2} \\ &= 5,0 \cdot 10^{-4} \text{ Am}^2 \end{aligned} \quad (20)$$

4.4 Bestimmung des magnetischen Momentes über die Schwingungsdauer eines Magnetens

Um größere Fehler durch Start-Stopp-Verzögerung zu vermeiden, wird über zehn Schwingungsperioden gemessen und das für jede Stromstärke drei mal. In Tabelle 2 sind die Messwerte

I und ${}^i T_{10}$, deren Mittelwert, sowie die errechneten Größen T^2 und $1/B$ mit Fehlern aufgeführt.

$$\Delta \frac{1}{B} = \sqrt{\left(\frac{\partial(1/B)}{\partial I} \Delta I\right)^2} = \frac{1}{B} \frac{\Delta I}{I} \quad \text{und} \quad \Delta T^2 = \sqrt{\left(\frac{\partial T^2}{\partial T} \bar{s}_T\right)^2} = T^2 \frac{2\Delta T}{T} \quad (21)$$

i	I [A]	${}^1 T_{10}$ [s]	${}^2 T_{10}$ [s]	${}^3 T_{10}$ [s]	\bar{T}_{10} [s]	\bar{s}_T [s]	$\frac{1}{B}$ [$\frac{1}{\text{mT}}$]	$\Delta \frac{1}{B}$ [$\frac{1}{\text{mT}}$]	T^2 [s ²]	ΔT^2 [s ²]
1	0,4	25,72	25,44	25,72	25,63	0,09	1,844	0,369	6,567	0,102
2	0,8	18,22	18,25	18,22	18,23	0,01	0,922	0,184	3,323	0,006
3	1,2	15,13	14,94	15,00	15,02	0,06	0,615	0,123	2,257	0,021
4	1,6	12,91	12,90	12,87	12,89	0,01	0,461	0,092	1,662	0,003
5	2,0	11,50	11,59	11,50	11,53	0,03	0,369	0,074	1,329	0,007
6	2,4	10,69	10,59	10,53	10,60	0,05	0,307	0,061	1,124	0,009
7	2,8	9,81	9,75	9,81	9,79	0,02	0,263	0,053	0,958	0,003
8	3,2	9,10	9,13	9,16	9,13	0,02	0,230	0,046	0,834	0,002
9	3,6	8,62	8,63	8,69	8,65	0,02	0,205	0,041	0,748	0,003
10	4,0	8,28	8,22	8,22	8,24	0,02	0,184	0,037	0,679	0,002

Tabelle 2: Die Schwingungsdauer T in Abhängigkeit der Stromstärke I

Gleichung (6) liefert die Abhängigkeit, die Tabelle 2 durch GNUplot mittels linearer Regression gefittet und mit folgenden Parametern beschrieben wird. Dargestellt ist die Regression in Abbildung 2

$$T^2 = c \cdot \frac{1}{B} + d$$

mit

$$\begin{aligned} c &= (3,554 \pm 0,012) \frac{\text{mT}}{\text{s}^2} \\ d &= (0,029 \pm 0,009) \text{s}^2 \end{aligned} \quad (22)$$

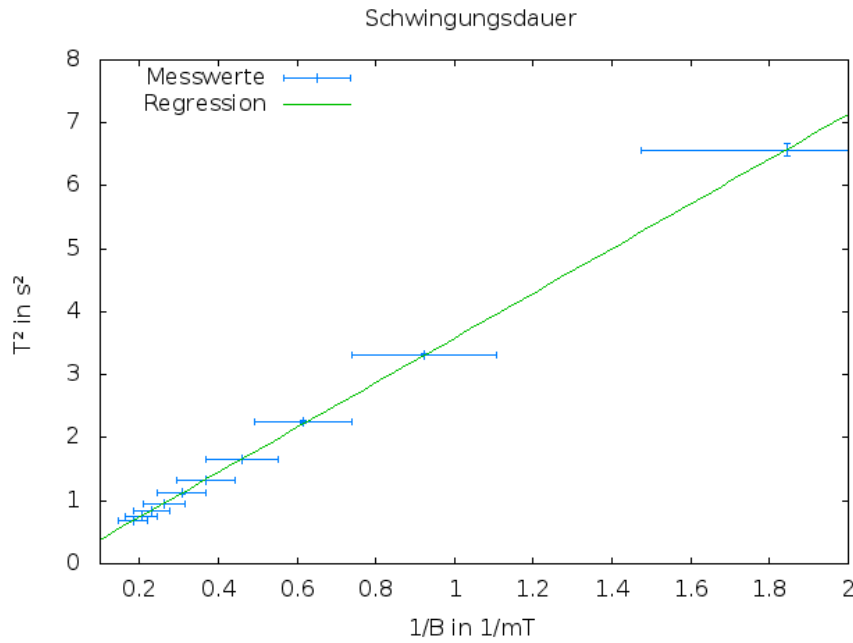


Abbildung 2: lineare Abhängigkeit von $\frac{1}{B}$ und T^2

Das magnetische Moment μ_{Schw} wird nun mitsamt Fehler angegeben:

$$\begin{aligned}\mu_{Schw} &= \frac{4\pi^2 J_K g}{c} \\ &= 0,446 \text{ Am}^2\end{aligned}\tag{23}$$

$$\begin{aligned}\Delta\mu_{Schw} &= \sqrt{\left(\frac{\partial\mu}{\partial J_K}\Delta J_K\right)^2 + \left(\frac{\partial\mu}{\partial c}\Delta c\right)^2} = \mu_{Schw}\sqrt{\left(\frac{\Delta J_K}{J_K}\right)^2 + \left(\frac{-\Delta c}{c}\right)^2} \\ &= 0,012 \text{ Am}^2\end{aligned}\tag{24}$$

4.5 Bestimmung des magnetischen Momentes über die Präzession eines Magneten

Bei einer Stroboskopfrequenz ν_{Strob} von 4,5 Hz erschien der weiße Punkt am Stiel der Billardkugel bei jedem Lichtimpuls am gleichen Ort. Die vier markierten Werte in Tabelle 3 entstehen durch Messen über zwei Präzessionsperioden, sodass hier nur der halbierte Wert in den Mittelwert \bar{T}_p einfließt.

i	I [A]	1T_p [s]	2T_p [s]	3T_p [s]	\bar{T}_p [s]	\bar{s}_T [s]	B [mT]	ΔB [mT]	$\frac{1}{\bar{T}}$ [$\frac{1}{s}$]	$\Delta \frac{1}{\bar{T}}$ [$\frac{1}{s}$]
1	0,4	24,63	24,78	25,25	24,89	0,19	0,542	0,108	0,040	0,001
2	0,8	13,87	13,53	13,82	13,74	0,11	1,085	0,217	0,073	0,001
3	1,2	9,38	9,31	9,16	9,28	0,06	1,627	0,325	0,108	0,001
4	1,6	7,10	7,41	7,60	7,37	0,15	2,170	0,434	0,136	0,002
5	2,0	5,97	5,84	5,88	5,90	0,04	2,712	0,542	0,170	0,001
6	2,4	4,84	5,25	4,97	5,02	0,12	3,255	0,651	0,199	0,002
7	2,8	7,94	4,32	4,41	4,23	0,13	3,797	0,759	0,236	0,003
8	3,2	7,53	3,75	4,03	3,85	0,09	4,339	0,868	0,260	0,002
9	3,6	6,85	3,47	3,46	3,45	0,01	4,882	0,976	0,290	0,000
10	4,0	6,09	3,09	3,16	3,10	0,03	5,424	1,085	0,323	0,001

Tabelle 3: Die Präzessionsdauer T in Abhängigkeit der Stromstärke I

Aus Gleichung (??) lassen sich durch GNUplot mittels linearer Ausgleichsrechnung die zur Bestimmung des magnetischen Moments μ nötigen Parameter bestimmen. Die Werte wurden aus Tabelle 3 verwandt und die Regression ist in Abbildung 3 einzusehen.

$$\frac{1}{T} = e \cdot B + f$$

mit

$$\begin{aligned} e &= (5,76 \cdot 10^{-2} \pm 5,79 \cdot 10^{-4}) \frac{1}{\text{mTs}} \\ f &= (1,17 \cdot 10^{-2} \pm 1,95 \cdot 10^{-3}) \frac{1}{s} \end{aligned} \tag{25}$$

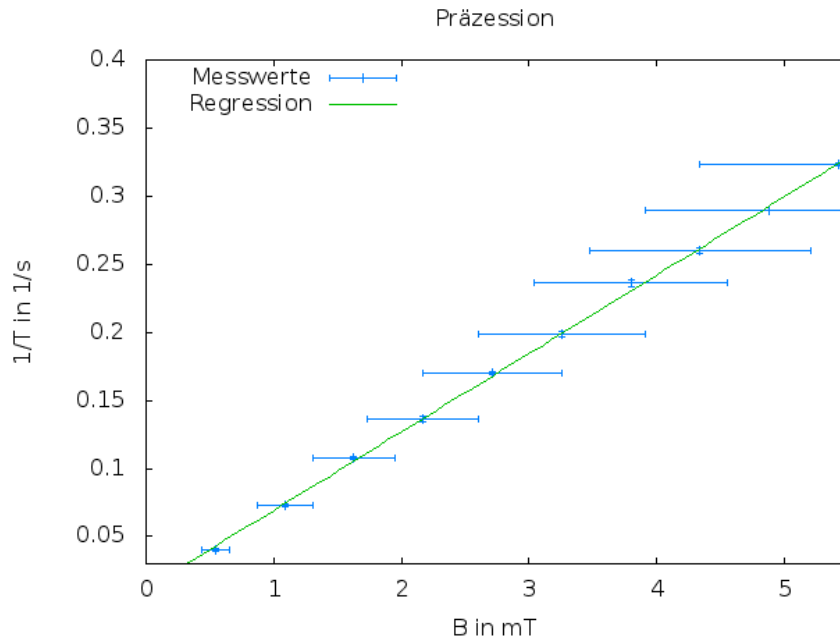


Abbildung 3: lineare Abhängigkeit von B und $\frac{1}{T}$

Das magnetische Moment μ_{Praez} wird nun mitsamt Fehler angeben:

$$\begin{aligned}\mu_{Praez} &= 4\pi^2 J_K \nu_{Strob} \cdot e \\ &= 0,420 \text{ Am}^2\end{aligned}\quad (26)$$

$$\begin{aligned}\Delta\mu_{Praez} &= \sqrt{\left(\frac{\partial\mu}{\partial J_K} \Delta J_K\right)^2 + \left(\frac{\partial\mu}{\partial e} \Delta e\right)^2} = \mu_{Praez} \sqrt{\left(\frac{\Delta J_K}{J_K}\right)^2 + \left(\frac{\Delta e}{e}\right)^2} \\ &= 5,79 \cdot 10^{-4} \text{ Am}^2\end{aligned}\quad (27)$$

5 Diskussion

Übersichtlich zusammengestellt nochmal das magnetische Moment, errechnet aus drei verschiedenen Ansätzen.

$$\begin{aligned}\mu_{Grav} &= (4,45 \cdot 10^{-1} \pm 5,0 \cdot 10^{-4}) \text{ Am}^2 \\ \mu_{Schw} &= (4,46 \cdot 10^{-1} \pm 1,2 \cdot 10^{-2}) \text{ Am}^2 \\ \mu_{Praez} &= (4,20 \cdot 10^{-1} \pm 5,8 \cdot 10^{-4}) \text{ Am}^2\end{aligned}$$

Da bei keiner Methode der ermittelte Wert stark von den anderen beiden abweicht,

ist davon auszugehen, dass das magnetische Moment des Magneten inmitten der Billardkugel einen Wert von $\bar{\mu} = (4,37 \cdot 10^{-1} \pm 7,2 \cdot 10^{-5}) \text{ Am}^2$ annimmt. Schwierig beim Ansatz mit Ausnutzung der Gravitation ist die nötige Genauigkeit der Apparatur zur Einstellung der Stromstärke. So ist es schwer möglich, die kleine Masse m_{kl} zur Ruhe zu bringen. Des Weiteren gestaltet sich die Methode der Präzession als fehleranfällig, da die Synchronisation von Stroboskopfrequenz und Drehfrequenz der Kugel nicht Restlos gelingt. Über eine Präzessionsrotation hinweg nimmt die Eigenrotation der Kugel sehr stark ab und bleibt nicht fest bei den 4,5 Hz. Zudem war eine Nutation nicht restlos vermeidbar, was ebenfalls Einfluss auf das Ergebnis hat. Vermutlich wurde die Kugel um einen zu großen Winkel ausgelenkt, so dass eine Nutation begünstigt wurde. Die Betrachtung des Magneten als harmonischen Oszillator verhilft hier zum besten Ergebnis. Durch die Messung über 10 Schwingungsperioden und die leicht feststellbare Dauer einer Periode, wodurch die Abweichungen der einzelnen Messungen untereinander sehr gering sind und da die Kugel durch das Luftkissen fast garnicht abgebremst wird, ist diese Aussage berechtigt.