

Fresnelsche Formeln¹

1. Problemstellung

Das Licht, das sich im feld- und materiefreien Raum geradlinig ausbreitet, erleidet beim Durchtritt durch eine Grenzfläche, die zwei Medien mit verschiedenem Brechungsindex n voneinander trennt, im allgemeinen eine Reflexion und eine Brechung. Gegenstand der folgenden Überlegungen in den Kapiteln 2 und 3 soll es nun sein, den Bruchteil der reflektierten Intensität in Abhängigkeit vom Einfallswinkel des Lichtbündels auf die Grenzfläche zu berechnen.

Das Ergebnis soll durch eine Messreihe überprüft werden. Man benötigt hierzu ein Goniometer, das die Messung des Einfallswinkels gestattet, ein Photoelement für die Bestimmung der Lichtintensität sowie eine Lichtquelle, die polarisierte Strahlung emittiert. Als Grundlage der Rechnung dient die elektromagnetische Wellentheorie, die die Ausbreitungsvorgänge des Lichtes mit Hilfe der beiden **Maxwellschen Gleichungen**² beschreibt:

$$(1) \quad \text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \varepsilon \varepsilon_0 \dot{\vec{E}}$$

$$(2) \quad \text{rot } \vec{E} = -\mu \mu_0 \dot{\vec{H}}.$$

Hierin bedeuten \vec{E} und \vec{H} die elektrische bzw. magnetische Feldstärke, \vec{j} die Stromdichte, ε die relative Dielektrizitätskonstante und μ die Permeabilität des Mediums, ε_0 die Influenzkonstante und schließlich μ_0 die Induktionskonstante. Im folgenden sollen nur nicht-ferromagnetische und nicht elektrisch leitende Medien betrachtet werden, sodass man $\mu \approx 1$ und $\vec{j} = 0$ setzen kann.

2. Die Strahlungsleistung des elektromagnetischen Feldes

Um das in Kap.1 angegebene Ziel zu erreichen, benötigt man zunächst einen Ausdruck für die Strahlungsleistung einer Lichtwelle in Abhängigkeit von ihrer Ausbreitungsgeschwindigkeit v im materieerfüllten Raum. Dazu multipliziert man (1) skalar mit \vec{E} und (2) skalar mit \vec{H} . Man bekommt dann

$$(3) \quad \vec{E} \cdot \nabla \times \vec{H} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \dot{\vec{E}}$$

und

$$(4) \quad \vec{H} \cdot \nabla \times \vec{E} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{H} \cdot \dot{\vec{H}}.$$

Da nun

$$(5) \quad \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{H} \cdot \nabla \times \vec{E} - \vec{E} \cdot \nabla \times \vec{H}$$

¹ benannt nach dem französischen Ingenieur und Physiker Augustin Jean Fresnel (1788 – 1827)

² benannt nach dem britischen Physiker James Clerk Maxwell (1831 - 1879)

ist, lassen sich (3), (4) und (5) zusammenfassen zu

$$(6) \quad \operatorname{div} \vec{E} \times \vec{H} = -\mu_0 \vec{H} \cdot \dot{\vec{H}} - \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \dot{\vec{E}} .$$

Aus der Elektrizitätslehre ist bekannt, dass

$$(6a) \quad W_{\text{el}} := \frac{1}{2} \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}^2$$

und

$$(6b) \quad W_{\text{mag}} := \frac{1}{2} \mu_0 \vec{H}^2$$

die Energie pro Volumeneinheit eines elektrischen bzw. magnetischen Feldes darstellen. Daher sind

$$\varepsilon \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \dot{\vec{E}} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}^2$$

und

$$\mu_0 \vec{H} \cdot \dot{\vec{H}} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} \mu_0 \vec{H}^2$$

die zeitlichen Ableitungen der elektrischen und magnetischen Feldenergie. Gleichung (6) kann man also in der Form

$$(7) \quad \operatorname{div} \vec{E} \times \vec{H} + \dot{W}_{\text{el}} + \dot{W}_{\text{mag}} = 0$$

schreiben. Integriert man (7) über ein Volumen V , so bekommt man

$$(8) \quad \int_V \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) dV + \int_V \dot{W}_{\text{el}} dV + \int_V \dot{W}_{\text{mag}} dV = 0 .$$

Nach dem Gaußschen Satz der Vektorrechnung lässt sich das Volumenintegral in ein Integral über die Oberfläche O des Volumens V verwandeln:

$$\int_V \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) dV = \int_O (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{O} .$$

Damit ist

$$(9) \quad \int_O (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{O} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_V W_{\text{el}} dV + \int_V W_{\text{mag}} dV \right) = 0 .$$

Die Gleichung (9) macht nun eine bemerkenswerte Aussage: Da in dem betrachteten Volumen V keine anderen Energieformen als die elektrische und magnetische Feldenergie vorkommen, muss der Ausdruck

$$\int_O (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{O}$$

den Energiestrom pro Zeiteinheit durch die Oberfläche O des Volumens V angeben; denn die Gesamtenergie in V kann sich nach Aussage von Gleichung (9) nur dadurch ändern, dass Energie entweder zu- oder abströmt. Die Größe

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

muss demnach die Dimension einer Leistung/Fläche besitzen. Man nennt sie auch den **Poynting-Vektor**³. Den durch \vec{S} zum Ausdruck gebrachten Energietransport, der nicht an Materietransport, ja nicht einmal an die Anwesenheit von Materie gebunden ist, bezeichnet man als **Strahlung**. Der Poynting-Vektor stellt somit die Strahlungsleistung pro Flächeneinheit eines elektromagnetischen Feldes dar. Sein Betrag - nur er ist für das folgende von Bedeutung - lässt noch eine andere Darstellung zu: Geht man zum Beispiel von

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t))$$

und

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}_0 \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t))$$

(\vec{r} = Ortsvektor, t = Zeit, \vec{k} = Wellenzahlvektor, ω = Kreisfrequenz)

als Darstellung der Orts- und Zeitabhängigkeit von \vec{E} und \vec{H} aus (ebene Wellen), so bekommt man aus den Maxwell'schen Gleichungen (1) und (2) einen Zusammenhang zwischen den Amplituden E_0 und H_0 , und zwar gilt

$$k H_0 = \omega \varepsilon \varepsilon_0 E_0$$

und

$$k E_0 = \omega \mu_0 H_0 \quad .$$

Somit ist

$$H_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon \varepsilon_0}{\mu_0}} E_0 \quad .$$

Setzt man diese Beziehung in (6a) und (6b) ein, so erkennt man, dass die elektrische und magnetische Energie pro Volumeneinheit in einem elektromagnetischen Feld einander gleich sind. Die Gleichung (9) lässt sich daher in der Form

$$(10) \quad \int_O \vec{S} \cdot d\vec{o} + \frac{\partial}{\partial t} \int_V \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}^2 dV = 0 \quad .$$

schreiben. Angenommen, die Energie ströme mit der Geschwindigkeit v - der Ausbreitungsgeschwindigkeit der elektromagnetischen Welle - durch die Fläche O , dann erfüllt sie in der Zeit dt ein Volumen von $O v dt$. Die Strahlungsenergie, die sich in diesem Volumen befindet, hat nach (10) den Wert

$$\int_O \vec{S} \cdot d\vec{o} dt = + \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}^2 v O dt \quad .$$

³ benannt nach dem britischen Physiker John Henry Poynting (1852 – 1914)

Die Strahlungsleistung pro Flächeneinheit beträgt dann

$$(11) \quad |\vec{S}| = v \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}^2 .$$

3. Berechnung der Amplitude einer an einer Grenzfläche reflektierten Lichtwelle

Nach diesen Vorüberlegungen ist man in der Lage, das anfangs gestellte Problem zu lösen. Es möge also eine ebene Welle

$$\vec{E} = \vec{E}_e \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t))$$

aus dem Vakuum unter dem Winkel α auf die Grenzfläche einfallen (Abb. 1).

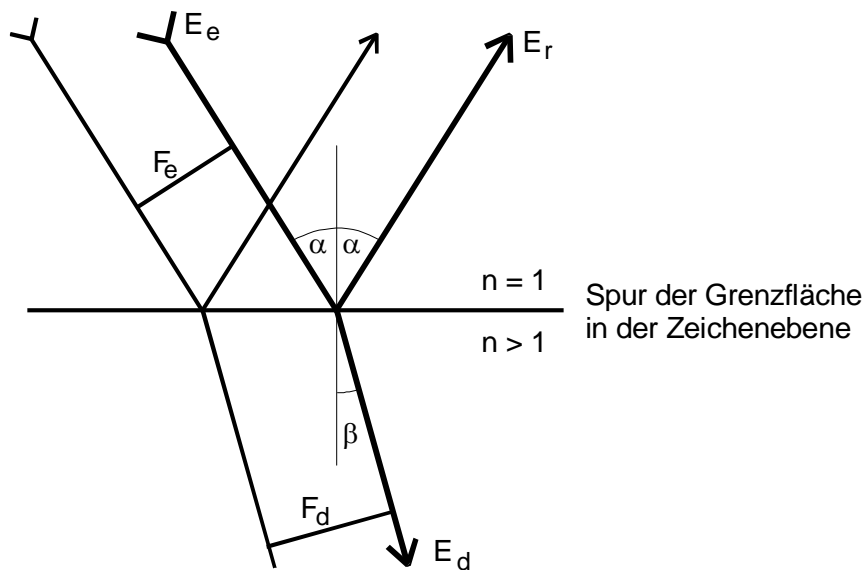


Abb. 1: Reflexion und Brechung einer auf eine Grenzfläche einfallenden, ebenen Welle (Die Grenzfläche steht senkrecht zur Zeichenebene)

Ein Bruchteil (Amplitude \vec{E}_r) wird dann reflektiert, während der Rest (Amplitude \vec{E}_d) in das Medium eindringt. Da die Lichtgeschwindigkeit v hier kleiner als die Vakuumlichtgeschwindigkeit c ist, erfährt der eindringende Lichtstrahl eine Richtungsänderung und zwar so, dass der Brechungswinkel $\beta < \alpha$ ist⁴. Hierdurch ist eine Querschnittsänderung des Strahlenbündels von F_e auf F_d bedingt. Da nur nicht absorbierende Medien betrachtet werden sollen, lässt sich der Energiesatz in der Form

$$S_e F_e = S_r F_e + S_d F_d$$

oder

$$(12) \quad S_e \cos \alpha = S_r \cos \alpha + S_d \cos \beta$$

schreiben. Mit der Gleichung (11) für die Strahlungsleistung kann man (12) umformen in

$$(12a) \quad c \varepsilon_0 \vec{E}_e^2 \cos \alpha = c \varepsilon_0 \vec{E}_r^2 \cos \alpha + v \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}_d^2 \cos \beta .$$

Da der Brechungsindex n gleich dem Verhältnis der Lichtgeschwindigkeiten in den beiden Medien ist, also

⁴ Näheres hierzu siehe z.B. V402, Kap. 1+2

$$(12b) \quad n = \frac{c}{v} \quad ,$$

kann man für (12a) auch schreiben

$$\left(\vec{E}_e^2 - \vec{E}_r^2\right) n \cos \alpha = \varepsilon \vec{E}_d^2 \cos \beta \quad .$$

Aus den Maxwell'schen Gleichungen lässt sich die sogenannte **Maxwell'sche Relation**

$$(13) \quad n^2 = \varepsilon$$

für nicht ferromagnetische Medien ($\mu \approx 1$) ableiten⁵, indem man (1) und (2) zur Wellengleichung

$$\Delta \vec{E} = \varepsilon \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E}$$

zusammenfasst. Allgemein gilt, dass hierin der Koeffizient vor der Ableitung nach der Zeit gleich dem Quadrat der reziproken Ausbreitungsgeschwindigkeit v ist, also

$$\varepsilon \varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{v^2} \quad .$$

Im Vakuum gilt entsprechend

$$\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2} \quad .$$

Daraus folgt sofort die Beziehung (13).

Mit dieser kann man nun aus (12b) die im Spektralbereich des sichtbaren Lichtes kaum messbare Größe ε eliminieren. Man bekommt

$$(14) \quad \left(\vec{E}_e^2 - \vec{E}_r^2\right) \cos \alpha = n \vec{E}_d^2 \cos \beta \quad .$$

Für die weitere Rechnung muss eine Fallunterscheidung getroffen werden; denn im Folgenden spielt die Polarisationsrichtung der einfallenden Welle, welche durch den Vektor \vec{E}_e gegeben ist, relativ zur Einfallsebene eine entscheidende Rolle. Wie in Abb.2 dargestellt, wird die Einfallsebene durch den einfallenden und den reflektierten Strahl aufgespannt. Den Feldvektor \vec{E}_e kann man nun in seine Komponenten senkrecht und parallel zur Einfallsebene zerlegen:

$$\vec{E}_e = \vec{E}_\perp + \vec{E}_\parallel \quad .$$

Da die beiden Polarisationszustände unterschiedliche Ergebnisse liefern, werde zunächst die **senkrecht zur Einfallsebene** schwingende Komponente betrachtet (siehe Abb.2). Aus dieser geht hervor, dass der \vec{E}_\perp -Vektor tangential zur Grenzfläche schwingt.

Die Elektrodynamik macht nun eine Aussage über die Änderung der elektrischen Feldstärke beim Durchtritt durch eine Grenzfläche zwischen 2 Medien mit unterschiedlicher Dielektrizitätskonstanten; und zwar kann man aus der Tatsache, dass das Linienintegral

⁵ Die Beziehung ist nur gültig, wenn die Wellenlänge der einfallenden Strahlung groß gegen die Abstände der Atome in der Materie ist, was im Bereich des sichtbaren Lichtes bei weitem erfüllt ist.

von \vec{E} längs einer geschlossenen Kurve verschwindet, folgern, dass die Tangentialkomponente des Feldstärkevektors stetig durch die Grenzfläche hindurchgeht, dass also gilt

$$\vec{E}_{tg_1} = \vec{E}_{tg_2} .$$

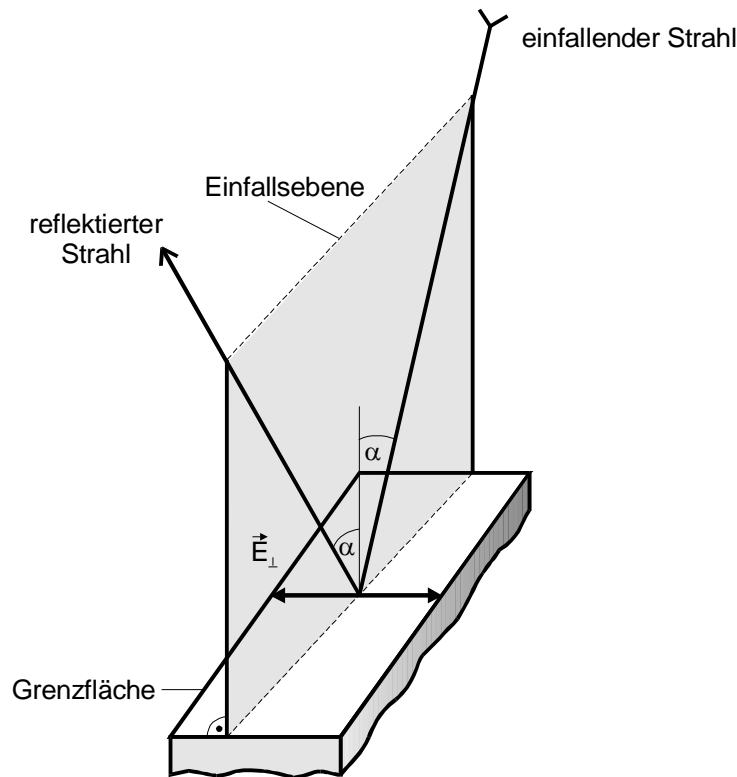


Abb. 2: Perspektivische Darstellung der Reflexion eines Lichtstrahles an einer Grenzfläche (Hier ist der Fall wiedergegeben, dass der \vec{E} -Vektor senkrecht zur Einfallsebene und damit parallel zur Grenzfläche schwingt.)

Da bei dem hier betrachteten Fall die Beträge der \vec{E}_{\perp} -Vektoren gleich ihren Tangentialkomponenten sind – eine Normalkomponente existiert nicht – bekommt man aus Stetigkeitsbedingung die Beziehung

$$(15) \quad \vec{E}_{e\perp} + \vec{E}_{r\perp} = \vec{E}_{d\perp}$$

Mit Hilfe von (15) lässt sich nun E_d aus (14) eliminieren, es folgt

$$(16) \quad \vec{E}_{r\perp} = - \vec{E}_{e\perp} \frac{n \cos \beta - \cos \alpha}{n \cos \beta + \cos \alpha} .$$

Hierin kann man wahlweise n oder β durch Anwendung des Snelliusschen Brechungsgesetzes⁶⁾

$$(16a) \quad n = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

eliminieren. Man erhält dann entweder

$$(17) \quad \vec{E}_{r\perp} = - \vec{E}_{e\perp} \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}$$

⁶⁾ Näheres hierzu siehe z.B. V402

oder

$$(18) \quad \vec{E}_{r\perp}(\alpha) = -\vec{E}_{e\perp} \frac{\left(\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} - \cos \alpha\right)^2}{n^2 - 1} .$$

Die Gleichungen (17) und (18) geben den gesuchten Zusammenhang zwischen reflektierter Amplitude und dem Einfallswinkel wieder. Man erkennt, dass für $\alpha = 90^\circ$ (streifender Einfall)

$$\vec{E}_{r\perp}(90^\circ) = -\vec{E}_{e\perp}$$

wird. Beim senkrechten Einfall ($\alpha = 0$) gilt dagegen

$$\vec{E}_{r\perp}(0^\circ) = -\vec{E}_{e\perp} \frac{n - 1}{n + 1} .$$

Als nächstes werde das Verhalten der Komponente $\vec{E}_{||}$ untersucht, die **in der Einfallsebene** schwingt (Abb.3).

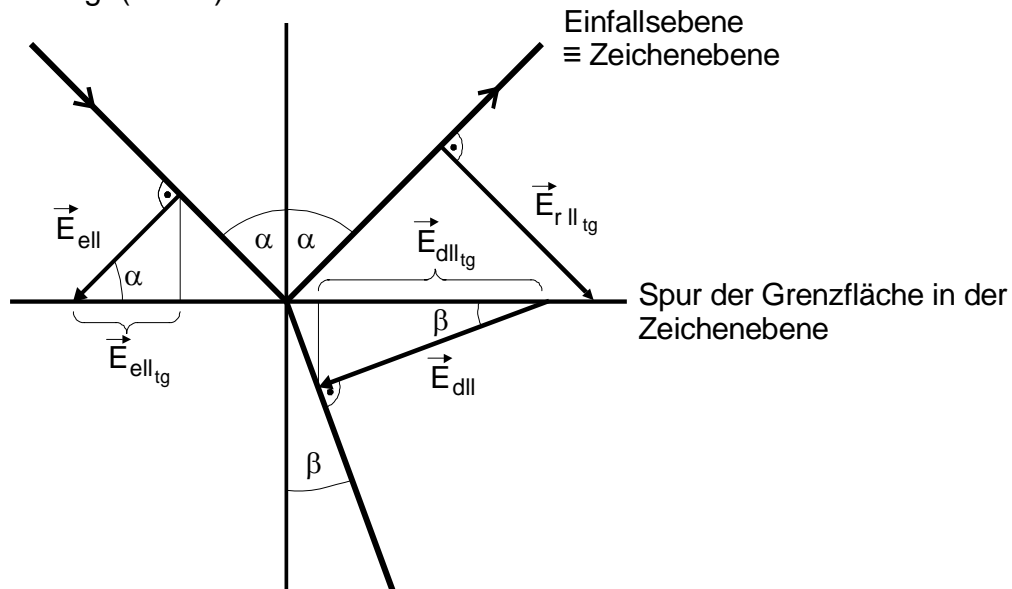


Abb.3: Reflexion eines Lichtstrahls an einer Grenzfläche, welche senkrecht zur Zeichenebene steht (Dargestellt ist der Fall, wo die \vec{E} -Vektoren **in der Einfallsebene** schwingen.)

$\vec{E}_{||}$ lässt sich in eine Komponente $\vec{E}_{||tg}$ tangential und in eine solche normal zur Grenzfläche zerlegen. Die Tangentialkomponenten der Vektoren $\vec{E}_{e||}$, $\vec{E}_{r||}$ und $\vec{E}_{d||}$ haben gemäß Abb.3 die Werte

$$\vec{E}_{e||tg} = \vec{E}_{e||} \cos \alpha , \quad \vec{E}_{r||tg} = -\vec{E}_{r||} \cos \alpha \quad \text{und} \quad \vec{E}_{d||tg} = \vec{E}_{d||} \cos \beta$$

Die Stetigkeitsbedingung verlangt

$$\vec{E}_{e||tg} + \vec{E}_{r||tg} = \vec{E}_{d||tg}$$

oder

$$(19) \quad (\vec{E}_{e||} - \vec{E}_{r||}) \cos \alpha = \vec{E}_{d||} \cos \beta .$$

In Gleichung (14) lässt sich nun $\vec{E}_{d||}$, mit Hilfe von (19) eliminieren; man bekommt

$$\vec{E}_{r||} = \vec{E}_{e||} \frac{n \cos \alpha - \cos \beta}{n \cos \alpha + \cos \beta}$$

Auch hier kann man wie in (16) β oder n mit Hilfe des Snelliusschen Brechungsgesetzes (16a) ausdrücken:

$$(20) \quad \vec{E}_{r||} = \vec{E}_{e||} \frac{\tan(\alpha - \beta)}{\tan(\alpha + \beta)}$$

oder

$$(21) \quad \vec{E}_{r||}(\alpha) = \vec{E}_{e||} \frac{n^2 \cos \alpha - \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}{n^2 \cos \alpha + \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}.$$

Für $\alpha = 0$ (senkrechter Einfall) und $\alpha = 90^\circ$ (streifender Einfall) gilt

$$\vec{E}_{r||}(0) = \vec{E}_{e||} \frac{n - 1}{n + 1}$$

und

$$\vec{E}_{r||}(90^\circ) = -\vec{E}_{e||}.$$

Nach (20) wird $\vec{E}_{r||}(\alpha_p) = 0$ für $\alpha_p + \beta_p = 90^\circ$, woraus nach dem Snelliusschen Brechungsgesetz (16a) folgt

$$(22) \quad \tan \alpha_p = n.$$

Fällt also der Lichtstrahl unter dem Winkel α_p (dem **sogenannten Brewsterschen⁷ Winkel**) auf die Grenzfläche, dann wird er nicht mehr reflektiert sondern dringt ganz in das brechende Medium ein.

Die Gleichungen (17), (18), (20) und (21) wurden erstmalig von **A. J. Fresnel** (1821) abgeleitet und sind daher nach seinem Namen benannt.

4. Aufgabe

Man messe die Intensität der einfallenden und der an einer Si-Oberfläche reflektierten Strahlung eines He-Ne-Lasers in Abhängigkeit vom Einfallswinkel (Variationsbereich: etwa $2^\circ \leq \alpha \leq 87^\circ$) für parallel und senkrecht zur Einfallsebene polarisierte Strahlung und vergleiche das Ergebnis mit der Theorie.

5. Beschreibung der Messapparatur

Zur Lösung des Messproblems kann man die in Abb.4 skizzierte Apparatur benutzen. Ein He-Ne-Laser erzeugt einen monochromatischen, linear polarisierten Lichtstrahl, der auf die Oberfläche eines Si-Spiegels fällt. Der Laser lässt sich um 90° um seine Längsachse drehen, sodass der E-Vektor einmal in der Einfallsebene und zum andern senkrecht dazu schwingen kann. Der Spiegel steht auf einem Drehteller und kann um eine vertikale Achse geschwenkt werden. Auf diese Weise lässt sich der Einfallswinkel α des Lichtstrahles auf die Si-Oberfläche variieren. Der jeweils eingestellte Wert kann auf einer Winkelskala abgelesen werden. Die Intensität des Lichtstrahles lässt sich mit Hilfe eines Photoelementes bestimmen. Sein Kurzschlussstrom $I(\alpha)$ ist proportional zur

⁷ benannt nach dem britischen Physiker Sir D. Brewster (1781 – 1868)

Intensität des Lichtes. Es ist auf einem beweglichen Arm montiert, womit man es in den reflektierten Strahl schwenken kann.

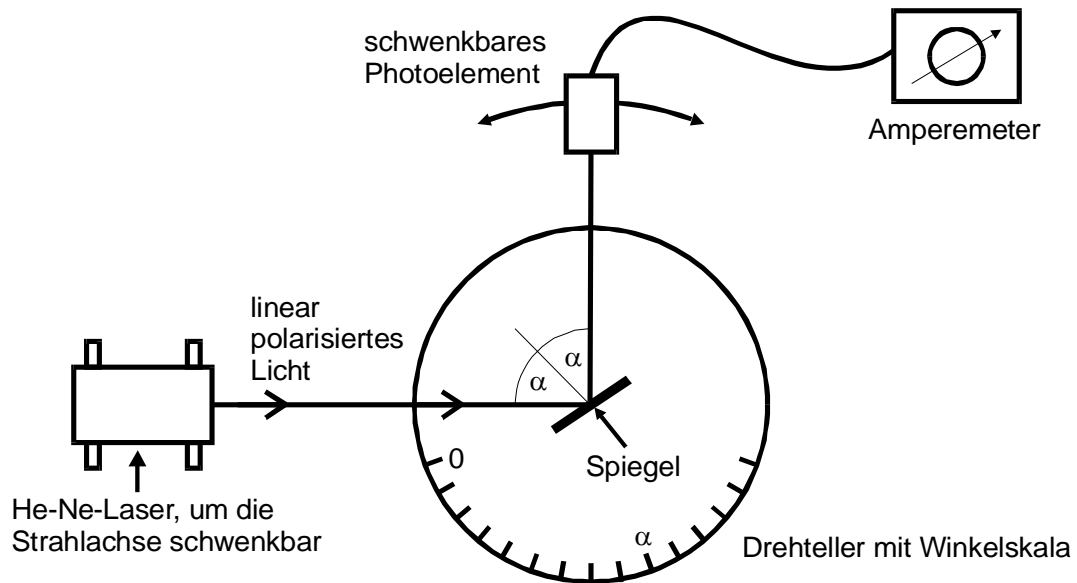


Abb. 4: Schematische Darstellung der Messapparatur

6. Messtechnische Hinweise

Vor Beginn der Messung muss die Apparatur sorgfältig justiert werden. Man geht dabei in folgenden Schritten vor:

a) Einjustierung der Schwingungsrichtung des polarisierten Laser-Strahls

Man entferne durch Lösen der Klemmschraube den Probenhalter (siehe Abb.5) aus dem Strahlengang, sodass der Laserstrahl direkt auf den Detektor fallen kann. Man messe bei dieser Gelegenheit die einfallende Lichtintensität I_e des Strahls und bringe anschließend ein Polarisationsfilter in den Strahlengang, dessen Durchlassrichtung (weiße Striche) senkrecht zur gewünschten Polarisationsrichtung stehen soll. Man drehe nun den Laser solange um seine Längsachse, bis das Minimum der durchgelassenen Intensität erreicht ist. In dieser Stellung fixiere man ihn.

b) Einjustierung des Laserstrahls senkrecht zur Drehachse

Man entferne das Polarisationsfilter wieder, schwenke den Detektorarm sowohl in die 0° - als auch in die 180° -Stellung und kontrolliere dabei, ob der Laserstrahl in beiden Fällen auf die horizontalen Markierungsstriche des Detektorarms trifft. Sollte das nicht der Fall sein, muss die Höhenverstellung des Laserhalters nachjustiert werden.

c) Einjustierung des Laserstrahls auf die Goniometerachse

Man setze in die Bohrung des Goniometers vorübergehend die bei der Apparatur liegende Zentriernadel ein und verschiebe das Lasergehäuse solange, bis der Laserstrahl auf die Nadel trifft.

d) Einstellung der Spiegelfläche senkrecht zum Laserstrahl

Man setze den Probenhalter wieder in den Schaft zurück, stelle einen Einfallswinkel von ca. 0° ein und beobachte den reflektierten Laserstrahl, der jetzt auf den Laserkopf auftreffen muss. Man kontrolliere, ob er in gleicher Höhe wie der einfallende Strahl liegt. Eventuelle Abweichungen kann man mit der Stellschraube (Abb.5) korrigieren.

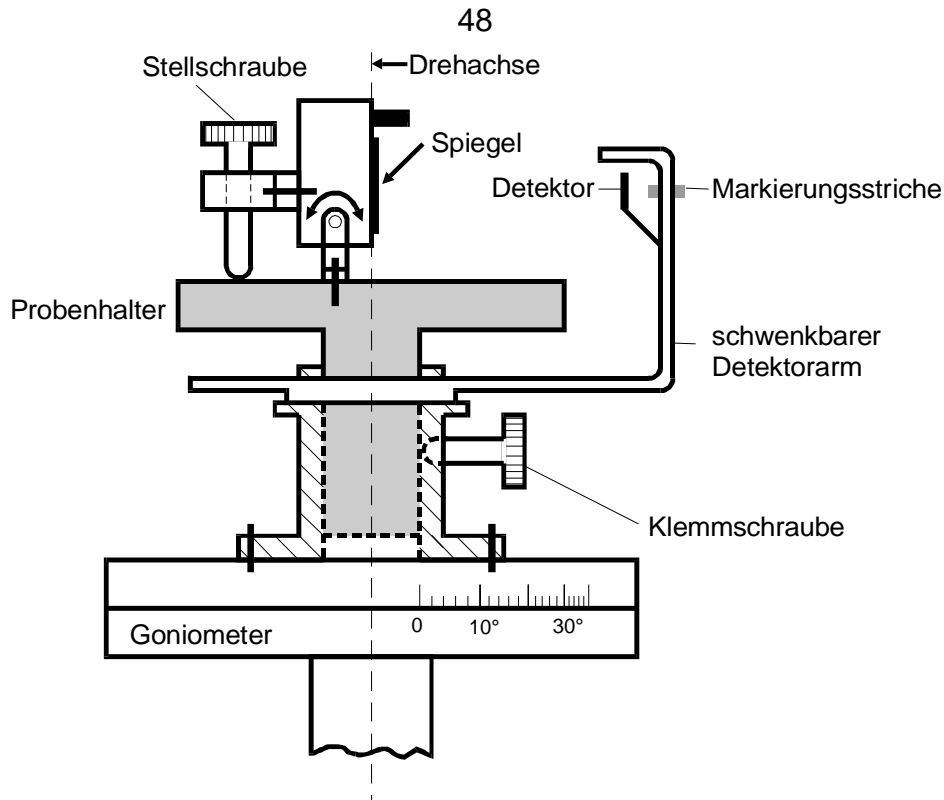


Abb.5: Schematische Darstellung des Goniometers mit aufgesetztem Probenhalter

e) Einstellung der 0°-Richtung

Man stelle das Goniometer möglichst genau auf seine 0°-Marke ein, löse die Klemmschraube ein wenig und schwenke den Probenhalter solange um seine vertikale Achse, bis der einfallende Strahl in sich reflektiert wird. In dieser Stellung ziehe man die Klemmschraube vorsichtig wieder fest. - Jetzt ist die Apparatur messbereit.

f) Man messe den Dunkelstrom des Photoelementes, um damit geringe Photoströme korrigieren zu können.

7. Hinweise zur Auswertung der Messergebnisse

- Man löse die Gleichungen (18) und (21) nach n auf und berechne den Brechungsindex aus den Messergebnissen bei verschiedenen Einfallswinkeln. Zeigen die Ergebnisse nur statistische Schwankungen, oder hängen sie vielleicht in irgendeiner Weise von α ab? Sollte die zweite Annahme zutreffen, dann versuche man eine Erklärung für die scheinbare Abhängigkeit zu finden und sie eventuell zu eliminieren. Schließlich berechne man einen Mittelwert für n sowie seinen Fehler, wobei man Ergebnisse mit offensichtlichen systematischen Fehlern nicht berücksichtigen sollte.
- Man bestimme aus dem Diagramm 7a den Brewsterwinkel α_p und berechne daraus den Brechungsindex von Silizium für Licht mit der Wellenlänge $\lambda = 633 \text{ nm}$.
- Man trage in einem linearen Diagramm für beide Polarisationsfälle die Größen $\sqrt{I(\alpha_i)/I_e}$ gegen α_i auf und zeichne zusätzlich mit \bar{n} berechnete Kurven ein.

8. Literatur

G.R. Fowles, Introduction to Modern Optics; Holt, Rinehart and Winston, Inc.