МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«Национальный исследовательский университет ИТМО»

ФАКУЛЬТЕТ ПРОГРАММНОЙ ИНЖЕНЕРИИ И КОМПЬЮТЕРНОЙ ТЕХНИКИ

РАСЧЁТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА

по теме
«Линейный оператор, спектральный анализ и евклидово пространство»
по дисциплине
«Математика»

Вариант № 4

Выполнили:
Митя XX
Преподаватель:
П. К.

Санкт-Петербург, 2023

Содержание

1. 1-е Задание. Линейный оператор и спектральный анализ.

Условие.

А) Дано пространство геометрических векторов $\mathbb{R}^3$*, его подпространство* $\mathcal{L}_1$ *и* $\mathcal{L}_2$ *и линейный оператор* $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$*:*

$\mathcal{A}$ *- оператор проектирования* $P_{\mathcal{L}_1}^{\parallel \mathcal{L}_2} : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{L}_1$ *пространства* $\mathbb{R}^3$ *на подпространство* $\mathcal{L}_1$ *параллельно подпространству* $\mathcal{L}_2$*, где:*

$$\mathcal{L}_1 : x = y$$

$$\mathcal{L}_2 : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + y + 4z = 0 \end{cases}$$

Проведите исследование по плану.

Б) Дано множество функций $\mathcal{L}$ *и отображение* $\mathcal{A} : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$*:*

$\mathcal{L}$ *- множество функций вида:*

$$f(x) = a * \cos(x) + b * \sin(x)$$

, где $a, b \in \mathbb{R}$*.*

$$\mathcal{A}\left(f(x)\right) = \int\limits_0^{\pi} K(x; y) f(y) dy$$

, где $K(x; y) = \sin(x + y)$*.*

Проведите исследование по плану.

1.1. Пункт А).

Изобразим на рисунке 1 подпространства: $\mathcal{L}_1$ (как плоскость в 3-хмерном пространстве) и $\mathcal{L}_2$ (как прямую в 3-хмерном пространстве).

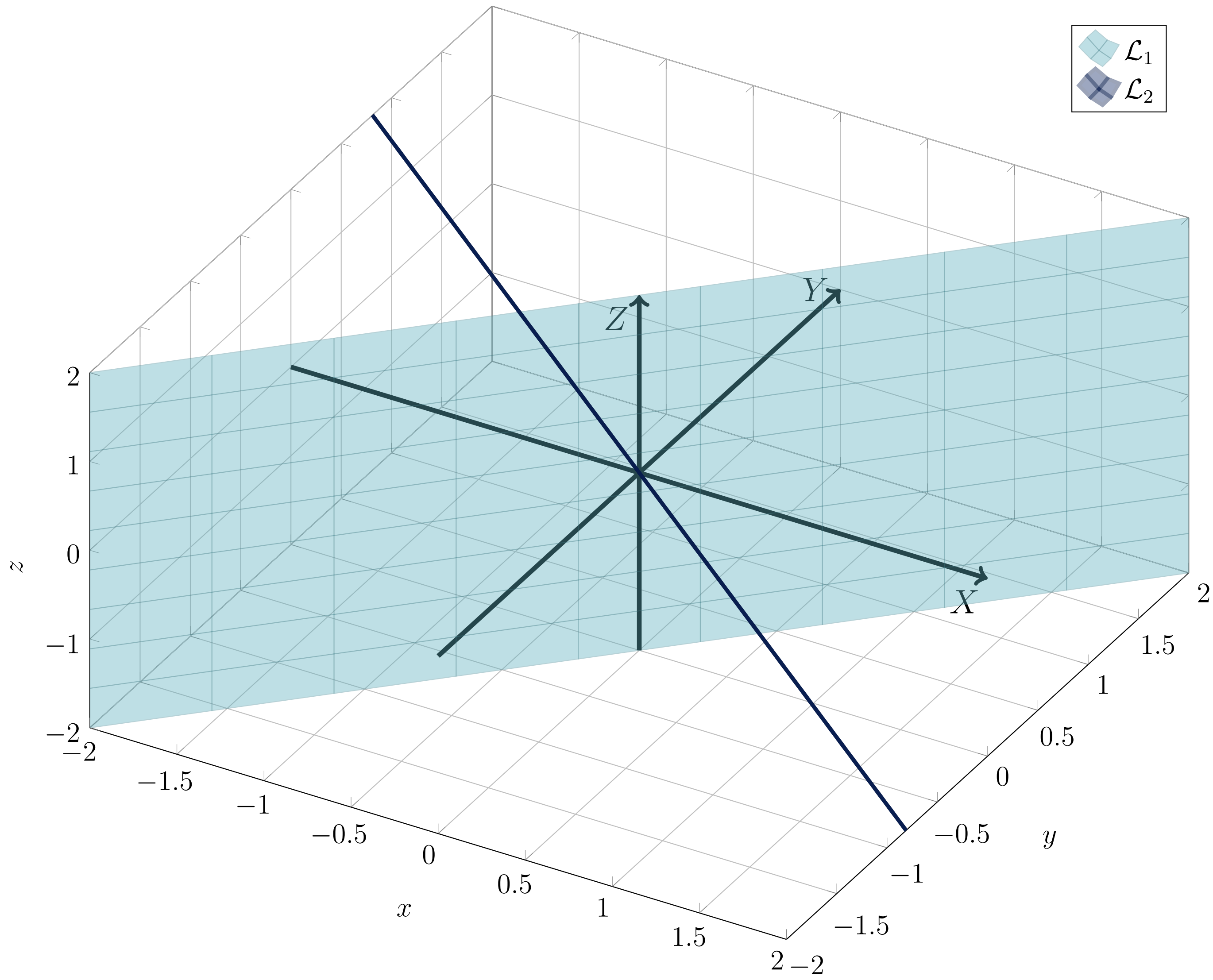

Рис. 1: Подпространства $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$.

Методами векторной алгебры составим формулу для линейного оператора $\mathcal{A}$ ($P_{\mathcal{L}_1}^{\|\mathcal{L}_2}$). Для этого найдём вектор нормали $\vec{n}$ к плоскости $\mathcal{L}_1$, а также вектор $\vec{a}$ из подпространства $\mathcal{L}_2$:

$$\mathcal{L}_1 : x = y \Rightarrow 1 * x - 1 * y + 0 * z = 0 \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{L}_2 = \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + y + 4z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\sqsupset z = 1 \Rightarrow \begin{cases} z = 1 \\ x + y = -1 \\ 2x + y = -4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

При этом заранее нормируем вектор нормали $\vec{n}$:

$$\vec{n}^0 = \frac{1}{(\vec{n}; \vec{n})} * \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} * \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Пусть $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ - произвольный вектор, найдём $\vec{x}_1 \in \mathcal{L}_1$ - вектор $\vec{x}$, спроектированный на $\mathcal{L}_1$ параллельно $\mathcal{L}_2$.

Так как проекция параллельная, то из $\vec{x}$ необходимо удалить составляющие из ортогонального дополнения $\mathcal{L}_1^\perp$ при помощи вычитания некоторого вектора из $\mathcal{L}_2$. Следовательно:

$$\begin{aligned}\vec{x}_1 &= \vec{x} - \vec{a} * \frac{(\vec{x}; \vec{n}^0)}{(\vec{a}; \vec{n}^0)} \\ &= \vec{x} + \vec{a} * \frac{\sqrt{2} * (\vec{x}; \vec{n}^0)}{5}\end{aligned}$$

Таким образом, в стандартном базисе:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}x =& x + a * \frac{\sqrt{2} * (x; n^0)}{5} \\ a : B =& \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ n^0 : N^0 =& \frac{1}{\sqrt{2}} * \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Далее в стандартном ОРТН базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ пространства $\mathbb{R}^3$ составим матрицу A линейного оператора $\mathcal{A}$. Для этого подействуем на каждый базисный вектор линейным оператором и запишем вектор-столбцы полученых векторов в виде матрицы:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}\vec{i} &= \vec{i} + \vec{a} * \frac{\sqrt{2} * (\vec{i}; \vec{n^0})}{5} = \frac{1}{5} * \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \mathcal{A}\vec{j} &= \vec{j} + \vec{a} * \frac{\sqrt{2} * (\vec{j}; \vec{n^0})}{5} = \frac{1}{5} * \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \mathcal{A}\vec{k} &= \vec{k} + \vec{a} * \frac{\sqrt{2} * (\vec{k}; \vec{n^0})}{5} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ A &= \frac{1}{5} * \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{1}$$

Диагонализуем полученную матрицу (1) при помощи методов спектрального анализа.

Найдём собственные числа λ_i линейного оператора $\mathcal{A}$ (т.е его спектр) как корни характеристического многочлена:

$$\begin{aligned}\mathcal{X} = |A - \lambda * I| &= \begin{vmatrix} \frac{2}{5} - \lambda & \frac{3}{5} & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} - \lambda & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{-1}{5} & \frac{5}{5} - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (1 - \lambda) * \left((\frac{2}{5} - \lambda) * (\frac{3}{5} - \lambda) - \frac{3}{5} * \frac{2}{5} \right) \\ &= (1 - \lambda)(\lambda^2 - \lambda) = -\lambda * (1 - \lambda)^2 \Rightarrow\end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}&-\lambda * (1 - \lambda)^2 = 0 \\ &\lambda_1 = 0 \text{ кр. } 1 \text{ , } \lambda_2 = 1 \text{ кр. } 2 \\ &\sigma = \{0, 1\}\end{aligned}$$

Далее найдём собственные векторы, соответствующие собственным числам λ из спектра:

$$\lambda = 0 : (A - 0 * I)X = 0 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & 0 & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{-1}{5} & \frac{5}{5} & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \sqsupset z = c \Rightarrow X = c * \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 1 : (A - 1 * I)X = 0 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -\frac{3}{5} & \frac{3}{5} & 0 & 0 \\ \frac{2}{5} & -\frac{2}{5} & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{-1}{5} & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \sqsupset y = c_1, z = c_2 \Rightarrow X = c_1 * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 * \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Таким образом, получаем базис из собственных векторов:

$$\lambda = 0 : X_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda = 1 : X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

, образующий матрицу перехода T, необходимую для преобразования подобия:

$$T = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A' = T^{-1}AT$$

$$T^{-1} = \frac{1}{\det T} * T^T_{\text{союзн.}} = -\frac{1}{5} * \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

$$T^{-1} * A * T = \frac{-1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & -5 \end{pmatrix} * \frac{1}{5} * \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{5} * \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Итак, в базисе (3) матрица линейного оператора $\mathcal{A}$ диагональна и равна:

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим собственные векторы их полученного базиса (3) на графике подпространств $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$:

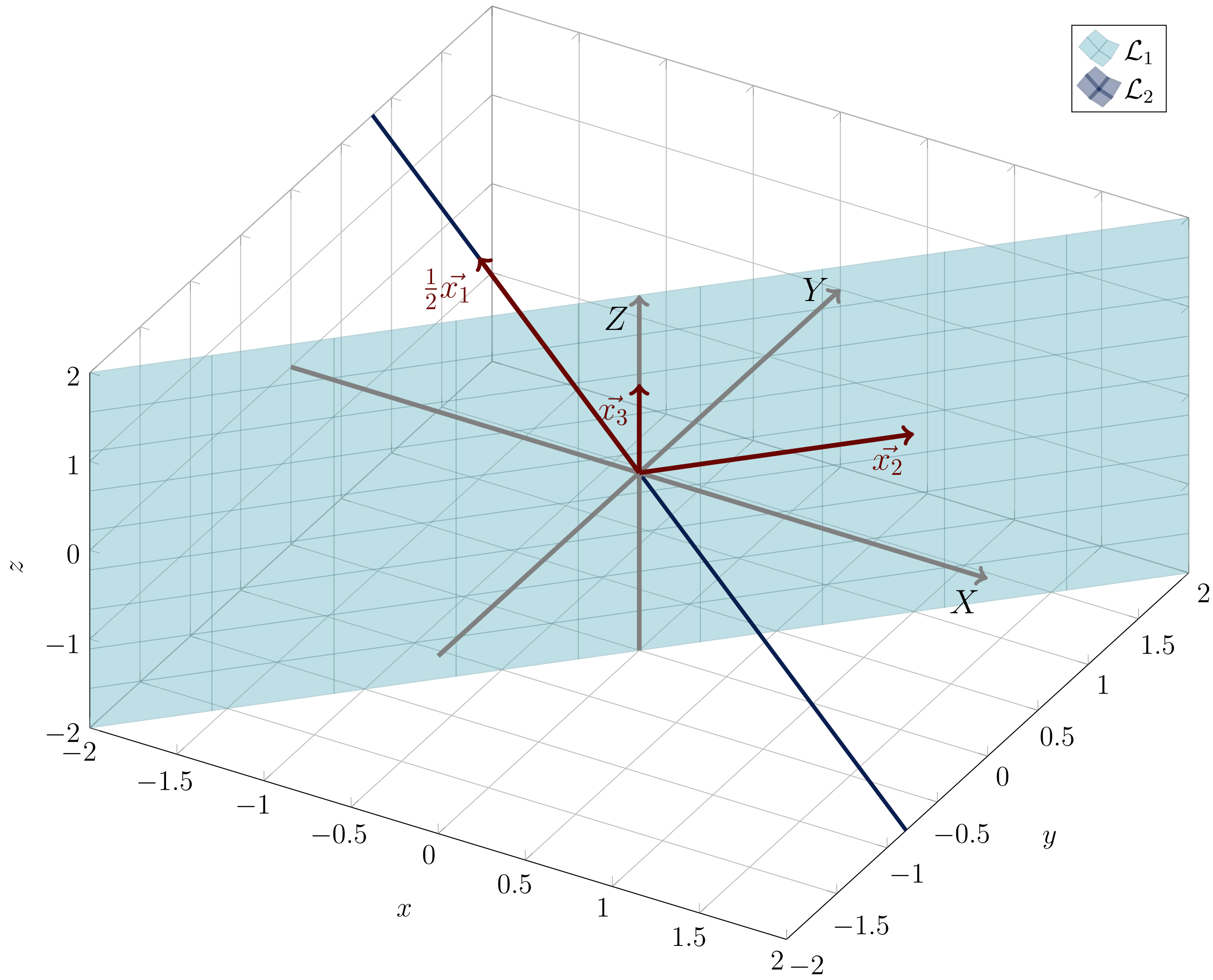

Рис. 2: Векторы собственного базиса x_i и подпространства $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$.

Подробнее рассмотрим каждый из базисных векторов:

$\lambda = 0$; $\vec{x}_1$:X_1 - на рис. 10 легко видеть, что этот вектор полностью лежит в подпространстве $\mathcal{L}_2$ (он лежит на синей прямой, изображающей подпространство $\mathcal{L}_2$). Так как линейный оператор $\mathcal{A}$ проецирует векторы параллельно подпространству $\mathcal{L}_2$, то этот вектор проецируется в $\vec{0}$, что подтверждается и формулой $A\vec{x_1} = \lambda\vec{x_1} = 0 * \vec{x_1} = \vec{0}$.

$\lambda = 1$; $\vec{x}_2$:X_2 - на рис. 10 видно, что вектор $\vec{x}_2$ лежит в подпространстве $\mathcal{L}_1$ (на сиреневой плоскости $\mathcal{L}_1$). Так как линейный оператор $\mathcal{A}$ проецирует векторы на подпространство $\mathcal{L}_1$, то при действии им на этот вектор, он не изменяется. Это подтверждается и формулой $A\vec{x_2} = \lambda\vec{x_2} = 1 * \vec{x_2} = \vec{x_2}$.

$\lambda = 1$; $\vec{x}_3$:X_3 - аналогично вектору $\vec{x_2}$ этот вектор также полность лежит в подпространстве $\mathcal{L}_1$, а значит - не изменяется под действием оператора $\mathcal{A}$. $A\vec{x_3} = \lambda\vec{x_3} = 1 * \vec{x_3} = \vec{x_3}$.

1.2. Пункт Б).

Проверим аксиомы линейного пространства для $\mathcal{L}$ над полем $\mathbb{R}$:

$$\forall u, v, w \in \mathcal{L}; \forall a, b, \lambda, \delta \in \mathbb{R}$$
$$\begin{aligned}
1) u+v &= a_u * \cos(x) + b_u * \sin(x) + a_v * \cos(x) + b_v * \sin(x)\\
&= (a_u + a_v) * \cos(x) + (b_u + b_v) * \sin(x) \in \mathcal{L}\\
2) u+v &= a_u * \cos(x) + b_u * \sin(x) + a_v * \cos(x) + b_v * \sin(x)\\
&= a_v * \cos(x) + b_v * \sin(x) + a_u * \cos(x) + b_u * \sin(x) = v + u\\
3)(u+v)+w &= (a_u * \cos(x) + b_u * \sin(x) + a_v * \cos(x) + b_v * \sin(x)) + a_w * \cos(x) + b_w * \sin(x)\\
&= a_u * cos(x) + b_u * sin(x) + (a_v * \cos(x) + b_v * \sin(x) + a_w * \cos(x) + b_w * \sin(x))\\
&= v + (u + w)\\
4) \exists \mathcal{O} &= 0 * \cos(x) + 0 * \sin(x) \in \mathcal{L} : \mathcal{O} + u = u\\
5) \lambda * x &= \lambda(a * \cos(x) + b * \sin(x)) = \lambda * a * \cos(x) + \lambda * b * \sin(x) \in \mathcal{L}\\
6) \lambda(u+v) &= \lambda * a_u * \cos(x) + \lambda * b_u * \sin(x) + \lambda * a_v * \cos(x) + \lambda * b_v * \sin(x) = \lambda * u + \lambda * v\\
7)(\lambda + \delta) u &= \lambda * a_u * \cos(x) + \lambda * b_u * \sin(x) + \delta * a_u * \cos(x) + \delta * b_u * \sin(x) = \lambda * u + \delta * u\\
8) \exists 1 &: 1 * u = u
\end{aligned}$$

Аксиомы выполняются, следовательно $\mathcal{L}$ - линейное пространство над полем $\mathbb{R}$.

Выберим в качестве базисных векторов следующие:

$$x_1 = 1 * \cos(x) + 0 * \sin(x) = \cos(x)$$
$$x_2 = 0 * \cos(x) + 1 * \sin(x) = \sin(x)$$

При этом очевидно, что выбранный набор - базис, т.к. $\forall u \in \mathcal{L}, u = a * \cos(x) + b * sin(x) \overset{!}{=} a * x_1 + b * x_2$. Далее удостоверимся, что оператор $\mathcal{A}$ - линейный, проверив аксиомы:

$$\forall u, v \in \mathcal{L}; \forall a, b, \lambda \in \mathbb{R}$$
$$\begin{aligned}
1)\mathcal{A}(u+v) &= \int_0^\pi K(x;y)(u+v)dy = \int_0^\pi K(x;y) * u + K(x;y) * v dy = \int_0^\pi K(x;y) u dy + \int_0^\pi K(x;y) v dy\\
&= \mathcal{A}(u) + \mathcal{A}(v)\\
2)\mathcal{A}(\lambda u) &= \int_0^\pi K(x;y) * \lambda * u)dy = \lambda * \int_0^\pi K(x;y) * u dy = \lambda \mathcal{A}(u)
\end{aligned}$$

Следовательно, $\mathcal{A}$ - линейный оператор. Найдём его матрицу в выбранном базисе (аналогично тому, как это было сделано в п. А)):

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}(x_1) &= \int\limits_0^\pi \sin(x+y)\cos(y)dy = \int\limits_0^\pi (\sin(x)*\cos(y)+\sin(y)*\cos(x))*\cos(y)dy \\
&= \int\limits_0^\pi \sin(x)*\cos^2(y)dy + \int\limits_0^\pi \sin(y)*\cos(y)*\cos(x)dy \\
&= \sin(x)*\frac{1}{4}*\int\limits_0^\pi 1+\cos(2y)d2y + \cos(x)*\int\limits_0^\pi \sin(y)d\sin(y) \\
&= \sin(x)*\frac{1}{4}*(2y+\sin(2y))|_0^\pi + \cos(x)*\left.\frac{\sin^2(y)}{2}\right|_0^\pi \\
&= \frac{\pi}{2}*sin(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} \\
\mathcal{A}(x_2) &= \int\limits_0^\pi \sin(x+y)\sin(y)dy = \int\limits_0^\pi (\sin(x)*\cos(y)+\sin(y)*\cos(x))*\sin(y)dy \\
&= \int\limits_0^\pi \sin(x)*\cos(y)*\sin(y)dy + \int\limits_0^\pi \sin^2(y)*\cos(x)dy \\
&= \cos(x)*\frac{1}{4}*\int\limits_0^\pi 1-\cos(2y)d2y + \sin(x)*\int\limits_0^\pi \sin(y)d\sin(y) \\
&= \cos(x)*\frac{1}{4}*(2y-\sin(2y))|_0^\pi + \sin(x)*\left.\frac{\sin^2(y)}{2}\right|_0^\pi \\
&= \frac{\pi}{2}*cos(x) = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \\
A &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Заметим, что у матрицы $A^T = A$ обе строки - ЛНЗ, следовательно $\dim(Im\mathcal{A}) = 2$, а **по Теореме о ядре и образе, т.к.** $\dim(Im\mathcal{A}) + \dim(Ker\mathcal{A}) = \dim(\mathcal{L}) = 2$**, то** $\dim(Ker\mathcal{A}) = 0$**.**

Далее, диагонализуем матрицу $\mathcal{A}$ в выбранном базисе методом спектрального анализа.

Найдём собственные числа λ_i линейного оператора $\mathcal{L}$ (т.е его спектр) как корни характеристического многочлена:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{X} = |A-\lambda*I| = \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} & -\lambda \end{vmatrix} \\
= \lambda^2 - \frac{\pi^2}{4}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\lambda^2 - \frac{\pi^2}{4} = 0 \\
&\lambda_1 = \frac{\pi}{2} \text{ кр. } 1 \ , \lambda_2 = -\frac{\pi}{2} \text{ кр. } 1 \\
&\sigma = \{\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\}
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Далее найдём собственные векторы, соответствующие собственным числам λ из спектра:

$$\lambda = \frac{\pi}{2} : (A - \frac{\pi}{2} * I)X = 0 \Rightarrow \left(\begin{matrix} -\frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} & -\frac{\pi}{2} \end{matrix}\middle| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right) \sim \left(\begin{matrix} \frac{\pi}{2} & -\frac{\pi}{2} \\ 0 & 0 \end{matrix}\middle| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right)$$
$$\Rightarrow \sqsupset y = c \Rightarrow X = c * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = -\frac{\pi}{2} : (A + \frac{\pi}{2} * I)X = 0 \Rightarrow \left(\begin{matrix} \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} \end{matrix}\middle| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right) \sim \left(\begin{matrix} \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} \\ 0 & 0 \end{matrix}\middle| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right)$$
$$\Rightarrow \sqsupset y = c \Rightarrow X = c * \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Таким образом, получаем базис из собственных векторов:

$$\lambda = \frac{\pi}{2} : X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda = -\frac{\pi}{2} : X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

, образующий матрицу перехода T, необходимую для преобразования подобия:

$$\begin{aligned}
T &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
A' &= T^{-1}AT \\
T^{-1} &= \frac{1}{\det T} * T^T_{\text{союзн.}} = \frac{1}{2} * \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\
T^{-1} * A * T &= \frac{1}{2} * \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} * \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} & -\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\pi}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Итак, в базисе (5) матрица линейного оператора $\mathcal{A}$ диагональна и равна:

$$A' = \frac{1}{2} * \begin{pmatrix} \pi & 0 \\ 0 & -\pi \end{pmatrix}$$

Сравним трудоёмкость прямого вычисления образа и вычисления через умножение на матрицу. Пусть функция $f(t) = 2 * \cos(t) - 3 * \sin(t)$ с соответствующим вектор-столбцом в исходном базисе:

$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$. Найдём её образ 2-мя способами:

$$\mathcal{A}(f(t)) = A * \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{-3\pi}{2} \\ \pi \end{pmatrix} = \frac{-3\pi}{2} * \cos(x) + \pi * \sin(x)$$

$$\mathcal{A}(f(t)) = \int\limits_0^\pi \sin(x+y) * (2 * \cos(y) - 3 * \sin(y))dy$$
$$= \int\limits_0^\pi (\sin(x) * \cos(y) + \sin(y) * \cos(x)) * (2 * \cos(y) - 3 * \sin(y))dy$$
$$= 2 * \sin(x) * \int\limits_0^\pi \cos^2(y)dy + 2 * \cos(x) * \int\limits_0^\pi \cos(y) * \sin(y)dy$$
$$- 3 * \sin(x) * \int\limits_0^\pi \cos(y) * \sin(y)dy - 3 * \cos(x) * \int\limits_0^\pi \sin^2(y)dy =$$
$$= 2 * \sin(x) * \frac{1}{4} * (2y + \sin(2y))\Big|_0^\pi + 2 * \cos(x) * \frac{\sin^2(y)}{2}\Bigg|_0^\pi$$
$$- 3 * \sin(x) * \frac{\sin^2(y)}{2}\Bigg|_0^\pi - 3 * \cos(x) * \frac{1}{4} * (2y - \sin(2y))\Big|_0^\pi$$
$$= \frac{-3\pi}{2} * \cos(x) + \pi * \sin(x)$$

Оба способа вычисления приводят к одному результату, хотя, конечно, очевидно, **что использование матрицы линейного оператора требует значительно меньших усилий**, чем прямое вычисление.

2. 2-е Задание. Евклидовы пространства функций.

Условие.

А) Дано пространство многочленов с вещественными коэффициентами, степени не выше третьей, определённых на отрезке $[-1; 1]$*:*

$$P_3(t) = 2t^3 + 3t + 1$$

Проведите исследование по плану.

Б) Дано пространство $\mathcal{R}$ *функций, непрерывных (или имеющих конечный разрыв) на отрезке* $[-\pi; \pi]$*, со скалярным произведением* $(f, g) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt$ *и длиной вектора* $||f|| = \sqrt{(f, f)}$*. Тригонометрические многочлены* $P_n(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(t) + b_1 \sin(t) + \ldots + a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$*, где* a_k, b_k *- вещественные коэффициенты, образуют подпространство* P *пространства* $\mathcal{R}$*.*

Требуется найти многочлен $P_n(t)$ *в пространстве* P*, минимально отличающийся от функции* $f(t)$ *- вектора пространства* $\mathcal{R}$*:*

$$f(t) = 4t \tag{6}$$

Указание. Требуется решить задачу о перпендикуляре: расстояние от $f(t)$ до $P_n(t)$ будет наименьшим, если это длина перпендикуляра $h = f(t) - P_n(t)$, опущенного из точки $f(t)$ на подпространство P. В этом случае, $P_n(t)$ будет ортогональной проекцией вектора $f(t)$ на P. Таким образом, требуется найти координаты вектора $P_n(t)$ (коэффициенты многочлена) в заданном базисе P. Если выбран ортонормированный базис, то эти координаты суть проекции вектора $f(t)$ на векторы данного базиса.

2.1. Пункт А)

Пусть система векторов $B = \{1, t, t^2, t^3\}$ - бизс данного пространства. Действительно, общая формула многочлена степени не выше третьей с вещественными коэффициентами:

$$P_3(t) = a_0 * 1 + a_1 * t + a_2 * t^2 + a_3 * t^3, a_i \in \mathbb{R}$$

То есть любой такой многочлен можно однозначно представить в виде линейной кобинации выбранных базисных векторов.

В условиях РГР прямо не указывается, как определено скалярное произведение, но, исходя из того, что в плане требуется ортогонализовать выбранный базис (со стандартным скалярным произведением он уже ортогонален), а также из указания на то, что многочлены определены на промежутке $[-1, 1]$, можно предположить, что оно определяется так:

$$(f(t); p(t)) = \int_{-1}^{1} f(t)p(t)dt$$

Ортогонализуем выбранный базис методом Грама-Шмидта:

$$\begin{aligned}
&x'_1 = x_1 = 1\\
&x'_2 = x_2 + a_2^1 * x_1 = t + a_2^1 * 1\\
&x'_3 = x_3 + a_3^1 * x_1 + a_3^2 * x_2 = t^2 + a_3^1 * 1 + a_3^2 * t\\
&\underline{x'_4 = x_4 + a_4^1 * x_1 + a_4^2 * x_2 + a_4^3 * x_3 = a_4^1 * 1 + a_4^2 * t + a_4^3 * t^2}
\end{aligned}$$

$$\underline{a_2 : (x'_2; x_1) = 0 \Rightarrow a_2^1 = 0}$$

$$a_3 : \begin{cases} (x'_3; x_1) = 0 \\ (x'_3; x_2) = 0 \end{cases} \Rightarrow a_3^1 = -\frac{1}{3}, a_3^2 = 0$$

$$a_4 : \begin{cases} (x'_4; x_1) = 0 \\ (x'_4; x_2) = 0 \\ (x'_4; x_3) = 0 \end{cases} \Rightarrow a_4^1 = 0, a_4^2 = -\frac{3}{5}, a_4^3 = 0$$

$$\begin{aligned}
&x'_1 = 1\\
&x'_2 = t\\
&x'_3 = t^2 - \frac{1}{3}\\
&x'_4 = t^3 - \frac{3}{5}t
\end{aligned}$$

Таким образом, получаем ортогональный базис B_H:

$$B_H = \{1, t, t^2 - \frac{1}{3}, t^3 - \frac{3}{5}t\}$$

Выпишим первые четыре ($n = 0, 1, 2, 3$) многочлена Лежандра:

$$\begin{aligned}
&L_n(t) = \frac{1}{2^n n!} * \left((t^2-1)^n\right)^{(n)}\\
&L_0(t) = 1\\
&L_1(t) = t\\
&L_2(t) = \frac{1}{2}(3t^2-1)\\
&L_3(t) = \frac{1}{2}(5t^3-3t)
\end{aligned}$$

Найдём их координаты в найденном отрогональном базисе B_H, решив системы уравнений:

$$\begin{cases}
1*x_1+0*x_2-\frac{1}{3}*x_3+0*x_4=a_0\\
0*x_1+1*x_2+0*x_3-\frac{3}{5}*x_4=a_1\\
0*x_1+0*x_2+1*x_3+0*x_4=a_2\\
0*x_1+0*x_2+0*x_3+1*x_4=a_3
\end{cases} = \left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & a_0\\
0 & 1 & 0 & -\frac{3}{5} & a_1\\
0 & 0 & 1 & 0 & a_2\\
0 & 0 & 0 & 1 & a_3
\end{array}\right) \Rightarrow$$

$$L_0(t): \left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 1\\
0 & 1 & 0 & -\frac{3}{5} & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right) \Rightarrow L_0(t) = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$L_1(t): \left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & -\frac{3}{5} & 1\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right) \Rightarrow L_1(t) = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$L_2(t): \left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{2}\\
0 & 1 & 0 & -\frac{3}{5} & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2}\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right) \Rightarrow L_2(t) = \begin{pmatrix}0\\0\\\frac{3}{2}\\0\end{pmatrix}$$

$$L_3(t): \left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & -\frac{3}{5} & -\frac{3}{2}\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & \frac{5}{2}
\end{array}\right) \Rightarrow L_3(t) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\\frac{5}{2}\end{pmatrix}$$

Заметим, что у полученных векторов лишь одна координата ненулевая, и при этом, у всех полученных векторов - эта координата разная. Так как векторы получены в ортогональом базисе, то, очевидно, что **они так же ортогональны** (*каждый L_i - фактически удлинённый базисный вектор i, а базисные векторы - ортогональны*).

Аналогично найдём координаты многочлена $P_3(t) = 2t^3 + 3t + 1$, но уже в новом базисе $\mathcal{L} = \{L_0, L_1, L_2, L_3\}$:

$$P_3(t): \left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1\\
0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & 3\\
0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} & 2
\end{array}\right) \Rightarrow P_3(t) = \begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\\frac{9}{2}\\0\\\frac{4}{5}\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow P_3(t) = \frac{3}{2} * L_0 + \frac{9}{2} * L_1 + 0 * L_2 + \frac{4}{5} * L_3$$

2.2. Пункт Б)

Проверим, является ли система функций $B = \{1, \cos(t), \sin(t), \ldots, \cos(nt), \sin(nt)\}$ ортогональным базисом подпространства P.

Так как любой $P_n(t) \in P$ равен:

$$P_n(t) = \frac{a_0}{2} * 1 + a_1 \cos(t) + b_1 \sin(t) + \ldots + a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$$

, следовательно, любой элемент P можно единственно представить как линейную комбинацию системы B. То есть B - базис подпространства P.

Проверим ортогональность выбранного базиса (т.е рассмотрим попарные скалярные произведения элементов B):

$$(1; \sin(nt)) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin(nt)dt = -\frac{1}{n} * \cos(nt)\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$(1; \cos(nx)) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)dt = \frac{1}{n} * \sin(nt)\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$(\sin(at); \sin(bt)) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin(at) * \sin(bt)dt = \left(\frac{1}{2(a-b)} * \sin((a-b)x) - \frac{1}{2(a+b)} * \sin((a+b)x)\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$(\cos(at); \cos(bt)) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos(at) * \cos(bt)dt = \left(\frac{1}{2(a-b)} * \sin((a-b)x) + \frac{1}{2(a+b)} * \sin((a+b)x)\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$(\cos(at); \sin(bt)) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos(at) * \sin(bt)dt = \left(-\frac{1}{2(a-b)} * \sin((a-b)x) - \frac{1}{2(a+b)} * \sin((a+b)x)\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

Нормируем расмотренную систему:

$$||1|| = \sqrt{(1;1)} = \sqrt{\int\limits_{-\pi}^{\pi} 1dt} = \sqrt{(\pi + \pi)} = \sqrt{2\pi}$$

$$||\cos(nt)|| = \sqrt{(\cos(nt); \cos(nt))} = \sqrt{\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nt)dt} = \sqrt{\frac{1}{4n} * \int\limits_{-\pi}^{\pi} 1 + \cos(2nt)d2nt}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4n} * (2t + \sin(2nt) - 2t - \sin(2nt))|_{-\pi}^{\pi}} = \sqrt{\pi}$$

$$||\sin(nt)|| = \sqrt{(\sin(nt); \sin(nt))} = \sqrt{\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nt)dt} = \sqrt{\frac{1}{4n} * \int\limits_{-\pi}^{\pi} 1 - \cos(2nt)d2nt}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4n} * (2t - \sin(2nt) - 2t + \sin(2nt))|_{-\pi}^{\pi}} = \sqrt{\pi} \Rightarrow$$

$$B^0 = \{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(t)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(t)}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \frac{\cos(nt)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(nt)}{\sqrt{\pi}}\}$$

Далее, найдём проекции исходного вектора $f(t)$ (6) на векторы полученной ОРТН системы (при этом заметим, что ортогональная проекция вектора x на нормированный вектор e_i равна

$\mathcal{P}_{e_i}(x) = (x; e_j) * e_j)$:

$$\mathcal{P}_{1^0}(4t) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * 4tdt * \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \frac{4}{2\pi} * \left.\frac{t^2}{2}\right|_{-\pi}^{\pi} = 0 * 1$$

$$\mathcal{P}_{\cos^0(nt)}(4t) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(nt)}{\sqrt{\pi}} * 4tdt * \frac{\cos(nt)}{\sqrt{\pi}} =$$

$$|\text{Т.к. } \cos(nt) - \text{ чёт. }, 4t - \text{нечёт. } \to \cos(nt) * 4t - \text{ нечёт. и промеж. симметр.} \Rightarrow \text{по св-у инт.}|$$

$$= 0 * \frac{\cos(nt)}{\sqrt{\pi}}$$

$$\mathcal{P}_{\sin^0(nt)}(4t) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(nt)}{\sqrt{\pi}} * 4tdt * \frac{\sin(nt)}{\sqrt{\pi}} =$$

$$|\text{Т.к. } \sin(nt) - \text{ нечёт. }, 4t - \text{нечёт. } \to \sin(nt) * 4t - \text{ чёт. и промеж. симметр.} \Rightarrow \text{по св-у инт.}|$$

$$= \frac{2 * 4}{\pi} * \int\limits_{0}^{\pi} \sin(nt) * tdt * \sin(nt) = |\text{По частям}|$$

$$= -\frac{8}{n\pi} * \left(\cos(nt) * t|_0^\pi - \frac{1}{n}\int\limits_0^\pi cos(nt)dnt \right) * \sin(nt)$$

$$= -\frac{8}{n\pi} * \left.\left(\cos(nt) * t - \frac{1}{n} * \sin(nt)\right)\right|_0^\pi * \sin(nt)$$

$$= -\frac{8}{n} * \cos(n\pi) * \sin(nt)$$

Таким образом, искомый многочлен $P_n(t)$ равен:

$$P_n(t) = 0 * 1 + \sum_{j=1}^{n} 0 * \cos(jt) - \frac{8}{j} * \cos(j\pi) * \sin(jt)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} -\frac{8}{i} * \cos(i * \pi) * \sin(i * t)$$

Найденный P_n - тригонометрический многочлен Фурье для функции $f(t) = 4t$. Сравним графики P_n при $n = 5, 10, 20$ и $f(t)$:

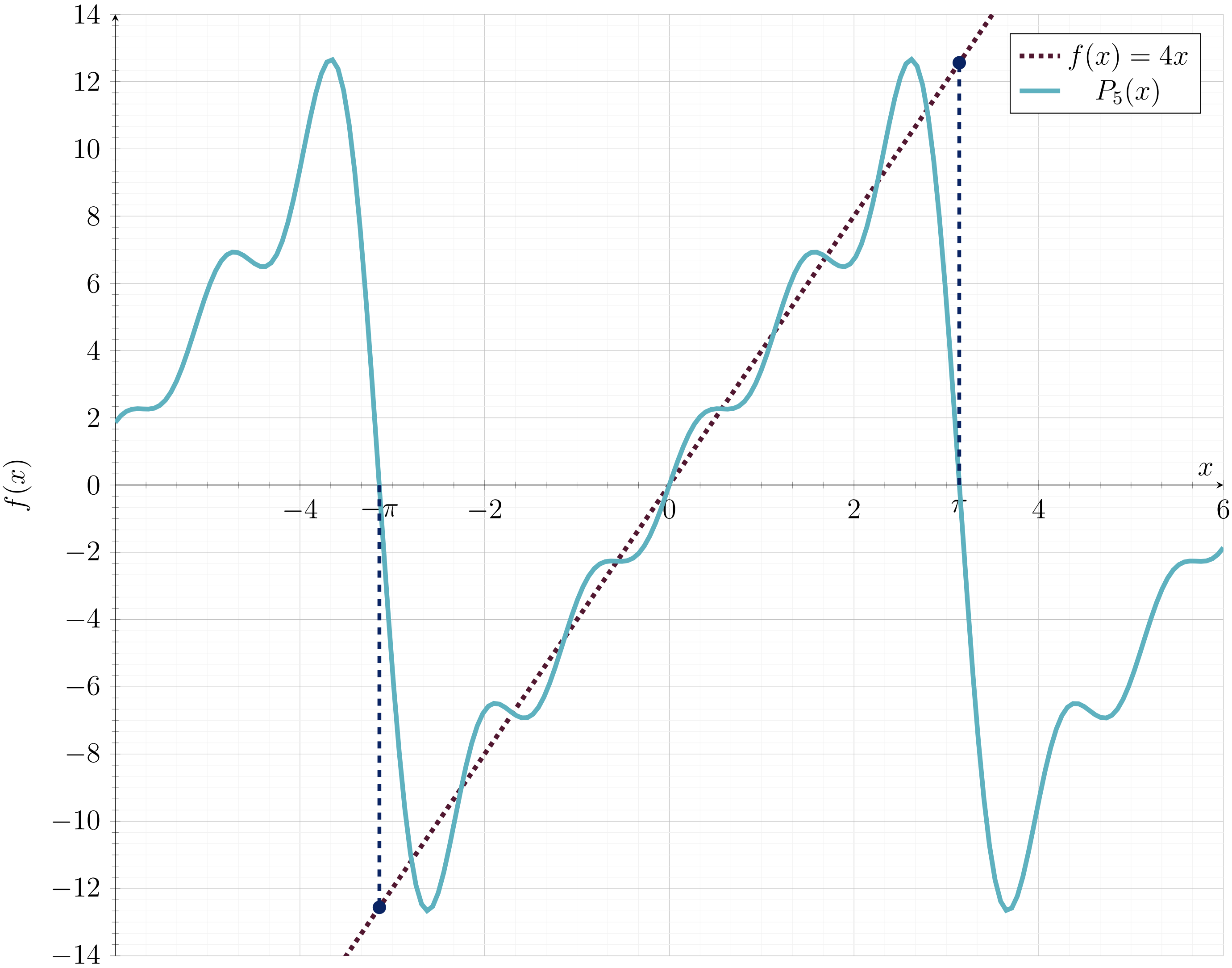

Рис. 3: Графики исходной функции $f(x)$ и тригонометрического многочлена Фурье $P_5(x)$ для неё при $n = 5$.

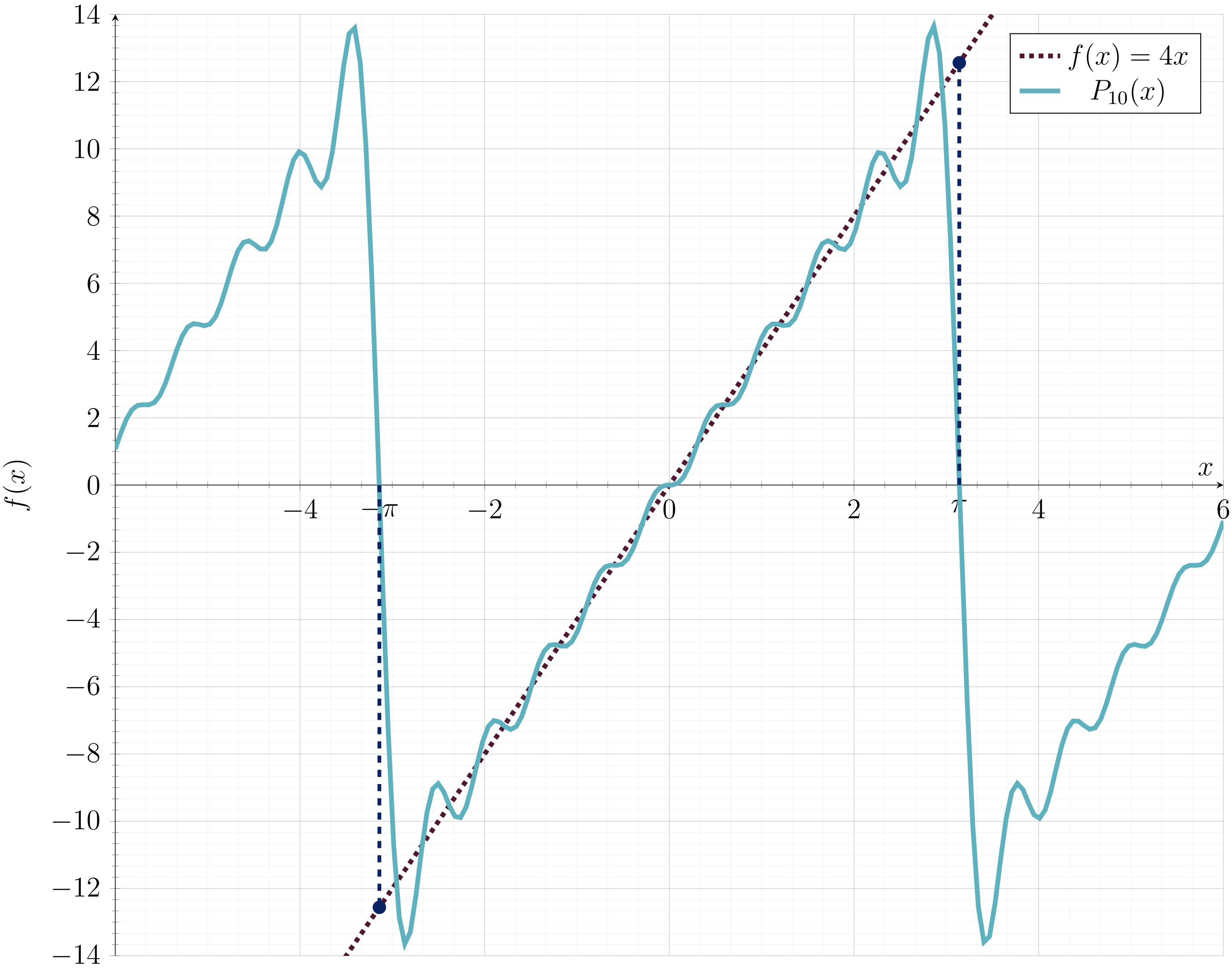

Рис. 4: Графики исходной функции $f(x)$ и тригонометрического многочлена Фурье $P_{10}(x)$ для неё при $n = 10$.

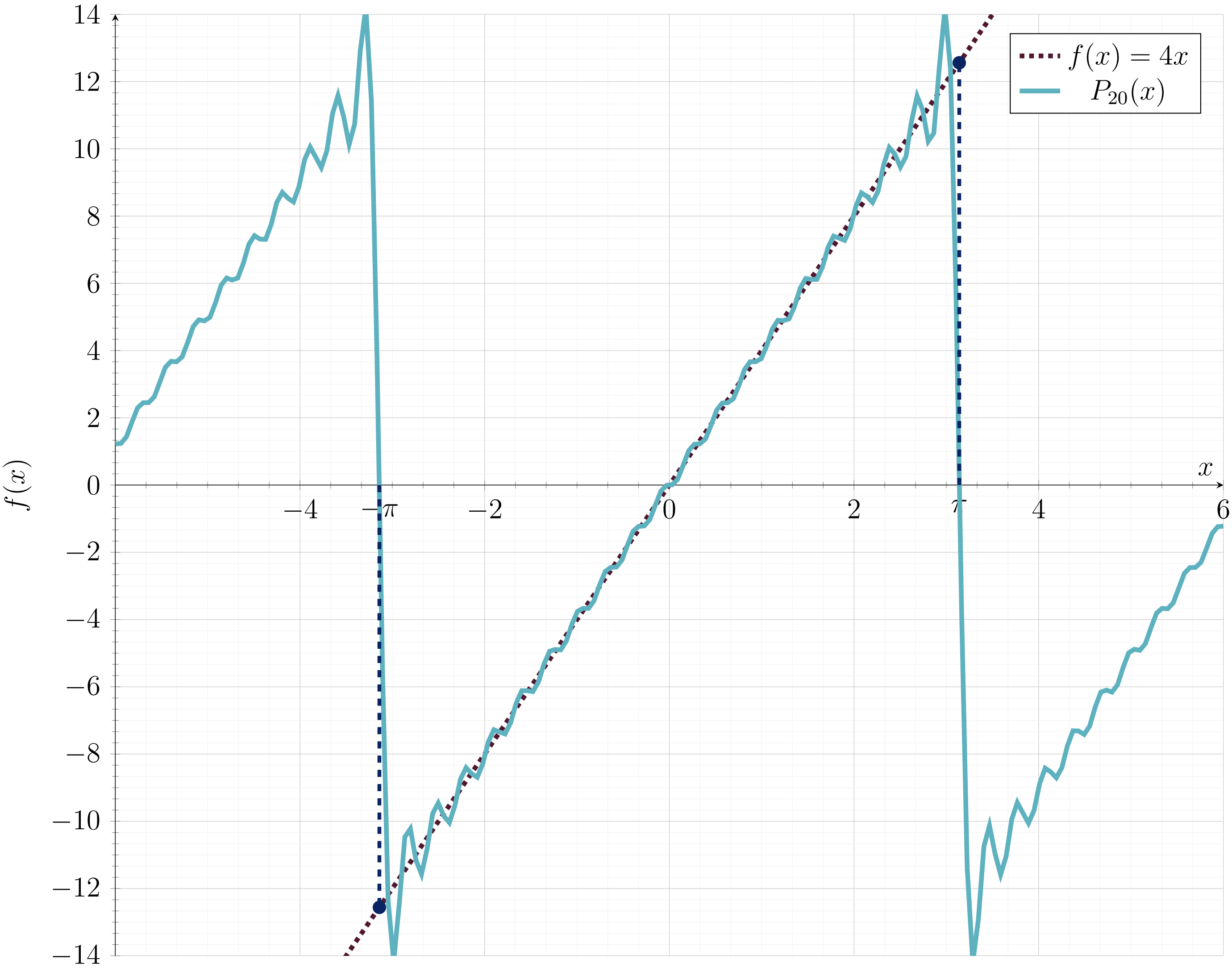

Рис. 5: Графики исходной функции $f(x)$ и тригонометрического многочлена Фурье $P_{20}(x)$ для неё при $n = 20$.

Легко заметить, что при увеличении порядка многочлена $P_n(t)$ (т. е. с ростом n), его график на промежутке $[-\pi; \pi]$ приближается к графику функции $f(t)$ (становится более похожим на него), т.е. уменьшается модуль разности этих функций и расстояние между соответствующими им векторами.

3. 3-е Задание. Приведение уравнения поверхности 2-го порядка к каноническому виду.

Условие. *Дано уравнение поверхности 2-го порядка:*

$$2x^2 - 3y^2 + 2z^2 + 2xz - 12 = 0$$

Привести исходное уравнение к каноническому виду при помощи методов Лагранжа и ортогонального преобразования. Изобразить график уравнения в исходной системе координат. Какую поверхность оно задаёт? Указать на графике оси исходной и приведённой систем координат.

3.1. Метод ортогонального преобразования

Приведём квадратичную форму $2x^2 - 3y^2 + 2z^2 + 2xz$ из исходного уравнения к каноническому виду с помощью ортогонального преобразования.

Запишем матрицу формы:

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Так как считаем, что скалярное произведение определно стандартно, т.е. матрица Грама - единичная, то матрица присоединённого к форме линейного оператора $A = Q$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Найдём матрицу для ортогонального преобразования как матрицу перехода в ортонормированный собственный базис линейного оператора $\mathcal{A}$. Множество собственных чисел λ (т.е. спектр л.о.) является множеством корней характеристического многочлена:

$$\begin{aligned} \mathcal{X} = |A - \lambda * I| = &\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -3-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= -(2-\lambda)^2 * (3+\lambda) + (3+\lambda) \\ &= -(\lambda+3) * (\lambda-1) * (\lambda-3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(\lambda+3) * (\lambda-1) * (\lambda-3) = 0 \\ &\lambda_1 = 1 \text{ кр. } 1, \lambda_2 = 3 \text{ кр. } 1, \lambda_3 = -3 \text{ кр. } 1 \end{aligned}$$

Найдём собственные векторы:

$$\lambda = 1 : (A - 1 * I)X = 0 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \sqsupset z = c \Rightarrow X = c * \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 3 : (A - 3 * I)X = 0 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \sqsupset z = c \Rightarrow X = c * \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = -3 : (A + 3 * I)X = 0 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \sqsupset y = c \Rightarrow X = c * \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Таким образом, получаем базис из собственных векторов:

$$\lambda = 1 : X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda = 3 : X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda = -3 : X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

Заметим, что полученные векторы - ортогоналны. Нормализуем их:

$$X_1' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, X_2' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, X_3' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Таким образом, матрица перехода T равна:

$$T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

При этом обратная матрица T^-1 равна исходной матрице T в силу её ортогональности.

Диагонализуем матрицу формы ортогональным преобразованием:

$$Q' = T^T * Q * T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Получим координаты векторов, параллельных осям приведённой системы координат (в которой исходное уравнение - каноническое):

$$X = TY$$
$$Y = T^{-1} * X$$
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x' = -\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}z = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ y' = \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}z = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ z' = y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Итак, запишем исходное уравнение в каноническом виде:

$$2x^2 - 3y^2 + 2z^2 + 2xz - 12 = 0$$
$$1 * (-\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}z)^2 + 3 * (\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}z)^2 - 3 * y^2 = 12$$
$$(x')^2 + 3(y')^2 - 3(z')^2 = 12$$
$$\frac{(x')^2}{(\sqrt{12})^2} + \frac{(y')^2}{2^2} - \frac{(z')^2}{2^2} = 1$$

3.2. Метод Лагранжа

Аналогично приведём квадратичную форму $2x^2 - 3y^2 + 2z^2 + 2xz$ из исходного уравнения к каноническому виду с помощью метода Лагранжа.

$$\begin{aligned}
&2x^2 - 3y^2 + 2z^2 + 2xz \\
&= (2x^2 + 2xz + \frac{1}{2}z^2) - \frac{1}{2}z^2 + 2z^2 - 3y^2 \\
&= (x + \frac{1}{2}z)^2 - 3y^2 + \frac{3}{2}z^2 \\
&= \left| x'' = \sqrt{2}x + \frac{1}{\sqrt{2}}z, y'' = y, z'' = z \right| \\
&= 2(x'')^2 - 3(y'')^2 + \frac{3}{2}(z'')^2
\end{aligned}$$

Тогда исходное уравнение в каноническом виде равно:

$$2(x'')^2 - 3(y'')^2 + \frac{3}{2}(z'')^2 = 12$$
$$\frac{(x'')^2}{(\sqrt{8})^2} - \frac{(y'')^2}{2^2} + \frac{(z'')^2}{(\sqrt{8})^2} = 1$$

Заметим, что при приведении уравнения в канонический вид разными способами были получены разные системы координат, в которыех это уравнения имеет канонический вид. При этом методом Лагранжа была найдена система с неортогональными осями! Оговоримся, правда, что и систему с ортогональными осями, совпадающую с системой, полученной при решении методом ортогонального преобразования, можно получить правильно выделив полные квадраты, нарушив, правда, шаги алгоритма Лагранжа.

Анализируя полученные канонические уравнения поверхностей, приходим к выводу, что исходное уравнение описывает **однополостный гиперболоид** с общим уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Изобразим на графиках описываемую поверхность в исходной системе координат, а так же оси приведённой системы.

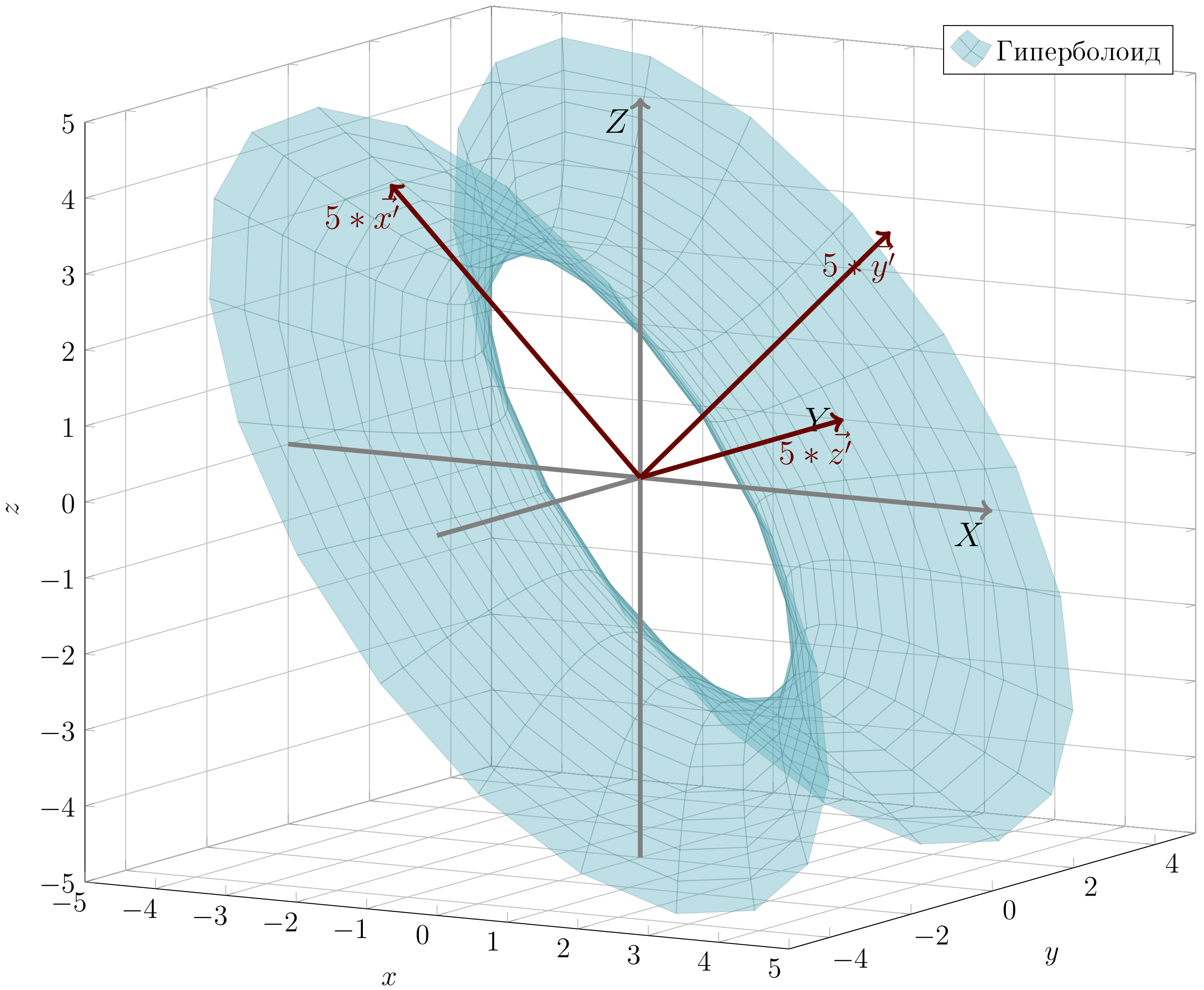

Рис. 6: Однополостный гиперболоид, описываемый исходным уравнением и приведённые оси, полученные при ортогональном преобразовании (угол поворота 30 deg).

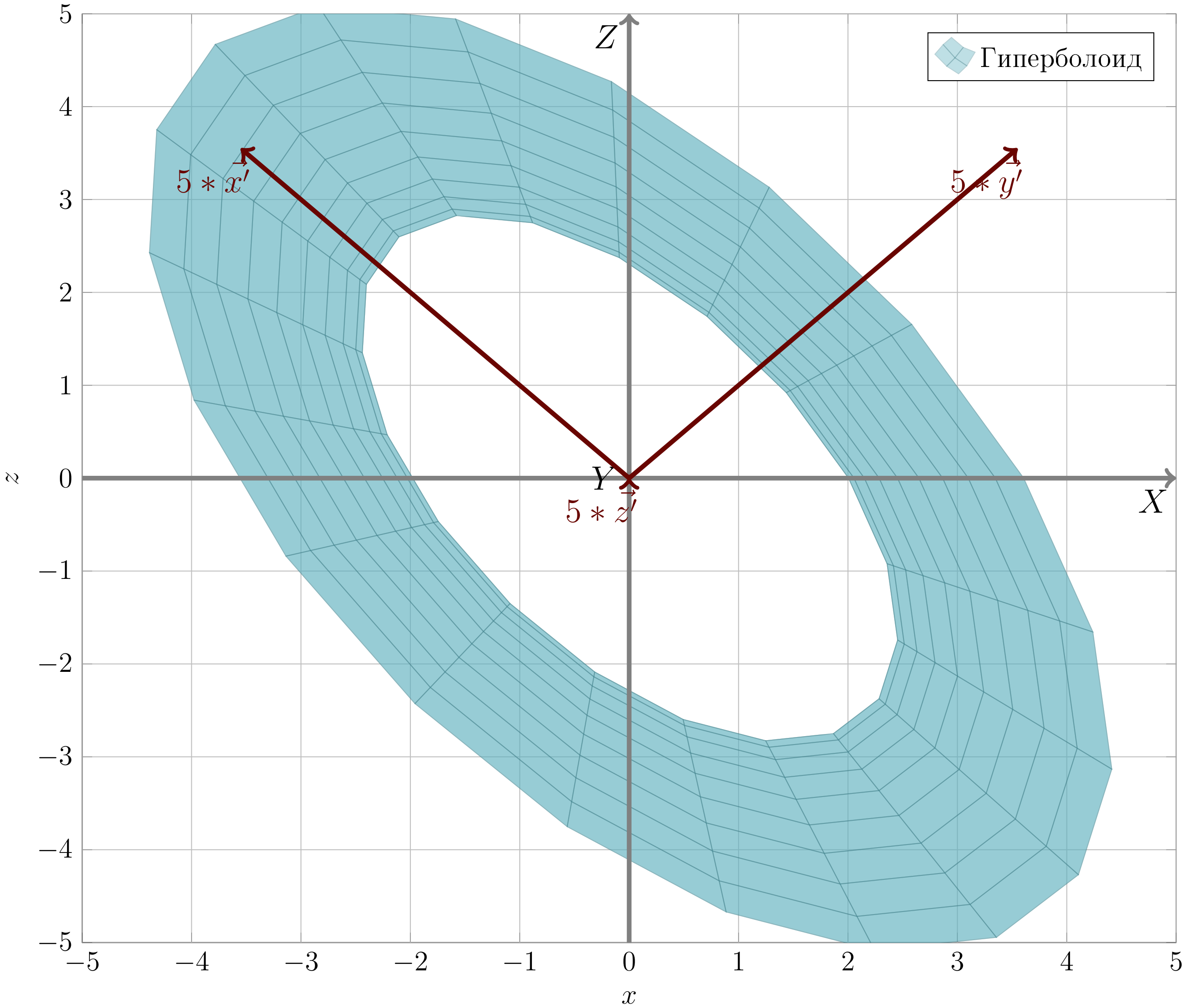

Рис. 7: Однополостный гиперболоид, описываемый исходным уравнением и приведённые оси, полученные при ортогональном преобразовании (угол поворота 0 deg).

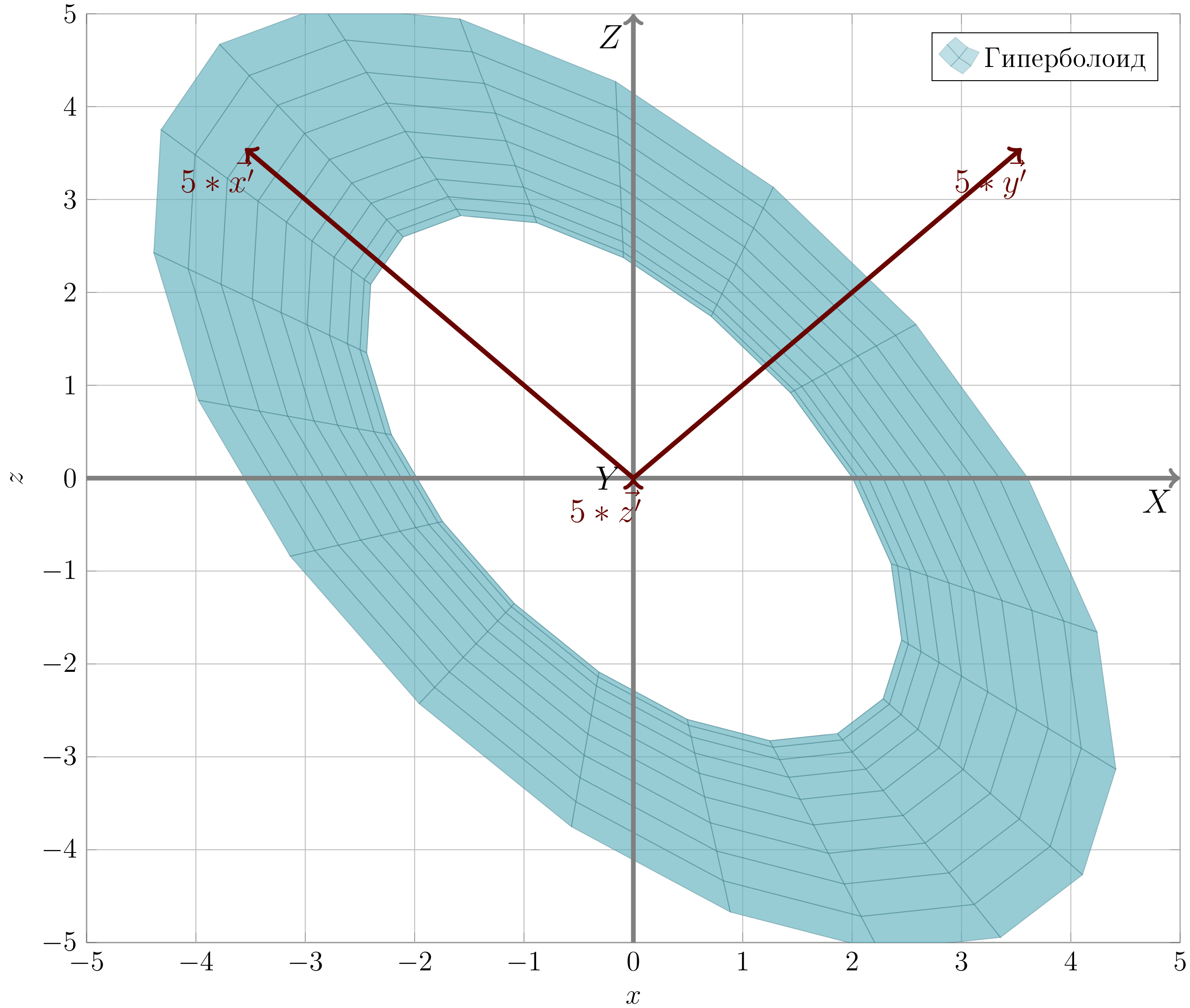

Рис. 8: Однополостный гиперболоид, описываемый исходным уравнением и приведённые оси, полученные при ортогональном преобразовании (угол поворота 0 deg).

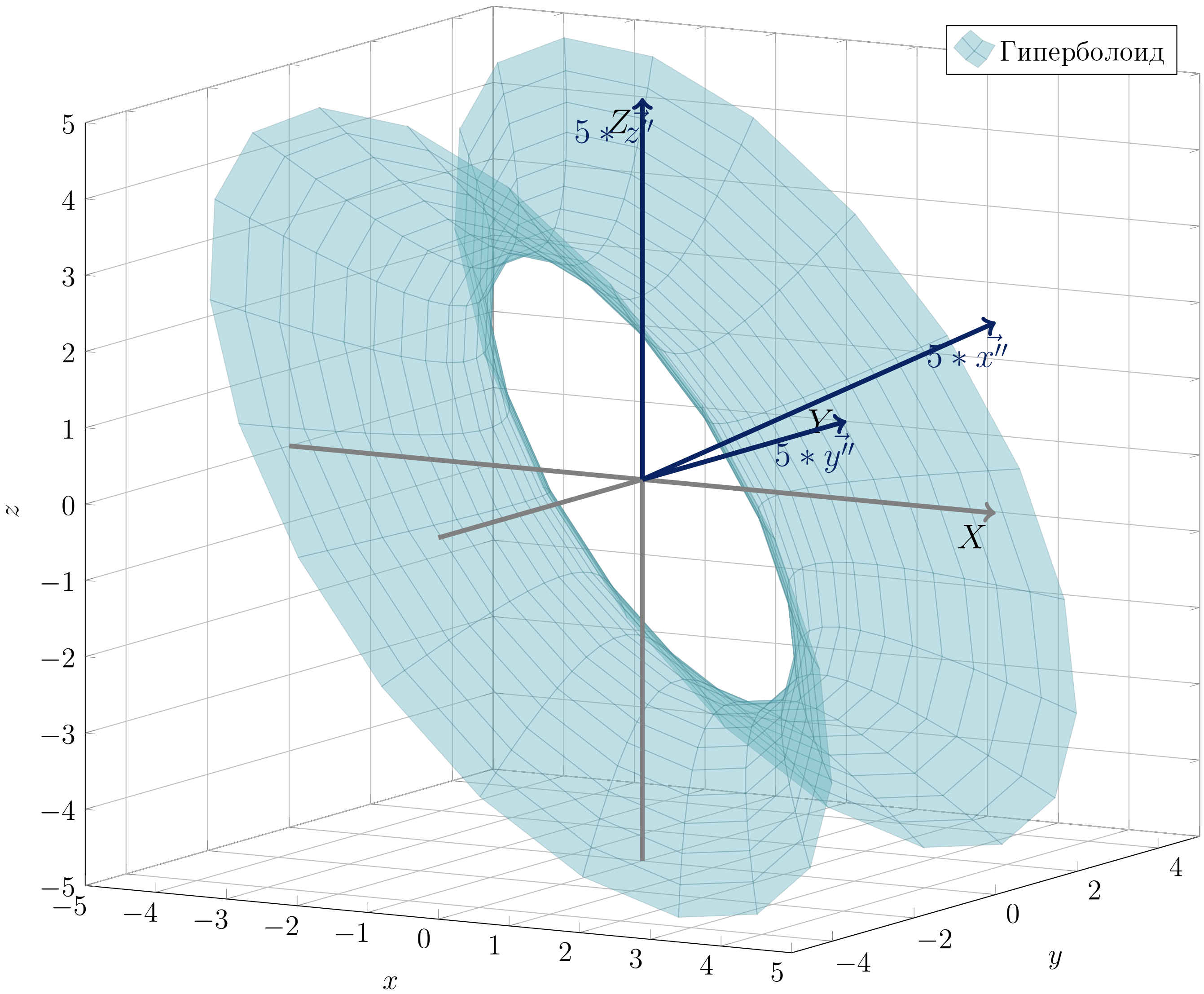

Рис. 9: Однополостный гиперболоид, описываемый исходным уравнением и приведённые неортогональные оси, полученные при решении методом Лагранжа (угол поворота 30 deg).

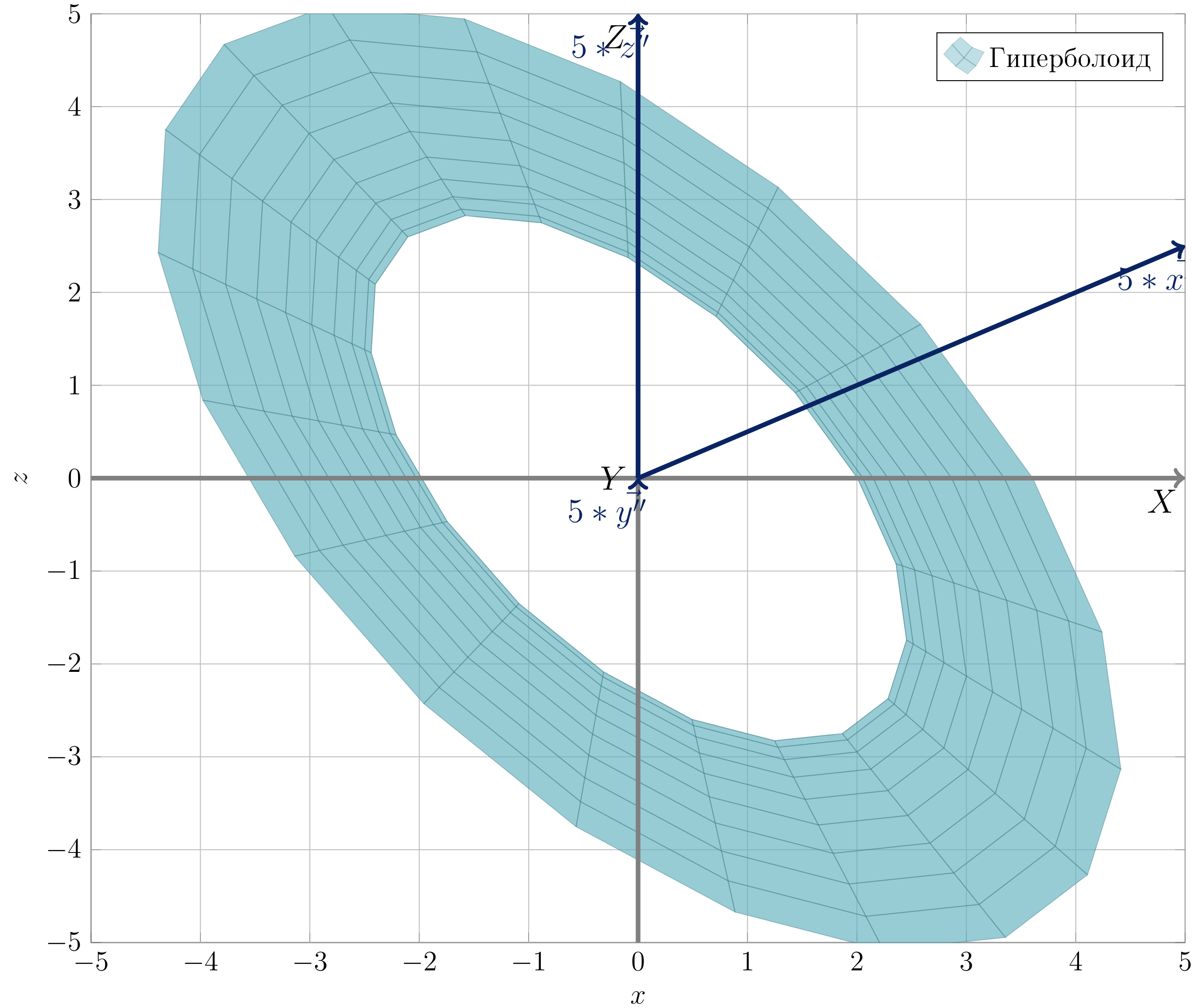

Рис. 10: Однополостный гиперболоид, описываемый исходным уравнением и приведённые неортогональные оси, полученные при решении методом Лагранжа (угол поворота 0 deg).

4. Выводы

При выполнении расчётно-графической работы мы получили линейный оператор проектирования в пространстве геометрических вектров и исследовали его, исследовали линейный оператор в пространстве функций и сравнили трудоёмкость вычисления образа при помощи матрицы с вычислением по формуле. Также мы рассмотрели процесс ортогонализации и нормирования базисных векторов на примере базиса пространства многочленов и вывели многочлен Фурье при поиске самого близкого к функции многочлена. По ходу решения последнего задания мы приводили уравнение поверхности 2-го порядка к каноническому виду методом Лагранжа и ортогонального преобразования, а также искали оси, в которых это уравнение и имеет канонический вид.

5. Оценочный лист

Хороших	Дмитрий	P3117	1.5	100%
Рамеев	Тимур	P3118	1.5	100%