МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«Национальный исследовательский университет ИТМО»

ФАКУЛЬТЕТ ПРОГРАММНОЙ ИНЖЕНЕРИИ И КОМПЬЮТЕРНОЙ ТЕХНИКИ

РАСЧЁТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА

по теме
«Ряды Тейлора и Фурье»
по дисциплине
«Математика»

Вариант лит. Д

Выполнили:
Митя XX
Преподаватель:
П. К.

Санкт-Петербург, 2023

Содержание

1. 1-е Задание. Ряд Тейлора

Условие.

а) *Некоторую функцию разложили в ряд Маклорена и, придав аргументу x определённое значение, получили числовой ряд (1). Найдите его сумму.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n * n} \tag{1}$$

б) *Найдите первообразную функции 2 в виде ряда, используя стандартные разложения степенных рядов, а также свойства их сложения и умножения.*

$$f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \tag{2}$$

в) *Найдите первые k членов разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения 3 при указанных начальных условиях. Изобразите на графике..*

$$y' = xy + e^y, y(0) = 0, k = 4 \tag{3}$$

1.1. Решение п. а)

Для нахождение суммы ряда (1) рассмотрим следующий функциональный ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{x^n}{n} \tag{4}$$

, равный исходному ряду (1) при $x = -\frac{1}{2}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{x^n}{n} = \left| x = -\frac{1}{2} \right| =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2^n * n} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2^n * n}$$

Докажем, что рассматриваемый ряд (4) равномерно сходится в окрестности точки $x_0 = -\frac{1}{2}$, например на отрезке $\left[-\frac{3}{4}; \frac{3}{4}\right]$.

Так как числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n * \frac{1}{n}$ мажорирует ряд (4) $\forall x \in \left[-\frac{3}{4}; \frac{3}{4}\right]$:

$$\left| -x^n \frac{1}{n} \right| \leq \left| \left(\frac{3}{4}\right)^n * \frac{1}{n} \right|$$

$$\forall x \in \left[-\frac{3}{4}; \frac{3}{4}\right]$$

, то по признаку Вейерштрасса ряд (4) равномерно сходится на отрезке $\left[-\frac{3}{4}; \frac{3}{4}\right]$.

Далее заметим, что:

$$\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x -t^{n-1} dt$$

При этом, так как ряд (4) равномерно сходится отрезке $[0; x]$ при $x \in \left[0; \frac{3}{4}\right]$ и на отрезке $[x; 0]$ при $x \in \left[-\frac{3}{4}; 0\right]$ (оба отрезка $\subset \left[-\frac{3}{4}; \frac{3}{4}\right]$), то по Теореме об интегрировании функционального ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{0}^{x} -t^{n-1} dt = \int_{0}^{x} \sum_{n=1}^{\infty} -t^{n-1} dt \qquad \forall x \in \left[-\frac{3}{4}; \frac{3}{4}\right] \tag{5}$$

Легко заметить, что в подынтегральном выражении в правой части равенства (5) находится сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии, равная по общей формуле:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 * q^n = \frac{a_1}{1-q}$$

, где q - знаменатель прогрессии, a_1 - первый член прогрессии. Следовательно, для суммы в подынтегральном выражении:

$$\begin{gathered} a_1 = 1, q = t \\ \int_{0}^{x} \sum_{n=1}^{\infty} -t^{n-1} dt = \int_{0}^{x} -\frac{1}{1-t} dt = \\ -ln(1-t)|_0^x = ln(1-x) - ln(1) = \\ = ln(1-x) \\ \forall x \in \left[-\frac{3}{4}; \frac{3}{4}\right] \end{gathered} \tag{6}$$

Подставляя в полученное выражение исходный $x = -\frac{1}{2}$, получаем:

$$ln(1-x) = \left| x = -\frac{1}{2} \right| = ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) = ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

Таким образом, приходим к ответу:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n * n} = ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

1.2. Решение п. б)

Воспользовавшись свойством логарифмом представим исходную функцию (2) в виде разности логарифмов (при условии $x \neq 1$):

$$f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x) - \ln(1-x), x \neq 1 \tag{7}$$

При этом, известно стандартное разложение в ряд Маклорена функции $f(x) = ln(1+x)$:

$$\begin{gathered} ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} \\ \forall x \in (-1; 1] \end{gathered}$$

Чтобы разложить слагаемое $ln\,(1-x)$ воспользуемся заменой:

$$\text{Пусть } t=-x$$
$$\begin{aligned} ln(1-x)=ln(1+t) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}t^n}{n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(-x)^n}{n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n+1}(x)^n}{n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}-\frac{(x)^n}{n} \end{aligned}$$
$$\forall t\in(-1;1]$$
$$\forall x\in[-1;1)$$

Таким образом, можем разложить данную функцию (7) в виде рядов:

$$\ln(1+x)-\ln(1-x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{(x)^n}{n}$$
$$\forall x\in(-1;1)$$

Раскроем и почленно рассмотрим полученные ряды:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{(x)^n}{n} &= \left(\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots\right)-\left(-\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\ldots\right) \\ &= \frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}\ldots= \\ &= 2*\frac{x}{1}+2*\frac{x^3}{3}+\ldots+2*\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\ldots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}2*\frac{x^{2n-1}}{2n-1} \\ &\forall x\in(-1;1) \end{aligned}$$

К такому же выводу можно прийти и более строгими рассуждениями. Вновь рассмотрим полученные ряды и найдём разность a_n-х элементов (т.е. запишем разность сумм под одним знаком $\sum$):

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{(x)^n}{n} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}+\frac{(x)^n}{n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{((-1)^{n+1}+1)x^n}{n} \end{aligned}$$

Заметим, что при $n=2,4,6,\ldots$ член ряда обнуляется, а при $n=1,3,5,\ldots$ общий член равен $a_n=\frac{2x^n}{n}$. Таким образом, верно следующее:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{((-1)^{n+1}+1)x^n}{n}=|n=2k-1|=\sum_{k=1}^{\infty}2*\frac{x^{2k-1}}{2k-1}$$

Таким образом, мы разложили исходную функцию (2) в степенной ряд, причём множество аргументов, на котором разложение верно совпадает с множеством определения функции $(D(f(x))=$

$(-1;1)$):

$$f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} 2 * \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$$

$$\forall x \in (-1;1)$$

Найдём первообразную исходной функции:

$$\int f(x)dx = \int \sum_{n=1}^{\infty} 2 * \frac{x^{2n-1}}{2n-1}dx$$

Заметим, что разложение исходной функции получено как сумма (разность) 2-х СХ на интервале $(-1;1)$ рядов (они СХ, потому что являются рядами разложения функции, а для них необходимо условие сходимости на промежутке, на котором они совпадают с функцией), поэтому оно тоже СХ.

Следовательно, по Теореме о равномерной сходимости степенных рядов полученный ряд рязложения сходится равномерно на $[-\rho, \rho] \subset (-1;1), \forall \rho \in [0;1)$.

Значит, по Теореме об интегрировании степенных рядов верно следующее:

$$\begin{gathered}\int \sum_{n=1}^{\infty} 2 * \frac{x^{2n-1}}{2n-1}dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int 2 * \frac{x^{2n-1}}{2n-1}dx \\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(2 * \frac{x^{2n}}{2n(2n-1)} + C\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^{2n}}{n(2n-1)}\right) + C'\end{gathered} \tag{8}$$

Таким образом, первообразная исходной функции равна:

$$\int f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^{2n}}{n(2n-1)}\right) + C'$$

1.3. Решение п. в)

Решением дифференциального уравнения является некоторая функция (или семейство функций) $y(x)$, производные которой удовлетворяют уравнению. Мы можем синтезировать функцию с определёнными производными при помощи степенного ряда Тейлора.

Для условия (3) будем раскладывать некоторую функцию в ряд Маклорена (т.к.в указанном начальном условие дано значение функции в $x_0 = 0$)почленно (по заданию необходимо найти первые 4 члена).

Общий вид разложения функции в ряд Маклорена выглядит так:

$$f(x) = f(0) + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$$

Следовательно, чтобы найти первые 4 члена разложения решения (функции y) в степенной ряд необходимо найти значение первых 3 его производных в точке $x = 0$:

$$\begin{aligned} y' &= xy + e^y, y(0) = 0 \Rightarrow \\ y'(0) &= 0 * y(0) + e^{y(0)} = 0 + 1 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'' &= y + x * y' + e^y * y' \Rightarrow \\ y''(0) &= y(0) + 0 * y'(0) + e^{y(0)} * y'(0) = \\ &= 0 + 0 + 1 * 1 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y''' &= y' + y' + y'' * x + e^y * y' * y' + y'' * e^y \Rightarrow \\ y'''(0) &= y'(0) + y'(0) + y''(0) * 0 + e^{y(0)} * y'(0) * y'(0) + y''(0) * e^{y(0)} = \\ &= 1 + 1 + 0 + 1 * 1 * 1 + 1 * 1 = 4 \end{aligned}$$

Таким образом, функцию, являющуюся частным решением исходного дифференциального уравнения можно представить как:

$$y(x) = 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{4}{3!}x^3 + \dots$$
$$= x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{6}x^3 + \dots$$

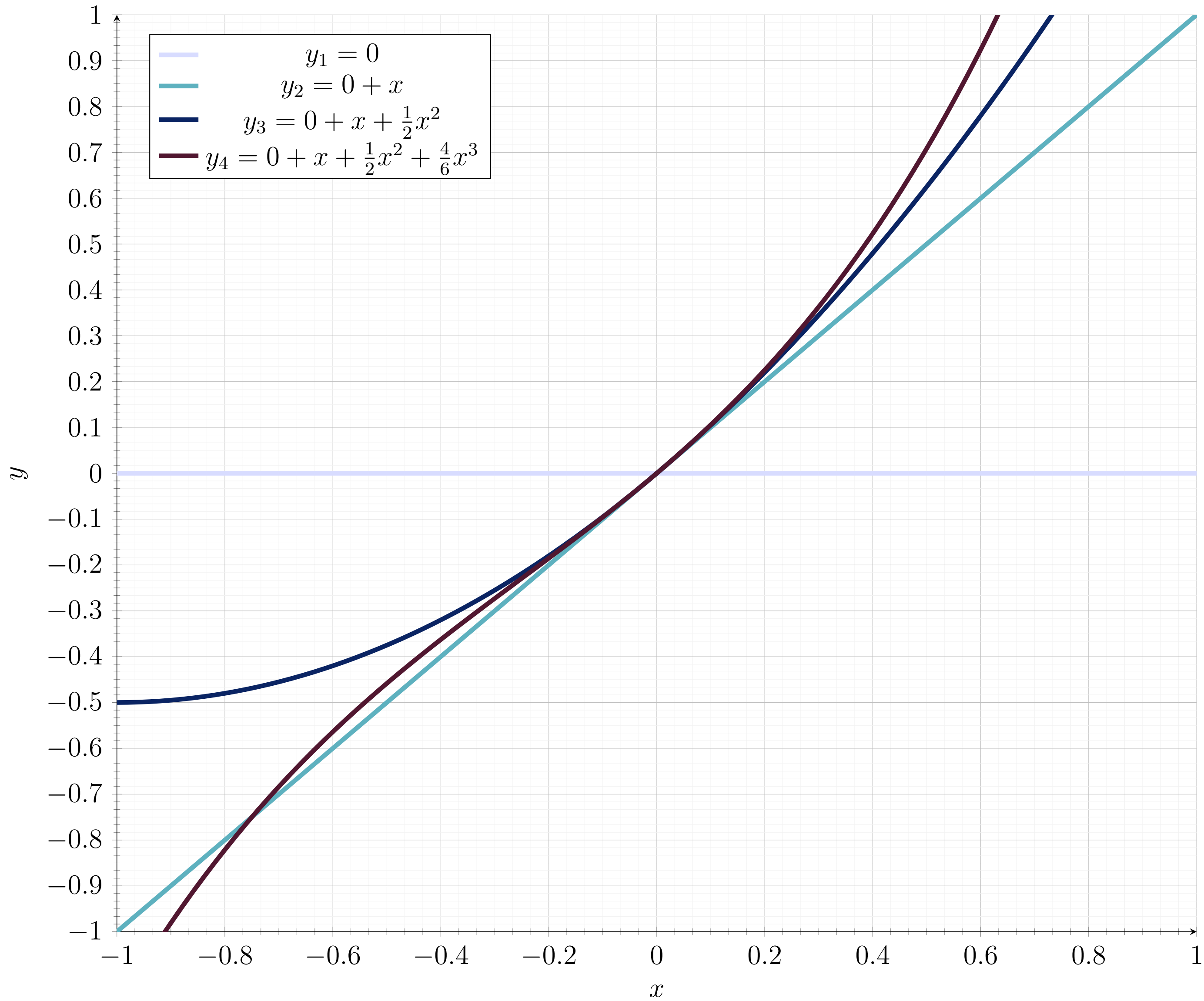

Рис. 1: Графики сумм первых $k = 1 \dots 4$ членов степенного ряда решения исходного дифференциального уравнения.

2. 2-е Задание. Ряд Фурье

Условие. *С помощью разложения в ряд Фурье данной функции в интервале* $(-\pi; \pi)$ *найдите сумму числового ряда:*

$$f(x) = x^2$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} \tag{9}$$

2.1. Решение

Представим исходную функцию (9) тригонометрическим рядом Фурье в интервале $(-\pi;\pi)$ (из-за того что функция не переодична - представить её рядом Фурье на всей области определения не удастся).

Рассмотрим тригонометрический ряд Фурье в общем виде:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n * \cos(nx) + b_n * \sin(nx)$$

, где:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} * \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} * \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} * \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$$

Заметим, что исходная функция $f(x)$ - чётная ($f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$), а значит, **по свойству ряда Фурье:** $b_n = 0$, а $a_n = \frac{2}{\pi} * \int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$. Найдём коэффициенты a_0 и a_n:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} * \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi} * \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi} * \int_0^{\pi} x^2\cos(nx)\,dx = \\
&= |\text{Выч. по частям}| = \frac{2}{\pi} * \left(\left.\frac{x^2}{n} * \sin(nx)\right|_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi} 2x\sin(nx)\,dx \right) \\
&= |\text{Выч. по частям}| = \\
&= \frac{2}{\pi} * \left(\left.\frac{x^2}{n} * \sin(nx)\right|_0^{\pi} - \frac{1}{n}\left(\left.-\frac{2}{n}\cos(nx) * x\right|_0^{\pi} + \frac{2}{n}\int_0^{\pi}\cos(nx)dx \right) \right) \\
&= 2 * \left(\frac{\pi^2\sin(n\pi)}{\pi n} + \frac{2\pi\cos(n\pi)}{n^2\pi} - \frac{2\sin(n\pi)}{n^3\pi} \right) \\
&= 2 * \frac{(\pi^2 n - 2)\sin(n\pi) + 2\pi * n * \cos(n\pi)}{n^3\pi} = \\
&= |\sin(n\pi) = 0, \cos(n\pi) = (-1)^n| = \\
&= 4 * \frac{(-1)^n}{n^2}
\end{aligned}$$

Представим исходную функцию тригонометрическим рядом:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n * \cos(nx) + 0 * \sin(nx) \\ &= \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} 4 * \frac{(-1)^n}{n^2} * \cos(nx) \\ &= \frac{\pi^2}{3} - 4 * \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} * \cos(nx) \\ &= \frac{\pi^2}{3} - 4 * \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} * \cos(nx) \\ &\forall x \in (-\pi; \pi) \end{aligned} \tag{10}$$

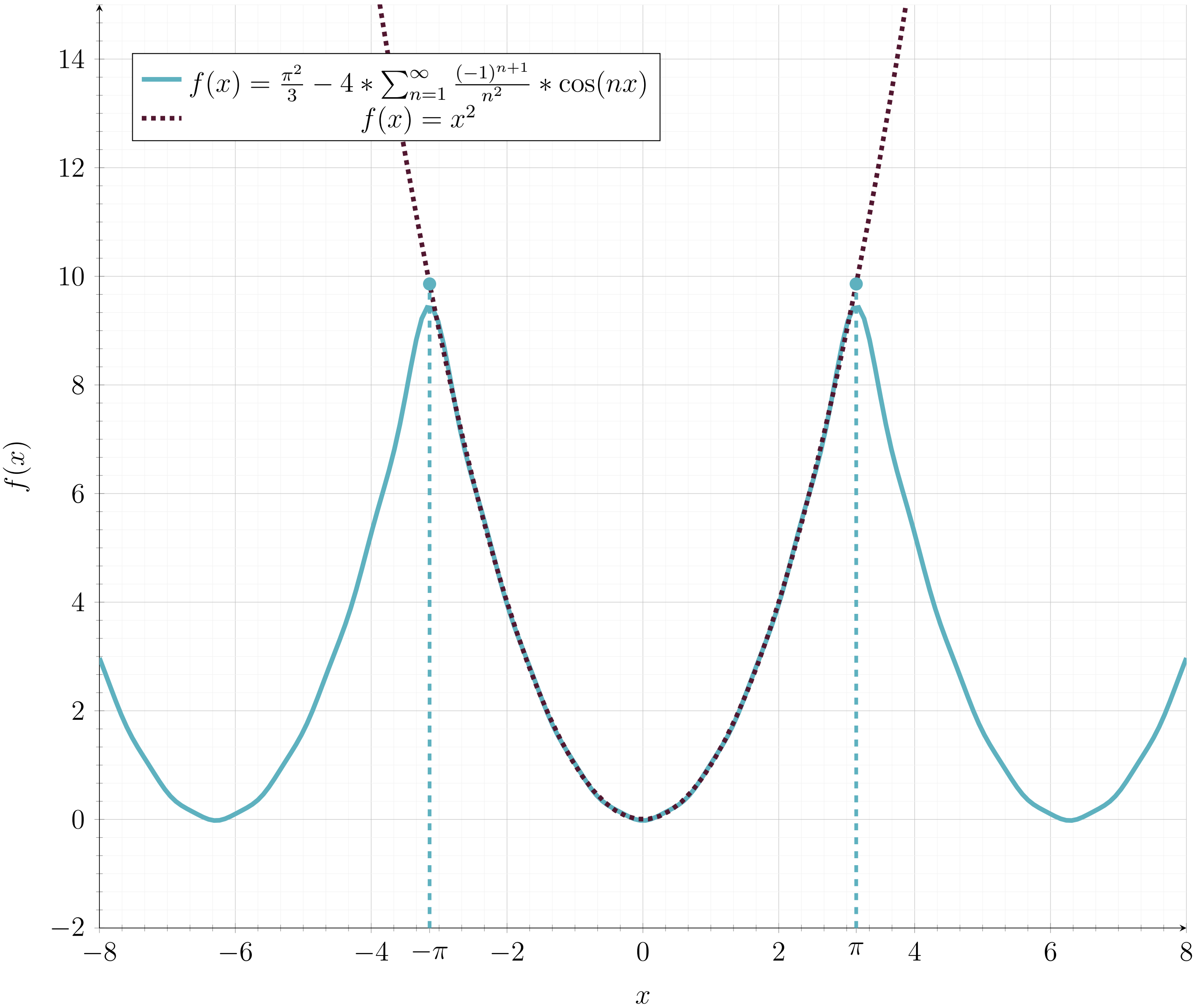

Рис. 2: Графики исходной функции $f(x)$ и её разложения в тригонометрический ряд Фурье.

На рисунке 2 видно, что полученное разложение исходной функции в ряд Фурье совпадает с ней на всём конечном интервале $(-\pi; \pi)$, так как она непрерывна на всей области определения (отсутствуют разрывы 1-го порядка). Более того, полученное разложение существует и совпадает с функцией и в точках $x = -\pi, x = \pi$.

Заметим, что при $x = 0 \in (-\pi; \pi)$ сумма $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} * \cos(nx)$ из (10) совпадает с искомым рядом (т.к. $cos(0) = 1$). Зафиксируем точку $x = 0$ и найдём искомый ряд:

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} - 4 * \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} * \cos(nx)$$
$$0^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4 * \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} * \cos(0)$$
$$0 = \frac{\pi^2}{3} - 4 * \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{3 * 4}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

Таким образом, сумма искомого числового ряда (9) равна:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

3. 3-е Задание. Приближение ряда Фурье конечной суммой

Условие. *В трёх однотипных опытах радиолюбителей на вход цифро-аналогового преобразователя (ЦАП) был подан короткий цифровой сигнал формы, изображённой на рисунке:*

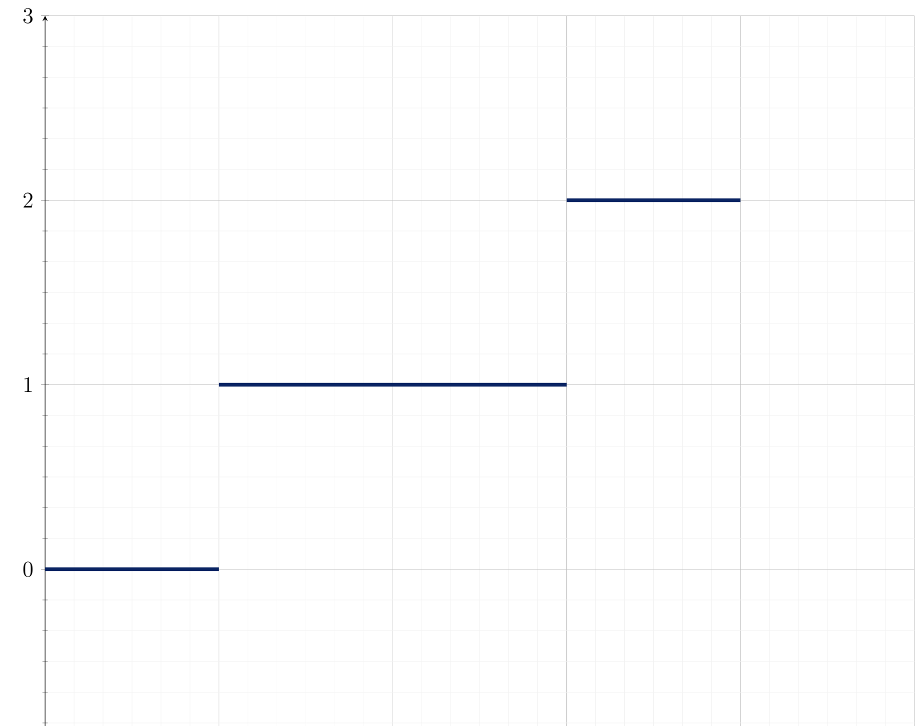

Рис. 3: Форма цифрового сигнала, поданного на ЦАП.

В каждом опыте ЦАП был настроен на:

1-й опыт. Обрезание всех гармоник кроме ***0-й и 1-й****.*

2-й опыт. Обрезание всех гармоник ***после 3-й****.*

3-й опыт. Обрезание всех гармоник кроме ***после 10-й****.*

3.1. Решение

Так как цифровой сигнал можно рассматривать как кусочно-монотонную функцию, представим его как сумму гармоник, то есть в виде тригонометрического ряда Фурье на интервале $[0;4]$. При этом, так как входной сигнал не переодический, получаемая функция разложения, совпадающая с сигналом на конечном интервале $[0;4]$, будет иметь полупериод $l = \frac{4-0}{2} = 2$.

Кусочно-заданная функция, описывающя форму цифрового сигнала равна:

$$f(x) = \begin{cases} 0, x \in [0;1) \\ 1, x \in [1;3) \\ 2, x \in [3;4] \end{cases} \tag{11}$$

Рассмотрим тригонометрический ряд Фурье с полупериодом l в общем виде:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n * \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) + b_n * \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

, где:

$$a_0 = \frac{1}{l} * \int\limits_{-l}^{l} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{l} * \int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx$$

$$b_n = \frac{1}{l} * \int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx$$

При этом по свойству ряда Фурье пределы интегрирования при вычислении коэффициентов могут быть изменены, при условия сохранения их разности в полный период:

$$\frac{1}{l} * \int\limits_{-l}^{l} \dots dx = \frac{1}{l} * \int\limits_{0}^{2l} \dots dx$$

Найдём необходимые коэффициенты Фурье для разложения функции (11):

$$a_0 = \frac{1}{2} * \int\limits_0^4 f(x)dx$$

$$\frac{1}{2} * \left(\int\limits_0^1 0dx + \int\limits_1^3 1dx + \int\limits_3^4 2dx \right) = \frac{1}{2} * (3 - 1 + 8 - 6) = 2$$

$$a_n = \frac{1}{2} * \int\limits_0^4 f(x) * \cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right) dx =$$

$$\frac{1}{2} * \int\limits_0^1 0 * \cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right) dx + \frac{1}{2} * \int\limits_1^3 1 * \cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right) dx + \frac{1}{2} * \int\limits_3^4 2 * \cos\left(\frac{n\pi}{2}x\right) dx =$$

$$\frac{1}{2} * \frac{2}{n\pi} * \sin(\frac{n\pi}{2} * 3) - \frac{1}{2} * \frac{2}{n\pi} * \sin(\frac{n\pi}{2} * 1) + \frac{1}{2} * \frac{4}{n\pi} * \sin(\frac{n\pi}{2} * 4) - \frac{1}{2} * \frac{4}{n\pi} * \sin(\frac{n\pi}{2} * 3) =$$

$$- \left(\frac{\sin(\frac{n\pi * 3}{2}) + \sin(\frac{n\pi * 1}{2})}{n\pi} \right) =$$

$$= 0$$

$$b_n = \frac{1}{2} * \int\limits_0^4 f(x) * \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right) dx =$$

$$\frac{1}{2} * \int\limits_0^1 0 * \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right) dx + \frac{1}{2} * \int\limits_1^3 1 * \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right) dx + \frac{1}{2} * \int\limits_3^4 2 * \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right) dx =$$

$$-\frac{1}{2} * \frac{2}{n\pi} * \cos(\frac{n\pi}{2} * 3) + \frac{1}{2} * \frac{2}{n\pi} * \cos(\frac{n\pi}{2} * 1) - \frac{1}{2} * \frac{4}{n\pi} * \cos(\frac{n\pi}{2} * 4) + \frac{1}{2} * \frac{4}{n\pi} * \cos(\frac{n\pi}{2} * 3) =$$

$$\frac{1}{n\pi} * \cos(\frac{n\pi}{2} * 3) + \frac{1}{n\pi} * \cos(\frac{n\pi}{2}) - \frac{2}{n\pi} * \cos(2n\pi) =$$

$$= \frac{1}{n\pi} * \left(\cos(\frac{n\pi}{2} * 3) + \cos(\frac{n\pi}{2}) - 2 \right)$$

$$= \frac{1}{n\pi} * \left(2 * \cos(n\pi) * \cos(\frac{n\pi}{2}) - 2 \right)$$

$$= \frac{2}{n\pi} * \left((-1)^n * \cos(\frac{n\pi}{2}) - 1 \right)$$

Таким образом, можем разложить исходную функцию (11) в тригонометричекий ряд Фурье на интервале $[0; 4]$ (при этом, так как в точках $x = 1$ и $x = 3$ функция терпит разрыв 1-го порядка, сумма полученного ряда разложения в этих точках будет равна не значению функции, а, согласно теореме Дирихле, среднему арифметическому пределов с обеих сторон от них):

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \left((-1)^n * \cos(\frac{n\pi}{2}) - 1 \right) * \sin(\frac{n\pi}{2} * x) \tag{12}$$

Далее найдём формы аналагового сигнала на выходе ЦАП для каждого из опытов.

1-й опыт

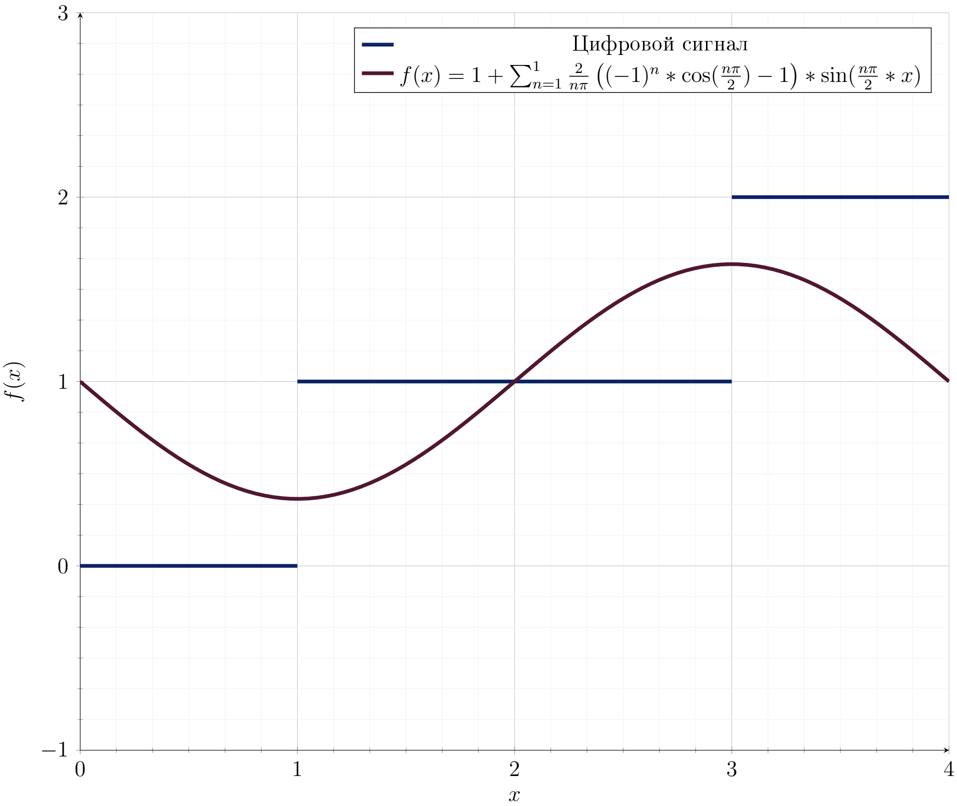

Рис. 4: Форма сигнала в 1-м опыте (обрезаны все гармоники кроме 0-й и 1-й).

2-й опыт

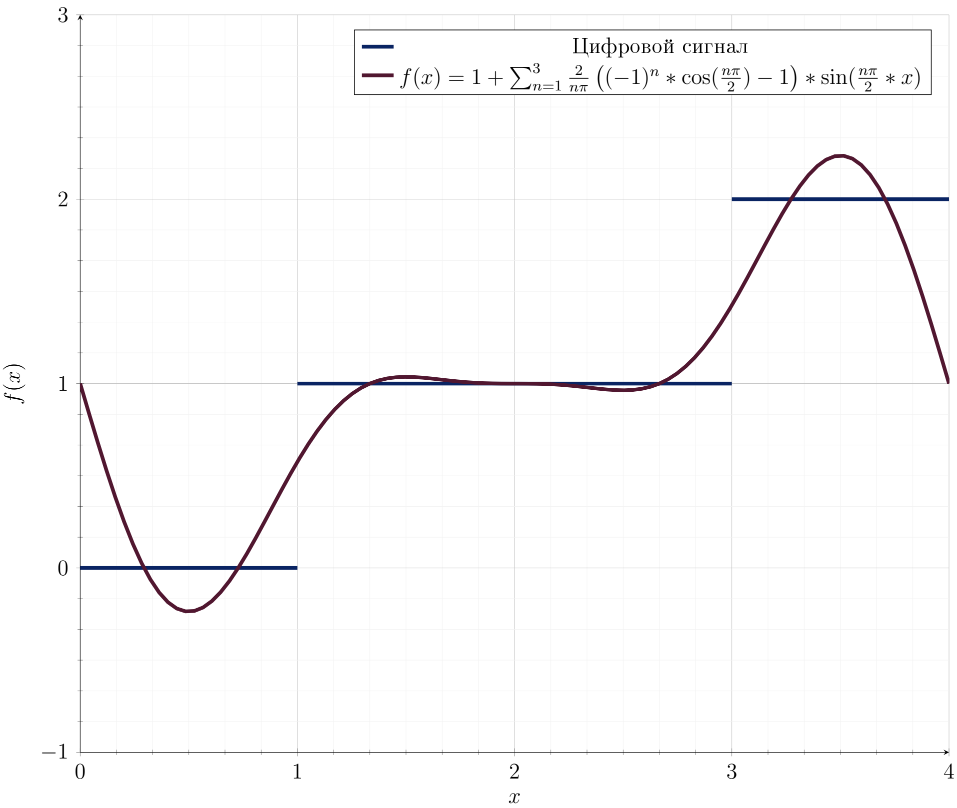

Рис. 5: Форма сигнала во 2-м опыте (обрезаны все гармоники после 3-й).

3-й опыт

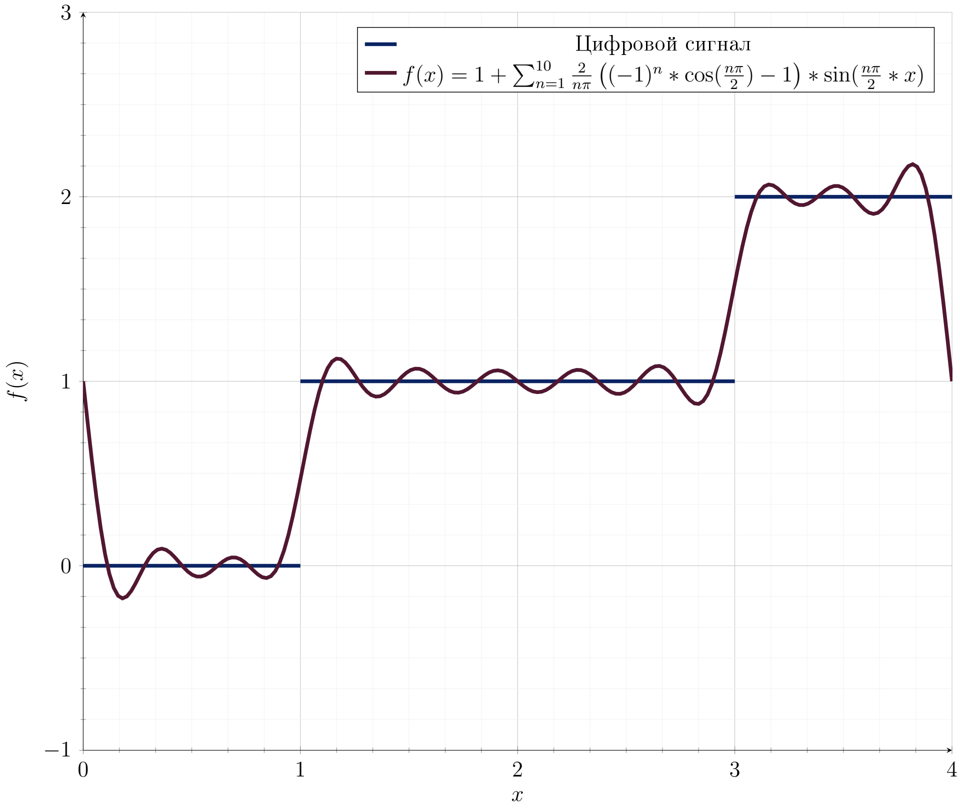

Рис. 6: Форма сигнала во 3-м опыте (обрезаны все гармоники после 10-й).

Проанализируем, насколько хорошо выходной аналоговый сигнал ЦАПа соответствует входному цифровому при помощи графика функций ошибок:

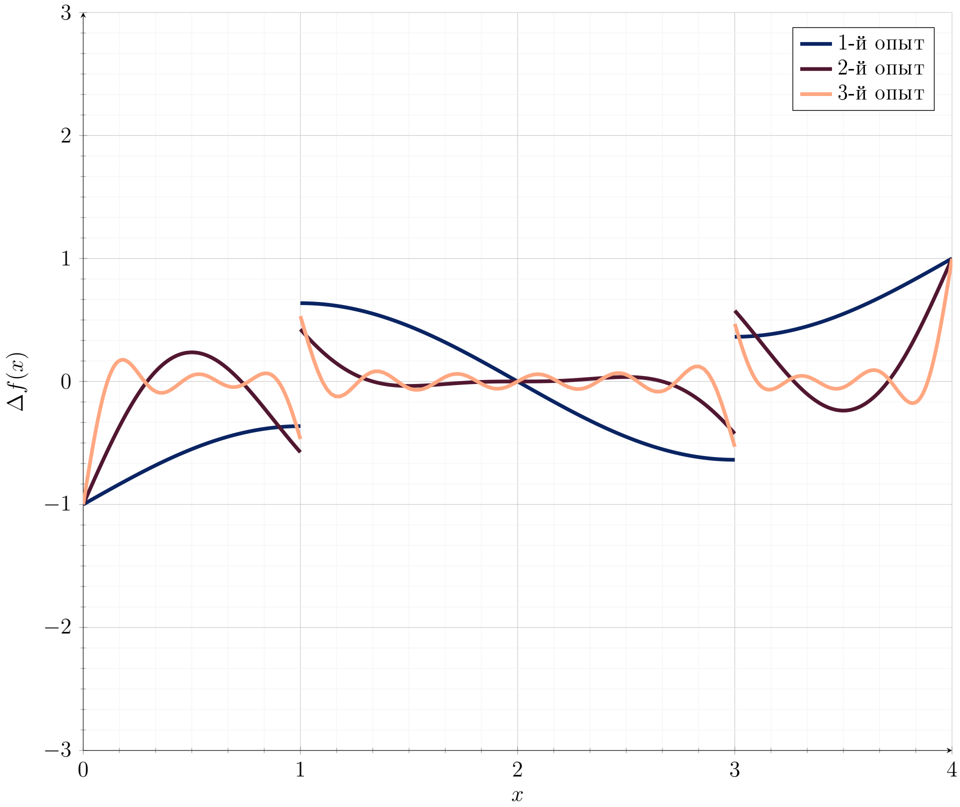

Рис. 7: Погрешность приближения цифрового сигнала аналаговым с выхода ЦАП.

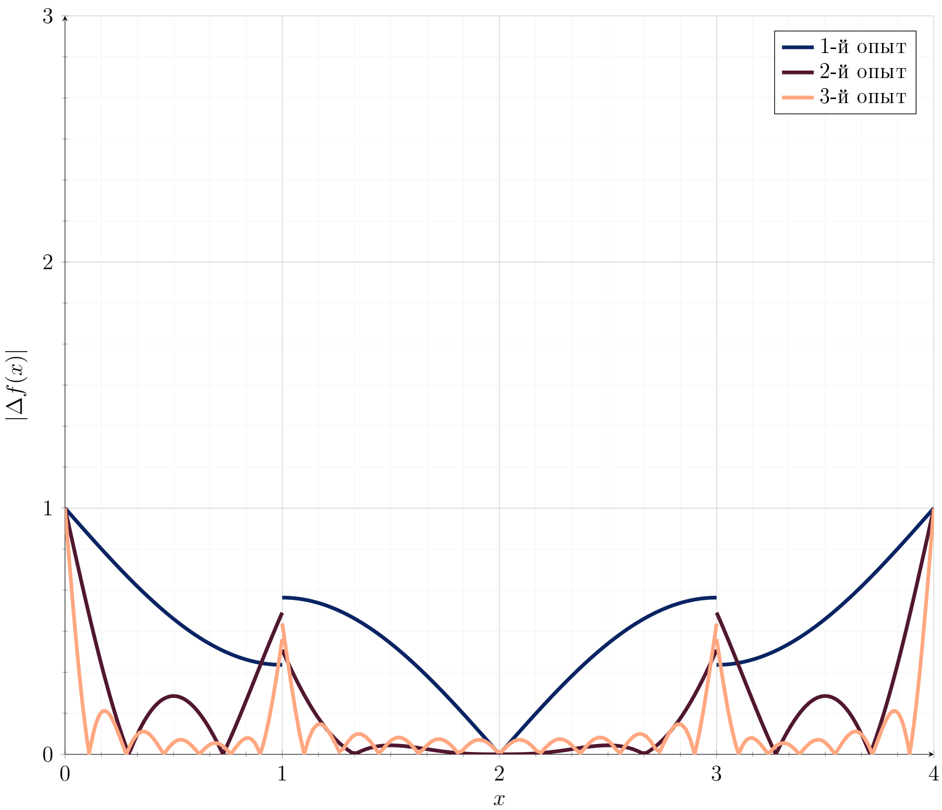

Рис. 8: Модуль погрешности приближения цифрового сигнала аналаговым с выхода ЦАП.

При рассмотрении рис. 8 легко заметить, что при увеличении задействованных в выходном сигнале гармоник, отклонение этого сигнала от входного уменьшается. При этом, в местах резких скачков входного сигнала ($x = 1, 3$) погрешность у сигналов из всех опытов довольно высока, а на концах сигнала, в точках ($x = 0, 4$) - она достигает максимальных значений (это связано с тем, что входной непериодичный цифровой сигнал представляется выходным периодичным, а разность концов входного сигнала ($2 - 0 = 2$) - велика).

Заключение.

1. *Точность представления кусочно-монотонной функции тригонометрическим многочленом Фурье прямо зависит от количества взятых гармоник.*

2. *Погрешность представления многочленом Фурье максимальна в точках разыва исходной функции и на концах промежутка её рассмотрения.*

4. Выводы

При выполнении расчётно-графической работы мы нашли значение разложенной в ряд Маклорена функции при помощи перехода к функциональному ряду и интегрирования, разложили функцию при помощи стандартных разложений в ряд Маклорена и нашли решение дифференциального уравнения как разложенную в ряд Маклорена функцию. Мы также воспользовались разложением функции в ряд Фурье для поиска суммы другого ряда и преобразования цифрвого сигнала, заданного кусочно-монотонной функцией, в аналаговый.

5. Оценочный лист

Хороших	Дмитрий	P3117	1.5	100%
Рамеев	Тимур	P3118	1.5	100%