

# РАСЧЁТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА

по теме

«Линейный оператор, спектральный анализ и евклидово  
пространство»

по дисциплине

«Математика»

Вариант № 4

**Выполнили:**

Митя ХХ

**Преподаватель:**

П. К.

# Содержание

# 1. 1-е Задание. Линейный оператор и спектральный анализ.

## Условие.

А) Дано пространство геометрических векторов  $\mathbb{R}^3$ , его подпространство  $\mathcal{L}_1$  и  $\mathcal{L}_2$  и линейный оператор  $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ :

$\mathcal{A}$  - оператор проектирования  $P_{\mathcal{L}_1}^{\parallel \mathcal{L}_2} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{L}_1$  пространства  $\mathbb{R}^3$  на подпространство  $\mathcal{L}_1$  параллельно подпространству  $\mathcal{L}_2$ , где:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1 : x &= y \\ \mathcal{L}_2 : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + y + 4z = 0 \end{cases}\end{aligned}$$

Проведите исследование по плану.

Б) Дано множество функций  $\mathcal{L}$  и отображение  $\mathcal{A} : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ :

$\mathcal{L}$  - множество функций вида:

$$f(x) = a * \cos(x) + b * \sin(x)$$

, где  $a, b \in \mathbb{R}$ .

$$\mathcal{A}(f(x)) = \int_0^{\pi} K(x; y) f(y) dy$$

, где  $K(x; y) = \sin(x + y)$ .

Проведите исследование по плану.

## 1.1. Пункт А).

Изобразим на рисунке ?? подпространства:  $\mathcal{L}_1$  (как плоскость в 3-хмерном пространстве) и  $\mathcal{L}_2$  (как прямую в 3-хмерном пространстве).

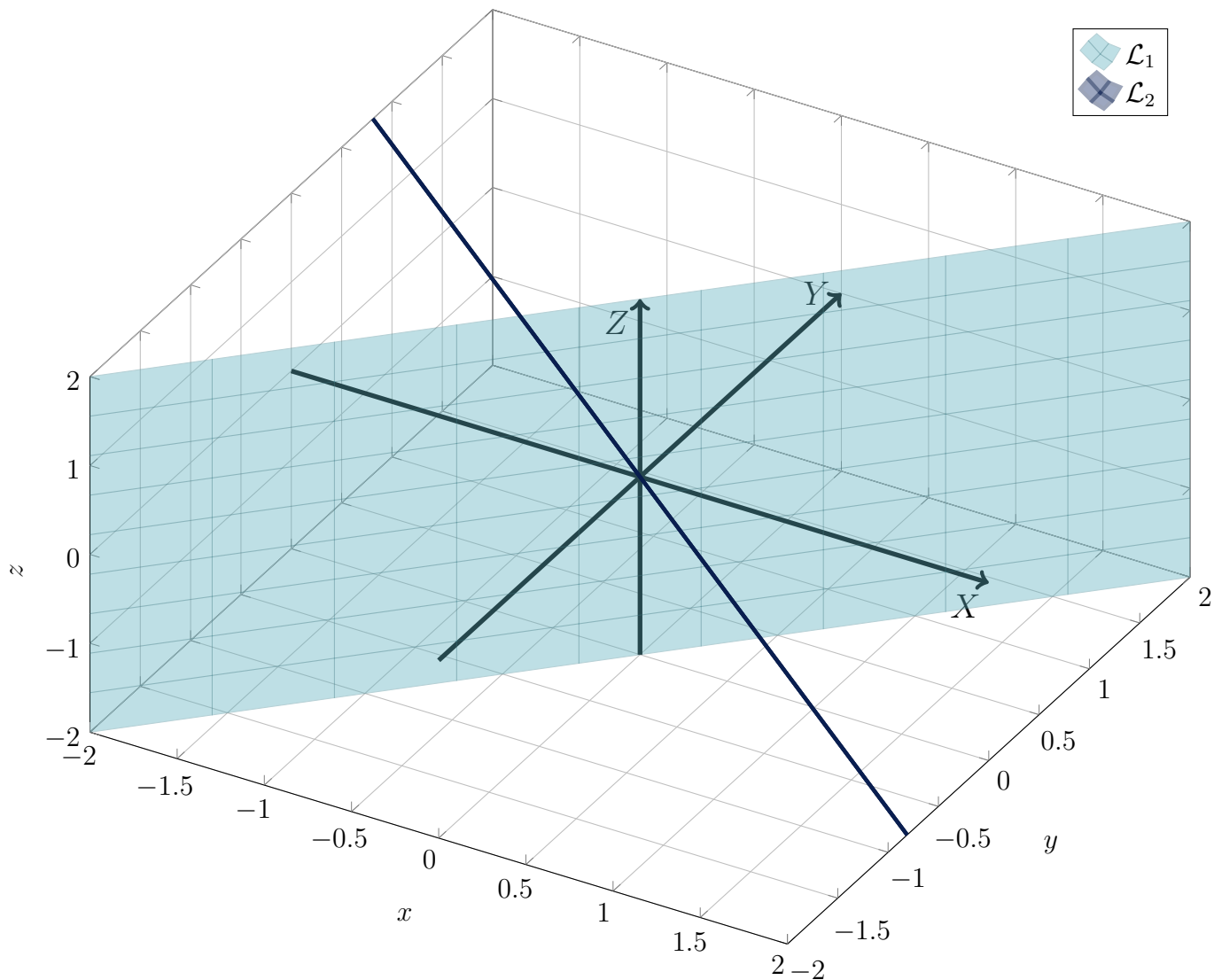


Рис. 1: Подпространства  $\mathcal{L}_1$  и  $\mathcal{L}_2$ .

Методами векторной алгебры составим формулу для линейного оператора  $\mathcal{A} (P_{\mathcal{L}_1}^{\parallel \mathcal{L}_2})$ . Для этого найдём вектор нормали  $\vec{n}$  к плоскости  $\mathcal{L}_1$ , а также вектор  $\vec{a}$  из подпространства  $\mathcal{L}_2$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 : x = y &\Rightarrow 1 * x - 1 * y + 0 * z = 0 \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \mathcal{L}_2 &= \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + y + 4z = 0 \end{cases} \Rightarrow \\ \square z = 1 &\Rightarrow \begin{cases} z = 1 \\ x + y = -1 \\ 2x + y = -4 \end{cases} \Rightarrow \\ \vec{a} &= \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

При этом заранее нормируем вектор нормали  $\vec{n}$ :

$$\vec{n}^0 = \frac{1}{(\vec{n}; \vec{n})} * \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} * \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Пусть  $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$  - произвольный вектор, найдём  $\vec{x}_1 \in \mathcal{L}_1$  - вектор  $\vec{x}$ , спроектированный на  $\mathcal{L}_1$  параллельно  $\mathcal{L}_2$ .

Так как проекция параллельная, то из  $\vec{x}$  необходимо удалить составляющие из ортогонального дополнения  $\mathcal{L}_1^\perp$  при помощи вычитания некоторого вектора из  $\mathcal{L}_2$ . Следовательно:

$$\begin{aligned}\vec{x}_1 &= \vec{x} - \vec{a} * \frac{(\vec{x}; \vec{n}^0)}{(\vec{a}; \vec{n}^0)} \\ &= \vec{x} + \vec{a} * \frac{\sqrt{2} * (\vec{x}; \vec{n}^0)}{5}\end{aligned}$$

Таким образом, в стандартном базисе:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}x &= x + a * \frac{\sqrt{2} * (x; n^0)}{5} \\ a : B &= \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ n^0 : N^0 &= \frac{1}{\sqrt{2}} * \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Далее в стандартном ОРТН базисе  $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$  пространства  $\mathbb{R}^3$  составим матрицу  $A$  линейного оператора  $\mathcal{A}$ . Для этого подействуем на каждый базисный вектор линейным оператором и запишем вектор-столбцы полученных векторов в виде матрицы:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}\vec{i} &= \vec{i} + \vec{a} * \frac{\sqrt{2} * (\vec{i}; \vec{n}^0)}{5} = \frac{1}{5} * \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \mathcal{A}\vec{j} &= \vec{j} + \vec{a} * \frac{\sqrt{2} * (\vec{j}; \vec{n}^0)}{5} = \frac{1}{5} * \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \mathcal{A}\vec{k} &= \vec{k} + \vec{a} * \frac{\sqrt{2} * (\vec{k}; \vec{n}^0)}{5} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ A &= \frac{1}{5} * \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{1}$$

Диагонализуем полученную матрицу (??) при помощи методов спектрального анализа.

Найдём собственные числа  $\lambda_i$  линейного оператора  $\mathcal{A}$  (т.е его спектр) как корни характеристического многочлена:

$$\begin{aligned}\mathcal{X} = |A - \lambda * I| &= \begin{vmatrix} \frac{2}{5} - \lambda & \frac{3}{5} & 0 \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} - \lambda & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{-1}{5} & \frac{5}{5} - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (1 - \lambda) * \left( \left( \frac{2}{5} - \lambda \right) * \left( \frac{3}{5} - \lambda \right) - \frac{3}{5} * \frac{2}{5} \right) \\ &= (1 - \lambda)(\lambda^2 - \lambda) = -\lambda * (1 - \lambda)^2 \Rightarrow\end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}-\lambda * (1 - \lambda)^2 &= 0 \\ \lambda_1 &= 0 \text{ кр. } 1, \lambda_2 = 1 \text{ кр. } 2 \\ \sigma &= \{0, 1\}\end{aligned}$$

Далее найдём собственные векторы, соответствующие собственным числам  $\lambda$  из спектра:

$$\begin{aligned}
\lambda = 0 : (A - 0 * I)X = 0 &\Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 0 & 0 \\ -5 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \\
&\sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \square z = c \Rightarrow X = c * \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\lambda = 1 : (A - 1 * I)X = 0 &\Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} -3 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} -3 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \\
&\sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \square y = c_1, z = c_2 \Rightarrow X = c_1 * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 * \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Таким образом, получаем базис из собственных векторов:

$$\lambda = 0 : X_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda = 1 : X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

, образующий матрицу перехода  $T$ , необходимую для преобразования подобия:

$$\begin{aligned}
T &= \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
A' &= T^{-1}AT \\
T^{-1} &= \frac{1}{\det T} * T_{\text{союзн.}}^T = -\frac{1}{5} * \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & -5 \end{pmatrix} \\
T^{-1} * A * T &= \frac{-1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & -5 \end{pmatrix} * \frac{1}{5} * \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{5} * \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Итак, в базисе (??) матрица линейного оператора  $\mathcal{A}$  диагональна и равна:

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим собственные векторы их полученного базиса (??) на графике подпространств  $\mathcal{L}_1$  и  $\mathcal{L}_2$ :

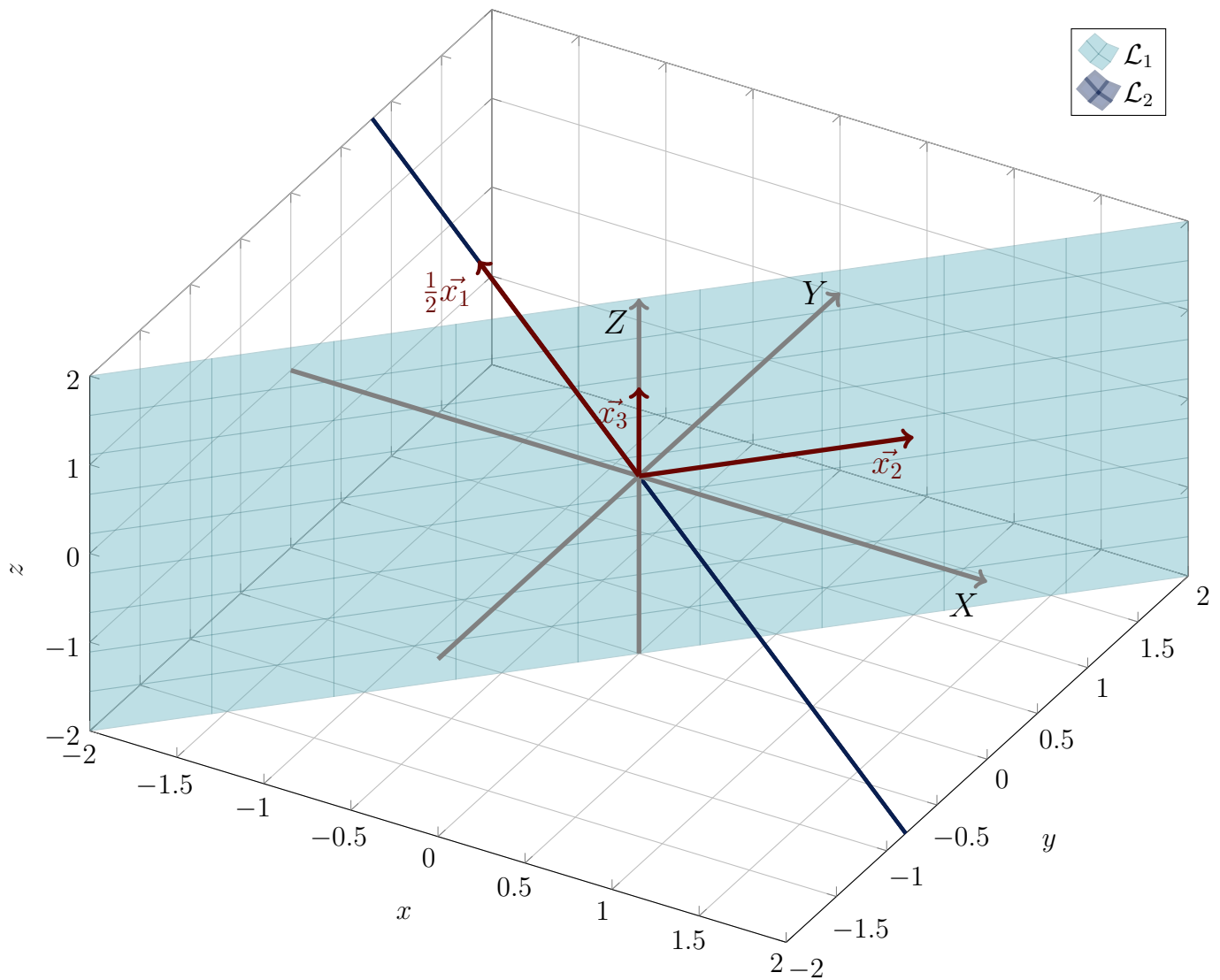


Рис. 2: Векторы собственного базиса  $x_i$  и подпространства  $\mathcal{L}_1$  и  $\mathcal{L}_2$ .

Подробнее рассмотрим каждый из базисных векторов:

$\lambda = 0$ ;  $\vec{x}_1: X_1$  - на рис. ?? легко видеть, что этот вектор полностью лежит в подпространстве  $\mathcal{L}_2$  (он лежит на синей прямой, изображающей подпространство  $\mathcal{L}_2$ ). Так как линейный оператор  $\mathcal{A}$  проецирует векторы параллельно подпространству  $\mathcal{L}_2$ , то этот вектор проецируется в  $\vec{0}$ , что подтверждается и формулой  $\mathcal{A}\vec{x}_1 = \lambda\vec{x}_1 = 0 * \vec{x}_1 = \vec{0}$ .

$\lambda = 1$ ;  $\vec{x}_2: X_2$  - на рис. ?? видно, что вектор  $\vec{x}_2$  лежит в подпространстве  $\mathcal{L}_1$  (на сиреневой плоскости  $\mathcal{L}_1$ ). Так как линейный оператор  $\mathcal{A}$  проецирует векторы на подпространство  $\mathcal{L}_1$ , то при действии им на этот вектор, он не изменяется. Это подтверждается и формулой  $\mathcal{A}\vec{x}_2 = \lambda\vec{x}_2 = 1 * \vec{x}_2 = \vec{x}_2$ .

$\lambda = 1$ ;  $\vec{x}_3: X_3$  - аналогично вектору  $\vec{x}_2$  этот вектор также полностью лежит в подпространстве  $\mathcal{L}_1$ , а значит - не изменяется под действием оператора  $\mathcal{A}$ .  $\mathcal{A}\vec{x}_3 = \lambda\vec{x}_3 = 1 * \vec{x}_3 = \vec{x}_3$ .

## 1.2. Пункт Б).

Проверим аксиомы линейного пространства для  $\mathcal{L}$  над полем  $\mathbb{R}$ :

$$\forall u, v, w \in \mathcal{L}; \forall a, b, \lambda, \delta \in \mathbb{R}$$

$$1) u + v = a_u * \cos(x) + b_u * \sin(x) + a_v * \cos(x) + b_v * \sin(x)$$

$$= (a_u + a_v) * \cos(x) + (b_u + b_v) * \sin(x) \in \mathcal{L}$$

$$2) u + v = a_u * \cos(x) + b_u * \sin(x) + a_v * \cos(x) + b_v * \sin(x)$$

$$= a_v * \cos(x) + b_v * \sin(x) + a_u * \cos(x) + b_u * \sin(x) = v + u$$

$$3) (u + v) + w = (a_u * \cos(x) + b_u * \sin(x) + a_v * \cos(x) + b_v * \sin(x)) + a_w * \cos(x) + b_w * \sin(x)$$

$$= a_u * \cos(x) + b_u * \sin(x) + (a_v * \cos(x) + b_v * \sin(x) + a_w * \cos(x) + b_w * \sin(x))$$

$$= v + (u + w)$$

$$4) \exists \mathcal{O} = 0 * \cos(x) + 0 * \sin(x) \in \mathcal{L} : \mathcal{O} + u = u$$

$$5) \lambda * x = \lambda(a * \cos(x) + b * \sin(x)) = \lambda * a * \cos(x) + \lambda * b * \sin(x) \in \mathcal{L}$$

$$6) \lambda(u + v) = \lambda * a_u * \cos(x) + \lambda * b_u * \sin(x) + \lambda * a_v * \cos(x) + \lambda * b_v * \sin(x) = \lambda * u + \lambda * v$$

$$7) (\lambda + \delta)u = \lambda * a_u * \cos(x) + \lambda * b_u * \sin(x) + \delta * a_u * \cos(x) + \delta * b_u * \sin(x) = \lambda * u + \delta * u$$

$$8) \exists 1 : 1 * u = u$$

Аксиомы выполняются, следовательно  $\mathcal{L}$  - линейное пространство над полем  $\mathbb{R}$ .

Выберим в качестве базисных векторов следующие:

$$x_1 = 1 * \cos(x) + 0 * \sin(x) = \cos(x)$$

$$x_2 = 0 * \cos(x) + 1 * \sin(x) = \sin(x)$$

При этом очевидно, что выбранный набор - базис, т.к.  $\forall u \in \mathcal{L}, u = a * \cos(x) + b * \sin(x) \stackrel{!}{=} a * x_1 + b * x_2$ . Далее удостоверимся, что оператор  $\mathcal{A}$  - линейный, проверив аксиомы:

$$\forall u, v \in \mathcal{L}; \forall a, b, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$1) \mathcal{A}(u + v) = \int_0^\pi K(x; y)(u + v)dy = \int_0^\pi K(x; y) * u + K(x; y) * v dy = \int_0^\pi K(x; y)u dy + \int_0^\pi K(x; y)v dy$$

$$= \mathcal{A}(u) + \mathcal{A}(v)$$

$$2) \mathcal{A}(\lambda u) = \int_0^\pi K(x; y) * \lambda * u dy = \lambda * \int_0^\pi K(x; y) * u dy = \lambda \mathcal{A}(u)$$

Следовательно,  $\mathcal{A}$  - линейный оператор. Найдём его матрицу в выбранном базисе (аналогично



тому, как это было сделано в п. А) ):

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(x_1) &= \int_0^\pi \sin(x+y) \cos(y) dy = \int_0^\pi (\sin(x) * \cos(y) + \sin(y) * \cos(x)) * \cos(y) dy \\
&= \int_0^\pi \sin(x) * \cos^2(y) dy + \int_0^\pi \sin(y) * \cos(y) * \cos(x) dy \\
&= \sin(x) * \frac{1}{4} * \int_0^\pi 1 + \cos(2y) d2y + \cos(x) * \int_0^\pi \sin(y) d \sin(y) \\
&= \sin(x) * \frac{1}{4} * (2y + \sin(2y)) \Big|_0^\pi + \cos(x) * \frac{\sin^2(y)}{2} \Big|_0^\pi \\
&= \frac{\pi}{2} * \sin(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} \\
\mathcal{A}(x_2) &= \int_0^\pi \sin(x+y) \sin(y) dy = \int_0^\pi (\sin(x) * \cos(y) + \sin(y) * \cos(x)) * \sin(y) dy \\
&= \int_0^\pi \sin(x) * \cos(y) * \sin(y) dy + \int_0^\pi \sin^2(y) * \cos(x) dy \\
&= \cos(x) * \frac{1}{4} * \int_0^\pi 1 - \cos(2y) d2y + \sin(x) * \int_0^\pi \sin(y) d \sin(y) \\
&= \cos(x) * \frac{1}{4} * (2y - \sin(2y)) \Big|_0^\pi + \sin(x) * \frac{\sin^2(y)}{2} \Big|_0^\pi \\
&= \frac{\pi}{2} * \cos(x) = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \\
A &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Заметим, что у матрицы  $A^T = A$  обе строки - ЛНЗ, следовательно  $\dim(\text{Im } \mathcal{A}) = 2$ , а **по Теореме о ядре и образе, т.к.**  $\dim(\text{Im } \mathcal{A}) + \dim(\text{Ker } \mathcal{A}) = \dim(\mathcal{L}) = 2$ , **то**  $\dim(\text{Ker } \mathcal{A}) = 0$ .

Далее, диагонализуем матрицу  $\mathcal{A}$  в выбранном базисе методом спектрального анализа.

Найдём собственные числа  $\lambda_i$  линейного оператора  $\mathcal{L}$  (т.е его спектр) как корни характеристического многочлена:

$$\begin{aligned}
\mathcal{X} &= |A - \lambda * I| = \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} & -\lambda \end{vmatrix} \\
&= \lambda^2 - \frac{\pi^2}{4} \\
\hline
\lambda^2 - \frac{\pi^2}{4} &= 0 \\
\lambda_1 &= \frac{\pi}{2} \text{ кр. } 1, \lambda_2 = -\frac{\pi}{2} \text{ кр. } 1 \\
\sigma &= \left\{ \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} \right\}
\end{aligned} \tag{4}$$

Далее найдём собственные векторы, соответствующие собственным числам  $\lambda$  из спектра:

$$\lambda = \frac{\pi}{2} : (A - \frac{\pi}{2} * I)X = 0 \Rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} -\frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} & 0 \\ \frac{\pi}{2} & -\frac{\pi}{2} & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|c} \frac{\pi}{2} & -\frac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \square y = c \Rightarrow X = c * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$


---

$$\lambda = -\frac{\pi}{2} : (A + \frac{\pi}{2} * I)X = 0 \Rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} & 0 \\ \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|c} \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \square y = c \Rightarrow X = c * \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Таким образом, получаем базис из собственных векторов:

$$\lambda = \frac{\pi}{2} : X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda = -\frac{\pi}{2} : X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

, образующий матрицу перехода  $T$ , необходимую для преобразования подобия:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A' = T^{-1}AT$$

$$T^{-1} = \frac{1}{\det T} * T_{\text{союзн.}}^T = \frac{1}{2} * \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T^{-1} * A * T = \frac{1}{2} * \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} * \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} & -\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$$

Итак, в базисе (??) матрица линейного оператора  $\mathcal{A}$  диагональна и равна:

$$A' = \frac{1}{2} * \begin{pmatrix} \pi & 0 \\ 0 & -\pi \end{pmatrix}$$

Сравним трудоёмкость прямого вычисления образа и вычисления через умножение на матрицу. Пусть функция  $f(t) = 2*\cos(t) - 3*\sin(t)$  с соответствующим вектор-столбцом в исходном базисе:

$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ . Найдём её образ 2-мя способами:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(f(t)) &= A * \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{-3\pi}{2} \\ \frac{2\pi}{\pi} \end{pmatrix} = \frac{-3\pi}{2} * \cos(x) + \pi * \sin(x) \end{aligned}$$


---

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(f(t)) &= \int_0^\pi \sin(x+y) * (2 * \cos(y) - 3 * \sin(y)) dy \\ &= \int_0^\pi (\sin(x) * \cos(y) + \sin(y) * \cos(x)) * (2 * \cos(y) - 3 * \sin(y)) dy \\ &= 2 * \sin(x) * \int_0^\pi \cos^2(y) dy + 2 * \cos(x) * \int_0^\pi \cos(y) * \sin(y) dy \\ &\quad - 3 * \sin(x) * \int_0^\pi \cos(y) * \sin(y) dy - 3 * \cos(x) * \int_0^\pi \sin^2(y) dy = \\ &= 2 * \sin(x) * \frac{1}{4} * (2y + \sin(2y)) \Big|_0^\pi + 2 * \cos(x) * \frac{\sin^2(y)}{2} \Big|_0^\pi \\ &\quad - 3 * \sin(x) * \frac{\sin^2(y)}{2} \Big|_0^\pi - 3 * \cos(x) * \frac{1}{4} * (2y - \sin(2y)) \Big|_0^\pi \\ &= \frac{-3\pi}{2} * \cos(x) + \pi * \sin(x) \end{aligned}$$

Оба способа вычисления приводят к одному результату, хотя, конечно, очевидно, **что использование матрицы линейного оператора требует значительно меньших усилий**, чем прямое вычисление.

## 2. 2-е Задание. Евклидовы пространства функций.

**Условие.**

А) Дано пространство многочленов с вещественными коэффициентами, степени не выше третьей, определённых на отрезке  $[-1; 1]$ :

$$P_3(t) = 2t^3 + 3t + 1$$

Проведите исследование по плану.

Б) Дано пространство  $\mathcal{R}$  функций, непрерывных (или имеющих конечный разрыв) на отрезке  $[-\pi; \pi]$ , со скалярным произведением  $(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt$  и длиной вектора  $\|f\| = \sqrt{(f, f)}$ . Тригонометрические многочлены  $P_n(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(t) + b_1 \sin(t) + \dots + a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$ , где  $a_k, b_k$  - вещественные коэффициенты, образуют подпространство  $P$  пространства  $\mathcal{R}$ .

Требуется найти многочлен  $P_n(t)$  в пространстве  $P$ , минимально отличающийся от функции  $f(t)$  - вектора пространства  $\mathcal{R}$ :

$$f(t) = 4t \tag{6}$$

*Указание. Требуется решить задачу о перпендикуляре: расстояние от  $f(t)$  до  $P_n(t)$  будет наименьшим, если это длина перпендикуляра  $h = f(t) - P_n(t)$ , опущенного из точки  $f(t)$  на подпространство  $P$ . В этом случае,  $P_n(t)$  будет ортогональной проекцией вектора  $f(t)$  на  $P$ . Таким образом, требуется найти координаты вектора  $P_n(t)$  (коэффициенты многочлена) в заданном базисе  $P$ . Если выбран ортонормированный базис, то эти координаты суть проекции вектора  $f(t)$  на векторы данного базиса.*

## 2.1. Пункт А)

Пусть система векторов  $B = \{1, t, t^2, t^3\}$  - базис данного пространства. Действительно, общая формула многочлена степени не выше третьей с вещественными коэффициентами:

$$P_3(t) = a_0 * 1 + a_1 * t + a_2 * t^2 + a_3 * t^3, a_i \in \mathbb{R}$$

То есть любой такой многочлен можно однозначно представить в виде линейной комбинации выбранных базисных векторов.

В условиях РГР прямо не указывается, как определено скалярное произведение, но, исходя из того, что в плане требуется ортогонализировать выбранный базис (со стандартным скалярным произведением он уже ортогонален), а также из указания на то, что многочлены определены на промежутке  $[-1, 1]$ , можно предположить, что оно определяется так:

$$(f(t); p(t)) = \int_{-1}^1 f(t)p(t)dt$$

Ортогонализуем выбранный базис методом Грама-Шмидта:

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 = 1 \\ x'_2 &= x_2 + a_2^1 * x_1 = t + a_2^1 * 1 \\ x'_3 &= x_3 + a_3^1 * x_1 + a_3^2 * x_2 = t^2 + a_3^1 * 1 + a_3^2 * t \\ x'_4 &= x_4 + a_4^1 * x_1 + a_4^2 * x_2 + a_4^3 * x_3 = a_4^1 * 1 + a_4^2 * t + a_4^3 * t^2 \end{aligned}$$

$$a_2 : (x'_2; x_1) = 0 \Rightarrow a_2^1 = 0$$

$$a_3 : \begin{cases} (x'_3; x_1) = 0 \\ (x'_3; x_2) = 0 \end{cases} \Rightarrow a_3^1 = -\frac{1}{3}, a_3^2 = 0$$

$$a_4 : \begin{cases} (x'_4; x_1) = 0 \\ (x'_4; x_2) = 0 \\ (x'_4; x_3) = 0 \end{cases} \Rightarrow a_4^1 = 0, a_4^2 = -\frac{3}{5}, a_4^3 = 0$$

$$\begin{aligned} x'_1 &= 1 \\ x'_2 &= t \\ x'_3 &= t^2 - \frac{1}{3} \\ x'_4 &= t^3 - \frac{3}{5}t \end{aligned}$$

Таким образом, получаем ортогональный базис  $B_H$ :

$$B_H = \{1, t, t^2 - \frac{1}{3}, t^3 - \frac{3}{5}t\}$$

Выпишем первые четыре ( $n = 0, 1, 2, 3$ ) многочлена Лежандра:

$$\begin{aligned} L_n(t) &= \frac{1}{2^n n!} * ((t^2 - 1)^n)^{(n)} \\ L_0(t) &= 1 \\ L_1(t) &= t \\ L_2(t) &= \frac{1}{2}(3t^2 - 1) \\ L_3(t) &= \frac{1}{2}(5t^3 - 3t) \end{aligned}$$

Найдём их координаты в найденном ортогональном базисе  $B_H$ , решив системы уравнений:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 1 * x_1 + 0 * x_2 - \frac{1}{3} * x_3 + 0 * x_4 = a_0 \\ 0 * x_1 + 1 * x_2 + 0 * x_3 - \frac{3}{5} * x_4 = a_1 \\ 0 * x_1 + 0 * x_2 + 1 * x_3 + 0 * x_4 = a_2 \\ 0 * x_1 + 0 * x_2 + 0 * x_3 + 1 * x_4 = a_3 \end{cases} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{vmatrix} \Rightarrow \\ L_0(t) : \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} &\Rightarrow L_0(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ L_1(t) : \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} &\Rightarrow L_1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ L_2(t) : \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{3}{2} \\ 0 \end{vmatrix} &\Rightarrow L_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \\ L_3(t) : \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{5}{2} \end{vmatrix} &\Rightarrow L_3(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Заметим, что у полученных векторов лишь одна координата ненулевая, и при этом, у всех полученных векторов - эта координата разная. Так как векторы получены в ортогональном базисе, то, очевидно, что **они так же ортогональны** (каждый  $L_i$  - фактически удлинённый базисный вектор  $i$ , а базисные векторы - ортогональны).

Аналогично найдём координаты многочлена  $P_3(t) = 2t^3 + 3t + 1$ , но уже в новом базисе  $\mathcal{L} = \{L_0, L_1, L_2, L_3\}$ :

$$\begin{aligned} P_3(t) : \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{vmatrix} &\Rightarrow P_3(t) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{9}{2} \\ 0 \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} \\ \Rightarrow P_3(t) &= \frac{3}{2} * L_0 + \frac{9}{2} * L_1 + 0 * L_2 + \frac{4}{5} * L_3 \end{aligned}$$

## 2.2. Пункт Б)

Проверим, является ли система функций  $B = \{1, \cos(t), \sin(t), \dots, \cos(nt), \sin(nt)\}$  ортогональным базисом подпространства  $P$ .

Так как любой  $P_n(t) \in P$  равен:

$$P_n(t) = \frac{a_0}{2} * 1 + a_1 \cos(t) + b_1 \sin(t) + \dots + a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$$

, следовательно, любой элемент  $P$  можно единственно представить как линейную комбинацию системы  $B$ . То есть  $B$  - базис подпространства  $P$ .

Проверим ортогональность выбранного базиса (т.е рассмотрим попарные скалярные произведения элементов  $B$ ):

$$(1; \sin(nt)) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt) dt = -\frac{1}{n} * \cos(nt) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$(1; \cos(nx)) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) dt = \frac{1}{n} * \sin(nt) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$(\sin(at); \sin(bt)) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(at) * \sin(bt) dt = \left( \frac{1}{2(a-b)} * \sin((a-b)x) - \frac{1}{2(a+b)} * \sin((a+b)x) \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$(\cos(at); \cos(bt)) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(at) * \cos(bt) dt = \left( \frac{1}{2(a-b)} * \sin((a-b)x) + \frac{1}{2(a+b)} * \sin((a+b)x) \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$(\cos(at); \sin(bt)) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(at) * \sin(bt) dt = \left( -\frac{1}{2(a-b)} * \sin((a-b)x) - \frac{1}{2(a+b)} * \sin((a+b)x) \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

Нормируем рассмотренную систему:

$$||1|| = \sqrt{(1; 1)} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} 1 dt} = \sqrt{(\pi + \pi)} = \sqrt{2\pi}$$

$$\begin{aligned} ||\cos(nt)|| &= \sqrt{(\cos(nt); \cos(nt))} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nt) dt} = \sqrt{\frac{1}{4n} * \int_{-\pi}^{\pi} 1 + \cos(2nt) d2nt} \\ &= \sqrt{\frac{1}{4n} * (2t + \sin(2nt) - 2t - \sin(2nt)) \Big|_{-\pi}^{\pi}} = \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ||\sin(nt)|| &= \sqrt{(\sin(nt); \sin(nt))} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(nt) dt} = \sqrt{\frac{1}{4n} * \int_{-\pi}^{\pi} 1 - \cos(2nt) d2nt} \\ &= \sqrt{\frac{1}{4n} * (2t - \sin(2nt) - 2t + \sin(2nt)) \Big|_{-\pi}^{\pi}} = \sqrt{\pi} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$B^0 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(t)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(t)}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos(nt)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(nt)}{\sqrt{\pi}} \right\}$$

Далее, найдём проекции исходного вектора  $f(t)$  (??) на векторы полученной ОРТН системы (при этом заметим, что ортогональная проекция вектора  $x$  на нормированный вектор  $e_i$  равна

$$\mathcal{P}_{e_i}(x) = (x; e_j) * e_j):$$

$$\mathcal{P}_{1^0}(4t) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * 4t dt * \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \frac{4}{2\pi} * \frac{t^2}{2} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 * 1$$

$$\mathcal{P}_{\cos^0(nt)}(4t) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(nt)}{\sqrt{\pi}} * 4t dt * \frac{\cos(nt)}{\sqrt{\pi}} =$$

$$|\text{Т.к. } \cos(nt) - \text{чёт.}, 4t - \text{нечёт.} \rightarrow \cos(nt) * 4t - \text{нечёт. и промеж. симметр.} \Rightarrow \text{по св-у инт.}|$$

$$= 0 * \frac{\cos(nt)}{\sqrt{\pi}}$$

$$\mathcal{P}_{\sin^0(nt)}(4t) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(nt)}{\sqrt{\pi}} * 4t dt * \frac{\sin(nt)}{\sqrt{\pi}} =$$

$$|\text{Т.к. } \sin(nt) - \text{нечёт.}, 4t - \text{нечёт.} \rightarrow \sin(nt) * 4t - \text{чёт. и промеж. симметр.} \Rightarrow \text{по св-у инт.}|$$

$$= \frac{2 * 4}{\pi} * \int_0^{\pi} \sin(nt) * t dt * \sin(nt) = |\text{По частям}|$$

$$= -\frac{8}{n\pi} * \left( \cos(nt) * t \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos(nt) dnt \right) * \sin(nt)$$

$$= -\frac{8}{n\pi} * \left( \cos(nt) * t - \frac{1}{n} * \sin(nt) \right) \Big|_0^{\pi} * \sin(nt)$$

$$= -\frac{8}{n} * \cos(n\pi) * \sin(nt)$$

Таким образом, искомый многочлен  $P_n(t)$  равен:

$$P_n(t) = 0 * 1 + \sum_{j=1}^n 0 * \cos(jt) - \frac{8}{j} * \cos(j\pi) * \sin(jt)$$

$$= \sum_{i=1}^n -\frac{8}{i} * \cos(i * \pi) * \sin(i * t)$$

Найденный  $P_n$  - тригонометрический многочлен Фурье для функции  $f(t) = 4t$ . Сравним графики  $P_n$  при  $n = 5, 10, 20$  и  $f(t)$ :

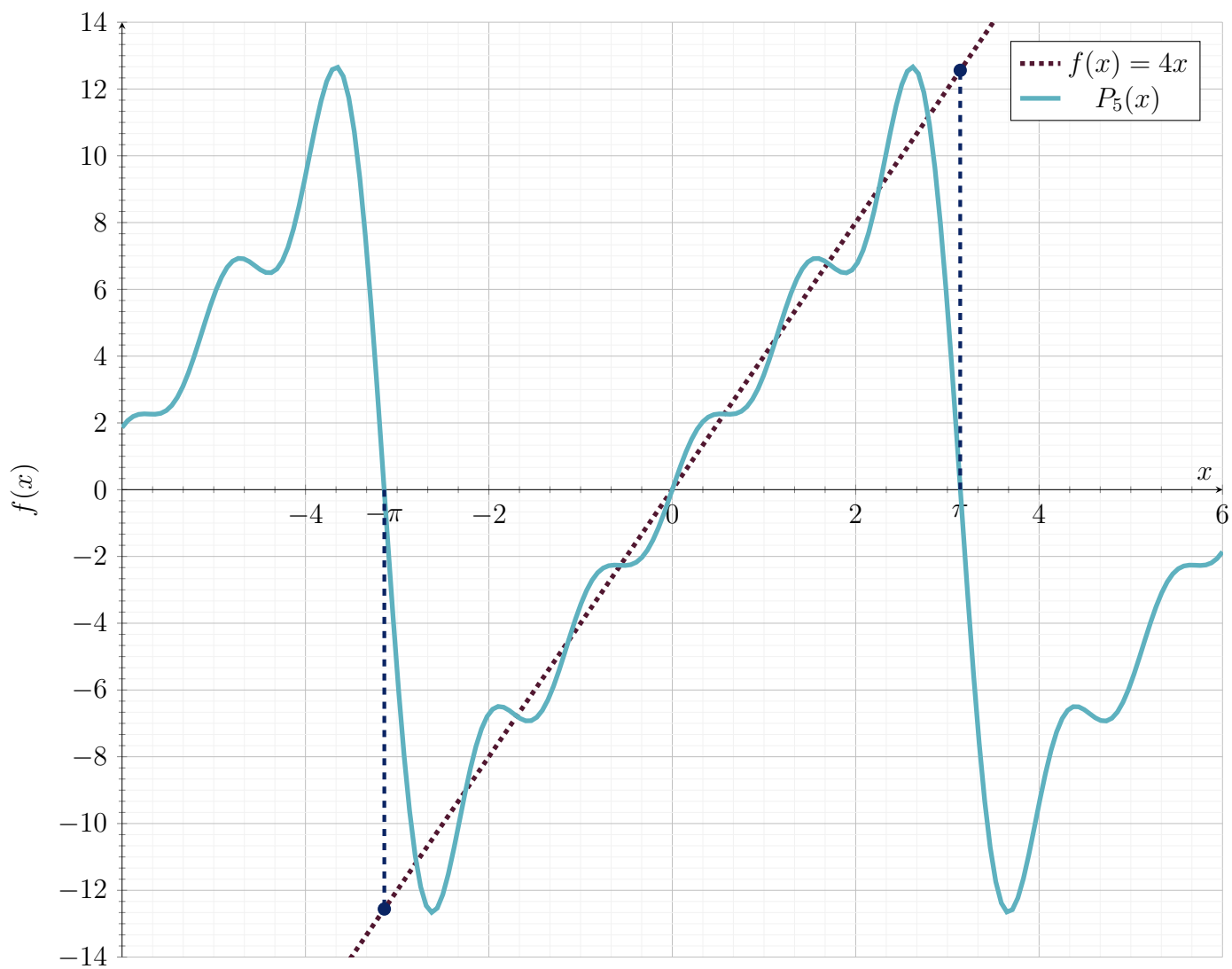


Рис. 3: Графики исходной функции  $f(x)$  и тригонометрического многочлена Фурье  $P_5(x)$  для неё при  $n = 5$ .



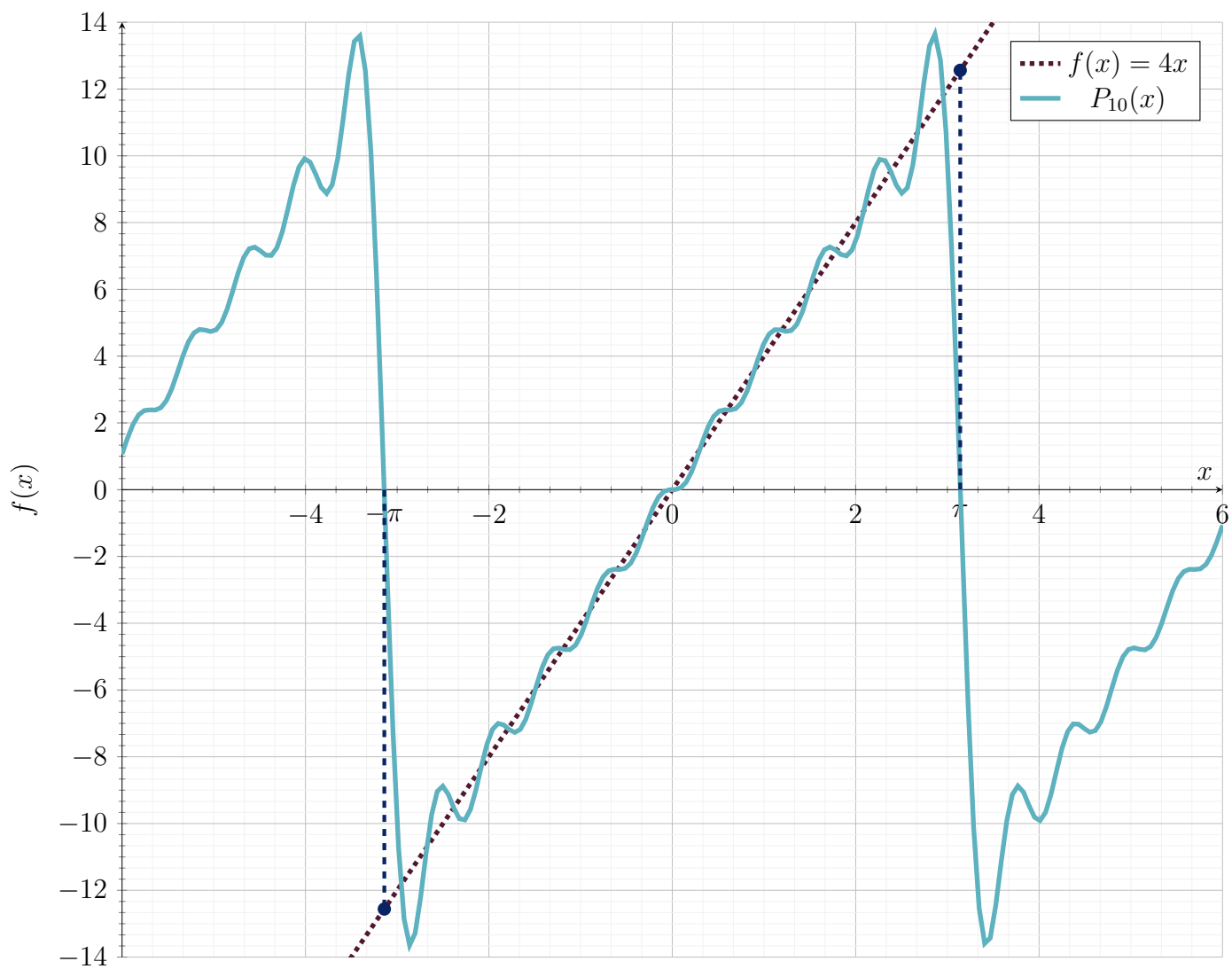


Рис. 4: Графики исходной функции  $f(x)$  и тригонометрического многочлена Фурье  $P_{10}(x)$  для неё при  $n = 10$ .

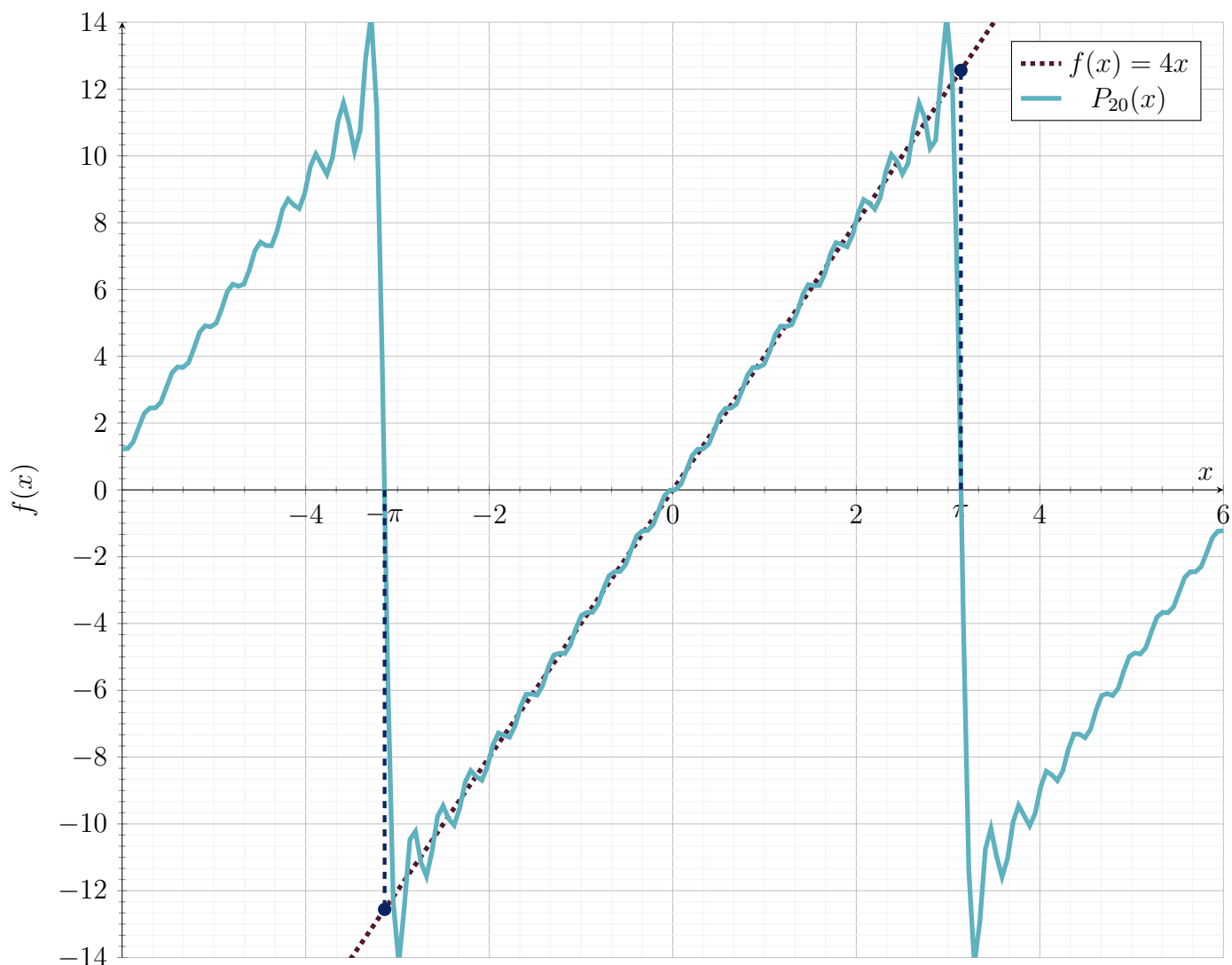


Рис. 5: Графики исходной функции  $f(x)$  и тригонометрического многочлена Фурье  $P_{20}(x)$  для неё при  $n = 20$ .

Легко заметить, что при увеличении порядка многочлена  $P_n(t)$  (т. е. с ростом  $n$ ), его график на промежутке  $[-\pi; \pi]$  приближается к графику функции  $f(t)$  (становится более похожим на него), т.е. уменьшается модуль разности этих функций и расстояние между соответствующими им векторами.

### 3. 3-е Задание. Приведение уравнения поверхности 2-го порядка к каноническому виду.

**Условие.** Дано уравнение поверхности 2-го порядка:

$$2x^2 - 3y^2 + 2z^2 + 2xz - 12 = 0$$

Привести исходное уравнение к каноническому виду при помощи методов Лагранжа и ортогонального преобразования. Изобразить график уравнения в исходной системе координат. Какую поверхность оно задаёт? Указать на графике оси исходной и приведённой систем координат.

### 3.1. Метод ортогонального преобразования

Приведём квадратичную форму  $2x^2 - 3y^2 + 2z^2 + 2xz$  из исходного уравнения к каноническому виду с помощью ортогонального преобразования.

Запишем матрицу формы:

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Так как считаем, что скалярное произведение определено стандартно, т.е. матрица Грама - единичная, то матрица присоединённого к форме линейного оператора  $A = Q$ :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Найдём матрицу для ортогонального преобразования как матрицу перехода в ортонормированный собственный базис линейного оператора  $A$ . Множество собственных чисел  $\lambda$  (т.е. спектр л.о.) является множеством корней характеристического многочлена:

$$\begin{aligned} \mathcal{X} = |A - \lambda * I| &= \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 0 & 1 \\ 0 & -3 - \lambda & 0 \\ 1 & 0 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = \\ &= -(2 - \lambda)^2 * (3 + \lambda) + (3 + \lambda) \\ &= -(\lambda + 3) * (\lambda - 1) * (\lambda - 3) \end{aligned}$$

---

$$(\lambda + 3) * (\lambda - 1) * (\lambda - 3) = 0$$

$$\lambda_1 = 1 \text{ кр. 1}, \lambda_2 = 3 \text{ кр. 1}, \lambda_3 = -3 \text{ кр. 1}$$

Найдём собственные векторы:

$$\begin{aligned} \lambda = 1 : (A - 1 * I)X = 0 &\Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ \Rightarrow \square z = c &\Rightarrow X = c * \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

---

$$\begin{aligned} \lambda = 3 : (A - 3 * I)X = 0 &\Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ \Rightarrow \square z = c &\Rightarrow X = c * \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

---

$$\begin{aligned} \lambda = -3 : (A + 3 * I)X = 0 &\Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \end{array} \right) \\ \Rightarrow \square y = c &\Rightarrow X = c * \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Таким образом, получаем базис из собственных векторов:

$$\lambda = 1 : X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda = 3 : X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda = -3 : X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

Заметим, что полученные векторы - ортогональны. Нормализуем их:

$$X'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, X'_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, X'_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Таким образом, матрица перехода  $T$  равна:

$$T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

При этом обратная матрица  $T^{-1}$  равна исходной матрице  $T$  в силу её ортогональности.

Диагонализуем матрицу формы ортогональным преобразованием:

$$\begin{aligned} Q' &= T^T * Q * T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Получим координаты векторов, параллельных осям приведённой системы координат (в которой исходное уравнение - каноническое):

$$\begin{aligned} X &= TY \\ Y &= T^{-1} * X \\ \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &\left\{ \begin{aligned} x' &= -\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}z = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ y' &= \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}z = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ z' &= y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Итак, запишем исходное уравнение в каноническом виде:

$$\begin{aligned} 2x^2 - 3y^2 + 2z^2 + 2xz - 12 &= 0 \\ 1 * \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}z\right)^2 + 3 * \left(\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}z\right)^2 - 3 * y^2 &= 12 \\ (x')^2 + 3(y')^2 - 3(z')^2 &= 12 \\ \frac{(x')^2}{(\sqrt{12})^2} + \frac{(y')^2}{2^2} - \frac{(z')^2}{2^2} &= 1 \end{aligned}$$

### 3.2. Метод Лагранжа

Аналогично приведём квадратичную форму  $2x^2 - 3y^2 + 2z^2 + 2xz$  из исходного уравнения к каноническому виду с помощью метода Лагранжа.

$$\begin{aligned} & 2x^2 - 3y^2 + 2z^2 + 2xz \\ &= (2x^2 + 2xz + \frac{1}{2}z^2) - \frac{1}{2}z^2 + 2z^2 - 3y^2 \\ &= (x + \frac{1}{2}z)^2 - 3y^2 + \frac{3}{2}z^2 \\ &= \left| x'' = \sqrt{2}x + \frac{1}{\sqrt{2}}z, y'' = y, z'' = z \right| \\ &= 2(x'')^2 - 3(y'')^2 + \frac{3}{2}(z'')^2 \end{aligned}$$

Тогда исходное уравнение в каноническом виде равно:

$$\begin{aligned} 2(x'')^2 - 3(y'')^2 + \frac{3}{2}(z'')^2 &= 12 \\ \frac{(x'')^2}{(\sqrt{8})^2} - \frac{(y'')^2}{2^2} + \frac{(z'')^2}{(\sqrt{8})^2} &= 1 \end{aligned}$$

Заметим, что при приведении уравнения в канонический вид разными способами были получены разные системы координат, в которых это уравнения имеет канонический вид. При этом методом Лагранжа была найдена система с неортогональными осями! Оговоримся, правда, что и систему с ортогональными осями, совпадающую с системой, полученной при решении методом ортогонального преобразования, можно получить правильно выделив полные квадраты, нарушив, правда, шаги алгоритма Лагранжа.

Анализируя полученные канонические уравнения поверхностей, приходим к выводу, что исходное уравнение описывает **однополостный гиперболоид** с общим уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Изобразим на графиках описываемую поверхность в исходной системе координат, а так же оси приведённой системы.

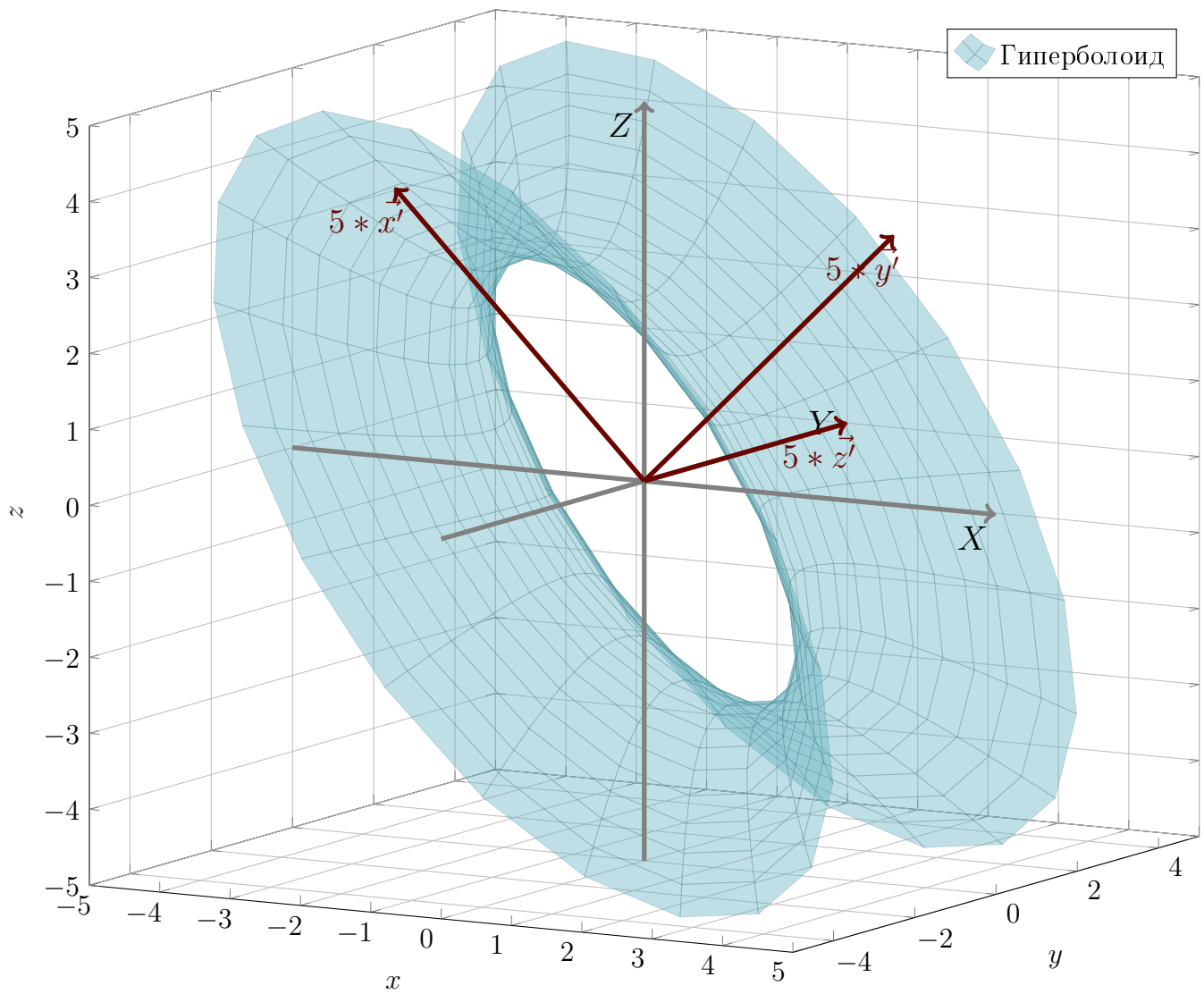


Рис. 6: Однополостный гиперболоид, описываемый исходным уравнением и приведённые оси, полученные при ортогональном преобразовании (угол поворота  $30 \text{ deg}$ ).

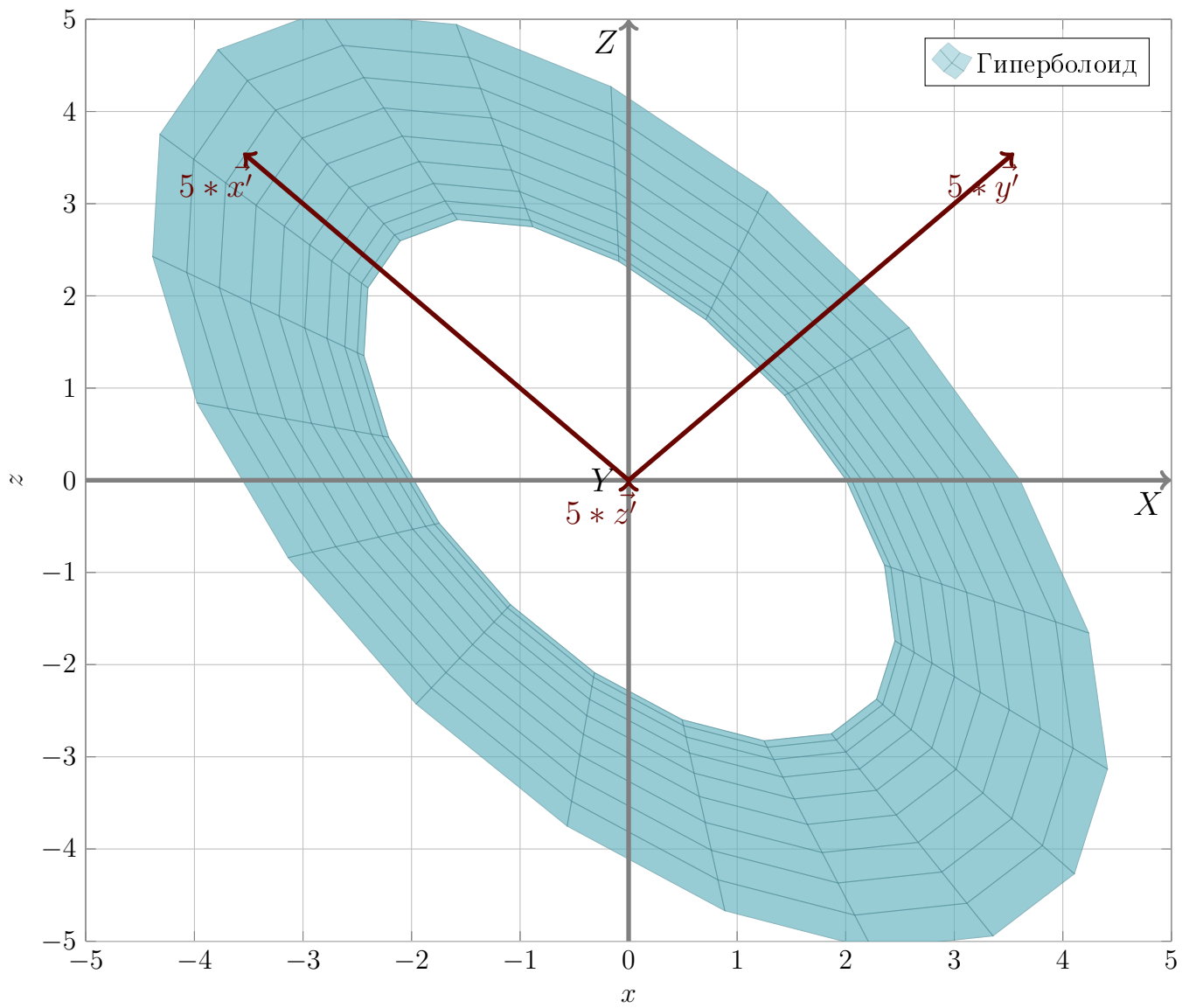


Рис. 7: Однополостный гиперболоид, описываемый исходным уравнением и приведённые оси, полученные при ортогональном преобразовании (угол поворота 0 deg).

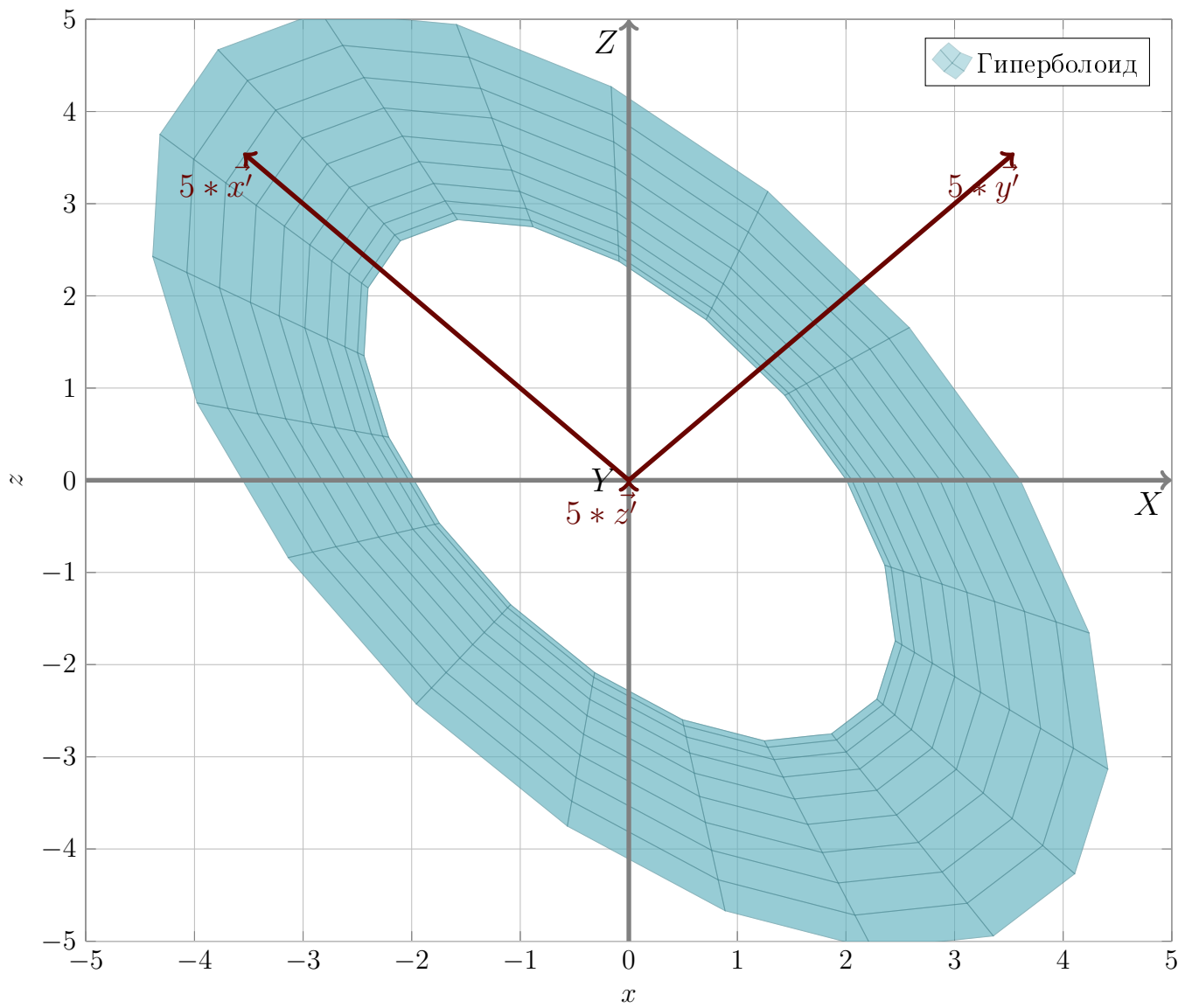


Рис. 8: Однополостный гиперболоид, описываемый исходным уравнением и приведённые оси, полученные при ортогональном преобразовании (угол поворота 0 deg).



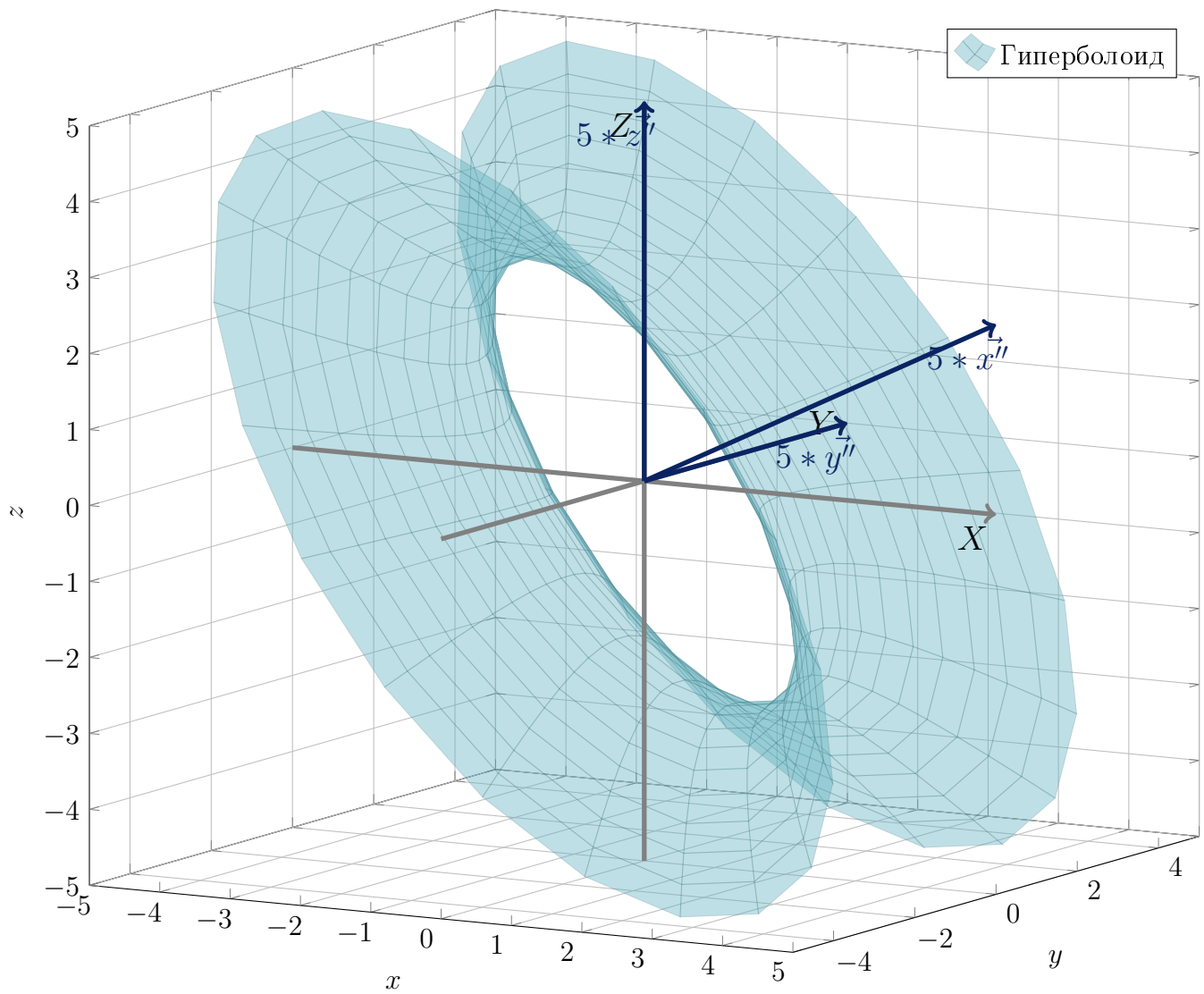


Рис. 9: Однополостный гиперболоид, описываемый исходным уравнением и приведённые неортогональные оси, полученные при решении методом Лагранжа (угол поворота 30 deg).

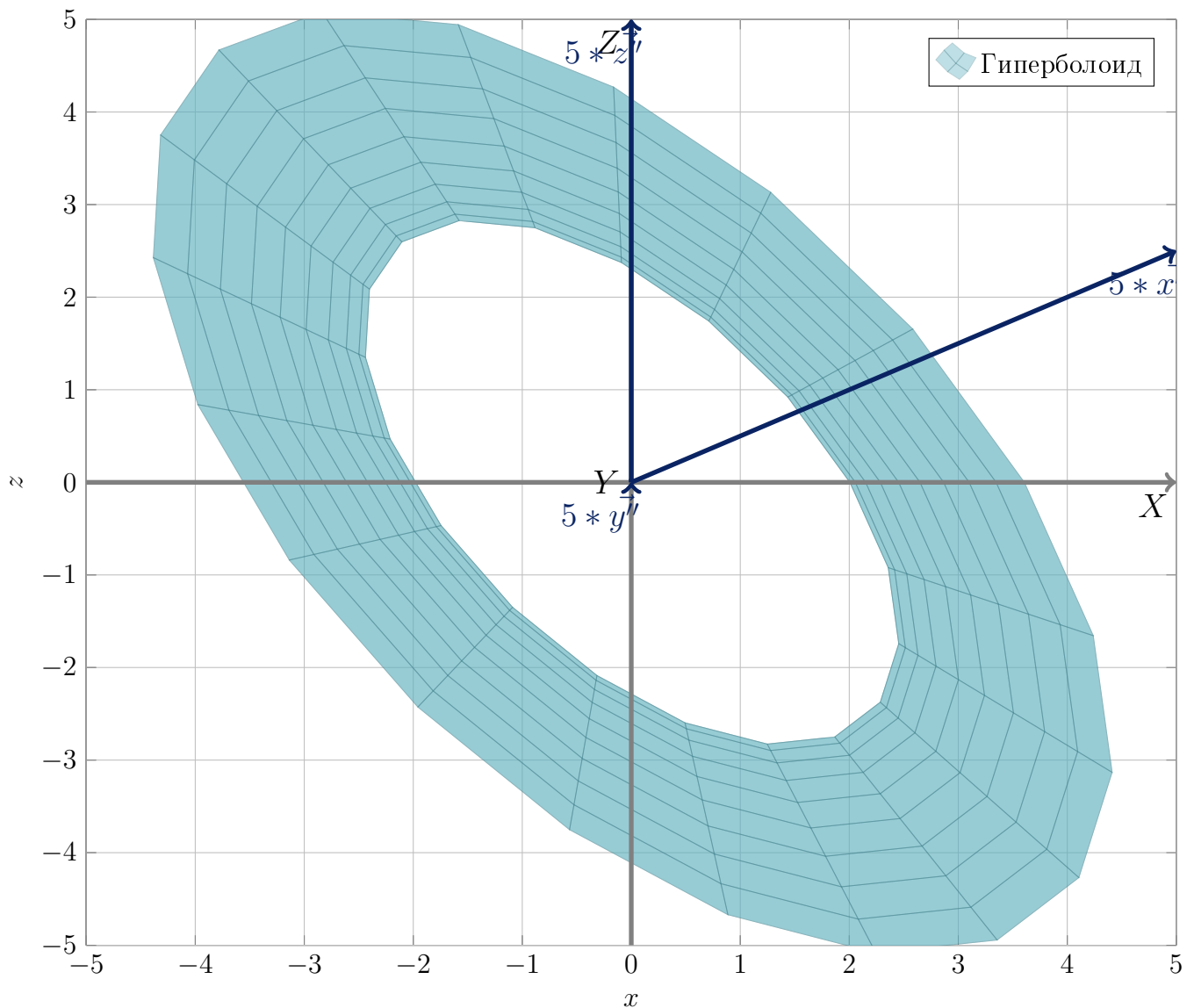


Рис. 10: Однополостный гиперболоид, описываемый исходным уравнением и приведённые неортогональные оси, полученные при решении методом Лагранжа (угол поворота 0 deg).

## 4. Выводы

При выполнении расчётно-графической работы мы получили линейный оператор проектирования в пространстве геометрических векторов и исследовали его, исследовали линейный оператор в пространстве функций и сравнили трудоёмкость вычисления образа при помощи матрицы с вычислением по формуле. Также мы рассмотрели процесс ортогонализации и нормирования базисных векторов на примере базиса пространства многочленов и вывели многочлен Фурье при поиске самого близкого к функции многочлена. По ходу решения последнего задания мы приводили уравнение поверхности 2-го порядка к каноническому виду методом Лагранжа и ортогонального преобразования, а также искали оси, в которых это уравнение и имеет канонический вид.

## 5. Оценочный лист

Хороших	Дмитрий	Р3117	1.5	100%
Рамеев	Тимур	Р3118	1.5	100%