

Лабораторная работа №2

Метод стрельбы

Колобаев Дмитрий
Группа Б01-903

Задание

XI.9.3. Построить алгоритм метода пристрелки для вычисления решения следующих нелинейных задач:

$$\begin{aligned} \text{а)} & \begin{cases} y'' - x\sqrt{y} = 0, & 0 \leq x \leq 1, \\ y(0) = 0, \quad y(1) = 2; \end{cases} \\ \text{б)} & \begin{cases} y'' - x\sqrt{y} = 0, & 0 \leq x \leq 1, \\ y(0) = 0, \quad \int_0^1 y(x) dx = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Метод решения

Используем метод стрельбы. Для начала сведем уравнение к системе ОДУ первого порядка.

$$\begin{cases} p' = x\sqrt{y} \\ y' = p \end{cases}$$

Параметризуем начальные условия на $y(0) = 0, p = \alpha$. И решим полученную задачу Коши. Для решения используем метод Рунге-Кутты второго порядка - "метод Эйлера с пересчетом". Полученное решение подставим в граничные условия и проверим, что $y(1) - 2 = 0$. В итоге получим нелинейное уравнение $y(1, \alpha) - 2 = 0$ относительно параметра α , где $y(1, \alpha)$ это значение решения задачи Коши в точке 1 при данном параметре α .

Решим полученное нелинейное уравнение на α с помощью метода Ньютона. Значение производной в точке для метода Ньютона будем получать численно по формуле первого аорядка.

$$F'(\alpha) = \frac{F(\alpha + h) - F(\alpha)}{h}$$

Во варианте б для интегрирования будем использовать метод прямоугольников.

Результаты

Результаты вычисления приведены на графиках. Как видно в первом варианте в точке $x = 1$ выполняется граничное условие $y(1) = 2$. Во втором варианте интеграл $\int_0^1 y(x)dx$ можно оценить как площадь прямоугольного треугольника с катетами 1 и 2. Получается интеграл равен $\int_0^1 y(x)dx \cong 1$, как и требовалось в начальных условиях. Итоговые значения параметра α :

а) $\alpha = 1.84295$

б) $\alpha = 1.92686$

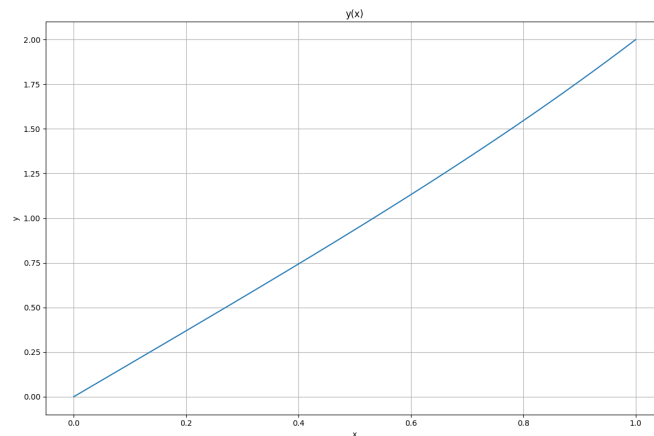


Рис. 1: Вариант А

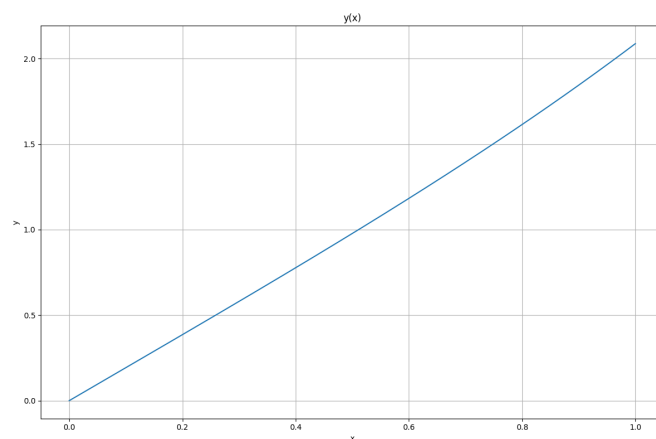


Рис. 2: Вариант Б

Программная реализация

Программа для метода стрельбы реализована в файле `main.cpp` папки `lab3_shootout`. Методы Рунге-Кутты и Ньютона взяты из предыдущих лабораторных работ и могут быть найдены в соответствующих файлах библиотеки `Computational-Math`: `RKS.hpp/cpp` и `Solvers.hpp/cpp`