Лабораторная работа № 3
Нелинейные системы уравнений.

Колобаев Дмитрий
Группа Б01-909

7 декабря 2021 г.

IV.12.2

Построение метода Ньютона

Исходная система

$$\begin{cases} \mathrm{tg}(y-x) + xy = 0,3 \\ x^2 + y^2 = 1,5 \end{cases}$$

Якобиан $J = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{\cos^2(y-x)} + y & \dfrac{1}{\cos^2(y-x)} + x \\ 2x & 2y \end{pmatrix}$

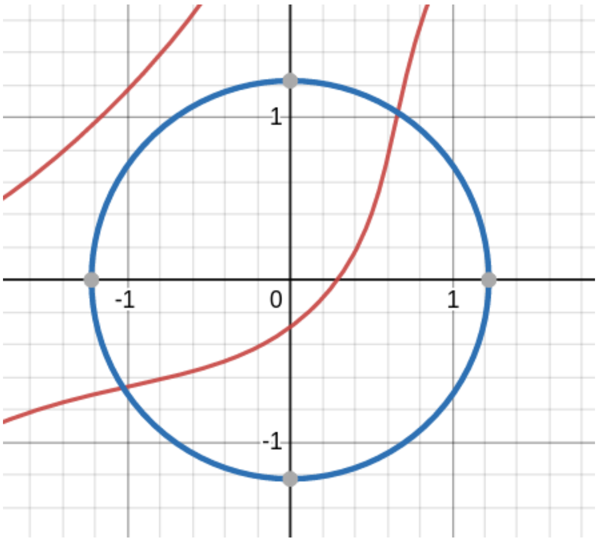
Обратный Якобиан $J^{-1} = \dfrac{1}{2y^2 - 2x^2 - \frac{2y+2x}{cos^2(y-x)}} \begin{pmatrix} 2y & -\dfrac{1}{\cos^2(y-x)} - x \\ -2x & -\dfrac{1}{\cos^2(y-x)} + y \end{pmatrix}$

Тогда формула для метода Ньютона

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} - J^{-1}(x_n, y_n) \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{tg}(y_n - x_n) + x_n y_n - 0,3 \\ x_n^2 + y_n^2 - 1,5 \end{pmatrix}$$

Локализация корней

Второе уравнение системы представляет собой окружность с радиусом $\sqrt{1,5}$, поэтому можем локализовать два корня на отрезках $[-\sqrt{1,5}; 0]$ и $[0; \sqrt{1,5}]$ и по x, и по y (то есть корни лежат в первой и третьей четверти).



Решение

Логику метода Ньютона инкапсулирует в себе класс NewtonSolver. Его опре-деление может быть найдено файлах Solvers.cpp и Solvers.hpp

Ответ: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,02941 \\ 0,663569 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,663569 \\ -1,02941 \end{pmatrix}$

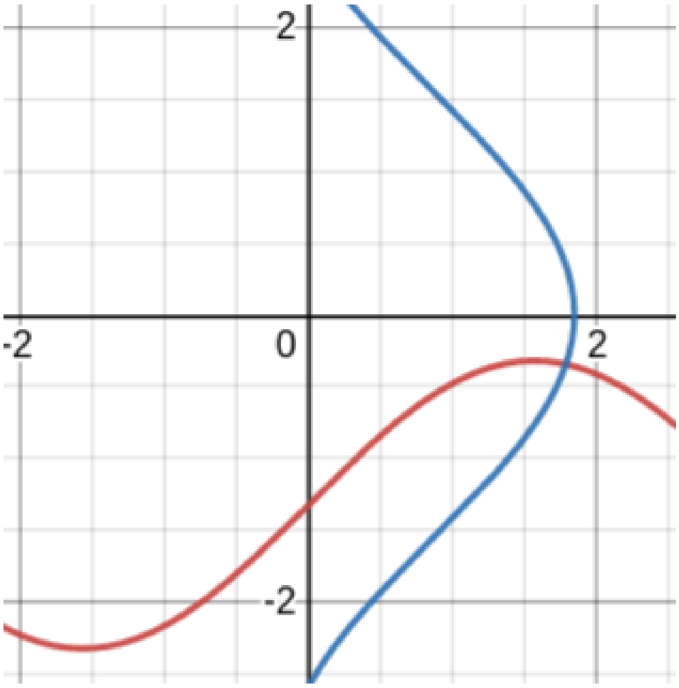
IV.12.7(г)

Исходная система

$$\begin{cases} \sin x - y = 1.32 \\ \cos y - x = -0.85 \end{cases}$$

Локализация корней

Кривые представляют собой две сдвинутые синусоиды - одна вдоль оси X, другая вдоль оси Y. Поэтому у них будет только одно пересечение на отрезке $[1; 2]$ по оси X и $[-1, 0]$ по оси Y.



Решение

Воспользуемся методом Ньютона.

Ответ: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.79134 \\ -0.344221 \end{pmatrix}$

IV.12.8(c)

$$f(x) = \frac{\ln x}{x^2}, x \geq 1$$

Найдем максимальное значение функции

$$\frac{df}{dx} = \frac{1 - 2\ln x}{x^3} = 0$$

$$x_{max} = \sqrt{e}, f_{max} = \frac{1}{2e}$$

Теперь можем составить систему уравнений

$$\begin{cases} y - \dfrac{1}{4e} = 0 \\ y - \frac{\ln x}{x^2} = 0, x \geq 1 \end{cases} \tag{1}$$

Шириной на полувысоте будет расстояние между x-координатами корней системы. Корни будут находиться по разные стороны от максимума, поэтому можем локализовать их на отрезках $[1, \sqrt{e}]$ и $[\sqrt{e}, 5]$
Ответ: $\Delta_{1/2} = 2.693$