Лабораторная работа №1
ОДУ

Колобаев Дмитрий
Группа Б01-903

1 мая 2022 г.

Задание VIII.11.2:
Изучите поведение численного решения ОДУ второго порядка (уравнения Ван-дер-Поля):

$$y'' + e(y^2 - 1)y' + y = 0$$

Представленного в виде системы двух ОДУ первого порядка

$$\begin{cases} x' = z \\ z' = e(1 - x^2)z - x, e > 0 \end{cases}$$

в зависимости от изменения параметра e $(0,01 < e < 100)$. Использовать методы Рунге–Кутты порядка 1,2,3,4 и методы Адамса порядка 2, 3, 4.

Метод Рунге-Кутты

S-стадийный одношаговый метод решения задачи Коши для ОДУ.

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, y_n), \\ &... \\ k_s &= f(t_n + c_s\tau, y_n + \tau(\sum_{i=1}^{s-1} a_{si}k_i)), \\ y_{n+1} &= y_n + \tau(\sum_{j=1}^{s} b_j k_j) \end{aligned}$$

Коэффициенты в методе Рунге-Кутты задаются таблицей Бутчера.

$\vec{c}$	$[a_{ij}]$
	b^t

Использованые в работе варианты метода:

- Метод Эйлера 1-го порядка

0	0
	1

- Метод Эйлера с пересчетом 2-го порядка

0	0	0
1	1	0
	1/2	1/2

- Метод Хойна 3-го порядка

0	0	0	0
1/3	1/3	0	0
2/3	0	2/3	0
	1/4	0	3/4

- Метод Рунге-Кутты 4-го порядка

0	0	0	0	0
1/2	1/2	0	0	0
1/2	0	1/2	0	0
1	0	0	1	0
	1/6	2/6	2/6	1/6

Методы Адамса

Многошаговый одностайдийный метод решения ОДУ. Явные методы Адамса, от первого до четвертого порядка аппроксимации, на равномерной сетке представляются в виде

$$
\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n + \tau f_n \\
y_{n+1} &= y_n + \tau(\frac{3}{2}f_n - \frac{1}{2}f_{n-1}) \\
y_{n+1} &= y_n + \tau(\frac{23}{12}f_n - \frac{16}{12}f_{n-1} + \frac{5}{12}f_{n-2}) \\
y_{n+1} &= y_n + \tau(\frac{55}{24}f_n - \frac{59}{24}f_{n-1} + \frac{37}{24}f_{n-2} - \frac{9}{24}f_{n-3})
\end{aligned}
$$

Фазовые траектории

В фазовых траекториях наблюдаются предельные циклы осциллятора. При малых e траектории похожи на гармонический осциллятор, с ростом параметра максимцмы эллипса сдвигаются от центра в первую и третью четверти. С ростом параметра также увеличивается период одного колебания Поэтому если период становится больше чем $t_{max} = 100$ отсчетов по времени, то цикл оказывается неполным.

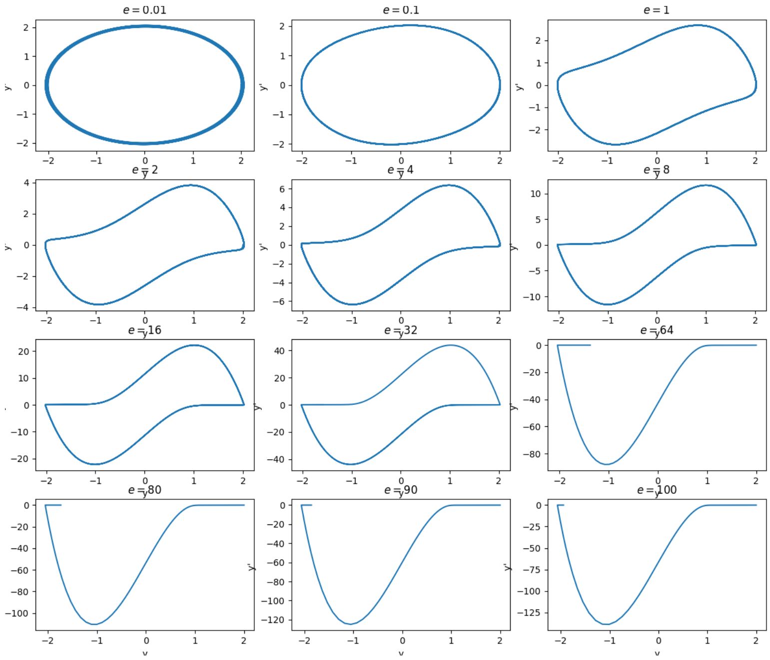

Рис. 1: Метод Рунге-Кутты 1-го порядка

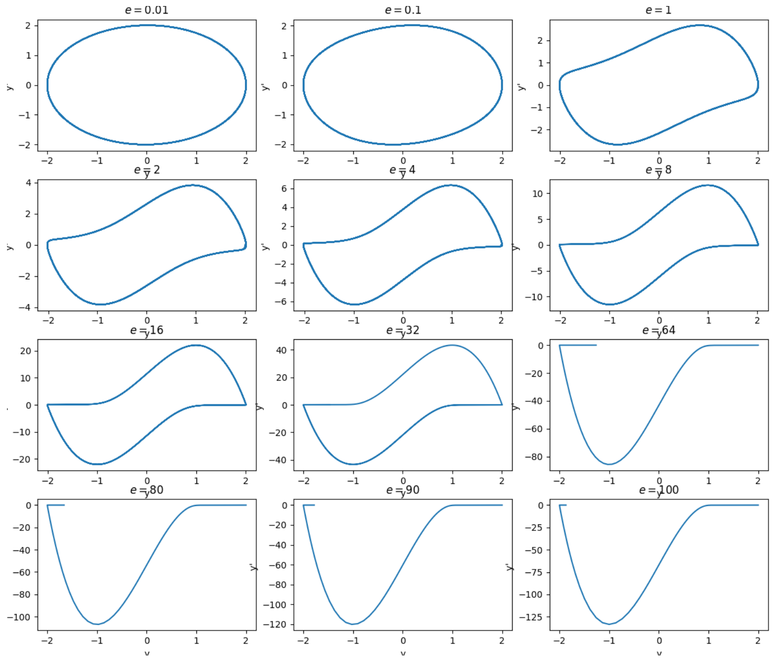

Рис. 2: Метод Рунге-Кутты 2-го порядка

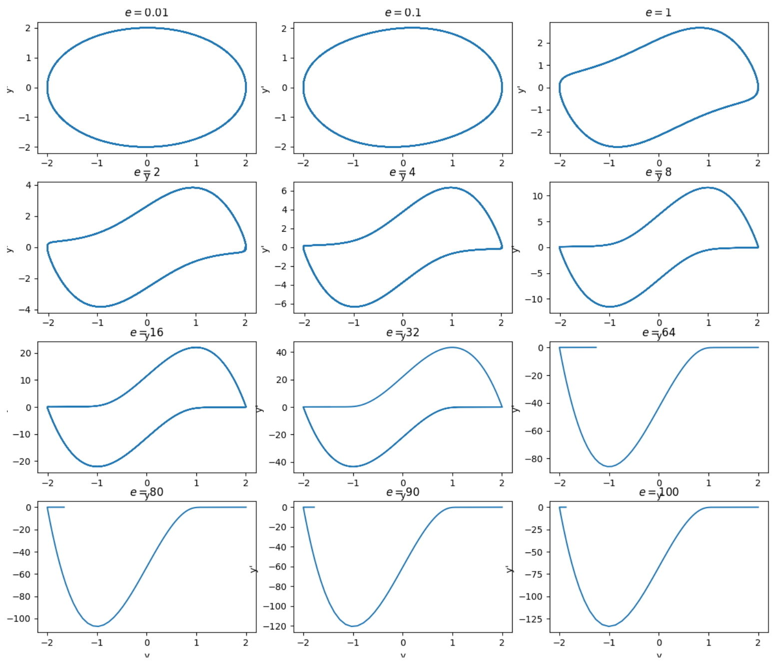

Рис. 3: Метод Рунге-Кутты 3-го порядка

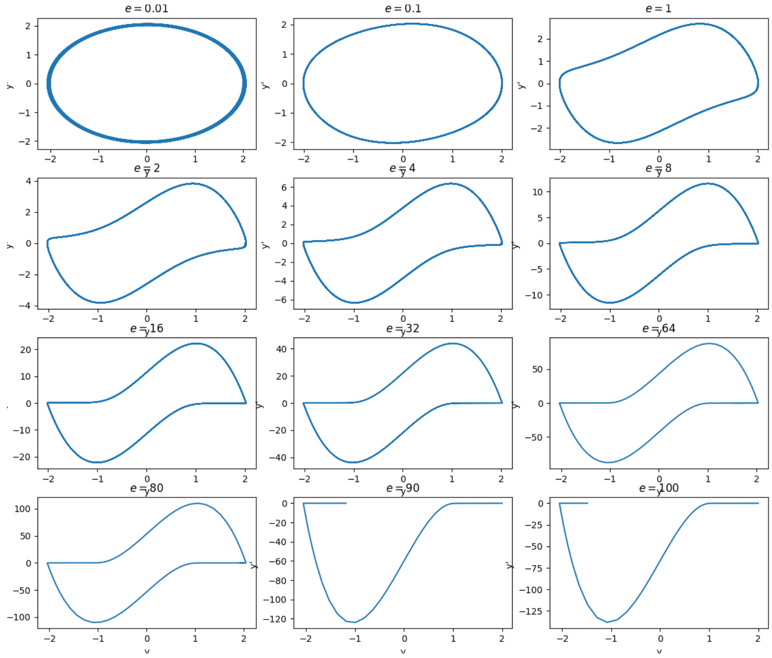

Рис. 4: Метод Рунге-Кутты 4-го порядка

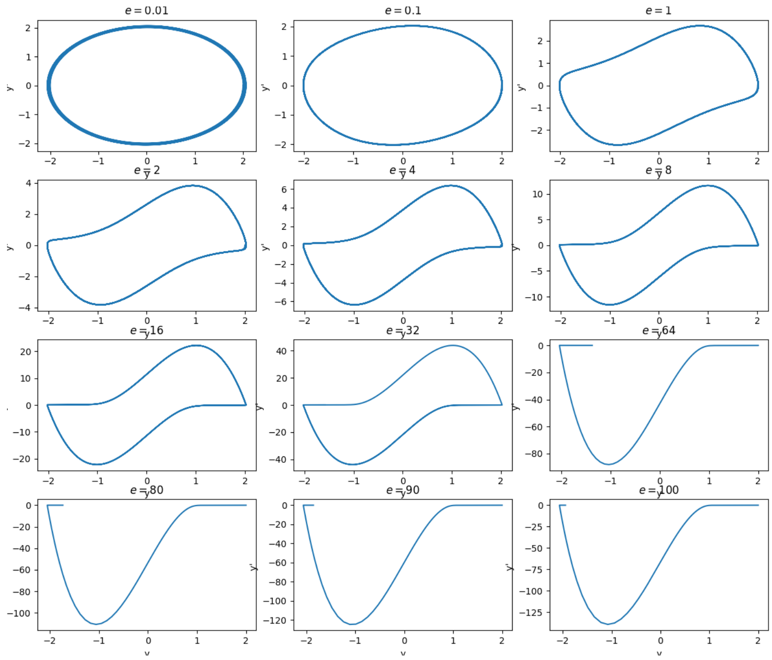

Рис. 5: Метод Адамса 2-го порядка

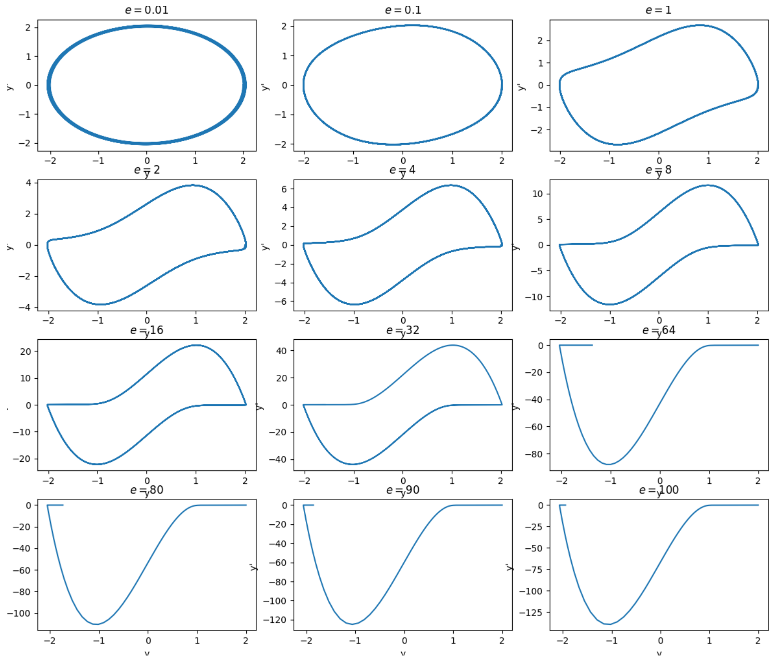

Рис. 6: Метод Адамса 3-го порядка

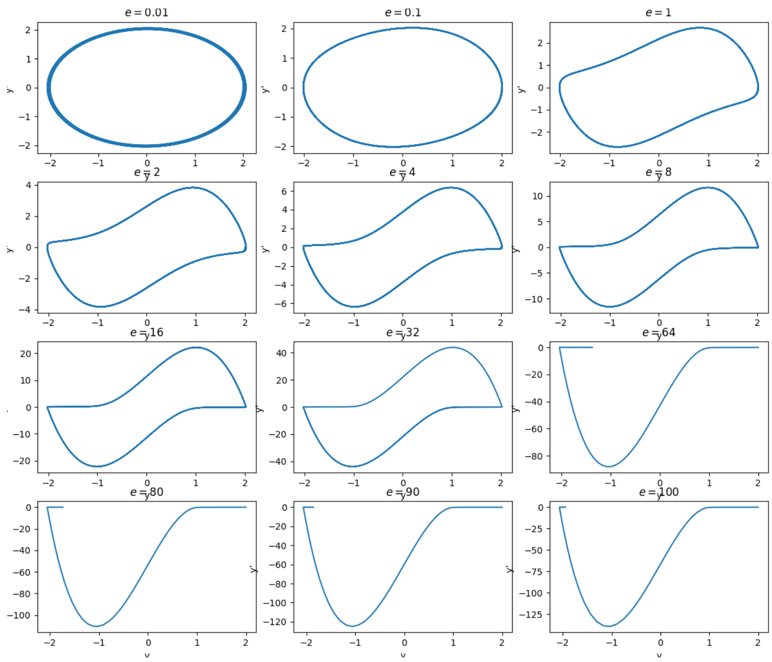

Рис. 7: Метод Адамса 4-го порядка

Зависимость от времени

Построим графики зависимости решения от времени. Они представляют собой периодические колебания. При малых значениях параметра, осциллятор похож на гармонический, при $e = 0$ полуаем уравнение гармонического осциллятора в чистом виде. С ростом параметра e степень затухания растет и колебания все больше не похожи на гармонические.

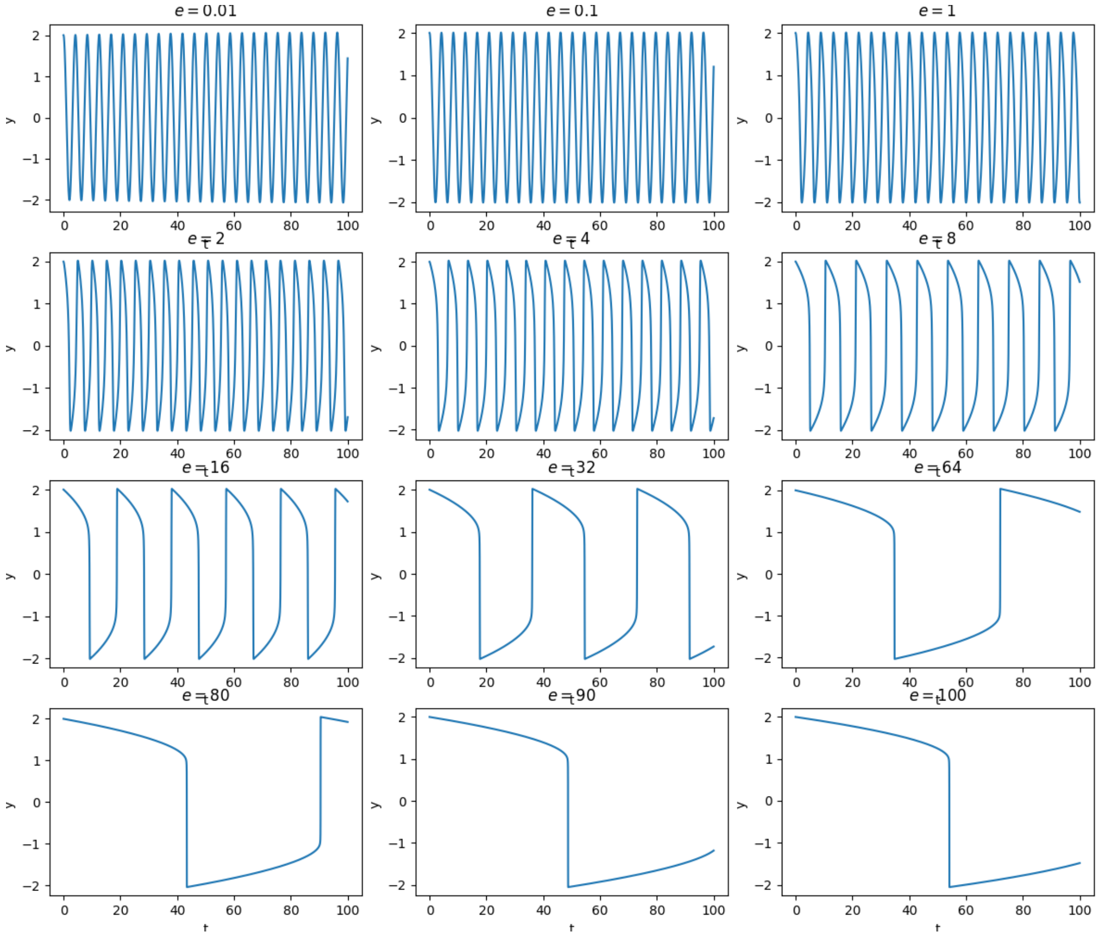

Рис. 8: Метод Рунге-Кутты 4-го порядка

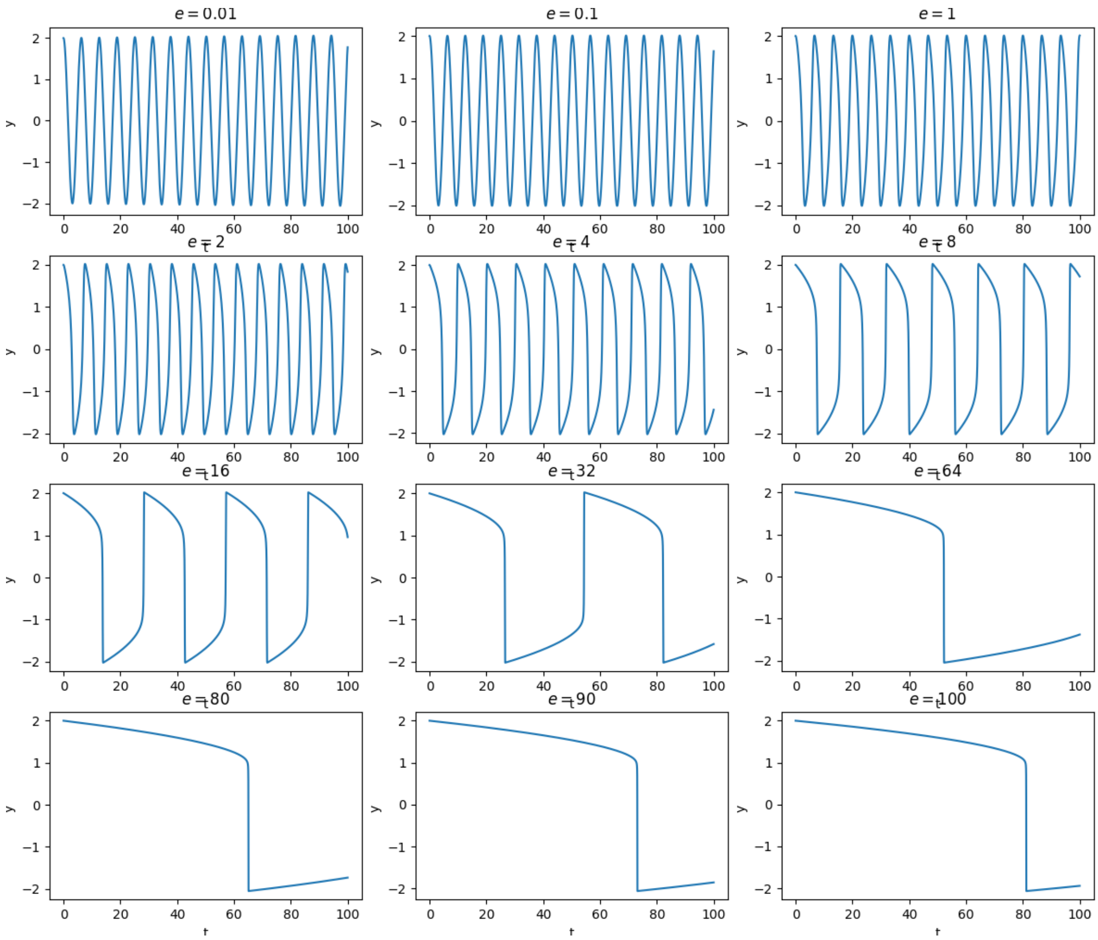

Рис. 9: Метод Адамса 4-го порядка

Код

Реализацию методов можно найти в папке Computational-Math:

Рунге-Кутта - RKS.cpp и RKS.hpp

Адамс - Adams.cpp и Adams.hpp