Aljabar Boolean

JURUSAN TEKNIK INFORMATIKA

Siskha Handayani

Kemampuan Akhir Yang Direncanakan

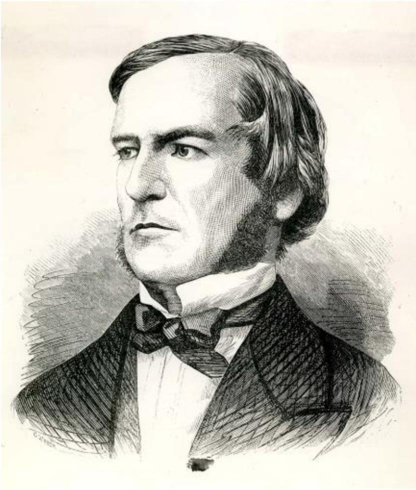
Mahasiswa mampu

1. Menjelaskan definisi aljabar boolean
2. Mengetahui aljabar boolean 2 nilai
3. Mengetahui ekspresi aljabar boolean
4. Mengetahui hukum aljabar boolean
5. Mengetahui fungsi boolean
6. Melakukan operasi aljabar Boolean

Sub Bahasan

1. Definisi Aljabar Boolean
2. Aljabar Boolean dua Nilai
3. Ekspresi Aljabar Boolean
4. Hukum Aljabar Boolean
5. Fungsi Boolean
6. Aplikasi Aljabar Boolean

Pengenalan Aljabar Boolean



- Aljabar Boolean ditemukan oleh George Boole, pada tahun 1854
- Boole melihat bahwa himpunan dan logika proposisi mempunyai sifat-sifat yang serupa
- Dalam buku The Laws of Thought, Boole memaparkan aturan-aturan dasar logika.
- Aturan dasar logika ini membentuk struktur matematika yang disebut aljabar Boolean.

- Aljabar Boolean adalah cabang matematika yang berhubungan dengan logika biner, dimana setiap variabel hanya memiliki dua nilai:
  - 1 (TRUE/Benar)
  - 0 (FALSE/Salah)

Bagaimana kita dapat mengubah kebutuhan sistem logika menjadi ekspresi matematis sederhana menggunakan operasi AND, OR, dan NOT?

- setiap sistem digital memiliki kondisi benar/salah
- ekspresi Boolean memungkinkan kita mengubah persyaratan sistem menjadi model matematis yang mudah dianalisis.

Definisi Aljabar Boolean

DEFINISI. Misalkan B adalah himpunan yang didefinisikan pada dua operator biner, + dan ·, dan sebuah operator uner, ’. Misalkan 0 dan 1 adalah dua elemen yang berbeda dari B. Maka, tupel

<*B*, +, ·,’, 0, 1>

disebut **aljabar Boolean** jika untuk setiap $a, b, c \in B$ berlaku aksioma berikut:

1. Identitas
   (i) $a + 0 = a$
   (ii) $a \cdot 1 = a$

2. Komutatif
   (i) $a + b = b + a$
   (ii) $a \cdot b = b \,.\, a$

3. Distributif
   (i) $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$
   (ii) $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$

4. Komplemen
   Untuk setiap $a \in B$ terdapat elemen unik $a‘ \in B$ sehingga
   (i) $a + a’ = 1$
   (ii) $a \cdot a’ = 0$

Aljabar Boolean 2 Nilai

- Paling populer karena aplikasinya luas
- Pada Aljabar 2 nilai

a. $B = \{0,1\}$

b. Operator biner: + dan ·,operator uner : ′

c. Kaidah untuk operator biner (+ dan ·)

a	b	$a \cdot b$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

a	b	$a + b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Operasi uner

a	a'
0	1
1	0

d. Keempat aksioma terpenuhi

Ekspresi Boolean

Definisi : Misalkan $(B, +, \cdot, ', 0, 1)$ adalah sebuah aljabar Boolean. Suatu ekspresi Boolean dalam $(B, +, \cdot, ')$ adalah

i. Setiap elemen di dalam B
ii. Setiap peubah
iii. Jika e_1 dan e_2 adalah Boolean, maka $e_1 + e_2$, $e_1 \cdot e_2$, e_1' adalah ekspresi Boolean

Contoh:
0
1
a
b
c
a+b dan sebagainya

Adalah ekspresi Boolean. Ekspresi Boolean yang mengandung n peubah dinamakan ekspresi Boolean bagi n peubah

Hukum- hukum Aljabar Boolean

1. Hukuml dentitas (i) $a + 0 = a$ (ii) $a \cdot 1 = \mathrm{a}$	7. Hukum komutatif (i) $a + b = b + a$ (ii) $a \cdot b = b \cdot a$
2. Hukum idempoten (i) $a + a = a$ (ii) $a \cdot a = a$	8. Hukum asosiatif (i) $a + (b + c) = (a + b) + c$ (ii) $a(bc) = (ab)c$
3. Hukum Komplemen (i) $a + a' = 1$ (ii) $aa' = 0$	9. Hukum distributif (i) $a + (bc) = (a + b) \cdot (a + c)$ (ii) $a(b + c) = ab + ac$
4. Hukum Dominasi (i) $a \cdot 0 = 0$ (ii) $a + 1 = 1$	10. Hukum De Morgan (i) $(a + b)' = a'b'$ (ii) $(ab)' = a' + b'$
5. Hukum involusi $(a')' = a$	11. Hukum 0/1 (i) $0' = 1$ (ii) $1' = 0$
6. Hukum penyerapan (i) $a + ab = a$ (ii) $a(a + b) = a$	

Contoh 2: Buktikan bahwa untuk sembarang elemen a dan b dari aljabar Boolean maka kesamaaan berikut:

$$a + a'b = a + b \quad \text{dan} \quad a(a' + b) = ab$$

adalah benar.

Penyelesaian:

(i) $a + a'b = (a + ab) + a'b$ (Hukum Penyerapan)

$= a + (ab + a'b)$ (Hukum Asosiatif)

$= a + (a + a')b$ (Hukum Distributif)

$= a + 1 \cdot b$ (Hukum Komplemen)

$= a + b$ (Hukum Identitas)

(ii) $a(a' + b) = a\,a' + ab$ (Hukum Distributif)

$= 0 + ab$ (Hukum Komplemen)

$= ab$ (Hukum Identitas)

- Hukum-hukum aljabar Boolean dapat digunakan untuk menyederhanakan ekspresi Boolean dalam merancangan rangkaian digital atau control otomatis.
- Penyederhanaan menghasilkan rangkaian yang lebih sedikit komponen, sehingga lebih hemat biaya, energi, dan waktu proses.

Fungsi Boolean

Definisi : Fungsi Boolean (disebut juga fungsi biner) adalah pemetaan dari B^n ke B melalui ekspresi Boolean, ditulis sebagai $f: B^n \rightarrow B$ yang dalam hal ini B^n adalah himpunan yang beranggotakan pasangan terurut ganda-n didalam daerah asal B.

Contoh fungsi boolean:

$$f(x) = x$$

$$g(x, y) = x'y + xy' + y'$$

$$h(x, y, z) = xyz'$$

Setiap peubah di dalam fungsi Boolean, termasuk dalam bentuk komplemennya, disebut literal

Cara representasi fungsi Boolean

- Tabel Kebenaran
- Ekspresi Aljabar
- Diagram Gerbang Logika
- Karnaugh Map (K-Map) untuk penyederhanaan

- Contoh Tabel kebenaran

x	y	z	$f(x, y, z)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Bentuk Kanonik

- Ekspresi Boolean yang memspesifikasikan suatu fungsi dapat disajikan dalam dua bentuk berbeda.
- Pertama, sebagai penjumlahan dari hasil kali dan kedua sebagai perkalian dari hasil jumlah
- Contoh:

$$f(x, y, z) = x'y'z + xy'z' + xyz$$

dan

$$g(x, y, z) = (x + y + z)(x + y' + z)(x + y' + z')(x' + y + z')(x' + y' + z)$$

adalah dua buah fungsi yang sama.

- Minterm : suku (term) di dalam ekspresi boolean mengandung literal yang lengkap dalam bentuk hasil kali
- Maxterm : suku (term) di dalam ekspresi boolean mengandung literal yang lengkap dalam bentuk hasil jumlah
- Contoh:

$f(x, y, z) = x'y'z + xy'z' + xyz \quad \rightarrow$ 3 buah minterm : $x'y'z, xy'z', xyz$

dan

$g(x, y, z) = (x + y + z)(x + y' + z)(x + y' + z')(x' + y + z')(x' + y' + z)$

terdapat 5 buah maxterm : $(x + y + z), (x + y' + z), (x + y' + z'),$

$(x' + y + z')$, dan $(x' + y' + z)$

- Misalkan peubah(variabel) fungsi Boolean adalah x, y dan z maka:

$x'y$ (bukan minterm karena literal tidak lengkap)

x $y'z'$ (minterm, karena literal lengkap)

$x + z$ (bukanmaxterm karena literal tidak lengkap)

$(x' + y + z')$ (maxterm karena literal lengkap)

$(xy' + y' + z)$ (bukan maxterm)

- Ekspresi Boolean yang dinyatakan sebagai penjumlahan dari satu atau lebih minterm atau perkalian dari satu atau lebih maxterm disebut dalam **bentuk kanonik**
- Jadi, ada dua macam bentuk kanonik:

1. Penjumlahan dari hasil kali (*sum of product* atau SOP)
2. Perkalian dari hasil jumlah (*product of sum* atau POS)

- Contoh :

1. Fungsi $f(x, y, z) = x'y'z + xy'z' + xyz$ dikatakan bentuk SP
2. Fungsi $g(x, y, z) = (x + y + z)(x + y' + z)(x + y' + z')(x' + y + z')(x' + y' + z)$

dikatakan bentuk POS

Cara membentuk minterm dan maxterm

- Untuk *minterm*, setiap peubah yang bernilai 0 dinyatakan dalam bentuk komplemen, sedangkan peubah yang bernilai 1 dinyatakan tanpa komplemen.
- Sebaliknya, untuk *maxterm*, setiap peubah yang bernilai 0 dinyatakan tanpa komplemen, sedangkan peubah yang bernilai 1 dinyatakan dalam bentuk komplemen.
- Cara membentuk *minterm* dan *maxterm* dari tabel kebenaran untuk dua peubah:

		Minterm		*Maxterm*	
x	y	Suku	Lambang	Suku	Lambang
0	0	$x'y'$	m_0	$x + y$	M_0
0	1	$x'y$	m_1	$x + y'$	M_1
1	0	xy'	m_2	$x' + y$	M_2
1	1	$x\,y$	m_3	$x' + y'$	M_3

- Cara membentuk *minterm* dan *maxterm* dari tabel kebenaran untuk tiga peubah:

			Minterm		*Maxterm*	
x	y	z	Suku	Lambang	Suku	Lambang
0	0	0	$x'y'z'$	m_0	$x + y + z$	M_0
0	0	1	$x'y'z$	m_1	$x + y + z'$	M_1
0	1	0	$x'y\,z'$	m_2	$x + y'+z$	M_2
0	1	1	$x'y\,z$	m_3	$x + y'+z'$	M_3
1	0	0	$x\,y'z'$	m_4	$x'+ y + z$	M_4
1	0	1	$x\,y'z$	m_5	$x'+ y + z'$	M_5
1	1	0	$x\,y\,z'$	m_6	$x'+ y'+ z$	M_6
1	1	1	$x\,y\,z$	m_7	$x'+ y'+ z'$	M_7

- Jika diberikan sebuah tabel kebenaran,kita dapat membentuk fungsi Boolean dalam bentuk kanonik (SOP atau POS) dari Tabel tersebut dengan cara :

1. mengambil minterm dari setiap nilai fungsi yang bernilai 1 (untuk SOP)
2. mengambil maxterm dari setiap nilai fungsi yang bernilai 0 (untuk POS)

Contoh 1

Tinjau fungsi Boolean yang dinyatakan oleh Tabel di bawah ini. Nyatakan fungsi tersebut dalam bentuk kanonik SOP dan POS

x	y	z	$f(x, y, z)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Penyelesaian

- SOP

Kombinasi nilai-nilai peubah yang menghasilkan nilai fungsi sama dengan 1 adalah $001, 100$, dan 111, maka fungsi Booleannya dalam bentuk kanonik SOP adalah

- $f(x, y, z) = x'y'z + xy'z' + xyz$

Atau (dengan menggunakan lambang *minterm*),

- $f(x, y, z) = m_1 + m_4 + m_7 = \sum(1, 4, 7)$

- POS

x	y	z	$f(x, y, z)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

- Kombinasi nilai-nilai peubah yang menghasilkan nilai fungsi sama dengan 0 adalah $000, 010, 011, 101$, dan 110, maka fungsi Booleannya dalam bentuk kanonik POS adalah
- $f(x, y, z) = (x + y + z)(x + y' + z)(x + y' + z')(x' + y + z')(x' + y' + z)$
- Atau dalam bentuk lain,
- $f(x, y, z) = M_0 M_2 M_3 M_5 M_6 = \prod(0,2,3,5,6)$

Contoh 2

Nyatakan fungsi Boolean $f(x, y, z) = x + y'z$ dalam bentuk kanonik SOP

Penyelesaian:

- SOP

Lengkapi terlebih dahulu literal untuk setiap suku agar jumlahnya sama.

$$
\begin{aligned}
x &= x(y + y') \\
&= xy + xy' \\
&= xy(z + z') + xy'(z + z') \\
&= xyz + xyz' + xy'z + xy'z'
\end{aligned}
$$

dan

$$y'z = y'z(x + x') = xy'z + x'y'z$$

Jadi

$$f(x, y, z) = x + y'z$$
$$= xyz + xyz' + xy'z + xy'z' + xy'z + x'y'z$$
$$= x'y'z + xy'z' + xy'z + xyz' + xyz$$

Atau $f(x, y, z) = m_1 + m_4 + m_5 + m_6 + m_7 = \sum(1,4,5,6,7)$

Contoh 3

- Nyatakan fungsi Boolean

$$f(x, y, z) = xy + x'z$$

dalam bentuk kanonik POS.

- Penyelesaian:
- $f(x, y, z) = xy + x'z$

$$= (xy + x')(xy + z)$$

$$= (x + x')(y + x')(x + z)(y + z)$$

$$= (x' + y)(x + z)(y + z)$$

- Lengkapi literal untuk setiap suku agar jumlahnya sama:

$$x' + y = x' + y + zz' = (x' + y + z)(x' + y + z')$$

$$x + z = x + z + yy' = (x + y + z)(x + y' + z)$$

$$y + z = y + z + xx' = (x + y + z)(x' + y + z)$$

Jadi, $f(x, y, z) = (x + y + z)(x + y' + z)(x' + y + z)(x' + y + z')$

Atau $f(x, y, z) = M_0 M_2 M_4 M_5 = \prod(0,2,4,5)$

Konversi Antar Bentuk Kanonik

Misalkan *f* adalah fungsi Boolean dalam bentuk SOP dengan tiga peubah:

$$f(x, y, z) = \sum(1,4,5,6,7)$$

Dan f' adalah fungsi komplemen dari f,

$$f'(x, y, z) = \sum(0,2,3) = m_0 + m_2 + m_3$$

Dengan menggunakan hukum De Morgan, kita dapat memperoleh fungsi f dalam bentuk POS:

$$f\ (x, y, z) = \left(f'(x, y, z)\right)' = (m_0 + m_2 + m_3)' = m_0{}' \cdot m_2{}' \cdot m_3{}'$$

$$= (x'y'z')'\ (x'yz')'\ (x'yz)'$$

$$= (x + y + z)\ (x + y' + z)\ (x + y' + z')$$

$$= M_0 M_2\ M_3 = \prod(0,2,3)$$

Jadi, $f(x, y, z) = \sum(1,4,5,6,7) = \prod(0,2,3)$. **Kesimpulan:** $m_i{}' = M_j$

Studi Kasus: Verifikasi dan Optimasi Aturan Firewall atau Logika Algoritma

Firewall adalah sistem keamanan jaringan yang bertugas memantau dan mengontrol lalu lintas jaringan masuk dan keluar berdasarkan serangkaian aturan yang telah ditetapkan.

Sebuah firewall memiliki aturan:

Izinkan koneksi jika:

1. IP valid (A)
2. Port sesuai (B)
3. Protokol aman (C)

Aturan ditulis sebagai: $F = (A \cdot B) + (A \cdot B \cdot C)$

Apakah aturan firewall di atas bisa disederhanakan? Apa implikasinya bagi performa firewall?

a. Penyederhanaan aturan dengan menggunakan hukum aljabar boolean

$$F = (A \cdot B) + (A \cdot B \cdot C)$$

$F = (A \cdot B)(1 + C)$ (Hukum Distributif)

$F = (A \cdot B)1$ (Identitas Boolean)

$F = AB$

Jadi penyederhanaannya Adalah $F = A \cdot B$

Artinya: cukup periksa apakah IP valid (A) dan port sesuai (B)

b. Implikasi:

- Aturan lebih sederhana → pemrosesan lebih cepat.
- Mengurangi beban sistem → firewall lebih efisien.
- Mengurangi risiko salah konfigurasi aturan yang berulang.

Aplikasi Aljabar Boolean

- Rangkaian digital : Gerbang AND, OR, NOT
- Pemrograman : kondisi IF-ELSE, kspresi logika pada algoritma
- Basis Data : Operator logika (AND, OR, NOT)
- Keamanan : Fungsi hash, logika autentikasi, deteksi anomali
- Sistem Kontrol : sensor (on/off), control industry otomatis

Tugas

1. Sebuah aturan firewall didefinisikan:

$$F(A, B, C) = (A \cdot B) + (A \cdot C) + (A \cdot B \cdot C)$$

   dengan:

   A: IP valid,

   B: Port sesuai,

   C: Protokol aman.

   Sederhanakan fungsi logika menggunakan hukum aljabar Boolean.

2. Nyatakan $f(a, b, c) = ((ab)'c)'((a' + c)(b' + c"))'$ dalam bentuk baku SOP dan bentuk kanonik SOP
3. Jika Anda merancang sistem lampu otomatis ruangan berbasis sensor, bagaimana Anda memodelkan logika kerjanya menggunakan ekspresi Boolean?
3. Buat contoh penerapan aljabar Boolean dalam PBL anda dan jelaskan.