UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

NOTAS DEL CURSO

Zaida Estefanía Alarcón Bernal

Índice general

Capítulo 1

Introducción

1.1. Antecedentes Históricos

El sistema militar de una nación es un conjunto de actividades económicas y militares que requieren un alto grado de coordinación para implementar los planes en sus departamentos. Si alguno de los planes necesita que se produzca o diseñe equipo, entonces la solicitud debe coordinarse con las capacidades de la economía para delegar hombres, material y capacidad productiva del sector civil al militar. Durante una guerra, para maximizar el impacto, es necesario asignar recursos escasos de un modo efectivo a las diversas actividades militares dentro de cada operación.

Durante la Segunda Guerra Mundial, los planificadores militares comenzaron a trabajar con científicos y matemáticos con el fin de aplicar un enfoque científico a la gestión de la guerra, en la que comenzaron a elaborar modelos matemáticos para hacer frente a estas cuestiones. Se hizo evidente que la planificación y la coordinación entre los diversos proyectos y la utilización eficiente de los recursos escasos eran esenciales. Se presume que el nombre de Investigación de Operaciones fue dado aparentemente porque el equipo de científicos estaba llevando a cabo la actividad de investigar operaciones militares.

Algunas de las investigaciones realizadas eran la determinación del tamaño óptimo de un pelotón para minimizar las pérdidas por ataques, la determinación del color adecuado de los aviones para minimizar la detección por submarinos (o maximizar el número de submarinos hundidos), la determinación de la mejor manera de desplazar las unidades de radar para maximizar la cobertura contra posibles ataques del enemigo. Además de algunos estudios realizados para la solución de problemas logísticos, la invención de nuevos patrones de vuelo, la planeación de colocación de minas marinas y la utilización efectiva de equipo electrónico. La esencia de muchos de estos estudios iniciales se fundamentaba en investigaciones estadísticas simples.

En junio de 1947 comenzó un trabajo intensivo en el proyecto SCOOP (Scientific Computation of Optimum Programs) de la Fuerza Aérea de los Estados Unidos, como resultado se desarrolló el método simplex por George B. Dantzig a finales del verano de 1947. A partir de ese momento se incrementó rápidamente el interés en la programación lineal entre los economistas, matemáticos, estadísticos, e instituciones gubernamentales.

1.1.1. Desarrollo y Aplicación de la Investigación de Operaciones

Después de la guerra, el éxito aparente de los grupos militares atrajo la atención de la industria, que buscaba soluciones a problemas causados por la complejidad y especialización ascendente en las organizaciones. Esto creaba posibles incompatibilidades entre metas y efectos de interacción entre áreas de especialización y funcionamiento. El resultado eran problemas complejos de decisión. Estos hechos impulsaron a las organizaciones de negocios a utilizar herramientas formales de la investigación de operaciones.

Otros factores que influyeron para el desarrollo de la Investigación de Operaciones y en particular de la programación lineal fueron

(a) El desarrollo de la computación

(b) El desarrollo del modelo interindustrial en economía por Wassily Leontief

(c) El desarrollo de método simplex por George Dantzig.

Entonces, la Investigación de Operaciones (IO) puede definirse como el uso de técnicas analíticas para mejorar la toma de decisiones a través del diseño de modelos matemáticos y computacionales. Algunos ejemplos de la aplicación de la IO son:

- **Programación de horarios.** Para los vehículos en las cadenas de suministro, la flota y tripulación de las aerolíneas, de órdenes en una fábrica, de quirófanos o consultorios en un hospital, de flota en sistemas de transporte público.
- **Planeación de instalaciones.** Mejorar los sistemas de citas para determinados servicios, hacer más rápidos y seguros los procesos de abordaje en los aeropuertos.
- **Planeación y pronósticos.** Identificar posibles demandas futuras de electricidad o telecomunicaciones para decidir dónde y cuándo instalar una planta o que capacidad es necesaria.
- **Gestión de los ingresos.** Fijar los precios de los cuartos de hotel o de las consultas médicas considerando los cambios en la demanda y el riesgo de no presentarse.
- **Mercado.** Evaluar el valor de las promociones de venta, el desarrollo de perfiles de clientes y calcular el tiempo de vida de un cliente.
- **Militar.** Búsqueda de formas de desplegar tropas rápidamente.

Algunas técnicas de la investigación de Operaciones para resolver situaciones como las anteriores son:

- **Simulación.** Permite probar diversos enfoques y evaluar ideas de mejora.
- **Probabilidad y estadística.** Son útiles para medir el riesgo, la minería de datos ayuda a encontrar conexiones valiosas e ideas en el análisis de negocios y a hacer predicciones fiables.
- **Estructuración de problemas.** Es útil cuando se tienen que tomar decisiones complejas en situaciones con muchos decisores e intereses en conflicto.

- **Optimización.** Reduce las opciones a las mejores cuando hay tantas alternativas que compararlas una a una sería complicado.

1.1.2. Desarrollo y Aplicación de la Programación Lineal

Una de las áreas principales de la Investigación de Operaciones es la Optimización o Programación Matemática que se relaciona con problemas de minimizar o maximizar una función (objetivo) de una o varias variables, cuyos valores usualmente están restringidos por ecuaciones y/o desigualdades.

La mayor parte de los economistas matemáticos estaban ocupados con el análisis de problemas teóricos asociados con las posibilidades de equilibrio económico y su eficiencia de asignación bajo condiciones competitivas o monopólicas. Para tales estudios encontraron que el uso de funciones convexas clásicas con derivadas continuas son mas convenientes para demostrar condiciones de estabilidad que las funciones basadas en desigualdades lineales.

En 1949, T.C. Koopmans llamó la atención de los economistas hacia las potencialidades de los modelos de programación lineal. El rápido desarrollo de la teoría económica de tales modelos se debió al tipo de problemas que tuvieron que resolver en la guerra, llamados problemas de transporte. Organizó así la histórica Conferencia Cowles Commission con asistencia de connotados economistas y matemáticos. Los artículos ahí presentados se reunieron en *Analysis of production as an efficient combination of activities* por Koopmans [5].

Los modelos de programación lineal cuando se trasladan a términos matemáticos puros, requieren de un método para encontrar la solución de un sistema de ecuaciones lineales simultáneas y de desigualdades lineales que minimicen una forma lineal. Este problema central matemático no se conocía como algo importante, la literatura matemática contiene cientos de artículos con técnicas para resolver sistemas lineales dentro del álgebra lineal. Por otro lado el estudio de sistemas de desigualdades lineales tampoco revistió mayor interés hasta el advenimiento de la Teoría de Juegos en 1944 y la programación lineal en 1947.

Algunos resultados importantes en este campo se deben a Fourier [3] pero enmarcados dentro de la mecánica y la teoría de la probabilidad. Otro se refiere al teorema de transporte de Motzkin [6], teoremas de dualidad de Tucker [7], Von Neumann y Morgenstern [8] y finalmente un importante teorema de desigualdades debido a Farkas [2].

Paralelamente al trabajo de Dantzig, el ruso L.V. Kantorovich estuvo muchos años interesado en la aplicación de las matemáticas a los problemas de programación y publicó en 1960 una extensa monografía titulada *Mathematical methods of organizing and planning production* [4].

Desde el desarrollo del método simplex, muchos investigadores y practicantes han contribuido al crecimiento de la programación lineal en el desarrollo de su teoría matemática, la elaboración de métodos y códigos computacionales eficientes, la exploración de nuevos algoritmos y nuevas aplicaciones, y por el uso de la programación lineal como una herramienta auxiliar para resolver los problemas más complejos, por ejemplo, programas discretos no lineales, combinatorios, de programación estocástica, y problemas de control óptimo.

1.2. Modelado en Investigación de Operaciones

Los métodos matemáticos son la parte esencial de la Investigación de Operaciones, además de ser el área más estudiada del tema, sin embargo, el análisis matemático sólo representa una pequeña parte del trabajo. En esta sección se describirán las etapas más importantes de un estudio característico de IO:

1. **Definición del problema de interés y recolección de datos relevantes.**

   En contraste con los ejemplos de los libros de texto, la mayor parte de los problemas prácticos que enfrenta un equipo de IO son descritos de una manera vaga e imprecisa. Es por eso que la primera actividad será el estudio del sistema relevante y el desarrollo de un resumen bien definido del problema que será analizado. Esta etapa incluye la determinación de los objetivos apropiados, las restricciones sobre lo que es posible hacer, las interrelaciones del área en estudio con otras áreas de la organización, los diferentes cursos de acción posibles, los límites de tiempo para tomar una decisión, etc. Este proceso de definición del problema es crucial, pues afectará de forma significativa la relevancia de las conclusiones del estudio.

2. **Formulación de un modelo matemático que represente el problema.**

Una vez que el tomador de decisiones define el problema, la siguiente etapa consiste en reformularlo de manera conveniente para su análisis. La forma convencional en que la investigación de operaciones logra este objetivo es mediante la construcción de un modelo matemático que represente la esencia del problema.

Los modelos matemáticos pueden ser representaciones idealizadas, pero están presentados en términos de expresiones matemáticas. De esta forma, si deben tomarse n decisiones cuantificables relacionadas entre sí, se representan como **variables de decisión** $(x_l, x_2, ..., x_n)$ para las que se deben determinar los valores respectivos. En consecuencia, la medida de desempeño adecuada (por ejemplo, la ganancia) se expresa como una función matemática de estas variables de decisión (por ejemplo, $P = 3x_1 + 2_x2 + ... + 5_xn$). Esta función se llama **función objetivo**. Las limitaciones sobre los valores de las variables de decisión también se expresan en términos matemáticos, casi siempre en forma de ecuaciones o desigualdades (como $x_1 + 3x_1x_2 + 2x_2 \leq 5$), estas expresiones reciben el nombre de **restricciones**. Las constantes (los coeficientes o el lado derecho de las expresiones) de las restricciones y de la función objetivo se llaman **parámetros** del modelo.

El modelo matemático puede decir entonces que el problema consiste en elegir los valores de las variables de decisión de tal manera que se maximice o minimice la función objetivo, sujeta a las restricciones dadas. Un modelo de este tipo, y algunas de sus variantes menores, tipifican los modelos que se analizan en investigación de operaciones.

3. **Desarrollo de un procedimiento para obtener una solución para el problema a partir del modelo.**

   Una vez formulado el modelo matemático del problema en estudio, la siguiente etapa de un trabajo de I0 consiste en desarrollar un procedimiento, para obtener una solución a partir de este modelo. Puede pensarse que ésta debe ser la parte principal del estudio, pero, en realidad, en la mayoría de los casos no lo es. El verdadero trabajo se encuentra en las etapas anteriores y en las subsecuentes, entre las que se incluyen el análisis posóptimo.

   Un tema común en IO es la búsqueda de una **solución óptima**, es decir, la mejor. Se han desarrollado muchos procedimientos para encontrarla en cierto tipo de problemas, pero es necesario reconocer que estas soluciones son óptimas sólo con respecto al modelo elaborado; sin embargo, si el modelo está bien formulado y verificado, la solución debe tender a constituirse en una buena aproximación de un curso de acción ideal en la realidad. Por esto, la prueba del éxito de un estudio de IO debe ser si proporciona o no una mejor guía para la toma de decisiones que la que se puede obtener por otros medios.

4. **Prueba del modelo y mejoramiento de acuerdo con las necesidades.**

   Es inevitable que la primera versión de un modelo matemático complejo tenga muchas fallas. Es posible que algunos factores o interrelaciones relevantes no hayan sido incorporados y algunos parámetros no hayan sido estimados con precisión. Por lo tanto, antes de usar el modelo, debe probarse de manera exhaustiva para intentar identificar y corregir la mayor cantidad posible de fallas. Con el tiempo, después de una larga serie de modelos mejorados, se que el modelo actual produce resultados razonablemente válidos. Aunque sin duda quedarán algunos problemas menores ocultos en el modelo, las fallas importantes habrán sido eliminadas de manera que el uso del modelo sea confiable. Este proceso de prueba y mejoramiento de un modelo para incrementar su validez se conoce como **validación del modelo**.

5. **Preparación para la aplicación del modelo.**

   Si el modelo va a usarse varias veces, el siguiente paso es instalar un sistema bien documentado para aplicarlo según lo establecido por los decisores. Este sistema debe incorporar el modelo y el procedimiento de solución y los procedimientos operativos para su implementación. Así, aun cuando cambie el personal, el sistema puede ser consultado de manera periódica para proporcionar una solución numérica específica.

6. **Implementación.**

   Una vez desarrollado el sistema para aplicar el modelo, la última etapa de un estudio de I0 es implementarlo. Esta etapa es crítica, pues aquí se verán los beneficios del estudio. Por lo tanto, es importante que el equipo de I0 participe para asegurar que las soluciones del modelo se traduzcan con exactitud en un procedimiento operativo, y para corregir defectos en la solución que se presenten en cualquier momento.

Capítulo 2

Programación Lineal

2.1. El Problema de Programación Lineal

2.1.1. Definiciones Básicas

Considérese el siguiente problema de programación lineal:

$$
\begin{aligned}
\mathit{Minimizar}\quad & c_1x_1 + ... + c_nx_n \\
\mathit{Sujeto\ a}: \quad & a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n \geq b_1 \\
& a_{21}x_1 + ... + a_{2n}x_n \geq b_2 \\
& . \\
& . \\
& . \\
& a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n \geq b_m \\
& x_1, ..., x_n \geq 0
\end{aligned}
$$

Donde $c_1x_1+...+c_nx_n$ es la *función objetivo* o *función criterio* a ser minimizada y será denotada por z. Los coeficientes $c_1, ..., c_n$ se conocen como *coeficientes de costo* y $x_1, ..., x_n$ son las *variables de decisión* (variables, variables estructurales o niveles de actividad) que deben ser determinadas.

La desigualdad $a_{i1}x_1 + ... + a_{in}x_n \geq b_1$ representa a la i-ésima *restricción* (restricción funcional, estructural o tecnológica). Los coeficientes a_{ij} para $i = 1, ..., m,\ j = 1, ..., n$ se llaman *coeficientes tecnológicos*. Los coeficientes tecnológicos forman la *matriz de restricciones* A:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix}$$

El vector columna cuyo i-ésimo componente es b_i, es conocido como *vector de lados derechos* y representa los requisitos mínimos que deben ser satisfechos. Las restricciones $x_1, ..., x_n \geq 0$ son *restricciones de no negatividad*.

Un conjunto de valores para las variables $x_1, ..., x_n$ que satisface todas las restricciones es llamado *punto factible* o *solución factible*. El conjunto de todos estos puntos constituye la *región factible* o el *espacio factible*. Entonces, un *problema de programación lineal* puede plantearse como encontrar una solución que minimice (o maximice) la función objetivo dentro de todas las soluciones factibles.

Ejemplo:

Considérese el siguiente problema:

$$\begin{aligned} Minimizar \quad & 5x_1 + 8x_2 \\ Sujeto a: \quad & x_1 + x_2 \geq 7 \\ & -x_1 - 2x_2 \geq -10 \\ & x_1,\ x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

En este caso, se tienen son variables de decisión x_1 y x_2. La función objetivo a ser minimizada es $5x_1 + 8x_2$. Las restricciones y la región factible se ilustran en la figura 2.1. El problema de optimización consiste en encontrar un punto de la región factible que tenga el menor valor objetivo posible.

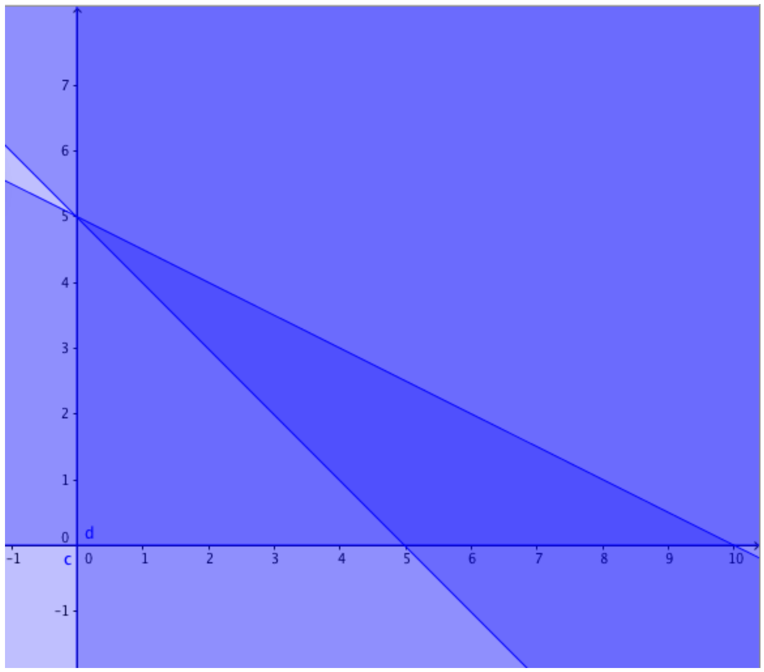


Figura 2.1: Región factible en el para el ejemplo 1

Para representar un problema de optimización como un problema lineal, deben considerarse algunos supuestos implícitos en la formulación anterior. Estos supuestos son los siguientes:

- **Proporcionalidad.** Dada una variable x_j, su contribución al costo total es c_jx_j y su contribución a la i-ésima restricción es $a_{ij}x_j$. Esto significa que si x_j se duplica, por ejemplo, su contribución al costo y a cada restricción también se duplican. Esto significa que no hay costos extra (o ahorros) por usar más una actividad j o no se incurre en un costo inicial por empezar dicha actividad.

- **Aditividad.** Este supuesto garantiza que el costo total es la suma de los costos individuales y que la contribución total a la i-ésima restricción es la suma de las contribuciones individuales de las actividades. Es decir que no hay efectos de sustitución o interacción entre las actividades.

- **Divisibilidad.** Este supuesto asegura que las variables de decisión pueden ser divididas en cualquier nivel fraccional, de modo que son permitidos valores no enteros para las variables de decisión.

- **Determinismo.** Los coeficientes c_j, a_{ij} y b_i se conocen de forma determinista. Cualquier elemento probabilístico o estocástico debe ser aproximado a algún valor determinista equivalente.

2.1.2. Manipulación de los Problemas

Un problema lineal es un problema de minimizar o maximizar una función lineal en la presencia de restricciones lineales en desigualdad y/o igualdad. A través de una manipulación simple, el problema puede ser transformado de una forma a otra equivalente.

Ecuaciones y Desigualdades

Una desigualdad puede transformarse fácilmente en una ecuación. Como ejemplo, considérese la restricción dada por la expresión $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i$. Esta restricción puede ser escrita como una ecuación al restar el *excedente* no negativo o *variable de holgura* x_{n+1} lo que lleva a la restricción $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+1} = b_i$ y $x_{n+1} \geq 0$. De igual manera, una ecuación de la forma $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$ puede ser transformada en dos desigualdades $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geq b_i$ y $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i$.

No Negatividad de las Variables

En la mayoría de los problemas prácticos, las variables representan cantidades físicas y deben ser no negativas. El método simplex está diseñado para resolver problemas lineles donde las variables son no negativas. Si una variable x_j no tiene restricción de signo, entonces debe ser reemplazada por $x'_j - x''_j$ donde $x'_j \geq 0$ y $x''_j \geq 0$.

Problemas de Minimización y Maximización

Otra manipulación del problema consiste en convertir un problema de maximización a un problema de minimización y viceversa. Sobre cualquier región

$$Max \quad \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \quad = \quad -Min \quad \sum_{j=1}^{n} -c_j x_j$$

De modo que un problema de maximización (minimización) puede ser convertido en uno de minimización (maximización) multiplicando los coeficientes de la función objetivo por -1. Después de la optimización del nuevo problema, el valor objetivo es -1 veces el valor óptimo del nuevo problema.

Formátos Canónico y Estándar

Mediante las manipulaciones adecuadas, un programa lineal dado se puede escribir en distintas formas equivalentes. En particular, hay dos formas útiles: estándar y canónica.

Un problema lineal está en *forma estándar* si todas las restricciones son iguales y todas las variables son no negativas. El método simplex está diseñado para aplicarse a problemas escritos en forma estándar. La forma *canónica* es útil para explotar las relaciones de dualidad. Un problema de minimización está en forma canónica si todas sus variables son no negativas y todas las restricciones son de la forma $\geq$. Un problema de maximización está en forma canónica si todas las variables son no negativas y las restricciones son del tipo $\leq$.

Formátos Canónico y Estándar

Tipo de problema	Minimización	Maximización
Forma Estándar	$\begin{array}{lll} Min & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\ Sujeto\ a: & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_j & i=1,...,m \\ & x_j \geq 0 & j=1,...,n \end{array}$	$\begin{array}{lll} Max & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\ Sujeto\ a: & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_j & i=1,...,m \\ & x_j \geq 0 & j=1,...,n \end{array}$
Forma Canónica	$\begin{array}{lll} Min & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\ Sujeto\ a: & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_j & i=1,...,m \\ & x_j \geq 0 & j=1,...,n \end{array}$	$\begin{array}{lll} Max & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\ Sujeto\ a: & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_j & i=1,...,m \\ & x_j \geq 0 & j=1,...,n \end{array}$

Programación Lineal en Notación Matricial

Un problema de programación lineal puede ser planteado de una forma más conveniente usando una notación matricial. Para ilustrarlo, se considerará el siguiente problema:

$$\begin{aligned} Min \quad & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\ sujeto\ a: \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, & i = 1, ..., m \\ & x_j \geq 0, & j = 1, ..., n \end{aligned}$$

Se denotará al vector renglón $(c_1, ..., c_n)$ por **c**, los vectores columna **x** y **b** y a matriz de $m \times n$, **A** como:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix}$$

El problema queda escrito como:

$$\begin{aligned} Min \quad & cx \\ s.a: \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Por conveniencia, el problema también puede ser escrito como:

$$\begin{aligned} Min \quad & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ s.a: \quad & \sum_{j=1}^{n} a_j x_j = b \\ & x_j \geq 0, \qquad j = 1, ..., n \end{aligned}$$

donde $A = [a_1, ..., a_n]$ y a_j denota a la i-ésima columna de A.

2.2. Formulación de Problemas de Programación Lineal

Uno de los aspectos más importantes de la programación lineal es el relacionado con sus aplicaciones a las diferentes ramas de la ciencia. En general, las aplicaciones resultan de proponer un modelo de programación lineal a las situaciones que se analizan. En algunos casos, la naturaleza misma del problema establece en forma sencilla el correspondiente modelo lineal, sin embargo existen otras en donde es necesario reestructurar el planteamiento o modelo original, con el propósito de obtener una estructura lineal.

Para la construcción del modelo de programación lineal, la primera actividad será el estudio del sistema relevante y el desarrollo de un resumen bien definido del problema que será analizado. Esta etapa incluye la determinación de los objetivos apropiados, las restricciones sobre lo que es posible hacer, las posibles interrelaciones, etc. Este proceso de definición del problema es crucial, pues afectará de forma significativa la relevancia de las conclusiones del estudio.

Un modelo de programación lineal comprende principalmente tres conjuntos básicos de elementos:

(a) **Variables y parámetros de decisión**. Las variables de decisión (o decisiones) deben determinarse resolviendo el modelo. Los parámetros son los valores conocidos que relacionan las variables de decisión con las restricciones y la función objetivo. Los parámetros del modelo pueden ser determinísticos o probabilísticos (estocásticos).

(b) **Restricciones**. Para tener en cuenta las limitaciones tecnológicas, económicas y otras del sistema, el modelo debe incluir restricciones (implícitas o explícitas) que restrinjan las variables de decisión a un rango de valores factibles.

(c) **Función objetivo**. La función objetivo define la medida de efectividad del sistema como una función matemática de las variables de decisión. Una decisión óptima del modelo se obtiene cuando los valores de las variables de decisión producen el mejor valor de la función objetivo, sujeta a las restricciones.

Para ilustrar algunos de los elementos y principios involucrados en la formulación de problemas de programación lineal, a continuación se presentarán algunos ejemplos:

Ejemplo: Problema de Producción

Una empresa produce dos juguetes: los osos Bobby y Teddy. Cada uno de estos productos debe ser procesado en dos máquinas diferentes. Una máquina tiene 12 horas de capacidad disponible y la otra 8. Cada oso Bobby producido necesita 2 horas de tiempo en ambas máquinas. Cada oso Teddy producido requiere 3 horas de tiempo en la primera máquina y 1 hora en la segunda máquina. La ganancia de la empresa es de \$6 por oso Bobby y de \$7 por oso Teddy vendidos y la firma puede vender tantas unidades de cada producto como fabrique. El problema consiste en determinar cuántas unidades de osos Bobby y Teddy deben producirse para maximizar las ganancias de la empresa.

Solución: El primer paso consiste en identificar cada uno de los elementos del problema para posteriormente construir el modelo matemático.

(a) **Variables de decisión**.

x_1 : número de osos Bobby que se deben producir

x_2 : número de osos Teddy que se deben producir

(b) **Restricciones**.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\leq 12 && \text{(máquina 1)} \\ 2x_1 + x_2 &\leq 8 && \text{(máquina 2)} \\ x1,\ x2 &\geq 0,\ enteros \end{aligned}$$

(c) **Función objetivo**.

Sea P la ganancia total de la compañía. Como la compañía puede hacer una utilidad de \$6 y \$7 respectivamente por cada oso Bobby y oso Teddy vendido, la utilidad total de la compañía está dada por

$$P = 6x_1 + 7x_2$$

El objetivo de la empresa es maximizar esta ganancia restringida a las condiciones de producción, por lo que la función objetivo está dada por:

$$max\ P = 6x_1 + 7x_2$$

El modelo correspondiente al problema de la empresa de juguetes puede escribirse como:

$$\begin{array}{lll} max & P = 6x_1 + 7x_2 & \\ sujeto\ a: & 2x_1 + 3x_2 \leq 12 & \text{(máquina 1)} \\ & 2x_1 + x_2 \leq 8 & \text{(máquina 2)} \\ & x_1,\ x_2 \geq 0,\ enteros & \end{array}$$

Ejemplo: El Problema de la Dieta

El encargado del programa de comedores comunitarios del gobierno federal quiere determinar el menú más económico que satisfaga las necesidades esenciales de nutrición de la población. Suponga que los alimentos disponibles, su costo, el valor nutricional así como las necesidades nutricionales diarias de las personas son:

Alimento \ Características	Costo ($)	Hierro (mg)	Calcio (mg)
Leche (l)	12	1	1200
Carne (kg)	140	26	0
Huevo (kg)	20	10	300
Pan (pza)	4	2	100
Necesidades diarias		12	1000

Solución:

(a) **Variables y parámetros de decisión**.

$$x_i \ : \text{cantidad que debe comprarse del alimento } i, \text{ donde } i = 1, ..., 4$$

(b) **Restricciones**.

$$x_1 + 26x_2 + 10x_3 + 2x_4 \geq 12$$

$$1200x_1 + 300x_3 + 100x_4 \geq 1000$$

$$x_1, \ x_2, \ x_3, \ x_4 \geq 0$$

(c) **Función objetivo**.

Sea z el costo total del menú.

$$z = 12x_1 + 140x_2 + 20x_3 + 4x_4$$

El objetivo es minimizar el costo, restringido a las condiciones de nutrición, por lo que la función objetivo está dada por:

$$min\ z = 12x_1 + 140x_2 + 20x_3 + 4x_4$$

El modelo correspondiente al problema de la dieta puede escribirse como:

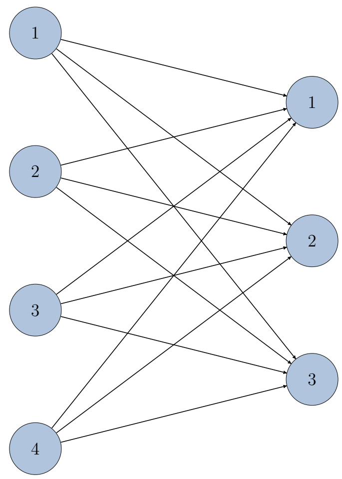
$$\begin{array}{lr} min & z = 12x_1 + 140x_2 + 20x_3 + 4x_4 \\ sujeto\ a: & x_1 + 26x_2 + 10x_3 + 2x_4 \geq 12 \\ & 1200x_1 + 300x_3 + 100x_4 \geq 1000 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \geq 0 \end{array}$$

Ejemplo: Problema de Transporte

Una compañía de plásticos tiene cuatro fábricas y tres distribuidoras. Las fábricas 1, 2, 3 y 4 pueden producir tres, seis, nueve y doce toneladas de plástico por mes respectivamente. Las distribuidoras venden tres, seis y cuatro toneladas de plástico por mes respectivamente. El costo de envío de cada tonelada de plásticos de una fábrica i a una distribuidora j en miles de unidades monetarias es :

i \ j	1	2	3
1	2	1	3
2	1	2	4
3	3	7	1
4	6	4	3

La red que representa el problema se muestra a continuación:



La compañía desea determinar el plan para el envío de plásticos de las fábricas a las distribuidoras a costo mínimo.

Solución: Sea x_{ij} $(i = 1, .., 4,\ j = 1, 2, 3)$ las toneladas de plástico enviadas de la planta i a la distribuidora j. El problema puede formularse como:

$$
\begin{aligned}
min \quad & z = 2x_{11} + x_{12} + 3x_{13} + x_{21} + 2x_{22} + 4x_{23} + 3x_{31} + 7x_{32} + x_{33} + 6x_{41} + 4x_{42} + 3x_{43} \\
s.a: \quad & x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 3 \\
& x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 6 \\
& x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leq 9 \\
& x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} \leq 12 \\
& x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} \geq 3 \\
& x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} \geq 6 \\
& x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} \geq 4 \\
& x_{ij} \geq 0
\end{aligned}
$$

Ejemplo: Otro Problema de Dieta

Pilar quiere gastar lo menos posible en comida cumpliendo con una nueva dieta, en la que necesita al menos $2,000$ kcal pero no más de $2,500$, y mínimos de 55g de proteínas y 800mg de calcio por día. Ella ha seleccionado una cantidad de alimentos que parecen ser adecuados en nutrientes y se muestran en la tabla siguiente:

Alimento	Ración	Energía (Kcal)	Proteínas (g)	Calcio (mg)	Precio($)	Raciones máximas
Avena	28g	110	4	2	3	4
Pollo	100g	205	32	12	24	3
Huevos	2 pz	160	13	54	13	2
Leche	250ml	150	8	285	9	8
Pastel	170g	420	4	22	20	2
Frijoles	260g	260	14	80	19	2

Para que el menú satisfaga todas las condiciones a costo mínimo se plantea el problema de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
min \quad & z = 3x_1 + 24x_2 + 13x_3 + 9x_4 + 20x_5 + 19x_6 \\
s.a: \quad & 110x_1 + 205x_2 + 160x_3 + 150x_4 + 420x_5 + 260x_6 \geq 2000 \\
& 110x_1 + 205x_2 + 160x_3 + 150x_4 + 420x_5 + 260x_6 \leq 2500 \\
& 4x_1 + 32x_2 + 13x_3 + 8x_4 + 4x_5 + 14x_6 \geq 55 \\
& 2x_1 + 12x_2 + 54x_3 + 285x_4 + 22x_5 + 80x_6 \geq 800 \\
& 0 \leq x_1 \leq 4 \\
& 0 \leq x_2 \leq 3 \\
& 0 \leq x_3 \leq 2 \\
& 0 \leq x_4 \leq 8 \\
& 0 \leq x_5 \leq 2 \\
& 0 \leq x_6 \leq 2
\end{aligned}
$$

Ejemplo: Problema de Contratación

Una compañía aérea necesita determinar cuántos sobrecargos contratar y adiestrar en seis meses. Las necesidades de la compañía expresadas como horas-vuelo-sobrecargo son:

Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio
8,000	9,000	7,000	10,000	9,000	11,000

El entrenamiento necesario para que un sobrecargo de servicio en un vuelo dura un mes, por lo que cada persona debe contratarse por lo menos un mes antes.

El entrenamiento necesita 100 horas de supervisión de sobrecargos ya entrenados, por lo que se dispone 100 horas-vuelo-sobrecargo menos durante un mes por cada sobrecargo en entrenamiento. Cada sobrecargo entrenado puede trabajar 150 horas en un mes y la compañía aérea tiene 60 sobrecargos entrenados al principio de enero.

Por razones sindicales, si el tiempo máximo disponible de las sobrecargos entrenados excede al requerido por la compañía en el mes (horas-vuelo y supervisión), éstos trabajarán menos de 150 horas y no se despide a nadie. Sin embargo, en cada mes aproximadamente 10 % de los sobrecargos con experiencia dejan el trabajo por razones de matrimonio u otras. Además, en cada mes, 5 % de las personas que se contratan (y terminan su entrenamiento) son rechazadas por varias razones.

Si se consideran los salarios y otros beneficios, cada sobrecargo adiestrado cuesta a la compañía $\$8,000$ mensuales y cada sobrecargo en adiestramiento $\$4,000$.

La compañía desea determinar el plan de contratación y adiestramiento de sobrecargos a costo mínimo.

Solución:

Sean:

- x_t el número de personas contratadas al inicio del mes t

- y_t el número de sobrecargos con entrenamiento al inicio del mes t
- Dt el número de horas-vuelo-sobrecargo necesarias en el mes t

En este caso el problema consiste en:

$$
\begin{aligned}
&min \quad z = 8000\sum_{t=1}^{6} + 4000\sum_{t=1}^{5} x_t \\
&s.a: \quad 150x_t \geq D_t + 100x_t, && t = 1, ..., 6 \\
&\qquad\quad y_{t+1} = 0{,}95x_t + 0{,}90y_t, && t = 1, ..., 5 \\
&\qquad\quad y_1 = 60 \\
&\qquad\quad x_t,\ y_{t+1} \geq 0, && t = 1, ..., 5
\end{aligned}
$$

2.3. Métodos de Solución

2.3.1. Método Gráfico

El método gráfico es un procedimiento geométrico para resolver un problema de programación lineal. Aunque este método sólo es adecuado para problemas con pocas variables, es muy útil para visualizar un problema de programación lineal. Considérese el siguiente problema:

$$
\begin{aligned}
&min \quad z = cx \\
&s.a: \quad Ax \geq b \\
&\qquad\quad\ x \geq 0
\end{aligned}
$$

La región factible consiste de todos los vectores x tales que $Ax \geq b$ y $x \geq 0$. Entre todos esos puntos, se desea encontrar uno que minimice el valor de cx. Puesto que se desea minimizar z, entonces el plano $z = cx = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = z$ debe moverse paralelamente a sí mismo en la dirección en que decrece el objetivo, es decir, el plano z se mueve en dirección $-c$ tanto como sea posible. Al alcanzar el punto óptimo x^*, la recta $cx^* = z^*$ ya no puede moverse más en la dirección $-c$ pues saldría de la región factible. Para un problema de maximización, el plano $z = cx$ debe moverse tanto como sea posible en dirección c.

El proceso anterior es conveniente para problemas con dos variables y obviamente no es útil para problemas con más de tres variables.

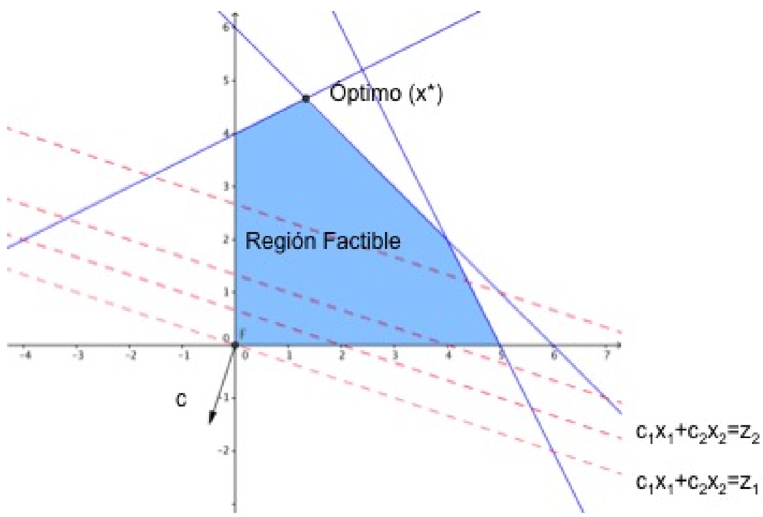


Figura 2.2: Método Gráfico

Como puede verse en la figura 2.2, x^* es uno de los cinco vértices o *puntos extremos*. Si un problema lineal tiene una solución finita, entonces tiene una solución óptima en un vértice o punto extremo.

Ejemplo:

$$\begin{array}{llrcrcr} min & z = & -x_1 & - & 2x_2 & & \\ s.a: & & x_1 & + & x_2 & \leq & 6 \\ & & -x_1 & - & 2x_2 & \leq & -5 \\ & & x_1, & & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

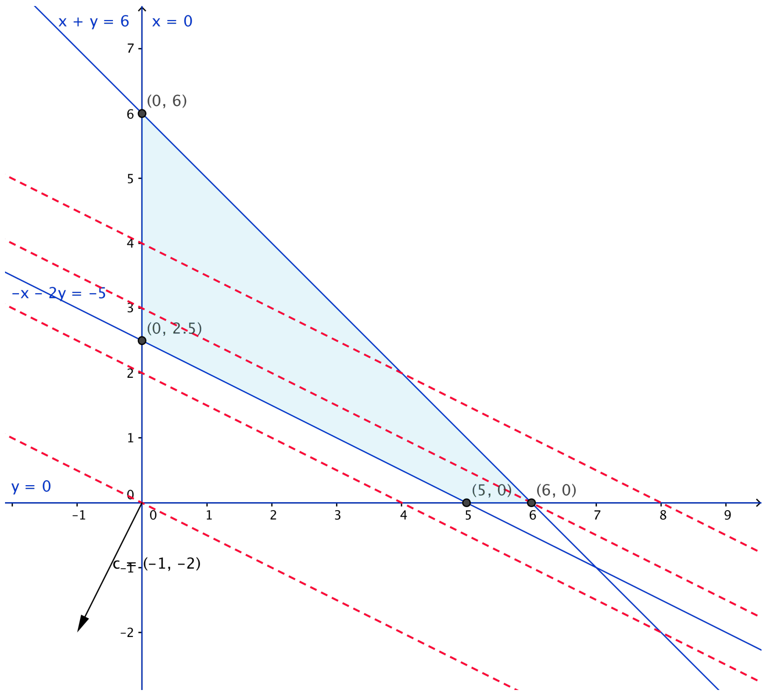


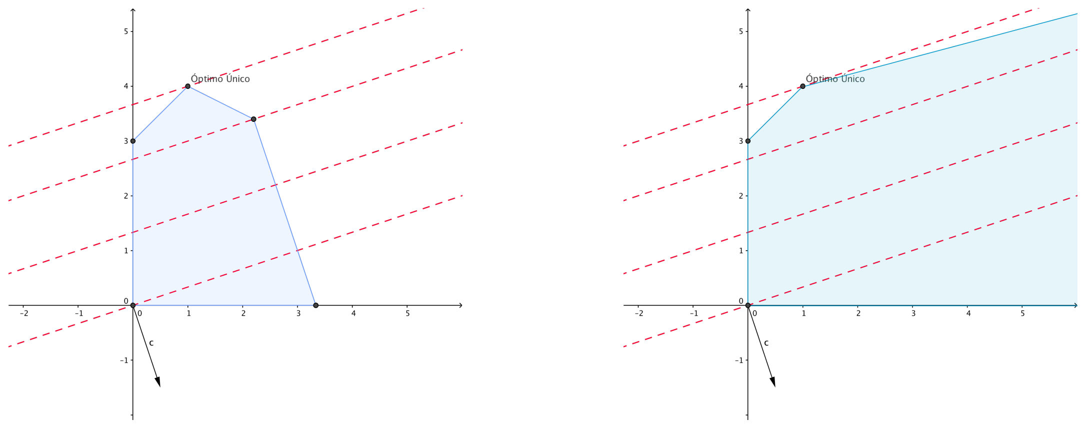
Figura 2.3: Ejemplo del Método Gráfico

En la figura 2.3 se ilustra la región factible. La primera y segunda restricciones representan puntos debajo y sobre las rectas $x_1+x_2=6$ y $-x_1+2x_2=-5$ respectivamente. Las restricciones de no negatividad requieren que los puntos estén en el primer cuadrante. Las ecuaciones $-x_1-3x_2=z$ se llaman *contornos objetivo* y en la figura 2.3 están representados por rectas punteadas. Los contornos se mueven en la dirección $-c=(1,2)$ tanto como sea posible hasta alcanzar el óptimo $(0,6)$.

Dependiendo de la estructura del problema, pueden ocurrir los siguientes casos al buscar una solución a un problema de programación lineal.

Considérese un problema de minimización:

1. *Solución óptima finita única.* Si la solución óptima finita es única entonces ocurre en un punto extremo. En la figura 2.4 se muestra una solución óptima única. En la región (a) la región factible es acotada, en la (b) no lo es, sin embargo, en cada caso la solución óptima



(a) Región Factible Acotada

(b) Región Factible No Acotada

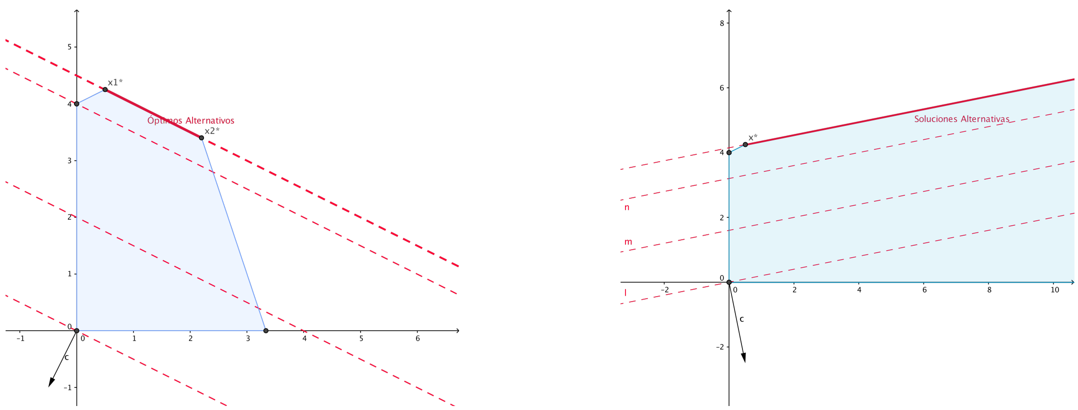
Figura 2.4: Solución Óptima Finita Única

finita es única.

2. *Soluciones óptimas alternativas.* Cómo se muestra en la figura 2.5 (a), la región factible es acotada y los vértices x_1* y x_2* son óptimos, así como cualquier punto sobre el segmento que los une. En la figura 2.5 (b) la región factible no es acotada y el objetivo óptimo es cualquier punto sobre el rayo con vértice en x^*.

3. *Solución óptima no acotada.* En este caso la región factible y la solución óptima son no acotadas. Para un problema de minimización, el plano $cx = z$ se puede mover indefinidamente en dirección $-c$ y siempre estar dentro de la región factible. En este caso, el objetivo óptimo es $-\infty$.

4. *Región factible vacía.* En este caso, el sistema de ecuaciones y/o desigualdades que definen la región factible es inconsistente, como en la figura 2.7



(a) Región Factible Acotada (b) Región Factible No Acotada

Figura 2.5: Soluciones Alternativas

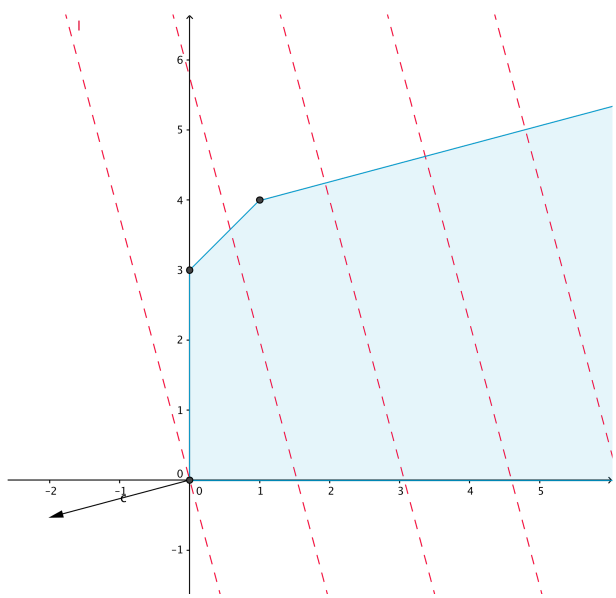


Figura 2.6: Solución Óptima No Acotada

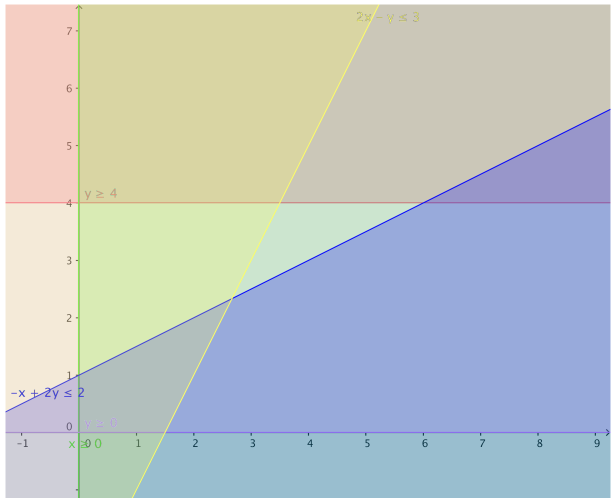


Figura 2.7: Región Factible Vacía

2.3.2. Puntos Extremos y Optimalidad

Con el método gráfico se observó que cuando existe solución óptima de un problema de programación lineal, también existe un punto extremo óptimo. Esta obsevación siempre es cierta. Para mostrarlo, considérese el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{array}{lrcl} min & cx & & \\ s.a: & Ax & = & b \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

Sean $x_1, ..., x_k$ los puntos extremos del conjunto de restricciones, y sean $d_1, ..., d_l$ las direccciones extremas de la misma región. Cualquier punto x tal que $Ax = b$ y $x \geq 0$ pueden ser representado como:

$$x = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_j + \sum_{j=1}^{l} \mu_j d_j$$

donde

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{k}\lambda_j = 1 && \\ &\lambda_j \geq 0, && j = 1,...,k \\ &\mu_j \geq 0, && j = 1,...,j \end{aligned}$$

Entonces el problema de programación lineal puede ser transformado en un problema en las variables $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k,\ \mu_1, \mu_2, ..., \mu_l$ resultando en el siguiente problema lineal equivalente:

$$\begin{aligned} min \quad & \sum_{j=1}^{k}(cx_j)\lambda_j + \sum_{j=1}^{l}(cd_j)\mu_j && \\ s.a: \quad & \sum_{j=1}^{k}\lambda_j = 1 && \\ & \lambda_j \geq 0, && j = 1,...,k \\ & \mu_j \geq 0, && j = 1,...,j \end{aligned}$$

Supóngase que $k \geq 1$. Como las variables μ_j pueden ser arbitrariamente largas, el mínimo sería $-\infty$ si $cd_j < 0$ para alguna $j \in \{1,...,l\}$. Si $cd_j > 0$ para toda $j = 1,...,l$, la correspondiente μ_j puede ser seleccionada como cero. Con la intención de minimizar $\sum_{j=1}^{k}(cx_j)\lambda_j$ sobre $\lambda_1,...,\lambda_k$ satisfaciendo $\lambda_j \geq 0$ para $j = 1,...,k$ y $\sum_{j=1}^{k}\lambda_j = 1$, simplemente se busca el minimo cx_j, sea éste cx_p y sea $\lambda_p = 1$ y el resto de las variables λ_j iguales a cero.

Es decir, si tenemos una región factible no vacía, el valor óptimo de un problema lineal es finito si y sólo si $cd_j \geq 0$ para todas las direcciones extremas, en este caso es posible encontrar un punto mínimo seleccionando el valor objetivo mínimo entre todos los puntos extremos. Con esto se muestra que si existe una solución óptima debe ser posible encontrar un punto extremo óptimo que sea solución.

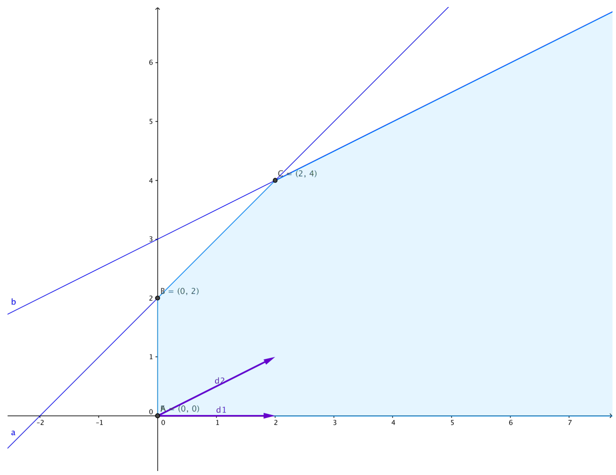


Figura 2.8: Región Factible, Puntos y Direcciones Extremos

Si el mínimo cx_j ocurre en más de un índice, entonces cada punto extremo correspondiente es un punto óptimo y cada combinación convexa de esos puntos es una solución óptima.

Ejemplo: Considérese la región factible definida por las siguientes restricciones:

$$\begin{array}{rrcl} -x_1 & +x_2 & \leq & 2 \\ -x_1 & +2x_2 & \leq & 6 \\ x_1, & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Esta región tiene tres puntos extremos: A, B y C y dos direcciones extremas d_1 y d_2:

$$A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$d_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad d_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Si la función objetivo consiste en minimizar $x_1 - 3x_2$ sobre la región anterior, gráficamente puede verse en la figura 2.9, que el problema es no acotado. En este caso:

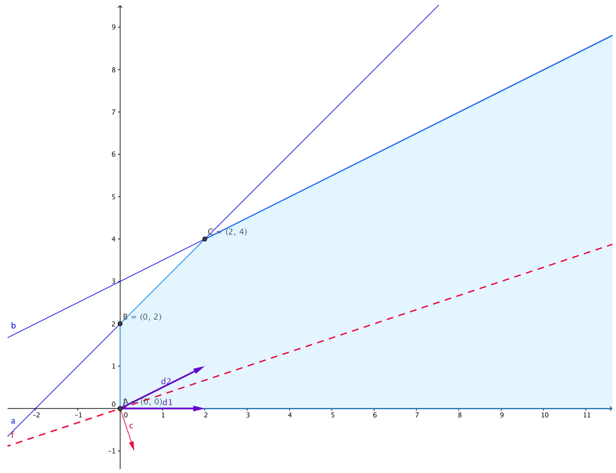


Figura 2.9: Región Factible, Puntos y Direcciones Extremos

$$cA = (1, -3) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$cB = (1, -3) \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = -6$$

$$cC = (1, -3) \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = -10$$

$$cd_1 = (1, -3) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1$$

$$cd_2 = (1, -3) \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = -1$$

Como $cd_2 = -1 < 0$ y μ_2 puede crecer arbitrariamente sin violar las restricciones, el valor objetivo puede ser $-\infty$ haciendo $\mu_2 = \infty$. Entonces μ_1 puede seleccionarse igual a cero. Cualquier conjunto de λ_1, λ_2 y λ_3 no negativo que sume 1 satisface las restricciones, por ejemplo $\lambda_1 = 1$,

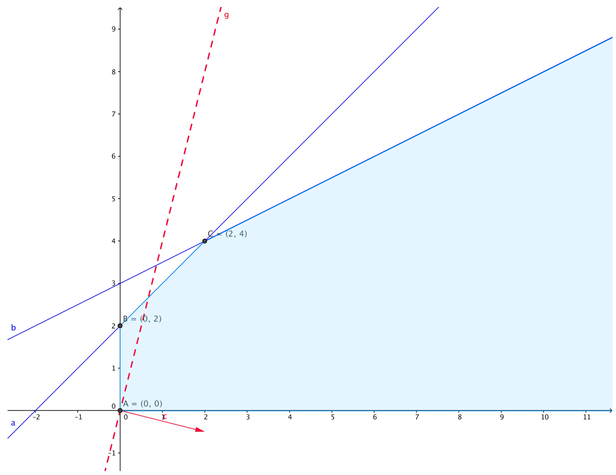


Figura 2.10: Región Factible, Puntos y Direcciones Extremos

$\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Con esto se muestra la condición necesaria y suficiente para que un problema lineal sea no acotado: $cd < 0$ para alguna dirección extrema d.

Ahora considérese el problema de minimizar $4x_1 - x_2$ sobre la misma región.

En la figura 2.10 puede verse que la solución óptima es el punto extremo $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$. En este caso:

$$cA = (4, -1)\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$cB = (4, -1)\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = -2$$

$$cC = (4, -1)\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = 4$$

$$cd_1 = (4, -1)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 4$$

$$cd_2 = (4, -1)\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 7$$

Este problema es equivalente al siguiente:

$$\begin{array}{lcccccccc} min & 0\lambda_1 & -2\lambda_2 & +4\lambda_3 & +4\mu_1 & +7\mu_2 & & \\ s.a: & \lambda_1 & +\lambda_2 & +\lambda_3 & & & = & 1 \\ & \lambda_1, & \lambda_2, & \lambda_3, & \mu_1, & \mu_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Como los coeficientes de μ_1 y μ_2 en la función objetivo son positivos, entonces se fijan $\mu_1 = \mu_2 = 0$. Con la intención de minimizar la expresión $0\lambda_1 - 2\lambda_2 + 4\lambda_3$ sujeto a $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ y $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3\ \geq 0$, se hace $\lambda_2 = 1$ y $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$. Esto muestra que la solución óptima es el punto extremo $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Minimizar a cx cortresponde a mover el plano $cx = constante$ en la dirección $-c$ tan lejos como sea posible. Cuando $c = (1, -3)$ se puede mover el plano indefinidamente intersectando la región factible, entonces el valor óptimo es $-\infty$. Cuando $c = (4, -1)$ no es posible mover indefinidamente el plano, se debe parar en el punto B, de otra manera la solución no sería factible.

2.3.3. Soluciones Básicas Factibles

Definición: Solución Básica Factible. Considérese el sistema $Ax = b$ y $x \geq 0$, donde A es una matriz de $m \times n$ y b es un m-vector. Supóngase que el $rango(A, b) = rango(A) = m$. Después de reordenar las columnas de A, sea $A = [A,\ N]$ donde B es una matriz de $m \times m$ invertible y N es una matriz de $m \times (n - m)$.

La solución $x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix}$ a las ecuaciones $Ax = b$, donde

$$x_B = B^{-1}b$$

y

$$x_N = 0$$

es llamada **solución básica** del sistema.

- Si $x_B \geq 0$ entonces x es llamada una **solución básica factible** del sistema.
- B se llama **matriz básica** o **base** y N es llamada **matriz no básica**.
- Los componentes de x_B se llaman **variables básicas** o **variables dependientes** y los componentes de x_N se llaman **variables no básicas** o **variables independientes**.
- Si $x_B > 0$, entonces x es llamada **solución básica factible no degenerada** y si al menos uno de los componentes de x_B es cero, x es llamada **solución básica factible degenerada**.

Ejemplo: *Solución básica factible.* Considérese el siguiente sistema de desigualdades, que determinan la región que se muestra en la figura 2.11:

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & + & x_2 & \leq & 8 \\ & & x_2 & \leq & 4 \\ x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

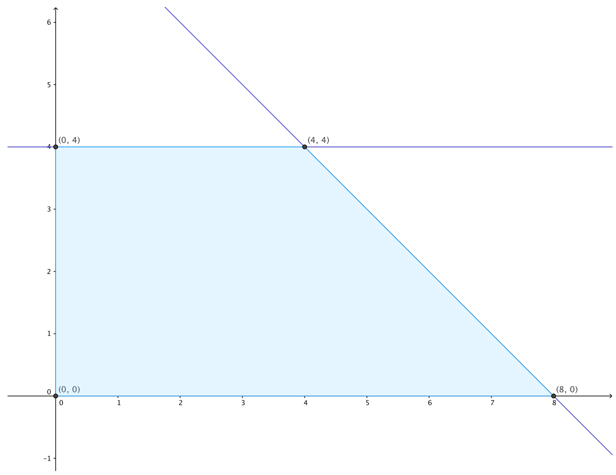


Figura 2.11: Región Factible

Agregando las variables de holgura x_3 y x_4 se obtiene:

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = & 8 \\ & & x_2 & & & + & x_4 & = & 4 \\ x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

La matriz A correspondiente es la siguiente:

$$A = [a_1, a_2, a_3, a_4, a_5] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para encontrar una solución básica factible deben encontrarse bases B de 2×2 no singulares con valor de $B^{-1}b$ no negativo. Las siguientes son las posibles formas de extraer B de A:

1. $B = [a_1, a_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}, \; x_N = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. $B = [a_1, a_4] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix}, \; x_N = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3. $B = [a_2, a_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}, \; x_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4. $B = [a_2, a_4] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -4 \end{bmatrix}, \; x_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

5. $B = [a_3, a_4] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix}, \; x_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Las soluciones 1, 2, 3 y 5 son soluciones básicas factibles, mientras que el punto obtenido en 4 es solución básica, pero no es factible porque viola la restricción de no negatividad de las variables. Entonces se tienen cuatro soluciones básicas factibles:

$$x_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad x_2 = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \quad x_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \quad x_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Los puntos están en $\mathbb{R}^4$ porque fueron introducidas las variables de holgura, por lo que se tienen 4 variables. Las soluciones básicas proyectadas en $\mathbb{R}^2$ son:

$$x_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} \quad x_2 = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix} \quad x_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} \quad x_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

que se ilustran en la figura 2.11. Estos puntos son exactamente los puntos extremos de la región factible.

En general, el número de soluciones básicas factibles en un problema lineal, está acotado por el número de combinaciones de n en m columnas:

$$\left(\begin{array}{c} n \\ m \end{array} \right) = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Ejemplo: *Solución básica degenerada.* Considérese el siguiente sistema de desigualdades, que determinan la región que se muestra en la figura 2.12:

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & x_2 & \leq & 8 \\ & & x_2 & \leq & 4 \\ x_1 & + & 3x_2 & \leq & 16 \\ x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

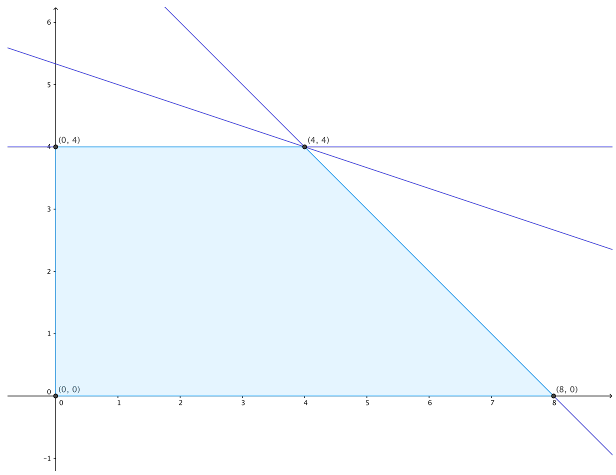


Figura 2.12: Solución degenerada en un punto

Agregando las variables de holgura x_3, x_4 y x_5 se obtiene:

$$\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & & = & 8 \\ & & x_2 & & & + & x_4 & & & = & 4 \\ x_1 & + & 3x_2 & & & & & + & x_5 & = & 16 \\ x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & \geq & 0 \end{array}$$

La matriz A correspondiente es la siguiente:

$$A = [a_1, a_2, a_3, a_4, a_5] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Considérese la solución básica factible con $B = [a_1, a_2, a_3]$:

$$x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_N = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Esta solución básica es degenerada porque la variable básica $x_3 = 0$.

Sea ahora la solución básica factible con la base $B = [a_1, a_2, a_4]$:

$$x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{-1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_N = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Esta base lleva a la misma solución básica factible obtenida con $B = [a_1, a_2, a_3]$ además, la solución básica factible obtenida con la base $B = [a_1, a_2, a_5]$ es:

$$x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_N = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Las tres bases anteriores representan el mismo punto extremo $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (4, 4, 0, 0, 0)$. Esta solución básica factible es degenerada porque cada base asociada incluye una variable básica en nivel cero. El resto de los puntos extremos corresponden a soluciones básicas factibles no degeneradas.

Debe resaltarse que las soluciones degeneradas no solo se presentan como resultado de restricciones redundantes: figura 2.13.

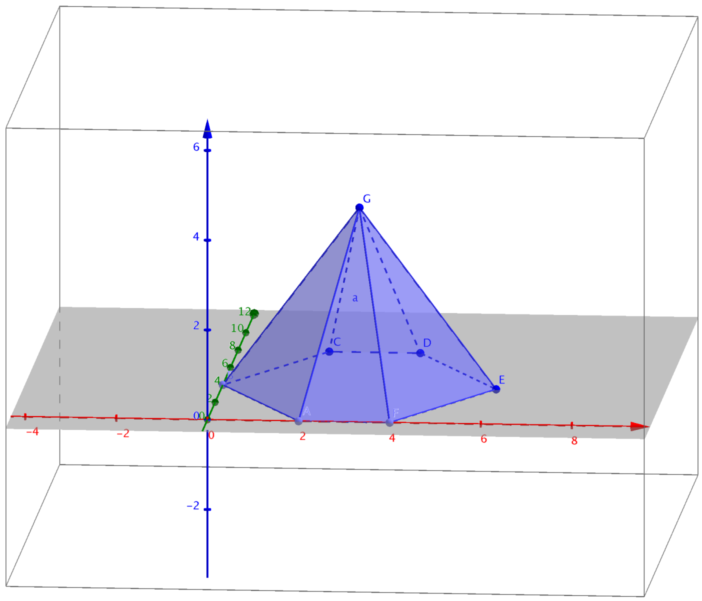


Figura 2.13: Solución degenerada en un punto

Principales Resultados Teóricos

Los principales resultados sobre el problema de programación lineal donde A es una matriz $n \times m$ con rango m son los siguientes:

Considérese el siguiente problema:

$$\begin{array}{lrcl} min & cx & & \\ s.a: & Ax & = & b \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

Teorema 2.1 *El conjunto de puntos extremos corresponde a la colección de soluciones básicas factibles y ambos son no vacíos si la región factible es no vacía.*

Teorema 2.2 *Asumiendo que la región factible es no vacía, una solución óptima finita existe si y sólo si* $cd_j \geq 0$ *para* $j = 1, ..., l$*, donde* $d_1, ..., d_l$ *son las direcciones extremas de la región factible.*

De otra manera, el valor de la solución óptima no estará acotado.

Teorema 2.3 *Si existe una solución básica factible óptima , entonces existe un punto extremo óptimo.*

Teorema 2.4 *A cada solución básica factible le corresponde una base (no necesariamente única) e inversamente, a cada base le corresponde un punto extremo (único). Además, si un punto extremo tiene más de una base que lo represente, entonces es degenerado. Por el contrario, un punto extremo degenerado tiene más de una base que lo represente si y sólo si el sistema $Ax = b$ no implica que las variables básicas degeneradas correspondientes a una base asociada son idénticamente cero.*

Las pruebas pueden consultarse en [1].

El método simplex es un procedimiento que se mueve de un punto extremo a otro encontrando un valor objetivo que al menos no es peor que el anterior. El método también muestra si la región factible es vacía o si el valor objetivo óptimo no está acotado. El procedimiento sólo enumera una pequeña porción de puntos extremos de la región factible, por lo que resulta muy eficiente.

2.3.4. Clave del Método Simplex

La eficacia del método simplex radica en la capacidad de reconocer la optimalidad de un punto extremo solución dado basado en consideraciones locales sin tener que enumerar todas las soluciones básicas factibles o puntos extremos.

Considérese el siguiente problema lineal:

$$\begin{array}{lrcl} min & cx & & \\ s.a: & Ax & = & b \\ & x & \geq & 0 \end{array} \tag{2.1}$$

donde A es una matriz de $m \times n$ con rango m. Supóngase que se tiene una solución básica factible $\begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$ cuyo valor objetivo z_0 está dado por:

$$z_0 = c \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix} = (c_B, c_N) \begin{pmatrix} cB^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix} = c_b B^{-1}b \tag{2.2}$$

Sean x_B y x_N los conjuntos de variables básicas y no básicas para una base dada. La factibilidad requiere que $x_B \geq 0$ y $x_N \geq 0$ y que $b = Ax = Bx_B + Nx_N$. Multiplicando esta ecuación por B^{-1} y reacomodando los términos se tiene que

$$\begin{aligned} x_B &= B^{-1}b &&- \quad B^{-1}Nx_N \\ &= B^{-1}b &&- \quad \textstyle\sum_{j \in J} B^{-1}a_j x_j \\ &= \bar{b} &&- \quad \textstyle\sum_{j \in J}(y_j)x_j \end{aligned} \tag{2.3}$$

donde J es el conjunto de índices de las variables no básicas. Considerando las ecuaciones (2.2) y (2.3) y considerando que z denota el valor de la función objetivo, se tiene que:

$$\begin{aligned} z &= cx \\ &= c_B x_B + c_N x_N \\ &= c_B(B^{-1}b - \textstyle\sum_{j \in J} B^{-1}a_j x_j) + \sum_{j \in J} c_j x_j \\ &= z_0 - \textstyle\sum_{j \in J}(z_j - c_j)x_j \end{aligned} \tag{2.4}$$

$z_j = c_B b^{-1} a_j$ para cada variable básica.

Usando las transformaciones, el problema de programación lineal puede escribirse como:

$$\begin{aligned} min \quad z = \quad & z_0 - \textstyle\sum_{j \in J}(z_j - c_j)x_j \\ s.a: \quad & \textstyle\sum_{j \in J}(y_j)x_j + x_B = \bar{b} \\ & x_B,\ x_j \geq 0,\ j \in J \end{aligned} \tag{2.5}$$

Sin pérdida de generalidad, supóngase que ningún renglón en la ecuación 2.5 tiene ceros en todas las columnas de las variables no básicas x_j, $j \in J$. En otro caso, se conocería el valor de la variable básica en ese renglón, por lo que éste podría quitarse. Las variables x_B sólo juegan un rol de variables de decisión en la ecuación (2.5), entonces, el problema puede escribirse de manera equivalente en términos de las variables no básicas:

$$\begin{array}{lll} min & z = & z_0 - \sum_{j \in J}(z_j - c_j)x_j \\ s.a: & & \sum_{j \in J}(y_j)x_j + x_B \leq \bar{b} \\ & & x_j \geq 0,\ j \in J \end{array} \tag{2.6}$$

El número de variables no básicas es $p = (n - m)$, es decir, hay p variables independientes o p grados de libertad en el sistema de restricciones.

Los valores de $(c_j - z_j)$ se conocen como *coeficientes de costo reducido* ya que son los coeficientes de costo de las variables no básicas en su espacio reducido. La representación (2.5), en la que la función objetivo z y las variables básicas x_B se resuelven en términos de las variables no básicas, se conoce como una representación de la solución básica en *forma conónica.*

La clave del método es la siguiente:

$$\text{Si } (z_j - c_j) \leq 0\ \forall\ j \in J, \text{ entonces la solución básica factible actual es óptima.} \tag{2.7}$$

2.3.5. Motivación Geométrica del Método Simplex

En la representación del problema lineal en el espacio de las variables no básicas, la región factible se define por la intersección de n semiespacios, m asociados con las restricciones en desigualdad en (2.6) y $p = n - m$ asociados con las restricciones de no negatividad.

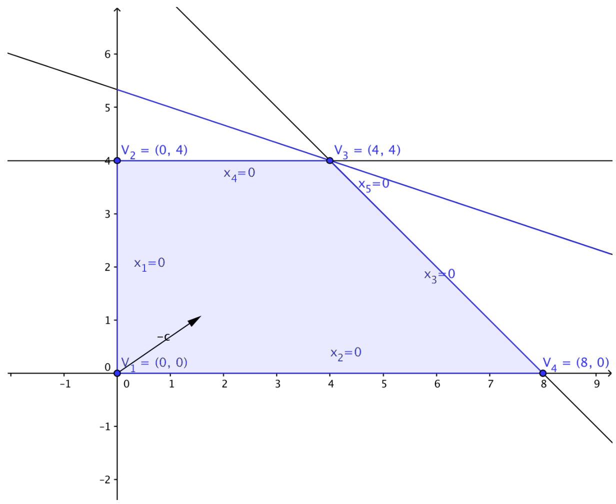


Figura 2.14: Espacio de las Variables No Básicas

Asociados con cada uno de estos semiespacios hay una *variable que define* que toma el valor de cero en el correspondiente hiperplano que define y toma valores no negativos sobre los semiespacios correspondientes. Para las desigualdades en (2.6), estas variables que definen son las variables básicas x_B y para las restricciones de no negatividad lo son $x_j,\ j \in J$.

Considérese el siguiente ejemplo:

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & + & x_2 & \leq & 8 \\ & & x_2 & \leq & 4 \\ x_1 & + & 3x_2 & \leq & 16 \\ x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Agregando las variables de holgura x_3, x_4 y x_5 se obtiene:

$$\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & & & = & 8 \\ & & x_2 & & & + & x_4 & & & = & 4 \\ x_1 & + & 3x_2 & & & & & + & x_5 & = & 16 \\ x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & \geq & 0 \end{array}$$

En la figura 2.14, $p = 2$ dimensiones, donde $n = 5$, $m = 3$, $J = \{1, 2\}$. Las variables que definen asociadas con los $n = 5$ hiperplanos que definen se muestran en los correspondientes hiperplanos en la figura. Los puntos extremos de la región factible están etiquetados como v_1, v_2, v_3 y v_4. La región factible está definida por las restricciones $x_j \geq 0,\ j = 1, ..., n$ en este espacio.

La solución factible actual corresponde al vértice v_1, es decir, el origen. En este espacio, cada punto extremo está definido por la intersección de p hiperplanos linealmente independientes con las correspondientes p variables que definen siendo las variables no básicas.

En el ejemplo, para el vértice v_2 definido por $x_1 = 0$ y $x_4 = 0$, las variables no básicas son x_1 y x_4 y las variables básicas son x_2, x_3 y x_5. Por el vértice degenerado v_3 pasan tres hiperplanos que definen, la intersección de cualesquiera dos de ellos definen a este punto. Entonces hay tres bases que representan a v_3.

Considérense el vértice v_1 y los p hiperplanos que definen asociados con las correspondientes variables no básicas. Manteniendo $(p - 1)$ de estos hiperplanos vinculantes y moviéndose en una dirección factible del hiperplano restante, lleva a lo largo de un rayo unidimensional con vértice en v_1. En el ejemplo, en v_1, manteniendo $x_2 = 0$ e incrementando x_1, nos mueve a lo largo de del eje x_1, con la función objetivo cambiando a una tasa de $\partial z/\partial x_1 = -(z_1 - c_1) = \bar{c_1} < 0$. De manera análoga es el cambio en la dirección del eje x_2. Cualquier rayo describe una dirección atractiva de movimiento.

Si se toma la segunda dirección, suponiendo que es una dirección factible, nos moveremos a lo largo de una arista de la región factible. Se busca que el movimiento llegue tan lejos como sea posible porque $\partial z/\partial x_2 = \bar{c_2}$ es una constante negativa, sin embargo, el movimiento es bloqueado por el hiperplano $x_4 = 0$, ya que x_4 ha sido llevado a cero, y si nos movemos más lejos, x_4 será negativo. Si no existe un hiperplano que bloqueé, la solución no estará acotada. Además, como

$(p-1)$ hiperplanos linealmente independientes eran vinculantes a todo lo largo y un nuevo hiperplano bloqueó el movimiento, se tienen p hiperplanos vinculantes linealmente independientes, por lo que estamos en otro punto extremo de la región factible. Este es un punto extremo adyacente con respecto al punto extremo anterior. En v_2 las variables no básicas son x_1 y x_4 y las restantes son variables básicas. En este momento se ha completado un paso, conocido como *iteración* o *pivote* del simplex. En este paso, la variable x_2 se llama *variable entrante*, porque entra al conjunto de valiables básicas y la variable x_4 se llama *variable de bloqueo* o *variable saliente*, porque bloquea el movimiento con respecto a v_1 y porque sale del conjunto de variables básicas. La base nueva y la previa difieren sólo en una variable básica, por lo que estas bases son *bases adyacentes*.

Repitiendo el proceso en v_2 no se busca meter a x_4 a la base, porque llevaría por la dirección previa. Incrementando x_1 nos movemos a lo largo de una arista que mejora la solución. En esta dirección, más de un hiperplano bloquea el movimiento. Supóngase que arbitrariamente se escoge uno: $x_5 = 0$ como el hiperplano que bloquea. Entonces x_5 sale de la base y con la base actual queda representado v_3, ahora x_4 y x_5 son variables no básicas.

Si se mantiene $x_5 = 0$ y nos movemos en una dirección tal que x_4 se incrementa, la función objetivo decrecerá, sin embargo esta dirección no es factible, nos bloquea el hiperplano $x_3 = 0$ aun sin movernos, lo que significa que x_3 sale de la base, quedando x_5 y x_3 como variables no básicas estando todavía en v_3. Cada paso se cambia la base por una adyacente, cuando ambas representan al mismo punto, se llama *iteración degenerada* o *pivote degenerado*.

Con x_5 y x_3 como variables no básicas en v_3, ninguno de los rayos mejora la función objetivo, por lo que v_3 es la solución óptima. El camino seguido por el algoritmo simplex es v_1, v_2, v_3 y se conoce como *camino simplex*.

Algebraicamente, el programa lineal se representará en el espacio de las variables no básicas en cada iteración. Esto dará la tasa de cambio en la función objetivo a lo largo de cada rayo.

2.3.6. Álgebra del Método Simplex

Considérese la representación del problema lineal en el espacio de las variables no básicas, escrito como en la ecuación (2.5). Si $(z_j - c_j) \leq 0, \ \forall j \in J$, entonces $x_j = 0$ para $j \in J$ y $x_B = \bar{b}$ es óptimo para el problema como en la ecuación (2.7). De otra manera, mientras se mantienen $(p-1)$ variables no básicas fijas en cero, el método simplex considera el incremento de la variable restante, sea esta x_k. Se busca que $z_k - c_k$ sea positivo, y quizá el más positivo de todas las $z_j - c_j, \ j \in J$. Fijando $x_j = 0$ para $j \in J - k$, se obtiene de la ecuación 2.5 que

$$z = z_0 - (z_k - c_k)x_k \tag{2.8}$$

y

$$\begin{bmatrix} x_{B_1} \\ x_{B_2} \\ \vdots \\ x_{B_r} \\ \vdots \\ x_{B_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \\ \vdots \\ \bar{b}_r \\ \vdots \\ \bar{b}_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_{1k} \\ y_{2k} \\ \vdots \\ y_{rk} \\ \vdots \\ y_{mk} \end{bmatrix} x_k \tag{2.9}$$

Si $y_{ik} \leq 0$, entonces x_{B_i} se incrementa cuando x_k se incrementa y sigue siento no negativo. Si $y_{ik} > 0$, entonces x_{B_i} decrece cuando x_k se incrementa. Para cumplir con la no negatividad, x_k se incrementa hasta el primer punto en el cual alguna variable básica x_{B_r} llega a cero. Examinando 2.9, la primera variable básica que se va cero corresponde al mínimo de $\frac{\bar{b}_i}{y_{ik}}$ para y_{ik} con valor positivo. Más precisamente, x_k se puede incrementar hasta

$$x_k = \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} \equiv \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{b_i}{y_{ik}} \ : \ y_{ik} > 0 \right\} \tag{2.10}$$

Si no hay degeneración, $\bar{b}_r > 0$ y entonces $x_k = \frac{\bar{b_r}}{y_{rk}} > 0$. De 2.8 y considerando que $z_k - c_k > 0$, se sigue que $z < z_0$ y la función objetivo mejora estrictamente. Si x_k se incrementa de 0 a $\bar{b_r}/y_{rk}$ y se obtiene una nueva solución factible. Sustituyendo $x_k = \bar{b_r}/y_{rk}$ en 2.9 da el siguiente punto:

$$\begin{aligned} x_{B_i} &= \bar{b_i} - \frac{y_{ik}}{y_{rk}}\bar{b_r}, \qquad i = 1, ..., m \\ x_k &= \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} \end{aligned} \tag{2.11}$$

y el resto de las x_j son cero.

De (2.11), $x_{B_r} = 0$ y a lo más m variables son positivas. Las columnas correspondientes en A son $a_{B_1}, a_{B_2}, ..., a_{B_{r-1}}, a_k, a_{B_{r+1}}, ..., a_{B_m}$, estas columnas son linealmente independientes ya que $y_{rk} \neq 0$, entonces el punto dado en (2.11) es una solución básica factible.

Se ha descrito una *iteración* algebraicamente, es decir, el proceso de transformar una base en otra adyacente. Esto se hace incrementando el valor de una variable no básica x_k con valor positivo $z_k - c_k$ y ajustando las variables básicas actuales. En el proceso, la variable x_{B_r} de va a cero. La variable x_k entra a la base y x_{B_r} sale de la base. Si no hay degeneración, la función objetivo disminuye estrictamente y las soluciones básicas factibles generadas son distintas. Como existe un número finito de soluciones básicas factibles, el procedimiento terminará en un número finito de pasos.

Ejemplo:

$$\begin{array}{rcccrcl} min & x_1 & + & x_2 & & & \\ s.\,a: & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 4 \\ & & & x_2 & \leq & 1 \\ & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Agregando las variables de holgura x_3 y x_4 para escribir el problema en forma estándar, se obtiene la matriz A como sigue:

$$\begin{array}{lccccccccc}
min & x_1 & + & x_2 & & & & & & \\
s.\,a: & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & & = & 4 \\
 & & & x_2 & & & + & x_4 & = & 1 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \geq & 0
\end{array}$$

$$A = [a_1, a_2, a_3, a_4] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Considerando la solución básica factible correspondiente a $B = [a_1, a_2]$, es decir, siendo x_1 y x_2 variables básicas, mientras x_3 y x_4 son las variables no básicas. La representación del problema en el espacio de las variables no básicas como en 2.5 con $J = \{3, 4\}$ puede obtenerse de la siguiente manera:

1.

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad c_B B^{-1} = (1, 1) \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = (1, -1)$$

2.

$$y_3 = B^{-1} a_3 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y_4 = B^{-1} a_4 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3.

$$\bar{b} = B^{-1} b = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

4.

$$z_0 = c_B B^{-1} b = (1, -1) \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 3$$

$$z_3 - c_3 = c_B B^{-1} a_3 = (1, -1) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = 1$$

$$z_4 - c_3 = c_B B^{-1} a_3 = (1, -1) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 0 = -1$$

La representación requerida para el problema es:

$$\begin{array}{lccccccccccc}
min & 3 & - & x_3 & + & x_4 & & & & & & \\
s.\,a: & & & x_3 & - & 2x_4 & + & x_1 & & & = & 2 \\
 & & & & & x_4 & & & + & x_2 & = & 1 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & & & \geq & 0
\end{array}$$

La región factible se muestra en la figura 2.15 en el espacio original y el espacio actual. Como $z_3 - c_3 \geq 0$, entonces la función objetivo mejora incrementando x_3. La solución modificada está dada por:

$$x_B = b^{-1} b - B^{-1} a_3 x_3$$

es decir

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_3$$

El máximo valor que puede tomar x_3 es 2 (cualquier valor mayor, forzaría a x_1 a ser negativa). Entonces, la nueva solución básica es:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 1, 2, 0)$$

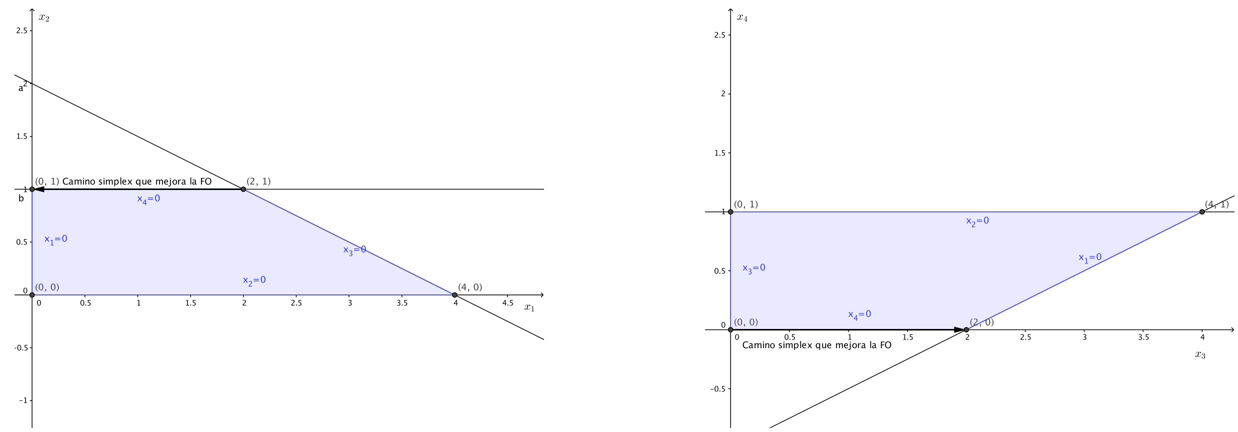


Figura 2.15: Mejora en una Solución Básica Factible

Aquí x_3 entra a la base y x_1 sale. El nuevo punto tiene un valor objetivo igual a 1, lo cual representa una mejora sobre el objetivo previo cuyo valor era 3. La mejora es precisamente $(z_3 - c_3)x_3 = 2$. Desde este punto, se debe continuar el proceso iniciando desde el nuevo punto.

Interpretación de $z_j - c_j$

Sea $z = c_B B^{-1}\bar{b} - (z_j - c_j)x_k$, donde:

$$z_k = c_B B^{-1} a_k = c_B y_k = \sum_{i=1}^{m} c_{B_i} y_{ik} \tag{2.12}$$

y c_{B_i} es el costo de la i-ésima variable básica. Si x_k se incrementa desde el nivel cero, mientras las otras variables no básicas se quedan en nivel cero, entonces las variables $x_{B_1}, ..., x_{B_m}$ deben ser modificadas de acuerdo a (2.9). Esto significa que si x_k se incrementa una unidad, entonces $x_{B_1}, ..., x_{B_m}$ deben decrecer respectivamente por $y_{1k}, ..., y_{mk}$ unidades. El ahorro que resulta de la modificación de las variables básicas como resultado de incrementar x_k en una unidad es entonces $\sum_{i=1}^{m} c_{B_i} y_{ik}$, que es z_k. Sin embargo, el costo de incrementar x_k en si misma en una unidad es c_k. Lo que significa que $z_k - c_k$ es el ahorro menos el costo de incrementar x_k en una unidad. Si $z_k - c_k < 0$ implicará un costo mayor, por lo que está prohibido; y si $z_k - c_k = 0$, incrementar x_k llevará a una solución diferente con el mismo costo.

Salida de la Base y Variable de Bloqueo

Supóngase que se decide incrementar la variable no básica x_k con $z_k - c_k$ positivo. Conforme se incrementa x_k las variables básicas se modifican de acuerdo con (2.9). Si el vector y_k tiene algún componente positivo, entonces la variable básica correspondiente decrece conforme x_k crece. Entonces la variable no básica x_k no puede crecer indefinidamente porque violaría las restricciones de no negatividad de las variables. La primera variable x_{B_r} que llega a cero se llama *variable que bloquea*, porque bloquea el crecimiento de x_k. Entonces x_k entra a la base y x_{B_r} sale de la base.

Ejemplo: [1]

$$\begin{array}{lccccc}
min & 2x_1 & - & x_2 & & \\
s.\,a: & -x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\
 & 2x_1 & + & x_2 & \leq & 6 \\
 & x_1 & , & x_2 & \geq & 0
\end{array}$$

Introduciendo las variables de holgura x_3 y x_4 se llega al siguiente problema:

$$\begin{array}{lccccccccc}
min & 2x_1 & - & x_2 & & & & & & \\
s.\,a: & -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & \leq & 2 \\
 & 2x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & \leq & 6 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \geq & 0
\end{array}$$

Si se consideran la solución básica factible con base $B = [a_1, a_2] = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ y

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$$

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} x_{B_1} \\ x_{B_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{10}{3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} x_3 - \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} x_4 \end{aligned} \tag{2.13}$$

En este momento, $x_3 = x_4 = 0,\ x_1 = 4/3$ y $x_2 = 10/3$.

$$z_3 - c_3 = c_B B^{-1} a_3 - c_3 = (2,1) \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = -\frac{4}{3} < 0$$
$$z_4 - c_4 = c_B B^{-1} a_4 - c_4 = (2,1) \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 0 = \frac{1}{3} > 0$$

Entonces, el objetivo mejora manteniendo a x_3 como no básica e introduciendo x_4 en la base. x_3 se mantiene en nivel cero, x_4 se incrementa y x_2 y x_1 se modifican de acuerdo a (2.13).

x_4 se puede incrementar hasta 4 conforme x_1 se va a cero, cualquier incremento mayor de x_4 resulta en la violación de la no negatividad de x_1, por lo que x_1 es la *variable de bloqueo*. Con $x_4 = 4$ y $x_3 = 0$, los valores modificados de x_1 y x_2 son 0 y 2 respectivamente. La nueva solución básica factible es

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 2, 0, 4)$$

a_4 remplaza a a_1, por lo que x_1 sale de la base y x_4 entra. El nuevo conjunto de variables básicas y no básics y sus valores están dados por:

$$x_B = \begin{bmatrix} x_{B_1} \\ x_{B_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad x_N = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

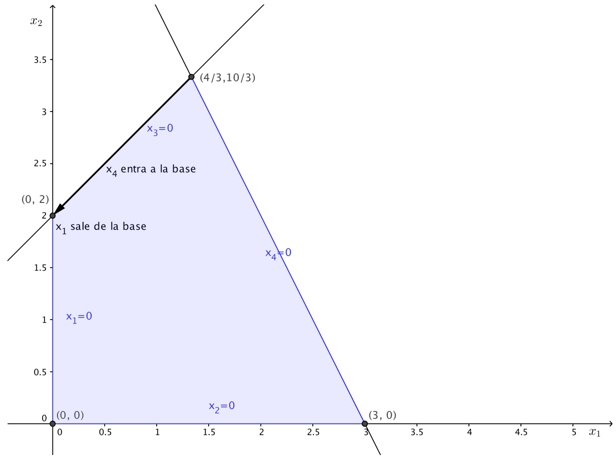


Figura 2.16: Variable de bloqueo (restricción)

Moviéndose de la vieja a la nueva base, conforme x_4 se incrementa en una unidad, x_1 decrece en 1/3 de unidad, es decir, el movimiento es en dirección $(-1/3, -1/3)$ en el espacio (x_1, x_2) (figura 2.16).

2.3.7. Término: Optimalidad y No Acotamiento

El criterio para entrar y salir de la base se puede resumir como sigue:

- **Entrada**: x_k puede entrar si $z_k - c_k > 0$
- **Salida**: x_{B_r} puede salir si
$$\frac{\bar{b}_r}{y_r k} = \min_{1\leq i\leq m}\left\{\frac{\bar{b}_r}{y_r k} \; : \; y_{ik} > 0\right\}$$

Solución Óptima

Supóngase que x^* es una solución básica factible con base B, es decir, $x^* = \begin{pmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{pmatrix}$ y sea z^* la función objetivo de x^*: $z^* = c_B B^{-1} b$. Si $z_j - c_j \leq 0$ para todas las variables no básicas, entonces no hay variables candidatas para entrar a la base. Sea x cualquier solución factible con valor objetivo z, de (2.4) se tiene que

$$z^* - z = \sum_{j \in J} (z_j - c_j) x_j \tag{2.14}$$

como $z_j - c_j \leq 0$ y $x_j \geq 0$ para todas las variables, entonces $z^* \leq z$, y x^* es una **solución básica factible óptima**.

Soluciones Óptimas Únicas y Alternativas

Si $z_j - c_j \leq 0$ para todos los componentes no básicos, entonces la solución óptima actual es única. Para ver esto, sea x cualquier solución factible diferente de x^*. Entonces existe al menos un componente no básico x_j que es positivo, porque si todos los componentes no básicos son cero, x no podría ser diferente de x^*. De (2.14), se sigue que $z > z^*$ y entonces x^* es la única solución óptima.

Considérese el caso en que $z_j - c_j \leq 0$ para todos los componentes no básicos, pero $z_k - c_k = 0$ para al menos una variable no básica x_k. Conforme x_k se incrementa, se obtienen (si no hay degeneración) puntos distintos de x^* pero se tiene la misma función objetivo. Si x_k se incrementa hasta que es bloqueada por una variable básica (si es bloqueada), se obtiene una una solución básica factible alternativa. El proceso de incrementar el valor de x_k genera un número infinito de soluciones óptimas alternativas.

Problemas No Acotados

Supóngase que se tiene una solución básica factible para el sistema $Ax = b,\ x \geq 0$ con valor objetivo z_0. Considérese el caso en que se encuentra una variable no básica x_k con $z_k - c_k > 0$ y $y_k \leq 0$. Esta variable es elegible para entrar a la base, ya que al incrementarse su valor, se mejora el valor objetivo. De (2.4) se tiene que

$$z = z_0 - (z_k - c_k) x_k$$

Como se está minimizando el objetivo z y $z_k - c_k > 0$, entonces debe incrementarse x_k indefinidamente, lo que llevará a z $-\infty$, esto ocurre cuando $y_k \leq 0$, cuando no se encuentra un hiperplano que bloquea el movimiento de x_k. De (2.9) se tiene que

$$x_B = B^{-1}b - [y_k]x_k$$

si $y_k \leq 0$ entonces x_k puede crecer indefinidamente sin que alguna variable básica se vuelva negativa. Por lo que la solución x es factible y su valor objetivo es $z = z_0 - (z_k - c_k)x_k$, que tiende a $-\infty$ cuando x_k tiende a ∞.

En resumen, si se tiene una solución básica factible con $z_k - c_k > 0$ para alguna variable no básica x_k, mientras $y_k \leq 0$, el objetivo óptimo es no acotado.

2.3.8. El Método Simplex

El método simplex fue desarrollado en 1947 por George Dantzig con base en la teoría presentada en las secciones anteriores. Se utiliza, sobre todo para resolver problemas lineales en los que intervienen tres o más variables.

El álgebra matricial y el método de Gauss-Jordan para resolver un sistema de ecuaciones lineales constituyen la base del método. Se trata de un algoritmo de naturaleza iterativa que permite mejorar la solución en cada paso y concluye cuando no es posible mejorar dicha solución en un número finito de pasos.

Supóngase que se tiene una solución básica factible inicial x con base B. El problema de programación lineal puede representarse como

$$\begin{array}{lccccccc} min & z & & & & & & \\ s.\,a: & z & - & c_Bx_B & - & c_Nx_N & = & 0 \\ & & & Bx_B & + & Nx_N & = & b \\ & & & x_B & , & x_N & \geq & 0 \end{array} \tag{2.15}$$

De la segunda restricción de (2.15) se tiene que

$$x_B + B^{-1}Nx_N = b^{-1} \tag{2.16}$$

Multiplicando (2.16) por c_B sumándolo a la primera restricción de (2.15) se obtiene

$$z + 0x_B + (c_B B^{-1}N - c_N)x_N = c_B B^{-1}b \tag{2.17}$$

Actualmente $x_N = 0$ y de (2.16) y (2.17) se tiene que $x_B = B^{-1}b$ y $z = c_B B^{-1}b$. Todo lo anterior puede representarse en una tabla. Es ésta, z es considerada como una variable básica a ser minimizada. El renglón objetivo se conoce como renglón cero y los restantes son renglones de 1 a m. Las *columnas del lado derecho* (RHS por sus siglas en inglés) denotan los valores de las variables básicas (incluyendo a z). Las variables básicas se identifican en la primera columna de la izquierda.

	z	x_B	x_N	**Lados Derechos**	
z	1	0	$c_B B^{-1}N - c_N$	$c_B B^{-1}b$	Renglón 0
x_B	0	I	$B^{-1}N$	$B^{-1}b$	Renglones 1 a m

De esta tabla se puede obtener el valor de la función objetivo $c_B B^{-1}b$ y los valores de las variables básicas $B^{-1}b$ en la columna de los lados derechos, pero también muestra la información para realizar el método simplex.

El renglón de costo actual es $c_B B^{-1}N - c_N$, que consiste de los valores $(z_j - c_j)$ para las variables no básicas, entonces el renglón cero indicará si se ha llegado a la solución óptima (si $z_j - c_j \leq 0$) o que variable debe incrementarse. Si x_k se incrementa, entonces el vector $y_k = B^{-1}a_k$, que se encuentra en los renglones 1 a m de la tabla bajo la variable x_k, ayudará a determinar cuanto puede incrementarse el valor de x_k. Si $y_k \leq 0$, entonces x_k puede incrementarse indefinidamente y el valor de objetivo no estará acotado. Por otro lado, si $y_k \nleq 0$, es decir, si al menos un componente de y_k es positivo, entonces el incremento en x_k será bloqueado por alguna variable básica actual que irá a cero. La prueba de la razón mínima determina la variable de bloqueo. Se tendrá un esquema que hará lo siguiente:

1. Actualizar las variables básicas y sus valores
2. Actualizar los valores $(z_j - c_j)$ de las nuevas variables no básicas.
3. Actualizar las columnas y_j

Pivote

Todos los pasos anteriores pueden completarse simultáneamente en una simple operación de pivoteo. Si x_k entra a la base y x_{B_r} sale de la base, entonces el pivote se hará en y_{rk} se la siguiente manera:

1. Dividir el renglón r por y_{rk}
2. Para $i = 1, ..., m$ e $i \neq r$, actualizar el i-ésimo renglón sumando $-y_{ik}$ veces al r-ésimo renglón.
3. Actualizar el renglón cero sumándole $c_k - z_k$ veces el renglón r-ésimo. Las tablas 2.1 y 2.2 muestran la situación antes y después del cambio.

Cuadro 2.1: Antes del pivoteo

	z	x_{B_1}	...	x_{B_r}	...	x_{B_m}	...	x_j	...	x_k	...	**LD**
z	1	0	...	0	...	0	...	$z_j - c_j$	...	$z_k - c_k$	...	$c_B\bar{b}$
x_{B_1}	0	1	...	0	...	0	...	y_{1j}	...	y_{1k}	...	$\bar{b}_1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{B_r}	0	0	...	1	...	0	...	y_{rj}	...	y_{rk}	...	$\bar{b}_r$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{B_m}	0	0	...	0	...	1	...	y_{mj}	...	y_{mk}	...	$\bar{b}_m$

Lo que ocurrirá con la operación será lo siguiente:

1. La variable x_k entrará a la base y x_{B_r} saldrá de la base. Este cambio se indica en el lado izquierdo de la tabla, remplazando x_{B_r} con x_k. Para la siguiente iteración x_{B_r} será x_k.

2. El lado derecho de la tabla da los valores actuales de las variables básicas. El valor de las variables no básicas es cero.

3. Suponiendo que las columnas originales de las nuevas variables básicas y no básicas son $\hat{B}$ y $\hat{N}$ respectivamente. Después de una serie de operaciones elementales , la tabla original se reduce a la tabla actual con $\hat{B}$ remplazada por I, esto es equivalente a premultiplicar por $\hat{B}^{-1}$, esto resulta en una nueva tabla de la que se obtiene una nueva $\hat{B}^{-1}\hat{N}$ bajo las variables no básicas, un conjunto $(z_j - c_j)$ actualizado para las nuevas variable no básics y los valores de las nuevas variables básicas en la función objetivo.

Cuadro 2.2: Después del pivoteo

	z	x_{B_1}	...	x_{B_r}	...	x_{B_m}	...	x_j	...	x_k	...	**LD**
z	1	0	...	$\frac{c_k - z_k}{y_{rk}}$	...	0	...	$(z_j - c_j) - \frac{y_{rj}}{y_{rk}}(z_j - c_j)$	...	0	...	$c_B\bar{b} - (z_j - c_j)\frac{\bar{b}_r}{y_{rk}}$
x_{B_1}	0	1	...	$-\frac{y_{1k}}{y_{rk}}$	...	0	...	$y_{1j} - \frac{y_{rj}}{y_{rk}}y_{1k}$	...	0	...	$\bar{b_1} - \frac{y_{1k}}{y_{rk}}\bar{b_r}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_k	0	0	...	$\frac{1}{yrk}$	...	0	...	$\frac{y_{rj}}{y_{rk}}$	...	1	...	$\frac{\bar{b_r}}{y_{rk}}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{B_m}	0	0	...	$-\frac{y_{mk}}{y_{rk}}$	...	1	...	$y_{mj} - \frac{y_{rj}}{y_{rk}}y_{mk}$	...	0	...	$\bar{b_m} - \frac{y_{mk}}{y_{rk}}\bar{b_r}$

El Método Simplex (resumen)

1. Transformar el problema a su forma estándar

2. Determinar una solución factible inicial.

3. Si el objetivo es minimizar (maximizar) a la función z, elegir de ésta un coeficiente positivo (negativo), que definirá la columna pivote (variable no básica que entra). Si todos los coeficientes son negativos o cero, el problema termina y se tiene la solución óptima.

4. Determinar el renglón pivote (variable básica que sale), dividiendo el vector de términos independientes entre el vector de coeficientes de la columna pivote, y elegir el cociente mínimo. No considerar coeficientes negativos en la columna pivote. Si todos son negativos el problema es no acotado y termina.

5. Realizar el pivoteo para actualizar la base.

   - Fila pivote

     (a) Reemplazar la variable de salida en la columna básica con la variable de entrada.

     (b) $Nueva\ fila\ pivote = \frac{Fila\ pivote\ actual}{Elemento\ pivote}$

   - Resto de las filas, incluyendo al renglón cero.

     $Nueva\ fila = Fila\ actual\ -(Su\ coeficiente\ en\ la\ columna\ pivote)(Nueva\ fila\ pivote)$

6. Si todos los coeficientes de la función objetivo son positivos o cero, para maximizar o negativos o cero para minimizar, el problema termina y tenemos la solución. En caso contrario regresar a los pasos (2) o (3).

2.3.9. Soluciones Factibles Iniciales

El método simplex inicia con una solución básica factible y se mueve a otra que mejore el valor de la función objetivo. Para inicializar el método, es necesaria una base B con $\bar{B} = B^{-1}b \geq 0$. El método puede ser siempre inicializado con la matriz identidad como base.

Caso 1

Si las restricciones son de la forma $Ax \leq b, x \geq 0$ con A de $m \times n$ y b un vector no negativo, agregando el vector de holgura x_s las restricciones pueden ponerse en forma estándar. La nueva matriz de restricciones puede escribirse como (A, I), tener rango m y tener solución factible básica haciendo a x_s el vector básico, y el simplex puede empezar.

Otros casos

Si las restricciones son de la forma $Ax \leq b, x \geq 0$ pero el vector b no es no negativo, no es posible introducir x_s y obtener una base inmediata, ya que se violaría la restricción de no negatividad.

Otro caso ocurre cuando las restricciones son de la forma $Ax \geq b, x \geq 0$, donde $b \nleq 0$. Después de restar el vector x_s, se obtiene $Ax - x_s = b, x \geq 0$ y $x_s \geq 0$. En este caso la base tampoco es obvia.

En general para

$$\begin{array}{lcccccc} min\ z = & cx & & & & & \\ s.\ a: & Ax & = & b & & & \\ & x & \geq & 0 & con & b & \geq & 0 \end{array}$$

Si A contiene una identidad, se tiene una base inmediata haciendo $B = I$, y como $b \geq 0, B^{-1}b \geq 0$. En otro caso hay que hacer algo previo.

Ejemplo:

$$\begin{array}{rcrcccccl} x_1 & + & 2x_2 & -s_1 & & & = & 4 & \geq \\ -3x_1 & + & 4x_2 & & -s_2 & & = & 5 & \geq \\ 2x_1 & + & x_2 & & & +\ s_3 & = & 6 & \leq \\ x_1 & , & x_2 & & & & \geq & 0 & \end{array}$$

Se deben introducir dos variables artificiales x_{a1}, x_{a2}

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcrcr}
x_1 & + & 2x_2 & - & s_1 & & & & & + & x_{a1} & & & = & 4 \\
-3x_1 & + & 4x_2 & & & - & s_2 & & & & & + & x_{a2} & = & 5 \\
2x_1 & + & x_2 & & & & & + & s_3 & & & & & = & 6
\end{array}$$

Y se obtiene una solución básica factible inicial. Se busca que las variables artificiales se vuelvan cero.

2.3.10. Análisis de Sensibilidad y Análisis Paramétrico

En los problemas de programación lineal, los parámetros del modelo (datos de entrada) pueden cambiar dentro de ciertos límites sin que cambie la solución óptima, esto se conoce como *análisis de sensibilidad*. El análisis paramétrico es una extensión del análisis de sensibilidad que consiste en investigar cómo cambia la solución óptima y el valor óptimo de un PPL cuando se efectúan cambios continuos en uno o más parámetros, de la función objetivo.

Análisis de Sensibilidad

El análisis de sensibilidad se inicia una vez obtenida la solución óptima del problema, es un tipo de análisis post óptimo. Con este procedimiento la matriz básica (base óptima) se conserva constante para los cálculos necesarios, logrando con esto una mayor facilidad en las operaciones. Con este análisis se obtienen resultados discretos (modificaciones discretas de los datos) y se obtiene un rango de valores mínimos y máximos para la función objetivo actual.

Considérese el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{array}{rrcl}
min & cx & & \\
s.a: & Ax & = & b \\
 & x & \geq & 0
\end{array}$$

Considerando que el método simplex produjo una base óptima B, se debe encontrar una nueva solución óptima si alguno de los datos del problema cambian sin resolver el problema completamente. Para este caso, pueden ocurrir las siguientes variaciones:

(a) Cambio en el vector de costos c.

(b) Cambio en el vector de lados derechos b.

(c) Cambio en la matriz de restricciones A.

(d) Adición de una nueva actividad (una nueva columna en A).

(e) Adición de una nueva restricción.

Cambio en el Vector de Costos

Dada una solución básica factible, puede ocurrir que cambie alguno (o algunos) de los coeficientes de costo de las variables de c_k a c'_k. El efecto de este cambio en la tabla final ocurrirá en el renglón de costos. Se pueden considerar dos casos:

- **Caso 1: x_k no es básica.** En este caso, c_B no se afecta, por lo que $z_j = c_B B^{-1} a_j$ no cambia para alguna j. Entonces, $z_k - c_k$ se remplaza por $z_k - c'_k$. Debe notarse que $z_k - c_k \leq 0$, ya que la base actual era óptima para el problema original. Si $z_k - c'_k = (z_k - c_k) + (c_k - c'_k)$ es positivo, entonces x_k debe introducirse a la base y continuar con el método simplex; en otro caso, la solución seguirá siendo óptima con respecto al nuevo problema.

- **Caso 2: x_k es básica, siendo $x_k \equiv x_{B_t}$.** Aquí, c_{B_t} se remplaza por c'_{B_t}. Sea z'_j el nuevo valor de z_j, entonces $z'_j - c_j$ se calcula como sigue:

$$\begin{aligned} z'_j - c_j &= c'_B B^{-1} a_j - c_j \\ &= (c_B B^{-1} a_j - c_j) + (0, 0, ..., c'_{B_t} - c_{B_t}, 0, ..., 0) y_j \\ &= (z_j - c_j) + (c'_{B_t} - c_{B_t}) y_{tj} \qquad \forall\ j. \end{aligned}$$

En particular, para $j = k$, $z_k - c_k = 0$ y $y_t k = 1$, entonces $c'_k - c_k = z'_k - c_k$, por lo que el renglón de costos puede actualizarse agregando el cambio neto en el costo de $x_{B_t} \equiv x_k$ veces el actual renglón t de la tabla final al renglón de costos original. Entonces $z'_k - c_k$ se actualiza a $z'_k - c'_k = 0$. El nuevo valor objetivo se obtiene como $c'_B B^{-1} b = c_B B^{-1} b + (c'_{B_t} - c_{B_t})\bar{b}_t$ en el proceso.

Ejemplo: Considérese el siguiente problema:

$$
\begin{array}{lrcrcrcl}
min\ z = & -2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & & \\
s.\ a: & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 6 \\
 & -x_1 & + & 2x_2 & & & \leq & 4 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

La tabla óptima está dada por:

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
z	1	0	-3	-1	-2	0	-12
x_1	0	1	1	1	1	0	6
x_5	0	0	3	1	1	1	10

Supóngase que $c_2 = 1$ se cambia por $c'_2 = -3$. Como x_2 es no básica, entonces $z_2 - c'_2 = (z_2 - c_2) + (c_2 - c'_2) = -3 + 4 = 1$, y el resto de las $z_j - c_j$ no se afectan. Entonces x_2 entra a la base en la siguiente tabla:

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
z	1	0	1	-1	-2	0	-12
x_1	0	1	1	1	1	0	6
x_5	0	0	3	1	1	1	10

De donde debe seguirse iterando para llegar a la solución óptima.

Ahora considérese que $c_1 = -2$ se remplaza por cero. Como x_1 es básica, entonces el nuevo renglón de costos, excepto $z_1 - c_1$, se obtiene de multiplicar el renglón de x_1 por el cambio en c_1, es decir $(c_2' - c_2) = 0 - (-2) = 2$ y agregarlo al renglón de costos anterior. El nuevo $z_1 - c_1$ es cero, pero el nuevo $z_3 - c_3$ es positivo, por lo que x_3 entra a la base en la siguiente tabla:

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
z	1	0	-1	1	0	0	0
x_1	0	1	1	1	1	0	6
x_5	0	0	3	1	1	1	10

Cambio en el Vector de Lados Derechos

Si el vector de lados derechos b se remplaza por b', entonces $B^{-1}b$ se remplazará por $B^{-1}b'$. El nuevo lado derecho puede ser calculado sin evaluar explícitamente $B^{-1}b'$:

$$B^{-1}b' = B^{-1}b - B^{-1}b + B^{-1}b' = B^{-1}b + B^{-1}(b' - b)$$

Si $B^{-1} \geq 0$ la base permanece óptima y los valores de las variables básicas son $B^{-1}b'$ y el valor de la función objetivo es $c_B B^{-1}b'$.

Ejemplo: Considerando el problema anterior:

$$\begin{array}{lrcrcrcl}
min\ z = & -2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & & \\
s.\ a: & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 6 \\
 & -x_1 & + & 2x_2 & & & \leq & 4 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0
\end{array}$$

La tabla óptima:

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
z	1	0	-3	-1	-2	0	-12
x_1	0	1	1	1	1	0	6
x_5	0	0	3	1	1	1	10

y suponiendo que el lado derecho se remplaza por $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

entonces

$$B^{-1}b' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

y

$$z = c_B B^{-1} b' = (-2, 0) \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} = -6$$

la nueva solución óptima es $x_1 = 3,\ x_5 = 7,\ x_2 = x_3 = x_4 = 0,\ z = -6.$

Cambio en la Matriz de Restricciones

En la matriz A pueden ocurrir dos tipos de cambios: en las columnas de las variables no básicas o en las de las variables básicas.

- **Caso 1: Cambios en las columnas no básicas.** Supóngase que la columna a_j se modifica a a'_j. La nueva columna actualizada es $B^{-1}a'_j$ y $z'_j - c_j = c_B B^{-1} a'_j - c_j$. Si $z'_j - c_j \leq 0$ la solución permanece óptima, en otro caso, el método simplex continúa después de actualizar la columna j de la tabla.

  Ejemplo: Considerando el mismo problema:

$$\begin{array}{lrcrcrcl} min\ z = & -2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & & \\ s.\ a: & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 6 \\ & -x_1 & + & 2x_2 & & & \leq & 4 \\ & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

  La tabla óptima:

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
z	1	0	-3	-1	-2	0	-12
x_1	0	1	1	1	1	0	6
x_5	0	0	3	1	1	1	10

y suponiendo que a_2 se cambia de $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$. Entonces

$$y_2' = B^{-1}a_2' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

y

$$c_B B^{-1}a_2' - c_2 = (-2, 0) \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} - 1 = -5$$

la nueva solución óptima es $x_1 = 2,\ x_5 = 7,\ x_2 = x_3 = x_4 = 0,\ z_2 - c_2 = -5$.

- **Caso 2: Cambios en las columnas básicas.** Si la columna básica a_j se modifica a a_j', es posible que el conjunto actual de vectores básicos no se conserve después del cambio. Aun cuando esto no ocurra, un cambio en una columna básica representará un cambio en B^{-1} y en consecuencia, en las entradas de cada columna.

  Para incorporar este cambio, se deben seguir dos pasos:

  1. Suponer que se agregará una nueva variable x_j' con su columna correspondiente a_j' y coeficiente objetivo c_j'.
  2. Eliminar la variable anterior x_j del problema.

  El primer paso se completa calculando $y_j' = B^{-1}a_j'$ y $z_j' - c_j = c_B B^{-1}a_j' - c_j$, donde B es la base actual. Este proceso genera la columna actualizada para x_j'. Si el elemento y_{jj}' en el renglón básico de x_j y la columna de x'_j no es cero, entonces x'_j puede intercambiarse en la base por x_j y la columna de la vieja variable x_j puede eliminarse. Esto puede eliminar la optimalidad, pero esta puede recuperarse agregando variables artificiales. Si $y'_{jj} = 0$, el conjunto actual de vectores básicos con la nueva columna de x_j deja de formar una base, en este caso, se debe tratar a x_j como variable artificial básica y buscar una solución básica factible.

Ejemplo: Siguiendo con el ejemplo:

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
z	1	0	−3	−1	−2	0	−12
x_1	0	1	1	1	1	0	6
x_5	0	0	3	1	1	1	10

y suponiendo que a_1 se cambia de $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Entonces

$$y'_1 = B^{-1}a'_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

y

$$c_B B^{-1} a'_1 - c_1 = (-2, 0) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} - (-2) = 2$$

aquí, la entrada de y'_1 en el renglón x_1 es cero y las columnas básicas actuales dejan de serlo. Agregando la columna $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ correspondiente a x'_1 y haciendo x_1 variable artificial en la base con una penalización M en la función objetivo, se obtiene la siguiente tabla:

	z	x_1	x_1'	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
z	1	$-M$	2	-3	-1	-2	0	-12
x_1	0	1	0	1	1	1	0	6
x_5	0	0	-1	3	1	1	1	10

Análisis Paramétrico

Considérese el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{aligned} min\ z = \quad & cx & & \\ s.\ a: \quad & Ax & = & \ b \\ & x & \geq & \ 0 \end{aligned}$$

Supóngase que B es una base óptima.

- **Perturbaciones en el vector de costos** a lo largo de la dirección c', es decir, c se reemplaza por $c + \lambda c'$ donde $\lambda \geq 0$.

  Se desea encontrar soluciones óptimas y sus valores objetivo correspondientes como una función de $\lambda \geq 0$.

  Descomponiendo A como $[B, N]$, c como (c_B, c_N) y c' en (c'_B, c'_N) se tiene

$$\begin{aligned} z - (c_B + \lambda c'_B)x_B - (c_N + \lambda c'_N)x_N &= 0 \\ Bx_B + Nx_N &= b \end{aligned}$$

  Actualizando la tabla se tiene

$$\begin{aligned} z + \textstyle\sum_{j\in J}[(z_j - c_j) + \lambda(z'_j - c'_j)]x_j &= c_B\bar{b} + \lambda c'_B\bar{b} \\ x_B + \textstyle\sum_{j\in J} y_j x_j &= \bar{b} \end{aligned}$$

  Donde J es el conjunto de índices de variables no básicas.

  En la tabla óptima actual, $\lambda = 0$.

Lo primero que se desea saber es qué tan lejos nos podemos mover en dirección c' manteniendo la optimalidad.

Sea $S = \{j : (z'_j - c'_j) > 0\}$. Si $S = \emptyset$ la solución es óptima $\forall \lambda \geq 0$. De otra manera calcularemos $\hat{\lambda}$ como

$$\hat{\lambda} = \begin{array}{c} min \\ j \in S \end{array} \left\{ \frac{-(z_j - c_j)}{z'_j - c'_j} \right\} = \frac{-(z_k - c_k)}{z'_k - c'_k}$$

Sea $\lambda_1 = \hat{\lambda}$. Para $\lambda \in [0, \lambda_1]$ la solución actual es óptima y el valor objetivo está dado por

$$c_B \bar{b} + \lambda c'_B \bar{b} = c_B B^{-1} b + \lambda c'_B B^{-1} b$$

Y $(z_j - c_j) + \lambda(z'_j - c'_j)$ son los nuevos coeficientes de costo reducidos.

En $\lambda = \lambda_1$, x_k entra a la base, después la tabla se actualiza y el proceso se repite recalculando S y $\hat{\lambda}$ y haciendo $\lambda_2 = \hat{\lambda}$. El proceso termina cuando $S = \emptyset$.

Ejemplo:

Considere el siguiente problema:

$$\begin{array}{lcccccc} Min\ z = & - & x_1 & - & 3x_2 & & \\ s.\ a: & & x_1 & + & x_2 & \leq & 6 \\ & - & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 6 \\ & & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Se desea encontrar soluciones óptimas para una clase de problemas dadas por la función $(-1 + 2\lambda, -3 + \lambda)$ para $\lambda \geq 0$; esto es, el vector de costos se perturba a lo largo del vector $(2, 1)$.

Primero se resuelve el problema con $\lambda = 0$.

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	LD
z	1	0	0	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{2}{3}$	-14
x_1	0	1	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	2
x_2	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	4

Para encontrar el rango donde la tabla es óptima primero calculamos

$$\begin{aligned} z'_j - c'_j &= c'_B B^{-1} N - c'_N \\ &= c'_B(y_{s_1}, y_{s_2}) - (c'_{s_1} - c'_{s_2}) \\ &= (2,1)\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} - (0,0) \\ &= (\tfrac{5}{3}, -\tfrac{1}{3}) \end{aligned}$$

Entonces $S = \{s_1\}$

$$\hat{\lambda} = \frac{-(z_{s_1} - c_{s_1})}{z'_{s_1} - c'_{s_1}} = \frac{-(-\frac{5}{3})}{\frac{5}{3}} = 1$$

$\lambda_1 = 1$ y para $\lambda \in [0,1]$ la base $[a_1, a_2]$ permanece óptima.

$$\begin{aligned} z(\lambda) &= c_B\bar{b} + \lambda c'_B \bar{b} \\ &= -14 + \lambda(2,1)\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= -14 + 8\lambda \end{aligned}$$

Los nuevos coeficientes de costo reducido están dados por

$$\begin{aligned} & & \text{LD} \\ (z_{s_1} - c_{s_1}) + \lambda(z'_{s_1} - c'_{s_1}) &= & -\tfrac{5}{3} + (\tfrac{5}{3})\lambda \\ (z_{s_2} - c_{s_2}) + \lambda(z'_{s_2} - c'_{s_2}) &= & -\tfrac{2}{3} - (\tfrac{1}{3})\lambda \\ z &= & -4 + 8\lambda \end{aligned}$$

En $\lambda = 1$ el coeficiente de s_1 es igual a 0 y s_1 entra a la base llevando a la siguiente tabla

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	LD
z	1	0	0	0	-1	-6
s_1	0	$\frac{3}{2}$	0	1	$-\frac{1}{2}$	3
x_2	0	$-\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	3

Buscamos λ_2 tal que la tabla siga siendo óptima

$$\begin{aligned}
z_1 - c_1 &= c_B y_1 - c_1 = (0,-3)\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + 1 = \frac{5}{2} \\
z_{s_2} - c_2 &= c_B y_{s_2} - c_{s_2} = (0,-3)\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} - 0 = -\frac{3}{2} \\
z'_1 - c'_1 &= c'_B y_1 - c'_1 = (0,1)\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} - 2 = -\frac{5}{2} \\
z'_{s_2} - c'_{s_2} &= c'_B y_{s_2} - c'_{s_2} = (0,1)\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} - 0 = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$S = \{s_2\}$$

$$\hat{\lambda} = \frac{-(-\frac{3}{2})}{\frac{1}{2}} = 3 = \lambda_2$$

Para λ en el intervalo [1,3] la base a_3 y a_2 es óptima

$$\begin{aligned}
& & &\text{LD} \\
(z_1 - c_1) + \lambda(z'_1 - c'_1) &= \tfrac{5}{2} - (\tfrac{5}{2})\lambda \\
(z_{s_2} - c_{s_2}) + \lambda(z'_{s_2} - c'_{s_2}) &= -\tfrac{3}{2} + (\tfrac{1}{2})\lambda \\
z(\lambda) = c_B\bar{b} + \lambda c'_B\bar{b} = (0,-3)\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda(0,1)\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} &= -9 + 3\lambda
\end{aligned}$$

En $\lambda = 3$ el coeficiente de s_2 es cero y s_2 entra a la base

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	LD
z	1	-5	0	0	0	0
s_1	0	1	1	1	0	6
s_2	0	-1	2	0	1	6

$$
\begin{aligned}
z'_1 - c'_1 &= c'_B y_1 - c'_1 = -2 \\
z'_2 - c'_2 &= c'_B y_2 - c'_2 = -1 \\
S &= \emptyset
\end{aligned}
$$

Entonces la base $[a_3, a_4]$ es óptima $\forall \lambda \in [3, \infty]$

- **Perturbación en los lados derechos**

Supóngase que el vector de lados derechos b se reemplaza por $b + \lambda b'$ donde $\lambda \geq 0$. Eso significa que el lado derecho se perturba a lo largo del vector b'.

Supongamos que B es la base óptima del problema original, esto es, con $\lambda = 0$. La tabla correspondiente está dada por

$$
\begin{aligned}
z + (c_B B^{-1} N - c_N) x_N &= c_B B^{-1} b \\
x_B + B^{-1} N x_N &= B^{-1} b
\end{aligned}
$$

donde $c_B B^{-1} N - c_N = z_j - c_j \geq 0 \ \forall j \in J$.

Si b se reemplaza por $b + \lambda b'$, el vector $c_B B^{-1} N - c_N$ no se afecta, el único cambio ocurre en $B^{-1} b$ que será reemplazado por $B^{-1}(b + \lambda b')$ y el valor objetivo se vuelve $c_B B^{-1}(b + \lambda b')$.

Mientras $B^{-1}(b + \lambda b')$ sea no negativo, la base actual permanece óptima.

El valor de λ en el que otra base se vuelve óptima, puede determinarse como sigue:

Sea $S = \{i : \bar{b}'_i < 0\}$ donde $\bar{b}' = B^{-1} b'$.

Si $S = \emptyset$, entonces la base actual es óptima para todos los valores de $\lambda \geq 0$, en otro caso sea

$$\hat{\lambda} = \begin{array}{c} min \\ i \in S \end{array} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{-\bar{b}'_i} \right\} = \frac{\bar{b}_r}{-\bar{b}'_r}$$

Sea $\lambda_1 = \hat{\lambda}$. Para $\lambda \in [0, \lambda_1]$ la base actual es óptima, donde $x_B = B^{-1}(b + \lambda b')$ y el objetivo óptimo es $c_B B^{-1}(b + \lambda b')$.

En λ_1 el lado derecho se reemplaza por $B^{-1}(b + \lambda_1 b')$, x_{B_r} sale de la base y la variable adecuada entra a la base.

Después de actualizar la tabla, el proceso se repite para encontrar el rango $[\lambda_1, \lambda_2]$ sobre la nueva base donde $\lambda_2 = \hat{\lambda}$. El proceso termina cuando S es vacío. En este caso la base es óptima para los valores de λ mayores o iguales al último valor de λ, o cuando todas las entradas en el renglón cuyo lado derecho va a cero son no negativas. En este caso, no hay soluciones factibles para los valores de λ mayores o iguales que el actual.

Ejemplo:

Considere el siguiente problema:

$$\begin{array}{lcrcrcl} Min\ z = & - & x_1 & - & 3x_2 & & \\ s.\ a: & & x_1 & + & x_2 & \leq & 6 \\ & - & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 6 \\ & & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

Se busca la solución óptima cuando el lado derecho se perturba en la dirección $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, es decir, $b = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$ se reemplaza por $b + \lambda b' = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ para $\lambda \geq 0$.

La tabla óptima con $\lambda = 0$ es:

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	LD
z	1	0	0	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{2}{3}$	-14
x_1	0	1	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	2
x_2	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	4

Para encontrar el rango donde la base es óptima calculamos $\bar{b}'$

$$\bar{b}' = B^{-1}b' = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Entonces $S = \{1\}$

$$\lambda_1 = \frac{\bar{b_1}}{-\bar{b}'_1} = \frac{2}{-(-1)} = 2$$

La base $[a_1, a_2]$ es óptima en el rango [0,2]. Para $\lambda \in [0, 2]$ el valor objetivo y los lados derechos están dados por:

$$z(\lambda) = c_B\bar{b} + \lambda c_B\bar{b}' = (-1, -3)\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda(-1, -3)\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -14 + \lambda$$

$$\bar{b} + \lambda\bar{b}' = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\lambda \\ 4 \end{pmatrix}$$

Y la tabla queda como:

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	LD	$\lambda = 2$
z	1	0	0	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-14+\lambda$	-12
x_1	0	1	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$2-\lambda$	0
x_2	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	4	4

En $\lambda = 2$, $x_{B_r} = x_1$

$$min\left\{\frac{-\frac{5}{3}}{\frac{2}{3}}, \frac{-\frac{2}{3}}{-\frac{1}{3}}\right\} = min\left\{-\frac{5}{2}, 2\right\}$$

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	LD
z	1	-2	0	-3	0	-12
s_2	0	-3	0	-2	1	0
x_2	0	1	1	1	0	4

Para encontrar el rango $[2, \lambda_2]$

$$\begin{aligned}
\bar{b} &= B^{-1}b = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \end{pmatrix} \\
\bar{b'} &= B^{-1}b' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$S = \{2\}$$

$$\lambda_2 = \frac{\bar{b_2}}{-\bar{b'_2}} = \frac{6}{-(-1)} = 6$$

Para $\lambda \in [2, 6]$ el objetivo óptimo en el lado derecho es:

$$z(\lambda) = c_B\bar{b} + \lambda c'_B\bar{b} = (0, -3)\begin{pmatrix} -6 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda(0, -3)\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = -18 + 3\lambda$$

$$\bar{b} + \lambda\bar{b'} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 + 3\lambda \\ 6 - \lambda \end{pmatrix}$$

La tabla óptima en el intervalo [2,6] es:

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	LD	$\lambda = 6$
z	1	-2	0	-3	0	$-18 + 3\lambda$	0
s_2	0	-3	0	-2	1	$-6 + 3\lambda$	-12
x_2	0	1	1	1	0	$6 - \lambda$	0

En $\lambda = 6$, x_2 va a cero.

Como todas las entradas en el renglón de x_2 son no negativas, se concluye que no hay soluciones factibles $\forall \lambda > 6$.

Capítulo 3

Teoría de Redes

3.1. Introducción a la Teoría de Gráficas

Una gráfica $G = (X, A)$ es un conjunto de vértices $X = \{x_1, ..., x_n\}$ junto con un conjunto $A = \{a_1, ..., a_m\}$ de aristas. Cada arista conecta a un par de vértices, por lo que A es un subconjunto de pares ordenados de elementos distintos de X.

- Los elementos de X se conocen como vértices o nodos.

Si $a = \{x_1, x_2\}$ es una arista, entonces

- x_1 y x_2 son adyacentes ($x_1 \sim x_2$).
- a es incidente en los vértices x_1 y x_2.

El **orden** de G es el número de vértices ($|X|$) y la **medida** de G es el número de aristas ($|A|$).

El grado de un vértice x, que se denota por $g(x)$, es el número de aristas de G que inciden en él o el número de vértices adyacentes.

Teorema. La suma de todos los grados de los vértices de una gráfica $G = (X, A)$ es igual al doble de su medida, esto es:

$$\sum_{i=1}^{n} g(x_i) = 2|A|$$

3.2. Representaciones de una gráfica

3.2.1. Matrices de adyacencia e incidencia

Sea $G = (X, A)$ una gráfica con $X = \{x_1, ..., x_n\}$ y $A = \{a_1, ..., a_m\}$.

- La matriz de adyacencia de G es la matriz $A = (a_{ij})$ de orden $n \times n$ definida por:

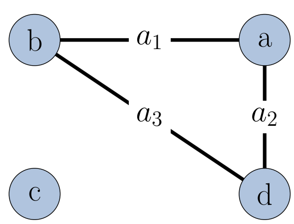
$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si } x_i \text{ y } x_j \text{ son adyacentes} \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

- La matriz de incidencia de G es la matriz $B = (b_{ij})$ de $n \times m$ definida por:

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si } a_j \text{ es incidente a } x_i \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

- La lista de adyacencia de G es una n-tupla formada por n sublistas, una por cada vértice x_i donde aparecen los vértices adyacentes a x_i.

Ejemplo: Sea $G = (X, A)$ con $X = \{a, b, c, d\}$ y $A = \{(a, b), (a, d), (b, d)\}$



- Matriz de adyacencia

$$A = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

- Lista de adyacencia

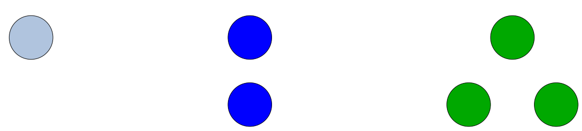
$$L = (\{b, d\}, \{a, d\}, \{a, b\})$$

- Matriz de incidencia

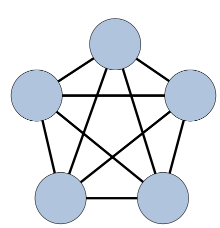
$$B = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

3.2.2. Clases básicas de gráficas

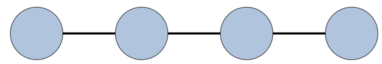
- Una gráfica es vacía si no tiene aristas (cualquier gráfica debe tener al menos un vértice). Ejemplos:



- Una gráfica es completa si cada vértice es adyacente a todos los demás. Se denota por K_n donde n es el número de vértices. Ejemplo:

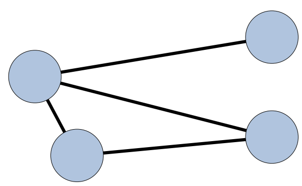


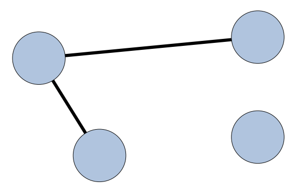
- Un camino P_n es una sucesión de vértices $x_1, ..., x_n$ tales que x_i es adyacente a x_{i+1} para $i = 1, ..., n-1$. Ejemplo:



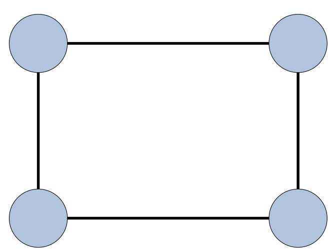
- Cualquier camino que conecte a los vértices x y y es llamado (x, y)-camino.

- Gráficas conectadas o conexas. Una gráfica está conectada si cualesquiera dos vértices están conectados por un camino, en otro caso se llama desconectada o disconexa. Ejemplos:

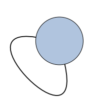




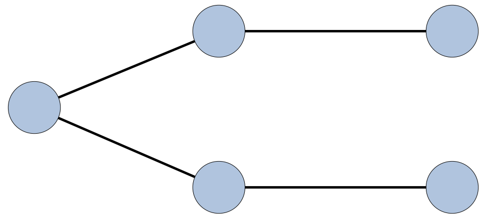
- Una gráfica conexa, donde cada vértice tiene grado 2, se llama ciclo. Se denota por C_n donde n es el número de vértices. Ejemplo:



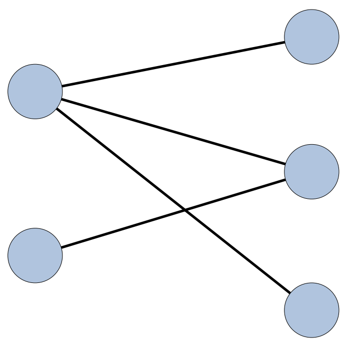
- C_1 representa una arista que conecta al vértice con él mismo, llamada lazo o rizo. Ejemplo:



- Una gráfica conexa y sin ciclos es un árbol. Usualmente, un árbol con n vértices se denota por T_n. Ejemplo:



- Una gráfica es bipartita si su conjunto de vértices X puede partirse en dos conjuntos disjuntos X_1 y X_2, llamados partes, de tal manera que cada arista conecta vértices de conjuntos diferentes. Ejemplo:



- Una gráfica bipartita completa es una gráfica bipartita en la que cada vértice de la parte X_1 es adyacente a cada vértice de la parte X_2. Si en una gráfica bipartita completa $|X_1| = r$ y $|X_2| = s$, la gráfica se denota por $X_{r,s}$.

  Por ejemplo, la siguiente es una gráfica $k_{1,3}$:

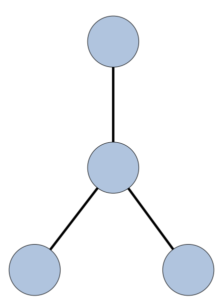
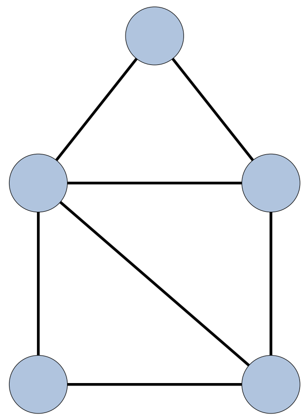


Figura 3.1: G



- Una gráfica donde todos los vértices tienen el mismo grado k se llama regular de grado k.

- Sea $G = (X, A)$, una gráfica $G' = (X', A')$ se llama subgráfica de G si y sólo si $X' \subseteq X$ y $A' \subseteq A$.

- $G' = (X', A')$ se llama subgráfica inducida si $X' \subseteq X$ y todas las aristas de G que tienen ambos extremos en X', forman A'. Ejemplos:

Figura 3.2: G_1

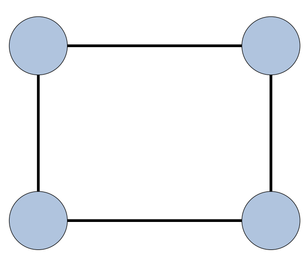
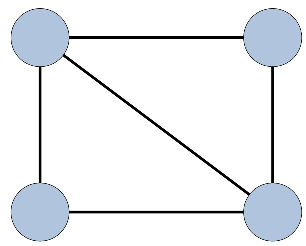
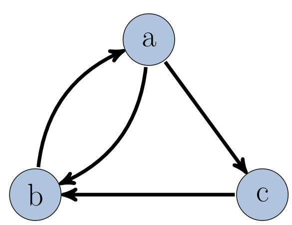


Figura 3.3: G_2 (inducida)



- G' es una subgráfica expandida si $G' \subseteq G$ es tal que $G' = (X, A')$.
- Una subgráfica expandida que es un árbol se llama árbol expandido.
- Una gráfica dirigida o digráfica, es una gráfica $G = (X, A)$ donde $a = (x_1, x_2)$ es un arco. En este caso, x_1 es adyacente hacia x_2 y a es incidente de x_1 a x_2. Ejemplo:



- Una digráfica es simétrica si $(x_i, x_j)A \Leftrightarrow (x_j, x_i) \in A,\ \forall x_i, x_j \in X,\ i \neq j$.

3.3. Árbol de Expansión Mínimo

- Este problema se refiere a utilizar las ramas o arcos de la red para llegar a todos los nodos de manera que se minimice la longitud total.
- La aplicación de estos problemas se ubica en las redes de comunicación eléctrica, telefónica, carretera, ferroviaria, etc., donde los nodos representan puntos de consumo y los arcos el medio de transporte.

- La solución puede representar el diseño de sistemas de carreteras.

Sea $R = (X, A)$ una red

- $X = \{1, ..., N\}$ el conjunto de nodos.
- C_k = Conjunto de nodos que han estado conectados de manera permanente en la iteración k.
- $\overline{C_k}$ = Conjunto de nodos que se construirán permanentemente después de la iteración k.

Los algoritmos de expansión mínima de Kruskal y Prim son para redes ponderadas, no dirigidas, conexas y sin lazos.

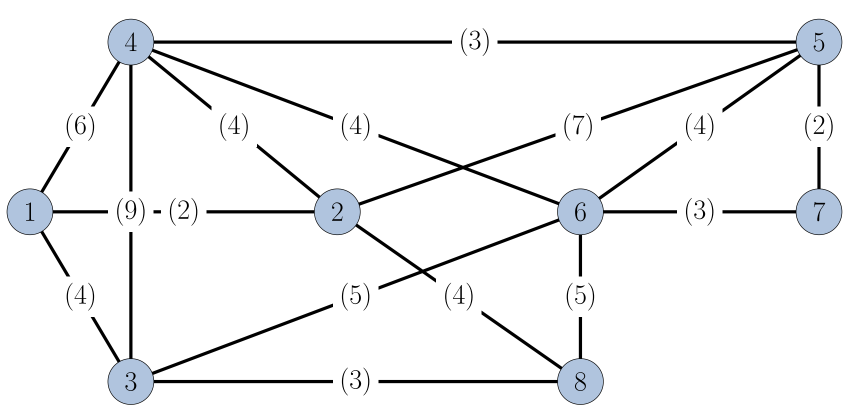
3.3.1. Algoritmo de Prim

Paso 0. Establecer $C_0 = \emptyset$ y $\overline{C_0} = X$.

Paso 1. Iniciar con cualquier nodo i en el conjunto $\overline{C_0}$ y establecer $C_1 = \{i\}$, lo que produce $\overline{C_1} = X - \{i\}$. Hacer $k = 2$.

Paso general. Seleccionar un nodo j^* en el conjunto $\overline{C_{k-1}}$ que produzca el arco más corto a un nodo en el conjunto C_{k-1} y eliminar de $\overline{C_{k-1}}$ para obtener C_k y $\overline{C_k}$. Si $\overline{C_k} = \emptyset$ parar, en caso contrario $k = k + 1$ y debe repetirse el paso general.

Ejemplo: Determinar el árbol de expansión mínimo para red mostrada a continuación:



Paso 0.

$$\begin{aligned} C_0 &= \emptyset \\ \overline{C_0} &= \{1,2,3,4,5,6,7,8\} \end{aligned}$$

Paso 1.

$$\begin{aligned} C_1 &= \{1\} \\ \overline{C_1} &= \{2,3,4,5,6,7,8\} \\ k &= 2 \end{aligned}$$

Iteración 1: Se selecciona el nodo 2, pues el arco de menor peso conectado a 1 el $(1,2)$ con un peso de 2. Con lo cual los conjuntos obtenidos son:

$$\begin{aligned} C_2 &= \{1,2\} \\ \overline{C_2} &= \{3,4,5,6,7,8\} \\ k &= 3 \end{aligned}$$

Iteración 2: Los arcos con menor peso que conectan un nodo del conjunto C_2 con uno del $\overline{C_2}$ son el $(1,3)$, el $(2,4)$ y el $(2,8)$, los tres con un peso de 4. Se selecciona arbitrariamente el nodo 3 con lo cual los conjuntos obtenidos son:

$$\begin{aligned} C_3 &= \{1,2,3\} \\ \overline{C_3} &= \{4,5,6,7,8\} \\ k &= 4 \end{aligned}$$

Iteración 3: Se selecciona el nodo 8, pues el arco de menor peso que conecta el conjunto C_3 con el $\overline{C_3}$ es el $(3,8)$ con un peso de 3.

$$\begin{aligned} C_4 &= \{1,2,3,8\} \\ \overline{C_4} &= \{4,5,6,7\} \\ k &= 5 \end{aligned}$$

Iteración 4: Se selecciona el nodo 4, pues el arco de menor peso que conecta el conjunto C_4 con el $\overline{C_4}$ es el $(2,4)$ con un peso de 4.

$$\begin{aligned} C_5 &= \{1,2,3,4,8\} \\ \overline{C_5} &= \{5,6,7\} \\ k &= 6 \end{aligned}$$

Iteración 5: Se selecciona el nodo 5, pues el arco de menor peso que conecta el conjunto C_5 con el $\overline{C_5}$ es el $(4, 5)$ con un peso de 3.

$$\begin{aligned} C_6 &= \{1, 2, 3, 4, 5, 8\} \\ \overline{C_6} &= \{6, 7\} \\ k &= 7 \end{aligned}$$

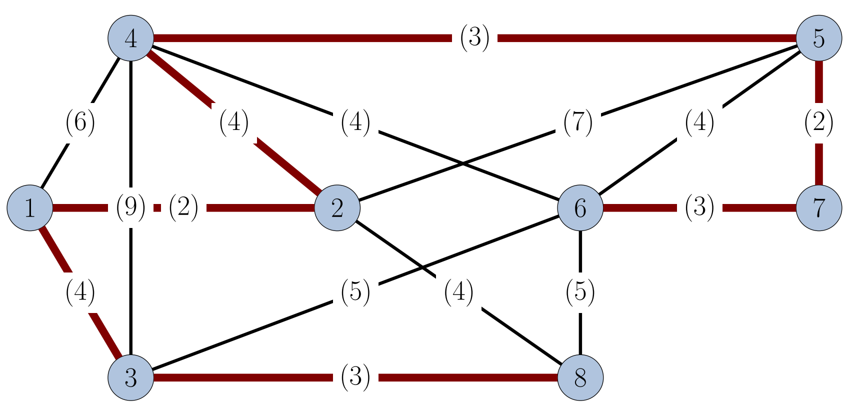
Iteración 6: Se selecciona el nodo 7, pues el arco de menor peso que conecta el conjunto C_6 con el $\overline{C_6}$ es el $(5, 7)$ con un peso de 2.

$$\begin{aligned} C_7 &= \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8\} \\ \overline{C_7} &= \{6\} \\ k &= 8 \end{aligned}$$

Iteración 7: Se selecciona el nodo 6, pues el arco de menor peso que conecta el conjunto C_7 con el $\overline{C_7}$ es el $(7, 6)$ con un peso de 3.

$$\begin{aligned} C_8 &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \\ \overline{C_8} &= \emptyset \end{aligned}$$

Como el conjunto $\overline{C_8} = \emptyset$, el árbol de expansión mínimo es:



3.3.2. Algoritmo de Kruskal

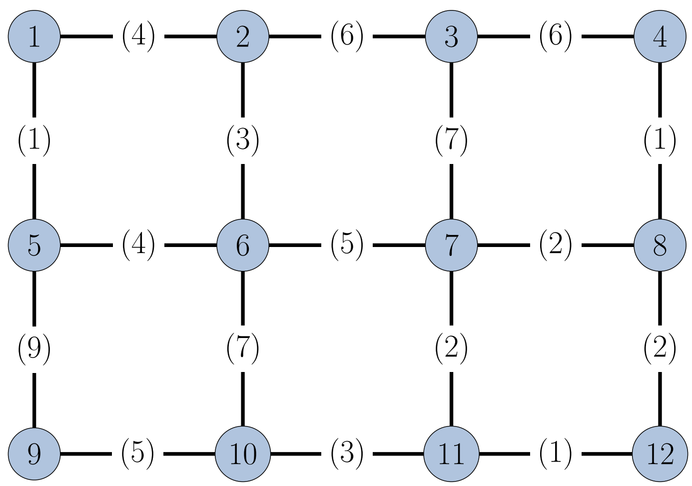
Paso 0. Establecer $S_0 = \emptyset$ y $\overline{S_0} = A$. Donde S_k son las aristas conectadas y $\overline{S_k}$ las aristas por conectar.

Paso 1. Se elige la arista i de peso mínimo y se considera $S_1 = \{i\}$. Hacer $k = 2$.

Paso 2. Sea j la arista de peso mínimo tal que $S_{k-1} \cup \{j\}$ no forme un ciclo. Hacer $S_k = S_{k-1} \cup \{j\}$.

Paso 3. Si $|S_k| = n - 1$ terminar. En otro caso, hacer $k = k + 1$ e ir al paso 2.

Ejemplo: Determinar el árbol de expansión mínimo de la red mostrada a continuación:



Paso 0.

$$\begin{aligned} S_0 &= \emptyset \\ \overline{S_0} &= A \end{aligned}$$

Paso 1. Se elige la arista $(1, 5)$ de peso mínimo igual a 1, con lo cual:

$$\begin{aligned} S_1 &= \{(1,5)\} \\ k &= 2 \end{aligned}$$

Paso 2.

Iteración 1:

$$S_2 = \{(1,5),(4,8)\}$$

Paso 3.

$$\begin{aligned} |S_2| &= 2 \\ k &= 3 \end{aligned}$$

Iteración 2:

$$\begin{aligned} S_3 &= \{(1,5),(4,8),(11,12)\} \\ |S_3| &= 3 \\ k &= 4 \end{aligned}$$

Iteración 3:

$$\begin{aligned} S_4 &= \{(1,5),(4,8),(11,12),(7,8)\} \\ |S_4| &= 4 \\ k &= 5 \end{aligned}$$

Iteración 4:

$$\begin{aligned} S_5 &= \{(1,5),(4,8),(11,12),(7,8),(8,12)\} \\ |S_5| &= 5 \\ k &= 6 \end{aligned}$$

Iteración 5:

$$\begin{aligned} S_6 &= \{(1,5),(4,8),(11,12),(7,8),(8,12),(2,6)\} \\ |S_6| &= 6 \\ k &= 7 \end{aligned}$$

Iteración 6:

$$\begin{aligned} S_7 &= \{(1,5),(4,8),(11,12),(7,8),(8,12),(2,6),(10,11)\} \\ |S_7| &= 7 \\ k &= 8 \end{aligned}$$

Iteración 7:

$$\begin{aligned} S_8 &= \{(1,5),(4,8),(11,12),(7,8),(8,12),(2,6),(10,11),(5,6)\} \\ |S_8| &= 8 \\ k &= 9 \end{aligned}$$

Iteración 8:

$$\begin{aligned} S_9 &= \{(1,5),(4,8),(11,12),(7,8),(8,12),(2,6),(10,11),(5,6),(9,10)\} \\ |S_9| &= 9 \\ k &= 10 \end{aligned}$$

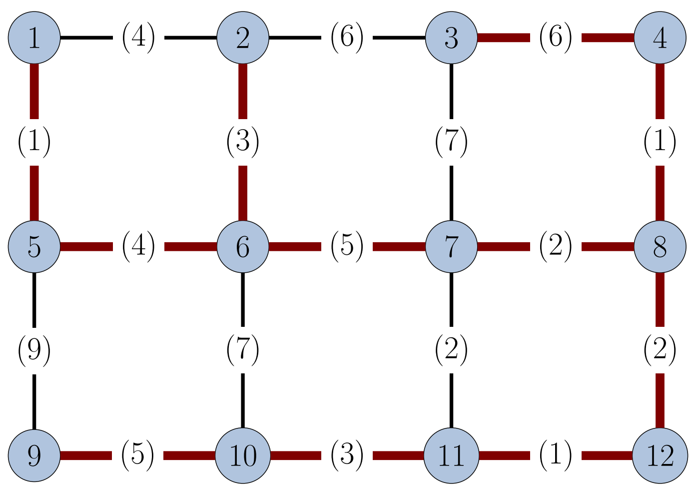
Iteración 9:

$$
\begin{aligned}
S_{10} &= \{(1,5),(4,8),(11,12),(7,8),(8,12),(2,6),(10,11),(5,6),(9,10),(6,7)\} \\
|S_{10}| &= 10 \\
k &= 11
\end{aligned}
$$

Iteración 10:

$$
\begin{aligned}
S_{11} &= \{(1,5),(4,8),(11,12),(7,8),(8,12),(2,6),(10,11),(5,6),(9,10),(6,7),(3,4)\} \\
|S_{11}| &= 11
\end{aligned}
$$

Como $|S_{11}| = n - 1$, el árbol de expansión mínimo es:



3.3.3. Algoritmo de Sollin

El algoritmo comienza examinando cada vértice y añadiendo el arco de menor peso desde ese vértice a otro en el grafo, sin tener en cuenta los arcos ya agregados, y continua uniendo estos grupos de la misma manera hasta que se completa un árbol que cubra todos los vértices.

Algoritmo:

Paso 0. Comenzar con un grafo conexo G y un conjunto vacío de arcos T.

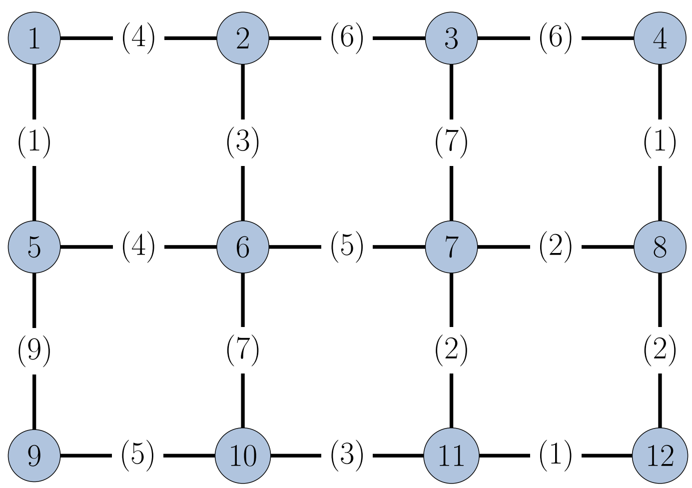
Paso 1. Sea $C_0 = \emptyset$ y $\overline{C_0} = X$.

Paso 2. Iniciar con cualquier nodo i de $\overline{C_0}$ y establecer $C_1 = \{i\}$, lo que produce $\overline{C_1} = X - \{i\}$. Sea (i, j) la arista de peso mínimo que conecta a i con un vértice de $\overline{C_1}$ y agregar dicha arista a T. Establecer $C_2 = \{i, j\}$, lo que produce $\overline{C_2} = X - \{j\}$. Hacer $k = 3$.

Paso general. Seleccionar la arista (x, y) de peso mínimo que conecta un nodo x del conjunto C_{k-1} con un nodo y del $\overline{C_{k-1}}$ y agregarla a T. Eliminar y de $\overline{C_{k-1}}$ para obtener $C_k = C_{k-1} \cup \{y\}$ y $\overline{C_k} = \overline{C_{k-1}} - \{y\}$. Si $\overline{C_k} = \emptyset$, terminar, el conjunto de aristas T pertenece al árbol de expansión mínimo de G. En otro caso, hacer $k = k + 1$ y repetir el paso general.

Ejemplo:

Tomando la red del ejemplo anterior:



Paso 0. $T = \emptyset$.

Paso 1. $C_0 = \emptyset$ y $\overline{C_0} = X$.

Paso 2.

$$\begin{aligned} C_1 &= \{1\} \\ \overline{C_1} &= \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\} \\ T &= \{(1, 5)\} \\ C_2 &= \{1, 5\} \\ \overline{C_2} &= \{2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\} \\ k &= 3 \end{aligned}$$

Iteración 1: De las aristas que conectan el conjunto C_2 con el $\overline{C_2}$, la arista $(1,2)$ y la $(5,6)$ tienen el peso mínimo (4), por lo que se elige arbitrariamente la $(5,6)$.

$$\begin{aligned} T &= \{(1,5),(5,6)\} \\ C_3 &= \{1,5,6\} \\ \overline{C_3} &= \{2,3,4,7,8,9,10,11,12\} \\ k &= 4 \end{aligned}$$

Iteración 2: Se selecciona la arista $(6,2)$ con peso mínimo de 3.

$$\begin{aligned} T &= \{(1,5),(5,6),(6,2)\} \\ C_4 &= \{1,2,5,6\} \\ \overline{C_4} &= \{3,4,7,8,9,10,11,12\} \\ k &= 5 \end{aligned}$$

Iteración 3: Se selecciona la arista $(6,7)$ con peso mínimo de 5.

$$\begin{aligned} T &= \{(1,5),(5,6),(6,2),(6,7)\} \\ C_5 &= \{1,2,5,6,7\} \\ \overline{C_5} &= \{3,4,8,9,10,11,12\} \\ k &= 6 \end{aligned}$$

Iteración 4: Se selecciona la arista $(7,8)$ con peso mínimo de 2.

$$\begin{aligned} T &= \{(1,5),(5,6),(6,2),(6,7),(7,8)\} \\ C_6 &= \{1,2,5,6,7,8\} \\ \overline{C_6} &= \{3,4,9,10,11,12\} \\ k &= 7 \end{aligned}$$

Iteración 5: Se selecciona la arista $(8,4)$ con peso mínimo de 1.

$$\begin{aligned} T &= \{(1,5),(5,6),(6,2),(6,7),(7,8),(8,4)\} \\ C_7 &= \{1,2,4,5,6,7,8\} \\ \overline{C_7} &= \{3,9,10,11,12\} \\ k &= 8 \end{aligned}$$

Iteración 6: Se selecciona la arista $(8, 12)$ con peso mínimo de 2.

$$\begin{aligned} T &= \{(1,5),(5,6),(6,2),(6,7),(7,8),(8,4),(8,12)\} \\ C_8 &= \{1,2,4,5,6,7,8,12\} \\ \overline{C_8} &= \{3,9,10,11\} \\ k &= 9 \end{aligned}$$

Iteración 7: Se selecciona la arista $(12, 11)$ con peso mínimo de 1.

$$\begin{aligned} T &= \{(1,5),(5,6),(6,2),(6,7),(7,8),(8,4),(8,12),(12,11)\} \\ C_9 &= \{1,2,4,5,6,7,8,11,12\} \\ \overline{C_9} &= \{3,9,10\} \\ k &= 10 \end{aligned}$$

Iteración 8: Se selecciona la arista $(11, 10)$ con peso mínimo de 3.

$$\begin{aligned} T &= \{(1,5),(5,6),(6,2),(6,7),(7,8),(8,4),(8,12),(12,11),(11,10)\} \\ C_{10} &= \{1,2,4,5,6,7,8,10,11,12\} \\ \overline{C_{10}} &= \{3,9\} \\ k &= 11 \end{aligned}$$

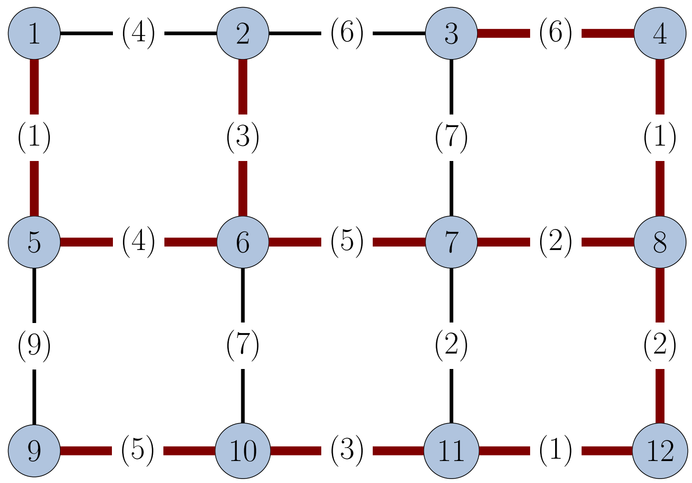
Iteración 9: Se selecciona la arista $(10, 9)$ con peso mínimo de 5.

$$\begin{aligned} T &= \{(1,5),(5,6),(6,2),(6,7),(7,8),(8,4),(8,12),(12,11),(11,10),(10,9)\} \\ C_{11} &= \{1,2,4,5,6,7,8,9,10,11,12\} \\ \overline{C_{11}} &= \{3\} \\ k &= 12 \end{aligned}$$

Iteración 10: Se selecciona arbitrariamente la arista $(4, 3)$ con peso mínimo de 6.

$$\begin{aligned} T &= \{(1,5),(5,6),(6,2),(6,7),(7,8),(8,4),(8,12),(12,11),(11,10),(10,9),(4,3)\} \\ C_{12} &= \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\} \\ \overline{C_{12}} &= \emptyset \end{aligned}$$

Como $\overline{C_{12}} = \emptyset$, el árbol de expansión mínima es:



3.3.4. Formulación del árbol de expansión mínima

- Sea $x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i,j) \in T \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$
- Se necesitan restricciones para asegurar que

  a) Hay $n-1$ aristas en T.

  b) No hay ciclos en T.

Para a)

$$\sum_{(i,j)\in A} x_{ij} = n-1$$

Para b) Cualquier subconjunto de k vértices debe tener a lo más $k-1$ aristas contenidas en el subconjunto para no contener un ciclo. Entonces

$$\sum_{(i,j)\in A(S)} x_{ij} \leq |S|-1,\ \forall S\subset X,\ S\neq X,\ S\neq\emptyset$$

Donde $A(S) \subset A$ es un subconjunto con ambos extremos en el subconjunto $S \subset V$.

3.3.5. Formulación de corte

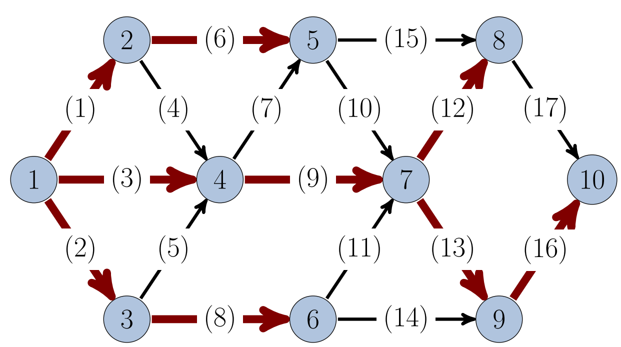
Para cada corte, al menos una arista debe cruzar el corte para un subconjunto $S \subset V$. Sea $\delta(S)$ las aristas que cruzan el corte (un extremo en S y el otro en $V - S$).

$$\begin{array}{ll} min & \sum_{(i,j)\in A} C_{ij}x_{ij} \\ s.\ a: & \sum_{(i,j)\in A} x_{ij} = n-1 \\ & \sum_{(i,j)\in A:(i,j)\in\delta(S)} x_{ij} \geq 1,\ \forall S \subseteq V,\ S \neq V,\ S \neq \emptyset \\ & x_{ij} \in \{0,1\}\ \forall (i,j) \in A \end{array}$$

Donde S corresponde a cualquier subconjunto de X.

Ejemplo:

Para el siguiente árbol, el corte está formado por las aristas $(1,2),(1,3),(1,4)$, puesto que para ir del nodo 1 a cualquier nodo del árbol, necesariamente se cruza alguna de estas aristas.



3.4. El Problema de la Ruta Más Corta

Dada una red $R = (X, A)$ y una función distancia d_{ij} asociada a cada arco $(i,j) \in A$, se busca la ruta más corta desde un nodo origen (s) a un nodo destino (t).

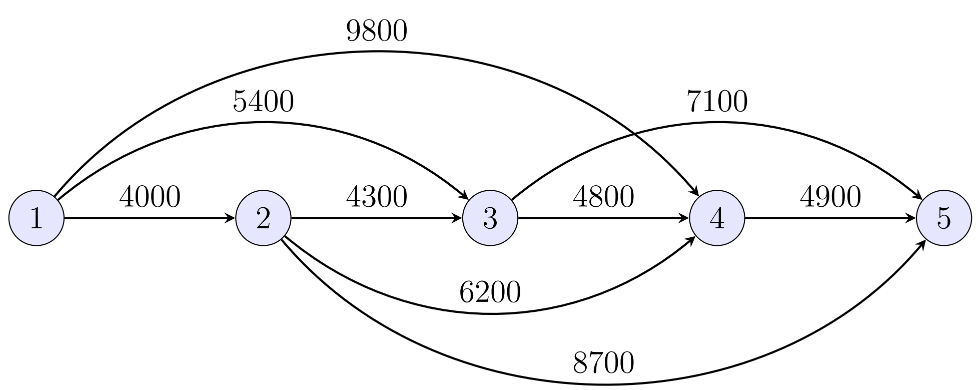
Ejemplos que pueden ser formulados como problemas de ruta más corta son:

- Encontrar la conexión más corta entre el D.F. y Villahermosa.
- Encontrar las rutas más cortas para datos de Internet.
- Resolver el juego de las tres jarras.

Ejemplo: 1

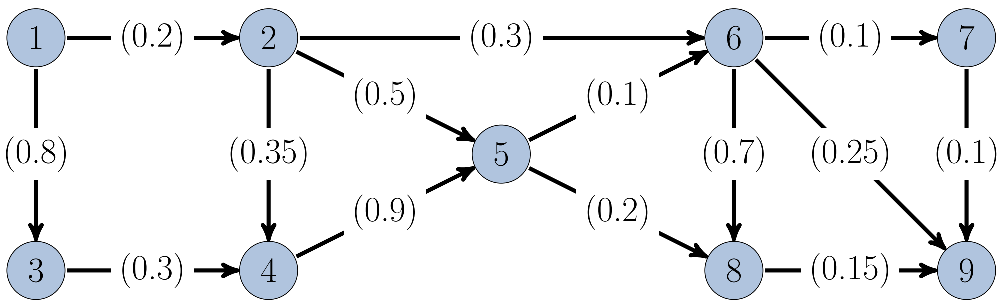
RentCar quiere definir una estrategia de reemplazo para sus autos en un periodo de planeación de 4 años. Cada año, un auto puede conservarse o reemplazarse. El costo de reemplazo para cada año y periodo se muestra en la tabla. Cada auto debe ser usado al menos 1 año y a lo más, tres años.

Equipo obtenido al principio del año	Costo de reemplazo por número de años en operación		
	1	2	3
1	4000	5400	9800
2	4300	6200	8700
3	4800	7100	-
4	4900	-	-



Ejemplo: 2

El sr. X sale todos los viernes de fiesta. Todos los tramos que puede tomar para un camino a casa tienen alcoholímetros. Es posible asignar una probabilidad p_{ij} de **no** ser detenido por un alcoholímetro en el tramo (i, j). Él quiere encontrar la ruta más corta en el sentido de que la probabilidad de ser detenido sea la menor posible.



3.4.1. Formulación como problema lineal

Encontrar la ruta más corta del nodo s al nodo t.

- Sea para cada arco x_{ij} el flujo d_{ij}
- Balance de flujo en cada nodo
- $x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si el arco } (i,j) \text{ es en la ruta más corta} \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$

Suponiendo $d_{ij} \geq 0$

$$\begin{aligned} \min \quad & \textstyle\sum_{(i,j)\in A} d_{ij} x_{ij} \\ \text{s. a:} \quad & \textstyle\sum_{(i,k)\in A} x_{ik} - \sum_{(k,j)\in A} x_{kj} = \begin{cases} -1, & k = s \\ 1, & k = t \\ 0, & k \in A \backslash \{s, t\} \end{cases} \\ & x_{ij} \geq 0 \quad (i,j) \in A \end{aligned}$$

Su dual

$$\begin{aligned} \max \quad & y_+ - y_s \\ \text{s. a:} \quad & y_j - y_i \leq d_{ij} \quad (i,j) \in A \end{aligned}$$

Donde

y_j = distancia de la ruta más corta del nodo origen (s) al nodo j.

$y_k = \infty$ si no hay un camino

$$x_{ij}^k = \begin{cases} 1 & \text{si el arco } (i,j) \text{ es parte del camino óptimo del origen } s \text{ a } k. \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

3.4.2. Ruta más corta entre todo par de nodos

Una manera de reolver el problema de rutas más cortas entre todo par de nodos de una red R consiste en econtrar la arborescencia de rutas más cortas de raíz $x, \forall x \in X$. Sin embargo hay procedimientos más eficientes.

El algoritmo de Floyd fue desarrollado por Robert Floyd en 1962 y es aplicable a redes que admiten cualquier costo en sus arcos.

Objetivo: obtener las rutas más cortas entre todo par de nodos en una red R con n nodos.

Descripción del algoritmo

Paso 1: Construya la matriz C de $n \times n$ cuyos elementos c_{ij} son como sigue:

$$c_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ \infty & \text{si } (i,j) \notin A \\ d(i,j) & \text{si } (i,j) \in A \end{cases}$$

$k = 0$

Paso 2:

- Haga $k = k + 1$
- Para toda $i \neq k$ tal que $c_{ik} \neq \infty$ y $\forall j \neq k$ tal que $c_{kj} \neq \infty$ haga $c_{ij} = \min\{c_{ij}, c_{ik} + c_{kj}\}$

Paso 3:

- Si $c_{ij} < 0$ para alguna i, terminar, existe un circuito negativo que contiene al nodo i y no hay solución.

- Si $c_{ii} \geq 0$ $\forall i$ y $k = n$ terminar. c_{ij} es la longitud del camino más corto de i a j.

- Si $c_{ii} \geq 0$ $\forall i$ y $k < n$ ir al paso 2.

Recuperación de rutas

- Para recuperar las rutas más cortas puede construirse una matriz A de $n \times n$, donde el elemento a_{ij} será el predecesor del nodo j en la ruta de i a j encontrada en cada iteración.

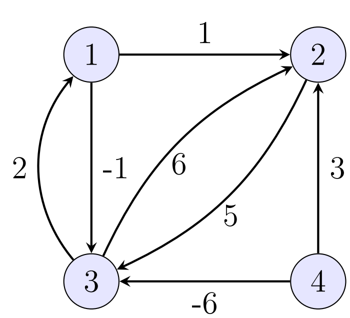
- Dada la definición de A, sus entradas se inicializarán en $a_{ij} = i$ para todo par de nodos $i, j \in X$.

La matriz A se modificará en el paso 2 de la k-ésima iteración de acuerdo a la siguiente asignación:

$$a_{ij} = \begin{cases} a_{kj} & \text{si } c_{ik} + c_{kj} < c_{ij} \\ \text{no cambia} & \text{si } c_{ik} + c_{kj} \geq c_{ij} \end{cases}$$

Ejemplo:

Considere la siguiente red y determine las rutas más cortas entre todo par de nodos:



Paso 1.

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & \infty \\ \infty & 0 & 5 & \infty \\ 2 & 6 & 0 & \infty \\ \infty & 3 & -6 & 0 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Paso 2.

$k = 1$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & \infty \\ \infty & 0 & 5 & \infty \\ 2 & 3 & 0 & \infty \\ \infty & 3 & -6 & 0 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Paso 3.

$c_{ii} \geq 0 \ \forall i$ y $k < n$. Ir al paso 2.

$k = 2$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & \infty \\ \infty & 0 & 5 & \infty \\ 2 & 3 & 0 & \infty \\ \infty & 3 & -6 & 0 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$c_{ii} \geq 0 \ \forall i$ y $k = 2 < 4 = n$

$k = 3$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & \infty \\ 7 & 0 & 5 & \infty \\ 2 & 3 & 0 & \infty \\ -4 & -3 & -6 & 0 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$c_{ii} \geq 0\ \forall i$ y $k = 3 < 4 = n$

$k = 4$

$c_{ii} \geq 0\ \forall i$ y $k = n$. Terminar.

El algoritmo de Floyd se puede reformular de la siguiente manera:

Paso 0. Inicialización.

Construir la matriz D_0 de $n \times n$ cuyos elementos d_{ij} son:

$$d_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ \infty & \text{si } (i,j) \notin A \\ d(i,j) & \text{si } (i,j) \in A \end{cases}$$

Y S_0 para recuperar las rutas, siendo $s_{ij} = j\ \forall i, j \in X$. Hacer $k = 1$.

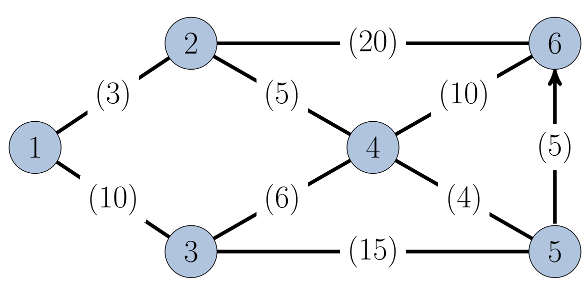
Paso general k. Definir el renglón k y la columna k como renglón y columna pivote.

$$d_{ij} = min\{d_{ij}, d_{ik} + d_{kj}\}$$

en D_k, si $d_{ik} + d_{kj} < d_{ij}$, $s_{ij} = k$ en S_k

Hacer $k = k + 1$.

Ejemplo:



Iteración 1.

$$D_0 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 10 & \infty & \infty & \infty \\ 3 & 0 & \infty & 5 & \infty & 20 \\ 10 & \infty & 0 & 6 & 15 & \infty \\ \infty & 5 & 6 & 0 & 4 & 10 \\ \infty & \infty & 15 & 4 & 0 & 5 \\ \infty & 20 & \infty & 10 & \infty & 0 \end{bmatrix} \qquad S_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$k = 1$

$$D_1 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 10 & \infty & \infty & \infty \\ 3 & 0 & 13 & 5 & \infty & 20 \\ 10 & 13 & 0 & 6 & 15 & \infty \\ \infty & 5 & 6 & 0 & 4 & 10 \\ \infty & \infty & 15 & 4 & 0 & 5 \\ \infty & 20 & \infty & 10 & \infty & 0 \end{bmatrix} \qquad S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$k = 2$

$$D_2 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 10 & 8 & \infty & 23 \\ 3 & 0 & 13 & 5 & \infty & 20 \\ 10 & 13 & 0 & 6 & 15 & 33 \\ 8 & 5 & 6 & 0 & 4 & 10 \\ \infty & \infty & 15 & 4 & 0 & 5 \\ 23 & 20 & 33 & 10 & \infty & 0 \end{bmatrix} \qquad S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$k = 3$

Algoritmo de Dijkstra

Este método de solución fue desarrollado por Edsger Dijkstra (1959) y está considerado como uno de los métodos más eficientes para resolver este problema. El propósito es obtener la arborescencia de rutas más cortas de raíz s en una red R=[X, A, d] **con costos no negativos en los**

arcos.

Algoritmo

- **Paso 1.** Inicialización de etiquetas.
  - Sea $p = s$.
  - Sea $d(p) = d(s) = 0$ y márquese esta etiqueta como permanente.
  - Sean $d(x) = \infty \ \forall x \neq s$ y considérense estas etiquetas como temporales.
  - Sean $a(x) = x$ (estas etiquetas indicarán el predecesor de x en la arborescencia).
  - Sea $\Gamma^+(p) = \{x \mid x \text{ tiene etiqueta temporal}\}$
- **Paso 2.** Actualización de etiquetas.
  - Calcular las etiquetas temporales $d(x) = \min\{d(x), d(p) + d(p, x)\}$ para cada nodo x al que pueda llegarse desde el nodo p, siempre y cuando x no tenga etiqueta permanente.
  - Para todo $x \in \Gamma^+(p)$, actualizar etiquetas de acuerdo a:
    - Sea x tal que $d(x) = \min\{d(x) \mid d(x) \text{ es temporal}\}$.
    - Si $d(x) = \infty$ terminar. No existe arborescencia alguna de raíz s. En otro caso, marcar la etiqueta $d(x^*)$ como permanente.
    - Si $d(x)$ se modificó, hacer $a(x) = p$.
    - Hacer $p = x$.
- **Paso 3.**
  - Si sólo se desea la ruta de s a t.
    - Si $p = t$, terminar, $d(p)$ es la longitud del camino más corto.
    - Si $p \neq t$, ir al paso 2.
  - Si se desea la arborescencia

- Si todos los nodos tienen etiquetas permanentes, terminar, esta es la longitud deseada y el conjunto de arcos $\{a(x), x\}$ forman la arborescencia de rutas más cortas. En otro caso ir al paso 2.

Ejemplo: Una compañía de autobuses desea definir las rutas de sus autobuses considerando nuevas ciudades en su oferta. Inicialmente se consideraba la ruta de la Ciudad de México a la ciudad de Monterrey, por lo que se desea considerar las ciudades intermedias como destinos. ¿Qué plan debe seguirse para minimizar los tiempos de recorrido de los autobuses? Las distancias (en km) se indican en la red de la Figura A.2.

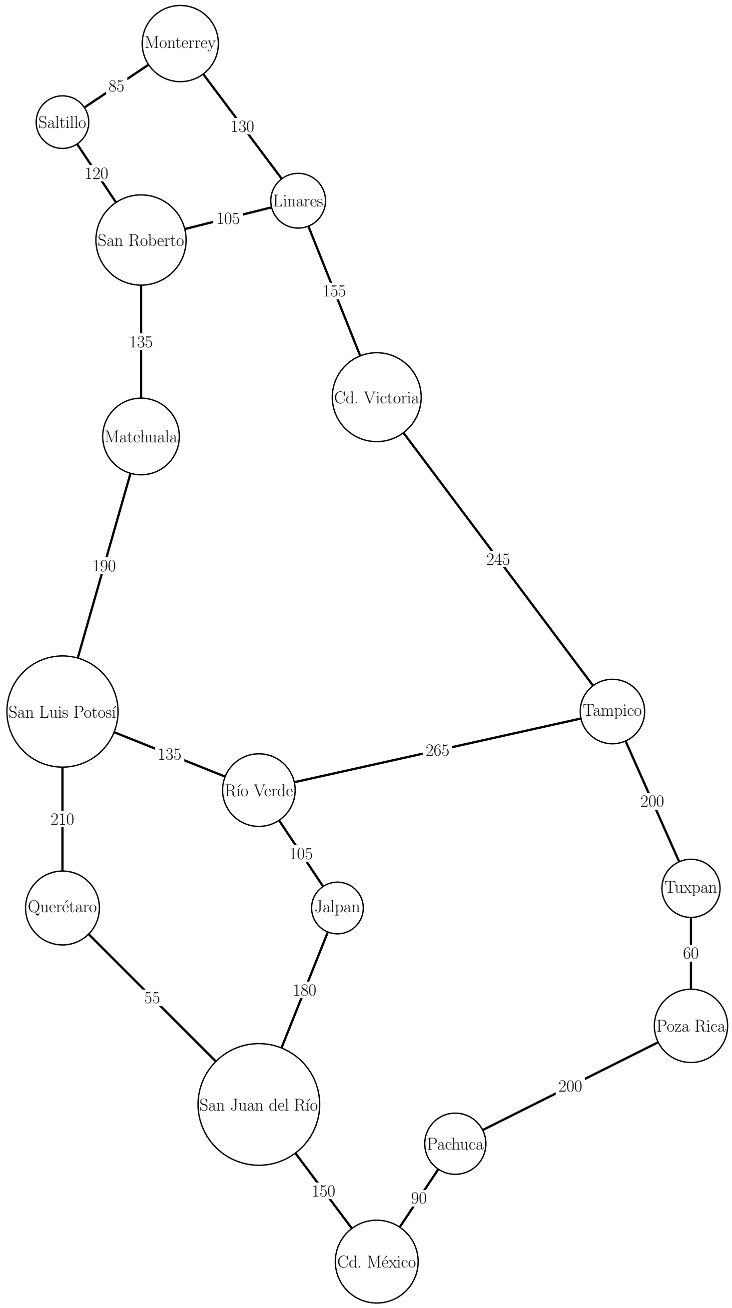


Figura 3.4: Red que representa las distancias entre algunas ciudades en el recorrido México-Monterrey

Solución

Se debe encontrar la arborescencia de rutas más cortas con origen en la Cd. México hasta cada una de las ciudades del mapa.

Para resolver este problema se utilizará el algoritmo de Dijkstra puesto que los costos de los arcos son no negativos.

Inicialización de etiquetas

- $p = s =$ Cd. México
- $d(\text{Cd. México}) = 0$ (etiqueta permanente)
- $d(x) = \infty$ para todo $x \in X,\ x \neq$ Cd. México (etiquetas temporales)

Iteración 1.

Actualización de etiquetas:

$$\begin{aligned}
d(\text{San Juan del Río}) &= \min\{\infty, 150\} = 150; & a(\text{San Juan del Río}) &= \text{Cd. México}\\
d(\text{Pachuca}) &= \min\{\infty, 90\} = 90; & a(\text{Pachuca}) &= \text{Cd. México}
\end{aligned}$$

De donde $x^* =$ Pachuca, puesto que éste es el vértice con mínima etiqueta temporal (los empates se rompen arbitrariamente). Se marca $d(\text{Pachuca})$ como permanente: $p =$ Pachuca.

Iteración 2.

Actualización de etiquetas:

$$d(\text{Poza Rica}) = \min\{\infty, 90 + 200\} = 290; \quad a(\text{Poza Rica}) = \text{Pachuca}$$

$x^* =$ San Juan del Río. Se marca $d(\text{San Juan del Río})$ como permanente: $p =$ San Juan del Río.

Iteración 3.

Actualización de etiquetas:

$$\begin{aligned}
d(\text{Jalpan}) &= \min\{\infty, 150 + 180\} = 330; & a(\text{Jalpan}) &= \text{San Juan del Río}\\
d(\text{Querétaro}) &= \min\{\infty, 150 + 55\} = 205; & a(\text{Querétaro}) &= \text{San Juan del Río}
\end{aligned}$$

$x^* =$ Querétaro. Se marca $d(\text{Querétaro})$ como permanente: $p =$ Querétaro.

Iteración 4.

Actualización de etiquetas:

$$d(\text{San Luis Potosí}) \quad = \quad \min\{\infty, 205 + 210\} \quad = \quad 415; \quad a(\text{San Luis Potosí}) \quad = \quad \text{Querétaro}$$

$x^* =$ Poza Rica. Se marca d(Poza Rica) como permanente: $p =$ Poza Rica.

Iteración 5.

Actualización de etiquetas:

$$d(\text{Tuxpan}) \quad = \quad \min\{\infty, 290 + 60\} \quad = \quad 350; \quad a(\text{Tuxpan}) \quad = \quad \text{Poza Rica}$$

$x^* =$ Jalpan. Se marca d(Jalpan) como permanente: $p =$ Jalpan.

Iteración 6.

Actualización de etiquetas:

$$d(\text{Río Verde}) \quad = \quad \min\{\infty, 330 + 105\} \quad = \quad 435; \quad a(\text{Río Verde}) \quad = \quad \text{Jalpan}$$

$x^* =$ Tuxpan. Se marca d(Tuxpan) como permanente: $p =$ Tuxpan.

Iteración 7.

Actualización de etiquetas:

$$d(\text{Tampico}) \quad = \quad \min\{\infty, 350 + 200\} \quad = \quad 550; \quad a(\text{Tampico}) \quad = \quad \text{Tuxpan}$$

$x^* =$ San Luis Potosí. Se marca d(San Luis Potosí) como permanente: $p =$ San Luis Potosí.

Iteración 8.

Actualización de etiquetas:

$$d(\text{Matehuala}) \quad = \quad \min\{\infty, 415 + 190\} \quad = \quad 605; \quad a(\text{Matehuala}) \quad = \quad \text{San Luis Potosí}$$

$x^* =$ Río Verde. Se marca d(Río Verde) como permanente: $p =$ Río Verde.

Iteración 9.

Actualización de etiquetas:

$$d(\text{Tampico}) = \min\{550, 435 + 265\} = 550; \quad a(\text{Tampico}) = \text{Tuxpan}$$

$x^* =$ Tampico. Se marca d(Tampico) como permanente: $p =$ Tampico.

Iteración 10.

Actualización de etiquetas:

$$d(\text{Cd. Victoria}) = \min\{\infty, 550 + 245\} = 795; \quad a(\text{Cd. Victoria}) = \text{Tampico}$$

$x^* =$ Matehuala. Se marca d(Matehuala) como permanente: $p =$ Matehuala.

Iteración 11.

Actualización de etiquetas:

$$d(\text{San Roberto}) = \min\{\infty, 605 + 135\} = 740; \quad a(\text{San Roberto}) = \text{Matehuala}$$

$x^* =$ San Roberto. Se marca d(San Roberto) como permanente: $p =$ San Roberto.

Iteración 12.

Actualización de etiquetas:

$$\begin{aligned} d(\text{Linares}) &= \min\{\infty, 740 + 105\} = 845; \quad a(\text{Linares}) = \text{San Roberto} \\ d(\text{Saltillo}) &= \min\{\infty, 740 + 120\} = 860; \quad a(\text{Saltillo}) = \text{San Roberto} \end{aligned}$$

$x^* =$ Cd. Victoria. Se marca d(Cd. Victoria) como permanente: $p =$ Cd. Victoria.

Iteración 13.

Actualización de etiquetas:

$$d(\text{Linares}) = \min\{845, 795 + 155\} = 845; \quad a(\text{Linares}) = \text{San Roberto}$$

$x^* =$ Linares. Se marca d(Linares) como permanente: $p =$ Linares.

Iteración 14.

Actualización de etiquetas:

$$d(\text{Monterrey}) = \min\{\infty, 845 + 130\} = 975; \quad a(\text{Monterrey}) = \text{Linares}$$

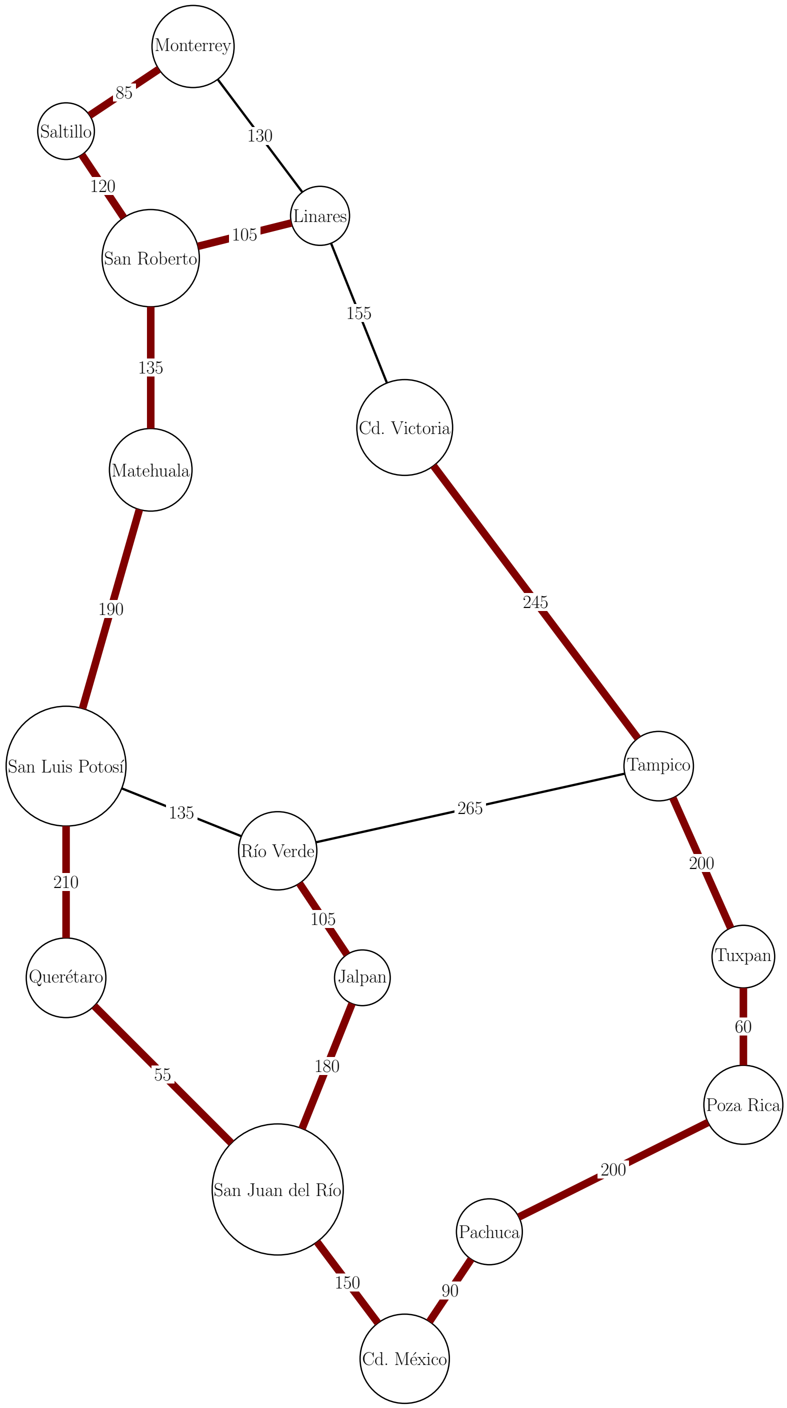
$x^* =$ Saltillo. Se marca d(Saltillo) como permanente: $p =$ Saltillo.

Iteración 15.

Actualización de etiquetas:

$$d(\text{Monterrey}) \quad = \quad \min\{975, 860 + 85\} \quad = \quad 945; \quad a(\text{Monterrey}) \quad = \quad \text{Saltillo}$$

Finalmente, $x^* =$ Monterrey. Todos los nodos tienen etiquetas permanentes y por lo tanto, la arborescencia de rutas más cortas queda como:


Monterrey
85
Saltillo
130
120
Linares
105
San Roberto
155
135
Cd. Victoria
Matehuala
245
190
San Luis Potosí
Tampico
135
265
Río Verde
200
210
105
Tuxpan
Querétaro
Jalpan
60
55
180
Poza Rica
200
San Juan del Río
Pachuca
150
90
Cd. México

3.5. Problema de Flujo Máximo

Supóngase que un área s dispone de cierto producto, mismo que es demandado en una zona t. Se requiere obtener la cantidad máxima posible del producto en t, considerando que al transportarse, éste puede pasar por otros puntos sin oferta ni demanda. Además, hay una capacidad máxima de transporte entre cada par de puntos. A este problema se le puede asociar la red $R = [X, A, q]$, donde:

- X representa el conjunto de nodos.
- Si $i, j \in X,\ (i, j) \in A \Leftrightarrow$ es posible transportar el producto de i a j.
- q: $A \to \Re$, donde para $(i, j) \in A$, $q(i, j) =$ capacidad máxima de transporte de i a j.

Se desea determinar la cantidad del producto a transportar de i a j de tal manera que en t se obtenga la máxima cantidad posible del producto.

Debido a que los puntos intermedios no tienen oferta ni demanda, la cantidad total que entre a un nodo i distinto de s y t, debe ser igual a la cantidad total que sale de s. La cantidad a enviar de i a j para $(i, j) \in A$, debe ser menor o igual que $q(i, j)$.

En general, en una red $R = [X, A, q]$,

- $q(i, j)$ asociado a cada arco, se le llama capacidad del arco (i, j).
- A la cantidad a enviar a través del arco se le llama flujo a través del arco (i, j).

Un flujo factible se define como:

Definición. Un flujo factible en una red $R = [X, A, q]$ es una función $f : A \to \Re$ tal que:

a) $\sum_{j\in\Gamma^+(i)} f(i, j) - \sum_{k\in\Gamma^-(i)} f(k, i) = \begin{cases} v & \text{si } i = s \\ -v & \text{si } i = t \\ 0 & \text{si } i \neq s, t \end{cases}$

b) $0 \leq f(i, j) \leq q(i, j)\ \forall (i, j) \in A$

v es el valor del flujo f y a las ecuaciones a) y b) se les conoce como ecuaciones de conservación de flujo. A los vértices s y t se les llama origen y destino, respectivamente.

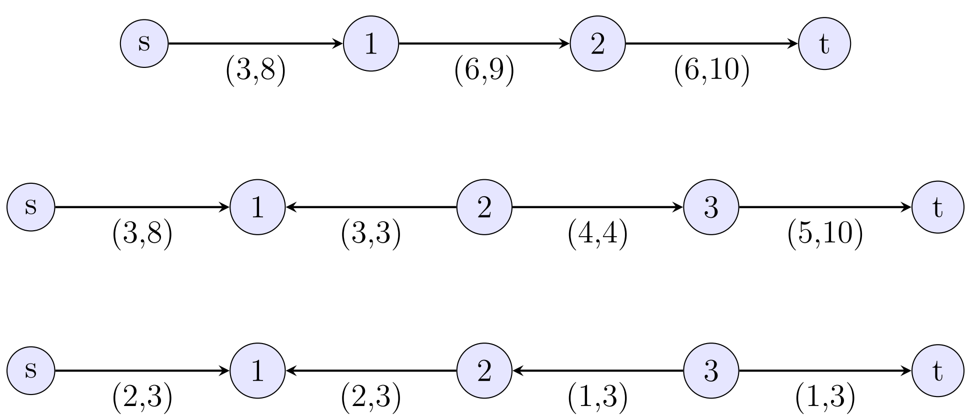
- Un flujo f es máximo si genera el mayor valor posible de v.
- Si $R = (X, A, q)$ es una red y f un flujo factible definido en ella, sea $c : (s = i_1, a_1, i_2, a_2, ..., i_k, a_k, i_{k+1} = t)$ una cadena de s a t y sean c^+ y c^- dos subconjuntos de arcos de C tales que:

$$\begin{aligned} a_j \in c^+ &\Leftrightarrow a_j = (i_j, i_{j+1}) \\ a_j \in c^- &\Leftrightarrow a_j = (i_{j+1}, i_j) \end{aligned}$$

  Es decir, los arcos de c^+ son aquellos que tienen el sentido hacia t, los arcos de c^- son los que tienen el sentido inverso.

Definición. Una cadena de s a t es aumentante si $f_{ij} < q_{ij} \forall (i, j) \in c^+$ y $f_{ij} > 0\ \forall (i, j) \in c^-$. Recibe el nombre de aumentante porque puede enviarse flujo de tal manera que se construya un flujo de mayor valor.

Ejemplo: Sea (f_{ij}, q_{ij}) el flujo factible y la capacidad máxima del arco, respectivamente.



Para verificar si la cadena es aumentante, se construye un flujo factible f' de mayor valor que f como sigue:

$$\begin{aligned} f'_{ij} &= f_{ij} + z\ \forall (i, j) \in c^+ \\ f'_{ij} &= f_{ij} - z\ \forall (i, j) \in c^- \end{aligned}$$

donde z es tal que $f_{ij} + z \leq a_{ij}$ $\forall (i,j) \in c^+$ y $f_{ij} - z \geq 0$ $\forall (i,j) \in c^-$. Si v es el vaor de f, entonces $f' = v + z$, z se conoce como capacidad incremental de la cadena.

La capacidad incremental de una cadena aumentante C es la máxima cantidad de flujo que puede enviarse aún a través de ella de s a t; se denota por $a(c)$.

$$q(c) = min \left\{ \begin{array}{c} min \\ (i,j) \in c^+ \end{array} (q_{ij} - f_{ij}), \begin{array}{c} min \\ (i,j) \in c^- \end{array} (f_{ij}) \right\}$$

Un procedimiento natural para determinar el flujo máximo de una red es encotrar cadenas aumentantes en ésta e incrementar el flujo a través de ellas lo más que se pueda.

Sean $R = (X, A, q)$ una red y $N \subset X$.

Sea $\bar{N} = X - N$.

$(N, \bar{N})$ es el conjunto de arcos que tienen un extremo en N y otro fuera de N.

$(N, \bar{N})^+$ es el conjunto de arcos (i,j) con $i \in N$ y $j \in \bar{N}$.

$(N, \bar{N})^-$ es el conjunto de arcos (i,j) con $i \in \bar{N}$ y $j \in N$.

El conjunto de arcos $(N, \bar{N})$ es un corte o cortadura que separa s de t en R, si $s \in N$ y $t \in \bar{N}$, donde s y t son el origen y el destino de R.

La capacidad de un corte $(N, \bar{N})$ es la suma de las capacidades de los arcos de $(N, \bar{N})^+$. Un corte mínimo es aquel con mínima capacidad. Se denota por $q(N, \bar{N})$.

Proposición. Sea $R = (X, A, q)$ una red. Sea f un flujo factible de valor v y sea $(N, \bar{N})$ un corte de R. Entonces

$$v \leq q(N, \bar{N})$$

Demostración.

Sumando las ecuaciones de conservación de flujo para $i \in N$ se tiene:

$$v = \sum_{i \in N} \sum_{\substack{j \in \Gamma^+(i) \\ (i,j) \in A}} f_{ij} - \sum_{i \in N} \sum_{\substack{k \in \Gamma^-(i) \\ (k,i) \in A}} f_{ki} = \sum_{i,j \in N} f_{ij} + \sum_{i \in N, j \in \bar{N}} f_{ij} - \sum_{i,k \in N} f_{ki} - \sum_{i \in N, k \in \bar{N}} f_{ki}$$

Por a)

$$= \sum_{i\in N, j\in \bar{N}} f_{ij} - \sum_{i\in N, k\in \bar{N}} f_{ki}$$

Por otro lado $0 \leq f_{ij} \leq q_{ij}$ $\forall (i,j) \in A$ entonces

$$v = \sum_{i\in N, j\in \bar{N}} f_{ij} - \sum_{i\in N, k\in \bar{N}} f_{ki} \leq \sum_{i\in N, k\in \bar{N}} f_{ij} \leq \sum_{i\in N, j\in \bar{N}} q_{ij} = q(N, \bar{N})$$

■

Teorema. (Flujo máximo-corte mínimo). En una red $R = (X, A, q)$ el valor del flujo máximo es igual a la capacidad del corte mínimo.

Demostración. Por la proposición anterior, se tiene que:

$$v \leq q(N, \bar{N})$$

siendo v el valor de un flujo factible y $q(N, \bar{N})$ un corte de R con mínima capacidad. Por demostrar que existe un flujo factible en R con valor igual a la capacidad de un corte de R.

Sea f un flujo factible en R y constrúyase un corte de la siguiente manera:

I) Sea $N = \{s\}$

II) Si $i \in N$ y $f_{ij} < q_{ij}$ o $f_{ij} > 0$, agregar j a N. Repetir II) hasta que no pueda agregarse vértice alguno a N. Pueden presentarse dos casos:

Caso 1. Si $t \in N$, dada la construcción de N, existe una cadena C de s a t tal que $f_{ij} < q_{ij}$ $\forall (i,j) \in c^+$ y $f_{ij} > 0$ $\forall (i,j) \in c^-$; entonces esta cadena es aumentante y puede construirse un flujo mejor. Si $q(c)$ es la capacidad incremental de C f y v pueden definirse como:

$$f_{ij} = \begin{cases} f_{ij} + q(c) & , \quad \forall (i,j) \in c^+ \\ f_{ij} - q(c) & , \quad \forall (i,j) \in c^- \\ f_{ij} & , \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$v = v + q(c)$$

El nuevo conjunto N puede actualizarse con el procedimiento anterior utilizando este flujo de mayor valor.

Caso 2. Si $t \notin N$, entonces $(N, \bar{N})$ es un corte de R. Por construcción $f_{ij} = q_{ij}\ \forall\ (i,j) \in (N, \bar{N})^+$ y $f_{ij} = 0\ \forall\ (i,j) \in (N, \bar{N})^-$ entonces

$$v = \sum_{i \in N, j \in \bar{N}} f_{ij} - \sum_{i \in N, k \in \bar{N}} f_{ki} = \sum_{i \in N, j \in \bar{N}} q_{ij} = q(N, \bar{N})$$

Suponiendo que q_{ij} es entero $\forall\ (i,j) \in A$, en el caso 1 se incrementa el flujo en al menos 1 entonces el flujo máximo se alcanza en un número finito de pasos. ■

Las cotas inferiores para el flujo a través de los arcos de R' son todas 0.

Si para algún $i \in X$ existen varios arcos de la forma (i,j) con $r_{ij} \neq 0$ se define un solo arco (i, t') con capacidad $q'_{it'}$ igual a la suma de cotas inferiores de estos arcos.

De manera análoga, si existen varios arcos de la forma (k,i) con $r_{ki} \neq 0$, se define un solo arco (s', i) con $q'_{s'i} = \sum_{(k,i) \in A} r_{ki}$ para algún $i \in X$.

Si el flujo máximo de s' a t' en la red R' tiene valor igual a la suma de las cotas inferiores de los arcos de R, existe un flujo factible en R.

Sin embargo, no siempre existe un flujo factible en redes con estas características:

Si $v' \neq \sum_{(i,j) \in A} r_{ij}$ no existe ningún flujo factible en R.

Una vez que se ha determinado un flujo factible en la red R, si existe, debe determinarse si éste es máximo; de no serlo, debe construirse un flujo de mejor valor.

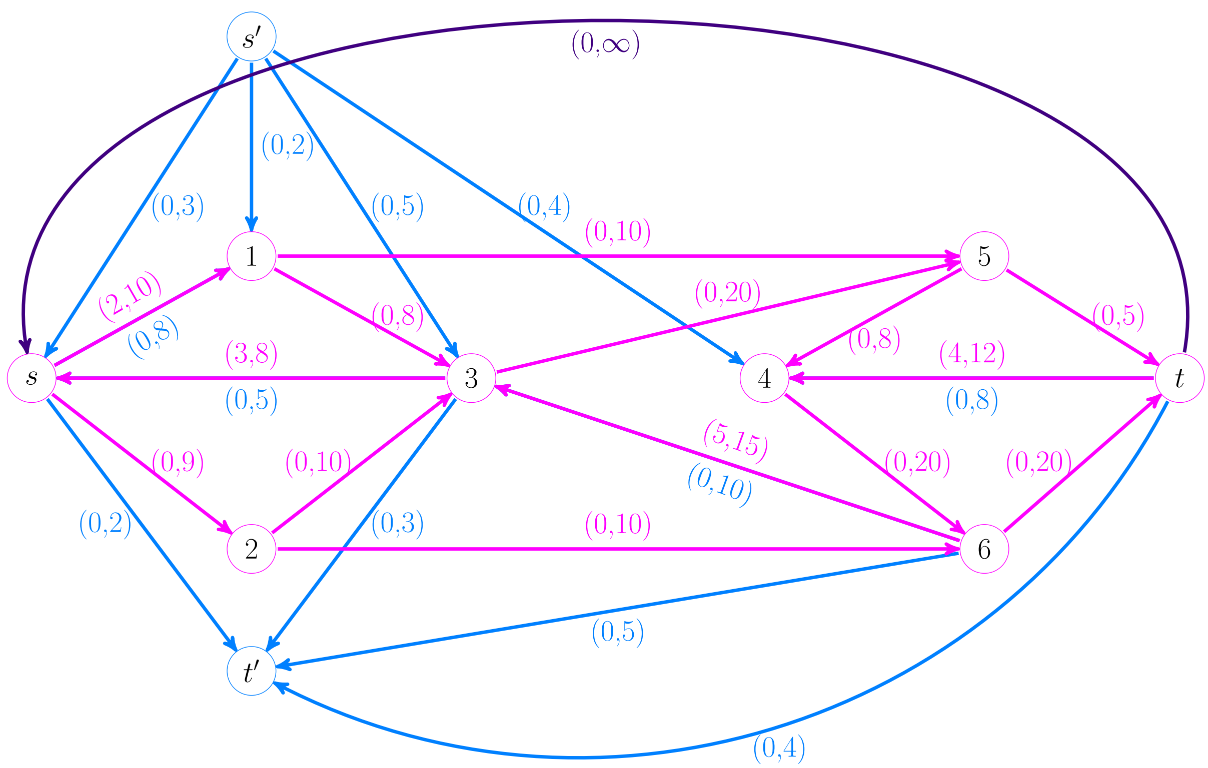
En este tipo de problemas, una cadena C es aumentante si $f_{ij} < q_{ij}\ \forall\ (i,j) \in C^+$ y $f_{ij} > r_{ij}\ \forall\ (i,j) \in C^-$.

En este tipo de problemas, puede utilizarse el algoritmo de Ford y Fulkerson con una modificación:

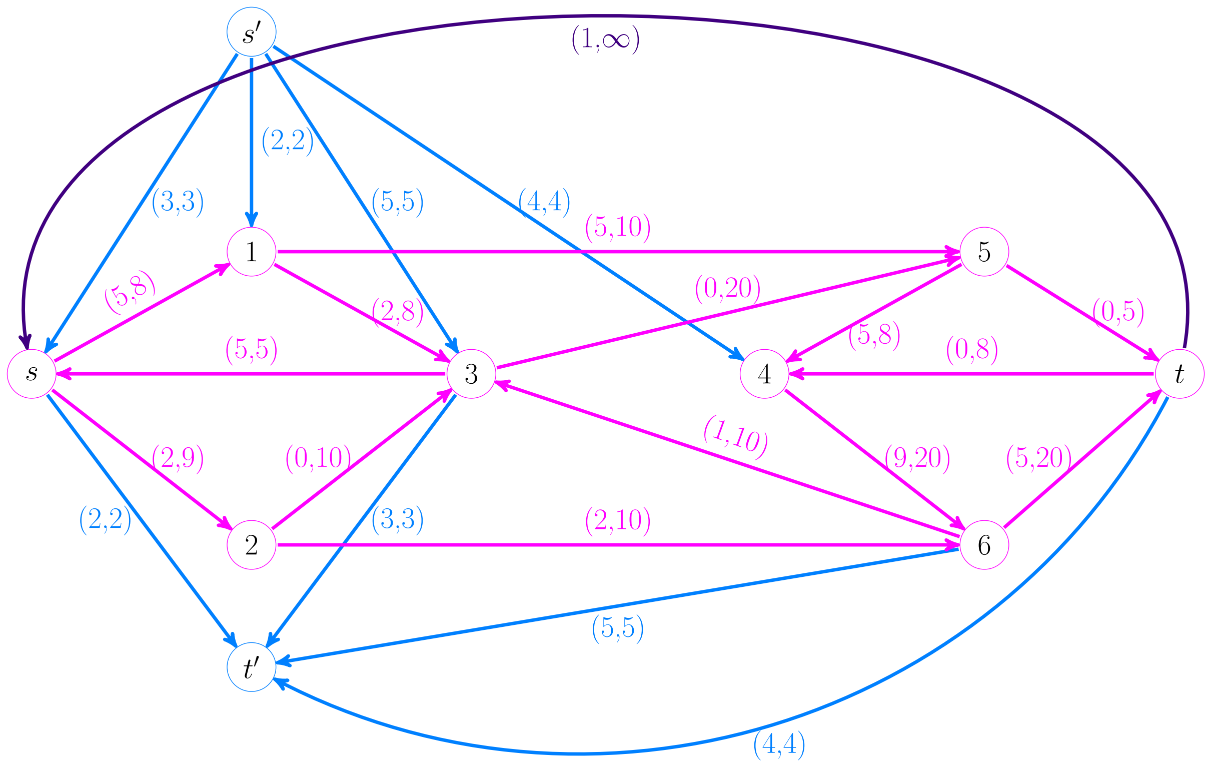
Paso 3.b) A todo i, tal que $(i,j) \in A$ que no esté etiquetado y tal que $f_{ij} > r_{ij}$ asignar la etiqueta $[f(i), -j]$ donde $f(i) = min\{f(j), f_{ij} - r_{ij}\}$

La cantidad de flujo que puede circular a través de un corte, se afecta por los flujos acotados inferiormente. Entonces la capacidad de un corte $(N, \bar{N})$ es:

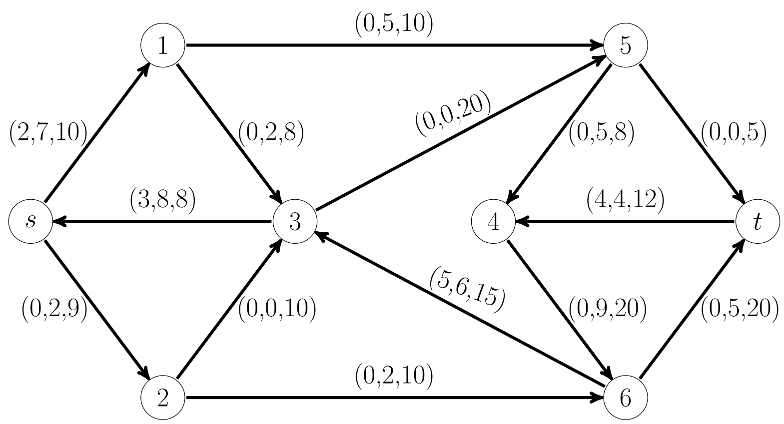
$$q(N, \bar{N}) = \sum_{i \in N, j \in \bar{N}} q_{ij} - \sum_{i \in N, j \in \bar{N}} r_{ij}$$



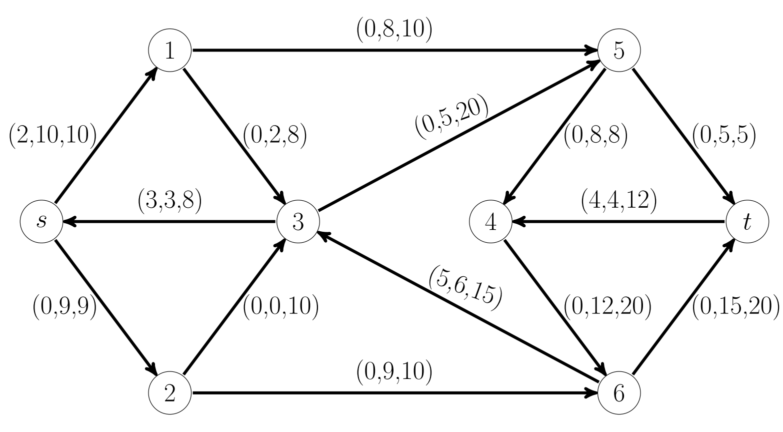
Primeramente se determinará un flujo factible en la red con ayuda de la red R' que se presenta a continuación:



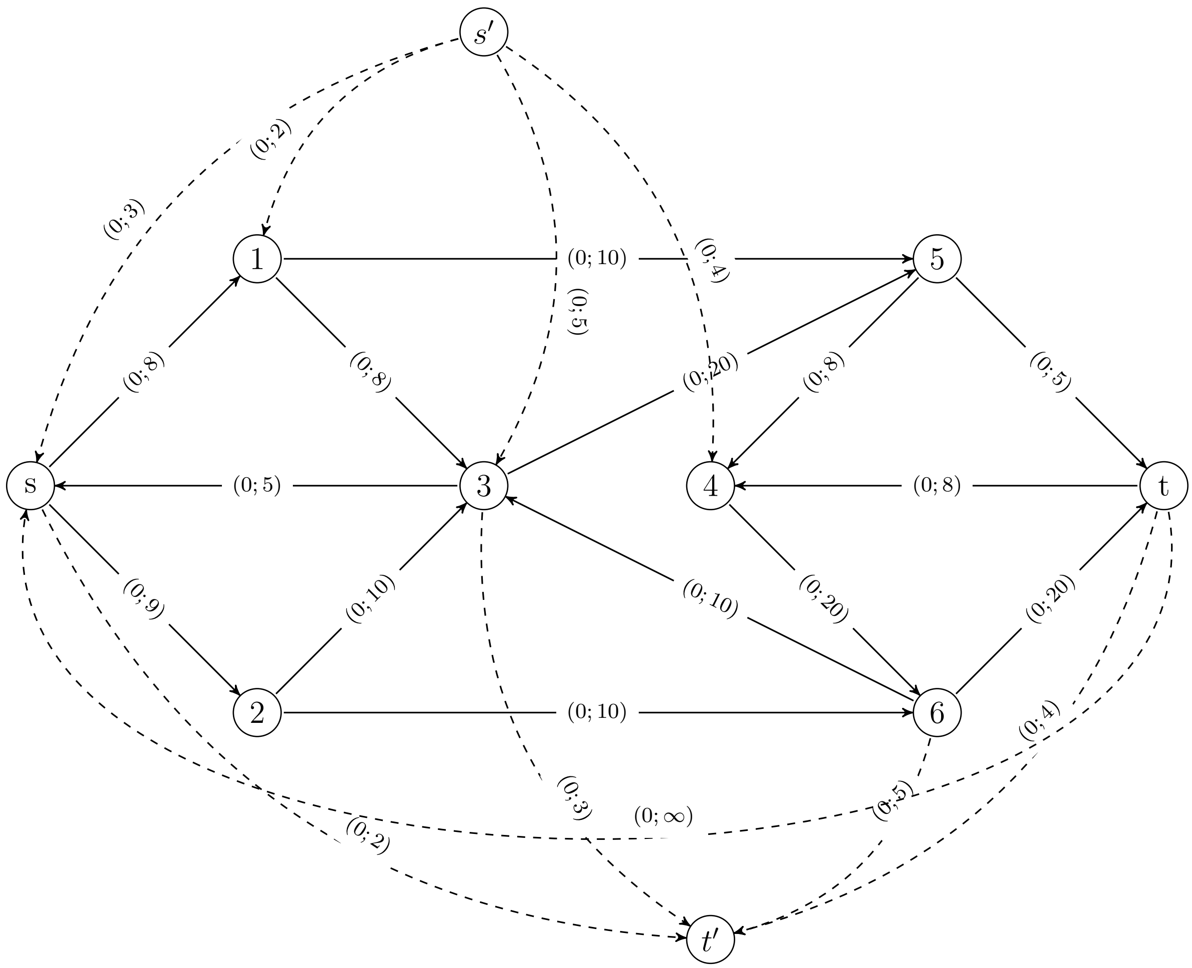
El segundo número asociado a cada arco (i, j) es su capacidad q'_{ij}; el primero es el flujo F_{ij} definido. Puede verificarse fácilmente que F es un flujo máximo en R' de valor 14 que es igual a la suma de las cotas inferiores de los arcos de R. Luego, existe un flujo factible en R de valor $F_{ts} = 1$. Con base en la demostración del teorema correspondiente este flujo es $f_{ij} = F_{ij} + r_{ij}$, para todo arco (i, j) de R:



Los números asociados a los arcos (i,j) de esta red son r_{ij}, f_{ij} y q_{ij}, respectivamente. Utilizando el algoritmo de Ford y Fulkerson, con la modificación mencionada en esta sección, se determina la cadena aumentante $s,3,5,t$ con capacidad incremental igual a 5 unidades de flujo. Una vez actualizado el flujo a través de los arcos de esta cadena, se determina la cadena $s,2,6,t$ de capacidad incremental igual a 7. Por último se determina la cadena aumentante $s,1,5,4,6,t$ de capacidad incremental 3. Por lo tanto el flujo máximo en la red es de valor 16 y se presenta como el segundo número asociado a los arcos de la siguiente red:



Ejemplo:



3.5.1. Método de solución

El método de solución es el algoritmo de Ford y Fulkerson:

Objetivo: Determinar el flujo máximo entre origen y destino en una red $R = [X, A, q]$

Descripción:

1. Iniciar con cualquier flujo factible f.

2. Etiquetar el origen s con $[\infty, s]$.

3. Elegir un vértice etiquetado y no examinado; sea j éste vértice y sean $[f(j), \pm k]$ sus etiquetas.

a) A todo i sucesor de j que no esté etiquetado y tal que $f_{ij} < q_{ij}$ asignar la etiqueta $[f(i), +j]$, donde $f(i) = min\{f(j), q_{ji} - f_{ij}\}$.

b) A todo i predecesor de j que no esté etiquetado y tal que $f_{ij} > 0$ asignar la etiqueta $[f(i), -j]$, donde $f(i) = min\{f(j), f_{ij}\}$.

El vértice j ha sido examinado.

4. Repetir el paso 3 hasta que suceda a) o b):

    a) El vértice destino t no tiene etiqueta y todos los vértices etiquetados han sido examinados. Terminar, el flujo factible f es máximo.

    b) El vértice t recibe etiqueta. Ir al paso 5.

5. Sea $x = t$.

6. a) Si la etiqueta de x es de la forma $[f(x), +z]$ hacer: $f_{zx} = f_{zx} + f(t)$

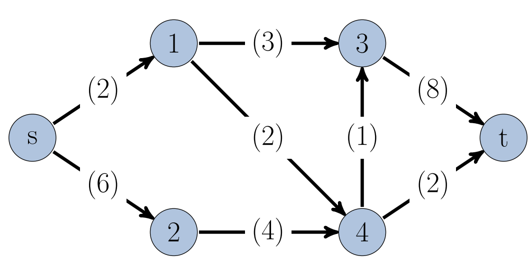
    b) Si la etiqueta de x es de la forma $[f(x), -z]$ hacer: $f_{xz} = f_{xz} - f(t)$

7. Si $z = s$, borrar todas las etiquetas y regresar al paso 2. Si $z \neq s$, hacer $x = z$ y regresar al paso 6.

Corte mínimo

Al terminar de aplicar el algoritmo, t no tiene etiqueta. El corte de capacidad mínima está dado por el conjunto de arcos $(N, \bar{N})$, donde $N = \{X \in N | x \text{ tiene etiqueta}\}$.

Ejemplo: Determinar el flujo máximo de s a t en la siguiente red mediante el algoritmo de Ford y Fulkerson. El número asociado a cada arco representa su capacidad.



Se aplicará el algoritmo utilizando un flujo inicial igual a cero a través de todos los arcos de la red.

Iteración 1.

2. Etiquetar a s con $[\infty, s]$.

3.

a) s es el único vértice etiquetado.

b) Los sucesores i de s no etiquetados y tales que $f_{si} < q_{si}$ son 1 y 2, entonces:
1 recibe etiqueta $[min\{\infty, 2\}, +s]$
2 recibe etiqueta $[min\{\infty, 6\}, +s]$

El vértice s ha sido examinado.

a) Se elige 1.

b) Los sucesores i de 1 no etiquetados tales que $f_{1i} < q_{1i}$ son 3 y 4, entonces:
3 recibe etiqueta $[min\{2, 3\}, +1]$
4 recibe etiqueta $[min\{2, 2\}, +1]$

a) Se elige 4.

b) El sucesor i de 4 no etiquetado tal que $f_{4i} < q_{4i}$ es t. t recibe etiqueta $[min\{2, 2\}, +4]$

Como t recibió etiqueta, existe una cadena aumentante de s a t.

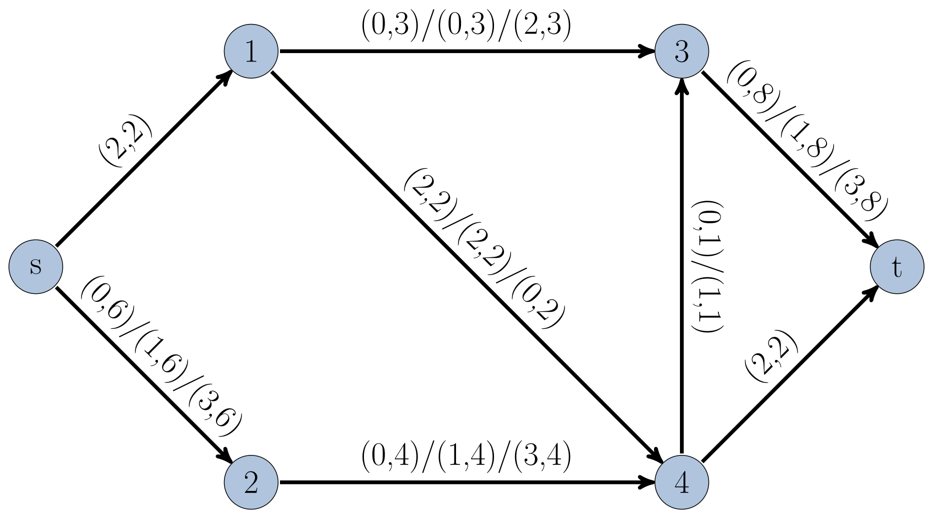
5. $x = t$

6. $x = t$, su etiqueta es $[2, +4] \Rightarrow f_{4t} = 2$

$x = 4$, $[2, +1] \Rightarrow f_{14} = 2$

$x = 1$, $[2, +s] \Rightarrow f_{s1} = 2$

La red resultante es:



Iteración 4. Ningún vecino de 4 puede etiquetarse. Todos los vértices etiquetados han sido examinados y t no recibió etiqueta.

El último flujo es máximo.

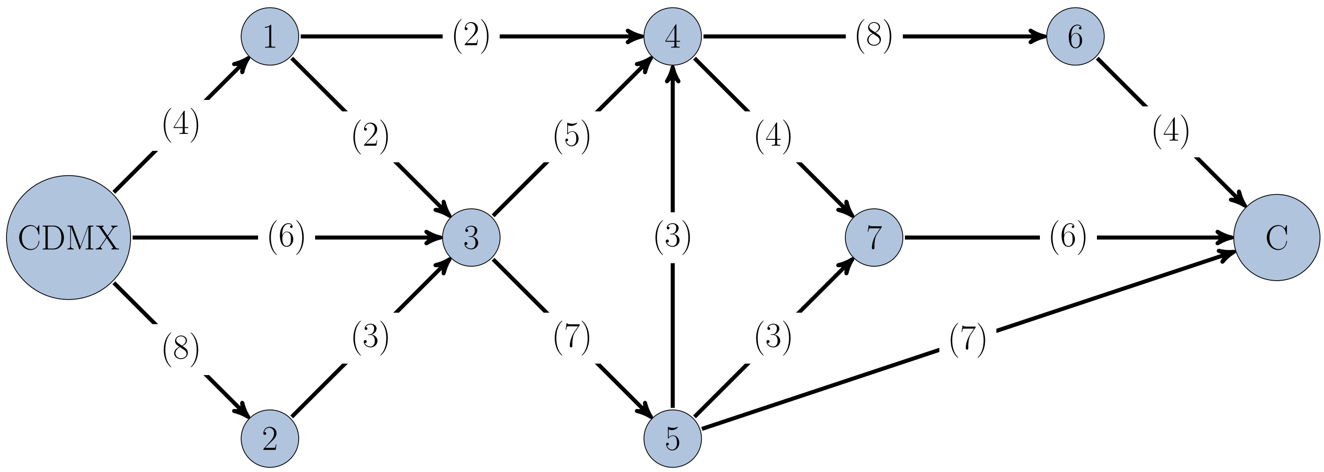
El conjunto de vértices etiquetados es $N = \{s, 2, 4\}$. El corte mínimo es $(N, \bar{N})$.

$\bar{N} = \{1, 3, t\}$

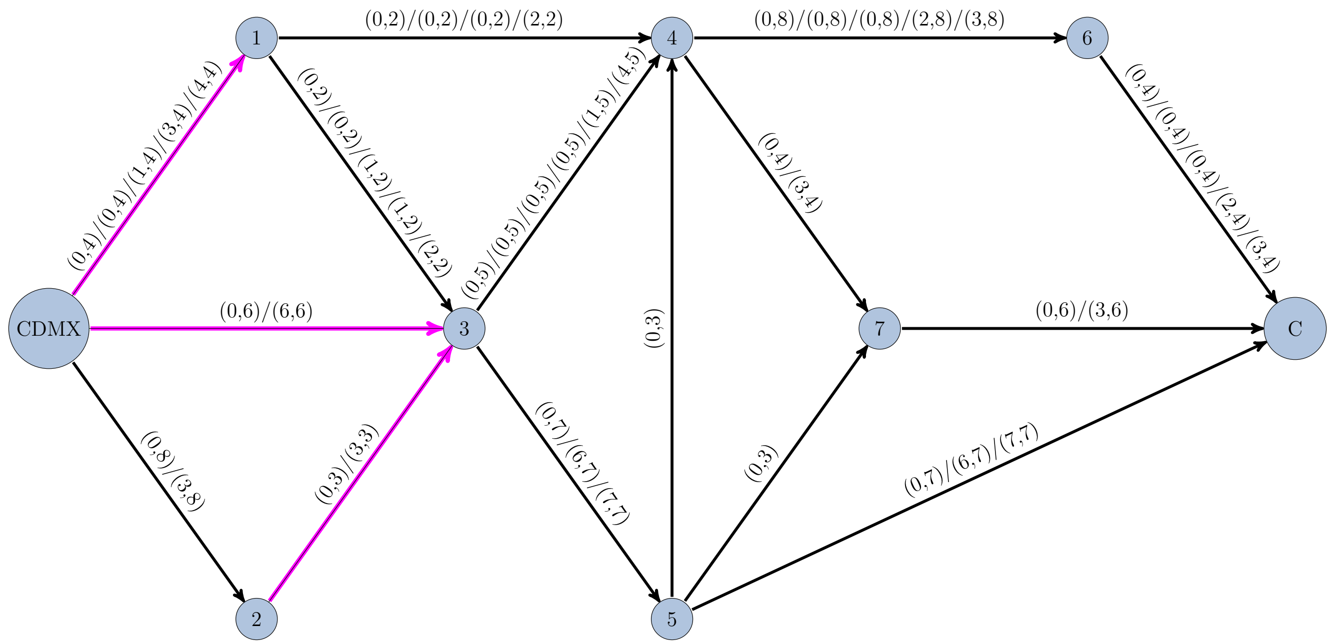
$(N, \bar{N}) = \{(s, 1), (4, 3), (4, t), (1, 4)\}$ y su capacidad $q(N, \bar{N}) = 2 + 1 + 2 = 5$ que es igual al flujo máximo.

Ejemplo: Un gran número de personas viaja en automóvil de la ciudad de México a Cuernavaca. Las rutas posibles se muestran en la red. La policía de caminos desea construir suficientes casetas de inspección de tal manera que todo automóvil pase por al menos una de ellas en su trayectoria. El costo de construcción de las casetas depende de su localización, el costo asociado con cada tramo se proporciona en cada arco (en millones de pesos). ¿Dónde deben colocarse las casetas si se desea incurrir en el costo mínimo?

En términos de redes, se desea obtener un conjunto de arcos (tramos donde construir las casetas) de maneta que si se eliminan esos arcos de la red ya no habrá caminos de A a B, entonces, todo automóvil debe usar alguno de esos arcos, este conjunto de arcos forman un corte. Además, se desea que el costo sea mínimo, por lo que se busca el corte a mínimo costo. Si se consideran los costos como capcidades de un cierto flujo y a través de ellos se determina el corte de capacidad mínima, esta corresponderá al corte de mínimo costo.



Solución:



$$\begin{aligned} N &= \{CDMX, 2\} \\ (N, \bar{N}) &= \{(CDMX, 1), (CDMX, 3), (2, 3)\} \\ q(N, \bar{N}) &= 4 + 6 + 3 = 13 \end{aligned}$$

La solución es construir las casetas en los tramos (CDMX,1), (CDMX,3) y (2,3)

3.5.2. Variantes del problema

Caso donde existen varios orígenes o destinos

Supóngase que la red $R = (X, A, q)$ tieme m orígenes: $s_1, ..., s_m$ y n destinos $t_1, ..., t_n$ y que puede enviarse flujo de cualquier origen a cualquier destino.

El problema consiste en determinar el flujo máximo que puede enviase de todos los orígenes a todos los destinos.

Supóngase que a la red R se asocia la red $R' = (X', A', q')$ donde:

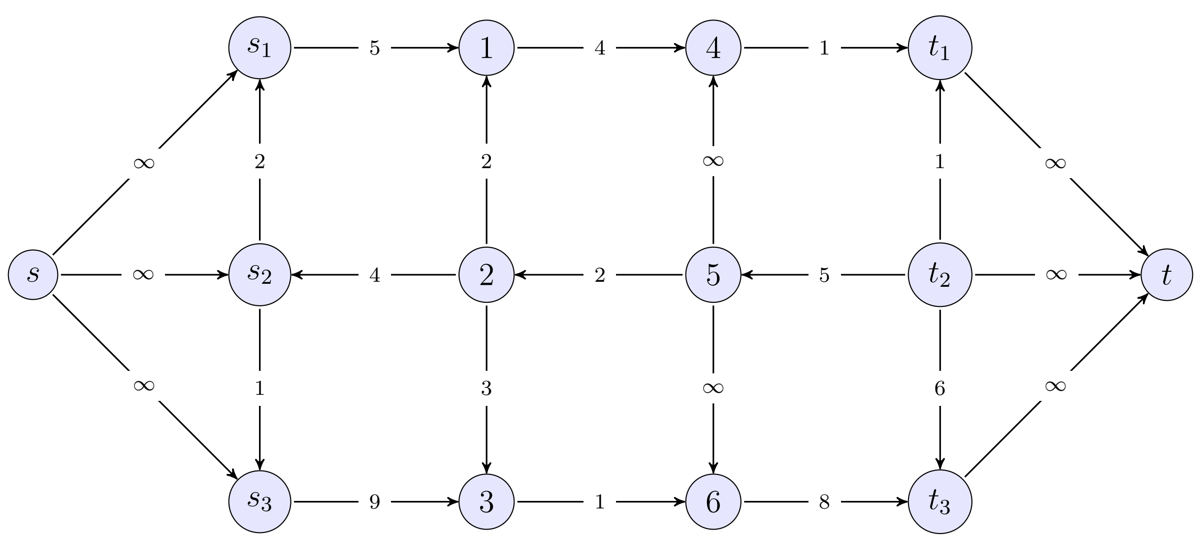
$$\begin{aligned}
X' &= X \cup \{s, t\} \\
A' &= A \cup \{(s, s_i) | i = 1, ..., m\} \cup \{(t_j, t) | j = 1, ..., n\} \\
q'(i,j) &= \begin{cases} q_{ij} & \text{si } (i,j) \in A \\ \infty & \text{si } i = s \text{ o } j = t \end{cases}
\end{aligned}$$

El problema se reduce a determinar el flujo máximo de s a t en la red R'.

Una vez determinado el flujo en R', bastará con definir en R el mismo flujo definido en los arcos de $A \in R'$.

Para resolver este tipo de problema puede utilizarse el algoritmo de Ford y Fulkerson sin modificaciones.

Ejemplo:



Caso donde se permiten capacidades en los vértices

Sea $R = (X, A, q, k)$ una red en la cual se ha definido una función q que asocia a cada arco la capacidad de flujo a través de él y una función k que asocia a cada vértice la capacidad del flujo que puede pasar por él.

Un flujo factible f en R es una función $f : A \to \Re$ que cumple

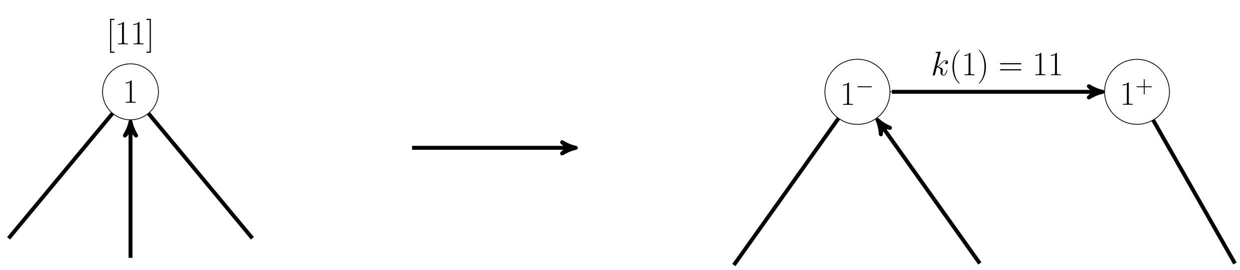
a) $\sum_{(i,j)\in A} f(i,j) - \sum_{(k,i)\in A} f(k,i) = \begin{cases} V & \text{si } i = s \\ -V & \text{si } i = t \\ 0 & \text{si } s \neq i \neq t \end{cases}$

b) $0 \leq f(i,j) \leq q(i,j)$

c) $\sum_{(j,i)\in A} f(j,i) \leq k(i)\ \forall i \in X$

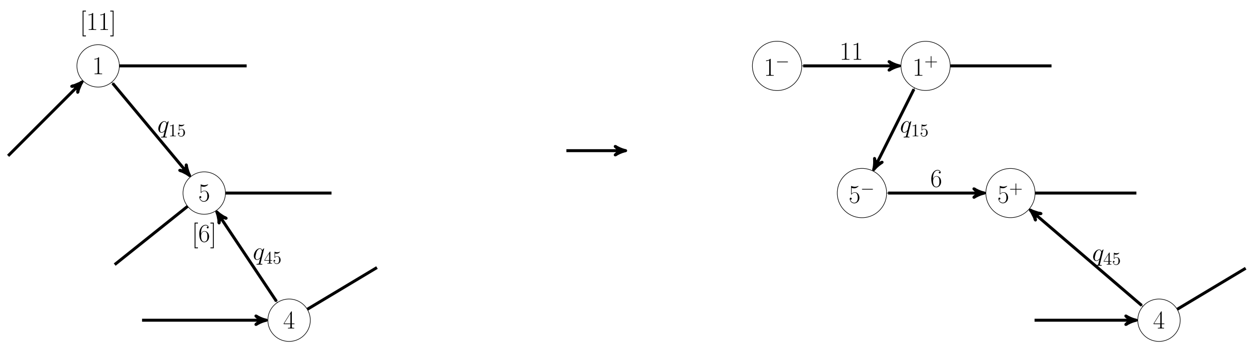
Para determinar el flujo máximo de s a t en R, debe considerarse una red R' construida de la siguiente manera:

- A cada vértice i de R con capacidad finita, corresponde un arco (i^-, i^+) en R' con capacidad $k(i)$



- Todos los arcos con extremo final i en R corresponde a arcos de la forma (j, i^-) o (j^+, i^-) en R'.

- Todos los arcos con extremo inicial i en R corresponden a arcos (i^+, j) o (i^+, j^-) en R'.



- Todos los arcos de R conservan su capacidad.

Si f' es un flujo factible de valor v en R', f se define como:

$$f_{ki} = f'_{ki^-} \quad \text{y} \quad f_{ij} = f'_{i^+j} \ \forall i \in X$$

con capacidad finita, y $f_{ij} = f'_{ij}$ en otro caso.

Si $i \in X$ tiene capacidad $k(i)$ y V es el conjunto de vértices de R', se tiene que:

$$\sum_{j \in X} f_{ij} - \sum_{k \in X} f_{ki} = \sum_{j \in V} f'_{i^+j} - \sum_{k \in V} f'_{ki^-} = \sum_{j \in V} f'_{i^+j} - f'_{i^-i^+} = \begin{cases} V & \text{si } i = s \\ 0 & \text{si } i \neq s, t \\ -V & \text{si } i = t \end{cases}$$

Por otro lado:

$$\sum_{(j,i) \in A} f_{ji} = \sum_{j \in V} f'_{ji^-} = f'_{i^-j^+} \leq k(i)$$

entonces f es un flujo factible de valor v en R.

Determinar el flujo máximo en R es equivalente entonces a determinarlo en R'.

La cortadura de capacidad mínima de R' puede corresponer a un conjunto de arcos y vértices de R.

Caso con cotas inferiores en los arcos

Algunas veces es necesario asociar una cota inferior al flujo a través de un arco, por ejemplo, si la cota inferior representa una demanda.

Considérese una red $R = (X, A, r, q)$ donde:

q es la función de capacidad asociada a los arcos.

r es la función que asocia a cada arco una cota inferior.

Un flujo f es factible si se cumple que:

a) $\sum_{(i,j)\in A} f(i,j) - \sum_{(k,i)\in A} f(k,i) = \begin{cases} V & \text{si } i = s \\ -V & \text{si } i = t \\ 0 & \text{si } s \neq i \neq t \end{cases}$

b) $r_{ij} \leq f_{ij} \leq q_{ij} \ \forall \ (i,j) \in A$

Para poder resolver este problema, se requiere determinar un flujo inicial factible; un flujo igual a cero a través de todos los arcos no es factible.

Para determinar un flujo factible inicial se utilizará la red $R' = (X \cup \{s', t'\}, A \cup A' \cup \{(t,s)\}, q')$ donde:

- Para todo $(i,j) \in A$, si $r_{ij} \neq 0$, se definen los arcos (s', j), $(i, t') \in A'$
- $q'_{ij} = q_{ij} - r_{ij} \ \forall (i,j) \in A$
- $q'_{ts} = \infty$
- $\forall (i,j) \in A$, si $r_{ij} \neq 0$, se define $q'_{s'j} = q'_{it'} = r_{ij}$

3.6. El Problema de Transporte

El problema general de transporte se refiere a la distribución de un bien desde un grupo de centros de distribución llamados orígenes, a un conjunto de centros de recepción llamados destinos, de tal manera que se minimicen los costos totales de distribución.

En el problema general, se consideran lo siguiente:

- m orígenes
- n destinos

- s_i recursos en el origen i
- d_i demanda en el destino j
- cij costo por unidad distribuida desde el origen i hasta el destino j.

Para resolver el problema de transporte se asume que el modelo está balanceado, es decir, que la demanda total es igual a la oferta total. Un problema de transporte tiene soluciones factibles si y sólo si:

$$\sum_{i=1}^{m} s_i = \sum_{j=1}^{n} d_j$$

Si el modelo no está balanceado, es posible agregar un origen o un destino ficticios para restaurar el balance.

Otro supuesto importante para el modelo, es que el costo de distribuir unidades de un origen a un destino dado es directamente proporcional al número de unidades distribuidas. Por lo tanto este costo es el costo unitario de distribución multiplicado por el número de unidades distribuidas. Es decir, la función del costo de transporte debe ser una función lineal del número de unidades transportadas y el costo de transporte por unidad no varía con la cantidad transportada.

Los parámetros del modelo pueden resumirse en una tabla, que se conocerá como tabla de transporte:

Origen \ Destino	1	2	$\cdots$	n	Oferta
1	c_{11}	c_{12}	$\cdots$	c_{1n}	s_1
2	c_{21}	c_{22}	$\cdots$	c_{2n}	s_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
m	c_{m1}	c_{m2}	$\cdots$	c_{mn}	s_m
Demanda	d_1	d_2	$\cdots$	d_n	

Cualquier problema (que involucre el transporte o no), se ajusta a este modelo de problema de transporte si se puede escribir por completo en términos de una tabla de parámetros como la anterior y satisface tanto las suposiciones de requerimientos y de costo.

El objetivo del modelo consiste en minimizar el costo total de distribuir las unidades. La formulación como problema de programación lineal para este problema es como sigue:

$$
\begin{array}{lll}
min & z = & \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \\
sujeto\ a: & & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = s_i \qquad i = 1, ..., m \\
& & \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j \qquad j = 1, ..., n \\
& & x_{ij} \geq 0 \qquad i = 1, ..., m,\ j = 1, ..., n
\end{array}
$$

3.7. Método Simplex para Problemas de Transporte

Debido a la estructura característica del modelo de transporte, donde la matriz A sólo tiene entradas 0, 1 y -1 es posible resolver el problema utilizando un método basado en el método simplex. En el algoritmo simplex se tienen los siguientes pasos generales:

1. Encontrar una solución básica factible inicial.
2. Calcular $z_j - c_j$ para cada variable no básica. De acuerdo con estos valores, terminar o seleccionar la variable de entrada.
3. Determinar la columna de salida.
4. Obtener la nueva solución básica factible y volver al paso 2.

Estos pasos pueden efectuarse directamente sobre la tabla de transporte.

Para encontrar una solución básica inicial factible se pueden utilizar los siguientes métodos:

1. La esquina noroeste
2. Método de costo mínimo
3. Método de aproximación de Voguel

Bibliografía

[1] M. S. Bazaraa, J. J. Jarvis, and H. D. Sherali, *Linear programming and network flows*, John Wiley & Sons, 2011.

[2] J. Farkas, *Theory of simple inequalities*, Journal of Pure and Applied Mathematics, 1902 (1902).

[3] J. B. J. Fourier, *Solution d une question particuliere du calcul des inégalités*, Nouveau Bulletin des Sciences par la Société philomatique de Paris, 99 (1826), p. 100.

[4] L. V. Kantorovich, *Mathematical methods of organizing and planning production*, Management Science, 6 (1960), pp. 366–422.

[5] T. C. Koopmans, *Analysis of production as an efficient combination of activities*, Activity analysis of production and allocation, 13 (1951), pp. 33–37.

[6] T. S. Motzkin, *Beiträge zur Theorie der linearen Ungleichungen*, Azriel, 1936.

[7] A. W. Tucker, *Dual systems of homogeneous linear relations*, Linear inequalities and related systems, 38 (1956), pp. 3–18.

[8] J. Von Neumann and O. Morgenstern, *Game theory and economic behavior*, Princeton, Princeton University, (1944).

Apéndice A

Álgebra Lineal, Convexidad y Conjuntos Poliédricos

A.1. Ecuaciones Lineales Simultáneas

Considérese el sistema $Ax = b$ donde A es una matriz de $m \times n$ y $b \in \mathbb{R}^m$ y la matriz aumentada (A, b) con m renglones y $n+1$ columnas. Si el rango de (A, b) es mayor que el rango de A, entonces b no puede ser escrito como una combinación lineal de $a_1, ..., a_n$, y no hay solución para el sistema $Ax = b$.

Ahora supóngase que $rango(A) = rango(A, b) = k$, después de reordenar los renglones de (A, b), se tiene:

$$(A, b) = \begin{bmatrix} A_1 & b_1 \\ A_2 & b_2 \end{bmatrix}$$

donde A_1 es una matrix de $k \times n$, b_1 es un vector con k elementos, A_2 es una matriz de $(m-k) \times n$, b_2 es un vector $(m - k)$ y $rango(A_1) = rango(A_1, b_1) = k$.

Si un vector x satisface $A_1 x = b_1$, entonces automáticamente satisface $A_2 x = b_2$, por lo que es posible eliminar las restricciones *redundantes* o *dependientes* $A_2 x = b_2$ y sólo conservar las independientes $A_1x = b_1$. Como $rango(A_1) = k$, es posible seleccionar k columnas linealmente independientes de A_1 y después de reordenar las columnas de A_1, se tiene que $A_1 = (B, N)$, donde B es una matriz de $k \times k$ no singular y N es una matriz de $k \times (n-k)$. Una matriz B existe porque A_1 tiene rango k.

B se llama *matriz base*, ya que las columnas de B forman una base de $\mathbb{R}^k$, y N es la correspondiente *matriz no básica*. El vector x puede escribirse como x_B y x_N, donde $x_B = (x_1, ..., x_k)$ y $x_N = (x_{k+1}, ..., x_n)$. Entonces $A_1x = b_1$ puede escribirse como $(B, N)\begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = b_1$, es decir $Bx_B + Nx_N = b_1$. Como B tiene inversa, entonces es posible resolver para x_B en términos de x_N premultiplicando por B^{-1}, obteniendo

$$x_B = B^{-1}b_1 - B^{-1}Nx_N$$

En el caso en que $k = n$, N es vacío, y la solución para el sistema $A_1x = b_1$ es única: $x_B = B^{-1}b_1 = A^{-1}b_1$. Por otro lado, si $n > k$, es posible calcular x_B asignando valores arbitrarios al vector x_N, en este caso hay un número infinito de soluciones para el sistema $A_1x = b_1$.

Cada solución obtenida haciendo $x_N = 0$ y $x_B = B^{-1}b_1$ se llama *solución básica* del sistema $A_1x = b_1$.

En resumen pueden tenerse los siguientes casos:

1. $rango(A, b) > rango(A)$ entonces $Ax = b$ no tiene solución.

2. $rango(A, b) = rango(A) = k = n$ entonces existe una solución única al sistema $Ax = b$.

3. $rango(A, b) = rango(A) = k < n$ entonces hay un número infinito de soluciones al sistema $Ax = b$.

En general, estos casos pueden determinarse a través de una reducción de Gauss-Jordan del sistema $Ax = b$.

A.2. Conjuntos y Funciones Convexas

Conjuntos convexos

Un conjunto $X \in \mathbb{R}^n$ es llamado *conjunto convexo* si dados dos puntos x_1 y x_2 en X, entonces $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in X$ para cada $\lambda \in [0,1]$. Algunos ejemplos de conjuntos convexos son:

- $\{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$
- $\{x \mid Ax = b\}$ donde A es una matriz de $m \times n$ y b es un vector m.
- $\{x \mid Ax = b,\ x \geq 0\}$ donde A es una matriz de $m \times n$ y b es un vector m.
- $\{x \mid Ax \leq b,\ x \geq 0\}$ donde A es una matriz de $m \times n$ y b es un vector m.

Puntos extremos

Un punto x en un conjunto convexo X es llamado *punto extremo* de X si x no puede ser escrito como una combinación convexa estricta de dos puntos distintos de X, es decir, si $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ con $\lambda \in (0,1)$ y $x_1,\ x_2 \in X$ implica que $x = x_1 = x_2$. La noción de puntos extremos juega un rol particularmente importante en la teoría de la programación lineal.

Hiperplanos y Semiespacios

Un hiperplano en $\mathbb{R}^n$ generaliza la idea de línea recta en $\mathbb{R}^2$ y de plano en $\mathbb{R}^3$. Un *hiperplano* $H \in \mathbb{R}^n$ es un conjunto de la forma $\{x \mid px = k\}$ donde p es un vector diferente de cero en $\mathbb{R}^n$ y k es un escalar. p es llamado la *normal* o el *gradiente* al hiperplano.

Considerando un punto $x_0 \in H$, entonces $px_0 = k$ y para cada $x \in H$ $px = k$. Entonces restando se tiene que $p(x - x_0) = 0$, es decir, H puede representarse como una colección de puntos que satisfagan $p(x-x_0) = 0$, donde x_0 es un punto fijo en H. Un hiperplano es un conjunto convexo.

Un hiperplano divide a $\mathbb{R}^n$ en dos regiones llamadas semiespacios. Un *semiespacio* es una colección de puntos de la forma $\{x \mid px \geq k\}$ o $\{x \mid px \leq k\}$ donde p es un vector diferente de cero en $\mathbb{R}^n$ y k es un escalar.

Rayos y Direcciones

Otro ejemplo de conjunto convexo es un rayo. Un *rayo* es una colección de puntos de la forma $\{x_0 + \lambda d \mid \lambda \geq 0\}$ donde d es un vector diferente de cero. x_0 es llamado *vértice* del rayo y d es la *dirección* del rayo.

Direcciones en un Conjunto Convexo

Dado un conjunto convexo, un vector d diferente de cero es llamado *dirección del conjunto* si para cada x_0 en el conjunto, el rayo $\{x_0 + \lambda d \mid \lambda \geq 0\}$ también pertenece al conjunto. Entonces, empezando en el punto x_0 es posible moverse a lo largo de d en cualquier paso de tamaño $\lambda \geq 0$ y permanecer en el conjunto. Si el conjunto es acotado, entonces no tiene direcciones.

Considérese el conjunto $X = \{x \mid Ax \leq b,\ x \geq 0\}$. Un vector $d \neq 0$ es una dirección de X si y sólo si

$$\begin{aligned} A(x + \lambda d) &\leq b \\ x + \lambda d &\geq 0 \\ \forall\, \lambda \geq 0&, \forall\, x \in X \end{aligned}$$

La primera desigualdad se mantiene si y sólo si $Ad \leq 0$ y $x + \lambda d$ es no negativa para λ arbitrariamente larga si y sólo si d es no negativo. En resumen, d es una dirección de X si y sólo si

$$d \geq 0, \quad d \neq 0, \quad Ad \leq 0$$

Direcciones Extremas de un Conjunto Convexo

La noción de *dirección extrema* es similar a la de los puntos extremos. Una dirección extrema de un conjunto convexo es una dirección del conjunto que no puede ser representada como una combinación positiva de dos direcciones distintas del conjunto. Cualquier rayo contenido en el conjunto convexo y cuya dirección es una dirección extrema es llamado *rayo extremo*.

Conos Convexos

Un *cono convexo* C es un conjunto convexo con la propiedad adicional que $\lambda x \in C$, $\forall\ x \in C$ y $\forall\ \lambda \geq 0$.

Un cono convexo siempre contiene al origen haciendo $\lambda = 0$, y dado cualquier punto $x \in C$, el rayo $\{\lambda x \mid \lambda \geq 0\}$ pertenece a C. Entonces, un cono convexo es un conjunto convexo formado totalmente por los rayos que parten del origen.

Funciones Cóncavas y Convexas

Una función f de un vector de variables $(x_1, ..., x_n)$ es *convexa* si se cumple la siguiente desigualdad para cualesquiera dos vectores x_1 y x_2:

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2), \quad \forall\ \lambda \in [0,1]$$

Una función f es *cóncava* si y sólo si $-f$ es convexa, es decir:

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2), \quad \forall\ \lambda \in [0,1]$$

para algunos x_1 y x_2 dados.

A.3. Conjuntos y Conos Poliédricos

Un *conjunto poliédrico*, o un *poliedro* es la intersección de un número finito de semiespacios. Un conjunto poliédrico acotado es llamado *politopo*. Como un semiespacio puede ser representado por una desigualdad de la forma $a^i x \leq b_i$, entonces un conjunto poliédrico puede representarse por $\{x \mid Ax \leq b\}$ donde A es una matriz de $m \times n$ cuyo i-ésimo renglón es a^i y b es un vector m.

Una clase especial de conjuntos poliédricos son los *conos poliédricos*. Un cono poliédrico es la intersección de un número finito de semiespacios cuyos hiperplanos pasan a través del origen, es decir puede ser representado como $\{x \mid Ax \leq 0\}$, donde A es una matriz de $m \times n$.

A.4. Puntos Extremos, Caras, Direcciones y Direcciones Extremas de Conjuntos Poliédricos

Considérese el siguiente conjunto poliédrico:

$$X = \{x \mid Ax \leq b,\ x \geq 0\} \tag{A.1}$$

donde A es una matriz de $m \times n$ y b es un m-vector.

Puntos Extremos

Considérense los hiperplanos asociados con los $m + n$ subespacios que definen a X, éstos serán llamados *hiperplanos que definen* a X. Un conjunto de hiperplanos que definen a X son linealmente independientes si la matriz de coeficientes asociada tiene rango completo. Entonces, un punto $\bar{x} \in X$ es un *punto extremo*, *punto esquina* o *véstice* de X si $\bar{x}$ pertenece a alguno de los n hiperplanos linealmente independientes que definen a X. Esta definición de punto extremo es equivalente a decir que $\bar{x}$ no puede ser escrito como como combinación convexa estricta de dos puntos distintos en X.

Si más de n hiperplanos que definen a X pasan a través de un punto extremo, entonces cada punto extremo es llamado *punto extremo degenerado*. El número de planos que supera a n se llama *orden de degeneración*. Un poliedro con al menos un punto extremo degenerado es un *conjunto poliédrico degenerado*.

Caras, Aristas y Puntos Extremos Adyacentes

Cada punto extremo $\bar{x}$ de X es una solución única para algunos n hiperplanos linealmente independientes que se vinculan en $\bar{x}$. En general, el conjunto de puntos en X que corresponden a algún conjunto no vacío de hiperplanos vinculantes que definen a X se llama *cara* de X.

Un *arista* de X es una cara de una dimensión de X, es decir, es el conjunto de puntos en X formado por la intersección de algunos $(n-1)$ hiperplanos linealmente independientes que definen a X.

Dos puntos extremos en X son *adyacentes* si el segmento de línea que los une es un arista de X.

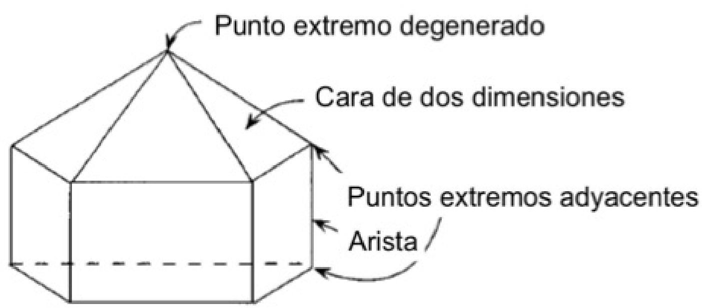


Figura A.1: Puntos extremos, caras y aristas de X

A.5. Representación de Conjuntos Poliédricos

Conjuntos Poliédricos Acotados (Politopos)

Considérese el poliedro acotado de la figura A.2 (un conjunto es acotado si extiste un número k tal que $\|x\| < k$ para cada punto x en el conjunto), que está formado por la intersección de seis semiespacios en este conjunto se tienen seis puntos extremos etiquetados como $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6$. Cualquier punto del conjunto puede ser representado como una combinación convexa de estos seis puntos.

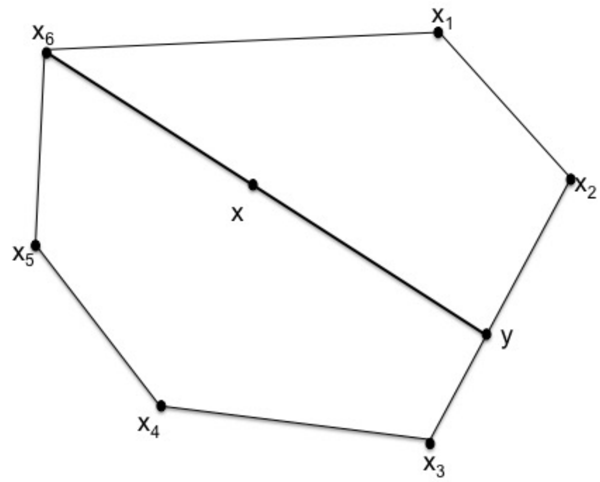


Figura A.2: Representación de un punto en términos de puntos extremos

Sea $x \in X$ como se muestra en la figura A.2. x puede ser escrito como una combinación convexa de y y x_6:

$$x = y + \lambda(x_6 - y) \quad \lambda \in (0, 1)$$

Pero y puede ser escrita como una combinación convexa de x_2 y x_3:

$$y = x_2 + \mu(x_3 - x_2) \quad \mu \in (0, 1)$$

Con lo que se tiene:

$$x = x_2 + \lambda(x_6 - x_2) + \mu(x_3 - x_2) + \lambda\mu(x_2 - x_3), \quad \lambda \in (0, 1),\ \mu \in (0, 1)$$

con lo que muestra que x puede ser escrita como una combinación convexa de los puntos extremos $x_2,\ x_3$ y x_6. En general, cualquier punto en un conjunto poliédrico acotado puede ser representado como una combinación convexa de sus puntos extremos.

Conjuntos Poliédricos No Acotados

Considérese el caso de u conjunto poliédrico no acotado como el que se muestra en la figura A.3

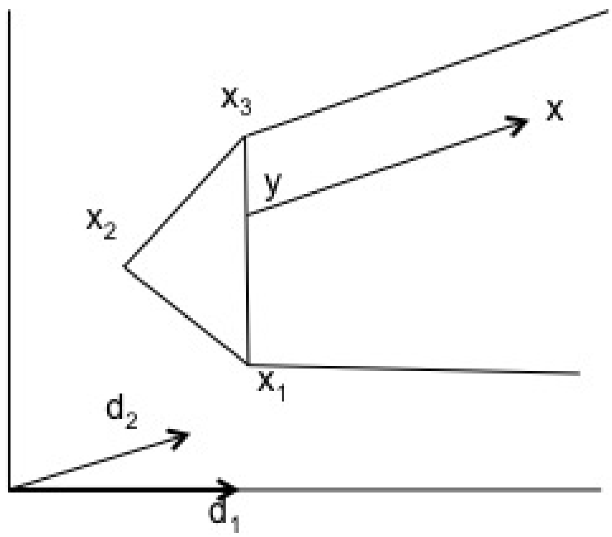


Figura A.3: Representación de un punto en términos de puntos y direcciones extremos

este conjunto tiene tres puntos extremos: x_1, x_2 y x_3 y dos direcciones extremas: d_1 y d_2. En general, cualquier punto x en el conjunto, puede ser representado como una combinación de los puntos extremos más una combinación linel no negativa de las direcciones extremas.

Teorema A.1 *Sea* $X = \{x \mid Ax \leq b,\ x \geq 0\}$ *un conjunto no vacío. El conjunto de puntos extremos es no vacío y tiene un número finito de elementos* $x_1, ..., x_k$*. Además, el conjunto de direcciones extremas es vacío si y sólo si* X *es acotado. Si* X *es no acotado, entonces el conjunto de direcciones extremas es no vacío y tiene un número finito de elementos* $d_1, ..., d_l$*. De igual forma,* $\bar{x} \in X$ *si y sólo si* $\bar{x}$ *puede ser representado como una combinación convexa de* $x_1, ..., x_k$ *más una combinación lineal no negativa de* $d_1, ..., d_l$*, es decir:*

$$\begin{aligned}
\bar{x} = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_j + \sum_{j=1}^{l} \mu_j d_j \\
\sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1 \\
\lambda_j \geq 0, \quad j = 1, ..., k \\
\mu_j \geq 0, \quad j = 1, ..., l
\end{aligned} \tag{A.2}$$

Prueba . Ver [1].