ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD

En el mundo real, las condiciones de trabajo no suelen permanecer estáticas, sino en continuo estado de cambio. Así las cosas, son usuales las variaciones en los precios (tanto de productos finales como de materias primas, mano de obra, etc.), y en las cantidades de recursos disponibles. Además, continuamente se producen cambios en los métodos productivos y mejoras tecnológicas que logran aumentar la productividad. El Análisis de Sensibilidad (o de Post-optimalidad) se encarga precisamente de estudiar cómo afectaría a la solución óptima obtenida y a la función objetivo el cambio (dentro de un rango predeterminado) de uno de los parámetros, manteniendo fijos los restantes. Por ejemplo, si nuestros contables estiman al revisar los cálculos que los beneficios por cada unidad de producto vendida son $ 550 en vez de la estimación inicial de $ 500, o si resulta que ahora disponemos de recursos adicionales (cómo diez horas más de mano de obra, o de una nueva
máquina), el Análisis de Sensibilidad nos ayudará a conocer cómo afectarán estos cambios a la solución óptima obtenida y a los beneficios totales. Conviene hacer notar que este tipo de análisis tan sólo tiene sentido para modelos lineales no enteros (no se usa en modelos enteros ni cuadráticos).

Conceptos básicos en Análisis de Sensibilidad

El Análisis de Sensibilidad se utiliza para examinar los efectos de cambios en tres áreas diferenciadas del problema:

(1) Los coeficientes de la función objetivo (coeficientes objetivo). Los cambios en los coeficientes objetivos NO afectan la forma de la región factible, por lo que no afectarán a la solución óptima (aunque sí al valor de la función objetivo).

(2) Los coeficientes tecnológicos (aquellos coeficientes que afectan a las variables de las restricciones, situados a la izquierda de la desigualdad). Los cambios en estos coeficientes provocarán cambios sustanciales en la forma de la región factible. Gráficamente (en el caso de 2 variables) lo que varía es la pendiente de las rectas que representan las restricciones.

(3) Los recursos disponibles (los términos independientes de cada restricción, situados a la derecha de la desigualdad). Intuitivamente (para 2 variables), los cambios en el RHS suponen desplazamientos paralelos de las rectas asociadas a las restricciones, lo cual hará variar la forma de la región factible y, con ello, a la solución óptima.

Coeficientes Objetivo

```
MAX    10 X + 20 Y
ST
          3 X + 1 Y   >= 9
          1 X - 3 Y   >= 5
```

Recursos (RHS)

Coeficientes Tecnológicos

Al resolver el problema con LINGO obtenemos la siguiente salida:
X|

```
MAX          50X + 120Y
ST
             2X + 4Y <= 80
             3X +  Y <= 60
END
```

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      1

     OBJECTIVE FUNCTION VALUE

     1)      2400.000

  VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
         X         0.000000         10.000000

         Y        20.000000          0.000000


       ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
        2)         0.000000         30.000000
        3)        40.000000          0.000000

 NO. ITERATIONS=       1
```

Cantidad en que tendría que "mejorar" (aumentar en un MAX, disminuir en un MIN) el coeficiente objetivo asociado para que resultase "rentable" asignar un valor no nulo a la variable.

Nos dice cuan cerca estamos (en unidades) de "agotar" la restricción asociada (cumplirla en igualdad). Si es del tipo <= será un "Slack" y si es del tipo >=, un "Surplus".

Cantidad en que "mejoraría" la función objetivo (aumentando en un MAX, disminuyendo en un MIN) si "relajásemos" la restricción asociada en una unidad.

Aparte de observar el valor de la solución óptima (X = 0, Y = 20), y el consiguiente valor de la función objetivo (2400), nos interesa ahora destacar el resto de la información que se nos proporciona y que se explica en los cuadros anteriores. Así, utilizando la columna de costo reducido, sabemos que, en la solución final, la variable X no tomará un valor estrictamente positivo a menos que su coeficiente objetivo aumente en más de 10 unidades (es decir, pase de ser 50 a ser mayor de 60); a partir de la columna de carencia o excedente (Slack or

Surplus), deducimos que la primera de las restricciones se cumple en igualdad (agotamos las 80 unidades disponibles), mientras que en la segunda estamos utilizando 40 unidades menos de las permitidas (hay una carencia de 40 unidades). Finalmente, el precio dual (o precio sombra) toma un valor de 30 en la primera de las restricciones, lo que significa que nos saldría rentable pagar hasta 30 unidades más por "relajar" esta restricción en una unidad (disponer de 81 unidades en vez de 80) siempre que los demás parámetros sigan fijos. Como es lógico, el precio dual de la segunda restricción es 0, puesto que no nos convendría pagar por otra unidad de un recurso que no hemos agotado.

Veamos ahora cuál sería el "output" extra del programa al escoger la opción SENSIBILITY (RANGE) ANALYSIS (opción también seleccionable desde la barra de menú como Reports>Range):

RANGES IN WHICH THE BASIS IS UNCHANGED:

OBJ COEFFICIENT RANGES

VARIABLE	CURRENT COEF	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
X	50.000000	10.000000	INFINITY
Y	120.000000	INFINITY	20.000000

Cantidad máxima en que podemos aumentar/disminuir los coeficientes objetivo sin variar la solución óptima

RIGHTHAND SIDE RANGES

ROW	CURRENT RHS	ALLOWABLE INCREASE	ALLOWABLE DECREASE
2	80.000000	160.000000	80.000000
3	60.000000	INFINITY	40.000000

Cantidad máxima en que podemos aumentar/disminuir los recursos disponibles sin variar la solución

(1) **Cambios en los Coeficientes Objetivo:** Distinguiremos entre **variables básicas**, que son las que toman valores no nulos en la solución óptima (Y en nuestro ejemplo), y **variables no básicas**, las cuales toman el valor 0 (X en este caso). Por lo que respecta al coeficiente objetivo asociado a la variable no básica (50), la solución actual (X = 0, Y = 20) seguirá siendo válida siempre que éste no exceda de 60 (su incremento permitido es de 10 unidades); si este coeficiente excediese de 60, la variable pasaría a ser básica, cambiando así la sol. óptima. Por lo que respecta al coeficiente objetivo asociado a la variable básica (120), la solución actual será válida siempre que éste no disminuya en más de 20 unidades. Observar que, dentro de los rangos especificados, los cambios en uno de los coeficientes objetivo no alterarán la solución óptima, pero sí harán variar el valor final de la función objetivo.

(2) **Cambios en los Coeficientes Tecnológicos:** Estos cambios se deben a menudo a innovaciones tecnológicas o a mejoras en la productividad. Este tipo de cambios no producirá

variación alguna en la función objetivo, pero sí alterará sustancialmente la "forma" de la región factible, por lo que la solución óptima también variará.

(3) Cambios en los recursos: Los valores que quedan a la derecha de las desigualdades (***Right-Hand-Side***) representan la disponibilidad de recursos (horas de mano de obra, materias primas, etc.). Los cambios que se puedan producir en estos valores afectarán también a la "forma" de la región factible y, por extensión, al valor de la solución óptima. A pesar de ello, si el parámetro que varía lo hace dentro de un rango predeterminado, seremos capaces de predecir (vía precios sombra) cómo este cambio afectará a la función objetivo, pues la **base** (conjunto de variables básicas de la solución) no variará. El precio dual asociado a una restricción nos informa de cuánto mejoraría el valor de la función objetivo si relajásemos la restricción en una unidad. Ello nos da una idea de la cantidad que estaríamos dispuestos a pagar por cada unidad adicional del recurso asociado. Por supuesto, no es posible seguir aumentando indefinidamente los recursos disponibles sin que ello afecte a la clasificación actual de variables básicas y no básicas. La información que el "output" nos proporciona es, precisamente, el rango en el cual este precio sombra es válido. Así, en la primera de las restricciones anteriores, podríamos aumentar los recursos disponibles hasta un total de 240 unidades (80+160), incrementando con ello el valor de la función objetivo en unas 4800 unidades (160*30).

Ejemplo1.

Maximizar beneficios Z = 30 X1 + 80 X2
Sujeto a:

2X1 + 4 X2 <= 1000 (horas de mano de obra disponibles)
6X1 + 2 X2 <= 1200 (kg. de materia prima disponibles)
X2 <= 200 (demanda)
X1, X2 >= 0

a) ¿Cuál es la mejor combinación productiva? ¿Cuál es el beneficio máximo?
b) ¿Cuánto valen los precios sombra? Una vez alcanzada la solución óptima, ¿qué recurso tiene un valor marginal más elevado?
c) Para cada recurso, ¿cuál es el rango de tolerancia en el que son válidos los precios sombra?
d) ¿Cuáles son los rangos de tolerancia en que pueden variar los coeficientes objetivo?
e) Plantear y resolver el problema dual.

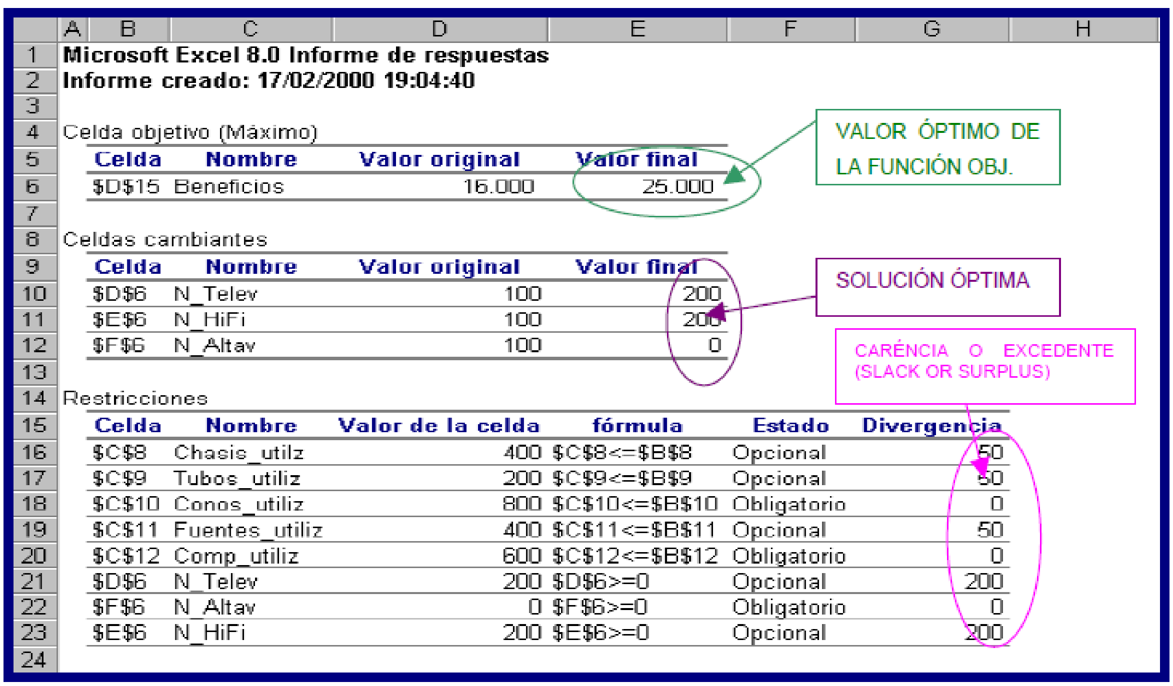
Ejemplos Análisis de Sensibilidad con Excel

Ejemplo 2: Compañía de producción de televisores.

Una compañía produce televisores, equipos Hi-Fi y altavoces utilizando una serie de componentes comunes, tal y como se indica en la tabla inferior. Estos componentes están disponibles en cantidades limitadas, por lo que se trata de plantear el problema de maximización restringida de beneficios sabiendo que la contribución neta de los tres productos es, respectivamente, de $ 750, $ 500, y $ 350.

	Televisor	Hi-Fi	Altavoces	Disponibilidad
Chasis	1		0	450
Tubo de imágenes	1		0	250
Conos de altavoces	2		1	800
Fuente de alimentación	1		0	450
Componentes electrónicos	2		1	600

Al solucionarlo con SOLVER elegimos la opción en INFORMES → Respuestas y Sensibilidad



Microsoft Excel 8.0 Informe de respuestas
Informe creado: 17/02/2000 19:04:40

Celda objetivo (Máximo)

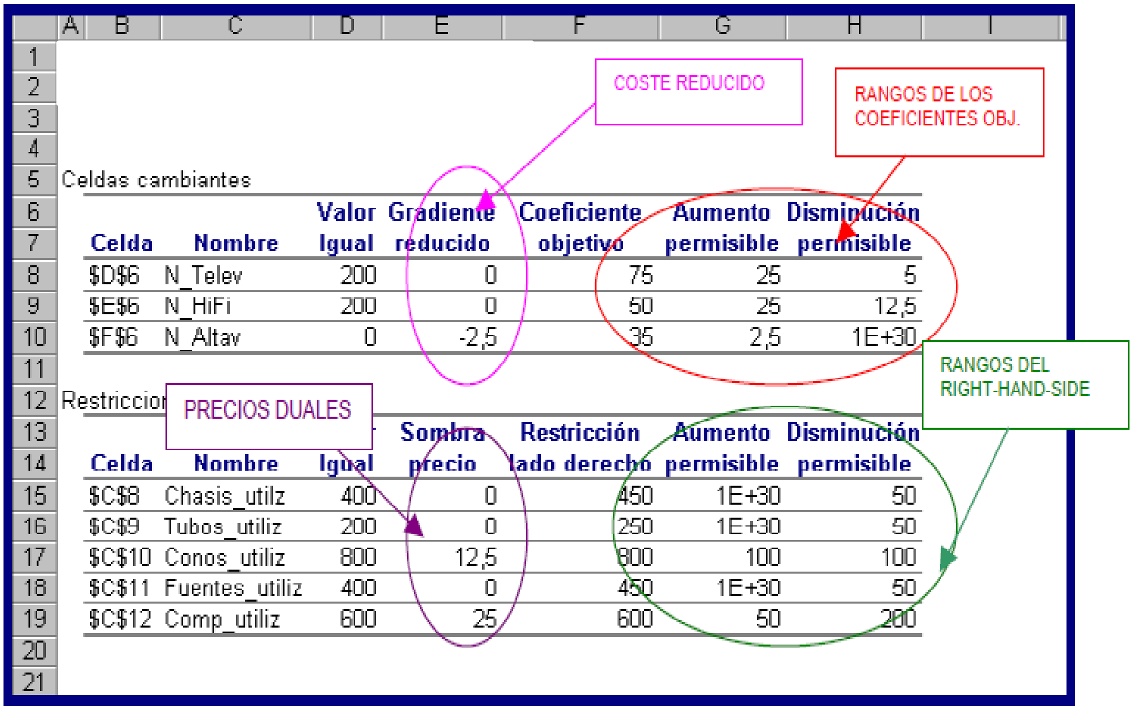
Celda	Nombre	Valor original	Valor final
$D$15	Beneficios	16.000	25.000

Celdas cambiantes

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
$D$6	N_Telev	100	200
$E$6	N_HiFi	100	200
$F$6	N_Altav	100	0

Restricciones

Celda	Nombre	Valor de la celda	fórmula	Estado	Divergencia
$C$8	Chasis_utilz	400	$C$8<=$B$8	Opcional	50
$C$9	Tubos_utiliz	200	$C$9<=$B$9	Opcional	50
$C$10	Conos_utiliz	800	$C$10<=$B$10	Obligatorio	0
$C$11	Fuentes_utiliz	400	$C$11<=$B$11	Opcional	50
$C$12	Comp_utiliz	600	$C$12<=$B$12	Obligatorio	0
$D$6	N_Telev	200	$D$6>=0	Opcional	200
$F$6	N_Altav	0	$F$6>=0	Obligatorio	0
$E$6	N_HiFi	200	$E$6>=0	Opcional	200



Celdas cambiantes

Celda	Nombre	Valor Igual	Gradiente reducido	Coeficiente objetivo	Aumento permisible	Disminución permisible
$D$6	N_Telev	200	0	75	25	5
$E$6	N_HiFi	200	0	50	25	12,5
$F$6	N_Altav	0	-2,5	35	2,5	1E+30

Restricciones

Celda	Nombre	Valor Igual	Sombra precio	Restricción lado derecho	Aumento permisible	Disminución permisible
$C$8	Chasis_utilz	400	0	450	1E+30	50
$C$9	Tubos_utiliz	200	0	250	1E+30	50
$C$10	Conos_utiliz	800	12,5	800	100	100
$C$11	Fuentes_utiliz	400	0	450	1E+30	50
$C$12	Comp_utiliz	600	25	600	50	200

Una vez identificados los componentes del informe, su interpretación es casi inmediata: la solución óptima sería producir 200 televisores, 200 equipos Hi-Fi, y ningún altavoz. La columna de **Costo (Gradiente) Reducido** nos indica que no resultará rentable producir altavoces a menos que el beneficio que éstos generen aumente en 2.5 (llegando a 37.5). Examinando los **Rangos de los Coeficientes Objetivo**, observamos que la solución actual no variaría si el beneficio generado por cada televisor se moviese en el rango 70-100, o si el generado por los equipos Hi-Fi lo hiciese en el rango 37.5-75 , o si el de los altavoces no se incrementase en más de 2.5 . Los Precios Duales determinan, junto con los **Rangos del Right-Hand-Side**, que estaríamos dispuestos a pagar hasta 12.5 por cada unidad adicional de conos hasta un máximo de 100 conos, y hasta 25 por cada unidad adicional de componentes electrónicos hasta un máximo de 50 componentes. Observar que, por el contrario, perderíamos 25 por cada componente electrónico que “nos quitasen” de los 600 disponibles, hasta un máximo de 200 unidades (cifra a partir de la cual será necesario volver a programar).