Tugas Latex Aplikasi Komputer

Dimas Oki Sriwijaya Saputra
22305141053
Matematika E 2022

PRODI MATEMATIKA
DEPARTEMEN PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI YOGYAKARTA

2022

DAFTAR ISI

BAB 1

KB PEKAN 2 (BELAJAR MENGGUNAKAN SOFTWARE EMT)

[a4paper,10pt]article eumat

Pendahuluan dan Pengenalan Cara Kerja EMT

Selamat datang! Ini adalah pengantar pertama ke Euler Math Toolbox (disingkat EMT atau Euler). EMT adalah sistem terintegrasi yang merupakan perpaduan kernel numerik Euler dan program komputer aljabar Maxima.
- Bagian numerik, GUI, dan komunikasi dengan Maxima telah dikembangkan oleh R. Grothmann, seorang profesor matematika di Universitas Eichstätt, Jerman. Banyak algoritma numerik dan pustaka software open source yang digunakan di dalamnya.
- Maxima adalah program open source yang matang dan sangat kaya untuk perhitungan simbolik dan aritmatika tak terbatas. Software ini dikelola oleh sekelompok pengembang di internet.
- Beberapa program lain (LaTeX, Povray, Tiny C Compiler, Python) dapat digunakan di Euler untuk memungkinkan perhitungan yang lebih cepat maupun tampilan atau grafik yang lebih baik.
Yang sedang Anda baca (jika dibaca di EMT) ini adalah berkas notebook di EMT. Notebook aslinya bawaan EMT (dalam bahasa Inggris) dapat dibuka melalui menu File, kemudian pilih "Open Tutorias and Example", lalu pilih file "00 First Steps.en". Perhatikan, file notebook EMT memiliki ekstensi ".en". Melalui notebook ini Anda akan belajar menggunakan software Euler untuk menyelesaikan berbagai masalah matematika.

Panduan ini ditulis dengan Euler dalam bentuk notebook Euler, yang berisi teks (deskriptif), baris-baris perintah, tampilan hasil perintah (numerik, ekspresi matematika, atau gambar/plot), dan gambar yang disisipkan dari file gambar.
Untuk menambah jendela EMT, Anda dapat menekan [F11]. EMT akan menampilkan jendela grafik di layar desktop Anda. Tekan [F11] lagi untuk kembali ke tata letak favorit Anda. Tata letak disimpan untuk sesi berikutnya.
Anda juga dapat menggunakan [Ctrl]+[G] untuk menyembunyikan jendela grafik. Selanjutnya Anda dapat beralih antara grafik dan teks dengan tombol [TAB].
Seperti yang Anda baca, notebook ini berisi tulisan (teks) berwarna hijau, yang dapat Anda edit dengan mengklik kanan teks atau tekan menu Edit -> Edit Comment atau tekan [F5], dan juga baris perintah EMT yang ditandai dengan ">" dan berwarna merah. Anda dapat menyisipkan baris perintah baru dengan cara menekan tiga tombol bersamaan: [Shift]+[Ctrl]+[Enter].

Komentar (Teks Uraian)

Komentar atau teks penjelasan dapat berisi beberapa "markup" dengan sintaks sebagai berikut.

```
- * Judul
- ** Sub-Judul
- latex: F (x) = \int_a^x f (t) \, dt
- mathjax: \frac{x^2-1}{x-1} = x + 1
- maxima: 'integrate(x^3,x) = integrate(x^3,x) + C
- http://www.euler-math-toolbox.de
- See: http://www.google.de | Google
- image: hati.png
- ---
```

Hasil sintaks-sintaks di atas (tanpa diawali tanda strip) adalah sebagai berikut.

Judul

Sub-Judul

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

$$\frac{x^2-1}{x-1} = x + 1$$

maxima: 'integrate(x^3,x) = integrate(x^3,x) + "C"
http://www.euler-math-toolbox.de
See: http://www.google.de | Google
image: hati.png

Gambar diambil dari folder images di tempat file notebook berada dan tidak dapat dibaca dari Web. Untuk "See:", tautan (URL)web lokal dapat digunakan.
Paragraf terdiri atas satu baris panjang di editor. Pergantian baris akan memulai baris baru. Paragraf harus dipisahkan dengan baris kosong.

```
>// baris perintah diawali dengan >, komentar (keterangan) diawali dengan //
```

Baris Perintah

Mari kita tunjukkan cara menggunakan EMT sebagai kalkulator yang sangat canggih.
EMT berorientasi pada baris perintah. Anda dapat menuliskan satu atau lebih perintah dalam satu baris perintah. Setiap perintah harus diakhiri dengan koma atau titik koma.
- Titik koma menyembunyikan output (hasil) dari perintah.
- Sebuah koma mencetak hasilnya.
- Setelah perintah terakhir, koma diasumsikan secara otomatis (boleh tidak ditulis).
Dalam contoh berikut, kita mendefinisikan variabel r yang diberi nilai 1,25. Output dari definisi ini adalah nilai variabel. Tetapi karena tanda titik koma, nilai ini tidak ditampilkan. Pada kedua perintah di belakangnya, hasil kedua perhitungan tersebut ditampilkan.

```
>r=1.25; pi*r^2, 2*pi*r
```

```
4.90873852123
7.85398163397
```

Latihan untuk Anda

- Sisipkan beberapa baris perintah baru
- Tulis perintah-perintah baru untuk melakukan suatu perhitungan yang Anda inginkan, boleh menggunakan variabel, boleh tanpa variabel.

Jawab :

```
>a=4; b=2; c=5; (a/b)^c
```

```
32
```

```
>x=40; y=2; z=10; (x/z)*y
```

```
8
```

```
>x=6; y=8; (x*y/3)^2
```

```
256
```

```
>x=50; y=20; z=25; x*y/z
```

```
40
```

```
>p=6; q=9; (p^2/q)*p
```

```
24
```

Beberapa catatan yang harus Anda perhatikan tentang penulisan sintaks perintah EMT.
- Pastikan untuk menggunakan titik desimal, bukan koma desimal untuk bilangan!
- Gunakan * untuk perkalian dan ^ untuk eksponen (pangkat).
- Seperti biasa, * dan / bersifat lebih kuat daripada + atau -.
- ^ mengikat lebih kuat dari *, sehingga pi * r ^ 2 merupakan rumus luas lingkaran.
- Jika perlu, Anda harus menambahkan tanda kurung, seperti pada 2 ^ (2 ^ 3).

Perintah r = 1.25 adalah menyimpan nilai ke variabel di EMT. Anda juga dapat menulis r: = 1.25 jika mau. Anda dapat menggunakan spasi sesuka Anda.
Anda juga dapat mengakhiri baris perintah dengan komentar yang diawali dengan dua garis miring (//).

```
>r := 1.25 // Komentar: Menggunakan  := sebagai ganti =
```

```
1.25
```

Argumen atau input untuk fungsi ditulis di dalam tanda kurung.

```
>sin(45°), cos(pi), log(sqrt(E))
```

```
0.707106781187
-1
0.5
```

Seperti yang Anda lihat, fungsi trigonometri bekerja dengan radian, dan derajat dapat diubah dengan °. Jika keyboard Anda tidak memiliki karakter derajat tekan [F7], atau gunakan fungsi deg() untuk mengonversi.
EMT menyediakan banyak sekali fungsi dan operator matematika.Hampir semua fungsi matematika sudah tersedia di EMT. Anda dapat melihat daftar lengkap fungsi-fungsi matematika di EMT pada berkas Referensi (klik menu Help -> Reference)
Untuk membuat rangkaian komputasi lebih mudah, Anda dapat merujuk ke hasil sebelumnya dengan "%". Cara ini sebaiknya hanya digunakan untuk merujuk hasil perhitungan dalam baris perintah yang sama.

```
>(sqrt(5)+1)/2, %^2-%+1 // Memeriksa solusi x^2-x+1=0
```

```
1.61803398875
2
```

Latihan untuk Anda

- Buka berkas Reference dan baca fungsi-fungsi matematika yang tersedia di EMT.
- Sisipkan beberapa baris perintah baru.
- Lakukan contoh-contoh perhitungan menggunakan fungsi-fungsi matematika di EMT.

Jawab :

```
>sqrt(100)/sqrt(25)*10
```

```
20
```

```
>(sin(45°)-cos(60°))*tan(60°)
```

```
0.358719467607
```

```
>sqrt(169)/(sin(90°)+4)
```

```
2.6
```

```
> sqrt(100)*2/5, (%*3)^2 // Memeriksa solusi (x*3)^2=0
```

```
4
144
```

Satuan

EMT dapat mengubah unit satuan menjadi sistem standar internasional (SI). Tambahkan satuan di belakang angka untuk konversi sederhana.

```
>1miles  // 1 mil = 1609,344 m
```

```
1609.344
```

Beberapa satuan yang sudah dikenal di dalam EMT adalah sebagai berikut. Semua unit diakhiri dengan tanda dolar ($), namun boleh tidak perlu ditulis dengan mengaktifkan easyunits.
kilometer$:=1000;
km$:=kilometer$;
cm$:=0.01;
mm$:=0.001;
minute$:=60;
min$:=minute$;
minutes$:=minute$;
hour$:=60*minute$;
h$:=hour$;
hours$:=hour$;
day$:=24*hour$;
days$:=day$;
d$:=day$;
year$:=365.2425*day$;
years$:=year$;
y$:=year$;
inch$:=0.0254;
in$:=inch$;
feet$:=12*inch$;
foot$:=feet$;
ft$:=feet$;
yard$:=3*feet$;
yards$:=yard$;
yd$:=yard$;
mile$:=1760*yard$;
miles$:=mile$;
kg$:=1;
sec$:=1;
ha$:=10000;
Ar$:=100;
Tagwerk$:=3408;
Acre$:=4046.8564224;
pt$:=0.376mm;
Untuk konversi ke dan antar unit, EMT menggunakan operator khusus, yakni ->.

```
>4km -> miles, 4inch -> " mm"
```

```
2.48548476895
101.6 mm
```

Format Tampilan Nilai

Akurasi internal untuk nilai bilangan di EMT adalah standar IEEE, sekitar 16 digit desimal. Aslinya, EMT tidak mencetak semua digit suatu bilangan. Ini untuk menghemat tempat dan agar terlihat lebih baik. Untuk mengatrtamilan satu bilangan, operator berikut dapat digunakan.

```
>pi
```

```
3.14159265359
```

```
>longest pi
```

```
      3.141592653589793
```

```
>long pi
```

```
3.14159265359
```

```
>short pi
```

```
3.1416
```

```
>shortest pi
```

```
   3.1
```

```
>fraction pi
```

```
312689/99532
```

```
>short 1200*1.03^10, long E, longest pi
```

```
1612.7
2.71828182846
      3.141592653589793
```

Format aslinya untuk menampilkan nilai menggunakan sekitar 10 digit. Format tampilan nilai dapat diatur secara global atau hanya untuk satu nilai.

Anda dapat mengganti format tampilan bilangan untuk semua perintah selanjutnya. Untuk mengembalikan ke format aslinya dapat digunakan perintah "defformat" atau "reset".

```
>longestformat; pi, defformat; pi
```

```
3.141592653589793
3.14159265359
```

Kernel numerik EMT bekerja dengan bilangan titik mengambang (floating point) dalam presisi ganda IEEE (berbeda dengan bagian simbolik EMT). Hasil numerik dapat ditampilkan dalam bentuk pecahan.

```
>1/7+1/4, fraction %
```

```
0.392857142857
11/28
```

Perintah Multibaris

Perintah multi-baris membentang di beberapa baris yang terhubung dengan "..." di setiap akhir baris, kecuali baris terakhir. Untuk menghasilkan tanda pindah baris tersebut, gunakan tombol [Ctrl]+[Enter]. Ini akan menyambung perintah ke baris berikutnya dan menambahkan "..." di akhir baris sebelumnya. Untuk menggabungkan suatu baris ke baris sebelumnya, gunakan [Ctrl]+[Backspace].

Contoh perintah multi-baris berikut dapat dijalankan setiap kali kursor berada di salah satu barisnya. Ini juga menunjukkan bahwa ... harus berada di akhir suatu baris meskipun baris tersebut memuat komentar.

```
>a=4; b=15; c=2; // menyelesaikan a*x^2+b*x+c=0 secara manual ...
>D=sqrt(b^2/(a^2*4)-c/a); ...
>-b/(2*a) + D, ...
>-b/(2*a) - D
```

```
-0.138444501319
-3.61155549868
```

Menampilkan Daftar Variabe

Untuk menampilkan semua variabel yang sudah pernah Anda definisikan sebelumnya (dan dapat dilihat kembali nilainya), gunakan perintah "listvar".

```
>listvar
```

```
z                   25
r                   1.25
a                   4
b                   15
c                   2
x                   50
y                   20
p                   6
q                   9
D                   1.73655549868123
```

Perintah listvar hanya menampilkan variabel buatan pengguna. Dimungkinkan untuk menampilkan variabel lain, dengan menambahkan string termuat di dalam nama variabel yang diinginkan.
Perlu Anda perhatikan, bahwa EMT membedakan huruf besar dan huruf kecil. Jadi variabel "d" berbeda dengan variabel "D".
Contoh berikut ini menampilkan semua unit yang diakhiri dengan "m" dengan mencari semua variabel yang berisi "m$".

```
>listvar m$
```

```
km$                    1000
cm$                    0.01
mm$                    0.001
nm$                    1853.24496
gram$                  0.001
m$                     1
hquantum$              6.62606957e-34
atm$                   101325
```

Untuk menghapus variabel tanpa harus memulai ulang EMT gunakan perintah "remvalue".

```
>remvalue a,b,c,D
>D
```

```
Variable D not found!
Error in:
D ...
 ^
```

Menampilkan Panduan

Untuk mendapatkan panduan tentang penggunaan perintah atau fungsi di EMT, buka jendela panduan dengan menekan [F1] dan cari fungsinya. Anda juga dapat mengklik dua kali pada fungsi yang tertulis di baris perintah atau di teks untuk membuka jendela panduan.
Coba klik dua kali pada perintah "intrandom" berikut ini!

```
>intrandom(10,6)
```

```
[4,  2,  6,  2,  4,  2,  3,  2,  2,  6]
```

Di jendela panduan, Anda dapat mengklik kata apa saja untuk menemukan referensi atau fungsi.
Misalnya, coba klik kata "random" di jendela panduan. Kata tersebut boleh ada dalam teks atau di bagian "See:" pada panduan. Anda akan menemukan penjelasan fungsi "random", untuk menghasilkan bilangan acak berdistribusi uniform antara 0,0 dan 1,0. Dari panduan untuk "random" Anda dapat menampilkan panduan untuk fungsi "normal", dll.

```
>random(10)
```

```
[0.270906,  0.704419,  0.217693,  0.445363,  0.308411,  0.914541,
0.193585,  0.463387,  0.095153,  0.595017]
```

```
>normal(10)
```

```
[-0.495418,  1.6463,  -0.390056,  -1.98151,  3.44132,  0.308178,
-0.733427,  -0.526167,  1.10018,  0.108453]
```

Matriks dan Vektor

EMT merupakan suatu aplikasi matematika yang mengerti "bahasa matriks". Artinya, EMT menggunakan vektor dan matriks untuk perhitungan-perhitungan tingkat lanjut. Suatu vektor atau matriks dapat didefinisikan dengan tanda kurung siku. Elemen-elemennya dituliskan di dalam tanda kurung siku, antar elemen dalam satu baris dipisahkan oleh koma(,), antar baris dipisahkan oleh titik koma (;).
Vektor dan matriks dapat diberi nama seperti variabel biasa.

```
>v=[4,5,6,3,2,1]
```

```
[4,  5,  6,  3,  2,  1]
```

```
>A=[1,2,3;4,5,6;7,8,9]
```

```
            1             2             3
            4             5             6
            7             8             9
```

Karena EMT mengerti bahasa matriks, EMT memiliki kemampuan yang sangat canggih untuk melakukan perhitungan matematis untuk masalah-masalah aljabar linier, statistika, dan optimisasi.
Vektor juga dapat didefinisikan dengan menggunakan rentang nilai dengan interval tertentu menggunakan tanda titik dua (:),seperti contoh berikut ini.

```
>c=1:5
```

```
[1,  2,  3,  4,  5]
```

```
>w=0:0.1:1
```

```
[0,  0.1,  0.2,  0.3,  0.4,  0.5,  0.6,  0.7,  0.8,  0.9,  1]
```

```
>mean(w^2)
```

```
0.35
```

Bilangan Kompleks

EMT juga dapat menggunakan bilangan kompleks. Tersedia banyak fungsi untuk bilangan kompleks di EMT. Bilangan imaginer

$$i = \sqrt{-1}$$

dituliskan dengan huruf I (huruf besar I), namun akan ditampilkan dengan huruf i (i kecil).

```
re(x) : bagian riil pada bilangan kompleks x.
im(x) : bagian imaginer pada bilangan kompleks x.
complex(x) : mengubah bilangan riil x menjadi bilangan kompleks.
conj(x) : Konjugat untuk bilangan bilangan komplkes x.
arg(x) : argumen (sudut dalam radian) bilangan kompleks x.
real(x) : mengubah x menjadi bilangan riil.
```

Apabila bagian imaginer x terlalu besar, hasilnya akan menampilkan pesan kesalahan.

```
>sqrt(-1) // Error!
>sqrt(complex(-1))
```

```
>z=2+3*I, re(z), im(z), conj(z), arg(z), deg(arg(z)), deg(arctan(3/2))
```

```
2+3i
2
3
2-3i
0.982793723247
56.309932474
56.309932474
```

```
>deg(arg(I)) // 90°
```

```
90
```

```
>sqrt(-1)
```

```
Floating point error!
Error in sqrt
Error in:
sqrt(-1) ...
        ^
```

```
>sqrt(complex(-1))
```

```
0+1i
```

EMT selalu menganggap semua hasil perhitungan berupa bilangan riil dan tidak akan secara otomatis mengubah ke bilangan kompleks.
Jadi akar kuadrat -1 akan menghasilkan kesalahan, tetapi akar kuadrat kompleks didefinisikan untuk bidang koordinat dengan cara seperti biasa. Untuk mengubah bilangan riil menjadi kompleks, Anda dapat menambahkan 0i atau menggunakan fungsi "complex".

```
>complex(-1), sqrt(%)
```

```
-1+0i
0+1i
```

Matematika Simbolik

EMT dapat melakukan perhitungan matematika simbolis (eksak) dengan bantuan software Maxima. Software Maxima otomatis sudah terpasang di komputer Anda ketika Anda memasang EMT. Meskipun demikian, Anda dapat juga memasang software Maxima tersendiri (yang terpisah dengan instalasi Maxima di EMT).
Pengguna Maxima yang sudah mahir harus memperhatikan bahwa terdapat sedikit perbedaan dalam sintaks antara sintaks asli Maxima dan sintaks ekspresi simbolik di EMT.
Untuk melakukan perhitungan matematika simbolis di EMT, awali perintah Maxima dengan tanda "&". Setiap ekspresi yang dimulai dengan "&" adalah ekspresi simbolis dan dikerjakan oleh Maxima.

```
>&(a+b)^2
```

```
                                   2
                            (b + a)
```

```
>&expand((a+b)^2), &factor(x^2+5*x+6)
```

```
                           2             2
                          b  + 2 a b + a

                          (x + 2) (x + 3)
```

```
>&solve(a*x^2+b*x+c,x) // rumus abc
```

```
                     2                          2
          - sqrt(b  - 4 a c) - b       sqrt(b  - 4 a c) - b
     [x = ----------------------, x = --------------------]
                    2 a                        2 a
```

```
>&(a^2-b^2)/(a+b), &ratsimp(%) // ratsimp menyederhanakan bentuk pecahan
```

```
                             2    2
                            a  - b
                            -------
                             b + a

                             a - b
```

```
>10! // nilai faktorial (modus EMT)
```

```
3628800
```

```
>&10! //nilai faktorial (simbolik dengan Maxima)
```

```
                              3628800
```

Untuk menggunakan perintah Maxima secara langsung (seperti perintah pada layar Maxima) awali perintahnya dengan tanda "::" pada baris perintah EMT. Sintaks Maxima disesuaikan dengan sintaks EMT (disebut "modus kompatibilitas").

```
>factor(1000) // mencari semua faktor 1000 (EMT)
```

```
  [2,  2,  2,  5,  5,  5]
```

```
>:: factor(1000) // faktorisasi prima 1000 (dengan Maxima)
```

```
                                3   3
                               2   5
```

```
>:: factor(20!)
```

```
                        18   8   4   2
                       2    3   5   7   11  13  17  19
```

Jika Anda sudah mahir menggunakan Maxima, Anda dapat menggunakan sintaks asli perintah Maxima dengan menggunakan tanda ":::" untuk mengawali setiap perintah Maxima di EMT. Perhatikan, harus ada spasi antara ":::" dan perintahnya.

```
>::: binomial(5,2); // nilai C(5,2)
```

```
                                 10
```

```
>::: binomial(m,4); // C(m,4)=m!/(4!(m-4)!)
```

```
                       (m - 3) (m - 2) (m - 1) m
                       -------------------------
                                  24
```

```
>::: trigexpand(cos(x+y)); // rumus cos(x+y)=cos(x) cos(y)-sin(x)sin(y)
```

```
                        cos(x) cos(y) - sin(x) sin(y)
```

```
>::: trigexpand(sin(x+y));
```

```
                        cos(x) sin(y) + sin(x) cos(y)
```

```
>::: trigsimp(((1-sin(x)^2)*cos(x))/cos(x)^2+tan(x)*sec(x)^2) //menyederhanakan fungsi tri
```

```
                                    4
                        sin(x) + cos (x)
                        ----------------
                              3
                           cos (x)
```

Untuk menyimpan ekspresi simbolik ke dalam suatu variabel digunakan tanda "&=".

```
>p1 &= (x^3+1)/(x+1)
```

```
                           3
                          x  + 1
                          ------
                          x + 1
```

```
>&ratsimp(p1)
```

```
                          2
                         x  - x + 1
```

Untuk mensubstitusikan suatu nilai ke dalam variabel dapat digunakan perintah "with".

```
>&p1 with x=3 // (3^3+1)/(3+1)
```

```
                              7
```

```
>&p1 with x=a+b, &ratsimp(%) //substitusi dengan variabel baru
```

```
                                   3
                            (b + a)   + 1
                            ------------
                             b + a + 1


                     2                   2
                    b  + (2 a - 1) b + a  - a + 1
```

```
>&diff(p1,x) //turunan p1 terhadap x
```

```
                              2       3
                           3 x       x  + 1
                           ----- - --------
                           x + 1          2
                                   (x + 1)
```

```
>&integrate(p1,x) // integral p1 terhadap x
```

```
                             3      2
                          2 x  - 3 x  + 6 x
                          -----------------
                                  6
```

Tampilan Matematika Simbolik dengan LaTeX

Anda dapat menampilkan hasil perhitunagn simbolik secara lebih bagus menggunakan LaTeX. Untuk melakukan hal ini, tambahkan tanda dolar ($) di depan tanda & pada setiap perintah Maxima.
Perhatikan, hal ini hanya dapat menghasilkan tampilan yang diinginkan apabila komputer Anda sudah terpasang software LaTeX.

```
>$&(a+b)^2
```

$$\left(b+a\right)^2$$

```
>$&expand((a+b)^2), $&factor(x^2+5*x+6)
```

$$b^2+2\,a\,b+a^2$$

$$\left(x+2\right)\,\left(x+3\right)$$

```
>$&solve(a*x^2+b*x+c,x) // rumus abc
```

$$\left[x=\frac{-\sqrt{b^2-4\,a\,c}-b}{2\,a} , x=\frac{\sqrt{b^2-4\,a\,c}-b}{2\,a}\right]$$

```
>$&(a^2-b^2)/(a+b), $&ratsimp(%)
```

$$\frac{a^2-b^2}{b+a}$$

$$a-b$$

Selamat Belajar dan Berlatih!

Baik, itulah sekilas pengantar penggunaan software EMT. Masih banyak kemampuan EMT yang akan Anda pelajari dan praktikkan.
Sebagai latihan untuk memperlancar penggunaan perintah-perintah EMT yang sudah dijelaskan di atas, silakan Anda lakukan hal-hal sebagai berikut.
- Carilah soal-soal matematika dari buku-buku Matematika.
- Tambahkan beberapa baris perintah EMT pada notebook ini.
- Selesaikan soal-soal matematika tersebut dengan menggunakan EMT.
Pilih soal-soal yang sesuai dengan perintah-perintah yang sudah dijelaskan dan dicontohkan di atas.
Nomer 1
image: gambar 1.png

```
>2^3*5^3
```

```
1000
```

Nomer 2
image: gambar 2.png

```
>sqrt(32)-sqrt(2)+sqrt(128)
```

```
15.5563491861
```

BAB 2

KB PEKAN 3-4: MENGGUNAKAN EMT UNTUK MENYELESAIKAN MASALAH-MASALAH ALJABAR

[a4paper,10pt]article eumat

PENGGUNAAN SOFTWARE EMT UNTUK ALJABAR

Anggota Kelompok
1. Arnesta Difa Refanda (22305141009)
2. Umi Nurkhasanah (22305141032)
3. Aprillia Intan Kalista Dewi (22305141041)
4. Dimas Oki Sriwijaya Saputra (22305141053)
5. Elsya Febriani Rosada (22305144004)
6. Stevany Amellia Christable (22305144022)
7. Mukti wibowo (22305144036)

Operasi Bentuk-Bentuk Aljabar

Pengertian Aljabar

Aljabar adalah salah satu bagian dari ilmu matematika terkait ilmu bilangan,geometri dan analisis penyelesaiannya dengan menggunakan atau mengandung huruf-huruf atau yang biasa kita sebut sebagai variabel.
Pada aljabar, dikenal beberapa istilah sebagai berikut
1. Variabel, yaitu lambang pengganti nilai yang belum diketahui.
2. Koefisien, yaitu angka yang biasanya mengiringi huruf atau variabel.
3. Konstanta, yaitu angka yang terdapat dalam persamaan dan berdiri sendiri.
4. Suku

```
a. Suku sejenis, yaitu suku-suku yang memiliki variabel yang sama
```

dan pangkat yang sama pula.

```
b. Suku tak sejenis, yaitu yaitu suku-suku yang memiliki variabel
```

yang berbeda, atau variabel yang sama namun memiliki pangkat yang berbeda juga tergolong dalam suku ini. Perhatikan contoh bentuk lajabar berikut

$$2x + 3y + 4$$

x dan y merupakan suatu variabel
2 merupakan koefisien dari x dan 3 merupakan koefisien dari y
4 merupakan suatu konstanta
2x dan 3y merupakan suku tak sejenis

Operasi Penjumlahan Aljabar dengan EMT

Penjumlahan merupakan penambahan sekelompok bilangan atau lebih menjadi suatu bilangan yang disebut jumlah. Dalam konteks aljabar, syarat penjumlahan adalah suku sukunya harus sejenis. Seperti dengan perhitungan aritmatika lainnya, operasi penjumlahan disimbolkan dengan tand "+"

SOAL R.3 No 7
Melakukan operasi yang ditunjukkan

$$(2x + 3y + z - 7) + (4x - 2y - z + 8) + (-3x + y - 2z - 4)$$

```
>$& (2*x+3*y+z-7)+(4*x-2*y-z+8)+(-3*x+y-2*z-4)
```

$$-2\,z + 2\,y + 3\,x - 3$$

Penjelasan:
2x, 4x, dan -3x merupakan suku sejenis, sehingga akan akan dikelompokkan dan dijumlahkan, menghasilkan 3x
3y, -2y, dan y merupakan suku sejenis, sehingga akan dikelompokkan dan dijumlahkan, menghasilkan 3y
z, -z, dan -2z merupakan suku sejenis, sehingga akan dikelompokkan dan dijumlahkan, menghasilkan -2z
-7, 8, dan -4 merupakan konstanta, sehingga akan dikelompokkan dan dijumlahkan, menghasilkan -3
Jadi hasil akhirnya adalah

$$3x + 2y - 2z - 3$$

SOAL 2

$$3x^2 + 4x^4 + 9x^2 + 6x + x^4$$

```
>$& (3*x^2+4*x^4+9*x^2+6*x+x^4)
```

$$5\,x^4 + 12\,x^2 + 6\,x$$

Penjelasan:

$$3^2 + 9x^2$$

merupakan suku sejenis, sehingga akan dikelompokkan dan dijumlahkan, menghasilkan

$$12x^2$$

$$4x^4 + x^4$$

merupakan suku sejenis, sehingga akan dikelompokkan dan dijumlahkan, menghasilkan

$$5x^4$$

6x memiliki 0 pasangan suku sejenis lainnya sehingga tetap ditulis 6x
Jadi hasil akhirnya adalah

$$5x^4 + 12x^2 + 6x$$

SOAL 3

$$y^4 + 4x^4 + 3x^2 + 9x^2 + 6x + 7x$$

```
>$& (3*x^2+4*x^4+9*x^2+6*x+y^4+7*x)
```

$$y^4 + 4\,x^4 + 12\,x^2 + 13\,x$$

Penjelasan:

$$y^4$$

memiliki 0 pasangan suku sejenis lainnya sehingga tetap ditulis

$$y^4$$

4x^4
memiliki 0 pasangan suku sejenis lainnya sehingga tetap ditulis

$$4x^4$$

$$3x^2 + 9x^2$$

merupakan suku sejenis, sehingga dikelompokkan dan dijumlahkan, menghasilkan

$$12x^2$$

$$6x + 7x$$

merupakan suku sejenis, sehingga dikelompokkan dan dijumlahkan, menghasilkan

$$13x$$

Jadi hasil akhirnya adalah

$$y^4 + 4x^4 + 12x^2 + 13x$$

```
>
```

Contoh soal lainnya:

$$3a^2 + 4b^4 + 9c^2 + 6d + e^4 + b^2 + a^2$$

```
>$& (3*a^2+4*b^4+9*c^2+6*d+e^4+b^2+a^2)
```

$$e^4 + 6\,d + 9\,c^2 + 4\,b^4 + b^2 + 4\,a^2$$

langkah pertama yaitu kelompokkan suku-suku yang sejenis.

$$4b^4 + e^4 + 3a^2 + a^2 + 9c^2 + b^2 + 6d$$

lalu jumlahkan suku-suku sejenis yang sudah dikelompokkan tadi dengan yang lainnya.

$$4b^4 + e^4 + 4a^2 + b^2 + 9c^2 + 6d$$

---

latihan soal:

$$(2x^2 + 12xy - 11) + (6x^2 - 2x + 4) + (-x^2 - y - 2)$$

```
>$& (2*x^2+12*x*y-11)+(6*x^2-2*x+4)+(-x^2-y-2)
```

$$12\,x\,y - y + 7\,x^2 - 2\,x - 9$$

Operasi Pengurangan Aljabar dengan EMT

Pengurangan adalah operasi matematika yang digunakan untuk mengurangi satu bilangan dengan bilangan lainnya. Operator pengurangan pada EMT juga disimbolkan dengan tanda "-"

SOAL R.3 No 9

$$(3x^2 - 2x - x^3 + 2) - (5x^2 - 8x - x^3 + 4)$$

```
>$& (3*x^2-2*x-x^3+2)-(5*x^2-8*x-x^3+4)
```

$$-2\,x^2 + 6\,x - 2$$

penjelasan:
Jika soal tersebut diuraikan, maka dengan adanya sifat distributif yang dimiliki oleh aljabar akan diperoleh hasil sebagai berikut

$$3x^2 - 2x - x^3 + 2 - 5x^2 + 8x + x^3 - 4$$

Setelah itu, kelompokkan suku sejenis lalu jumlahkan sesuai dengan suku-suku sejenisnya, maka akan diperoleh hasil sebagai berikut

$$-x^3 + x^3 + 3x^2 - 5x^2 - 2x + 8x + 2 - 4$$

$$-2x^2 + 6x - 2$$

SOAL R.3 No 10

$$(5x^2 + 4xy - 3y^2 + 2) - (9x^2 - 4xy + 2y^2 - 1)$$

```
>$& (5*x^2+4*x*y-3*y^2+2)-(9*x^2-4*x*y+2*y^2-1)
```

$$-5\,y^2 + 8\,x\,y - 4\,x^2 + 3$$

penjelasan:
Jika soal tersebut diuraikan, maka dengan sifat distributif yang dimiliki oleh aljabar akan diperoleh hasil sebagai berikut

$$5x^2 + 4xy - 3y^2 + 2 - 9x^2 + 4xy - 2y^+1$$

Setelah itu, kelompokkan suku sejenis lalu jumlahkan sesuai dengan suku-suku sejenisnya, maka akan diperoleh hasil sebagai berikut

$$5x^2 - 9x^2 + 4xy + 4xy - 3y^2 - 2y^2 + 2 + 1$$

$$-4x^2 + 8xy - 5y^2 + 3$$

SOAL R.3 No 11

$$(x^4 - 3x^2 + 4x) - (3x^3 + x^2 - 5x + 3)$$

```
>$& (x^4-3*x^2+4*x)-(3*x^3+x^2-5*x+3)
```

$$x^4 - 3\,x^3 - 4\,x^2 + 9\,x - 3$$

penjelasan:
Jika soal tersebut diuraikan, maka dengan sifat distributif yang dimiliki oleh aljabar akan diperoleh hasil sebagai berikut

$$x^4 - 3x^2 + 4x - 3x^3 - x^2 + 5x - 3$$

Setelah itu, kelompokkan suku sejenis lalu jumlahkan sesuai dengan suku-suku sejenisnya, maka akan diperoleh hasil sebagai berikut

$$x^4 - 3x^3 - 3x^2 - x^2 + 4x + 5x - 3$$

$$x^4 - 3x^3 - 4x^2 + 9x - 3$$

Latihan soal

$$(2x^4 - 3x^2 + 7x) - (5x^3 + 2x^2 - 3x + 5)$$

```
>$& (2*x^2-3*x^2+7*x)-(5*x^3+2*x^2-3*x+5)
```

$$-5\,x^3 - 3\,x^2 + 10\,x - 5$$

Operasi Perkalian Bentuk Aljabar Dengan EMT

Perkalian secara sederhana dapat dimaknai sebagai penjumlahan berulang.
Perkalian merupakan proses aritmetika dasar dimana suatu bilangan dilipatgandakan sesuai dengan bilangan bilangan pengalinya.
Dalam aljabar, operasi perkalian biasanya identik dengan menguraikan bentuk aljabarnya.
Misal:

$$x(x + 2)$$

dengan menggunakan sifat distribusi, maka perkalian tersebut akan menghasilkan

$$x^2 + 2x$$

(Dijabarkan)

SOAL R.3 No

$$(x+6)(x+3)$$

```
>$& expand((x+6)*(x+3))
```

$$x^2 + 9\,x + 18$$

Penjelasan:
Dengan adanya sifat distribusi, maka

$$(x+6)(x+3)$$

akan menghasilkan

$$= x^2 + 3x + 6x + 18$$

$$= x^2 + 6x + 18$$

SOAL R.3 No 17

$$(a-b)(2a^3 - ab + 3b^2)$$

```
>$& expand((a-b)*(2*a^3-a*b+3*b^2))
```

$$-3\,b^3 + 4\,a\,b^2 - 2\,a^3\,b - a^2\,b + 2\,a^4$$

```
>$powerdisp:true;
```

Penjelasan:
Dengan adanya sifat distributif, maka

$$(a-b)(2a^3 - ab + 3b^2)$$

akan menghasilkan

$$= 2a^4 - a^2b + 3ab^2 - 2a^3b + ab^2 - 3b^3$$

$$= 2a^4 - a^2b - 2a^3b + 4ab^2 - 3b^3$$

SOAL R.3 No 43

$$(2x+3y+4)(2x+3y-4)$$

```
>$& expand((2*x+3*y+4)*(2*x+3*y-4))
```

$$-16+4\,x^2+12\,x\,y+9\,y^2$$

```
>$powerdisp:false;
```

Penjelasan:
Dengan adanya sifat distributif, maka

$$(2x+3y+4)(2x+3y-4)$$

akan menghasilkan

$$9y^2+12xy+4x^2-16$$

SOAL R.3 No 46

$$(y-2)(y+2)(y^2+4)$$

```
>$& expand((y-2)*(y+2)*(y^2+4))
```

$$y^4-16$$

Penjelasan:
Dengan adnaya sifat distributif, maka

$$(y-2)(y+2)(y^2+4)$$

akan menghasilkan

$$=(y^2+2y-2y-4)(y^2+4)$$

$$=(y^2-4)(y^2+4)$$

$$=y^4+4y^2-4y^2-16$$

$$=y^4-16$$

Latihan Soal

$$(a-8)(a-1)$$

```
>$& expand((a-8)*(a-1))
```

$$a^2-9\,a+8$$

Penjelasan:
Dengan adanya sifat distributif, maka

$$(a-8)(a-1)$$

akan menghasilkan

$$a^2-9a+8$$

Operasi Perpangkatan Aljabar Dengan EMT

Perpangkatan adalah operasi matematika untuk perkalian berulang suatu bilangan sebanyak pangkatnya. Pangkat suatu bilangan adalah angka yang ditulis lebih kecil dan terdapat agak ke atas.

SOAL 1
Sederhanakan soal bentuk penrpangkatan berikut

$$(x+1)^2$$

```
>$& (expand((x+1)^2))
```

$$x^2+2\,x+1$$

Penyelesaian:
Bentuk soal tersebut dapat dituliskan sebagai:

$$(x+1)(x+1)$$

Sehingga dengan memanfaatkan adanya sifat distributif akan dihasilkan

$$x^2+2x+1$$

SOAL 2

$$(x+2)^3$$

```
>$& (expand((x+2)^3))
```

$$x^3+6\,x^2+12\,x+8$$

Penyelesaian:
Bentuk soal tersebut dapat dituliskan sebagai berikut
(x+2)(x+2)(x+2)
Sehingga dengan adanya sifat distributif akan menghasilkan

$$x^3+6x^2+12x+8$$

SOAL 3

$$(x+1)^{-2}$$

```
>$& (expand((x+1)^-2))
```

$$\frac{1}{x^2+2\,x+1}$$

Operasi perpangkatan dengan pangkat negatif diselesaikan dengan cara sebagai berikut

$$(x+1)^{-2}=\frac{1}{(x+1)^2}$$

sehingga didapat hasilnya:

$$\frac{1}{x^2+2x+1}$$

---

latihan soal:

$$(5x-9y)^3$$

```
>$& expand((5*x-9*y)^3)
```

$$-729\,y^3+1215\,x\,y^2-675\,x^2\,y+125\,x^3$$

```
>$powerdisp:true;
```

Faktorisasi Aljabar dengan EMT

Di faktorisasi, kita akan menggunakan konsep FPB dan sifat distributif aljabar.
Untuk lebih gampang memahaminya, coba faktorisasi dengan angka terlebih dahulu, misal
24+60 = 2(12+30) angka 12 dan 30 masih bisa disederhanakan lagi

```
= 2.2(6+15)     angka 6 dan 15 masih bisa disederhanakan lagi
= 2.2.3(2+5)    karena 2 dan 5 tidak bisa disedderhanakan lagi,
= 12(7)
```

Jadi faktor yang akan kita ambil adalah yang terbesar, yaitu 12 dan 7.
Sekarang, coba dengan variabel

$$5x^3 - 12x^2 = x(5x^2 - 12x)$$

masih bisa disederhanakan lagi

$$= x.x(5x - 12)$$

karena sudah tidak bisa disederhanakan lagi,

$$= x^2(5x - 12)$$

Karena angka 12 dan 5 tidak bisa difaktorkan, maka faktor terbesarnya adalah

$$x^2(5x - 12)$$

Sekarang kita akan mencoba memfaktorkan di aplikasi EMT dengan mencoba soal-soal berikut ini.

SOAL R.4 No 23

$$t^2 + 8t + 15$$

```
>$& factor(t^2+8*t+15)
```

$$(3 + t)\ (5 + t)$$

Penjelasan:
Akan dibuktikan benar yaitu ketika mengalikan faktor tersebut akan menghasilkan

$$t^2 + 8t + 15$$

```
>$& expand((t+3)*(t+5))
```

$$15 + 8\,t + t^2$$

Karena hasil dari perkalian faktor tersebut menghasilkan hasil yang sama, maka hasil pemfaktoran tersebut sudah benar.

SOAL R.4 No 54

$$5x^2y - 5yz^4$$

```
>$& factor(5*x^2*y-5*y*z^4)
```

$$-5\,y\,\left(-x+z^2\right)\,\left(x+z^2\right)$$

Penjelasan:
Akan dibuktikan bahwa

$$-5y(z^2 - x)(z^2 + x)$$

merupakan faktor dari

$$5x^2y - 5yz^4$$

yaitu dengan mengalikannya kembali

```
>$& expand(-5*y*(z^2-x)*(z^2+x))
```

$$5\,x^2\,y - 5\,y\,z^4$$

Karena hasil dari perkalian faktor tersebut menghasilkan hasil yang sama, maka hasil pemfaktoran tersebut sudah benar.

SOAL R.4 No 65

$$4p^2 - 8pq + 4q^2$$

```
>$& factor(4*p^2-8*p*q+4*q^2)
```

$$4\,\left(-p+q\right)^2$$

Penjelasan:
Akan dibuktikan bahwa

$$4(-p+q)^2$$

merupakan faktor dari

$$4p^2-8pq+4q^2$$

yaitu dengan mengalikannya kembali

```
>$& expand(4*p^2-8*p*q+4*q^2)
```

$$4\,p^2-8\,p\,q+4\,q^2$$

```
>$ powerdisp:true; //supaya tampilannya tetap 4p^2-8pq+4q^2, bukan 4q^2-8pq+4p^2
```

Karena hasil dari perkalian faktor tersebut menghasilkan hasil yang sama, maka hasil pemfaktoran tersebut terbukti benar.

SOAL R.4 No 73

$$3a^5-24a^2$$

```
>$& factor(3*a^5-24*a^2)
```

$$3\,\left(-2+a\right)\,a^2\,\left(4+2\,a+a^2\right)$$

Penjelasan:
Akan dibuktikan bahwa

$$3(a-2)a^2(a^2+2a+4)$$

merupakan faktor dari

$$3a^5-24a^2$$

yaitu dengan mengalikannya kembali

```
>$& expand(3*(a-2)*a^2*(a^2+2*a+4))
```

$$-24\,a^2+3\,a^5$$

```
>$ powerdisp:false; //supaya tampilannya tidak -12a^2+6a^3+3a^4+3a^5
```

Karena hasil dari perkalian faktor tersebut menghasilkan hasil yang sama, maka hasil pemfaktoran tersebut terbukti benar.

Soal lain

$$m^6+8m^3-20$$

```
>$& factor(m^6+8*m^3-20)
```

$$\left(m^3-2\right)\,\left(m^3+10\right)$$

Operasi dan Fungsi Matematika

Fungsi adalah suatu relasi yang menghubungkan setiap anggota x dalam suatu himpunan yang disebut daerah asal (domain) dengan suatu nilai tunggal f(x) dari suatu himpunan kedua yang disebut daerah kawan (kodomain).
Fungsi merupakan program dalam EMT yang didefinisikan dengan perintah
"function". Fungsi dapat berupa fungsi satu baris atau fungsi
multibaris.
Dalam satu baris, fungsi dapat berupa numerik atau simbolik. Fungsi satu baris numerik didefinisikan oleh ":=".

```
>function f(x):= 2x + 5
```

Fungsi di atas merupakan gambaran dari fungsi satu baris. % Suatu fungsi dapat dievaluasi sama seperti fungsi Euler bawaan lainnya.

```
>f(7)
```

```
19
```

```
>%+f(1)
```

```
26
```

```
>f(10)-f(3)
```

```
14
```

```
>f(3)*f(2)
```

```
99
```

```
>f(8)/f(4)
```

```
1.61538461538
```

```
>f(2)+f(5)-f(6)
```

```
7
```

```
>f(1)^2
```

```
49
```

```
>sqrt(f(10))
```

```
5
```

Fungsi juga dapat digunakan untuk vektor. Kami mengikuti bahasa matriks Euler, karena ekspresi yang digunakan dalam fungsi tersebut dapat divektorkan.

```
>f(0:0.2:2)
```

```
[5,  5.4,  5.8,  6.2,  6.6,  7,  7.4,  7.8,  8.2,  8.6,  9]
```

(0:0.2:2) adalah sintaks yang digunakan untuk membuat vektor dengan langkah 0.2 dari 0 hingga 2. Sintaks ini biasanya digunakan untuk membuat sebuah deret angka.

Parameter Bawaan

Fungsi numerik dapat memiliki parameter default. Parameter default adalah nilai atau konfigurasi yang telah ditentukan sebelumnya untuk suatu fungsi. Parameter default digunakan ketika pemanggil fungsi dan tidak menyediakan nilai untuk parameter tertentu.

```
>function g(x,a=1) := a*x^2+1
>g(4)
```

```
17
```

```
>g(3)+g(2)
```

```
15
```

```
>g(6)/g(1)
```

```
18.5
```

```
>g(2)*g(5)
```

```
130
```

Jika suatu variabel bukanlah parameter, maka harus bersifat global. Fungsi satu baris dapat melihat variabel global.

```
>function h(x) := a*x^2
>a=2; h(3)
```

```
18
```

Fungsi simbolik yang didefinisikan dengan "&=". Maka fungsi tersebut didefinisikan di Euler dan Maxima, dan bekerja di keduanya. Ekspresi yang menentukan dijalankan melalui Maxima sebelum definisi.

```
>function k(x) &= x^2-x*exp(-x); $& k(x)
```

$$x^2 - x\,e^{-x}$$

```
>$&diff(k(x),x), $&% with x=3
```

$$x\,e^{-x} - e^{-x} + 2\,x$$

$$2\,e^{-3} + 6$$

Mereka juga dapat digunakan dalam ekspresi numerik. Tentu saja, ini hanya akan berfungsi jika EMT dapat menafsirkan semua yang ada di dalam fungsi tersebut.
Beberapa fungsi-fungsi yang digunakan dalam EMT:
&= mendefinisikan fungsi simbolik,
:= mendefinisikan fungsi numerik,
&&= mendefinisikan fungsi simbolik murni.

```
>k(5+k(1))
```

31.7006135141

```
>function P(x,n) &= (2*x-1)^n; $&P(x,n)
```

$$(2\,x-1)^n$$

```
>function Q(x,n) &= (x+2)^n; $&Q(x,n)
```

$$(x+2)^n$$

```
>$&P(x,4), $&expand(%)
```

$$(2\,x-1)^4$$

$$16\,x^4-32\,x^3+24\,x^2-8\,x+1$$

```
>P(3,4)
```

625

```
>$&P(x,4)+ Q(x,3), $&expand(%)
```

$$(2\,x-1)^4+(x+2)^3$$

$$16\,x^4-31\,x^3+30\,x^2+4\,x+9$$

```
>$&P(x,4)-Q(x,3), $&expand(%), $&factor(%)
```

$$(2\,x-1)^4-(x+2)^3$$

$$16\,x^4-33\,x^3+18\,x^2-20\,x-7$$

$$16\,x^4-33\,x^3+18\,x^2-20\,x-7$$

```
>$&P(x,4)*Q(x,3), $&expand(%), $&factor(%)
```

$$(x+2)^3\ (2\,x-1)^4$$

$$16\,x^7+64\,x^6+24\,x^5-120\,x^4-15\,x^3+102\,x^2-52\,x+8$$

$$(x+2)^3\ (2\,x-1)^4$$

```
>$&P(x,4)/Q(x,1), $&expand(%), $&factor(%)
```

$$\frac{(2\,x-1)^4}{x+2}$$

$$\frac{16\,x^4}{x+2}-\frac{32\,x^3}{x+2}+\frac{24\,x^2}{x+2}-\frac{8\,x}{x+2}+\frac{1}{x+2}$$

$$\frac{(2\,x-1)^4}{x+2}$$

```
>function r(x) &= x^3-x; $&r(x)
```

$$x^3-x$$

```
>$&integrate(r(x),x)
```

$$\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}$$

```
>
```

1. Fungsi Trigonometri

Fungsi sinus, cosinus, dan tangen adalah klasifikasi utama fungsi trigonometri. Adapun ketiga fungsi trigonometri lainnya yaitu cotangen, secan, dan cosecan dapat diturunkan dari ketiga fungsi tersebut.
- Sinus (lambang: sin) dalam matematika adalah perbandingan sisi segitiga yang ada di depan sudut dengan sisi miring.
- Kosinus atau cosinus (simbol: cos) dalam matematika adalah perbandingan sisi segitiga yang terletak di sudut dengan sisi miring.
- Tangen (lambang: tan) dalam matematika adalah perbandingan sisi segitiga yang ada di depan sudut dengan sisi segitiga yang terletak di sudut.
(dengan catatan bahwa segitiga itu adalah segitiga siku-siku atau salah satu sudut segitiga itu 90 derajat).
Adapun untuk ketiga fungsi lainnya yaitu :
- cotangen(cot):

$$\frac{1}{tan(x)}$$

- secan(sec):

$$\frac{1}{cos(x)}$$

- cosecan (cosec/csc):

$$\frac{1}{sin(x)}$$

Perhitungan menggunakan EMT

Dengan menggunakan EMT, kita dapat mencari nilai dari fungsi sin,cos,tan,dll dengan lebih cepat.

```
>x := 60°;
```

Perintah di atas mendefinisikan nilai x adalah 60 derajat. Adapun fungsi dari titik koma dibelakang adalah agar hasilnya tidak terlihat.

```
>sin(x)
```

```
0.866025403784
```

Seperti yang dijelaskan sebelumnya bahwa x telah didefinisikan 60 derajat. Jadi, hanya dengan memanggil x maka program dengan otomatis akan memunculkan nilai dari sin(60°)

```
>&sin(60°)
```

```
sqrt(3)
-------
   2
```

Penulisan sintax di atas berbeda dengan yang sebelumnya. Tetapi untuk hasil keduanya adalah equivalent.Untuk melakukan perhitungan matematika simbolis di EMT, awali perintah maxima dengan tanda "&". Setiap ekspresi yang dimulai dengan "&" adalah ekspresi simbolis dan dikerjakan oleh Maxima.

```
>$&sin(60°)
```

$$\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Penulisan sintax yang ini juga berbeda dengan dua penulisan di atas. Sintaks di atas menampilkan hasil perhitungan simbolik secara lebih bagus menggunakan LaTeX. Perbedaannya adalah adanya tanda "$" di awal perintah di depan tanda & pada perintah Maxima.
Selain fungsi sin, terdapat fungsi lain yang dapat dicari menggunakan EMT. Diantaranya adalah:

```
>$&cos(60°)
```

$$\frac{1}{2}$$

```
>$&tan(60°)
```

$$\sqrt{3}$$

```
>$&cot(60°)
```

$$\frac{1}{\sqrt{3}}$$

```
>$&sec(60°)
```

$$2$$

```
>$&csc(60°)
```

$$\frac{2}{\sqrt{3}}$$

2. Fungsi Eksponensial

Fungsi eksponensial adalah fungsi yang memiliki bentuk

$$F(x) = a^x$$

dengan a > 0 dan a tidak sama dengan 0.

Eksponen pangkat positif

Bentuk fungsi :

$$a^x$$

```
dengan x adalah bilangan bulat positif.
```

jadi jika

$$a^4 = a * a * a * a$$

```
a dikatakan sebagai basis dan 4 sebagai indeks.
```

```
>//gunakan simbol (^) untuk operasi pangkat
>//contoh:
```

Cari nilai dari :

$$(-3)^3$$

Jawaban:

```
>$&(-3)^3
```

$$-27$$

Penjelasan:
Menggunakan EMT, hasil dari nilai tersebut langsung menampilkan hasil akhir. Adapun untuk langkah-langkah manualnya adalah sebagai beriku:

$$(-3)*(-3)*(-3) = -27$$

Eksponen pangkat Negatif

Bentuk fungsi :

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

```
dengan a tidak sama dengan 0
```

```
>//contoh
```

Carilah nilai dari

$$2^{-5}$$

jawaban:

```
>$&2^-5
```

$$\frac{1}{32}$$

Penjelasan:
Menggunakan EMT, hasil dari nilai tersebut langsung menampilkan hasil akhir. Adapun untuk langkah-langkah manualnya adalah sebagai berikut:

$$2^{-5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$$

Eksponen pangkat nol

Bentuk:

$$a^0 = 1$$

dengan a tidak sama dengan 0

```
>//contoh
```

carilah nilai dari

$$37^0 dan (\frac{-3}{7})^0$$

Jawaban:

```
>$& 37^0
```

$$1$$

```
>$& (-3/7)^0
```

$$1$$

Penjelasan:
Menggunakan EMT, hasil dari nilai tersebut langsung menampilkan hasil akhir.

Sifat-sifat Eksponen

Jika p dan q adalah bilangan real, maka berlaku sifat-sifat berikut:
A. Sifat 1

$$a^p * a^q = a^{p+q}$$

```
>//contoh a.1
```

Carilah nilai dari

$$c^3 * c^5$$

jawaban

```
>& c^3 * c^5
```

```
 8
c
```

Penjelasan:
Menggunakan EMT, hasil dari nilai tersebut langsung menampilkan hasil akhir. Adapun untuk langkah-langkah manualnya adalah sebagai berikut:

$$c^3 * c^5 = c^{3+5} = c^8$$

```
>//contoh a.2
```

Carilah nilai dari

$$3^8 * 3^{-2}$$

Jawaban:

```
>& 3^8 * 3^-2
```

```
                              729
```

Penjelasan:
Menggunakan EMT, hasil dari nilai tersebut langsung menampilkan hasil akhir. Adapun untuk langkah-langkah manualnya adalah sebagai berikut:

$$3^8 * 3^-2 = 3^{8+(-2)} = 3^6 = 729$$

```
>//latihan soal
```

Carilah nilai dari

$$(x+2)^4(x+2)^{-2}$$

```
>& (x+2)^4 * (x+2)^-2
```

```
                                    2
                             (x + 2)
```

Penjelasan:
Menggunakan EMT, hasil dari nilai tersebut langsung menampilkan hasil akhir. Adapun untuk langkah-langkah manualnya adalah sebagai berikut:

$$(x+2)^4 * (x+2)^{-2} = (x+2)^2$$

B. Sifat 2

$$(a^p)^q = a^{pq}$$

```
>//contoh
```

carilah nilai dari

$$(x^2)^5$$

jawab:

```
>$&(x^2)^5
```

$$x^{10}$$

Penjelasan:
Menggunakan EMT, hasil dari nilai tersebut akan langsung menampilkan hasil akhir. Adapun untuk langkah-langkah manualnya adalah sebagai berikut:

$$(x^2)^5 = x^{2*5} = x^{10}$$

```
>//latihan soal
```

carilah nilai dari:

$$(5^2)^3$$

jawab:

```
>$&(5^2)^3
```

$$15625$$

Penjelasan:
Menggunakan EMT, hasil dari nilai tersebut langsung menampilkan hasil akhir. Adapun untuk langkah-langkah manualnya adalah sebagai berikut:

$$(5^2)^3 = 5^{2*3} = 5^6 = 15625$$

C. Sifat 3
Dengan a tidak sama dengan 0, berlaku:

$$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$$

```
>//latihan soal
```

carilah nilai dari

$$\frac{x^2y^{-2}}{x^{-1}y}$$

```
>$& (x^2*y^-2)/(x^-1*y)
```

$$\frac{x^3}{y^3}$$

Penjelasan:
Menggunakan EMT, hasil dari nilai tersebut langsung menampilkan hasil akhir. Adapun untuk langkah-langkah manualnya adalah sebagai berikut:

$$\frac{x^2y^{-2}}{x^{-1}y} = \frac{x^3}{y^3}$$

D. Sifat 4

$$(ab)^p = a^p * b^p$$

```
>//latihan soal
```

carilah nilai dari

$$(2x2y)^3$$

Jawaban:

```
>$&(2*x*2*y)^3
```

$$64\,x^3\,y^3$$

Penjelasan:
Menggunakan EMT, hasil dari nilai tersebut langsung menampilkan hasil akhir. Adapun untuk langkah-langkah manualnya adalah sebagai berikut:

$$(2x2y)^3 = (2x)^3(2y)^3 = 64x^3y^3$$

```
>
```

E. Sifat 5
Dengan b tidak sama dengan 0, berlaku:

$$(\frac{a}{b})^p = \frac{a^p}{b^p}$$

```
>//latihan soal
```

Carilah nilai dari

$$(\frac{a^2b^{-3}c^5}{a^2b^{-2}c^3})^{-2}$$

```
>$& ((a^2*b^-3*c^5)/(a^2*b^-2*c^3))^-2
```

$$\frac{b^2}{c^4}$$

Penjelasan:
Menggunakan EMT, hasil dari nilai tersebut langsung menampilkan hasil akhir. Adapun untuk langkah-langkah manualnya adalah sebagai berikut:

$$(\frac{a^2b^{-3}c^5}{a^2b^{-2}c^3})^{-2} = \frac{b^2}{c^4}$$

3. Fungsi Logaritma

Logaritma merupakan kebalikan (invers) dari pemangkatan.
Suatu bentuk pemangkatan dapat diubah menjadi bentuk logaritma
dan sebaliknya.
Bentuk Umum:
Untuk 0<a<1 atau a>1, dan b>0 berlaku:

$$a^n = b$$

$$^a logb = n$$

keterangan :
a disebut bilangan pokok (basis)
b disebut numerus

```
>//cara menggunakan logaritma umum di emt dengan basis a : logbase(b,a)
>//cara menggunakan logaritma umum di emt dengan basis 10 : log10(b)
>3^4
```

```
81
```

Contoh di atas adalah salah satu bentuk contoh eksponen.

```
>logbase(81,3)
```

```
4
```

Cara untuk mencari nilai dari logaritma umum dengan menggunakan EMT adalah dengan menuliskan sintax 'logbase(numerus,basis)'.
Dan sesuai dengan bentuk contoh eksponen di atas, maka persamaan dengan bentuk logaritmanya adalah

$$3^4 = 81 <=>^3 log81 = 4$$

Sifat-sifat logaritma

Untuk a, b, c bilangan real positif
1. Untuk a tidak sana dengan 0, berlaku

$$^{a}logbc =^{a} logb +^{a} logc$$

```
>//contoh
```

Apakah

$$^{2}log4 +^{2} log8 =^{2} log(4 * 8)?$$

jawab:

```
>logbase(4,2)+ logbase(8,2)
```

```
5
```

```
>logbase(8*4, 2)
```

```
5
```

Apabila mengetahui sintax yang akan digunakan. Seperti yang telah dijelaskan sebelumnya, sintax dari mencari nilai logaritma basis selain 0 adalah 'logbase(numerus,basis)'dan gunakan operasi-operasi yang dibutuhkan seperti perkalian(*) dan penjumlahan(+).
Hal yang perlu dilakukan hanyalah mencari tahu nilai dari kedua ruas apakah memiliki nilai yang sama.

---

2. Untuk a>0, a tidak sama dengan 1, dan b>0, berlaku

$$^{a}log(\frac{b}{c}) =^{a} logb -^{a} logc$$

```
>//contoh
```

Apakah

$$^{3}log27 -^{3} log3 =^{3} log(\frac{27}{3})?$$

```
>logbase(27,3)-logbase(3,3)
```

```
2
```

```
>logbase(27/3,3)
```

```
2
```

Apabila mengetahui sintax yang akan digunakan. Seperti yang telah dijelaskan sebelumnya, sintax dari mencari nilai logaritma basis selain 0 adalah 'logbase(numerus,basis)'dan gunakan operasi-operasi yang dibutuhkan seperti pembagian(/) dan pengurangan(-).
Hal yang perlu dilakukan hanyalah mencari tahu nilai dari kedua ruas apakah memiliki nilai yang sama.

---

3. Untuk n bilangan asli serta a>0, a tidak sama dengan 1, dan b>0, berlaku:

$$^{a}logb^{n} = n^{a}logb$$

```
>//contoh
```

Tunjukkan bahwa pernyataan di bawah benar menggunakan EMT!

$$^{2}log4^{2} = 2^{2}log4?$$

```
>logbase(4^2,2)
```

```
4
```

```
>logbase(4,2)*2
```

```
4
```

Terbukti bahwa

$$^{2}log4^{2} = 2^{2}log4$$

Benar

---

4. Untuk a,b,c tidak sama dengan 1

$$^{a}logb = \frac{^{c}logb}{^{c}loga} = \frac{1}{^{b}loga}$$

```
>//contoh
```

Apakah

$$^{3}log7 = \frac{^{7}log7}{^{7}log3} = \frac{1}{^{7}log3}?$$

jawab:

```
>logbase(7,3)
```

```
1.77124374916
```

```
>logbase(7,7)/logbase(3,7)
```

```
1.77124374916
```

```
>1/logbase(3,7)
```

```
1.77124374916
```

Terbukti bahwa

$$^{3}log7 = \frac{^{7}log7}{^{7}log3} = \frac{1}{^{7}log3}$$

Benar

---

5. Untuk a,b,c tidak sama dengan 1, berlaku:

$$^{a}logb *^{b} logc =^{a} logc$$

```
>//contoh
```

Apakah

$$^{2}log3 *^{3} log32 =^{2} log32?$$

Tunjukkan bahwa pernyataan di atas benar!

```
>logbase(3,2)*logbase(32,3)
```

```
5
```

```
>logbase(32,2)
```

```
5
```

Terbukti bahwa

$$^{2}log3 *^{3} log32 =^{2} log32$$

Benar

---

6. untuk a tidak sama dengan 1, berlaku:

$$a^{^{a}logb} = b$$

```
>//contoh
```

Tunjukkan bahwa pernyataan berikut benar

$$2^{^2log4} = 4$$

jawab:

```
>2^logbase(4,2)
```

```
4
```

Terbukti bahwa

$$2^{^2log4} = 4$$

Benar

4. Fungsi Linear

Fungsi linear adalah suatu fungsi yang membentuk grafik secara garis lurus. Fungsi linear ini juga menjadi fungsi yang telah mendapatkan pangkat tertinggi dengan variabelnya sama dengan satu.
Bentuk umum dari fungsi linear
f(x)= ax + b atau y = ax + b
f(x)merupakan fungsi yang didefinisikan
a merupakan koefisien dari x
b merupakan konstanta
Misal ada fungsi

$$y = x + 9$$

kemudian akan dicari nilai dari y dengan nilai x diketahui sebagai 3
lalu subtitusi x = 3 ke persamaan y = x+9

```
>//contoh
>function f(x):= 2x + 5
>f(10)
```

```
25
```

5. Fungsi Pangkat

Fungsi Pangkat merupakan fungsi dengan variabel bebasnya berpangkat suatu bilangan riil dalam persamaannya.
Bentuk umum dari fungsi pangkat

$$f(x) = ax^n + bx + c$$

f(x) = fungsi pangkat
x = variabel
a = koefisien x^n, n tidak boleh sama dengan 0.
b = koefisien x
c = konstanta

```
>//contoh
```

$$f(x,y) = x^2 + 5y$$

```
>function f(x,y):= x^2+5y
>f(4,10)
```

```
66
```

$$m(x) = x^2 + 5x + 6$$

```
>function m(x):= x^2+5x+6
>m(3)
```

```
30
```

```
>function m(x)&= x^2+5*x+6
```

```
 2
x  + 5 x + 6
```

```
>& m(a)
```

```
 2
a  + 5 a + 6
```

6. Fungsi Polinomial

Fungsi polinomial adalah fungsi yang hanya melibatkan pangkat bilangan bulat non negatif atau hanya eksponen bilangan bulat positif dari suatu variabel dalam persamaan seperti persamaan kuadrat dan lain-lain. (Polinomial)Suku banyak adalah suatu bentuk matematika yang merupakan penjumlahan atau pengurangan dari satu suku atau lebih dengan pangkat variabelnya harus bilangan bulat dan tidak negatif.
Bentuk umum fungsi polinomial

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

```
>//contoh
```

$$\frac{(3x^3-4x^2+2x+4)}{(3x+2)}$$

```
>$& factor(3*x^3-4*x^2+2*x+4)
```

$$(3\,x+2)\,\left(x^2-2\,x+2\right)$$

Sederhanakan pembilang dan penyebut dengan dibagi 3x+2

```
>$& factor(3*x^3-4*x^2+2*x+4)/(3*x+2)
```

$$x^2-2\,x+2$$

7. Fungsi Rasional

Fungsi rasional adalah fungsi matematika yang didefinisikan sebagai rasio (pembagian) antara dua polinomial.
Bentuk umum fungsi rasional

$$v(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$$

dengan q(x) tidak sama dengan 0

```
>//contoh
```

$$\frac{(16x^4-1)}{(2x-1)}$$

```
>$& factor(16*x^4-1)
```

$$(2\,x-1)\,(2\,x+1)\,\left(4\,x^2+1\right)$$

Sederhanakan pembilang dan penyebut dengan dibagi 2x-1

```
>$& factor(16*x^4-1)/(2*x-1)
```

$$(2\,x+1)\,\left(4\,x^2+1\right)$$

8. Fungsi Komposisi

Fungsi komposisi adalah fungsi yang melibatkan lebih dari satu fungsi. Ketika ada suatu fungsi, kemudian dilanjutkan dengan fungsi lainnya, maka akan membentuk suatu fungsi baru. Fungsi baru inilah fungsi hasil komposisi dari kedua fungsi sebelumnya.
Contoh Fungsi Komposisi
1.

$$(f_o g)(x) <=> f(g(x))$$

(f o g)(x) dapat dibaca "fungsi f komposisi g" atau "f bundaran g", yang artinya fungsi yang dipetakan oleh fungsi g(x) kemudian dilanjutkan oleh fungsi f(x). Jadi, fungsi g nya dikerjakan terlebih dahulu, kemudian hasilnya dimasukkan ke dalam fungsi f.
2.

$$(g_o f)(x) <=> g(f(x))$$

(g o f)(x) dapat dibaca "fungsi g komposisi f" atau "g bundaran f", yang artinya fungsi yang dipetakan oleh fungsi f(x) kemudian dilanjutkan oleh fungsi g(x). Kalau g o f, yang dikerjakan terlebih dahulu adalah fungsi f, kemudian dilanjutkan atau dimasukkan dalam fungsi g.
image: Sifat-Sifat Fungsi Komposisi.png

```
>//contoh
>function f(x):= 2x + 5
>function g(x):= x^2+1
>f(g(1))
```

```
9
```

```
>g(f(1))
```

```
50
```

9. Fungsi Invers

Fungsi invers atau fungsi kebalikan merupakan suatu fungsi yang berkebalikan dari fungsi asalnya. Suatu fungsi f memiliki fungsi invers (kebalikan) f^-1 jika f merupakan fungsi satu-satu dan fungsi pada (bijektif). Hubungan tersebut dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$(f^{-1})^{-1} = f$$

Ada 3 langkah untuk menentukan fungsi invers, yaitu:
1. Ubahlah bentuk y = f(x) menjadi bentuk x = f(y).
2. Tuliskan x sebagai f^-1(y) sehingga f^-1(y) = f(y).
3. Ubahlah variabel y dengan x sehingga diperoleh rumus fungsi invers f^-1(x).
image: table rumus invers.png

```
>//contoh
>function f(x):= 2x + 5
>inv(f(6))
```

```
0.0588235294118
```

Bilangan Kompleks

Penjelasan mengenai Bilangan Kompleks

EMT dapat menggunakan bilangan kompleks. Tersedia banyak fungsi untuk bilangan kompleks di EMT.
Bilangan kompleks dimasukkan dengan menambahkan i ke bagian imajiner. Bilangan imaginer
i = v -1
dituliskan dengan huruf I (huruf besar I), namun akan ditampilkan dengan huruf i (i kecil).

```
>sqrt(-1)
```

```
Floating point error!
Error in sqrt
Error in:
sqrt(-1) ...
        ^
```

sqrt(-1) tidak akan berfungsi. Jadi akar kuadrat -1 akan menghasilkan kesalahan.
Untuk mengubah bilangan real x menjadi bilangan kompleks, gunakan complex(x).

```
>sqrt(complex(-1))
```

```
0+1i
```

re(x) : bagian riil pada bilangan kompleks x.
m(x) : bagian imaginer pada bilangan kompleks x.
omplex(x) : mengubah bilangan riil x menjadi bilangan kompleks.
onj(x) : Konjugat untuk bilangan bilangan komplkes x.
rg(x) : argumen (sudut dalam radian) bilangan kompleks x.
eal(x) : mengubah x menjadi bilangan riil.
re(z) dan im(z) hanya menghitung bagian real dan imajiner dari sebuah bilangan kompleks.

Melakukan Perhitungan menggunakan Bilangan Kompleks

```
>$& sqrt(-1)
```

$$i$$

Soal pertama (Ubah bentuk dengan aturan i)

$$\frac{-4-\sqrt{-4}}{2}$$

```
>$& ((-4)-sqrt(-4))/(2)
```

$$\frac{-2\,i-4}{2}$$

```
>$& ((-2*i)/2)-((4)/(2))
```

$$-i-2$$

Jadi untuk penyelesaian di atas pertama-tama mengubah akar -4 menjadi aturan i dengan mengubah bentuk akar negatif 4 menjadi

$$\sqrt{(4).(-1)}$$

Dengan begitu bentuk tersebut kita bisa ubah menjadi

$$\sqrt{4}.\sqrt{-1}$$

Sehingga akar 4 kita bisa ubah bentuk menjadi 2 dan akar negatif 1 sesuai dengan aturan i yaitu

$$i=\sqrt{-1}$$

Sehingga bentuknya dapat kita ubah menjadi

$$\frac{-4-2i}{2}$$

dilanjutkan dengan pembagian biasa dan hasilnya menjadi

$$-2-i$$

```
>(1+sqrt(complex(-1)))^3
```

```
-2+2i
```

Soal Kedua

$$(1+i)^3$$

```
>$& -2+2*i // jawaban menggunakan latex
```

$$2\,i-2$$

Untuk soal nomor 2 dapat dijabarkan menjadi

$$1+3i+3i^2+i^3$$

Karena aturan i yang dimana

$$i=\sqrt{-1}$$

sehingga ketika i pangkat 2 dapat diubah menjadi -1 karena

$$i^2$$

$$= \sqrt{-1}.\sqrt{-1}$$

$$= -1$$

Selanjutnya ketika i pangkat tiga diubah menjadi -1i karena

$$i^3$$

$$= \sqrt{-1}.\sqrt{-1}.\sqrt{-1}$$

$$= -1i$$

Sehingga penjabaran dari soal nomor dua dapat diubah menjadi

$$1 + 3i + 3.(-1) + (-1)i$$

Sehingga ketika dilakukan operasi penjumlahan dan pengurangan jawabannya menjadi

$$-2 + 2i$$

Soal ketiga

$$\frac{i + i^2 + i^3 + i^4}{1 + i}$$

```
>$&  (sqrt(-1)+((sqrt(-1))^2)+(sqrt(-1)^3)+((sqrt(-1)^4)))/(1+sqrt(-1))
```

$$0$$

Pada soal ketiga hasil dari penyederhanaan dari soal ketiga adalah

$$i(i^2 + 1)$$

Sehingga ketika dilanjutkan dengan operasi perkalian menjadi

$$(i^3 + i)$$

Selanjutnya untuk i pangkat 3 dapat diubah menjadi -1i karena

$$i^3$$

$$= \sqrt{-1}.\sqrt{-1}.\sqrt{-1}$$

$$= -1i$$

Kemudian dapat dari operasi tersebut menghasilkan

$$(-1i + i)$$

Dengan operasi penjumlahan, hasil dari permasalahan tersebut adalah

$$0$$

Fungsi-Fungsi Buatan Sendiri

1.

Fungsi Inti

Banyak fungsi matematika dasar (operator, fungsi trigonometri, fungsi eksponensial, dll) tercantum dalam fungsi inti.

2. Fungsi Hiperbolik

```
>sinh(60°)
```

```
1.24936705052
```

```
>cosh(60°)
```

```
1.6002868577
```

```
>asinh(30)
```

```
4.09462222433
```

```
>acosh(30)
```

```
4.09406666863
```

```
> sec(60°)
```

```
2
```

```
>cosec(60°)
```

```
1.15470053838
```

```
>cot(60°)
```

    0.57735026919

3. Koordinat kutub

```
>polar(1, 2)
```

    1.10714871779

```
>polar(3,7,4)
```

    1.16590454051

```
>rect(45, sqrt(2))
```

    0.742917481199

4. Polinomial

```
>polydif([0,1,1])
```

    [1, 2]

Menyelesaikan Persamaan dan Sistem Persamaan

Persamaan adalah suatu pernyataan matematika dalam bentuk simbol yang menyatakan bahwa dua hal adalah persis sama. Persamaan ditulis dengan tanda sama dengan (=), seperti berikut:

```
> $& solve(x+3=5)
```

$$[x = 2]$$

```
> $& solve(2*x-8=10)
```

$$[x = 9]$$

Persamaan Linier

Persamaan linear adalah sebuah persamaan aljabar, yang tiap sukunya mengandung konstanta, atau perkalian konstanta dengan variabel tunggal. Persamaan ini dikatakan linear sebab hubungan matematis ini dapat digambarkan sebagai garis lurus dalam Sistem koordinat Kartesius.
*** Persamaan Linier Satu Variabel
Bentuk umum Persamaan Linear Satu Variabel adalah

$$ax + b = 0$$

Contoh sistem persamaan linier dua variabel

$$10x + 2 = 22$$

Selesaikan dari persamaan diatas

```
> $& solve(10*x+2=22)
```

$$[x = 2]$$

*** Persamaan Linier Dua Variabel
Bentuk umum Persamaan Linear Dua Variabel adalah

$$Ax + By = C$$

Contoh sistem persamaan linier dua variabel

$$(i)x + 2y = 10$$

$$5x - 3y + 6 = -9x + 8y + 4$$

$$(ii)5x - 3y + 6 = 0, -9x + 8y + 4 = 0$$

Selesaikan sistem persamaan di atas

```
> $& solve([x+2*y=10,5*x-3*y+6=-9*x+8*y+4])
```

$$\left[\left[y = \frac{142}{39}, x = \frac{106}{39}\right]\right]$$

```
> $& solve([5*x-3*y+6=0 , -9*x+8*y+4=0])
```

$$\left[\left[y = -\frac{74}{13}, x = -\frac{60}{13}\right]\right]$$

*** Persamaan Linier Tiga Variabel
Bentuk umum Persamaan Linear Satu Variabel adalah

$$Ax + By + Cz = D$$

Contoh sistem persamaan linier tiga variabel
Jika diketahui sistem persamaan
a - 6b = -1 + 5c
a + c = b - 3a,
6 = 3c + b - 3a,
maka hasil kali semua x yang memenuhi persamaan
(x-4)(x^2-a^2)=(x+b)(x+c) adalah...
Selesaikan sistem persamaan di atas

```
> sol &= solve([7*a-6*b=-1+5*c,2*a+c=b-3*a,-6=3*c+b-3*a],[a,b,c])
```

```
[[a = 1, b = 3, c = - 2]]
```

Jabarkan bentuk polinomialnya

```
> $& showev('expand((x-4)*(x^2-a^2)=(x+b)*(x+c)))
```

$$\mathit{expand}\left((x-4)\;\left(x^2-a^2\right)=(x+b)\;(x+c)\right)=\left(x^3-4\,x^2-a^2\,x+4\,a^2=x^2+c\,x+b\,x+b\,c\right)$$

Subtitusi nilai a,b, dan c akan diperoleh

```
> $& showev('expand((x-4)*(x^2-a^2)=(x+b)*(x+c))) with a=1 with b=3 with c=-2
```

$$\mathit{expand}\left((x-4)\;\left(x^2-1\right)=(x-2)\;(x+3)\right)=\left(x^3-4\,x^2-x+4=x^2+x-6\right)$$

Kumpulkan di ruas kiri suku-suku yang sejenis

```
> $& (x^3-4*x^2-x+4=x^2+x-6)
```

$$x^3-4\,x^2-x+4=x^2+x-6$$

```
> $&(x^3-5*x^2-2*x+10=0)
```

$$x^3-5\,x^2-2\,x+10=0$$

merupakan polinomial berderajat 3 sehingga memiliki 3 akar-akar penyelesaian. Ditanyakan soal adalah hasil kali semua x yang memenuhi persamaan.
Jika di ketahui persamaan

$$ax^3+bx^2+cx+d$$

Hasil kali semua x yang memenuhi persamaan adalah

$$x1x2x3=\frac{-d}{a}$$

Persamaan

$$x^3 - 5x^2 - 2x + 10 = 0$$

a=1, b=-5, c=-2, d=10
Sehingga, hasil kali semua x yang memenuhi persamaan

$$x^3 - 5x^2 - 2x + 10 = 0$$

adalah

$$\frac{-d}{a} = \frac{-10}{1} = -10$$

Persamaan Logaritma

Persamaan logaritma adalah suatu persamaan matematis yang memuat variabel x di dalam fungsi logaritmanya (numerus).
Bentuk umum Logaritma

$$^a log_b = n$$

Dengan:
a = bilangan pokok atau basis
b = numerus
n = nilai logaritma
Pada persamaan logaritma, numerus memuat suatu variabel, misalnya x atau y
Bentuk umum Persamaan Logaritma

$$^a log f(x) =^a log g(x)$$

Dengan:
a = basis (bilangan pokok)
f(x) dan g(x) = numerus dalam bentuk fungsi
Agar suatu persamaan logaritma bisa terdefinisi, nilai numerus harus lebih besar dari nol. Artinya, solusi persamaan harus mengacu pada syarat tersebut.
Persamaan Logaritma Bentuk 1
image: Logaritma1.png
Contoh soal 1
Tentukan nilai x yang memenuhi persamaan

$$^3 log(2x^2 - x) = 1$$

Penyelesaian :

Persamaan Logaritma Bentuk 2
image: Logaritma2.png
Contoh soal 2
Tentukan nilai x yang memenuhi persamaan

$$^2 log(2x^2 - 6x - 7) =^3 log(2x^2 - 6x - 7)$$

Penyelesaian :

Persamaan Logaritma Bentuk 3
image: Logaritma3.png
Contoh soal 3
Tentukan nilai x yang memenuhi persamaan

$$^{5}log(2x^2+5x-10) =^{5} log(x^2-2x+18)$$

Penyelesaian :

Persamaan Logaritma Bentuk 4
image: Logaritma4.png
Contoh soal 4
Tentukan nilai x yang memenuhi persamaan

$$^{x^2-1}log(2x^2-2x+20) =^{x^2-1} log(x^2+6x+5)$$

Penyelesaian :

Persamaan Logaritma Bentuk 5
image: Logaritma5.png
Contoh soal 5
Tentukan nilai x yang memenuhi persamaan

$$^{3}log^{2}x-7^{3}logx+12=0$$

Penyelesaian :

```
>
```

Persamaan Kuadrat

Persamaan kuadrat disebut juga persamaan suku banyak atau polinomial. Persamaan kuadrat adalah sebuah persamaan dengan pangkat tinggi maksimal dua atau berorde dua.
Bentuk umum Persamaan Kuadrat adalah

$$ax^2+bx+c=0$$

Contoh soal 1
tentukan faktor dari

$$m^2+(m-2)m+2m-4=0$$

```
>$& solve((m^2+(m-2)*m+2*m-4=0))
```

$$\left[m=-\sqrt{2},m=\sqrt{2}\right]$$

Contoh soal 2
tentukan soal dari

$$5x^2+7x+10=0$$

```
>$& solve(5*x^2+7*x+10=0)
```

$$\left[x=\frac{-\sqrt{151}\,i-7}{10},x=\frac{\sqrt{151}\,i-7}{10}\right]$$

Persamaan Trigonometri

Persamaan trigonometri adalah persamaan matematika yang memuat fungsi trigonometri dari sudut yang belum diketahui nilainya. Persamaan ini mirip persamaan linear atau kuadrat. Yang membedakan antara trigonometri dengan yang lainnya adalah himpunan penyelesaiannya berupa besaran sudut.

```
> $& solve (sin(x)=1)
```

$$\left[x=\frac{\pi}{2}\right]$$

```
> $& solve(cos(x)=1)
```

$$[x=0]$$

```
> $& solve(2*cos(2*x-60°)- sqrt(3)=0)
```

$$\left[x=\frac{\pi}{4}\right]$$

```
> $& solve(tan(x-45°)=cot(90°))
```

$$\left[x=\frac{\pi}{4}\right]$$

```
> $& solve([sin(x+pi/4) = 0], [x])
```

$$\left[x=-\frac{\pi}{4}\right]$$

Persamaan Eksponensial

Persamaan eksponen adalah persamaan bilangan berpangkat yang memuat variabel di bagian pangkatnya. Oleh karena memuat suatu variabel, maka pangkatnya bisa dinyatakan sebagai suatu fungsi, misal f(x) atau g(x) untuk pangkat bervariabel x

Bentuk umum persamaan eksponen adalah

$$a^{f(x)} = a^{g(x)}$$

dengan

a = basis(bilangan pokok)

f(x) dan g(x) = pangkat atau eksponen

Contoh persamaan eksponen

$$32^{x-3} = 81^{x+5}$$

$$3^{x^2+5x+6}$$

$$2^{x+1} = 2^5$$

Sifat-sifat Persamaan Eksponen

image: sifat.png

Contoh soal persamaan eksponen

Soal 1

$$2^{x+1} = 2^4$$

Penyelesaian :

Identifikasi dahulu kedua basisnya. Jika basisnya sama, maka nilai pangkat basis pertama akan sama dengan pangkat basis kedua

```
> $& solve(x+1=4)
```

$$[x = 3]$$

Soal 2

$$2^{5x-2} = 2^{x+2}$$

Penyelesaian :

Identifikasi dahulu kedua basisnya. Jika basisnya sama, maka berlaku sifat kedua

```
> $& solve(5*x-2=x+2)
```

$$[x = 1]$$

Soal 3

$$4^{2x-6} = 5^{2x-6}$$

Penyelesaian :
Identifikasi dahulu kedua basisnya. Jika basisnya tidak sama, namun bentuk eksponennya sama, maka berlaku sifat ketiga

```
> $& solve(2*x-6=0)
```

$$[x = 3]$$

Soal 4
Tentukan himpunan dari

$$(x-6)^{6x} = (x-6)^{5x+1}$$

Penyelesaian:
Identifikasi dahulu kedua ruas. Akan berlaku sifat keempat

```
> function h(x):=x-6
> function f(x):=6*x
> function g(x):=5*x+1
```

Solusi 1

$$f(x) = g(x)$$

```
> $& solve((6*x)=(5*x+1))
```

$$[x = 1]$$

(memenuhi solusi)
Solusi 2

$$h(x) = 1$$

```
> $& solve(x-6=1)
```

$$[x = 7]$$

(memenuhi solusi)
Solusi 3

$$h(x) = -1$$

dengan syarat f(x) dan g(x) keduanya genap/ganjil

```
> $& solve(x-6=-1)
```

$$[x = 5]$$

Untuk x=5, maka

```
>f(5)
```

```
30
```

```
>g(5)
```

```
26
```

Karena keduanya genap maka x=5 memenuhi
Solusi 4

$$f(x) = 0$$

dengan syarat f(x) dan g(x) keduanya positif

```
> $& solve(x-6=0)
```

$$[x = 6]$$

Untuk x=6, maka

```
> f(6)
```

```
36
```

```
> g(6)
```

```
31
```

Pertidaksamaan dan Sistem Pertidaksamaan

1. Pertidaksamaan Linear (Pangkat Satu)

a. Pertidaksamaan linear satu variabel
Pertidaksamaan linear satu variabel merupakan bentuk pertidaksamaan dengan memuat satu peubah (variabel) dengan pangkat tertingginya adalah satu.
Bentuk umum

$$ax + b < c$$

$$ax + b > c$$

$$ax + b \leq c$$

$$ax + b \geq c$$

Contoh soal
Untuk menyelesaikan pertidaksamaan, EMT tidak akan dapat melakukannya,
melainkan dengan bantuan Maxima, artinya secara eksak (simbolik). Perintah Maxima yang digunakan adalah fourier_elim(), yang harus dipanggil dengan perintah "load(fourier_elim)" terlebih dahulu.

```
>&load(fourier_elim)
```

```
        C:/Program Files/Euler x64/maxima/share/maxima/5.35.1/share/f\
  ourier_elim/fourier_elim.lisp
```

```
>$&fourier_elim([x + 10 > 0],[x])
```

$$[-10 < x]$$

```
>$&fourier_elim([2*x > 15],[x])
```

$$\left[\frac{15}{2} < x\right]$$

```
>$&fourier_elim([3*x - 18 > 0 ],[x])
```

$$[6 < x]$$

---

b. Pertidaksamaan linear dua variabel
Pertidaksamaan linear dua variabel adalah bentuk pertidaksamaan yang memuat dua peubah (variabel) dengan pangkat tertinggi variabel tersebut adalah satu.
Bentuk umum

$$ax + by < c$$

$$ax + by > c$$

$$ax + by \leq c$$

$$ax + by \geq c$$

Contoh soal

```
>$&fourier_elim((x + y < 5) and (x - y > 0),[x,y])
```

$$\left[y < x, x < 5 - y, y < \frac{5}{2}\right]$$

```
>$&fourier_elim((y - x < 5) and (x - y < 15) and (10 < y),[x,y]) // sistem pertidaksamaan
```

$$[y - 5 < x, x < y + 15, 10 < y]$$

```
>$&fourier_elim((x + y < 9) and (x - y > 7),[x,y])
```

$$[y + 7 < x, x < 9 - y, y < 1]$$

2. Pertidaksamaan Kuadrat Pertidaksamaan kuadrat ialah

pertidaksamaan yang mempunyai variabel dimana pangkatnya memuat satu atau lebih perubahan serta relasi "lebih dari", "lebih dari atau sama dengan", "kurang dari", atau "kurang dari sama dengan".
Bentuk umum

$$ax^2 + bx + c > 0$$

$$ax^2 + bx + c < 0$$

$$ax^2 + bx + c \geq 0$$

$$ax^2 + bx + c \leq 0$$

Contoh soal

```
>&load (fourier_elim)
```

```
        C:/Program Files/Euler x64/maxima/share/maxima/5.35.1/share/f\
  ourier_elim/fourier_elim.lisp
```

$$x^2 + 9x + 20$$

```
>$& fourier_elim([x^2 + 9*x + 20 >= 0], [x])
```

$$[x = -5] \vee [x = -4] \vee [-4 < x] \vee [x < -5]$$

$$x^2 + 8x + 15$$

```
>$& fourier_elim([x^2 + 8*x + 15 > 0], [x])
```

$$[-3 < x] \vee [x < -5]$$

$$x^2 + 6x + 9$$

```
>$& fourier_elim([x^2 + 6*x + 9 > 0], [x])
```

$$[x < -3] \vee [-3 < x]$$

3. Pertidaksamaan Logaritma Pertidaksamaan logaritma adalah

---

pertidaksamaan yang memuat fungsi logaritma di dalamnya.
Bentuk umum

$$^{a}logf(x) <^{a} logg(x)$$

$$^{a}logf(x) >^{a} logg(x)$$

$$^{a}logf(x) \leq {}^{a}logg(x)$$

$$^{a}logf(x) \geq {}^{a}logg(x)$$

Konsep pertidaksamaan logaritma
a) Untuk a > 1, tanda ketaksamaannya tetap (tidak berubah)
b) Untuk a < 1, tanda ketaksamaannya berubah (dibalik)

Contoh soal

$$^{2}log(x + 1) > 3$$

$$^{2}log(x + 1) >^{2} log2^{3}$$

```
>$&fourier_elim ([x + 1 > 8], [x])
```

$$[7 < x]$$

$$^{\frac{1}{3}}log(2x - 3) \geq {}^{\frac{1}{3}}log(x + 1)$$

```
>$&fourier_elim ([2*x - 3 >= x + 1], [x])
```

$$[x = 4] \vee [4 < x]$$

karena a < 1 maka tanda ketaksamaannya berubah sehingga

$$x \geq 4$$

$$^2log(5x+3) <^2 log(x-2)$$

```
>$&fourier_elim ([5*x + 3 < x - 2], [x])
```

$$\left[x < -\frac{5}{4}\right]$$

4. Pertidaksamaan Trigonometri Pertidaksamaan trigonometri merupakan

pertidaksamaan yang mengandung fungsi-fungsi trigonometri, baik sinus, cosinus, tangen, cotangen, secan dan cosecan.
Contoh soal

$$2sinx \leq 1$$

```
>$& fourier_elim([2*sin(x)<=1],[x])
```

$$[2\,\sin x - 1 = 0] \vee [1 - 2\,\sin x > 0]$$

```
>$& solve (2*sin(x)-1=0)
```

$$\left[x = \frac{\pi}{6}\right]$$

```
>
```

$$2cos2x < 1$$

```
>$& fourier_elim([2*cos(2*x)< 1],[x])
```

$$[1 - 2\,\cos(2\,x) > 0]$$

$$tanx > -1$$

```
>$& fourier_elim([tan(x)> 1],[x])
```

$$[\tan x - 1 > 0]$$

5. Pertidaksamaan Eksponen Eksponen merupakan bentuk penulisan

bilangan berpangkat atau perkalian secara berulang sebanyak pangkatnya. Pertidaksamaan eksponen adalah bentuk pertidaksamaan pada bilangan berpangkat yang memuat variabel, seperti x.
Bentuk pertidaksamaan eksponen:
Secara umum, bentuk pertidaksamaan eksponen dibagi menjadi dua, yaitu sebagai berikut.
a) Jika bilangan pokok a > 1, untuk

$$a^{f(x)} < a^{g(x)} berlaku f(x) < g(x)$$

b) Jika bilangan pokok 0 < a < 1, untuk

$$a^{f(x)} < a^{g(x)} berlaku f(x) > g(x)$$

Contoh soal

$$27^{x-3} < 81^{x+5}$$

ubah bentuk eksponen menjadi basis 3 sehingga

$$3^{3(x-3)} < 3^{4(x+5)}$$

$$3^{(3x-9)} < 3^{(4x+20)}$$

karena basis sudah sama, selesaikan menggunakan bantuan emt

```
>$&fourier_elim ([3*x-9 < 4*x+20],[x])
```

$$[-29 < x]$$

$$2^{2x+3} > 8^{x-5}$$

ubah bentuk ekspnen menjadi basis 2 sehingga

$$2^{(2x+3)} < 2^{3(x-5)}$$

$$2^{(2x+3)} < 2^{(3x-15)}$$

karena basis sudah sama, selesaikan menggunakan bantuan emt

```
>$&fourier_elim ([2*x+3 < 3*x-15],[x])
```

$$[18 < x]$$

$$\frac{2}{3}^{5x-7} < \frac{2}{3}^{x-2}$$

```
>$&fourier_elim ([5*x-7 < x+2],[x])
```

$$\left[x < \frac{9}{4}\right]$$

karena 0 < a < 1, maka tanda pertidaksamaan dibalik. sehingga

$$x > \frac{9}{4}$$

Menggunakan aljabar

* untuk menyelesaikan masalah sehari-hari

Soal 1

Seorang petani ingin menghitung total luas lahan pertanian yang akan dia tanami dengan dua jenis tanaman berbeda: jagung dan kacang hijau. Dia memiliki bidang persegi panjang dengan panjang 100 meter dan lebar 50 meter. Dia ingin menanam jagung di setengah bidang tersebut dan kacang hijau di setengah sisanya. Luas tanah yang akan ditanami jagung adalah berapa meter persegi?

$$Panjang = 100$$

$$Lebar = 50$$

```
>panjang = 100;
>lebar = 50;
>$&LuasTotal = 100 * 50
```

$$LuasTotal = 5000$$

Luas tanah yang akan ditanami jagung (setengahnya)

```
>$&LuasJagung = 5000/2
```

$$LuasJagung = 2500$$

Luas tanah yang akan ditanami jagung adalah 2500 meter persegi.

Soal 2

Seorang investor ingin menghitung berapa jumlah uang yang akan dia miliki setelah menanam sejumlah uang dalam rekening tabungan dengan suku bunga tertentu selama beberapa tahun. Jika dia menanam Rp. 5,000,000 di rekening tabungan dengan suku bunga tahunan sebesar 5%, berapa jumlah uang yang akan dia miliki setelah 3 tahun?

$$SukuBunga = 0.05$$

$$JumlahTahun = 3$$

$$JumlahAwal = Rp.5,000,000$$

$$JumlahAkhir = JumlahAwal * (1 + SukuBunga)^{JumlahTahun}$$

```
>$& JumlahAkhir = 5000000*(1+0.05)^3
```

$$JumlahAkhir = 5788125.000000001$$

Jumlah uang yang akan dimiliki investor setelah 3 tahun adalah Rp. 5,788,125
Soal 3
Harga 3 buah buku dan 5 pensil adalah Rp. 42.000,00. Jika harga sebuah buku adalah 3 kali harga sebuah pensil.
Tentukanlah harga masing-masing pensil dan buku !

$$Harga1Pensil = x$$

$$Harga5Pensil = 5x$$

$$Harga3Buku = 9x$$

$$9x + 5x = 42.000$$

```
>$&HargaPensil = 42000/14
```

$$HargaPensil = 3000$$

```
>$&HargaBuku = 3*3000
```

$$HargaBuku = 9000$$

Jadi,
Harga sebuah pensil adalah Rp 3.000,00
Harga sebuah buku adalah 3 x Rp 3.000,00 adalah Rp.9.000,00
Karena keduanya positif, maka x = 6 memenuhi.
Jadi, hasil dari himpunan adalah HP = {1, 5, 6, 7}

```
>
```

BAB 3

KB PEKAN 5-6: MENGGUNAKAN EMT UNTUK MENGAMBAR GRAFIK 2 DIMENSI (2D)

[a4paper,10pt]article eumat

Nama : Dimas Oki Sriwijaya Saputra
Kelas : Matematika E
NIM : 22305141053

Menggambar Grafik 2D dengan EMT

Notebook ini menjelaskan tentang cara menggambar berbagaikurva dan grafik 2D dengan software EMT. EMT menyediakan fungsi plot2d() untuk menggambar berbagai kurva dan grafik dua dimensi (2D).

Plot Dasar

Ada fungsi yang sangat mendasar dari plot. Ada koordinat layar, yang selalu berkisar dari 0 hingga 1024 di setiap sumbu, tidak peduli apakah layarnya persegi atau tidak. Semut ada koordinat plot, yang dapat diatur dengan setplot(). Pemetaan antara koordinat tergantung pada jendela plot saat ini. Misalnya, shrinkwindow() default menyisakan ruang untuk label sumbu dan judul plot.
Dalam contoh, kita hanya menggambar beberapa garis acak dalam berbagai warna. Untuk detail tentang fungsi ini, pelajari fungsi inti EMT.

```
>clg; // clear screen
>window(0,0,1024,1024); // use all of the window
>setplot(0,1,0,1); // set plot coordinates
>hold on; // start overwrite mode
>n=100; X=random(n,2); Y=random(n,2);  // get random points
>colors=rgb(random(n),random(n),random(n)); // get random colors
>loop 1 to n; color(colors[#]); plot(X[#],Y[#]); end; // plot
>hold off; // end overwrite mode
>insimg; // insert to notebook
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-001.png

```
>reset;
```

Grafik perlu ditahan, karena perintah plot() akan menghapus jendela plot.
Untuk menghapus semua yang kami lakukan, kami menggunakan reset().
Untuk menampilkan gambar hasil plot di layar notebook, perintah plot2d() dapat diakhiri dengan titik dua (:). Cara lain adalah perintah plot2d() diakhiri dengan titik koma (;), kemudian menggunakan perintah insimg() untuk menampilkan gambar hasil plot.
Untuk contoh lain, kami menggambar plot sebagai sisipan di plot lain. Ini dilakukan dengan mendefinisikan jendela plot yang lebih kecil. Perhatikan bahwa jendela ini tidak menyediakan ruang untuk label sumbu di luar jendela plot. Kita harus menambahkan beberapa margin untuk ini sesuai kebutuhan. Perhatikan bahwa kami menyimpan dan memulihkan jendela penuh, dan menahan plot saat ini saat kami memplot inset.

```
>plot2d("x^3-x");
>xw=200; yw=100; ww=300; hw=300;
>ow=window();
>window(xw,yw,xw+ww,yw+hw);
>hold on;
>barclear(xw-50,yw-10,ww+60,ww+60);
>plot2d("x^4-x",grid=6):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-002.png

```
>hold off;
>window(ow);
```

Plot dengan banyak angka dicapai dengan cara yang sama. Ada fungsi figure() utilitas untuk ini.

Aspek Plot

Plot default menggunakan jendela plot persegi. Anda dapat mengubah ini dengan fungsi aspek(). Jangan lupa untuk mengatur ulang aspek nanti. Anda juga dapat mengubah default ini di menu dengan "Set Aspect" ke rasio aspek tertentu atau ke ukuran jendela grafis saat ini.
Tetapi Anda juga dapat mengubahnya untuk satu plot. Untuk ini, ukuran area plot saat ini diubah, dan jendela diatur sehingga label memiliki cukup ruang.

```
>aspect(2); // rasio panjang dan lebar 2:1
>plot2d(["sin(x)","cos(x)"],0,2pi):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-003.png

```
>aspect();
>reset;
```

Fungsi reset() mengembalikan default plot termasuk rasio aspek.

Plot 2D di Euler

EMT Math Toolbox memiliki plot dalam 2D, baik untuk data maupun fungsi. EMT menggunakan fungsi plot2d. Fungsi ini dapat memplot fungsi dan data.
Dimungkinkan untuk membuat plot di Maxima menggunakan Gnuplot atau dengan Python menggunakan Math Plot Lib.
Euler dapat memplot plot 2D dari
- ekspresi
- fungsi, variabel, atau kurva parameter,
- vektor nilai x-y,
- awan titik di pesawat,
- kurva implisit dengan level atau wilayah level.
- Fungsi kompleks

Gaya plot mencakup berbagai gaya untuk garis dan titik, plot batang dan plot berbayang.

Plot Ekspresi atau Variabel

Ekspresi tunggal dalam "x" (mis. "4*x^2") atau nama fungsi (mis. "f") menghasilkan grafik fungsi.
Berikut adalah contoh paling dasar, yang menggunakan rentang default dan menetapkan rentang y yang tepat agar sesuai dengan plot fungsi.
Catatan: Jika Anda mengakhiri baris perintah dengan titik dua ":", plot akan dimasukkan ke dalam jendela teks. Jika tidak, tekan TAB untuk melihat plot jika jendela plot tertutup.

```
>plot2d("x^2"):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-004.png

```
>aspect(1.5); plot2d("x^3-x"):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-005.png

```
>a:=5.6; plot2d("exp(-a*x^2)/a"); insimg(30); // menampilkan gambar hasil plot setinggi 25
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-006.png

Dari beberapa contoh sebelumnya Anda dapat melihat bahwa aslinya gambar plot menggunakan sumbu X dengan rentang nilai dari -2 sampai dengan 2. Untuk mengubah rentang nilai X dan Y, Anda dapat menambahkan nilai-nilai batas X (dan Y) di belakang ekspresi yang digambar.
The plot range is set with the following assigned parameters
- a,b: x-range (default -2,2)
- c,d: y-range (default: scale with values)
- r: alternatively a radius around the plot center
- cx,cy: the coordinates of the plot center (default 0,0)

```
>plot2d("x^3-x",-1,2):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-007.png

```
>plot2d("sin(x)",-2*pi,2*pi): // plot sin(x) pada interval [-2pi, 2pi]
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-008.png

```
>plot2d("cos(x)","sin(3*x)",xmin=0,xmax=2pi):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-009.png

Alternatif untuk titik dua adalah perintah insimg(baris), yang menyisipkan plot yang menempati sejumlah baris teks tertentu.
Dalam opsi, plot dapat diatur untuk muncul
- di jendela terpisah yang dapat diubah ukurannya,
- di jendela buku catatan.

Lebih banyak gaya dapat dicapai dengan perintah plot tertentu.
Bagaimanapun, tekan tombol tabulator untuk melihat plot, jika disembunyikan.
Untuk membagi jendela menjadi beberapa plot, gunakan perintah figure(). Dalam contoh, kami memplot x^1 hingga x^4 menjadi 4 bagian jendela. figure(0) mengatur ulang jendela default.

```
>reset;
>figure(2,2); ...
>for n=1 to 4; figure(n); plot2d("x^"+n); end; ...
>figure(0):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-010.png

Di plot2d(), ada gaya alternatif yang tersedia dengan grid=x. Untuk gambaran umum, kami menunjukkan berbagai gaya kisi dalam satu gambar (lihat di bawah untuk perintah figure()). Gaya kisi=0 tidak disertakan. Ini menunjukkan tidak ada grid dan tidak ada bingkai.

```
>figure(3,3); ...
>for k=1:9; figure(k); plot2d("x^3-x",-2,1,grid=k); end; ...
>figure(0):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-011.png

Jika argumen ke plot2d() adalah ekspresi yang diikuti oleh empat angka, angka-angka ini adalah rentang x dan y untuk plot.
Atau, a, b, c, d dapat ditentukan sebagai parameter yang ditetapkan sebagai a=... dll.
Dalam contoh berikut, kita mengubah gaya kisi, menambahkan label, dan menggunakan label vertikal untuk sumbu y.

```
>aspect(1.5); plot2d("sin(x)",0,2pi,-1.2,1.2,grid=3,xl="x",yl="sin(x)"):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-012.png

```
>plot2d("sin(x)+cos(2*x)",0,4pi):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-013.png

Gambar yang dihasilkan dengan memasukkan plot ke dalam jendela teks disimpan di direktori yang sama dengan buku catatan, secara default di subdirektori bernama "gambar". Mereka juga digunakan oleh ekspor HTML.

Anda cukup menandai gambar apa saja dan menyalinnya ke clipboard dengan Ctrl-C. Tentu saja, Anda juga dapat mengekspor grafik saat ini dengan fungsi di menu File.

Fungsi atau ekspresi dalam plot2d dievaluasi secara adaptif. Untuk kecepatan lebih, matikan plot adaptif dengan <adaptive dan tentukan jumlah subinterval dengan n=... Ini hanya diperlukan dalam kasus yang jarang terjadi.

```
>plot2d("sign(x)*exp(-x^2)",-1,1,<adaptive,n=10000):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-014.png

```
>plot2d("x^x",r=1.2,cx=1,cy=1):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-015.png

Perhatikan bahwa x^x tidak didefinisikan untuk x<=0. Fungsi plot2d menangkap kesalahan ini, dan mulai merencanakan segera setelah fungsi didefinisikan. Ini berfungsi untuk semua fungsi yang mengembalikan NAN keluar dari jangkauan definisinya.

```
>plot2d("log(x)",-0.1,2):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-016.png

Parameter square=true (atau >square) memilih y-range secara otomatis sehingga hasilnya adalah jendela plot persegi. Perhatikan bahwa secara default, Euler menggunakan ruang persegi di dalam jendela plot.

```
>plot2d("x^3-x",>square):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-017.png

```
>plot2d(''integrate("sin(x)*exp(-x^2)",0,x)'',0,2): // plot integral
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-018.png

Jika Anda membutuhkan lebih banyak ruang untuk label-y, panggil shrinkwindow() dengan parameter yang lebih kecil, atau tetapkan nilai positif untuk "lebih kecil" di plot2d().

```
>plot2d("gamma(x)",1,10,yl="y-values",smaller=6,<vertical):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-019.png

Ekspresi simbolik juga dapat digunakan, karena disimpan sebagai ekspresi string sederhana.

```
>x=linspace(0,2pi,1000); plot2d(sin(5x),cos(7x)):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-020.png

```
>a:=5.6; expr &= exp(-a*x^2)/a; // define expression
>plot2d(expr,-2,2): // plot from -2 to 2
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-021.png

```
>plot2d(expr,r=1,thickness=2): // plot in a square around (0,0)
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-022.png

```
>plot2d(&diff(expr,x),>add,style="--",color=red): // add another plot
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-023.png

```
>plot2d(&diff(expr,x,2),a=-2,b=2,c=-2,d=1): // plot in rectangle
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-024.png

```
>plot2d(&diff(expr,x),a=-2,b=2,>square): // keep plot square
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-025.png

```
>plot2d("x^2",0,1,steps=1,color=red,n=10):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-026.png

```
>plot2d("x^2",>add,steps=2,color=blue,n=10):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-027.png

Fungsi dalam satu Parameter

Fungsi plot yang paling penting untuk plot planar adalah plot2d(). Fungsi ini diimplementasikan dalam bahasa Euler dalam file "plot.e", yang dimuat di awal program.
Berikut adalah beberapa contoh menggunakan fungsi. Seperti biasa di EMT, fungsi yang berfungsi untuk fungsi atau ekspresi lain, Anda dapat meneruskan parameter tambahan (selain x) yang bukan variabel global ke fungsi dengan parameter titik koma atau dengan koleksi panggilan.

```
>function f(x,a) := x^2/a+a*x^2-x; // define a function
>a=0.3; plot2d("f",0,1;a): // plot with a=0.3
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-028.png

```
>plot2d("f",0,1;0.4): // plot with a=0.4
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-029.png

```
>plot2d({{"f",0.2}},0,1): // plot with a=0.2
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-030.png

```
>plot2d({{"f(x,b)",b=0.1}},0,1): // plot with 0.1
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-031.png

```
>function f(x) := x^3-x; ...
>plot2d("f",r=1):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-032.png

Berikut adalah ringkasan dari fungsi yang diterima
- ekspresi atau ekspresi simbolik dalam x
- fungsi atau fungsi simbolis dengan nama sebagai "f"
- fungsi simbolis hanya dengan nama f

Fungsi plot2d() juga menerima fungsi simbolis. Untuk fungsi simbolis, nama saja yang berfungsi.

```
>function f(x) &= diff(x^x,x)
```

```
                                   x
                                  x   (log(x) + 1)
```

```
>plot2d(f,0,2):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-033.png

Tentu saja, untuk ekspresi atau ekspresi simbolik, nama variabel sudah cukup untuk memplotnya.

```
>expr &= sin(x)*exp(-x)
```

```
                                 - x
                                E    sin(x)
```

```
>plot2d(expr,0,3pi):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-034.png

```
>function f(x) &= x^x;
>plot2d(f,r=1,cx=1,cy=1,color=blue,thickness=2);
>plot2d(&diff(f(x),x),>add,color=red,style="-.-"):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-035.png

Untuk gaya garis ada berbagai pilihan.
- gaya="...". Pilih dari "-", "–", "-.", ".", ".-.", "-.-".
- warna: Lihat di bawah untuk warna.
- ketebalan: Default adalah 1.

Warna dapat dipilih sebagai salah satu warna default, atau sebagai warna RGB.
- 0.15: indeks warna default.
- konstanta warna: putih, hitam, merah, hijau, biru, cyan, zaitun, abu-abu muda, abu-abu, abu-abu tua, oranye, hijau muda, pirus, biru muda, oranye terang, kuning
- rgb(merah, hijau, biru): parameter adalah real dalam [0,1].

```
>plot2d("exp(-x^2)",r=2,color=red,thickness=3,style="--"):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-036.png

Berikut adalah tampilan warna EMT yang telah ditentukan sebelumnya.

```
>aspect(2); columnsplot(ones(1,16),lab=0:15,grid=0,color=0:15):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-037.png

Tapi Anda bisa menggunakan warna apa saja.

```
>columnsplot(ones(1,16),grid=0,color=rgb(0,0,linspace(0,1,15))):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-038.png

Menggambar Beberapa Kurva pada bidang koordinat yang sama

Plot lebih dari satu fungsi (multiple function) ke dalam satu jendela dapat dilakukan dengan berbagai cara. Salah satu metode menggunakan >add untuk beberapa panggilan ke plot2d secara keseluruhan, tetapi panggilan pertama. Kami telah menggunakan fitur ini dalam contoh di atas.

```
>aspect(); plot2d("cos(x)",r=2,grid=6); plot2d("x",style=".",>add):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-039.png

```
>aspect(1.5); plot2d("sin(x)",0,2pi); plot2d("cos(x)",color=blue,style="--",>add):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-040.png

Salah satu kegunaan >add adalah untuk menambahkan titik pada kurva.

```
>plot2d("sin(x)",0,pi); plot2d(2,sin(2),>points,>add):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-041.png

Kami menambahkan titik persimpangan dengan label (pada posisi "cl" untuk kiri tengah), dan memasukkan hasilnya ke dalam notebook. Kami juga menambahkan judul ke plot.

```
>plot2d(["cos(x)","x"],r=1.1,cx=0.5,cy=0.5, ...
>  color=[black,blue],style=["-","."], ...
>  grid=1);
>x0=solve("cos(x)-x",1);  ...
>  plot2d(x0,x0,>points,>add,title="Intersection Demo");  ...
>  label("cos(x) = x",x0,x0,pos="cl",offset=20):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-042.png

Dalam demo berikut, kami memplot fungsi sinc(x)=sin(x)/x dan ekspansi Taylor ke-8 dan ke-16. Kami menghitung ekspansi ini menggunakan Maxima melalui ekspresi simbolis.
Plot ini dilakukan dalam perintah multi-baris berikut dengan tiga panggilan ke plot2d(). Yang kedua dan yang ketiga memiliki set flag >add, yang membuat plot menggunakan rentang sebelumnya.
Kami menambahkan kotak label yang menjelaskan fungsi.

```
>$taylor(sin(x)/x,x,0,4)
```

$$\frac{x^4}{120} - \frac{x^2}{6} + 1$$

```
>plot2d("sinc(x)",0,4pi,color=green,thickness=2); ...
>  plot2d(&taylor(sin(x)/x,x,0,8),>add,color=blue,style="--"); ...
>  plot2d(&taylor(sin(x)/x,x,0,16),>add,color=red,style="-.-"); ...
>  labelbox(["sinc","T8","T16"],styles=["-","--","-.-"], ...
>    colors=[black,blue,red]):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-044.png

Dalam contoh berikut, kami menghasilkan Bernstein-Polinomial.

$$B_i(x) = \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}$$

```
>plot2d("(1-x)^10",0,1); // plot first function
>for i=1 to 10; plot2d("bin(10,i)*x^i*(1-x)^(10-i)",>add); end;
>insimg;
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-045.png

Metode kedua menggunakan pasangan matriks nilai-x dan matriks nilai-y yang berukuran sama.
Kami menghasilkan matriks nilai dengan satu Polinomial Bernstein di setiap baris. Untuk ini, kita cukup menggunakan vektor kolom i. Lihat pengantar tentang bahasa matriks untuk mempelajari lebih detail.

```
>x=linspace(0,1,500);
>n=10; k=(0:n)'; // n is row vector, k is column vector
>y=bin(n,k)*x^k*(1-x)^(n-k); // y is a matrix then
>plot2d(x,y):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-046.png

Perhatikan bahwa parameter warna dapat berupa vektor. Kemudian setiap warna digunakan untuk setiap baris matriks.

```
>x=linspace(0,1,200); y=x^(1:10)'; plot2d(x,y,color=1:10):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-047.png

Metode lain adalah menggunakan vektor ekspresi (string). Anda kemudian dapat menggunakan larik warna, larik gaya, dan larik ketebalan dengan panjang yang sama.

```
>plot2d(["sin(x)","cos(x)"],0,2pi,color=4:5):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-048.png

```
>plot2d(["sin(x)","cos(x)"],0,2pi): // plot vector of expressions
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-049.png

Kita bisa mendapatkan vektor seperti itu dari Maxima menggunakan makelist() dan mxm2str().

```
>v &= makelist(binomial(10,i)*x^i*(1-x)^(10-i),i,0,10) // make list
```

```
                10             9               8   2              7   3
         [(1 - x)  , 10 (1 - x)  x, 45 (1 - x)  x , 120 (1 - x)  x ,
             6   4                5   5              4   6              3   7
  210 (1 - x)  x , 252 (1 - x)  x , 210 (1 - x)  x , 120 (1 - x)  x ,
            2   8                 9    10
  45 (1 - x)  x , 10 (1 - x) x , x   ]
```

```
>mxm2str(v) // get a vector of strings from the symbolic vector
```

```
(1-x)^10
10*(1-x)^9*x
45*(1-x)^8*x^2
120*(1-x)^7*x^3
210*(1-x)^6*x^4
252*(1-x)^5*x^5
210*(1-x)^4*x^6
120*(1-x)^3*x^7
45*(1-x)^2*x^8
10*(1-x)*x^9
x^10
```

```
>plot2d(mxm2str(v),0,1): // plot functions
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-050.png

Alternatif lain adalah dengan menggunakan bahasa matriks Euler.
Jika ekspresi menghasilkan matriks fungsi, dengan satu fungsi di setiap baris, semua fungsi ini akan diplot ke dalam satu plot.
Untuk ini, gunakan vektor parameter dalam bentuk vektor kolom. Jika array warna ditambahkan, itu akan digunakan untuk setiap baris plot.

```
>n=(1:10)'; plot2d("x^n",0,1,color=1:10):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-051.png

Ekspresi dan fungsi satu baris dapat melihat variabel global.
Jika Anda tidak dapat menggunakan variabel global, Anda perlu menggunakan fungsi dengan parameter tambahan, dan meneruskan parameter ini sebagai parameter titik koma.
Berhati-hatilah, untuk meletakkan semua parameter yang ditetapkan di akhir perintah plot2d. Dalam contoh kita meneruskan a=5 ke fungsi f, yang kita plot dari -10 hingga 10.

```
>function f(x,a) := 1/a*exp(-x^2/a); ...
>plot2d("f",-10,10;5,thickness=2,title="a=5"):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-052.png

Atau, gunakan koleksi dengan nama fungsi dan semua parameter tambahan. Daftar khusus ini disebut koleksi panggilan, dan itu adalah cara yang lebih disukai untuk meneruskan argumen ke fungsi yang dengan sendirinya diteruskan sebagai argumen ke fungsi lain.
Dalam contoh berikut, kami menggunakan loop untuk memplot beberapa fungsi (lihat tutorial tentang pemrograman untuk loop).

```
>plot2d({{"f",1}},-10,10); ...
>for a=2:10; plot2d({{"f",a}},>add); end:
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-053.png

Kami dapat mencapai hasil yang sama dengan cara berikut menggunakan bahasa matriks EMT. Setiap baris matriks f(x,a) adalah satu fungsi. Selain itu, kita dapat mengatur warna untuk setiap baris matriks. Klik dua kali pada fungsi getspectral() untuk penjelasannya.

```
>x=-10:0.01:10; a=(1:10)'; plot2d(x,f(x,a),color=getspectral(a/10)):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-054.png

Label Teks

Dekorasi sederhana bisa
- judul dengan judul="..."
- x- dan y-label dengan xl="...", yl="..."
- label teks lain dengan label("...",x,y)

Perintah label akan memplot ke dalam plot saat ini pada koordinat plot (x,y). Itu bisa mengambil argumen posisi.

```
>plot2d("x^3-x",-1,2,title="y=x^3-x",yl="y",xl="x"):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-055.png

```
>expr := "log(x)/x"; ...
>  plot2d(expr,0.5,5,title="y="+expr,xl="x",yl="y"); ...
>  label("(1,0)",1,0); label("Max",E,expr(E),pos="lc"):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-056.png

Ada juga fungsi labelbox(), yang dapat menampilkan fungsi dan teks. Dibutuhkan vektor string dan warna, satu item untuk setiap fungsi.

```
>function f(x) &= x^2*exp(-x^2);  ...
>plot2d(&f(x),a=-3,b=3,c=-1,d=1);  ...
>plot2d(&diff(f(x),x),>add,color=blue,style="--"); ...
>labelbox(["function","derivative"],styles=["-","--"], ...
>   colors=[black,blue],w=0.4):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-057.png

Kotak ditambatkan di kanan atas secara default, tetapi > kiri menambatkannya di kiri atas. Anda dapat memindahkannya ke tempat yang Anda suka. Posisi jangkar adalah sudut kanan atas kotak, dan angkanya adalah pecahan dari ukuran jendela grafik. Lebarnya otomatis.

Untuk plot titik, kotak label juga berfungsi. Tambahkan parameter >points, atau vektor flag, satu untuk setiap label.

Dalam contoh berikut, hanya ada satu fungsi. Jadi kita bisa menggunakan string sebagai pengganti vektor string. Kami mengatur warna teks menjadi hitam untuk contoh ini.

```
>n=10; plot2d(0:n,bin(n,0:n),>addpoints); ...
>labelbox("Binomials",styles="[]",>points,x=0.1,y=0.1, ...
>tcolor=black,>left):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-058.png

Gaya plot ini juga tersedia di statplot(). Seperti di plot2d() warna dapat diatur untuk setiap baris plot. Ada lebih banyak plot khusus untuk keperluan statistik (lihat tutorial tentang statistik).

```
>statplot(1:10,random(2,10),color=[red,blue]):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-059.png

Fitur serupa adalah fungsi textbox().
Lebar secara default adalah lebar maksimal dari baris teks. Tapi itu bisa diatur oleh pengguna juga.

```
>function f(x) &= exp(-x)*sin(2*pi*x); ...
>plot2d("f(x)",0,2pi); ...
>textbox(latex("\text{Example of a damped oscillation}\ f(x)=e^{-x}sin(2\pi x)"),w=0.85):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-060.png

Label teks, judul, kotak label, dan teks lainnya dapat berisi string Unicode (lihat sintaks EMT untuk mengetahui lebih lanjut tentang string Unicode).

```
>plot2d("x^3-x",title=u"x &rarr; x&sup3; - x"):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-061.png

Label pada sumbu x dan y bisa vertikal, begitu juga sumbunya.

```
>plot2d("sinc(x)",0,2pi,xl="x",yl=u"x &rarr; sinc(x)",>vertical):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-062.png

LaTeX

Anda juga dapat memplot rumus LaTeX jika Anda telah menginstal sistem LaTeX. Saya merekomendasikan MiKTeX. Jalur ke biner "lateks" dan "dvipng" harus berada di jalur sistem, atau Anda harus mengatur LaTeX di menu opsi.
Perhatikan, bahwa penguraian LaTeX lambat. Jika Anda ingin menggunakan LaTeX dalam plot animasi, Anda harus memanggil latex() sebelum loop sekali dan menggunakan hasilnya (gambar dalam matriks RGB).
Dalam plot berikut, kami menggunakan LaTeX untuk label x dan y, label, kotak label, dan judul plot.

```
>plot2d("exp(-x)*sin(x)/x",a=0,b=2pi,c=0,d=1,grid=6,color=blue, ...
>  title=latex("\text{Function $\Phi$}"), ...
>  xl=latex("\phi"),yl=latex("\Phi(\phi)")); ...
>textbox( ...
>  latex("\Phi(\phi) = e^{-\phi} \frac{\sin(\phi)}{\phi}"),x=0.8,y=0.5); ...
>label(latex("\Phi",color=blue),1,0.4):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-063.png

Seringkali, kami menginginkan spasi dan label teks non-konformal pada sumbu x. Kita dapat menggunakan xaxis() dan yaxis() seperti yang akan kita tunjukkan nanti.
Cara termudah adalah dengan membuat plot kosong dengan bingkai menggunakan grid=4, lalu menambahkan grid dengan ygrid() dan xgrid(). Dalam contoh berikut, kami menggunakan tiga string LaTeX untuk label pada sumbu x dengan xtick().

```
>plot2d("sinc(x)",0,2pi,grid=4,<ticks); ...
>ygrid(-2:0.5:2,grid=6); ...
>xgrid([0:2]*pi,<ticks,grid=6);  ...
>xtick([0,pi,2pi],["0","\pi","2\pi"],>latex):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-064.png

Tentu saja, fungsi juga dapat digunakan.

```
>function map f(x) ...
```

```
if x>0 then return x^4
else return x^2
endif
endfunction
```

Parameter "peta" membantu menggunakan fungsi untuk vektor. Untuk plot, itu tidak perlu. Tetapi untuk mendemonstrasikan vektorisasi itu berguna, kami menambahkan beberapa poin kunci ke plot di x=-1, x=0 dan x=1.
Pada plot berikut, kami juga memasukkan beberapa kode LaTeX. Kami menggunakannya untuk dua label dan kotak teks. Tentu saja, Anda hanya akan dapat menggunakan LaTeX jika Anda telah menginstal LaTeX dengan benar.

```
>plot2d("f",-1,1,xl="x",yl="f(x)",grid=6);  ...
>plot2d([-1,0,1],f([-1,0,1]),>points,>add); ...
>label(latex("x^3"),0.72,f(0.72)); ...
>label(latex("x^2"),-0.52,f(-0.52),pos="ll"); ...
>textbox( ...
>  latex("f(x)=\begin{cases} x^3 & x>0 \\ x^2 & x \le 0\end{cases}"), ...
>  x=0.7,y=0.2):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-065.png

Interaksi pengguna

Saat memplot fungsi atau ekspresi, parameter >user memungkinkan pengguna untuk memperbesar dan menggeser plot dengan tombol kursor atau mouse. Pengguna dapat
- perbesar dengan + atau -
- pindahkan plot dengan tombol kursor
- pilih jendela plot dengan mouse
- atur ulang tampilan dengan spasi
- keluar dengan kembali
Tombol spasi akan mengatur ulang plot ke jendela plot asli.
Saat memplot data, flag >user hanya akan menunggu penekanan tombol.

```
>plot2d({{"x^3-a*x",a=1}},>user,title="Press any key!"):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-066.png

```
>plot2d("exp(x)*sin(x)",user=true, ...
>  title="+/- or cursor keys (return to exit)"):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-067.png

Berikut ini menunjukkan cara interaksi pengguna tingkat lanjut (lihat tutorial tentang pemrograman untuk detailnya).

Fungsi bawaan mousedrag() menunggu event mouse atau keyboard. Ini melaporkan mouse ke bawah, mouse dipindahkan atau mouse ke atas, dan penekanan tombol. Fungsi dragpoints() memanfaatkan ini, dan memungkinkan pengguna menyeret titik mana pun dalam plot.

Kita membutuhkan fungsi plot terlebih dahulu. Sebagai contoh, kita interpolasi dalam 5 titik dengan polinomial. Fungsi harus diplot ke area plot tetap.

```
>function plotf(xp,yp,select) ...
```

```
    d=interp(xp,yp);
    plot2d("interpval(xp,d,x)";d,xp,r=2);
    plot2d(xp,yp,>points,>add);
    if select>0 then
      plot2d(xp[select],yp[select],color=red,>points,>add);
    endif;
    title("Drag one point, or press space or return!");
  endfunction
```

Perhatikan parameter titik koma di plot2d (d dan xp), yang diteruskan ke evaluasi fungsi interp(). Tanpa ini, kita harus menulis fungsi plotinterp() terlebih dahulu, mengakses nilai secara global.
Sekarang kita menghasilkan beberapa nilai acak, dan membiarkan pengguna menyeret poin.

```
>t=-1:0.5:1; dragpoints("plotf",t,random(size(t))-0.5):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-068.png

Ada juga fungsi, yang memplot fungsi lain tergantung pada vektor parameter, dan memungkinkan pengguna menyesuaikan parameter ini.
Pertama kita membutuhkan fungsi plot.

```
>function plotf([a,b]) := plot2d("exp(a*x)*cos(2pi*b*x)",0,2pi;a,b);
```

Kemudian kita membutuhkan nama untuk parameter, nilai awal dan matriks rentang nx2, opsional baris judul.
Ada slider interaktif, yang dapat mengatur nilai oleh pengguna. Fungsi dragvalues() menyediakan ini.

```
>dragvalues("plotf",["a","b"],[-1,2],[[-2,2];[1,10]], ...
>  heading="Drag these values:",hcolor=black):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-069.png

Dimungkinkan untuk membatasi nilai yang diseret ke bilangan bulat. Sebagai contoh, kita menulis fungsi plot, yang memplot polinomial Taylor derajat n ke fungsi kosinus.

```
>function plotf(n) ...
```

```
  plot2d("cos(x)",0,2pi,>square,grid=6);
  plot2d(&"taylor(cos(x),x,0,@n)",color=blue,>add);
  textbox("Taylor polynomial of degree "+n,0.1,0.02,style="t",>left);
  endfunction
```

Sekarang kami mengizinkan derajat n bervariasi dari 0 hingga 20 dalam 20 pemberhentian. Hasil dragvalues() digunakan untuk memplot sketsa dengan n ini, dan untuk memasukkan plot ke dalam buku catatan.

```
>nd=dragvalues("plotf","degree",2,[0,20],20,y=0.8, ...
>   heading="Drag the value:"); ...
>plotf(nd):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-070.png

Berikut ini adalah demonstrasi sederhana dari fungsi tersebut. Pengguna dapat menggambar di atas jendela plot, meninggalkan jejak poin.

```
>function dragtest ...
```

```
    plot2d(none,r=1,title="Drag with the mouse, or press any key!");
    start=0;
    repeat
      {flag,m,time}=mousedrag();
      if flag==0 then return; endif;
      if flag==2 then
        hold on; mark(m[1],m[2]); hold off;
      endif;
    end
  endfunction
```

```
>dragtest // lihat hasilnya dan cobalah lakukan!
```

Gaya Plot 2D

Secara default, EMT menghitung tick sumbu otomatis dan menambahkan label ke setiap tick. Ini dapat diubah dengan parameter grid. Gaya default sumbu dan label dapat dimodifikasi. Selain itu, label dan judul dapat ditambahkan secara manual. Untuk mengatur ulang ke gaya default, gunakan reset().

```
>aspect();
>figure(3,4); ...
> figure(1); plot2d("x^3-x",grid=0); ... // no grid, frame or axis
> figure(2); plot2d("x^3-x",grid=1); ... // x-y-axis
> figure(3); plot2d("x^3-x",grid=2); ... // default ticks
> figure(4); plot2d("x^3-x",grid=3); ... // x-y- axis with labels inside
> figure(5); plot2d("x^3-x",grid=4); ... // no ticks, only labels
> figure(6); plot2d("x^3-x",grid=5); ... // default, but no margin
> figure(7); plot2d("x^3-x",grid=6); ... // axes only
> figure(8); plot2d("x^3-x",grid=7); ... // axes only, ticks at axis
> figure(9); plot2d("x^3-x",grid=8); ... // axes only, finer ticks at axis
> figure(10); plot2d("x^3-x",grid=9); ... // default, small ticks inside
> figure(11); plot2d("x^3-x",grid=10); ...// no ticks, axes only
> figure(0):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-071.png

Parameter <frame mematikan frame, dan framecolor=blue mengatur frame ke warna biru.
Jika Anda ingin centang sendiri, Anda dapat menggunakan style=0, dan menambahkan semuanya nanti.

```
>aspect(1.5);
>plot2d("x^3-x",grid=0); // plot
>frame; xgrid([-1,0,1]); ygrid(0): // add frame and grid
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-072.png

Untuk judul plot dan label sumbu, lihat contoh berikut.

```
>plot2d("exp(x)",-1,1);
>textcolor(black); // set the text color to black
>title(latex("y=e^x")); // title above the plot
>xlabel(latex("x")); // "x" for x-axis
>ylabel(latex("y"),>vertical); // vertical "y" for y-axis
>label(latex("(0,1)"),0,1,color=blue): // label a point
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-073.png

Sumbu dapat digambar secara terpisah dengan xaxis() dan yaxis().

```
>plot2d("x^3-x",<grid,<frame);
>xaxis(0,xx=-2:1,style="->"); yaxis(0,yy=-5:5,style="->"):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-074.png

Teks pada plot dapat diatur dengan label(). Dalam contoh berikut, "lc" berarti tengah bawah. Ini mengatur posisi label relatif terhadap koordinat plot.

```
>function f(x) &= x^3-x
```

```
 3
x  - x
```

```
>plot2d(f,-1,1,>square);
>x0=fmin(f,0,1); // compute point of minimum
>label("Rel. Min.",x0,f(x0),pos="lc"): // add a label there
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-075.png

Ada juga kotak teks.

```
>plot2d(&f(x),-1,1,-2,2); // function
>plot2d(&diff(f(x),x),>add,style="--",color=red); // derivative
>labelbox(["f","f'"],["-","--"],[black,red]): // label box
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-076.png

```
>plot2d(["exp(x)","1+x"],color=[black,blue],style=["-","-.-"]):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-077.png

```
>gridstyle("->",color=gray,textcolor=gray,framecolor=gray);  ...
> plot2d("x^3-x",grid=1);   ...
> settitle("y=x^3-x",color=black); ...
> label("x",2,0,pos="bc",color=gray);  ...
> label("y",0,6,pos="cl",color=gray); ...
> reset():
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-078.png

Untuk kontrol lebih, sumbu x dan sumbu y dapat dilakukan secara manual.
Perintah fullwindow() memperluas jendela plot karena kita tidak lagi membutuhkan tempat untuk label di luar jendela plot. Gunakan shrinkwindow() atau reset() untuk mengatur ulang ke default.

```
>fullwindow; ...
> gridstyle(color=darkgray,textcolor=darkgray); ...
> plot2d(["2^x","1","2^(-x)"],a=-2,b=2,c=0,d=4,<grid,color=4:6,<frame); ...
> xaxis(0,-2:1,style="->"); xaxis(0,2,"x",<axis); ...
> yaxis(0,4,"y",style="->"); ...
> yaxis(-2,1:4,>left); ...
> yaxis(2,2^(-2:2),style=".",<left); ...
> labelbox(["2^x","1","2^-x"],colors=4:6,x=0.8,y=0.2); ...
> reset:
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-079.png

Berikut adalah contoh lain, di mana string Unicode digunakan dan sumbu di luar area plot.

```
>aspect(1.5);
>plot2d(["sin(x)","cos(x)"],0,2pi,color=[red,green],<grid,<frame); ...
> xaxis(-1.1,(0:2)*pi,xt=["0",u"&pi;",u"2&pi;"],style="-",>ticks,>zero);  ...
> xgrid((0:0.5:2)*pi,<ticks); ...
> yaxis(-0.1*pi,-1:0.2:1,style="-",>zero,>grid); ...
> labelbox(["sin","cos"],colors=[red,green],x=0.5,y=0.2,>left); ...
> xlabel(u"&phi;"); ylabel(u"f(&phi;)"):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-080.png

Merencanakan Data 2D

Jika x dan y adalah vektor data, data ini akan digunakan sebagai koordinat x dan y dari suatu kurva. Dalam hal ini, a, b, c, dan d, atau radius r dapat ditentukan, atau jendela plot akan menyesuaikan secara otomatis dengan data. Atau, >persegi dapat diatur untuk menjaga rasio aspek persegi.
Memplot ekspresi hanyalah singkatan untuk plot data. Untuk plot data, Anda memerlukan satu atau beberapa baris nilai x, dan satu atau beberapa baris nilai y. Dari rentang dan nilai-x, fungsi plot2d akan menghitung data yang akan diplot, secara default dengan evaluasi fungsi yang adaptif. Untuk plot titik gunakan ">titik", untuk garis campuran dan titik gunakan ">tambahan".
Tapi Anda bisa memasukkan data secara langsung.
- Gunakan vektor baris untuk x dan y untuk satu fungsi.
- Matriks untuk x dan y diplot baris demi baris.
Berikut adalah contoh dengan satu baris untuk x dan y.

```
>x=-10:0.1:10; y=exp(-x^2)*x; plot2d(x,y):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-081.png

Data juga dapat diplot sebagai titik. Gunakan poin=true untuk ini. Plotnya bekerja seperti poligon, tetapi hanya menggambar sudut-sudutnya.
- style="...": Pilih dari "[]", "<>", "o", ".", "..", "+", "*", "[]", "< >", "o", "..", "", "|".
Untuk memplot set poin gunakan >points. Jika warna adalah vektor warna, setiap titik
mendapat warna yang berbeda. Untuk matriks koordinat dan vektor kolom, warna berlaku untuk baris matriks.
Parameter >addpoints menambahkan titik ke segmen garis untuk plot data.

```
>xdata=[1,1.5,2.5,3,4]; ydata=[3,3.1,2.8,2.9,2.7]; // data
>plot2d(xdata,ydata,a=0.5,b=4.5,c=2.5,d=3.5,style="."); // lines
>plot2d(xdata,ydata,>points,>add,style="o"): // add points
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-082.png

```
>p=polyfit(xdata,ydata,1); // get regression line
>plot2d("polyval(p,x)",>add,color=red): // add plot of line
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-083.png

Menggambar Daerah Yang Dibatasi Kurva

Plot data benar-benar poligon. Kita juga dapat memplot kurva atau kurva terisi.
- terisi=benar mengisi plot.
- style="...": Pilih dari "", "/", "\", "\/".
- fillcolor: Lihat di atas untuk warna yang tersedia.
Warna isian ditentukan oleh argumen "fillcolor", dan pada <outline opsional mencegah menggambar batas untuk semua gaya kecuali yang default.

```
>t=linspace(0,2pi,1000); // parameter for curve
>x=sin(t)*exp(t/pi); y=cos(t)*exp(t/pi); // x(t) and y(t)
>figure(1,2); aspect(16/9)
>figure(1); plot2d(x,y,r=10); // plot curve
>figure(2); plot2d(x,y,r=10,>filled,style="/",fillcolor=red); // fill curve
>figure(0):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-084.png

Dalam contoh berikut kami memplot elips terisi dan dua segi enam terisi menggunakan kurva tertutup dengan 6 titik dengan gaya isian berbeda.

```
>x=linspace(0,2pi,1000); plot2d(sin(x),cos(x)*0.5,r=1,>filled,style="/"):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-085.png

```
>t=linspace(0,2pi,6); ...
>plot2d(cos(t),sin(t),>filled,style="/",fillcolor=red,r=1.2):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-086.png

```
>t=linspace(0,2pi,6); plot2d(cos(t),sin(t),>filled,style="#"):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-087.png

Contoh lainnya adalah segi empat, yang kita buat dengan 7 titik pada lingkaran satuan.

```
>t=linspace(0,2pi,7);  ...
> plot2d(cos(t),sin(t),r=1,>filled,style="/",fillcolor=red):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-088.png

Berikut ini adalah himpunan nilai maksimal dari empat kondisi linier yang kurang dari atau sama dengan 3. Ini adalah A[k].v<=3 untuk semua baris A. Untuk mendapatkan sudut yang bagus, kita menggunakan n yang relatif besar.

```
>A=[2,1;1,2;-1,0;0,-1];
>function f(x,y) := max([x,y].A');
>plot2d("f",r=4,level=[0;3],color=green,n=111):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-089.png

Poin utama dari bahasa matriks adalah memungkinkan untuk menghasilkan tabel fungsi dengan mudah.

```
>t=linspace(0,2pi,1000); x=cos(3*t); y=sin(4*t);
```

Kami sekarang memiliki vektor x dan y nilai. plot2d() dapat memplot nilai-nilai ini sebagai kurva yang menghubungkan titik-titik. Plotnya bisa diisi. Pada kasus ini ini menghasilkan hasil yang bagus karena aturan lilitan, yang digunakan untuk isi.

```
>plot2d(x,y,<grid,<frame,>filled):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-090.png

Sebuah vektor interval diplot terhadap nilai x sebagai daerah terisi antara nilai interval bawah dan atas.
Hal ini dapat berguna untuk memplot kesalahan perhitungan. Tapi itu bisa juga digunakan untuk memplot kesalahan statistik.

```
>t=0:0.1:1; ...
> plot2d(t,interval(t-random(size(t)),t+random(size(t))),style="|");  ...
> plot2d(t,t,add=true):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-091.png

Jika x adalah vektor yang diurutkan, dan y adalah vektor interval, maka plot2d akan memplot rentang interval yang terisi dalam bidang. Gaya isian sama dengan gaya poligon.

```
>t=-1:0.01:1; x=~t-0.01,t+0.01~; y=x^3-x;
>plot2d(t,y):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-092.png

Dimungkinkan untuk mengisi wilayah nilai untuk fungsi tertentu. Untuk ini, level harus berupa matriks 2xn. Baris pertama adalah batas bawah dan baris kedua berisi batas atas.

```
>expr := "2*x^2+x*y+3*y^4+y"; // define an expression f(x,y)
>plot2d(expr,level=[0;1],style="-",color=blue): // 0 <= f(x,y) <= 1
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-093.png

Kami juga dapat mengisi rentang nilai seperti

$$-1 \leq (x^2 + y^2)^2 - x^2 + y^2 \leq 0.$$

```
>plot2d("(x^2+y^2)^2-x^2+y^2",r=1.2,level=[-1;0],style="/"):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-094.png

```
>plot2d("cos(x)","sin(x)^3",xmin=0,xmax=2pi,>filled,style="/"):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-095.png

Grafik Fungsi Parametrik

Nilai-x tidak perlu diurutkan. (x,y) hanya menggambarkan kurva. Jika x diurutkan, kurva tersebut merupakan grafik fungsi.
Dalam contoh berikut, kami memplot spiral

$$\gamma(t) = t \cdot (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$$

Kita perlu menggunakan banyak titik untuk tampilan yang halus atau fungsi adaptif() untuk mengevaluasi ekspresi (lihat fungsi adaptif() untuk lebih jelasnya).

```
>t=linspace(0,1,1000); ...
>plot2d(t*cos(2*pi*t),t*sin(2*pi*t),r=1):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-096.png

Atau, dimungkinkan untuk menggunakan dua ekspresi untuk kurva. Berikut ini plot kurva yang sama seperti di atas.

```
>plot2d("x*cos(2*pi*x)","x*sin(2*pi*x)",xmin=0,xmax=1,r=1):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-097.png

```
>t=linspace(0,1,1000); r=exp(-t); x=r*cos(2pi*t); y=r*sin(2pi*t);
>plot2d(x,y,r=1):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-098.png

Dalam contoh berikutnya, kami memplot kurva

$$\gamma(t) = (r(t)\cos(t), r(t)\sin(t))$$

dengan

$$r(t) = 1 + \frac{\sin(3t)}{2}.$$

```
>t=linspace(0,2pi,1000); r=1+sin(3*t)/2; x=r*cos(t); y=r*sin(t); ...
>plot2d(x,y,>filled,fillcolor=red,style="/",r=1.5):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-099.png

Menggambar Grafik Bilangan Kompleks

Array bilangan kompleks juga dapat diplot. Kemudian titik-titik grid akan terhubung. Jika sejumlah garis kisi ditentukan (atau vektor garis kisi 1x2) dalam argumen cgrid, hanya garis kisi tersebut yang terlihat.
Matriks bilangan kompleks akan secara otomatis diplot sebagai kisi di bidang kompleks.
Dalam contoh berikut, kami memplot gambar lingkaran satuan di bawah fungsi eksponensial. Parameter cgrid menyembunyikan beberapa kurva grid.

```
>aspect(); r=linspace(0,1,50); a=linspace(0,2pi,80)'; z=r*exp(I*a);...
>plot2d(z,a=-1.25,b=1.25,c=-1.25,d=1.25,cgrid=10):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-100.png

```
>aspect(1.25); r=linspace(0,1,50); a=linspace(0,2pi,200)'; z=r*exp(I*a);
>plot2d(exp(z),cgrid=[40,10]):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-101.png

```
>r=linspace(0,1,10); a=linspace(0,2pi,40)'; z=r*exp(I*a);
>plot2d(exp(z),>points,>add):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-102.png

Sebuah vektor bilangan kompleks secara otomatis diplot sebagai kurva pada bidang kompleks dengan bagian real dan bagian imajiner.
Dalam contoh, kami memplot lingkaran satuan dengan

$$\gamma(t) = e^{it}$$

```
>t=linspace(0,2pi,1000); ...
>plot2d(exp(I*t)+exp(4*I*t),r=2):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-103.png

Plot Statistik

Ada banyak fungsi yang dikhususkan pada plot statistik. Salah satu plot yang sering digunakan adalah plot kolom.
Jumlah kumulatif dari nilai terdistribusi 0-1-normal menghasilkan jalan acak.

```
>plot2d(cumsum(randnormal(1,1000))):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-104.png

Menggunakan dua baris menunjukkan jalan dalam dua dimensi.

```
>X=cumsum(randnormal(2,1000)); plot2d(X[1],X[2]):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-105.png

```
>columnsplot(cumsum(random(10)),style="/",color=blue):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-106.png

Itu juga dapat menampilkan string sebagai label.

```
>months=["Jan","Feb","Mar","Apr","May","Jun", ...
>  "Jul","Aug","Sep","Oct","Nov","Dec"];
>values=[10,12,12,18,22,28,30,26,22,18,12,8];
>columnsplot(values,lab=months,color=red,style="-");
>title("Temperature"):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-107.png

```
>k=0:10;
>plot2d(k,bin(10,k),>bar):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-108.png

```
>plot2d(k,bin(10,k)); plot2d(k,bin(10,k),>points,>add):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-109.png

```
>plot2d(normal(1000),normal(1000),>points,grid=6,style=".."):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-110.png

```
>plot2d(normal(1,1000),>distribution,style="O"):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-111.png

```
>plot2d("qnormal",0,5;2.5,0.5,>filled):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-112.png

Untuk memplot distribusi statistik eksperimental, Anda dapat menggunakan distribution=n dengan plot2d.

```
>w=randexponential(1,1000); // exponential distribution
>plot2d(w,>distribution): // or distribution=n with n intervals
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-113.png

Atau Anda dapat menghitung distribusi dari data dan memplot hasilnya dengan >bar di plot3d, atau dengan plot kolom.

```
>w=normal(1000); // 0-1-normal distribution
>{x,y}=histo(w,10,v=[-6,-4,-2,-1,0,1,2,4,6]); // interval bounds v
>plot2d(x,y,>bar):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-114.png

Fungsi statplot() menyetel gaya dengan string sederhana.

```
>statplot(1:10,cumsum(random(10)),"b"):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-115.png

```
>n=10; i=0:n; ...
>plot2d(i,bin(n,i)/2^n,a=0,b=10,c=0,d=0.3); ...
>plot2d(i,bin(n,i)/2^n,points=true,style="ow",add=true,color=blue):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-116.png

Selain itu, data dapat diplot sebagai batang. Dalam hal ini, x harus diurutkan dan satu elemen lebih panjang dari y. Bilah akan memanjang dari x[i] ke x[i+1] dengan nilai y[i]. Jika x memiliki ukuran yang sama dengan y, maka akan diperpanjang satu elemen dengan spasi terakhir.
Gaya isian dapat digunakan seperti di atas.

```
>n=10; k=bin(n,0:n); ...
>plot2d(-0.5:n+0.5,k,bar=true,fillcolor=lightgray):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-117.png

Data untuk plot batang (bar=1) dan histogram (histogram=1) dapat dinyatakan secara eksplisit dalam xv dan yv, atau dapat dihitung dari distribusi empiris dalam xv dengan >distribusi (atau distribusi=n). Histogram nilai xv akan dihitung secara otomatis dengan >histogram. Jika >genap ditentukan, nilai xv akan dihitung dalam interval bilangan bulat.

```
>plot2d(normal(10000),distribution=50):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-118.png

```
>k=0:10; m=bin(10,k); x=(0:11)-0.5; plot2d(x,m,>bar):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-119.png

```
>columnsplot(m,k):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-120.png

```
>plot2d(random(600)*6,histogram=6):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-121.png

Untuk distribusi, ada parameter distribusi=n, yang menghitung nilai secara otomatis dan mencetak distribusi relatif dengan n sub-interval.

```
>plot2d(normal(1,1000),distribution=10,style="\/"):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-122.png

Dengan parameter even=true, ini akan menggunakan interval integer.

```
>plot2d(intrandom(1,1000,10),distribution=10,even=true):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-123.png

Perhatikan bahwa ada banyak plot statistik, yang mungkin berguna. Silahkan lihat tutorial tentang statistik.

```
>columnsplot(getmultiplicities(1:6,intrandom(1,6000,6))):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-124.png

```
>plot2d(normal(1,1000),>distribution); ...
>  plot2d("qnormal(x)",color=red,thickness=2,>add):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-125.png

Ada juga banyak plot khusus untuk statistik. Sebuah boxplot menunjukkan kuartil dari distribusi ini dan banyak dari
outlier. Menurut definisi, outlier dalam boxplot adalah data yang melebihi 1,5 kali kisaran 50% tengah plot.

```
>M=normal(5,1000); boxplot(quartiles(M)):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-126.png

Fungsi Implisit

Plot implisit menunjukkan garis level yang menyelesaikan f(x,y)=level, di mana "level" dapat berupa nilai tunggal atau vektor nilai. Jika level="auto", akan ada garis level nc, yang akan menyebar antara fungsi minimum dan maksimum secara merata. Warna yang lebih gelap atau lebih terang dapat ditambahkan dengan >hue untuk menunjukkan nilai fungsi. Untuk fungsi implisit, xv harus berupa fungsi atau ekspresi dari parameter x dan y, atau, sebagai alternatif, xv dapat berupa matriks nilai.
Euler dapat menandai garis level

$$f(x,y)=c$$

dari fungsi apapun.
Untuk menggambar himpunan f(x,y)=c untuk satu atau lebih konstanta c, Anda dapat menggunakan plot2d() dengan plot implisitnya di dalam bidang. Parameter untuk c adalah level=c, di mana c dapat berupa vektor garis level. Selain itu, skema warna dapat digambar di latar belakang untuk menunjukkan nilai fungsi untuk setiap titik dalam plot. Parameter "n" menentukan kehalusan plot.

```
>aspect(1.5);
>plot2d("x^2+y^2-x*y-x",r=1.5,level=0,contourcolor=red):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-127.png

```
>expr := "2*x^2+x*y+3*y^4+y"; // define an expression f(x,y)
>plot2d(expr,level=0): // Solutions of f(x,y)=0
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-128.png

```
>plot2d(expr,level=0:0.5:20,>hue,contourcolor=white,n=200): // nice
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-129.png

```
>plot2d(expr,level=0:0.5:20,>hue,>spectral,n=200,grid=4): // nicer
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-130.png

Ini berfungsi untuk plot data juga. Tetapi Anda harus menentukan rentangnya untuk label sumbu.

```
>x=-2:0.05:1; y=x'; z=expr(x,y);
>plot2d(z,level=0,a=-1,b=2,c=-2,d=1,>hue):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-131.png

```
>plot2d("x^3-y^2",>contour,>hue,>spectral):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-132.png

```
>plot2d("x^3-y^2",level=0,contourwidth=3,>add,contourcolor=red):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-133.png

```
>z=z+normal(size(z))*0.2;
>plot2d(z,level=0.5,a=-1,b=2,c=-2,d=1):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-134.png

```
>plot2d(expr,level=[0:0.2:5;0.05:0.2:5.05],color=lightgray):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-135.png

```
>plot2d("x^2+y^3+x*y",level=1,r=4,n=100):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-136.png

```
>plot2d("x^2+2*y^2-x*y",level=0:0.1:10,n=100,contourcolor=white,>hue):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-137.png

Juga dimungkinkan untuk mengisi set

$$a \leq f(x, y) \leq b$$

dengan rentang tingkat.

Dimungkinkan untuk mengisi wilayah nilai untuk fungsi tertentu. Untuk ini, level harus berupa matriks 2xn. Baris pertama adalah batas bawah dan baris kedua berisi batas atas.

```
>plot2d(expr,level=[0;1],style="-",color=blue): // 0 <= f(x,y) <= 1
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-138.png

Plot implisit juga dapat menunjukkan rentang level. Kemudian level harus berupa matriks 2xn dari interval level, di mana baris pertama berisi awal dan baris kedua adalah akhir dari setiap interval. Atau, vektor baris sederhana dapat digunakan untuk level, dan parameter dl memperluas nilai level ke interval.

```
>plot2d("x^4+y^4",r=1.5,level=[0;1],color=blue,style="/"):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-139.png

```
>plot2d("x^2+y^3+x*y",level=[0,2,4;1,3,5],style="/",r=2,n=100):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-140.png

```
>plot2d("x^2+y^3+x*y",level=-10:20,r=2,style="-",dl=0.1,n=100):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-141.png

```
>plot2d("sin(x)*cos(y)",r=pi,>hue,>levels,n=100):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-142.png

Dimungkinkan juga untuk menandai suatu wilayah

$$a \leq f(x, y) \leq b.$$

Ini dilakukan dengan menambahkan level dengan dua baris.

```
>plot2d("(x^2+y^2-1)^3-x^2*y^3",r=1.3, ...
>  style="#",color=red,<outline, ...
>  level=[-2;0],n=100):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-143.png

Dimungkinkan untuk menentukan level tertentu. Misalnya, kita dapat memplot solusi persamaan seperti

$$x^3 - xy + x^2y^2 = 6$$

```
>plot2d("x^3-x*y+x^2*y^2",r=6,level=1,n=100):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-144.png

```
>function starplot1 (v, style="/", color=green, lab=none) ...
```

```
    if !holding() then clg; endif;
    w=window(); window(0,0,1024,1024);
    h=holding(1);
    r=max(abs(v))*1.2;
    setplot(-r,r,-r,r);
    n=cols(v); t=linspace(0,2pi,n);
    v=v|v[1]; c=v*cos(t); s=v*sin(t);
    cl=barcolor(color); st=barstyle(style);
    loop 1 to n
      polygon([0,c[#],c[#+1]],[0,s[#],s[#+1]],1);
      if lab!=none then
        rlab=v[#]+r*0.1;
        {col,row}=toscreen(cos(t[#])*rlab,sin(t[#])*rlab);
        ctext(""+lab[#],col,row-textheight()/2);
      endif;
    end;
    barcolor(cl); barstyle(st);
    holding(h);
    window(w);
  endfunction
```

Tidak ada kotak atau sumbu kutu di sini. Selain itu, kami menggunakan jendela penuh untuk plot.
Kami memanggil reset sebelum kami menguji plot ini untuk mengembalikan default grafis. Ini tidak perlu, jika Anda yakin plot Anda berhasil.

```
>reset; starplot1(normal(1,10)+5,color=red,lab=1:10):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-145.png

Terkadang, Anda mungkin ingin merencanakan sesuatu yang tidak dapat dilakukan plot2d, tetapi hampir.
Dalam fungsi berikut, kami melakukan plot impuls logaritmik. plot2d dapat melakukan plot logaritmik, tetapi tidak untuk batang impuls.

```
>function logimpulseplot1 (x,y) ...
```

```
    {x0,y0}=makeimpulse(x,log(y)/log(10));
    plot2d(x0,y0,>bar,grid=0);
    h=holding(1);
    frame();
    xgrid(ticks(x));
    p=plot();
    for i=-10 to 10;
      if i<=p[4] and i>=p[3] then
         ygrid(i,yt="10^"+i);
      endif;
    end;
    holding(h);
  endfunction
```

Mari kita uji dengan nilai yang terdistribusi secara eksponensial.

```
>aspect(1.5); x=1:10; y=-log(random(size(x)))*200; ...
>logimpulseplot1(x,y):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-146.png

Mari kita menganimasikan kurva 2D menggunakan plot langsung. Perintah plot(x,y) hanya memplot kurva ke jendela plot. setplot(a,b,c,d) mengatur jendela ini.
Fungsi wait(0) memaksa plot untuk muncul di jendela grafik. Jika tidak, menggambar ulang terjadi dalam interval waktu yang jarang.

```
>function animliss (n,m) ...
```

```
  t=linspace(0,2pi,500);
  f=0;
  c=framecolor(0);
  l=linewidth(2);
  setplot(-1,1,-1,1);
  repeat
    clg;
    plot(sin(n*t),cos(m*t+f));
```

```
    wait(0);
    if testkey() then break; endif;
    f=f+0.02;
  end;
  framecolor(c);
  linewidth(l);
  endfunction
```

Tekan sembarang tombol untuk menghentikan animasi ini.

```
>animliss(2,3); // lihat hasilnya, jika sudah puas, tekan ENTER
```

Plot Logaritmik

EMT menggunakan parameter "logplot" untuk skala logaritmik.
Plot logaritma dapat diplot baik menggunakan skala logaritma dalam y dengan logplot=1, atau menggunakan skala logaritma dalam x dan y dengan logplot=2, atau dalam x dengan logplot=3.

```
 - logplot=1: y-logaritma
 - logplot=2: x-y-logaritma
 - logplot=3: x-logaritma
```

```
>plot2d("exp(x^3-x)*x^2",1,5,logplot=1):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-147.png

```
>plot2d("exp(x+sin(x))",0,100,logplot=1):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-148.png

```
>plot2d("exp(x+sin(x))",10,100,logplot=2):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-149.png

```
>plot2d("gamma(x)",1,10,logplot=1):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-150.png

```
>plot2d("log(x*(2+sin(x/100)))",10,1000,logplot=3):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-151.png

Ini juga berfungsi dengan plot data.

```
>x=10^(1:20); y=x^2-x;
>plot2d(x,y,logplot=2):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra-152.png

Rujukan Lengkap Fungsi

plot2d() function plot2d (xv, yv, btest, a, b, c, d, xmin, xmax, r, n, ..
logplot, kisi, bingkai, warna bingkai, kotak, warna, ketebalan, gaya, ..
otomatis, tambahkan, pengguna, delta, poin, titik tambahan, gaya titik, bilah, histogram, ..
distribusi, genap, langkah, sendiri, adaptif, rona, level, kontur, ..
nc, terisi, fillcolor, outline, title, xl, yl, maps, contourcolor, ..
contourwidth, ticks, margin, clipping, cx, cy, insimg, spectral, ..
cgrid, vertikal, lebih kecil, dl, niveau, level)
Fungsi plot serbaguna untuk plot di pesawat (plot 2D). Fungsi ini dapat melakukan
plot fungsi satu variabel, plot data, kurva bidang, plot batang, kisi-kisi bilangan kompleks, dan plot implisit fungsi dua variabel.

Parameter
x,y : persamaan, fungsi atau vektor data
a,b,c,d : Area plot (default a=-2,b=2)
r : jika r diset, maka a=cx-r, b=cx+r, c=cy-r, d=cy+r

```
r dapat berupa vektor [rx,ry] atau vektor
```

[rx1,rx2,ry1,ry2].
xmin,xmax : rentang parameter untuk kurva
auto : Menentukan y-range secara otomatis (default)
kuadrat : jika benar, coba pertahankan rentang x-y persegi
n : jumlah interval (default adaptif)
kisi : 0 = tidak ada kisi dan label,

```
1 = sumbu saja,
2 = grid normal (lihat di bawah untuk jumlah garis
```

grid)

```
3 = sumbu dalam
4 = tidak ada kisi-kisi
5 = kisi penuh termasuk margin
6 = kutu di bingkai
7 = sumbu saja
8 = sumbu saja, sub-centang
```

bingkai : 0 = tanpa bingkai
framecolor : warna bingkai dan kisi
margin : angka antara 0 dan 0,4 untuk margin di sekitar plot
warna : Warna kurva. Jika ini adalah vektor warna,

```
itu akan digunakan untuk setiap baris matriks plot. Dalam
```

kasus plot titik, itu harus berupa vektor kolom. Jika vektor baris atau matriks penuh warna digunakan untuk plot titik, itu akan digunakan untuk setiap titik data.
ketebalan: ketebalan garis untuk kurva

```
Nilai ini bisa lebih kecil dari 1 untuk garis yang sangat
```

tipis.
style : Plot style untuk garis, spidol, dan isian.

```
Untuk poin gunakan
"[]", "<>", ".", "..", "...",
"*", "+", "|", "-", "o"
"[]#", "<>#", "o#" (bentuk terisi)
"[]w", "<>w", "ow" (tidak transparan)
Untuk penggunaan garis
"-", "--", "-.", ".", ".-.", "-.-", "->"
Untuk poligon terisi atau plot batang gunakan
"#", "#O", "O", "/", "\", "\/",
"+", "|", "-", "t"
```

poin : plot titik tunggal alih-alih segmen garis
addpoints : jika benar, plot segmen garis dan titik
add : menambahkan plot ke plot yang ada
pengguna : aktifkan interaksi pengguna untuk fungsi
delta : ukuran langkah untuk interaksi pengguna
bar : plot batang (x adalah batas interval, y nilai interval)
histogram : memplot frekuensi x dalam n subinterval
distribusi=n : memplot distribusi x dengan n subinterval
even : gunakan nilai antar untuk histogram otomatis.
langkah : memplot fungsi sebagai fungsi langkah (langkah=1,2)
adaptif : gunakan plot adaptif (n adalah jumlah langkah minimal)
level : plot garis level dari fungsi implisit dua variabel
outline : menggambar batas rentang level.
Jika nilai level adalah matriks 2xn, rentang level akan ditarik
dalam warna menggunakan gaya isian yang diberikan. Jika garis besar benar, itu
akan digambar dalam warna kontur. Dengan menggunakan fitur ini, wilayah
f(x,y) antara batas dapat ditandai.
hue : tambahkan warna hue ke plot level untuk menunjukkan fungsinya

```
            nilai
```

kontur : Gunakan plot level dengan level otomatis
nc : jumlah garis level otomatis
judul : judul plot (default "")
xl, yl : label untuk sumbu x dan y
lebih kecil : jika >0, akan ada lebih banyak ruang di sebelah kiri untuk label.
vertikal :

```
  Mengaktifkan atau menonaktifkan label vertikal. Ini mengubah
```

variabel global

```
  verticallabels secara lokal untuk satu plot. Nilai 1 hanya set
```

vertikal

```
  teks, nilai 2 menggunakan label numerik vertikal pada sumbu y.
```

terisi : mengisi plot kurva
fillcolor : mengisi warna untuk bar dan kurva yang terisi
outline : batas poligon yang terisi
logplot : mengatur plot logaritma

```
            1 = logplot di y,
            2 = plot log di xy,
            3 = logplot dalam x
```

memiliki :

```
  Sebuah string, yang menunjuk ke rutinitas plot sendiri. Dengan >
```

pengguna, Anda mendapatkan

```
interaksi pengguna yang sama seperti di plot2d. Rentang akan diatur
sebelum setiap panggilan ke fungsi Anda.
```

peta : ekspresi peta (0 lebih cepat), fungsi selalu dipetakan.
contourcolor : warna garis kontur
contourwidth : lebar garis kontur
clipping : mengaktifkan clipping (default adalah true)
judul :

```
Ini dapat digunakan untuk menggambarkan plot. Judul akan muncul di
```

atas

```
jalan cerita. Selain itu, label untuk sumbu x dan y dapat
```

ditambahkan dengan

```
xl="string" atau yl="string". Label lain dapat ditambahkan dengan
fungsi label() atau labelbox(). Judulnya bisa unicode
string atau gambar rumus Lateks.
```

jaringan :

```
Menentukan jumlah garis grid untuk plot grid yang kompleks.
Harus merupakan pembagi dari ukuran matriks dikurangi 1 (jumlah
subinterval). cgrid dapat berupa vektor [cx,cy].
```

```
Ringkasan
```

```
Fungsi dapat merencanakan
```

- ekspresi, koleksi panggilan atau fungsi dari satu variabel,
- kurva parametrik,
- data x terhadap data y,
- fungsi implisit,
- petak batang,
- jaringan kompleks,
- poligon.

```
Jika fungsi atau ekspresi untuk xv diberikan, plot2d() akan
```

menghitung
nilai dalam rentang yang diberikan menggunakan fungsi atau ekspresi. Itu
ekspresi harus berupa ekspresi dalam variabel x. Rentang harus
didefinisikan dalam parameter a dan b kecuali rentang default
harus digunakan. Rentang y akan dihitung secara otomatis,
kecuali c dan d ditentukan, atau radius r, yang menghasilkan kisaran
r,r
untuk x dan y. Untuk plot fungsi, plot2d akan menggunakan
evaluasi adaptif fungsi secara default. Untuk mempercepat
plot untuk fungsi yang rumit, matikan ini dengan <adaptif, dan
opsional mengurangi jumlah interval n. Selain itu, plot2d()
akan secara default menggunakan pemetaan. Yaitu, itu akan menghitung elemen plot
untuk elemen. Jika ekspresi atau fungsi Anda dapat menangani a
vector x, Anda dapat menonaktifkannya dengan <maps untuk evaluasi yang lebih cepat.

```
Perhatikan bahwa plot adaptif selalu dihitung elemen untuk elemen.
```

Jika fungsi atau ekspresi untuk xv dan untuk yv ditentukan,
plot2d() akan menghitung kurva dengan nilai xv sebagai koordinat x
dan nilai yv sebagai koordinat y. Dalam hal ini, rentang harus
didefinisikan untuk parameter menggunakan xmin, xmax. Ekspresi yang terkandung
dalam string harus selalu ekspresi dalam variabel parameter x.

BAB 4

KB PEKAN 7-8: MENGGUNAKAN EMT UNTUK MENGAMBAR GRAFIK 3 DIMENSI (3D)

[a4paper,10pt]article eumat

Nama : Dimas Oki Sriwijaya Saputra
Kelas : Matematika E 2022
NIM : 22305141053

Menggambar Plot 3D dengan EMT

Ini adalah pengenalan plot 3D di Euler. Kita membutuhkan plot 3D untuk memvisualisasikan fungsi dari dua variabel.

Euler menggambar fungsi tersebut menggunakan algoritma pengurutan untuk menyembunyikan bagian di latar belakang. Secara umum, Euler menggunakan proyeksi pusat. Standarnya adalah dari kuadran x-y positif menuju titik asal x=y=z=0, tetapi sudut=0° terlihat dari arah sumbu y. Sudut pandang dan tinggi dapat diubah.

Euler dapat merencanakan

- permukaan dengan bayangan dan garis level atau rentang level,
- awan poin,
- kurva parametrik,
- permukaan implisit.

Plot 3D dari suatu fungsi menggunakan plot3d. Cara termudah adalah dengan memplot ekspresi dalam x dan y. Parameter r mengatur kisaran plot di sekitar (0,0).

```
>5aspect(1.5); plot3d("x^2+sin(y)",r=pi):
```

```
Wrong argument.
Cannot use a string here.

Error in:
5aspect(1.5); plot3d("x^2+sin(y)",r=pi): ...
            ^
```

Fungsi dua Variabel

Untuk grafik fungsi, gunakan
- ekspresi sederhana dalam x dan y,
- nama fungsi dari dua variabell
- atau matriks data.

Standarnya adalah kotak kawat yang diisi dengan warna berbeda di kedua sisi. Perhatikan bahwa jumlah default interval grid adalah 10, tetapi plot menggunakan jumlah default 40x40 persegi panjang untuk membangun permukaan. Ini bisa diubah.
- n=40, n=[40,40]: jumlah garis grid di setiap arah
- grid=10, grid=[10,10]: jumlah garis grid di setiap arah.

Kami menggunakan default n=40 dan grid=10.

```
>plot3d("x^2+y^2"):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya_3D-001.png

Interaksi pengguna dimungkinkan dengan >parameter pengguna. Pengguna dapat menekan tombol berikut.
- kiri, kanan, atas, bawah: putar sudut pandang
- +,-: memperbesar atau memperkecil
- a: menghasilkan anaglyph (lihat di bawah)
- l: beralih memutar sumber cahaya (lihat di bawah)
- spasi: reset ke default
- kembali: akhiri interaksi

```
>plot3d("exp(-x^2+y^2)",>user, ...
>  title="Turn with the vector keys (press return to finish)"):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya_3D-002.png

Rentang plot untuk fungsi dapat ditentukan dengan
- a,b: rentang-x
- c,d: rentang-y
- r: persegi simetris di sekitar (0,0).
- n: jumlah subinterval untuk plot.

Ada beberapa parameter untuk menskalakan fungsi atau mengubah tampilan grafik.
fscale: skala ke nilai fungsi (defaultnya adalah <fscale).
skala: angka atau vektor 1x2 untuk skala ke arah x dan y.
bingkai: jenis bingkai (default 1).

```
>plot3d("exp(-(x^2+y^2)/5)",r=10,n=80,fscale=4,scale=1.2,frame=3):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya_3D-003.png

Tampilan dapat diubah dengan berbagai cara.
- jarak: jarak pandang ke plot.
- zoom: nilai zoom.
- sudut: sudut terhadap sumbu y negatif dalam radian.
- tinggi: ketinggian tampilan dalam radian.

Nilai default dapat diperiksa atau diubah dengan fungsi view(). Ini mengembalikan parameter dalam urutan di atas.

```
>view
```

```
[5,  2.6,  2,  0.4]
```

Jarak yang lebih dekat membutuhkan lebih sedikit zoom. Efeknya lebih seperti lensa sudut lebar.
Dalam contoh berikut, sudut=0 dan tinggi=0 terlihat dari sumbu y negatif. Label sumbu untuk y disembunyikan dalam kasus ini.

```
>plot3d("x^2+y",distance=3,zoom=2,angle=0,height=0):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya_3D-004.png

Plot terlihat selalu ke pusat kubus plot. Anda dapat memindahkan pusat dengan parameter tengah.

```
>plot3d("x^4+y^2",a=0,b=1,c=-1,d=1,angle=-20°,height=20°, ...
>  center=[0.4,0,0],zoom=5):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya_3D-005.png

Plot diskalakan agar sesuai dengan kubus satuan untuk dilihat. Jadi tidak perlu mengubah jarak atau zoom tergantung pada ukuran plot. Namun, label mengacu pada ukuran sebenarnya.
Jika Anda mematikannya dengan scale=false, Anda perlu berhati-hati, bahwa plot masih cocok dengan jendela plot, dengan mengubah jarak pandang atau zoom, dan memindahkan pusat.

```
>plot3d("5*exp(-x^2-y^2)",r=2,<fscale,<scale,distance=13,height=50°, ...
>  center=[0,0,-2],frame=3):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya_3D-006.png

Sebuah plot kutub juga tersedia. Parameter polar=true menggambar plot polar. Fungsi tersebut harus tetap merupakan fungsi dari x dan y. Parameter "fscale" menskalakan fungsi dengan skala sendiri. Jika tidak, fungsi diskalakan agar sesuai dengan kubus.

```
>plot3d("1/(x^2+y^2+1)",r=5,>polar, ...
>fscale=2,>hue,n=100,zoom=4,>contour,color=gray):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya_3D-007.png

```
>function f(r) := exp(-r/2)*cos(r); ...
>plot3d("f(x^2+y^2)",>polar,scale=[1,1,0.4],r=2pi,frame=3,zoom=4):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya_3D-008.png

Rotasi parameter memutar fungsi dalam x di sekitar sumbu x.
- rotate=1: Menggunakan sumbu x
- rotate=2: Menggunakan sumbu z

```
>plot3d("x^2+1",a=-1,b=1,rotate=true,grid=5):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya_3D-009.png

Berikut adalah plot dengan tiga fungsi.

```
>plot3d("x","x^2+y^2","y",r=2,zoom=3.5,frame=3):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya_3D-010.png

Plot Kontur

Untuk plot, Euler menambahkan garis grid. Sebagai gantinya dimungkinkan untuk menggunakan garis level dan rona satu warna atau rona berwarna spektral. Euler dapat menggambar tinggi fungsi pada plot dengan bayangan. Di semua plot 3D, Euler dapat menghasilkan anaglyph merah/sian.
-> hue: Menyalakan bayangan cahaya alih-alih kabel.
-> kontur: Memplot garis kontur otomatis pada plot.
- level=... (atau level): Sebuah vektor nilai untuk garis kontur.
Standarnya adalah level="auto", yang menghitung beberapa garis level secara otomatis. Seperti yang Anda lihat di plot, level sebenarnya adalah rentang level.
Gaya default dapat diubah. Untuk plot kontur berikut, kami menggunakan grid yang lebih halus untuk 100x100 poin, skala fungsi dan plot, dan menggunakan sudut pandang yang berbeda.

```
>plot3d("exp(-x^2-y^2)",r=2,n=100,level="thin", ...
> >contour,>spectral,fscale=1,scale=1.1,angle=45°,height=20°):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya_3D-011.png

```
>plot3d("exp(x*y)",angle=100°,>contour,color=green):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya_3D-012.png

Bayangan default menggunakan warna abu-abu. Tetapi rentang warna spektral juga tersedia.
-> spektral: Menggunakan skema spektral default
- color=...: Menggunakan warna khusus atau skema spektral
Untuk plot berikut, kami menggunakan skema spektral default dan menambah jumlah titik untuk mendapatkan tampilan yang sangat halus.

```
>plot3d("x^2+y^2",>spectral,>contour,n=100):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya_3D-013.png

Alih-alih garis level otomatis, kita juga dapat mengatur nilai garis level. Ini akan menghasilkan garis level tipis alih-alih rentang level.

```
>plot3d("x^2-y^2",0,1,0,1,angle=220°,level=-1:0.2:1,color=redgreen):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya_3D-014.png

Dalam plot berikut, kami menggunakan dua pita level yang sangat luas dari -0,1 hingga 1, dan dari 0,9 hingga 1. Ini dimasukkan sebagai matriks dengan batas level sebagai kolom.
Selain itu, kami melapisi kisi dengan 10 interval di setiap arah.

```
>plot3d("x^2+y^3",level=[-0.1,0.9;0,1], ...
>  >spectral,angle=30°,grid=10,contourcolor=gray):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya_3D-015.png

Dalam contoh berikut, kami memplot himpunan, di mana

$$f(x, y) = x^y - y^x = 0$$

Kami menggunakan satu garis tipis untuk garis level.

```
>plot3d("x^y-y^x",level=0,a=0,b=6,c=0,d=6,contourcolor=red,n=100):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya_3D-016.png

Dimungkinkan untuk menunjukkan bidang kontur di bawah plot. Warna dan jarak ke plot dapat ditentukan.

```
>plot3d("x^2+y^4",>cp,cpcolor=green,cpdelta=0.2):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya_3D-017.png

Berikut adalah beberapa gaya lagi. Kami selalu mematikan frame, dan menggunakan berbagai skema warna untuk plot dan grid.

```
>figure(2,2); ...
>expr="y^3-x^2"; ...
>figure(1);  ...
>  plot3d(expr,<frame,>cp,cpcolor=spectral); ...
>figure(2);  ...
>  plot3d(expr,<frame,>spectral,grid=10,cp=2); ...
>figure(3);  ...
>  plot3d(expr,<frame,>contour,color=gray,nc=5,cp=3,cpcolor=greenred); ...
>figure(4);  ...
>  plot3d(expr,<frame,>hue,grid=10,>transparent,>cp,cpcolor=gray); ...
>figure(0):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya_3D-018.png

Ada beberapa skema spektral lainnya, bernomor dari 1 hingga 9. Tetapi Anda juga dapat menggunakan warna=nilai, di mana nilai
- spektral: untuk rentang dari biru ke merah
- putih: untuk rentang yang lebih redup
- kuningbiru,ungu hijau,birukuning,hijaumerah
- birukuning, hijau ungu, kuning biru, merah hijau

```
>figure(3,3); ...
>for i=1:9;  ...
>  figure(i); plot3d("x^2+y^2",spectral=i,>contour,>cp,<frame,zoom=4);  ...
>end; ...
>figure(0):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya_3D-019.png

Sumber cahaya dapat diubah dengan l dan tombol kursor selama interaksi pengguna. Itu juga dapat diatur dengan parameter.
- cahaya: arah untuk cahaya
- amb: cahaya sekitar antara 0 dan 1

Perhatikan bahwa program tidak membuat perbedaan antara sisi plot. Tidak ada bayangan. Untuk ini, Anda perlu Povray.

```
>plot3d("-x^2-y^2", ...
>  hue=true,light=[0,1,1],amb=0,user=true, ...
>  title="Press l and cursor keys (return to exit)"):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya_3D-020.png

Parameter warna mengubah warna permukaan. Warna garis level juga dapat diubah.

```
>plot3d("-x^2-y^2",color=rgb(0.2,0.2,0),hue=true,frame=false, ...
>  zoom=3,contourcolor=red,level=-2:0.1:1,dl=0.01):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya_3D-021.png

Warna 0 memberikan efek pelangi khusus.

```
>plot3d("x^2/(x^2+y^2+1)",color=0,hue=true,grid=10):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya_3D-022.png

Permukaannya juga bisa transparan.

```
>plot3d("x^2+y^2",>transparent,grid=10,wirecolor=red):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya_3D-023.png

Plot Implisit

Ada juga plot implisit dalam tiga dimensi. Euler menghasilkan pemotongan melalui objek. Fitur plot3d termasuk plot implisit. Plot-plot ini menunjukkan himpunan nol dari suatu fungsi dalam tiga variabel.
Solusi dari

$$f(x,y,z)=0$$

dapat divisualisasikan dalam potongan sejajar dengan bidang x-y-, x-z- dan y-z.
- implisit=1: potong sejajar dengan bidang y-z
- implisit=2: potong sejajar dengan bidang x-z
- implisit=4: potong sejajar dengan bidang x-y
Tambahkan nilai-nilai ini, jika Anda suka. Dalam contoh kita plot

$$M=\{(x,y,z):x^2+y^3+zy=1\}$$

```
>plot3d("x^2+y^3+z*y-1",r=5,implicit=3):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya_3D-024.png

```
>plot3d("x^2+y^2+4*x*z+z^3",>implicit,r=2,zoom=2.5):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya_3D-025.png

Merencanakan Data 3D

Sama seperti plot2d, plot3d menerima data. Untuk objek 3D, Anda perlu menyediakan matriks nilai x-, y- dan z, atau tiga fungsi atau ekspresi fx(x,y), fy(x,y), fz(x,y).

$$\gamma(t,s) = (x(t,s), y(t,s), z(t,s))$$

Karena x,y,z adalah matriks, kita asumsikan bahwa (t,s) melalui sebuah kotak persegi. Hasilnya, Anda dapat memplot gambar persegi panjang di ruang angkasa.
Anda dapat menggunakan bahasa matriks Euler untuk menghasilkan koordinat secara efektif.
Dalam contoh berikut, kami menggunakan vektor nilai t dan vektor kolom nilai s untuk membuat parameter permukaan bola. Dalam gambar kita dapat menandai daerah, dalam kasus kita daerah kutub.

```
>t=linspace(0,2pi,180); s=linspace(-pi/2,pi/2,90)'; ...
>x=cos(s)*cos(t); y=cos(s)*sin(t); z=sin(s); ...
>plot3d(x,y,z,>hue, ...
>color=blue,<frame,grid=[10,20], ...
>values=s,contourcolor=red,level=[90°-24°;90°-22°], ...
>scale=1.4,height=50°):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya_3D-026.png

Berikut adalah contoh, yang merupakan grafik fungsi.

```
>t=-1:0.1:1; s=(-1:0.1:1)'; plot3d(t,s,t*s,grid=10):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya_3D-027.png

Namun, kita bisa membuat segala macam permukaan. Berikut adalah permukaan yang sama dengan fungsi

$$x = y\,z$$

```
>plot3d(t*s,t,s,angle=180°,grid=10):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya_3D-028.png

Dengan lebih banyak usaha, kami dapat menghasilkan banyak permukaan.
Dalam contoh berikut, kita membuat tampilan bayangan dari bola yang terdistorsi. Koordinat biasa untuk bola adalah

$$\gamma(t, s) = (\cos(t)\cos(s), \sin(t)\sin(s), \cos(s))$$

dengan

$$0 \leq t \leq 2\pi, \quad \frac{-\pi}{2} \leq s \leq \frac{\pi}{2}.$$

Kami mendistorsi ini dengan sebuah faktor

$$d(t, s) = \frac{\cos(4t) + \cos(8s)}{4}.$$

```
>t=linspace(0,2pi,320); s=linspace(-pi/2,pi/2,160)'; ...
>d=1+0.2*(cos(4*t)+cos(8*s)); ...
>plot3d(cos(t)*cos(s)*d,sin(t)*cos(s)*d,sin(s)*d,hue=1, ...
>  light=[1,0,1],frame=0,zoom=5):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya_3D-029.png

Tentu saja, titik cloud juga dimungkinkan. Untuk memplot data titik dalam ruang, kita membutuhkan tiga vektor untuk koordinat titik-titik tersebut.
Gayanya sama seperti di plot2d dengan points=true;

```
>n=500;  ...
>  plot3d(normal(1,n),normal(1,n),normal(1,n),points=true,style="."):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya_3D-030.png

Dimungkinkan juga untuk memplot kurva dalam 3D. Dalam hal ini, lebih mudah untuk menghitung titik-titik kurva. Untuk kurva di pesawat kami menggunakan urutan koordinat dan parameter wire=true.

```
>t=linspace(0,8pi,500); ...
>plot3d(sin(t),cos(t),t/10,>wire,zoom=3):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya_3D-031.png

```
>t=linspace(0,4pi,1000); plot3d(cos(t),sin(t),t/2pi,>wire, ...
>linewidth=3,wirecolor=blue):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya_3D-032.png

```
>X=cumsum(normal(3,100)); ...
> plot3d(X[1],X[2],X[3],>anaglyph,>wire):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya_3D-033.png

EMT juga dapat memplot dalam mode anaglyph. Untuk melihat plot seperti itu, Anda memerlukan kacamata merah/sian.

```
> plot3d("x^2+y^3",>anaglyph,>contour,angle=30°):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya_3D-034.png

Seringkali, skema warna spektral digunakan untuk plot. Ini menekankan ketinggian fungsi.

```
>plot3d("x^2*y^3-y",>spectral,>contour,zoom=3.2):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya_3D-035.png

Euler juga dapat memplot permukaan berparameter, ketika parameternya adalah nilai x-, y-, dan z dari gambar kotak persegi panjang dalam ruang.
Untuk demo berikut, kami mengatur parameter u- dan v-, dan menghasilkan koordinat ruang dari ini.

```
>u=linspace(-1,1,10); v=linspace(0,2*pi,50)'; ...
>X=(3+u*cos(v/2))*cos(v); Y=(3+u*cos(v/2))*sin(v); Z=u*sin(v/2); ...
>plot3d(X,Y,Z,>anaglyph,<frame,>wire,scale=2.3):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya_3D-036.png

Berikut adalah contoh yang lebih rumit, yang megah dengan kacamata merah/sian.

```
>u:=linspace(-pi,pi,160); v:=linspace(-pi,pi,400)';  ...
>x:=(4*(1+.25*sin(3*v))+cos(u))*cos(2*v); ...
>y:=(4*(1+.25*sin(3*v))+cos(u))*sin(2*v); ...
> z=sin(u)+2*cos(3*v); ...
>plot3d(x,y,z,frame=0,scale=1.5,hue=1,light=[1,0,-1],zoom=2.8,>anaglyph):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya_3D-037.png

Plot Statistik

Plot bar juga dimungkinkan. Untuk ini, kita harus menyediakan
- x: vektor baris dengan n+1 elemen
- y: vektor kolom dengan n+1 elemen
- z: matriks nilai nxn.

z bisa lebih besar, tetapi hanya nilai nxn yang akan digunakan.
Dalam contoh, pertama-tama kita menghitung nilainya. Kemudian kita sesuaikan x dan y, sehingga vektor berpusat pada nilai yang digunakan.

```
>x=-1:0.1:1; y=x'; z=x^2+y^2; ...
>xa=(x|1.1)-0.05; ya=(y_1.1)-0.05; ...
>plot3d(xa,ya,z,bar=true):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya_3D-038.png

Dimungkinkan untuk membagi plot permukaan menjadi dua atau lebih bagian.

```
>x=-1:0.1:1; y=x'; z=x+y; d=zeros(size(x)); ...
>plot3d(x,y,z,disconnect=2:2:20):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya_3D-039.png

Jika memuat atau menghasilkan matriks data M dari file dan perlu memplotnya dalam 3D, Anda dapat menskalakan matriks ke [-1,1] dengan scale(M), atau menskalakan matriks dengan >zscale. Ini dapat dikombinasikan dengan faktor penskalaan individu yang diterapkan sebagai tambahan.

```
>i=1:20; j=i'; ...
>plot3d(i*j^2+100*normal(20,20),>zscale,scale=[1,1,1.5],angle=-40°,zoom=1.8):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya_3D-040.png

```
>Z=intrandom(5,100,6); v=zeros(5,6); ...
>loop 1 to 5; v[#]=getmultiplicities(1:6,Z[#]); end; ...
>columnsplot3d(v',scols=1:5,ccols=[1:5]):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya_3D-041.png

Permukaan Benda Putar

```
>plot2d("(x^2+y^2-1)^3-x^2*y^3",r=1.3, ...
>style="#",color=red,<outline, ...
>level=[-2;0],n=100):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya_3D-042.png

```
>ekspresi &= (x^2+y^2-1)^3-x^2*y^3; $ekspresi
```

$$\left(y^2+x^2-1\right)^3-x^2\,y^3$$

Kami ingin memutar kurva jantung di sekitar sumbu y. Berikut adalah ungkapan, yang mendefinisikan hati:

$$f(x,y)=(x^2+y^2-1)^3-x^2.y^3.$$

Selanjutnya kita atur

$$x=r.cos(a),\quad y=r.sin(a).$$

```
>function fr(r,a) &= ekspresi with [x=r*cos(a),y=r*sin(a)] | trigreduce; $fr(r,a)
```

$$\left(r^2-1\right)^3+\frac{\left(\sin\left(5\,a\right)-\sin\left(3\,a\right)-2\,\sin a\right)\,r^5}{16}$$

Hal ini memungkinkan untuk mendefinisikan fungsi numerik, yang memecahkan r, jika a diberikan. Dengan fungsi itu kita dapat memplot jantung yang diputar sebagai permukaan parametrik.

```
>function map f(a) := bisect("fr",0,2;a); ...
>t=linspace(-pi/2,pi/2,100); r=f(t);  ...
>s=linspace(pi,2pi,100)'; ...
>plot3d(r*cos(t)*sin(s),r*cos(t)*cos(s),r*sin(t), ...
>>hue,<frame,color=red,zoom=4,amb=0,max=0.7,grid=12,height=50°):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya_3D-045.png

Berikut ini adalah plot 3D dari gambar di atas yang diputar di sekitar sumbu z. Kami mendefinisikan fungsi, yang menggambarkan objek.

```
>function f(x,y,z) ...
```

```
  r=x^2+y^2;
  return (r+z^2-1)^3-r*z^3;
   endfunction
```

```
>plot3d("f(x,y,z)", ...
>xmin=0,xmax=1.2,ymin=-1.2,ymax=1.2,zmin=-1.2,zmax=1.4, ...
>implicit=1,angle=-30°,zoom=2.5,n=[10,60,60],>anaglyph):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya_3D-046.png

Plot 3D Khusus

Fungsi plot3d bagus untuk dimiliki, tetapi tidak memenuhi semua kebutuhan. Selain rutinitas yang lebih mendasar, dimungkinkan untuk mendapatkan plot berbingkai dari objek apa pun yang Anda suka.

Meskipun Euler bukan program 3D, ia dapat menggabungkan beberapa objek dasar. Kami mencoba memvisualisasikan paraboloid dan garis singgungnya.

```
>function myplot ...
```

```
    y=0:0.01:1; x=(0.1:0.01:1)';
    plot3d(x,y,0.2*(x-0.1)/2,<scale,<frame,>hue, ..
      hues=0.5,>contour,color=orange);
    h=holding(1);
    plot3d(x,y,(x^2+y^2)/2,<scale,<frame,>contour,>hue);
    holding(h);
  endfunction
```

Sekarang framedplot() menyediakan frame, dan mengatur tampilan.

```
>framedplot("myplot",[0.1,1,0,1,0,1],angle=-45°, ...
>  center=[0,0,-0.7],zoom=6):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya_3D-047.png

Dengan cara yang sama, Anda dapat memplot bidang kontur secara manual. Perhatikan bahwa plot3d() menyetel jendela ke fullwindow() secara default, tetapi plotcontourplane() mengasumsikan itu.

```
>x=-1:0.02:1.1; y=x'; z=x^2-y^4;
>function myplot (x,y,z) ...
```

```
    zoom(2);
    wi=fullwindow();
    plotcontourplane(x,y,z,level="auto",<scale);
    plot3d(x,y,z,>hue,<scale,>add,color=white,level="thin");
    window(wi);
    reset();
  endfunction
```

```
>myplot(x,y,z):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya_3D-048.png

Animasi

Euler dapat menggunakan frame untuk menghitung animasi terlebih dahulu.
Salah satu fungsi yang memanfaatkan teknik ini adalah rotate. Itu dapat mengubah sudut pandang dan menggambar ulang plot 3D. Fungsi memanggil addpage() untuk setiap plot baru. Akhirnya itu menjiwai plot.
Silakan pelajari sumber rotasi untuk melihat lebih detail.

```
>function testplot () := plot3d("x^2+y^3"); ...
>rotate("testplot"); testplot():
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya_3D-049.png

Menggambar Povray

Dengan bantuan file Euler povray.e, Euler dapat menghasilkan file Povray. Hasilnya sangat bagus untuk dilihat.
Anda perlu menginstal Povray (32bit atau 64bit) dari http://www.povray.org/,
dan meletakkan sub-direktori "bin" dari Povray ke jalur lingkungan, atau mengatur variabel "defaultpovray" dengan path lengkap yang menunjuk ke "pvengine.exe".
Antarmuka Povray dari Euler menghasilkan file Povray di direktori home pengguna, dan memanggil Povray untuk mengurai file-file ini. Nama file default adalah current.pov, dan direktori default adalah eulerhome(), biasanya c:\Users\Username\Euler. Povray menghasilkan file PNG, yang dapat dimuat oleh Euler ke dalam buku catatan. Untuk membersihkan file-file ini, gunakan povclear().
Fungsi pov3d memiliki semangat yang sama dengan plot3d. Ini dapat menghasilkan grafik fungsi f(x,y), atau permukaan dengan koordinat X,Y,Z dalam matriks, termasuk garis level opsional. Fungsi ini memulai raytracer secara otomatis, dan memuat adegan ke dalam notebook Euler.
Selain pov3d(), ada banyak fungsi yang menghasilkan objek Povray. Fungsi-fungsi ini mengembalikan string, yang berisi kode Povray untuk objek. Untuk menggunakan fungsi ini, mulai file Povray dengan povstart(). Kemudian gunakan writeln(...) untuk menulis objek ke file adegan. Terakhir, akhiri file dengan povend(). Secara default, raytracer akan dimulai, dan PNG akan dimasukkan ke dalam notebook Euler.
Fungsi objek memiliki parameter yang disebut "look", yang membutuhkan string dengan kode Povray untuk tekstur dan hasil akhir objek. Fungsi povlook() dapat digunakan untuk menghasilkan string ini. Ini memiliki parameter untuk warna, transparansi, Phong Shading dll.
Perhatikan bahwa alam semesta Povray memiliki sistem koordinat lain. Antarmuka ini menerjemahkan semua koordinat ke sistem Povray. Jadi Anda dapat terus berpikir dalam sistem koordinat Euler dengan z menunjuk vertikal ke atas, a nd x,y,z sumbu dalam arti tangan kanan.
Anda perlu memuat file povray.

```
>load povray;
```

Pastikan, direktori bin Povray ada di jalur. Jika tidak, edit variabel berikut sehingga berisi path ke povray yang dapat dieksekusi.

```
>defaultpovray="C:\Program Files\POV-Ray\v3.7\bin\pvengine.exe"
```

```
C:\Program Files\POV-Ray\v3.7\bin\pvengine.exe
```

Untuk kesan pertama, kami memplot fungsi sederhana. Perintah berikut menghasilkan file povray di direktori pengguna Anda, dan menjalankan Povray untuk ray tracing file ini.
Jika Anda memulai perintah berikut, GUI Povray akan terbuka, menjalankan file, dan menutup secara otomatis. Karena alasan keamanan, Anda akan ditanya, apakah Anda ingin mengizinkan file exe untuk dijalankan. Anda dapat menekan batal untuk menghentikan pertanyaan lebih lanjut. Anda mungkin harus menekan OK di jendela Povray untuk mengakui dialog awal Povray.

```
>pov3d("x^2+y^2",zoom=3);
```

```
exec:
    return _exec(program,param,dir,print,hidden,wait);
povray:
    exec(program,params,defaulthome);
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
pov3d:
    if povray then povray(currentfile,w,h,w/h); endif;
```

Kita dapat membuat fungsi menjadi transparan dan menambahkan hasil akhir lainnya. Kami juga dapat menambahkan garis level ke plot fungsi.

```
>pov3d("x^2+y^3",axiscolor=red,angle=20°, ...
>  look=povlook(blue,0.2),level=-1:0.5:1,zoom=3.8);
```

```
exec:
    return _exec(program,param,dir,print,hidden,wait);
povray:
    exec(program,params,defaulthome);
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
pov3d:
    if povray then povray(currentfile,w,h,w/h); endif;
```

Terkadang perlu untuk mencegah penskalaan fungsi, dan menskalakan fungsi dengan tangan.
Kami memplot himpunan titik di bidang kompleks, di mana produk dari jarak ke 1 dan -1 sama dengan 1.

```
>pov3d("((x-1)^2+y^2)*((x+1)^2+y^2)/40",r=1.5, ...
>  angle=-120°,level=1/40,dlevel=0.005,light=[-1,1,1],height=45°,n=50, ...
>  <fscale,zoom=3.8);
```

```
exec:
    return _exec(program,param,dir,print,hidden,wait);
povray:
    exec(program,params,defaulthome);
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
pov3d:
    if povray then povray(currentfile,w,h,w/h); endif;
```

Merencanakan dengan Koordinat

Alih-alih fungsi, kita dapat memplot dengan koordinat. Seperti pada plot3d, kita membutuhkan tiga matriks untuk mendefinisikan objek.
Dalam contoh kita memutar fungsi di sekitar sumbu z.

```
>function f(x) := x^3-x+1; ...
>x=-1:0.01:1; t=linspace(0,2pi,8)'; ...
>Z=x; X=cos(t)*f(x); Y=sin(t)*f(x); ...
>pov3d(X,Y,Z,angle=40°,height=20°,axis=0,zoom=4,light=[10,-5,5]);
```

```
exec:
    return _exec(program,param,dir,print,hidden,wait);
povray:
    exec(program,params,defaulthome);
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
pov3d:
    if povray then povray(currentfile,w,h,w/h); endif;
```

Dalam contoh berikut, kami memplot gelombang teredam. Kami menghasilkan gelombang dengan bahasa matriks Euler.
Kami juga menunjukkan, bagaimana objek tambahan dapat ditambahkan ke adegan pov3d. Untuk pembuatan objek, lihat contoh berikut. Perhatikan bahwa plot3d menskalakan plot, sehingga cocok dengan kubus satuan.

```
>r=linspace(0,1,80); phi=linspace(0,2pi,80)'; ...
>x=r*cos(phi); y=r*sin(phi); z=exp(-5*r)*cos(8*pi*r)/3;  ...
>pov3d(x,y,z,zoom=5,axis=0,add=povsphere([0,0,0.5],0.1,povlook(green)), ...
>  w=500,h=300);
```

```
exec:
    return _exec(program,param,dir,print,hidden,wait);
povray:
    exec(program,params,defaulthome);
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
pov3d:
    if povray then povray(currentfile,w,h,w/h); endif;
```

Dengan metode bayangan canggih dari Povray, sangat sedikit titik yang dapat menghasilkan permukaan yang sangat halus. Hanya di perbatasan dan dalam bayang-bayang triknya mungkin menjadi jelas.
Untuk ini, kita perlu menambahkan vektor normal di setiap titik matriks.

```
>Z &= x^2*y^3
```

```
                                   2  3
                                  x  y
```

Persamaan permukaannya adalah [x,y,Z]. Kami menghitung dua turunan ke x dan y ini dan mengambil produk silang sebagai normal.

```
>dx &= diff([x,y,Z],x); dy &= diff([x,y,Z],y);
```

Kami mendefinisikan normal sebagai produk silang dari turunan ini, dan mendefinisikan fungsi koordinat.

```
>N &= crossproduct(dx,dy); NX &= N[1]; NY &= N[2]; NZ &= N[3]; N,
```

```
                      3         2   2
          [- 2 x y , - 3 x   y , 1]
```

Kami hanya menggunakan 25 poin.

```
>x=-1:0.5:1; y=x';
>pov3d(x,y,Z(x,y),angle=10°, ...
>  xv=NX(x,y),yv=NY(x,y),zv=NZ(x,y),<shadow);
```

```
  exec:
      return _exec(program,param,dir,print,hidden,wait);
  povray:
      exec(program,params,defaulthome);
  Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
  pov3d:
      if povray then povray(currentfile,w,h,w/h); endif;
```

Berikut ini adalah simpul Trefoil yang dilakukan oleh A. Busser di Povray. Ada versi yang ditingkatkan dari ini dalam contoh.

See: Contoh\Trefoil Simpul | Simpul trefoil

Untuk tampilan yang bagus dengan tidak terlalu banyak titik, kami menambahkan vektor normal di sini. Kami menggunakan Maxima untuk menghitung normal bagi kami. Pertama, ketiga fungsi koordinat sebagai ekspresi simbolik.

```
>X &= ((4+sin(3*y))+cos(x))*cos(2*y); ...
>Y &= ((4+sin(3*y))+cos(x))*sin(2*y); ...
>Z &= sin(x)+2*cos(3*y);
```

Kemudian kedua vektor turunan ke x dan y.

```
>dx &= diff([X,Y,Z],x); dy &= diff([X,Y,Z],y);
```

Sekarang normal, yang merupakan produk silang dari dua turunan.

```
>dn &= crossproduct(dx,dy);
```

Kami sekarang mengevaluasi semua ini secara numerik.

```
>x:=linspace(-%pi,%pi,40); y:=linspace(-%pi,%pi,100)';
```

Vektor normal adalah evaluasi dari ekspresi simbolik dn[i] untuk i=1,2,3. Sintaks untuk ini adalah &"expression"(parameters). Ini adalah alternatif dari metode pada contoh sebelumnya, di mana kita mendefinisikan ekspresi simbolik NX, NY, NZ terlebih dahulu.

```
>pov3d(X(x,y),Y(x,y),Z(x,y),axis=0,zoom=5,w=450,h=350, ...
>  <shadow,look=povlook(gray), ...
>  xv=&"dn[1]"(x,y), yv=&"dn[2]"(x,y), zv=&"dn[3]"(x,y));
```

```
exec:
    return _exec(program,param,dir,print,hidden,wait);
povray:
    exec(program,params,defaulthome);
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
pov3d:
    if povray then povray(currentfile,w,h,w/h); endif;
```

Kami juga dapat menghasilkan grid dalam 3D.

```
>povstart(zoom=4); ...
>x=-1:0.5:1; r=1-(x+1)^2/6; ...
>t=(0°:30°:360°)'; y=r*cos(t); z=r*sin(t); ...
>writeln(povgrid(x,y,z,d=0.02,dballs=0.05)); ...
>povend();
```

```
exec:
    return _exec(program,param,dir,print,hidden,wait);
povray:
    exec(program,params,defaulthome);
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
povend:
    povray(file,w,h,aspect,exit);
```

With povgrid(), curves are possible.

```
>povstart(center=[0,0,1],zoom=3.6); ...
>t=linspace(0,2,1000); r=exp(-t); ...
>x=cos(2*pi*10*t)*r; y=sin(2*pi*10*t)*r; z=t; ...
>writeln(povgrid(x,y,z,povlook(red))); ...
>writeAxis(0,2,axis=3); ...
>povend();
```

```
exec:
    return _exec(program,param,dir,print,hidden,wait);
povray:
    exec(program,params,defaulthome);
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
povend:
    povray(file,w,h,aspect,exit);
```

Objek Povray

Di atas, kami menggunakan pov3d untuk memplot permukaan. Antarmuka povray di Euler juga dapat menghasilkan objek Povray. Objek-objek ini disimpan sebagai string di Euler, dan perlu ditulis ke file Povray. Kami memulai output dengan povstart().

```
>povstart(zoom=4);
```

Pertama kita mendefinisikan tiga silinder, dan menyimpannya dalam string di Euler.
Fungsi povx() dll. hanya mengembalikan vektor [1,0,0], yang dapat digunakan sebagai gantinya.

```
>c1=povcylinder(-povx,povx,1,povlook(red)); ...
>c2=povcylinder(-povy,povy,1,povlook(green)); ...
>c3=povcylinder(-povz,povz,1,povlook(blue)); ...
```

String berisi kode Povray, yang tidak perlu kita pahami pada saat itu.

```
>c1
```

```
cylinder { <-1,0,0>, <1,0,0>, 1
 texture { pigment { color rgb <0.564706,0.0627451,0.0627451> }  }
 finish { ambient 0.2 }
 }
```

Seperti yang Anda lihat, kami menambahkan tekstur ke objek dalam tiga warna berbeda.
Itu dilakukan oleh povlook(), yang mengembalikan string dengan kode Povray yang relevan. Kita dapat menggunakan warna Euler default, atau menentukan warna kita sendiri. Kami juga dapat menambahkan transparansi, atau mengubah cahaya sekitar.

```
>povlook(rgb(0.1,0.2,0.3),0.1,0.5)
```

```
 texture { pigment { color rgbf <0.101961,0.2,0.301961,0.1> }  }
 finish { ambient 0.5 }
```

Sekarang kita mendefinisikan objek persimpangan, dan menulis hasilnya ke file.

```
>writeln(povintersection([c1,c2,c3]));
```

Persimpangan tiga silinder sulit untuk divisualisasikan, jika Anda belum pernah melihatnya sebelumnya.

```
>povend;
```

```
exec:
    return _exec(program,param,dir,print,hidden,wait);
povray:
    exec(program,params,defaulthome);
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
povend:
    povray(file,w,h,aspect,exit);
```

Fungsi berikut menghasilkan fraktal secara rekursif.
Fungsi pertama menunjukkan, bagaimana Euler menangani objek Povray sederhana. Fungsi povbox() mengembalikan string, yang berisi koordinat kotak, tekstur, dan hasil akhir.

```
>function onebox(x,y,z,d) := povbox([x,y,z],[x+d,y+d,z+d],povlook());
>function fractal (x,y,z,h,n) ...
```

```
   if n==1 then writeln(onebox(x,y,z,h));
   else
     h=h/3;
     fractal(x,y,z,h,n-1);
     fractal(x+2*h,y,z,h,n-1);
     fractal(x,y+2*h,z,h,n-1);
     fractal(x,y,z+2*h,h,n-1);
     fractal(x+2*h,y+2*h,z,h,n-1);
     fractal(x+2*h,y,z+2*h,h,n-1);
     fractal(x,y+2*h,z+2*h,h,n-1);
     fractal(x+2*h,y+2*h,z+2*h,h,n-1);
     fractal(x+h,y+h,z+h,h,n-1);
   endif;
  endfunction
```

```
>povstart(fade=10,<shadow);
>fractal(-1,-1,-1,2,4);
>povend();
```

```
  exec:
      return _exec(program,param,dir,print,hidden,wait);
  povray:
      exec(program,params,defaulthome);
  Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
  povend:
      povray(file,w,h,aspect,exit);
```

Perbedaan memungkinkan memotong satu objek dari yang lain. Seperti persimpangan, ada bagian dari objek CSG Povray.

```
>povstart(light=[5,-5,5],fade=10);
```

Untuk demonstrasi ini, kami mendefinisikan objek di Povray, alih-alih menggunakan string di Euler. Definisi ditulis ke file segera.
Koordinat kotak -1 berarti [-1,-1,-1].

```
>povdefine("mycube",povbox(-1,1));
```

Kita dapat menggunakan objek ini di povobject(), yang mengembalikan string seperti biasa.

```
>c1=povobject("mycube",povlook(red));
```

Kami menghasilkan kubus kedua, dan memutar dan menskalakannya sedikit.

```
>c2=povobject("mycube",povlook(yellow),translate=[1,1,1], ...
>  rotate=xrotate(10°)+yrotate(10°), scale=1.2);
```

Kemudian kita ambil selisih kedua benda tersebut.

```
>writeln(povdifference(c1,c2));
```

Sekarang tambahkan tiga sumbu.

```
>writeAxis(-1.2,1.2,axis=1); ...
>writeAxis(-1.2,1.2,axis=2); ...
>writeAxis(-1.2,1.2,axis=4); ...
>povend();
```

```
exec:
    return _exec(program,param,dir,print,hidden,wait);
povray:
    exec(program,params,defaulthome);
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
povend:
    povray(file,w,h,aspect,exit);
```

Fungsi Implisit

Povray dapat memplot himpunan di mana f(x,y,z)=0, seperti parameter implisit di plot3d. Namun, hasilnya terlihat jauh lebih baik.
Sintaks untuk fungsinya sedikit berbeda. Anda tidak dapat menggunakan output dari ekspresi Maxima atau Euler.

```
>povstart(angle=70°,height=50°,zoom=4);
```

Buat permukaan implisit. Perhatikan sintaks yang berbeda dalam ekspresi.

```
>writeln(povsurface("pow(x,2)*y-pow(y,3)-pow(z,2)",povlook(green))); ...
>writeAxes(); ...
>povend();
```

```
exec:
    return _exec(program,param,dir,print,hidden,wait);
povray:
    exec(program,params,defaulthome);
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
povend:
    povray(file,w,h,aspect,exit);
```

Objek Jala

Dalam contoh ini, kami menunjukkan cara membuat objek mesh, dan menggambarnya dengan informasi tambahan.
Kami ingin memaksimalkan xy di bawah kondisi x+y=1 dan menunjukkan sentuhan tangensial dari garis level.

```
>povstart(angle=-10°,center=[0.5,0.5,0.5],zoom=7);
```

Kami tidak dapat menyimpan objek dalam string seperti sebelumnya, karena terlalu besar. Jadi kita mendefinisikan objek dalam file Povray menggunakan declare. Fungsi povtriangle() melakukan ini secara otomatis. Itu dapat menerima vektor normal seperti pov3d().
Berikut ini mendefinisikan objek mesh, dan langsung menulisnya ke dalam file.

```
>x=0:0.02:1; y=x'; z=x*y; vx=-y; vy=-x; vz=1;
>mesh=povtriangles(x,y,z,"",vx,vy,vz);
```

Sekarang kita mendefinisikan dua cakram, yang akan berpotongan dengan permukaan.

```
>cl=povdisc([0.5,0.5,0],[1,1,0],2); ...
>ll=povdisc([0,0,1/4],[0,0,1],2);
```

Tulis permukaan dikurangi dua cakram.

```
>writeln(povdifference(mesh,povunion([cl,ll]),povlook(green)));
```

Tulis dua persimpangan.

```
>writeln(povintersection([mesh,cl],povlook(red))); ...
>writeln(povintersection([mesh,ll],povlook(gray)));
```

Tulis titik maksimum.

```
>writeln(povpoint([1/2,1/2,1/4],povlook(gray),size=2*defaultpointsize));
```

Tambahkan sumbu dan selesaikan.

```
>writeAxes(0,1,0,1,0,1,d=0.015); ...
>povend();
```

```
exec:
    return _exec(program,param,dir,print,hidden,wait);
povray:
    exec(program,params,defaulthome);
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
povend:
    povray(file,w,h,aspect,exit);
```

Anaglyph di Povray

Untuk menghasilkan anaglyph untuk kacamata merah/sian, Povray harus berjalan dua kali dari posisi kamera yang berbeda. Ini menghasilkan dua file Povray dan dua file PNG, yang dimuat dengan fungsi loadanaglyph().
Tentu saja, Anda memerlukan kacamata merah/sian untuk melihat contoh berikut dengan benar.
Fungsi pov3d() memiliki sakelar sederhana untuk menghasilkan anaglyphs.

```
>pov3d("-exp(-x^2-y^2)/2",r=2,height=45°,>anaglyph, ...
>  center=[0,0,0.5],zoom=3.5);
```

```
exec:
    return _exec(program,param,dir,print,hidden,wait);
povray:
    exec(program,params,defaulthome);
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
pov3d:
    if povray then povray(currentfile,w,h,w/h); endif;
```

Jika Anda membuat adegan dengan objek, Anda perlu menempatkan generasi adegan ke dalam fungsi, dan menjalankannya dua kali dengan nilai yang berbeda untuk parameter anaglyph.

```
>function myscene ...
```

```
    s=povsphere(povc,1);
    cl=povcylinder(-povz,povz,0.5);
    clx=povobject(cl,rotate=xrotate(90°));
    cly=povobject(cl,rotate=yrotate(90°));
    c=povbox([-1,-1,0],1);
    un=povunion([cl,clx,cly,c]);
    obj=povdifference(s,un,povlook(red));
    writeln(obj);
    writeAxes();
  endfunction
```

Fungsi povanaglyph() melakukan semua ini. Parameternya seperti di povstart() dan povend() digabungkan.

```
>povanaglyph("myscene",zoom=4.5);
```

```
exec:
    return _exec(program,param,dir,print,hidden,wait);
povray:
    exec(program,params,defaulthome);
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
povanaglyph:
    povray(currentfile,w,h,aspect,exit);
```

Mendefinisikan Objek sendiri

Antarmuka povray Euler berisi banyak objek. Tapi Anda tidak terbatas pada ini. Anda dapat membuat objek sendiri, yang menggabungkan objek lain, atau objek yang sama sekali baru.
Kami mendemonstrasikan sebuah torus. Perintah Povray untuk ini adalah "torus". Jadi kami mengembalikan string dengan perintah ini dan parameternya. Perhatikan bahwa torus selalu berpusat di titik asal.

```
>function povdonat (r1,r2,look="") ...
```

```
    return "torus {"+r1+","+r2+look+"}";
  endfunction
```

Inilah torus pertama kami.

```
>t1=povdonat(0.8,0.2)
```

```
 torus {0.8,0.2}
```

Mari kita gunakan objek ini untuk membuat torus kedua, diterjemahkan dan diputar.

```
>t2=povobject(t1,rotate=xrotate(90°),translate=[0.8,0,0])
```

```
 object { torus {0.8,0.2}
  rotate 90 *x
  translate <0.8,0,0>
  }
```

Sekarang kita menempatkan objek-objek ini ke dalam sebuah adegan. Untuk tampilan, kami menggunakan Phong Shading.

```
>povstart(center=[0.4,0,0],angle=0°,zoom=3.8,aspect=1.5); ...
>writeln(povobject(t1,povlook(green,phong=1))); ...
>writeln(povobject(t2,povlook(green,phong=1))); ...
```

>povend();
memanggil program Povray. Namun, jika terjadi kesalahan, itu tidak menampilkan kesalahan. Karena itu Anda harus menggunakan

```
>povend(<keluar);
```

jika ada yang tidak berhasil. Ini akan membiarkan jendela Povray terbuka.

```
>povend(h=320,w=480);
```

```
 exec:
     return _exec(program,param,dir,print,hidden,wait);
 povray:
     exec(program,params,defaulthome);
 Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
 povend:
     povray(file,w,h,aspect,exit);
```

Berikut adalah contoh yang lebih rumit. Kami memecahkan

$$Ax \leq b, \quad x \geq 0, \quad c.x \to \text{Max.}$$

dan menunjukkan titik layak dan optimal dalam plot 3D.

```
>A=[10,8,4;5,6,8;6,3,2;9,5,6];
>b=[10,10,10,10]';
>c=[1,1,1];
```

Pertama, mari kita periksa, apakah contoh ini memiliki solusi sama sekali.

```
>x=simplex(A,b,c,>max,>check)'
```

```
[0,  1,  0.5]
```

Ya, sudah.
Selanjutnya kita mendefinisikan dua objek. Yang pertama adalah pesawat

$$a \cdot x \leq b$$

```
>function oneplane (a,b,look="") ...
```

```
  return povplane(a,b,look)
endfunction
```

Kemudian kita mendefinisikan persimpangan dari semua setengah ruang dan sebuah kubus.

```
>function adm (A, b, r, look="") ...
```

```
  ol=[];
  loop 1 to rows(A); ol=ol|oneplane(A[#],b[#]); end;
  ol=ol|povbox([0,0,0],[r,r,r]);
  return povintersection(ol,look);
endfunction
```

Kita sekarang dapat merencanakan adegannya.

```
>povstart(angle=120°,center=[0.5,0.5,0.5],zoom=3.5); ...
>writeln(adm(A,b,2,povlook(green,0.4))); ...
>writeAxes(0,1.3,0,1.6,0,1.5); ...
```

Berikut ini adalah lingkaran di sekitar optimal.

```
>writeln(povintersection([povsphere(x,0.5),povplane(c,c.x')], ...
>  povlook(red,0.9)));
```

Dan kesalahan ke arah yang optimal.

```
>writeln(povarrow(x,c*0.5,povlook(red)));
```

Kami menambahkan teks ke layar. Teks hanyalah objek 3D. Kita perlu menempatkan dan memutarnya menurut pandangan kita.

```
>writeln(povtext("Linear Problem",[0,0.2,1.3],size=0.05,rotate=125°)); ...
>povend();
```

```
  exec:
      return _exec(program,param,dir,print,hidden,wait);
  povray:
      exec(program,params,defaulthome);
  Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
  povend:
      povray(file,w,h,aspect,exit);
```

Lebih Banyak Contoh

Anda dapat menemukan beberapa contoh lagi untuk Povray di Euler di file berikut.
See: Examples/Dandelin Spheres
See: Examples/Donat Math
See: Examples/Trefoil Knot
See: Examples/Optimization by Affine Scaling

```
>povstart(zoom=3); ...
>x=-1:0.5:1; r=1-(x+1)^3/6; ...
>t=(0°:30°:360°)'; y=r*cos(t); z=r*sin(t); ...
>writeln(povgrid(x,y,z,d=0.02,dballs=0.05)); ...
>povend();
```

```
  exec:
      return _exec(program,param,dir,print,hidden,wait);
  povray:
      exec(program,params,defaulthome);
  Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
  povend:
      povray(file,w,h,aspect,exit);
```

BAB 5

KB PEKAN 9-10: MENGGUNAKAN EMT UNTUK KALKULUS

[a4paper,10pt]article eumat

Nama : Dimas Oki Sriwijaya Saputra
Kelas : Matematika E
NIM : 22305141053

Kalkulus dengan EMT

Materi Kalkulus mencakup di antaranya:
- Fungsi (fungsi aljabar, trigonometri, eksponensial, logaritma, komposisi fungsi)
- Limit Fungsi,
- Turunan Fungsi,
- Integral Tak Tentu,
- Integral Tentu dan Aplikasinya,
- Barisan dan Deret (kekonvergenan barisan dan deret).

EMT (bersama Maxima) dapat digunakan untuk melakukan semua perhitungan di dalam kalkulus, baik secara numerik maupun analitik (eksak).

Mendefinisikan Fungsi

Terdapat beberapa cara mendefinisikan fungsi pada EMT, yakni:
- Menggunakan format nama_fungsi := rumus fungsi (untuk fungsi numerik),
- Menggunakan format nama_fungsi &= rumus fungsi (untuk fungsi simbolik, namun dapat dihitung secara numerik),
- Menggunakan format nama_fungsi &&= rumus fungsi (untuk fungsi simbolik murni, tidak dapat dihitung langsung),
- Fungsi sebagai program EMT.

Setiap format harus diawali dengan perintah function (bukan sebagai ekspresi).
Berikut adalah adalah beberapa contoh cara mendefinisikan fungsi.

```
>function f(x) := 2*x^2+exp(sin(x)) // fungsi numerik
>f(0), f(1), f(pi)
```

```
1
4.31977682472
20.7392088022
```

```
>function g(x) := sqrt(x^2-3*x)/(x+1)
>g(3)
```

```
0
```

```
>g(0)
```

```
0
```

```
>g(1)
```

```
Floating point error!
Error in sqrt
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
g:
    useglobal; return sqrt(x^2-3*x)/(x+1)
Error in:
g(1) ...
    ^
```

```
>f(g(5)) // komposisi fungsi
```

```
2.20920171961
```

```
>g(f(5))
```

```
0.950898070639
```

```
>f(0:10) // nilai-nilai f(1), f(2), ..., f(10)
```

```
[1,  4.31978,  10.4826,  19.1516,  32.4692,  50.3833,  72.7562,
99.929,  130.69,  163.51,  200.58]
```

```
>fmap(0:10) // sama dengan f(0:10), berlaku untuk semua fungsi
```

```
[1,  4.31978,  10.4826,  19.1516,  32.4692,  50.3833,  72.7562,
99.929,  130.69,  163.51,  200.58]
```

Misalkan kita akan mendefinisikan fungsi

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & x > 0 \\ x^2 & x \le 0. \end{cases}$$

Fungsi tersebut tidak dapat didefinisikan sebagai fungsi numerik secara "inline" menggunakan format :=, melainkan didefinisikan sebagai program. Perhatikan, kata "map" digunakan agar fungsi dapat menerima vektor sebagai input, dan hasilnya berupa vektor. Jika tanpa kata "map" fungsinya hanya dapat menerima input satu nilai.

```
>function map f(x) ...
```

```
    if x>0 then return x^3
    else return x^2
    endif;
  endfunction
```

```
>f(1)
```

```
  1
```

```
>f(-2)
```

```
  4
```

```
>f(-5:5)
```

```
  [25,  16,  9,  4,  1,  0,  1,  8,  27,  64,  125]
```

```
>aspect(1.5); plot2d("f(x)",-5,5):
```

images/Pekan 9_Dimas Oki_Kalkulus-001.png

```
>function f(x) &= 2*E^x // fungsi simbolik
```

```
                                  x
                               2 E
```

```
>function g(x) &= 3*x+1
```

```
                              3 x + 1
```

```
>function h(x) &= f(g(x)) // komposisi fungsi
```

```
                                3 x + 1
                             2 E
```

Latihan

Bukalah buku Kalkulus. Cari dan pilih beberapa (paling sedikit 5 fungsi berbeda tipe/bentuk/jenis) fungsi dari buku tersebut, kemudian definisikan di EMT pada baris-baris perintah berikut (jika perlu tambahkan lagi). Untuk setiap fungsi, hitung beberapa nilainya, baik untuk satu nilai maupun vektor. Gambar grafik tersebut.

Juga, carilah fungsi beberapa (dua) variabel. Lakukan hal sama seperti di atas.

Nomor 1

$$a(x) = x^3 + 3x^2 - 6x - 18$$

```
>function a(x) &= (x^3 + 3*x^2 - 6*x - 18) // fungsi simbolik
```

```
                         3      2
                        x  + 3 x  - 6 x - 18
```

```
>function a(x) := (x^3+3*x^2-6*x-18) // fungsi numerik
>a(4)
```

```
  70
```

```
>a(-3:2)
```

```
  [0,  -2,  -10,  -18,  -20,  -10]
```

```
>aspect(3); plot2d("a(x)",-3,2):
```

images/Pekan 9_Dimas Oki_Kalkulus-002.png

```
>
```

Nomor 2

$$g(x) = \sqrt{x^2 + 36}$$

```
>function g(x) := (sqrt(x^2+36)) // fungsi numerik
>g(6)
```

```
8.48528137424
```

```
>g=(-3:3)
```

```
[-3,  -2,  -1,  0,  1,  2,  3]
```

```
>aspect(3); plot2d("g(x)",-3,3):
```

images/Pekan 9_Dimas Oki_Kalkulus-003.png

Nomor 3

$$d(x) = \frac{x^2 + 6}{2x}$$

```
>function d(x) := ((x^2+6)/(2*x)) // fungsi numerik
>d(2)
```

```
2.5
```

```
>d=(-2:2)
```

```
[-2,  -1,  0,  1,  2]
```

```
>aspect(3); plot2d("d(x)",-2,2):
```

images/Pekan 9_Dimas Oki_Kalkulus-004.png

Nomor 4

$$f(x) = \cos x$$

$$g(x) = \sin x$$

```
>function f(x) &= (cos(x)) // fungsi numerik
```

cos(x)

```
>f(pi)
```

-1

```
>f(3*pi)
```

-1

```
>function g(x) &= (sin(x)) // fungsi numerik
```

sin(x)

```
>g(pi)
```

0

```
>g(2*pi)
```

0

```
>f(g(pi)) // komposisi fungsi
```

1

```
>g(f(pi))
```

-0.841470984808

```
>function h(x) &= f(g(pi))
```

$$1$$

```
>plot2d("h(x)",-4,4):
```

images/Pekan 9_Dimas Oki_Kalkulus-005.png

Nomor 5

$$e(x) = \begin{cases} x-3 & x<2 \\ 1-x & x \geq 2. \end{cases}$$

```
>function map e(x) ...
```

```
if x<2 then return x-3
else return 1-x
endif;e(5)
endfunction
```

```
>e(5)
```

```
-4
```

```
>e=(-3:3)
```

```
[-3,  -2,  -1,  0,  1,  2,  3]
```

```
>aspect(2); plot2d("e(x)",-3,3):
```

images/Pekan 9_Dimas Oki_Kalkulus-006.png

Menghitung Limit

Perhitungan limit pada EMT dapat dilakukan dengan menggunakan fungsi Maxima, yakni "limit". Fungsi "limit" dapat digunakan untuk menghitung limit fungsi dalam bentuk ekspresi maupun fungsi yang sudah didefinisikan sebelumnya. Nilai limit dapat dihitung pada sebarang nilai atau pada tak hingga (-inf, minf, dan inf). Limit kiri dan limit kanan juga dapat dihitung, dengan cara memberi opsi "plus" atau "minus". Hasil limit dapat berupa nilai, "und' (tak definisi), "ind" (tak tentu namun terbatas), "infinity" (kompleks tak hingga). Perhatikan beberapa contoh berikut. Perhatikan cara menampilkan perhitungan secara lengkap, tidak hanya menampilkan hasilnya saja.

```
>$showev('limit(1/(2*x-1),x,0))
```

$$\lim_{x\to 0}{\frac{1}{2\,x-1}}=-1$$

```
>$showev('limit((x^2-3*x-10)/(x-5),x,5))
```

$$\lim_{x\to 5}{\frac{x^2-3\,x-10}{x-5}}=7$$

```
>$showev('limit(sin(x)/x,x,0))
```

$$\lim_{x\to 0}{\frac{\sin x}{x}}=1$$

```
>plot2d("sin(x)/x",-pi,pi):
```

images/Pekan 9_Dimas Oki_Kalkulus-010.png

```
>$showev('limit(sin(x^3)/x,x,0))
```

$$\lim_{x\to 0}{\frac{\sin x^3}{x}}=0$$

```
>$showev('limit(log(x), x, minf))
```

$$\lim_{x\rightarrow -\infty }{\log x}=\mathit{infinity}$$

```
>$showev('limit((-2)^x,x, inf))
```

$$\lim_{x\rightarrow \infty }{\left(-2\right)^{x}}=\mathit{infinity}$$

```
>$showev('limit(t-sqrt(2-t),t,2,minus))
```

$$\lim_{t\uparrow 2}{t-\sqrt{2-t}}=2$$

```
>$showev('limit(t-sqrt(2-t),t,5,plus)) // Perhatikan hasilnya
```

$$\lim_{t\downarrow 5}{t-\sqrt{2-t}}=5-\sqrt{3}\,i$$

```
>plot2d("x-sqrt(2-x)",-2,5):
```

images/Pekan 9_Dimas Oki_Kalkulus-016.png

```
>$showev('limit((x^2-9)/(2*x^2-5*x-3),x,3))
```

$$\lim_{x\rightarrow 3}{\frac{x^2-9}{2\,x^2-5\,x-3}}=\frac{6}{7}$$

```
>$showev('limit((1-cos(x))/x,x,0))
```

$$\lim_{x\rightarrow 0}{\frac{1-\cos x}{x}}=0$$

```
>$showev('limit((x^2+abs(x))/(x^2-abs(x)),x,0))
```

$$\lim_{x\to 0}{\frac{\left| x\right| +x^2}{x^2-\left| x\right| }}=-1$$

```
>$showev('limit((1+1/x)^x,x,inf))
```

$$\lim_{x\to \infty }{\left(\frac{1}{x}+1\right)^{x}}=e$$

```
>$showev('limit((1+k/x)^x,x,inf))
```

$$\lim_{x\to \infty }{\left(\frac{k}{x}+1\right)^{x}}=e^{k}$$

```
>$showev('limit((1+x)^(1/x),x,0))
```

$$\lim_{x\to 0}{\left(x+1\right)^{\frac{1}{x}}}=e$$

```
>$showev('limit((x/(x+k))^x,x,inf))
```

$$\lim_{x\to \infty }{\left(\frac{x}{x+k}\right)^{x}}=e^ {- k }$$

```
>$showev('limit(sin(1/x),x,0))
```

$$\lim_{x\to 0}{\sin \left(\frac{1}{x}\right)}={\it ind}$$

```
>$showev('limit(sin(1/x),x,inf))
```

$$\lim_{x\to \infty }{\sin \left(\frac{1}{x}\right)}=0$$

```
>plot2d("sin(1/x)",-5,5):
```

images/Pekan 9_Dimas Oki_Kalkulus-026.png

Latihan

Bukalah buku Kalkulus. Cari dan pilih beberapa (paling sedikit 5 fungsi berbeda tipe/bentuk/jenis) fungsi dari buku tersebut, kemudian definisikan di EMT pada baris-baris perintah berikut (jika perlu tambahkan lagi). Untuk setiap fungsi, hitung nilai limit fungsi tersebut di beberapa nilai dan di tak hingga. Gambar grafik fungsi tersebut untuk mengkonfirmasi nilai-nilai limit tersebut.

Nomor 1

```
>$showev('limit((x^2+2*x+6),x,3))
```

$$\lim_{x\to 3} x^2+2\,x+6=21$$

```
>$showev('limit((x^2+2*x+6),x,2))
```

$$\lim_{x\to 2} x^2+2\,x+6=14$$

```
>$showev('limit((x^2+2*x+6),x,inf))
```

$$\lim_{x\to \infty} x^2+2\,x+6=\infty$$

```
>plot2d("(x^2+2*x+6)",-6,6); plot2d(3,21,>points,style="ow",>add):
```

images/Pekan 9_Dimas Oki_Kalkulus-030.png

Nomor 2

```
>$showev('limit((x^4 + 2*x^3 - x^2)/(x^2),x,0))
```

$$\lim_{x\to 0}{\frac{x^4+2\,x^3-x^2}{x^2}}=-1$$

```
>$showev('limit((x^4 + 2*x^3 - x^2)/(x^2),x,2))
```

$$\lim_{x\to 2}{\frac{x^4+2\,x^3-x^2}{x^2}}=7$$

```
>$showev('limit((x^4 + 2*x^3 - x^2)/(x^2),x,inf))
```

$$\lim_{x\to \infty }{\frac{x^4+2\,x^3-x^2}{x^2}}=\infty$$

```
>plot2d("(x^4 + 2*x^3 - x^2)",-2,2); plot2d(0,-1,>points,style="ow",>add):
```

images/Pekan 9_Dimas Oki_Kalkulus-034.png

Nomor 3

```
>$showev('limit(sqrt(x+16),x,inf))
```

$$\lim_{x\to \infty }{\sqrt{x+16}}=\infty$$

```
>$showev('limit(sqrt(x+16),x,0))
```

$$\lim_{x\to 0}{\sqrt{x+16}}=4$$

```
>$showev('limit(sqrt(x+16),x,4))
```

$$\lim_{x\to 4}\sqrt{x+16}=2\,\sqrt{5}$$

```
>plot2d("sqrt(x+16)",-7,7); plot2d(0,4,>points,style="ow",>add):
```

images/Pekan 9_Dimas Oki_Kalkulus-038.png

Nomor 4

```
>$showev('limit(((x^2)+(2*x)),x,0,plus))
```

$$\lim_{x\downarrow 0}x^2+2\,x=0$$

```
>$showev('limit(((x^2)+(2*x)),x,2,minus))
```

$$\lim_{x\uparrow 2}x^2+2\,x=8$$

```
>$showev('limit(((x^2)+(2*x)),x,inf))
```

$$\lim_{x\to \infty }x^2+2\,x=\infty$$

```
>plot2d("((x^2)+(2*x))",0,8):
```

images/Pekan 9_Dimas Oki_Kalkulus-042.png

Nomor 5

```
>$showev('limit((1-cos(x))/x^2,x,0))
```

$$\lim_{x\to 0}{\frac{1-\cos x}{x^2}}=\frac{1}{2}$$

```
>$showev('limit((1-cos(x))/x^2,x,inf))
```

$$\lim_{x\to \infty }{\frac{1-\cos x}{x^2}}=0$$

```
>$showev('limit((1-cos(x))/x^2,x,2))
```

$$\lim_{x\to 2}{\frac{1-\cos x}{x^2}}=\frac{1}{4}-\frac{\cos 2}{4}$$

```
>plot2d("(1-cos(x))/x^2",-3,3):
```

images/Pekan 9_Dimas Oki_Kalkulus-046.png

Turunan Fungsi

Definisi turunan:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Berikut adalah contoh-contoh menentukan turunan fungsi dengan menggunakan definisi turunan (limit).

```
>$showev('limit(((x+h)^n-x^n)/h,h,0)) // turunan x^n
```

$$\lim_{h\to 0}{\frac{\left(x+h\right)^{n}-x^{n}}{h}}=n\,x^{n-1}$$

Mengapa hasilnya seperti itu? Tuliskan atau tunjukkan bahwa hasil limit tersebut benar, sehingga benar turunan fungsinya benar. Tulis penjelasan Anda di komentar ini.
Sebagai petunjuk, ekspansikan (x+h)^n dengan menggunakan teorema binomial.

```
>$showev('limit((sin(x+h)-sin(x))/h,h,0)) // turunan sin(x)
```

$$\lim_{h\to 0}{\frac{\sin \left(x+h\right)-\sin x}{h}}=\cos x$$

Mengapa hasilnya seperti itu? Tuliskan atau tunjukkan bahwa hasil limit tersebut benar, sehingga benar turunan fungsinya benar. Tulis penjelasan Anda di komentar ini. Sebagai petunjuk, ekspansikan sin(x+h) dengan menggunakan rumus jumlah dua sudut.

```
>$showev('limit((log(x+h)-log(x))/h,h,0)) // turunan log(x)
```

$$\lim_{h\to 0}{\frac{\log \left(x+h\right)-\log x}{h}}=\frac{1}{x}$$

Mengapa hasilnya seperti itu? Tuliskan atau tunjukkan bahwa hasil limit tersebut benar, sehingga benar turunan fungsinya benar. Tulis penjelasan Anda di komentar ini. Sebagai petunjuk, gunakan sifat-sifat logaritma dan hasil limit pada bagian sebelumnya di atas.

```
>$showev('limit((1/(x+h)-1/x)/h,h,0)) // turunan 1/x
```

$$\lim_{h\to 0}{\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}}=-\frac{1}{x^2}$$

```
>$showev('limit((e^(x+h)-E^x)/h,h,0)) // turunan f(x)=e^x
```

$$\lim_{h\to 0}{\frac{e^{x+h}-e^{x}}{h}}=\mathit{infinity}$$

Maxima bermasalah dengan limit:

$$\lim_{h\to 0}{\frac{e^{x+h}-e^{x}}{h}}.$$

Oleh karena itu diperlukan trik khusus agar hasilnya benar.

```
>$showev('limit((E^h-1)/h,h,0))
```

$$\lim_{h\to 0}{\frac{e^{h}-1}{h}}=1$$

```
>$factor(E^(x+h)-E^x)
```

$$\left(e^{h}-1\right)\,e^{x}$$

```
>$showev('limit(factor((E^(x+h)-E^x)/h),h,0)) // turunan f(x)=e^x
```

$$\left(\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}\right)\, e^x = e^x$$

```
>function f(x) &= x^x
```

```
                                 x
                                x
```

```
>$showev('limit((f(x+h)-f(x))/h,h,0)) // turunan f(x)=x^x
```

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^{x+h}-x^x}{h} = \mathit{infinity}$$

Di sini Maxima juga bermasalah terkait limit:

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^{x+h}-x^x}{h}.$$

Dalam hal ini diperlukan asumsi nilai x.

```
>&assume(x>0); $showev('limit((f(x+h)-f(x))/h,h,0)) // turunan f(x)=x^x
```

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^{x+h}-x^x}{h} = x^x\,\left(\log x+1\right)$$

```
>&forget(x>0) // jangan lupa, lupakan asumsi untuk kembali ke semula
```

```
                              [x > 0]
```

```
>&forget(x<0)
```

```
                              [x < 0]
```

```
>&facts()
```

```
                                 []
```

```
>$showev('limit((asin(x+h)-asin(x))/h,h,0)) // turunan arcsin(x)
```

$$\lim_{h\to 0}\frac{\arcsin\left(x+h\right)-\arcsin x}{h}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

```
>$showev('limit((tan(x+h)-tan(x))/h,h,0)) // turunan tan(x)
```

$$\lim_{h\to 0}\frac{\tan\left(x+h\right)-\tan x}{h}=\frac{1}{\cos^2 x}$$

```
>function f(x) &= sinh(x) // definisikan f(x)=sinh(x)
```

```
sinh(x)
```

```
>function df(x) &= limit((f(x+h)-f(x))/h,h,0); $df(x) // df(x) = f'(x)
```

$$\frac{e^{-x}\,\left(e^{2\,x}+1\right)}{2}$$

Hasilnya adalah cosh(x), karena

$$\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\cosh(x).$$

```
>plot2d(["f(x)","df(x)"],-pi,pi,color=[blue,red]):
```

images/Pekan 9_Dimas Oki_Kalkulus-060.png

Latihan

Bukalah buku Kalkulus. Cari dan pilih beberapa (paling sedikit 5 fungsi berbeda tipe/bentuk/jenis) fungsi dari buku tersebut, kemudian definisikan di EMT pada baris-baris perintah berikut (jika perlu tambahkan lagi). Untuk setiap fungsi, tentukan turunannya dengan menggunakan definisi turunan (limit), seperti contoh-contoh tersebut. Gambar grafik fungsi asli dan fungsi turunannya pada sumbu koordinat yang sama.

Nomor 1

```
>function f(x) := cos(x^2)
>$showev('limit((cos((x+h)^2)- cos(x^2))/h,h,0))
```

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos \left(x+h\right)^2-\cos x^2}{h}=-2\,x\,\sin x^2$$

Nomor 2

```
>function f(x) := sqrt(x^2+4)
>$showev('limit((sqrt((x+h)^2+4)-sqrt(x^2+4))/h,h,0))
```

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{\left(x+h\right)^2+4}-\sqrt{x^2+4}}{h}=\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$$

Nomor 3

```
>function f(x) :=(3-x)^3
>$showev('limit(((3-(x+h))^3-(3-x)^3)/h,h,0))
```

$$\lim_{h\to 0}\frac{\left(-x-h+3\right)^3-\left(3-x\right)^3}{h}=-3\,x^2+18\,x-27$$

Nomor 4

```
>function f(x) :=sin(x)+2*cos(x)
>$showev('limit((sin(x+h)+2*cos(x+h)-(sin(x)+2*cos(x)))/h,h,0))
```

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin \left(x+h\right)+2\,\cos \left(x+h\right)-\sin x-2\,\cos x}{h}=\cos x-2\,\sin x$$

Nomor 5

```
>function f(x) :=10*x-2
>$showev('limit(((10*(x+h)-2)-(10*x-2))/h,h,0))
```

$$\lim_{h\to 0}\frac{10\,\left(x+h\right)-10\,x}{h}=10$$

Integral

EMT dapat digunakan untuk menghitung integral, baik integral tak tentu maupun integral tentu. Untuk integral tak tentu (simbolik) sudah tentu EMT menggunakan Maxima, sedangkan untuk perhitungan integral tentu EMT sudah menyediakan beberapa fungsi yang mengimplementasikan algoritma kuadratur (perhitungan integral tentu menggunakan metode numerik).

Pada notebook ini akan ditunjukkan perhitungan integral tentu dengan menggunakan Teorema Dasar Kalkulus:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a), \quad \text{dengan } F'(x)=f(x).$$

Fungsi untuk menentukan integral adalah integrate. Fungsi ini dapat digunakan untuk menentukan, baik integral tentu maupun tak tentu (jika fungsinya memiliki antiderivatif). Untuk perhitungan integral tentu fungsi integrate menggunakan metode numerik (kecuali fungsinya tidak integrabel, kita tidak akan menggunakan metode ini).

```
>$showev('integrate(x^n,x))
```

```
Answering "Is n equal to -1?" with "no"
```

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

```
>$showev('integrate(1/(1+x),x))
```

$$\int \frac{1}{x+1}\,dx = \log\left(x+1\right)$$

```
>$showev('integrate(1/(1+x^2),x))
```

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan x$$

```
>$showev('integrate(1/sqrt(1-x^2),x))
```

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x$$

```
>$showev('integrate(sin(x),x,0,pi))
```

$$\int_{0}^{\pi} \sin x\,dx = 2$$

```
>$showev('integrate(sin(x),x,a,b))
```

$$\int_{a}^{b} \sin x\,dx = \cos a - \cos b$$

```
>$showev('integrate(x^n,x,a,b))
```

```
Answering "Is n positive, negative or zero?" with "positive"
```

$$\int_{a}^{b} x^n\,dx = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

```
>$showev('integrate(x^2*sqrt(2*x+1),x))
```

$$\int x^2\,\sqrt{2\,x+1}\,dx=\frac{\left(2\,x+1\right)^{\frac{7}{2}}}{28}-\frac{\left(2\,x+1\right)^{\frac{5}{2}}}{10}+\frac{\left(2\,x+1\right)^{\frac{3}{2}}}{12}$$

```
>$showev('integrate(x^2*sqrt(2*x+1),x,0,2))
```

$$\int_{0}^{2}{x^2\,\sqrt{2\,x+1}\;dx}=\frac{2\,5^{\frac{5}{2}}}{21}-\frac{2}{105}$$

```
>$ratsimp(%)
```

$$\int_{0}^{2}{x^2\,\sqrt{2\,x+1}\;dx}=\frac{2\,5^{\frac{7}{2}}-2}{105}$$

```
>$showev('integrate((sin(sqrt(x)+a)*E^sqrt(x))/sqrt(x),x,0,pi^2))
```

$$\int_{0}^{\pi^2}{\frac{\sin\left(\sqrt{x}+a\right)\,e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\;dx}=\left(-e^{\pi}-1\right)\,\sin a+\left(e^{\pi}+1\right)\,\cos a$$

```
>$factor(%)
```

$$\int_{0}^{\pi^2}{\frac{\sin\left(\sqrt{x}+a\right)\,e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\;dx}=\left(-e^{\pi}-1\right)\,\left(\sin a-\cos a\right)$$

```
>function map f(x) &= E^(-x^2)
```

```
          2
       - x
     E
```

```
>$showev('integrate(f(x),x))
```

$$\int e^{-x^2}\,dx=\frac{\sqrt{\pi}\,\mathrm{erf}\left(x\right)}{2}$$

Fungsi f tidak memiliki antiturunan, integralnya masih memuat integral lain.

$$erf(x)=\int\frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}}\,dx.$$

Kita tidak dapat menggunakan teorema Dasar kalkulus untuk menghitung integral tentu fungsi tersebut jika semua batasnya berhingga. Dalam hal ini dapat digunakan metode numerik (rumus kuadratur).
Misalkan kita akan menghitung:
maxima: 'integrate(f(x),x,0,pi)

```
>x=0:0.1:pi-0.1; plot2d(x,f(x+0.1),>bar); plot2d("f(x)",0,pi,>add):
```

images/Pekan 9_Dimas Oki_Kalkulus-079.png

Integral tentu
maxima: 'integrate(f(x),x,0,pi)
dapat dihampiri dengan jumlah luas persegi-persegi panjang di bawah kurva y=f(x) tersebut. Langkah-langkahnya adalah sebagai berikut.

```
>t &= makelist(a,a,0,pi-0.1,0.1); // t sebagai list untuk menyimpan nilai-nilai x
>fx &= makelist(f(t[i]+0.1),i,1,length(t)); // simpan nilai-nilai f(x)
>// jangan menggunakan x sebagai list, kecuali Anda pakar Maxima!
```

Hasilnya adalah:
maxima: 'integrate(f(x),x,0,pi) = 0.1*sum(fx[i],i,1,length(fx))
Jumlah tersebut diperoleh dari hasil kali lebar sub-subinterval (=0.1) dan jumlah nilai-nilai f(x) untuk x = 0.1, 0.2, 0.3, ..., 3.2.

```
>0.1*sum(f(x+0.1)) // cek langsung dengan perhitungan numerik EMT
```

```
0.836219610253
```

Untuk mendapatkan nilai integral tentu yang mendekati nilai sebenarnya, lebar sub-intervalnya dapat diperkecil lagi, sehingga daerah di bawah kurva tertutup semuanya, misalnya dapat digunakan lebar subinterval 0.001. (Silakan dicoba!)
Meskipun Maxima tidak dapat menghitung integral tentu fungsi tersebut untuk batas-batas yang berhingga, namun integral tersebut dapat dihitung secara eksak jika batas-batasnya tak hingga. Ini adalah salah satu keajaiban di dalam matematika, yang terbatas tidak dapat dihitung secara eksak, namun yang tak hingga malah dapat dihitung secara eksak.

```
>$showev('integrate(f(x),x,0,inf))
```

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Berikut adalah contoh lain fungsi yang tidak memiliki antiderivatif, sehingga integral tentunya hanya dapat dihitung dengan metode numerik.

```
>function f(x) &= x^x
```

```
                                     x
                                    x
```

```
>$showev('integrate(f(x),x,0,1))
```

$$\int_{0}^{1}{x^{x}\;dx}=\int_{0}^{1}{x^{x}\;dx}$$

```
>x=0:0.1:1-0.01; plot2d(x,f(x+0.01),>bar); plot2d("f(x)",0,1,>add):
```

images/Pekan 9_Dimas Oki_Kalkulus-082.png

Maxima gagal menghitung integral tentu tersebut secara langsung menggunakan perintah integrate. Berikut kita lakukan seperti contoh sebelumnya untuk mendapat hasil atau pendekatan nilai integral tentu tersebut.

```
>t &= makelist(a,a,0,1-0.01,0.01);
>fx &= makelist(f(t[i]+0.01),i,1,length(t));
```

maxima: 'integrate(f(x),x,0,1) = 0.01*sum(fx[i],i,1,length(fx))
Apakah hasil tersebut cukup baik? perhatikan gambarnya.

```
>function f(x) &= sin(3*x^5+7)^2
```

```
                                 2     5
                              sin (3 x  + 7)
```

```
>integrate(f,0,1)
```

```
0.542581176074
```

```
>&showev('integrate(f(x),x,0,1))
```

```
           1                              1               pi
          /                         gamma(-) sin(14) sin(--)
          [      2    5                   5               10
          I   sin (3 x  + 7) dx = ------------------------
          ]                                   1/5
          /                                10 6
           0
         4/5                   1           4/5                  1
    - (((6    gamma_incomplete(-, 6 I) + 6    gamma_incomplete(-, - 6 I))
                               5                                5
               4/5                     1
    sin(14) + (6    I gamma_incomplete(-, 6 I)
                                       5
       4/5                   1                       pi
    - 6    I gamma_incomplete(-, - 6 I)) cos(14)) sin(--) - 60)/120
                             5                       10
```

```
>&float(%)
```

```
           1.0
          /
          [       2      5
          I    sin (3.0 x  + 7.0) dx =
          ]
          /
           0.0
  0.09820784258795788 - 0.008333333333333333
   (0.3090169943749474 (0.1367372182078336
   (4.192962712629476 I gamma__incomplete(0.2, 6.0 I)
   - 4.192962712629476 I gamma__incomplete(0.2, - 6.0 I))
   + 0.9906073556948704 (4.192962712629476 gamma__incomplete(0.2, 6.0 I)
   + 4.192962712629476 gamma__incomplete(0.2, - 6.0 I))) - 60.0)
```

```
>$showev('integrate(x*exp(-x),x,0,1)) // Integral tentu (eksak)
```

$$\int_{0}^{1}{x\,e^ {- x }\;dx}=1-2\,e^ {- 1 }$$

Latihan

- Bukalah buku Kalkulus.
- Cari dan pilih beberapa (paling sedikit 5 fungsi berbeda tipe/bentuk/jenis) fungsi dari buku tersebut, kemudian definisikan di EMT pada baris-baris perintah berikut (jika perlu tambahkan lagi).
- Untuk setiap fungsi, tentukan anti turunannya (jika ada), hitunglah integral tentu dengan batas-batas yang menarik (Anda tentukan sendiri), seperti contoh-contoh tersebut.
- Lakukan hal yang sama untuk fungsi-fungsi yang tidak dapat diintegralkan (cari sedikitnya 3 fungsi).
- Gambar grafik fungsi dan daerah integrasinya pada sumbu koordinat yang sama.
- Gunakan integral tentu untuk mencari luas daerah yang dibatasi oleh dua kurva yang berpotongan di dua titik. (Cari dan gambar kedua kurva dan arsir (warnai) daerah yang dibatasi oleh keduanya.)
- Gunakan integral tentu untuk menghitung volume benda putar kurva y= f(x) yang diputar mengelilingi sumbu x dari x=a sampai x=b, yakni

$$V=\int_a^b \pi(f(x)^2\,dx.$$

(Pilih fungsinya dan gambar kurva dan benda putar yang dihasilkan. Anda dapat mencari contoh-contoh bagaimana cara menggambar benda hasil perputaran suatu kurva.)
- Gunakan integral tentu untuk menghitung panjang kurva y=f(x) dari x=a sampai x=b dengan menggunakan rumus:

$$S=\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$$

(Pilih fungsi dan gambar kurvanya.)
- Apabila fungsi dinyatakan dalam koordinat kutub x=f(r,t), y=g(r,t), r=h(t), x=a bersesuaian dengan t=t0 dan x=b bersesuian dengan t=t1, maka rumus di atas akan menjadi:

$$S=\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt.$$

- Pilih beberapa kurva menarik (selain lingkaran dan parabola) dari buku kalkulus. Nyatakan setiap kurva tersebut dalam bentuk:

```
a. koordinat Kartesius (persamaan y=f(x))
b. koordinat kutub ( r=r(theta))
c. persamaan parametrik x=x(t), y=y(t)
d. persamaan implit F(x,y)=0
```

- Tentukan kurvatur masing-masing kurva dengan menggunakan keempat representasi tersebut (hasilnya harus sama).
- Gambarlah kurva asli, kurva kurvatur, kurva jari-jari lingkaran oskulasi, dan salah satu lingkaran oskulasinya.
Nomor 1

```
>function f(x):=sin(4x)
>$showev('integrate(sin(3*x),x))
```

$$\int \sin\left(3\,x\right)\,dx=-\frac{\cos\left(3\,x\right)}{3}$$

```
>$showev('integrate(sin(3*x),x,0,pi/4))
```

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\left(3\,x\right)\,dx=\frac{1}{3\,\sqrt{2}}+\frac{1}{3}$$

```
>x=0:0.1:pi-0.01; plot2d(x,f(x+0.01),>bar); plot2d("f(x)",0,1,>add):
```

images/Pekan 9_Dimas Oki_Kalkulus-086.png

Nomor 2

```
>function f(x):=sqrt(2*x^2+4*x)
>$showev('integrate(f(x),x))
```

$$\int \sin^2\left(3\,x^5+7\right)\,dx=\frac{10\,6^{\frac{1}{5}}\,x+\left(\left(-gamma\_\_incomplete\left(\frac{1}{5},6\,i\,x^5\right)-gamma\_\_incomplete\left(\frac{1}{5},-6\,i\,x^5\right)\right)\,\sin 14+\left(i\,gamma\_\_\right.}{20\,6^{\frac{1}{5}}}$$

```
>$showev('integrate(sqrt(2*x^2+4*x),x,0,2))
```

$$\int_{0}^{2}\sqrt{2\,x^2+4\,x}\,dx=\frac{\log 4}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}\,\log\left(2^{\frac{7}{2}}+12\right)-12}{2}$$

```
>x=0:0.1:pi-0.01; plot2d(x,f(x+0.01),>bar); plot2d("f(x)",0,1,>add):
```

images/Pekan 9_Dimas Oki_Kalkulus-089.png

Nomor 3

```
>function f(x):=(x^4+x^2)
>$showev('integrate((x^4+x^2),x))
```

$$\int x^4 + x^2\,dx = \frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3}$$

```
>$showev('integrate(x^4+x^2,x,0,2))
```

$$\int_{0}^{2} x^4 + x^2\,dx = \frac{136}{15}$$

```
>x=0:0.1:pi-0.01; plot2d(x,f(x+0.01),>bar); plot2d("f(x)",0,1,>add):
```

images/Pekan 9_Dimas Oki_Kalkulus-092.png

Nomor 4

```
>function f(x):=sin(2x)
>$showev('integrate(sin(2*x),x))
```

$$\int \sin\left(2\,x\right)\,dx = -\frac{\cos\left(2\,x\right)}{2}$$

```
>$showev('integrate(sin(2*x),x,0,pi/4))
```

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin\left(2\,x\right)\;dx = \frac{1}{2}$$

```
>x=0:0.1:pi-0.01; plot2d(x,f(x+0.01),>bar); plot2d("f(x)",0,1,>add):
```

images/Pekan 9_Dimas Oki_Kalkulus-095.png

Nomor 5

```
>function f(x):=x^3+3*x+2
>$showev('integrate(x^3+3*x+2,x))
```

$$\int x^3+3\,x+2\,dx=\frac{x^4}{4}+\frac{3\,x^2}{2}+2\,x$$

```
>$showev('integrate(x^3+3*x+2,x,0,pi/4))
```

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}x^3+3\,x+2\,dx=\frac{\pi^4+96\,\pi^2+512\,\pi}{1024}$$

```
>x=0:0.1:pi-0.01; plot2d(x,f(x+0.01),>bar); plot2d("f(x)",0,1,>add):
```

images/Pekan 9_Dimas Oki_Kalkulus-098.png

Barisan dan Deret

(Catatan: bagian ini belum lengkap. Anda dapat membaca contoh-contoh pengguanaan EMT dan Maxima untuk menghitung limit barisan, rumus jumlah parsial suatu deret, jumlah tak hingga suatu deret konvergen, dan sebagainya. Anda dapat mengeksplor contoh-contoh di EMT atau perbagai panduan penggunaan Maxima di software Maxima atau dari Internet.)

Barisan dapat didefinisikan dengan beberapa cara di dalam EMT, di antaranya:

- dengan cara yang sama seperti mendefinisikan vektor dengan elemen-elemen beraturan (menggunakan titik dua ":");
- menggunakan perintah "sequence" dan rumus barisan (suku ke -n);
- menggunakan perintah "iterate" atau "niterate";
- menggunakan fungsi Maxima "create_list" atau "makelist" untuk menghasilkan barisan simbolik;
- menggunakan fungsi biasa yang inputnya vektor atau barisan;
- menggunakan fungsi rekursif.

EMT menyediakan beberapa perintah (fungsi) terkait barisan, yakni:

- sum: menghitung jumlah semua elemen suatu barisan
- cumsum: jumlah kumulatif suatu barisan
- differences: selisih antar elemen-elemen berturutan

EMT juga dapat digunakan untuk menghitung jumlah deret berhingga maupun deret tak hingga, dengan menggunakan perintah (fungsi) "sum". Perhitungan dapat dilakukan secara numerik maupun simbolik dan eksak.

Berikut adalah beberapa contoh perhitungan barisan dan deret menggunakan EMT.

```
>1:10 // barisan sederhana
```

```
[1,  2,  3,  4,  5,  6,  7,  8,  9,  10]
```

```
>1:2:30
```

```
[1,  3,  5,  7,  9,  11,  13,  15,  17,  19,  21,  23,  25,  27,  29]
```

```
>sum(1:2:30), sum(1/(1:2:30))
```

```
225
2.33587263431
```

```
>$'sum(k, k, 1, n) = factor(ev(sum(k, k, 1, n),simpsum=true)) // simpsum:menghitung deret
```

$$\sum_{k=1}^{n}{k}=\frac{n\,\left(n+1\right)}{2}$$

```
>$'sum(1/(3^k+k), k, 0, inf) = factor(ev(sum(1/(3^k+k), k, 0, inf),simpsum=true))
```

$$\sum_{k=0}^{\infty }{\frac{1}{3^{k}+k}}=\sum_{k=0}^{\infty }{\frac{1}{3^{k}+k}}$$

Di sini masih gagal, hasilnya tidak dihitung.

```
>$'sum(1/x^2, x, 1, inf)= ev(sum(1/x^2, x, 1, inf),simpsum=true) // ev: menghitung nilai e
```

$$\sum_{x=1}^{\infty }{\frac{1}{x^{2}}}=\frac{\pi^{2}}{6}$$

```
>$'sum((-1)^(k-1)/k, k, 1, inf) = factor(ev(sum((-1)^(x-1)/x, x, 1, inf),simpsum=true))
```

$$\sum_{k=1}^{\infty }{\frac{\left(-1\right)^{k-1}}{k}}=-\sum_{x=1}^{\infty }{\frac{\left(-1\right)^{x}}{x}}$$

Di sini masih gagal, hasilnya tidak dihitung.

```
>$'sum((-1)^k/(2*k-1), k, 1, inf) = factor(ev(sum((-1)^k/(2*k-1), k, 1, inf),simpsum=true)
```

$$\sum_{k=1}^{\infty }{\frac{\left(-1\right)^{k}}{2\,k-1}}=\sum_{k=1}^{\infty }{\frac{\left(-1\right)^{k}}{2\,k-1}}$$

```
>$ev(sum(1/n!, n, 0, inf),simpsum=true)
```

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

Di sini masih gagal, hasilnya tidak dihitung, harusnya hasilnya e.

```
>&assume(abs(x)<1); $'sum(a*x^k, k, 0, inf)=ev(sum(a*x^k, k, 0, inf),simpsum=true), &forge
```

$$a\sum_{k=0}^{\infty}x^k=\frac{a}{1-x}$$

Deret geometri tak hingga, dengan asumsi rasional antara -1 dan 1.

Deret Taylor

Deret Taylor suatu fungsi f yang diferensiabel sampai tak hingga di sekitar x=a adalah:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x-a)^k f^{(k)}(a)}{k!}.$$

```
>$'e^x =taylor(exp(x),x,0,10) // deret Taylor e^x di sekitar x=0, sampai suku ke-11
```

$$e^x=\frac{x^{10}}{3628800}+\frac{x^9}{362880}+\frac{x^8}{40320}+\frac{x^7}{5040}+\frac{x^6}{720}+\frac{x^5}{120}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}+x+1$$

```
>$'log(x)=taylor(log(x),x,1,10)// deret log(x) di sekitar x=1
```

$$\log x=x-\frac{(x-1)^{10}}{10}+\frac{(x-1)^9}{9}-\frac{(x-1)^8}{8}+\frac{(x-1)^7}{7}-\frac{(x-1)^6}{6}+\frac{(x-1)^5}{5}-\frac{(x-1)^4}{4}+\frac{(x-1)^3}{3}-\frac{(x-1)^2}{2}-1$$

BAB 6

KB PEKAN 11-12: MENGGUNAKAN EMT UNTUK GEOMETRI

[a4paper,10pt]article eumat

Nama : Dimas Oki Sriwijaya Saputra
Kelas : Matematika E 2022
NIM : 22305141053

Visualisasi dan Perhitungan Geometri dengan EMT

Euler menyediakan beberapa fungsi untuk melakukan visualisasi dan perhitungan geometri, baik secara numerik maupun analitik (seperti biasanya tentunya, menggunakan Maxima). Fungsi-fungsi untuk visualisasi dan perhitungan geometeri tersebut disimpan di dalam file program "geometry.e", sehingga file tersebut harus dipanggil sebelum menggunakan fungsi-fungsi atau perintah-perintah untuk geometri.

```
>load geometry
```

```
Numerical and symbolic geometry.
```

Fungsi-fungsi Geometri

Fungsi-fungsi untuk Menggambar Objek Geometri:

```
defaultd:=textheight()*1.5: nilai asli untuk parameter d
setPlotrange(x1,x2,y1,y2): menentukan rentang x dan y pada bidang koordinat
setPlotRange(r): pusat bidang koordinat (0,0) dan batas-batas sumbu-x dan y adalah -r sd
plotPoint (P, "P"): menggambar titik P dan diberi label "P"
plotSegment (A,B, "AB", d): menggambar ruas garis AB, diberi label "AB" sejauh d
plotLine (g, "g", d): menggambar garis g diberi label "g" sejauh d
plotCircle (c,"c",v,d): Menggambar lingkaran c dan diberi label "c"
plotLabel (label, P, V, d): menuliskan label pada posisi P
```

Fungsi-fungsi Geometri Analitik (numerik maupun simbolik):

```
turn(v, phi): memutar vektor v sejauh phi
turnLeft(v):   memutar vektor v ke kiri
turnRight(v):  memutar vektor v ke kanan
normalize(v): normal vektor v
crossProduct(v, w): hasil kali silang vektorv dan w.
lineThrough(A, B): garis melalui A dan B, hasilnya [a,b,c] sdh. ax+by=c.
lineWithDirection(A,v): garis melalui A searah vektor v
getLineDirection(g): vektor arah (gradien) garis g
getNormal(g): vektor normal (tegak lurus) garis g
getPointOnLine(g):  titik pada garis g
perpendicular(A, g):  garis melalui A tegak lurus garis g
parallel (A, g):  garis melalui A sejajar garis g
lineIntersection(g, h):  titik potong garis g dan h
projectToLine(A, g):   proyeksi titik A pada garis g
distance(A, B):  jarak titik A dan B
distanceSquared(A, B):  kuadrat jarak A dan B
quadrance(A, B): kuadrat jarak A dan B
areaTriangle(A, B, C):  luas segitiga ABC
computeAngle(A, B, C):   besar sudut <ABC
angleBisector(A, B, C): garis bagi sudut <ABC
circleWithCenter (A, r): lingkaran dengan pusat A dan jari-jari r
getCircleCenter(c):  pusat lingkaran c
getCircleRadius(c):  jari-jari lingkaran c
circleThrough(A,B,C):  lingkaran melalui A, B, C
middlePerpendicular(A, B): titik tengah AB
lineCircleIntersections(g, c): titik potong garis g dan lingkran c
circleCircleIntersections (c1, c2):  titik potong lingkaran c1 dan c2
planeThrough(A, B, C):  bidang melalui titik A, B, C
```

Fungsi-fungsi Khusus Untuk Geometri Simbolik:

```
getLineEquation (g,x,y): persamaan garis g dinyatakan dalam x dan y
getHesseForm (g,x,y,A): bentuk Hesse garis g dinyatakan dalam x dan y dengan titik A pad
```

sisi positif (kanan/atas) garis

```
quad(A,B): kuadrat jarak AB
spread(a,b,c): Spread segitiga dengan panjang sisi-sisi a,b,c, yakni sin(alpha)^2 dengan
```

alpha sudut yang menghadap sisi a.

```
crosslaw(a,b,c,sa): persamaan 3 quads dan 1 spread pada segitiga dengan panjang sisi a,
```

c.

```
triplespread(sa,sb,sc): persamaan 3 spread sa,sb,sc yang memebntuk suatu segitiga
doublespread(sa): Spread sudut rangkap Spread 2*phi, dengan sa=sin(phi)^2 spread a.
```

Contoh 1: Luas, Lingkaran Luar, Lingkaran Dalam Segitiga

Untuk menggambar objek-objek geometri, langkah pertama adalah menentukan rentang sumbu-sumbu koordinat. Semua objek geometri akan digambar pada satu bidang koordinat, sampai didefinisikan bidang koordinat yang baru.

```
>setPlotRange(-0.5,2.5,-0.5,2.5); // mendefinisikan bidang koordinat baru
```

Sekarang tetapkan tiga poin dan plot mereka.

```
>A=[1,0]; plotPoint(A,"A"); // definisi dan gambar tiga titik
>B=[0,1]; plotPoint(B,"B");
>C=[2,2]; plotPoint(C,"C");
```

Kemudian tiga segmen.

```
>plotSegment(A,B,"c"); // c=AB
>plotSegment(B,C,"a"); // a=BC
>plotSegment(A,C,"b"); // b=AC
```

Fungsi geometri meliputi fungsi untuk membuat garis dan lingkaran. Format garis adalah [a,b,c], yang mewakili garis dengan persamaan ax+by=c.

```
>lineThrough(B,C) // garis yang melalui B dan C
```

```
  [-1,   2,   2]
```

Hitunglah garis tegak lurus yang melalui A pada BC.

```
>h=perpendicular(A,lineThrough(B,C)); // garis h tegak lurus BC melalui A
```

Dan persimpangannya dengan BC.

```
>D=lineIntersection(h,lineThrough(B,C)); // D adalah titik potong h dan BC
```

Plot itu.

```
>plotPoint(D,value=1); // koordinat D ditampilkan
>aspect(1); plotSegment(A,D): // tampilkan semua gambar hasil plot...()
```

images/Pekan 11-12_Dimas Oki Sriwijaya Saputra_Geometri-001.png

Hitung luas ABC:

$$L_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AD.BC.$$

```
>norm(A-D)*norm(B-C)/2 // AD=norm(A-D), BC=norm(B-C)
```

```
1.5
```

Bandingkan dengan rumus determinan.

```
>areaTriangle(A,B,C) // hitung luas segitiga langusng dengan fungsi
```

```
1.5
```

Cara lain menghitung luas segitigas ABC:

```
>distance(A,D)*distance(B,C)/2
```

```
1.5
```

Sudut di C

```
>degprint(computeAngle(B,C,A))
```

```
36°52'11.63''
```

Sekarang lingkaran luar segitiga.

```
>c=circleThrough(A,B,C); // lingkaran luar segitiga ABC
>R=getCircleRadius(c); // jari2 lingkaran luar
>O=getCircleCenter(c); // titik pusat lingkaran c
>plotPoint(O,"O"); // gambar titik "O"
>plotCircle(c,"Lingkaran luar segitiga ABC"):
```

images/Pekan 11-12_Dimas Oki Sriwijaya Saputra_Geometri-002.png

Tampilkan koordinat titik pusat dan jari-jari lingkaran luar.

```
>O, R
```

```
[1.16667,  1.16667]
1.17851130198
```

Sekarang akan digambar lingkaran dalam segitiga ABC. Titik pusat lingkaran dalam adalah titik potong garis-garis bagi sudut.

```
>l=angleBisector(A,C,B); // garis bagi <ACB
>g=angleBisector(C,A,B); // garis bagi <CAB
>P=lineIntersection(l,g) // titik potong kedua garis bagi sudut
```

```
[0.86038,  0.86038]
```

Tambahkan semuanya ke plot.

```
>color(5); plotLine(l); plotLine(g); color(1); // gambar kedua garis bagi sudut
>plotPoint(P,"P"); // gambar titik potongnya
>r=norm(P-projectToLine(P,lineThrough(A,B))) // jari-jari lingkaran dalam
```

```
0.509653732104
```

```
>plotCircle(circleWithCenter(P,r),"Lingkaran dalam segitiga ABC"): // gambar lingkaran dal
```

images/Pekan 11-12_Dimas Oki Sriwijaya Saputra_Geometri-003.png

Latihan

1. Tentukan ketiga titik singgung lingkaran dalam dengan sisi-sisi segitiga ABC.

```
>setPlotRange(-2.5,4.5,-2.5,4.5);
>A=[-2,1]; plotPoint(A,"A");
>B=[1,-2]; plotPoint(B,"B");
>C=[4,4]; plotPoint(C,"C");
```

2. Gambar segitiga dengan titik-titik sudut ketiga titik singgung tersebut.

```
>plotSegment(A,B,"c")
>plotSegment(B,C,"a")
>plotSegment(A,C,"b")
>aspect(1):
```

images/Pekan 11-12_Dimas Oki Sriwijaya Saputra_Geometri-004.png

3. Tunjukkan bahwa garis bagi sudut yang ke tiga juga melalui titik pusat lingkaran dalam.

```
>l=angleBisector(A,C,B);
>g=angleBisector(C,A,B);
>P=lineIntersection(l,g)
```

```
[0.581139,  0.581139]
```

```
>color(5); plotLine(l); plotLine(g); color(1);
>plotPoint(P,"P");
>r=norm(P-projectToLine(P,lineThrough(A,B)))
```

```
1.52896119631
```

```
>plotCircle(circleWithCenter(P,r),"Lingkaran dalam segitiga ABC"):
```

images/Pekan 11-12_Dimas Oki Sriwijaya Saputra_Geometri-005.png

Jadi, terbukti bahwa garis bagi sudut yang ketiga juga melalui titik pusat lingkaran dalam.
4. Gambar jari-jari lingkaran dalam.

```
>r=norm(P-projectToLine(P,lineThrough(A,B)))
```

```
1.52896119631
```

```
>plotCircle(circleWithCenter(P,r),"Lingkaran dalam segitiga ABC"):
```

images/Pekan 11-12_Dimas Oki Sriwijaya Saputra_Geometri-006.png

Contoh 2: Geometri Simbolik

Kita dapat menghitung geometri eksak dan simbolik menggunakan Maxima.
File geometri.e menyediakan fungsi yang sama (dan lebih banyak lagi) di Maxima. Namun, kita dapat menggunakan perhitungan simbolis sekarang.

```
>A &= [1,0]; B &= [0,1]; C &= [2,2]; // menentukan tiga titik A, B, C
```

Fungsi untuk garis dan lingkaran bekerja seperti fungsi Euler, tetapi memberikan perhitungan simbolis.

```
>c &= lineThrough(B,C) // c=BC
```

```
[- 1, 2, 2]
```

Kita bisa mendapatkan persamaan garis dengan mudah.

```
>$getLineEquation(c,x,y), $solve(%,y) | expand // persamaan garis c
```

$$2\,y-x=2$$

$$\left[y=\frac{x}{2}+1\right]$$

```
>$getLineEquation(lineThrough(A,[x1,y1]),x,y) // persamaan garis melalui A dan (x1, y1)
```

$$(x_1 - 1)\, y - x\, y_1 = -y_1$$

```
>h &= perpendicular(A,lineThrough(B,C)) // h melalui A tegak lurus BC
```

```
                              [2, 1, 2]
```

```
>Q &= lineIntersection(c,h) // Q titik potong garis c=BC dan h
```

```
                                 2   6
                                [-, -]
                                 5   5
```

```
>$projectToLine(A,lineThrough(B,C)) // proyeksi A pada BC
```

$$\left[\frac{2}{5}, \frac{6}{5}\right]$$

```
>$distance(A,Q) // jarak AQ
```

$$\frac{3}{\sqrt{5}}$$

```
>cc &= circleThrough(A,B,C); $cc // (titik pusat dan jari-jari) lingkaran melalui A, B, C
```

$$\left[\frac{7}{6}, \frac{7}{6}, \frac{5}{3\sqrt{2}}\right]$$

```
>r&=getCircleRadius(cc); $r , $float(r) // tampilkan nilai jari-jari
```

$$\frac{5}{3\sqrt{2}}$$

$$1.178511301977579$$

```
>$computeAngle(A,C,B) // nilai <ACB
```

$$\arccos\left(\frac{4}{5}\right)$$

```
>$solve(getLineEquation(angleBisector(A,C,B),x,y),y)[1] // persamaan garis bagi <ACB
```

$$y = x$$

```
>P &= lineIntersection(angleBisector(A,C,B),angleBisector(C,B,A)); $P // titik potong 2 ga
```

$$\left[\frac{\sqrt{2}\,\sqrt{5}+2}{6}, \frac{\sqrt{2}\,\sqrt{5}+2}{6}\right]$$

```
>P() // hasilnya sama dengan perhitungan sebelumnya
```

```
[0.86038,  0.86038]
```

Garis dan Lingkaran yang Berpotongan

Tentu saja, kita juga dapat memotong garis dengan lingkaran, dan lingkaran dengan lingkaran.

```
>A &:= [1,0]; c=circleWithCenter(A,4);
>B &:= [1,2]; C &:= [2,1]; l=lineThrough(B,C);
>setPlotRange(5); plotCircle(c); plotLine(l);
```

Perpotongan garis dengan lingkaran menghasilkan dua titik dan jumlah titik potong.

```
>{P1,P2,f}=lineCircleIntersections(l,c);
>P1, P2,
```

```
[4.64575,  -1.64575]
[-0.645751,  3.64575]
```

```
>plotPoint(P1); plotPoint(P2):
```

images/Pekan 11-12_Dimas Oki Sriwijaya Saputra_Geometri-018.png

Begitu pula di Maxima.

```
>c &= circleWithCenter(A,4) // lingkaran dengan pusat A jari-jari 4
```

```
[1, 0, 4]
```

```
>l &= lineThrough(B,C) // garis l melalui B dan C
```

```
[1, 1, 3]
```

```
>$lineCircleIntersections(l,c) | radcan, // titik potong lingkaran c dan garis l
```

$$\left[\left[\sqrt{7}+2,1-\sqrt{7}\right],\left[2-\sqrt{7},\sqrt{7}+1\right]\right]$$

Akan ditunjukkan bahwa sudut-sudut yang menghadap bsuusr yang sama adalah sama besar.

```
>C=A+normalize([-2,-3])*4; plotPoint(C); plotSegment(P1,C); plotSegment(P2,C);
>degprint(computeAngle(P1,C,P2))
```

```
69°17'42.68''
```

```
>C=A+normalize([-4,-3])*4; plotPoint(C); plotSegment(P1,C); plotSegment(P2,C);
>degprint(computeAngle(P1,C,P2))
```

```
69°17'42.68''
```

```
>insimg;
```

images/Pekan 11-12_Dimas Oki Sriwijaya Saputra_Geometri-020.png

Garis Sumbu

Berikut adalah langkah-langkah menggambar garis sumbu ruas garis AB:
1. Gambar lingkaran dengan pusat A melalui B.
2. Gambar lingkaran dengan pusat B melalui A.
3. Tarik garis melallui kedua titik potong kedua lingkaran tersebut. Garis ini merupakan garis sumbu (melalui titik tengah dan tegak lurus) AB.

```
>A=[2,2]; B=[-1,-2];
>c1=circleWithCenter(A,distance(A,B));
>c2=circleWithCenter(B,distance(A,B));
>{P1,P2,f}=circleCircleIntersections(c1,c2);
>l=lineThrough(P1,P2);
>setPlotRange(5); plotCircle(c1); plotCircle(c2);
>plotPoint(A); plotPoint(B); plotSegment(A,B); plotLine(l):
```

images/Pekan 11-12_Dimas Oki Sriwijaya Saputra_Geometri-021.png

Selanjutnya, kami melakukan hal yang sama di Maxima dengan koordinat umum.

```
>A &= [a1,a2]; B &= [b1,b2];
>c1 &= circleWithCenter(A,distance(A,B));
>c2 &= circleWithCenter(B,distance(A,B));
>P &= circleCircleIntersections(c1,c2); P1 &= P[1]; P2 &= P[2];
```

Persamaan untuk persimpangan cukup terlibat. Tetapi kita dapat menyederhanakannya, jika kita memecahkan y.

```
>g &= getLineEquation(lineThrough(P1,P2),x,y);
>$solve(g,y)
```

$$\left[y=\frac{-\left(2\,b_1-2\,a_1\right)\,x+{b_2}^2+{b_1}^2-{a_2}^2-{a_1}^2}{2\,b_2-2\,a_2}\right]$$

Ini memang sama dengan tegak lurus tengah, yang dihitung dengan cara yang sama sekali berbeda.

```
>$solve(getLineEquation(middlePerpendicular(A,B),x,y),y)
```

$$\left[y=\frac{-\left(2\,b_1-2\,a_1\right)\,x+{b_2}^2+{b_1}^2-{a_2}^2-{a_1}^2}{2\,b_2-2\,a_2}\right]$$

```
>h &=getLineEquation(lineThrough(A,B),x,y);
>$solve(h,y)
```

$$\left[y=\frac{\left(b_2-a_2\right)\,x-a_1\,b_2+a_2\,b_1}{b_1-a_1}\right]$$

Perhatikan hasil kali gradien garis g dan h adalah:

$$\frac{-(b_1-a_1)}{(b_2-a_2)} \times \frac{(b_2-a_2)}{(b_1-a_1)} = -1.$$

Artinya kedua garis tegak lurus.

Contoh 3: Rumus Heron

Rumus Heron menyatakan bahwa luas segitiga dengan panjang sisi-sisi a, b dan c adalah:

$$L = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \text{dengan } s = (a+b+c)/2.$$

Untuk membuktikan hal ini kita misalkan C(0,0), B(a,0) dan A(x,y), b=AC, c=AB. Luas segitiga ABC adalah

$$L_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} a \times y.$$

Nilai y didapat dengan menyelesaikan sistem persamaan:

$$x^2 + y^2 = b^2, \quad (x-a)^2 + y^2 = c^2.$$

```
>sol &= solve([x^2+y^2=b^2,(x-a)^2+y^2=c^2],[x,y])
```

[]

Ekstrak solusi y.

```
>ysol &= y with sol[2][2]; $ysol
```

```
Maxima said:
part: invalid index of list or matrix.
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);

Error in:
ysol &= y with sol[2][2]; $ysol ...
                         ^
```

Kami mendapatkan rumus Heron.

```
>function H(a,b,c) &= sqrt(factor((ysol*a/2)^2)); $'H(a,b,c)=H(a,b,c)
```

$$H\left(a, b, [1,0,4]\right) = \frac{|a|\ |ysol|}{2}$$

Tentu saja, setiap segitiga persegi panjang adalah kasus yang terkenal.

```
>H(3,4,5)//luas segitiga siku-siku dengan panjang sisi 3, 4, 5
```

```
Variable or function ysol not found.
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
H:
    useglobal; return abs(a)*abs(ysol)/2
Error in:
H(3,4,5)//luas segitiga siku-siku dengan panjang sisi 3, 4, 5 ...
        ^
```

Dan juga jelas, bahwa ini adalah segitiga dengan luas maksimal dan dua sisi 3 dan 4.

```
>aspect (1.5); plot2d(&H(3,4,x),1,7): // Kurva luas segitiga sengan panjang sisi 3, 4, x (
```

```
Variable or function ysol not found.
Error in expression: 3*abs(ysol)/2
%ploteval:
    y0=f$(x[1],args());
adaptiveevalone:
    s=%ploteval(g$,t;args());
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
plot2d:
    dw/n,dw/n^2,dw/n,auto;args());
```

Kasus umum juga berfungsi.

```
>$solve(diff(H(a,b,c)^2,c)=0,c)
```

```
Maxima said:
diff: second argument must be a variable; found [1,0,4]
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);

Error in:
$solve(diff(H(a,b,c)^2,c)=0,c) ...
                              ^
```

Sekarang mari kita cari himpunan semua titik di mana b+c=d untuk beberapa konstanta d. Diketahui bahwa ini adalah elips.

```
>s1 &= subst(d-c,b,sol[2]); $s1
```

```
Maxima said:
part: invalid index of list or matrix.
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);

Error in:
s1 &= subst(d-c,b,sol[2]); $s1 ...
                         ^
```

Dan buat fungsi ini.

```
>function fx(a,c,d) &= rhs(s1[1]); $fx(a,c,d), function fy(a,c,d) &= rhs(s1[2]); $fy(a,c,d
```

$$0$$

$$0$$

Sekarang kita bisa menggambar setnya. Sisi b bervariasi dari 1 hingga 4. Diketahui bahwa kita mendapatkan elips.

```
>aspect(1); plot2d(&fx(3,x,5),&fy(3,x,5),xmin=1,xmax=4,square=1):
```

images/Pekan 11-12_Dimas Oki Sriwijaya Saputra_Geometri-028.png

Kita dapat memeriksa persamaan umum untuk elips ini, yaitu.

$$\frac{(x-x_m)^2}{u^2}+\frac{(y-y_m)}{v^2}=1,$$

di mana (xm,ym) adalah pusat, dan u dan v adalah setengah sumbu.

```
>$ratsimp((fx(a,c,d)-a/2)^2/u^2+fy(a,c,d)^2/v^2 with [u=d/2,v=sqrt(d^2-a^2)/2])
```

$$\frac{a^2}{d^2}$$

Kita lihat bahwa tinggi dan luas segitiga adalah maksimal untuk x=0. Jadi luas segitiga dengan a+b+c=d maksimal jika segitiga sama sisi. Kami ingin menurunkan ini secara analitis.

```
>eqns &= [diff(H(a,b,d-(a+b))^2,a)=0,diff(H(a,b,d-(a+b))^2,b)=0]; $eqns
```

$$\left[\frac{a\,ysol^2}{2}=0,0=0\right]$$

Kami mendapatkan beberapa minima, yang termasuk dalam segitiga dengan satu sisi 0, dan solusinya a=b=c=d/3.

```
>$solve(eqns,[a,b])
```

$$[[a=0,b=\%r_1]]$$

Ada juga metode Lagrange, memaksimalkan H(a,b,c)^2 terhadap a+b+d=d.

```
>&solve([diff(H(a,b,c)^2,a)=la,diff(H(a,b,c)^2,b)=la, ...
>   diff(H(a,b,c)^2,c)=la,a+b+c=d],[a,b,c,la])
```

```
Maxima said:
diff: second argument must be a variable; found [1,0,4]
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);

Error in:
... la,    diff(H(a,b,c)^2,c)=la,a+b+c=d],[a,b,c,la]) ...
                                                     ^
```

Kita bisa membuat plot situasinya

Pertama-tama atur poin di Maxima.

```
>A &= at([x,y],sol[2]); $A
```

```
Maxima said:
part: invalid index of list or matrix.
 -- an error. To debug this try: debugmode(true);

Error in:
A &= at([x,y],sol[2]); $A ...
                     ^
```

```
>B &= [0,0]; $B, C &= [a,0]; $C
```

$$[0, 0]$$

$$[a, 0]$$

Kemudian atur rentang plot, dan plot titik-titiknya.

```
>setPlotRange(0,5,-2,3); ...
>a=4; b=3; c=2; ...
>plotPoint(mxmeval("B"),"B"); plotPoint(mxmeval("C"),"C"); ...
>plotPoint(mxmeval("A"),"A"):
```

```
Variable a1 not found!
Use global variables or parameters for string evaluation.
Error in Evaluate, superfluous characters found.
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
mxmeval:
    return evaluate(mxm(s));
Error in:
... otPoint(mxmeval("C"),"C"); plotPoint(mxmeval("A"),"A"): ...
                                                     ^
```

Plot segmen.

```
>plotSegment(mxmeval("A"),mxmeval("C")); ...
>plotSegment(mxmeval("B"),mxmeval("C")); ...
>plotSegment(mxmeval("B"),mxmeval("A")):
```

```
Variable a1 not found!
Use global variables or parameters for string evaluation.
Error in Evaluate, superfluous characters found.
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
mxmeval:
    return evaluate(mxm(s));
Error in:
plotSegment(mxmeval("A"),mxmeval("C")); plotSegment(mxmeval("B ...
                        ^
```

Hitung tegak lurus tengah di Maxima.

```
>h &= middlePerpendicular(A,B); g &= middlePerpendicular(B,C);
```

Dan pusat lingkaran.

```
>U &= lineIntersection(h,g);
```

Kami mendapatkan rumus untuk jari-jari lingkaran.

```
>&assume(a>0,b>0,c>0); $distance(U,B) | radcan
```

$$\frac{\sqrt{{a_2}^2+{a_1}^2}\,\sqrt{{a_2}^2+{a_1}^2-2\,a\,a_1+a^2}}{2\,|a_2|}$$

Mari kita tambahkan ini ke plot.

```
>plotPoint(U()); ...
>plotCircle(circleWithCenter(mxmeval("U"),mxmeval("distance(U,C)"))):
```

```
Variable a2 not found!
Use global variables or parameters for string evaluation.
Error in ^
Error in expression: [a/2,(a2^2+a1^2-a*a1)/(2*a2)]
Error in:
plotPoint(U()); plotCircle(circleWithCenter(mxmeval("U"),mxmev ...
             ^
```

Menggunakan geometri, kami memperoleh rumus sederhana

$$\frac{a}{\sin(\alpha)}=2r$$

untuk radiusnya. Kami dapat memeriksa, apakah ini benar dengan Maxima. Maxima akan memfaktorkan ini hanya jika kita kuadratkan.

```
>$c^2/sin(computeAngle(A,B,C))^2  | factor
```

$$\left[\frac{a_2{}^2+a_1{}^2}{a_2{}^2}, 0, \frac{16\left(a_2{}^2+a_1{}^2\right)}{a_2{}^2}\right]$$

Contoh 4: Garis Euler dan Parabola

Garis Euler adalah garis yang ditentukan dari sembarang segitiga yang tidak sama sisi. Ini adalah garis tengah segitiga, dan melewati beberapa titik penting yang ditentukan dari segitiga, termasuk orthocenter, circumcenter, centroid, titik Exeter dan pusat lingkaran sembilan titik segitiga.

Untuk demonstrasi, kami menghitung dan memplot garis Euler dalam sebuah segitiga.

Pertama, kita mendefinisikan sudut-sudut segitiga di Euler. Kami menggunakan definisi, yang terlihat dalam ekspresi simbolis.

```
>A::=[-1,-1]; B::=[2,0]; C::=[1,2];
```

Untuk memplot objek geometris, kami menyiapkan area plot, dan menambahkan titik ke sana. Semua plot objek geometris ditambahkan ke plot saat ini.

```
>setPlotRange(3); plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C");
```

Kita juga bisa menambahkan sisi segitiga.

```
>plotSegment(A,B,""); plotSegment(B,C,""); plotSegment(C,A,""):
```

images/Pekan 11-12_Dimas Oki Sriwijaya Saputra_Geometri-036.png

Berikut adalah luas segitiga, menggunakan rumus determinan. Tentu saja, kita harus mengambil nilai absolut dari hasil ini.

```
>$areaTriangle(A,B,C)
```

$$-\frac{7}{2}$$

Kita dapat menghitung koefisien sisi c.

```
>c &= lineThrough(A,B)
```

```
[- 1, 3, - 2]
```

Dan juga dapatkan rumus untuk baris ini.

```
>$getLineEquation(c,x,y)
```

$$3\,y-x=-2$$

Untuk bentuk Hesse, kita perlu menentukan sebuah titik, sehingga titik tersebut berada di sisi positif dari bentuk Hesse. Memasukkan titik menghasilkan jarak positif ke garis.

```
>$getHesseForm(c,x,y,C), $at(%,[x=C[1],y=C[2]])
```

$$\frac{3\,y-x+2}{\sqrt{10}}$$
$$\frac{7}{\sqrt{10}}$$

Sekarang kita hitung lingkaran luar ABC.

```
>LL &= circleThrough(A,B,C); $getCircleEquation(LL,x,y)
```

$$\left(y-\frac{5}{14}\right)^2+\left(x-\frac{3}{14}\right)^2=\frac{325}{98}$$

```
>O &= getCircleCenter(LL); $O
```

$$\left[\frac{3}{14},\frac{5}{14}\right]$$

Gambarkan lingkaran dan pusatnya. Cu dan U adalah simbolis. Kami mengevaluasi ekspresi ini untuk Euler.

```
>plotCircle(LL()); plotPoint(O(),"O"):
```

images/Pekan 11-12_Dimas Oki Sriwijaya Saputra_Geometri-043.png

Kita dapat menghitung perpotongan ketinggian di ABC (orthocenter) secara numerik dengan perintah berikut.

```
>H &= lineIntersection(perpendicular(A,lineThrough(C,B)),...
>  perpendicular(B,lineThrough(A,C))); $H
```

$$\left[\frac{11}{7},\frac{2}{7}\right]$$

Sekarang kita dapat menghitung garis Euler dari segitiga.

```
>el &= lineThrough(H,O); $getLineEquation(el,x,y)
```

$$-\frac{19\,y}{14}-\frac{x}{14}=-\frac{1}{2}$$

Tambahkan ke plot kami.

```
>plotPoint(H(),"H"); plotLine(el(),"Garis Euler"):
```

images/Pekan 11-12_Dimas Oki Sriwijaya Saputra_Geometri-046.png

Pusat gravitasi harus berada di garis ini.

```
>M &= (A+B+C)/3; $getLineEquation(el,x,y) with [x=M[1],y=M[2]]
```

$$-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$$

```
>plotPoint(M(),"M"): // titik berat
```

images/Pekan 11-12_Dimas Oki Sriwijaya Saputra_Geometri-048.png

Teorinya memberitahu kita MH=2*MO. Kita perlu menyederhanakan dengan radcan untuk mencapai ini.

```
>$distance(M,H)/distance(M,O)|radcan
```

$$2$$

Fungsi termasuk fungsi untuk sudut juga.

```
>$computeAngle(A,C,B), degprint(%())
```

$$\arccos\left(\frac{4}{\sqrt{5}\,\sqrt{13}}\right)$$

```
60°15'18.43''
```

Persamaan untuk pusat incircle tidak terlalu bagus.

```
>Q &= lineIntersection(angleBisector(A,C,B),angleBisector(C,B,A))|radcan; $Q
```

$$\left[\frac{\left(2^{\frac{3}{2}}+1\right)\,\sqrt{5}\,\sqrt{13}-15\,\sqrt{2}+3}{14}, \frac{\left(\sqrt{2}-3\right)\,\sqrt{5}\,\sqrt{13}+5\,2^{\frac{3}{2}}+5}{14}\right]$$

Mari kita hitung juga ekspresi untuk jari-jari lingkaran yang tertulis.

```
>r &= distance(Q,projectToLine(Q,lineThrough(A,B)))|ratsimp; $r
```

$$\frac{\sqrt{\left(-41\,\sqrt{2}-31\right)\,\sqrt{5}\,\sqrt{13}+115\,\sqrt{2}+614}}{7\,\sqrt{2}}$$

```
>LD &=  circleWithCenter(Q,r); // Lingkaran dalam
```

Mari kita tambahkan ini ke plot.

```
>color(5); plotCircle(LD()):
```

images/Pekan 11-12_Dimas Oki Sriwijaya Saputra_Geometri-053.png

Parabola

Selanjutnya akan dicari persamaan tempat kedudukan titik-titik yang berjarak sama ke titik C dan ke garis AB.

```
>p &= getHesseForm(lineThrough(A,B),x,y,C)-distance([x,y],C); $p='0
```

$$\frac{3\,y-x+2}{\sqrt{10}}-\sqrt{\left(2-y\right)^2+\left(1-x\right)^2}=0$$

Persamaan tersebut dapat digambar menjadi satu dengan gambar sebelumnya.

```
>plot2d(p,level=0,add=1,contourcolor=6):
```

images/Pekan 11-12_Dimas Oki Sriwijaya Saputra_Geometri-055.png

Ini seharusnya menjadi beberapa fungsi, tetapi pemecah default Maxima hanya dapat menemukan solusinya, jika kita kuadratkan persamaannya. Akibatnya, kami mendapatkan solusi palsu.

```
>akar &= solve(getHesseForm(lineThrough(A,B),x,y,C)^2-distance([x,y],C)^2,y)
```

```
          [y = - 3 x - sqrt(70) sqrt(9 - 2 x) + 26,
                                y = - 3 x + sqrt(70) sqrt(9 - 2 x) + 26]
```

Solusi pertama adalah
maxima: akar[1]
Menambahkan solusi pertama ke plot menunjukkan, bahwa itu memang jalan yang kita cari. Teorinya memberi tahu kita bahwa itu adalah parabola yang diputar.

```
>plot2d(&rhs(akar[1]),add=1):
```

images/Pekan 11-12_Dimas Oki Sriwijaya Saputra_Geometri-056.png

```
>function g(x) &= rhs(akar[1]); $'g(x)= g(x)// fungsi yang mendefinisikan kurva di atas
```

$$g\left(x\right)=-3\,x-\sqrt{70}\,\sqrt{9-2\,x}+26$$

```
>T &=[-1, g(-1)]; // ambil sebarang titik pada kurva tersebut
>dTC &= distance(T,C); $fullratsimp(dTC), $float(%) // jarak T ke C
```

$$\sqrt{1503-54\,\sqrt{11}\,\sqrt{70}}$$

$$2.135605779339061$$

```
>U &= projectToLine(T,lineThrough(A,B)); $U // proyeksi T pada garis AB
```

$$\left[\frac{80-3\,\sqrt{11}\,\sqrt{70}}{10} , \frac{20-\sqrt{11}\,\sqrt{70}}{10}\right]$$

```
>dU2AB &= distance(T,U); $fullratsimp(dU2AB), $float(%) // jatak T ke AB
```

$$\sqrt{1503-54\,\sqrt{11}\,\sqrt{70}}$$

$$2.135605779339061$$

Ternyata jarak T ke C sama dengan jarak T ke AB. Coba Anda pilih titik T yang lain dan ulangi perhitungan-perhitungan di atas untuk menunjukkan bahwa hasilnya juga sama.

Contoh 5: Trigonometri Rasional

Ini terinspirasi dari ceramah N.J.Wildberger. Dalam bukunya "Divine Proportions", Wildberger mengusulkan untuk mengganti pengertian klasik tentang jarak dan sudut dengan kuadrat dan penyebaran. Dengan menggunakan ini, memang mungkin untuk menghindari fungsi trigonometri dalam banyak contoh, dan tetap "rasional".
Berikut ini, saya memperkenalkan konsep, dan memecahkan beberapa masalah. Saya menggunakan perhitungan simbolik Maxima di sini, yang menyembunyikan keuntungan utama dari trigonometri rasional bahwa perhitungan hanya dapat dilakukan dengan kertas dan pensil. Anda diundang untuk memeriksa hasil tanpa komputer.
Intinya adalah bahwa perhitungan rasional simbolis sering kali menghasilkan hasil yang sederhana. Sebaliknya, trigonometri klasik menghasilkan hasil trigonometri yang rumit, yang hanya mengevaluasi perkiraan numerik.

```
>load geometry;
```

Untuk pengenalan pertama, kami menggunakan segitiga persegi panjang dengan proporsi Mesir terkenal 3, 4 dan 5. Perintah berikut adalah perintah Euler untuk merencanakan geometri bidang yang terdapat dalam file Euler "geometry.e".

```
>C&:=[0,0]; A&:=[4,0]; B&:=[0,3]; ...
>setPlotRange(-1,5,-1,5); ...
>plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); ...
>plotSegment(B,A,"c"); plotSegment(A,C,"b"); plotSegment(C,B,"a"); ...
>insimg(30);
```

images/Pekan 11-12_Dimas Oki Sriwijaya Saputra_Geometri-063.png

Tentu saja,

$$\sin(w_a) = \frac{a}{c},$$

di mana wa adalah sudut di A. Cara yang biasa untuk menghitung sudut ini, adalah dengan mengambil invers dari fungsi sinus. Hasilnya adalah sudut yang tidak dapat dicerna, yang hanya dapat dicetak kira-kira.

```
>wa := arcsin(3/5); degprint(wa)
```

```
36°52'11.63''
```

Trigonometri rasional mencoba menghindari hal ini.
Gagasan pertama trigonometri rasional adalah kuadran, yang menggantikan jarak. Sebenarnya, itu hanya jarak kuadrat. Berikut ini, a, b, dan c menunjukkan kuadrat dari sisi-sisinya.
Teorema Pythogoras menjadi a+b=c.

```
>a &= 3^2; b &= 4^2; c &= 5^2; &a+b=c
```

```
25 = 25
```

Pengertian kedua dari trigonometri rasional adalah penyebaran. Spread mengukur pembukaan antar baris. Ini adalah 0, jika garis-garisnya sejajar, dan 1, jika garis-garisnya persegi panjang. Ini adalah kuadrat sinus sudut antara dua garis.
Penyebaran garis AB dan AC pada gambar di atas didefinisikan sebagai:

$$s_a = \sin(\alpha)^2 = \frac{a}{c},$$

di mana a dan c adalah kuadrat dari sembarang segitiga siku-siku dengan salah satu sudut di A.

```
>sa &= a/c; $sa
```

$$\frac{9}{25}$$

Ini lebih mudah dihitung daripada sudut, tentu saja. Tetapi Anda kehilangan properti bahwa sudut dapat ditambahkan dengan mudah.
Tentu saja, kita dapat mengonversi nilai perkiraan untuk sudut wa menjadi sprad, dan mencetaknya sebagai pecahan.

```
>fracprint(sin(wa)^2)
```

```
9/25
```

Hukum kosinus trgonometri klasik diterjemahkan menjadi "hukum silang" berikut.

$$(c + b - a)^2 = 4bc\,(1 - s_a)$$

Di sini a, b, dan c adalah kuadrat dari sisi-sisi segitiga, dan sa adalah penyebaran sudut A. Sisi a, seperti biasa, berhadapan dengan sudut A.
Hukum ini diimplementasikan dalam file geometri.e yang kami muat ke Euler.

```
>$crosslaw(aa,bb,cc,saa)
```

$$\left[\left(bb-aa+\frac{7}{6}\right)^2,\left(bb-aa+\frac{7}{6}\right)^2,\left(bb-aa+\frac{5}{3\sqrt{2}}\right)^2\right]=\left[\frac{14\,bb\,(1-saa)}{3},\frac{14\,bb\,(1-saa)}{3},\frac{5\,2^{\frac{3}{2}}\,bb\,(1-saa)}{3}\right]$$

Dalam kasus kami, kami mendapatkan

```
>$crosslaw(a,b,c,sa)
```

$$1024=1024$$

Mari kita gunakan crosslaw ini untuk mencari spread di A. Untuk melakukan ini, kita buat crosslaw untuk kuadran a, b, dan c, dan selesaikan untuk spread yang tidak diketahui sa.
Anda dapat melakukannya dengan tangan dengan mudah, tetapi saya menggunakan Maxima. Tentu saja, kami mendapatkan hasilnya, kami sudah memilikinya.

```
>$crosslaw(a,b,c,x), $solve(%,x)
```

$$1024=1600\,(1-x)$$

$$\left[x=\frac{9}{25}\right]$$

Kita sudah tahu ini. Definisi spread adalah kasus khusus dari crosslaw.
Kita juga dapat menyelesaikan ini untuk umum a,b,c. Hasilnya adalah rumus yang menghitung penyebaran sudut segitiga yang diberikan kuadrat dari ketiga sisinya.

```
>$solve(crosslaw(aa,bb,cc,x),x)
```

$$\left[\left[\frac{168\,bb\,x+36\,bb^2+(-72\,aa-84)\,bb+36\,aa^2-84\,aa+49}{36},\frac{168\,bb\,x+36\,bb^2+(-72\,aa-84)\,bb+36\,aa^2-84\,aa+49}{36},\right.\right.$$

Kita bisa membuat fungsi dari hasilnya. Fungsi seperti itu sudah didefinisikan dalam file geometri.e dari Euler.

```
>$spread(a,b,c)
```

$$\frac{9}{25}$$

Sebagai contoh, kita dapat menggunakannya untuk menghitung sudut segitiga dengan sisi

$$a,\quad a,\quad \frac{4a}{7}$$

Hasilnya rasional, yang tidak begitu mudah didapat jika kita menggunakan trigonometri klasik.

```
>$spread(a,a,4*a/7)
```

$$\frac{6}{7}$$

Ini adalah sudut dalam derajat.

```
>degprint(arcsin(sqrt(6/7)))
```

```
67°47'32.44''
```

Contoh lain

Sekarang, mari kita coba contoh yang lebih maju.
Kami mengatur tiga sudut segitiga sebagai berikut.

```
>A&:=[1,2]; B&:=[4,3]; C&:=[0,4]; ...
>setPlotRange(-1,5,1,7); ...
>plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); ...
>plotSegment(B,A,"c"); plotSegment(A,C,"b"); plotSegment(C,B,"a"); ...
>insimg;
```

images/Pekan 11-12_Dimas Oki Sriwijaya Saputra_Geometri-072.png

Menggunakan Pythogoras, mudah untuk menghitung jarak antara dua titik. Saya pertama kali menggunakan jarak fungsi file Euler untuk geometri. Jarak fungsi menggunakan geometri klasik.

```
>$distance(A,B)
```

$$\sqrt{10}$$

Euler juga mengandung fungsi untuk kuadran antara dua titik.
Dalam contoh berikut, karena c+b bukan a, maka segitiga itu bukan persegi panjang.

```
>c &= quad(A,B); $c, b &= quad(A,C); $b, a &= quad(B,C); $a,
```

$$10$$

$$5$$

$$17$$

Pertama, mari kita hitung sudut tradisional. Fungsi computeAngle menggunakan metode biasa berdasarkan hasil kali titik dua vektor. Hasilnya adalah beberapa pendekatan floating point.

$$A =< 1, 2 > \quad B =< 4, 3 >, \quad C =< 0, 4 >$$

$$\mathbf{a} = C - B =< -4, 1 >, \quad \mathbf{c} = A - B =< -3, -1 >, \quad \beta = \angle ABC$$

$$\mathbf{a.c} = |\mathbf{a}|.|\mathbf{c}| \cos \beta$$

$$\cos \angle ABC = \cos \beta = \frac{\mathbf{a.c}}{|\mathbf{a}|.|\mathbf{c}|} = \frac{12 - 1}{\sqrt{17}\sqrt{10}} = \frac{11}{\sqrt{17}\sqrt{10}}$$

```
>wb &= computeAngle(A,B,C); $wb, $(wb/pi*180)()
```

$$\arccos\left(\frac{11}{\sqrt{10}\,\sqrt{17}}\right)$$

```
32.4711922908
```

Dengan menggunakan pensil dan kertas, kita dapat melakukan hal yang sama dengan hukum silang. Kami memasukkan kuadran a, b, dan c ke dalam hukum silang dan menyelesaikan x.

```
>$crosslaw(a,b,c,x), $solve(%,x),
```

$$4 = 200\,(1 - x)$$

$$\left[x = \frac{49}{50}\right]$$

Yaitu, apa yang dilakukan oleh penyebaran fungsi yang didefinisikan dalam "geometry.e".

```
>sb &= spread(b,a,c); $sb
```

$$\frac{49}{170}$$

Maxima mendapatkan hasil yang sama menggunakan trigonometri biasa, jika kita memaksanya. Itu menyelesaikan istilah sin(arccos(...)) menjadi hasil pecahan. Sebagian besar siswa tidak dapat melakukan ini.

```
>$sin(computeAngle(A,B,C))^2
```

$$\frac{49}{170}$$

Setelah kita memiliki spread di B, kita dapat menghitung tinggi ha di sisi a. Ingat bahwa

$$s_b = \frac{h_a}{c}$$

Menurut definisi.

```
>ha &= c*sb; $ha
```

$$\frac{49}{17}$$

Gambar berikut telah dihasilkan dengan program geometri C.a.R., yang dapat menggambar kuadrat dan menyebar.
image: (20) Rational_Geometry_CaR.png
Menurut definisi, panjang ha adalah akar kuadrat dari kuadratnya.

```
>$sqrt(ha)
```

$$\frac{7}{\sqrt{17}}$$

Sekarang kita dapat menghitung luas segitiga. Jangan lupa, bahwa kita berhadapan dengan kuadrat!

```
>$sqrt(ha)*sqrt(a)/2
```

$$\frac{7}{2}$$

Rumus determinan biasa menghasilkan hasil yang sama.

```
>$areaTriangle(B,A,C)
```

$$\frac{7}{2}$$

Rumus Heron

Sekarang, mari kita selesaikan masalah ini secara umum!

```
>&remvalue(a,b,c,sb,ha);
```

Pertama kita hitung spread di B untuk segitiga dengan sisi a, b, dan c. Kemudian kita menghitung luas kuadrat ("quadrea"?), faktorkan dengan Maxima, dan kita mendapatkan rumus Heron yang terkenal.
Memang, ini sulit dilakukan dengan pensil dan kertas.

```
>$spread(b^2,c^2,a^2), $factor(%*c^2*a^2/4)
```

$$\frac{-c^4-\left(-2\,b^2-2\,a^2\right)\,c^2-b^4+2\,a^2\,b^2-a^4}{4\,a^2\,c^2}$$

$$\frac{\left(-c+b+a\right)\,\left(c-b+a\right)\,\left(c+b-a\right)\,\left(c+b+a\right)}{16}$$

Aturan Triple Spread

Kerugian dari spread adalah mereka tidak lagi hanya menambahkan sudut yang sama.
Namun, tiga spread dari sebuah segitiga memenuhi aturan "triple spread" berikut.

```
>&remvalue(sa,sb,sc); $triplespread(sa,sb,sc)
```

$$\left(sc+sb+sa\right)^2=2\,\left(sc^2+sb^2+sa^2\right)+4\,sa\,sb\,sc$$

Aturan ini berlaku untuk setiap tiga sudut yang menambah 180 °.

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi$$

Sejak menyebar

$$\alpha,\pi-\alpha$$

sama, aturan triple spread juga benar, jika

$$\alpha+\beta=\gamma$$

Karena penyebaran sudut negatif adalah sama, aturan penyebaran rangkap tiga juga berlaku, jika

$$\alpha+\beta+\gamma=0$$

Misalnya, kita dapat menghitung penyebaran sudut 60°. Ini 3/4. Persamaan memiliki solusi kedua, bagaimanapun, di mana semua spread adalah 0.

```
>$solve(triplespread(x,x,x),x)
```

$$\left[x=\frac{3}{4},x=0\right]$$

Sebaran 90° jelas 1. Jika dua sudut dijumlahkan menjadi 90°, sebarannya menyelesaikan persamaan sebaran rangkap tiga dengan a,b,1. Dengan perhitungan berikut kita mendapatkan a+b=1.

```
>$triplespread(x,y,1), $solve(%,x)
```

$$\left(y+x+1\right)^2=2\,\left(y^2+x^2+1\right)+4\,x\,y$$

$$\left[x=1-y\right]$$

Karena sebaran 180°-t sama dengan sebaran t, rumus sebaran rangkap tiga juga berlaku, jika satu sudut adalah jumlah atau selisih dua sudut lainnya.
Jadi kita dapat menemukan penyebaran sudut berlipat ganda. Perhatikan bahwa ada dua solusi lagi. Kami membuat ini fungsi.

```
>$solve(triplespread(a,a,x),x), function doublespread(a) &= factor(rhs(%[1]))
```

$$\left[x = 4\,a - 4\,a^2, x = 0\right]$$

```
- 4 (a - 1) a
```

Sudut Pembagi

Ini situasinya, kita sudah tahu.

```
>C&:=[0,0]; A&:=[4,0]; B&:=[0,3]; ...
>setPlotRange(-1,5,-1,5); ...
>plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); ...
>plotSegment(B,A,"c"); plotSegment(A,C,"b"); plotSegment(C,B,"a"); ...
>insimg;
```

images/Pekan 11-12_Dimas Oki Sriwijaya Saputra_Geometri-093.png

Mari kita hitung panjang garis bagi sudut di A. Tetapi kita ingin menyelesaikannya untuk umum a,b,c.

```
>&remvalue(a,b,c);
```

Jadi pertama-tama kita hitung penyebaran sudut yang dibagi dua di A, dengan menggunakan rumus sebaran rangkap tiga.
Masalah dengan rumus ini muncul lagi. Ini memiliki dua solusi. Kita harus memilih yang benar. Solusi lainnya mengacu pada sudut terbelah 180 °-wa.

```
>$triplespread(x,x,a/(a+b)), $solve(%,x), sa2 &= rhs(%[1]); $sa2
```

$$\left(2\,x+\frac{a}{b+a}\right)^2=2\,\left(2\,x^2+\frac{a^2}{\left(b+a\right)^2}\right)+\frac{4\,a\,x^2}{b+a}$$

$$\left[x=\frac{-\sqrt{b}\,\sqrt{b+a}+b+a}{2\,b+2\,a} , x=\frac{\sqrt{b}\,\sqrt{b+a}+b+a}{2\,b+2\,a} \right]$$

$$\frac{-\sqrt{b}\,\sqrt{b+a}+b+a}{2\,b+2\,a}$$

Mari kita periksa persegi panjang Mesir.

```
>$sa2 with [a=3^2,b=4^2]
```

$$\frac{1}{10}$$

Kami dapat mencetak sudut dalam Euler, setelah mentransfer penyebaran ke radian.

```
>wa2 := arcsin(sqrt(1/10)); degprint(wa2)
```

```
18°26'5.82''
```

Titik P adalah perpotongan garis bagi sudut dengan sumbu y.

```
>P := [0,tan(wa2)*4]
```

```
[0,  1.33333]
```

```
>plotPoint(P,"P"); plotSegment(A,P):
```

images/Pekan 11-12_Dimas Oki Sriwijaya Saputra_Geometri-098.png

Mari kita periksa sudut dalam contoh spesifik kita.

```
>computeAngle(C,A,P), computeAngle(P,A,B)
```

```
0.321750554397
0.321750554397
```

Sekarang kita hitung panjang garis bagi AP.
Kami menggunakan teorema sinus dalam segitiga APC. Teorema ini menyatakan bahwa

$$\frac{BC}{\sin(w_a)} = \frac{AC}{\sin(w_b)} = \frac{AB}{\sin(w_c)}$$

berlaku dalam segitiga apa pun. Kuadratkan, itu diterjemahkan ke dalam apa yang disebut "hukum penyebaran"

$$\frac{a}{s_a} = \frac{b}{s_b} = \frac{c}{s_b}$$

di mana a,b,c menunjukkan qudrances.
Karena spread CPA adalah 1-sa2, kita dapatkan darinya bisa/1=b/(1-sa2) dan dapat menghitung bisa (kuadran dari garis-bagi sudut).

```
>&factor(ratsimp(b/(1-sa2))); bisa &= %; $bisa
```

$$\frac{2\,b\,\left(b+a\right)}{\sqrt{b}\,\sqrt{b+a}+b+a}$$

Mari kita periksa rumus ini untuk nilai-nilai Mesir kita.

```
>sqrt(mxmeval("at(bisa,[a=3^2,b=4^2])")), distance(A,P)
```

```
4.21637021356
4.21637021356
```

Kita juga dapat menghitung P menggunakan rumus spread.

```
>py&=factor(ratsimp(sa2*bisa)); $py
```

$$-\frac{b\left(\sqrt{b}\,\sqrt{b+a}-b-a\right)}{\sqrt{b}\,\sqrt{b+a}+b+a}$$

Nilainya sama dengan yang kita dapatkan dengan rumus trigonometri.

```
>sqrt(mxmeval("at(py,[a=3^2,b=4^2])"))
```

```
1.33333333333
```

Sudut Akord

Perhatikan situasi berikut.

```
>setPlotRange(1.2); ...
>color(1); plotCircle(circleWithCenter([0,0],1)); ...
>A:=[cos(1),sin(1)]; B:=[cos(2),sin(2)]; C:=[cos(6),sin(6)]; ...
>plotPoint(A,"A"); plotPoint(B,"B"); plotPoint(C,"C"); ...
>color(3); plotSegment(A,B,"c"); plotSegment(A,C,"b"); plotSegment(C,B,"a"); ...
>color(1); O:=[0,0];  plotPoint(O,"0"); ...
>plotSegment(A,O); plotSegment(B,O); plotSegment(C,O,"r"); ...
>insimg;
```

images/Pekan 11-12_Dimas Oki Sriwijaya Saputra_Geometri-101.png

Kita dapat menggunakan Maxima untuk menyelesaikan rumus penyebaran rangkap tiga untuk sudut-sudut di pusat O untuk r. Jadi kita mendapatkan rumus untuk jari-jari kuadrat dari pericircle dalam hal kuadrat dari sisi.
Kali ini, Maxima menghasilkan beberapa nol kompleks, yang kita abaikan.

```
>&remvalue(a,b,c,r); // hapus nilai-nilai sebelumnya untuk perhitungan baru
>rabc &= rhs(solve(triplespread(spread(b,r,r),spread(a,r,r),spread(c,r,r)),r)[4]); $rabc
```

$$-\frac{a\,b\,c}{c^2-2\,b\,c+a\,\left(-2\,c-2\,b\right)+b^2+a^2}$$

Kita dapat menjadikannya sebagai fungsi Euler.

```
>function periradius(a,b,c) &= rabc;
```

Mari kita periksa hasilnya untuk poin A,B,C.

```
>a:=quadrance(B,C); b:=quadrance(A,C); c:=quadrance(A,B);
```

Jari-jarinya memang 1.

```
>periradius(a,b,c)
```

```
1
```

Faktanya, spread CBA hanya bergantung pada b dan c. Ini adalah teorema sudut chord.

```
>$spread(b,a,c)*rabc | ratsimp
```

$$\frac{b}{4}$$

Sebenarnya spreadnya adalah b/(4r), dan kita melihat bahwa sudut chord dari chord b adalah setengah dari sudut pusat.

```
>$doublespread(b/(4*r))-spread(b,r,r) | ratsimp
```

$$0$$

Contoh 6: Jarak Minimal pada Bidang

Catatan awal

Fungsi yang, ke titik M di bidang, menetapkan jarak AM antara titik tetap A dan M, memiliki garis level yang agak sederhana: lingkaran berpusat di A.

```
>&remvalue();
>A=[-1,-1];
>function d1(x,y):=sqrt((x-A[1])^2+(y-A[2])^2)
>fcontour("d1",xmin=-2,xmax=0,ymin=-2,ymax=0,hue=1, ...
>title="If you see ellipses, please set your window square"):
```

images/Pekan 11-12_Dimas Oki Sriwijaya Saputra_Geometri-105.png

dan grafiknya juga agak sederhana: bagian atas kerucut:

```
>plot3d("d1",xmin=-2,xmax=0,ymin=-2,ymax=0):
```

images/Pekan 11-12_Dimas Oki Sriwijaya Saputra_Geometri-106.png

Tentu saja minimal 0 dicapai di A.

Poin Dua

Sekarang kita lihat fungsi MA+MB dimana A dan B adalah dua titik (tetap). Ini adalah "fakta yang diketahui" bahwa kurva level adalah elips, titik fokusnya adalah A dan B; kecuali untuk AB minimum yang konstan pada segmen [AB]:

```
>B=[1,-1];
>function d2(x,y):=d1(x,y)+sqrt((x-B[1])^2+(y-B[2])^2)
>fcontour("d2",xmin=-2,xmax=2,ymin=-3,ymax=1,hue=1):
```

images/Pekan 11-12_Dimas Oki Sriwijaya Saputra_Geometri-107.png

Grafiknya lebih menarik:

```
>plot3d("d2",xmin=-2,xmax=2,ymin=-3,ymax=1):
```

images/Pekan 11-12_Dimas Oki Sriwijaya Saputra_Geometri-108.png

Pembatasan garis (AB) lebih terkenal:

```
>plot2d("abs(x+1)+abs(x-1)",xmin=-3,xmax=3):
```

images/Pekan 11-12_Dimas Oki Sriwijaya Saputra_Geometri-109.png

Poin Ketiga

Sekarang hal-hal yang kurang sederhana: Ini sedikit kurang terkenal bahwa MA+MB+MC mencapai minimum pada satu titik pesawat tetapi untuk menentukan itu kurang sederhana:
1) Jika salah satu sudut segitiga ABC lebih dari 120° (katakanlah di A), maka minimum dicapai pada titik ini (misalnya AB+AC).
Contoh:

```
>C=[-4,1];
>function d3(x,y):=d2(x,y)+sqrt((x-C[1])^2+(y-C[2])^2)
>plot3d("d3",xmin=-5,xmax=3,ymin=-4,ymax=4);
>insimg;
```

images/Pekan 11-12_Dimas Oki Sriwijaya Saputra_Geometri-110.png

```
>fcontour("d3",xmin=-4,xmax=1,ymin=-2,ymax=2,hue=1,title="The minimum is on A");
>P=(A_B_C_A)'; plot2d(P[1],P[2],add=1,color=12);
>insimg;
```

images/Pekan 11-12_Dimas Oki Sriwijaya Saputra_Geometri-111.png

2) Tetapi jika semua sudut segitiga ABC kurang dari 120 °, minimumnya adalah pada titik F di bagian dalam segitiga, yang merupakan satu-satunya titik yang melihat sisi-sisi ABC dengan sudut yang sama (maka masing-masing 120 °):

```
>C=[-0.5,1];
>plot3d("d3",xmin=-2,xmax=2,ymin=-2,ymax=2):
```

images/Pekan 11-12_Dimas Oki Sriwijaya Saputra_Geometri-112.png

```
>fcontour("d3",xmin=-2,xmax=2,ymin=-2,ymax=2,hue=1,title="The Fermat point");
>P=(A_B_C_A)'; plot2d(P[1],P[2],add=1,color=12);
>insimg;
```

images/Pekan 11-12_Dimas Oki Sriwijaya Saputra_Geometri-113.png

Merupakan kegiatan yang menarik untuk mewujudkan gambar di atas dengan perangkat lunak geometri; misalnya, saya tahu soft yang ditulis di Jawa yang memiliki instruksi "garis kontur" ...
Semua ini di atas telah ditemukan oleh seorang hakim Perancis bernama Pierre de Fermat; dia menulis surat kepada dilettants lain seperti pendeta Marin Mersenne dan Blaise Pascal yang bekerja di pajak penghasilan. Jadi titik unik F sedemikian rupa sehingga FA+FB+FC minimal, disebut titik Fermat segitiga. Tetapi tampaknya beberapa tahun sebelumnya, Torriccelli Italia telah menemukan titik ini sebelum Fermat melakukannya! Bagaimanapun tradisinya adalah mencatat poin ini F...

Poin Empat

Langkah selanjutnya adalah menambahkan 4 titik D dan mencoba meminimalkan MA+MB+MC+MD; katakan bahwa Anda adalah operator TV kabel dan ingin mencari di bidang mana Anda harus meletakkan antena sehingga Anda dapat memberi makan empat desa dan menggunakan panjang kabel sesedikit mungkin!

```
>D=[1,1];
>function d4(x,y):=d3(x,y)+sqrt((x-D[1])^2+(y-D[2])^2)
>plot3d("d4",xmin=-1.5,xmax=1.5,ymin=-1.5,ymax=1.5):
```

images/Pekan 11-12_Dimas Oki Sriwijaya Saputra_Geometri-114.png

```
>fcontour("d4",xmin=-1.5,xmax=1.5,ymin=-1.5,ymax=1.5,hue=1);
>P=(A_B_C_D)'; plot2d(P[1],P[2],points=1,add=1,color=12);
>insimg;
```

images/Pekan 11-12_Dimas Oki Sriwijaya Saputra_Geometri-115.png

Masih ada minimum dan tidak tercapai di salah satu simpul A, B, C atau D:

```
>function f(x):=d4(x[1],x[2])
>neldermin("f",[0.2,0.2])
```

```
[0.142858,  0.142857]
```

Tampaknya dalam kasus ini, koordinat titik optimal adalah rasional atau mendekati rasional...
Sekarang ABCD adalah persegi, kami berharap bahwa titik optimal akan menjadi pusat ABCD:

```
>C=[-1,1];
>plot3d("d4",xmin=-1,xmax=1,ymin=-1,ymax=1):
```

images/Pekan 11-12_Dimas Oki Sriwijaya Saputra_Geometri-116.png

```
>fcontour("d4",xmin=-1.5,xmax=1.5,ymin=-1.5,ymax=1.5,hue=1);
>P=(A_B_C_D)'; plot2d(P[1],P[2],add=1,color=12,points=1);
>insimg;
```

images/Pekan 11-12_Dimas Oki Sriwijaya Saputra_Geometri-117.png

Contoh 7: Bola Dandelin dengan Povray

Anda dapat menjalankan demonstrasi ini, jika Anda telah menginstal Povray, dan pvengine.exe di jalur program.
Pertama kita hitung jari-jari bola.
Jika Anda melihat gambar di bawah, Anda melihat bahwa kita membutuhkan dua lingkaran yang menyentuh dua garis yang membentuk kerucut, dan satu garis yang membentuk bidang yang memotong kerucut.
Kami menggunakan file geometri.e dari Euler untuk ini.

```
>load geometry;
```

Pertama dua garis yang membentuk kerucut.

```
>g1 &= lineThrough([0,0],[1,a])
```

```
[- a, 1, 0]
```

```
>g2 &= lineThrough([0,0],[-1,a])
```

```
[- a, - 1, 0]
```

Kemudian baris ketiga.

```
>g &= lineThrough([-1,0],[1,1])
```

```
[- 1, 2, 1]
```

Kami merencanakan semuanya sejauh ini.

```
>setPlotRange(-1,1,0,2);
>color(black); plotLine(g(),"")
>a:=2; color(blue); plotLine(g1(),""), plotLine(g2(),""):
```

images/Pekan 11-12_Dimas Oki Sriwijaya Saputra_Geometri-118.png

Sekarang kita ambil titik umum pada sumbu y.

```
>P &= [0,u]
```

```
[0, u]
```

Hitung jarak ke g1.

```
>d1 &= distance(P,projectToLine(P,g1)); $d1
```

$$\sqrt{\left(\frac{a^2\,u}{a^2+1}-u\right)^2+\frac{a^2\,u^2}{\left(a^2+1\right)^2}}$$

Hitung jarak ke g.

```
>d &= distance(P,projectToLine(P,g)); $d
```

$$\sqrt{\left(\frac{u+2}{5}-u\right)^2+\frac{(2\,u-1)^2}{25}}$$

Dan temukan pusat kedua lingkaran yang jaraknya sama.

```
>sol &= solve(d1^2=d^2,u); $sol
```

$$\left[u=\frac{-\sqrt{5}\,\sqrt{a^2+1}+2\,a^2+2}{4\,a^2-1},u=\frac{\sqrt{5}\,\sqrt{a^2+1}+2\,a^2+2}{4\,a^2-1}\right]$$

Ada dua solusi.
Kami mengevaluasi solusi simbolis, dan menemukan kedua pusat, dan kedua jarak.

```
>u := sol()
```

```
[0.333333,  1]
```

```
>dd := d()
```

```
[0.149071,  0.447214]
```

Plot lingkaran ke dalam gambar.

```
>color(red);
>plotCircle(circleWithCenter([0,u[1]],dd[1]),"");
>plotCircle(circleWithCenter([0,u[2]],dd[2]),"");
>insimg;
```

images/Pekan 11-12_Dimas Oki Sriwijaya Saputra_Geometri-122.png

Plot dengan Povray

Selanjutnya kami merencanakan semuanya dengan Povray. Perhatikan bahwa Anda mengubah perintah apa pun dalam urutan perintah Povray berikut, dan menjalankan kembali semua perintah dengan Shift-Return. Pertama kita memuat fungsi povray.

```
>load povray;
>defaultpovray="C:\Program Files\POV-Ray\v3.7\bin\pvengine.exe"
```

```
C:\Program Files\POV-Ray\v3.7\bin\pvengine.exe
```

Kami mengatur adegan dengan tepat.

```
>povstart(zoom=11,center=[0,0,0.5],height=10°,angle=140°);
```

Selanjutnya kita menulis dua bidang ke file Povray.

```
>writeln(povsphere([0,0,u[1]],dd[1],povlook(red)));
>writeln(povsphere([0,0,u[2]],dd[2],povlook(red)));
```

Dan kerucutnya, transparan.

```
>writeln(povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1,povlook(lightgray,1)));
```

Kami menghasilkan bidang terbatas pada kerucut.

```
>gp=g();
>pc=povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1,"");
>vp=[gp[1],0,gp[2]]; dp=gp[3];
>writeln(povplane(vp,dp,povlook(blue,0.5),pc));
```

Sekarang kita menghasilkan dua titik pada lingkaran, di mana bola menyentuh kerucut.

```
>function turnz(v) := return [-v[2],v[1],v[3]]
>P1=projectToLine([0,u[1]],g1()); P1=turnz([P1[1],0,P1[2]]);
>writeln(povpoint(P1,povlook(yellow)));
>P2=projectToLine([0,u[2]],g1()); P2=turnz([P2[1],0,P2[2]]);
>writeln(povpoint(P2,povlook(yellow)));
```

Kemudian kami menghasilkan dua titik di mana bola menyentuh bidang. Ini adalah fokus dari elips.

```
>P3=projectToLine([0,u[1]],g()); P3=[P3[1],0,P3[2]];
>writeln(povpoint(P3,povlook(yellow)));
>P4=projectToLine([0,u[2]],g()); P4=[P4[1],0,P4[2]];
>writeln(povpoint(P4,povlook(yellow)));
```

Selanjutnya kita hitung perpotongan P1P2 dengan bidang.

```
>t1=scalp(vp,P1)-dp; t2=scalp(vp,P2)-dp; P5=P1+t1/(t1-t2)*(P2-P1);
>writeln(povpoint(P5,povlook(yellow)));
```

Kami menghubungkan titik-titik dengan segmen garis.

```
>writeln(povsegment(P1,P2,povlook(yellow)));
>writeln(povsegment(P5,P3,povlook(yellow)));
>writeln(povsegment(P5,P4,povlook(yellow)));
```

Sekarang kita menghasilkan pita abu-abu, di mana bola menyentuh kerucut.

```
>pcw=povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1.01);
>pc1=povcylinder([0,0,P1[3]-defaultpointsize/2],[0,0,P1[3]+defaultpointsize/2],1);
>writeln(povintersection([pcw,pc1],povlook(gray)));
>pc2=povcylinder([0,0,P2[3]-defaultpointsize/2],[0,0,P2[3]+defaultpointsize/2],1);
>writeln(povintersection([pcw,pc2],povlook(gray)));
```

Mulai program Povray.

```
>povend();
```

```
exec:
    return _exec(program,param,dir,print,hidden,wait);
povray:
    exec(program,params,defaulthome);
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
povend:
    povray(file,w,h,aspect,exit);
```

Untuk mendapatkan Anaglyph ini kita perlu memasukkan semuanya ke dalam fungsi scene. Fungsi ini akan digunakan dua kali kemudian.

```
>function scene () ...
```

```
global a,u,dd,g,g1,defaultpointsize;
writeln(povsphere([0,0,u[1]],dd[1],povlook(red)));
writeln(povsphere([0,0,u[2]],dd[2],povlook(red)));
writeln(povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1,povlook(lightgray,1)));
gp=g();
pc=povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1,"");
vp=[gp[1],0,gp[2]]; dp=gp[3];
writeln(povplane(vp,dp,povlook(blue,0.5),pc));
P1=projectToLine([0,u[1]],g1()); P1=turnz([P1[1],0,P1[2]]);
writeln(povpoint(P1,povlook(yellow)));
P2=projectToLine([0,u[2]],g1()); P2=turnz([P2[1],0,P2[2]]);
writeln(povpoint(P2,povlook(yellow)));
P3=projectToLine([0,u[1]],g()); P3=[P3[1],0,P3[2]];
writeln(povpoint(P3,povlook(yellow)));
P4=projectToLine([0,u[2]],g()); P4=[P4[1],0,P4[2]];
writeln(povpoint(P4,povlook(yellow)));
t1=scalp(vp,P1)-dp; t2=scalp(vp,P2)-dp; P5=P1+t1/(t1-t2)*(P2-P1);
writeln(povpoint(P5,povlook(yellow)));
writeln(povsegment(P1,P2,povlook(yellow)));
writeln(povsegment(P5,P3,povlook(yellow)));
writeln(povsegment(P5,P4,povlook(yellow)));
pcw=povcone([0,0,0],0,[0,0,a],1.01);
pc1=povcylinder([0,0,P1[3]-defaultpointsize/2],[0,0,P1[3]+defaultpointsize/2],1);
writeln(povintersection([pcw,pc1],povlook(gray)));
pc2=povcylinder([0,0,P2[3]-defaultpointsize/2],[0,0,P2[3]+defaultpointsize/2],1);
writeln(povintersection([pcw,pc2],povlook(gray)));
endfunction
```

Anda membutuhkan kacamata merah/sian untuk menghargai efek berikut.

```
>povanaglyph("scene",zoom=11,center=[0,0,0.5],height=10°,angle=140°);
```

```
exec:
    return _exec(program,param,dir,print,hidden,wait);
povray:
    exec(program,params,defaulthome);
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
povanaglyph:
    povray(currentfile,w,h,aspect,exit);
```

Contoh 8: Geometri Bumi

Dalam buku catatan ini, kami ingin melakukan beberapa perhitungan sferis. Fungsi-fungsi tersebut terdapat dalam file "spherical.e" di folder contoh. Kita perlu memuat file itu terlebih dahulu.

```
>load "spherical.e";
```

Untuk memasukkan posisi geografis, kami menggunakan vektor dengan dua koordinat dalam radian (utara dan timur, nilai negatif untuk selatan dan barat). Berikut koordinat Kampus FMIPA UNY.

```
>FMIPA=[rad(-7,-46.467),rad(110,23.05)]
```

```
[-0.13569,  1.92657]
```

Anda dapat mencetak posisi ini dengan sposprint (cetak posisi spherical).

```
>sposprint(FMIPA) // posisi garis lintang dan garis bujur FMIPA UNY
```

```
S 7°46.467' E 110°23.050'
```

Mari kita tambahkan dua kota lagi, Solo dan Semarang.

```
>Solo=[rad(-7,-34.333),rad(110,49.683)]; Semarang=[rad(-6,-59.05),rad(110,24.533)];
>sposprint(Solo), sposprint(Semarang),
```

```
S 7°34.333' E 110°49.683'
S 6°59.050' E 110°24.533'
```

Pertama kita menghitung vektor dari satu ke yang lain pada bola ideal. Vektor ini [pos,jarak] dalam radian. Untuk menghitung jarak di bumi, kita kalikan dengan jari-jari bumi pada garis lintang 7°.

```
>br=svector(FMIPA,Solo); degprint(br[1]), br[2]*rearth(7°)->km // perkiraan jarak FMIPA-So
```

```
65°20'26.60''
53.8945384608
```

Ini adalah perkiraan yang baik. Rutinitas berikut menggunakan perkiraan yang lebih baik. Pada jarak yang begitu pendek hasilnya hampir sama.

```
>esdist(FMIPA,Semarang)->" km", // perkiraan jarak FMIPA-Semarang
```

```
88.0114026318 km
```

Ada fungsi untuk heading, dengan mempertimbangkan bentuk elips bumi. Sekali lagi, kami mencetak dengan cara yang canggih.

```
>sdegprint(esdir(FMIPA,Solo))
```

```
     65.34°
```

Sudut segitiga melebihi 180° pada bola.

```
>asum=sangle(Solo,FMIPA,Semarang)+sangle(FMIPA,Solo,Semarang)+sangle(FMIPA,Semarang,Solo);
```

```
180°0'10.77''
```

Ini dapat digunakan untuk menghitung luas segitiga. Catatan: Untuk segitiga kecil, ini tidak akurat karena kesalahan pengurangan dalam asum-pi.

```
>(asum-pi)*rearth(48°)^2->" km^2", // perkiraan luas segitiga FMIPA-Solo-Semarang,
```

```
2116.02948749 km^2
```

Ada fungsi untuk ini, yang menggunakan garis lintang rata-rata segitiga untuk menghitung jari-jari bumi, dan menangani kesalahan pembulatan untuk segitiga yang sangat kecil.

```
>esarea(Solo,FMIPA,Semarang)->" km^2", //perkiraan yang sama dengan fungsi esarea()
```

```
2123.64310526 km^2
```

Kita juga dapat menambahkan vektor ke posisi. Sebuah vektor berisi heading dan jarak, keduanya dalam radian. Untuk mendapatkan vektor, kami menggunakan vektor. Untuk menambahkan vektor ke posisi, kami menggunakan vektor sadd.

```
>v=svector(FMIPA,Solo); sposprint(saddvector(FMIPA,v)), sposprint(Solo),
```

```
S 7°34.333' E 110°49.683'
S 7°34.333' E 110°49.683'
```

Fungsi-fungsi ini mengasumsikan bola yang ideal. Hal yang sama di bumi.

```
>sposprint(esadd(FMIPA,esdir(FMIPA,Solo),esdist(FMIPA,Solo))), sposprint(Solo),
```

```
S 7°34.333' E 110°49.683'
S 7°34.333' E 110°49.683'
```

Mari kita beralih ke contoh yang lebih besar, Tugu Jogja dan Monas Jakarta (menggunakan Google Earth untuk mencari koordinatnya).

```
>Tugu=[-7.7833°,110.3661°]; Monas=[-6.175°,106.811944°];
>sposprint(Tugu), sposprint(Monas)
```

```
S 7°46.998' E 110°21.966'
S 6°10.500' E 106°48.717'
```

Menurut Google Earth, jaraknya adalah 429,66 km. Kami mendapatkan pendekatan yang baik.

```
>esdist(Tugu,Monas)->" km", // perkiraan jarak Tugu Jogja - Monas Jakarta
```

```
431.565659488 km
```

Judulnya sama dengan judul yang dihitung di Google Earth.

```
>degprint(esdir(Tugu,Monas))
```

```
294°17'2.85''
```

Namun, kita tidak lagi mendapatkan posisi target yang tepat, jika kita menambahkan heading dan jarak ke posisi semula. Hal ini terjadi, karena kita tidak menghitung fungsi invers secara tepat, tetapi mengambil perkiraan jari-jari bumi di sepanjang jalan.

```
>sposprint(esadd(Tugu,esdir(Tugu,Monas),esdist(Tugu,Monas)))
```

```
S 6°10.500' E 106°48.717'
```

Namun, kesalahannya tidak besar.

```
>sposprint(Monas),
```

```
S 6°10.500' E 106°48.717'
```

Tentu kita tidak bisa berlayar dengan tujuan yang sama dari satu tujuan ke tujuan lainnya, jika kita ingin menempuh jalur terpendek. Bayangkan, Anda terbang NE mulai dari titik mana pun di bumi. Kemudian Anda akan berputar ke kutub utara. Lingkaran besar tidak mengikuti heading yang konstan!

Perhitungan berikut menunjukkan bahwa kami jauh dari tujuan yang benar, jika kami menggunakan pos yang sama selama perjalanan kami.

```
>dist=esdist(Tugu,Monas); hd=esdir(Tugu,Monas);
```

Sekarang kita tambahkan 10 kali sepersepuluh dari jarak, menggunakan pos ke Monas, kita sampai di Tugu.

```
>p=Tugu; loop 1 to 10; p=esadd(p,hd,dist/10); end;
```

Hasilnya jauh.

```
>sposprint(p), skmprint(esdist(p,Monas))
```

```
S 6°11.250' E 106°48.372'
     1.529km
```

Sebagai contoh lain, mari kita ambil dua titik di bumi pada garis lintang yang sama.

```
>P1=[30°,10°]; P2=[30°,50°];
```

Jalur terpendek dari P1 ke P2 bukanlah lingkaran garis lintang 30°, melainkan jalur terpendek yang dimulai 10° lebih jauh ke utara di P1.

```
>sdegprint(esdir(P1,P2))
```

```
     79.69°
```

Tapi, jika kita mengikuti pembacaan kompas ini, kita akan berputar ke kutub utara! Jadi kita harus menyesuaikan arah kita di sepanjang jalan. Untuk tujuan kasar, kami menyesuaikannya pada 1/10 dari total jarak.

```
>p=P1;  dist=esdist(P1,P2); ...
>  loop 1 to 10; dir=esdir(p,P2); sdegprint(dir), p=esadd(p,dir,dist/10); end;
```

```
79.69°
81.67°
83.71°
85.78°
87.89°
90.00°
92.12°
94.22°
96.29°
98.33°
```

Jaraknya tidak tepat, karena kita akan menambahkan sedikit kesalahan, jika kita mengikuti heading yang sama terlalu lama.

```
>skmprint(esdist(p,P2))
```

```
0.203km
```

Kami mendapatkan perkiraan yang baik, jika kami menyesuaikan pos setelah setiap 1/100 dari total jarak dari Tugu ke Monas.

```
>p=Tugu; dist=esdist(Tugu,Monas); ...
>  loop 1 to 100; p=esadd(p,esdir(p,Monas),dist/100); end;
>skmprint(esdist(p,Monas))
```

```
0.000km
```

Untuk keperluan navigasi, kita bisa mendapatkan urutan posisi GPS di sepanjang lingkaran besar menuju Monas dengan fungsi navigasi.

```
>load spherical; v=navigate(Tugu,Monas,10); ...
>  loop 1 to rows(v); sposprint(v[#]), end;
```

```
S 7°46.998' E 110°21.966'
S 7°37.422' E 110°0.573'
S 7°27.829' E 109°39.196'
S 7°18.219' E 109°17.834'
S 7°8.592' E 108°56.488'
S 6°58.948' E 108°35.157'
S 6°49.289' E 108°13.841'
S 6°39.614' E 107°52.539'
S 6°29.924' E 107°31.251'
S 6°20.219' E 107°9.977'
S 6°10.500' E 106°48.717'
```

Kami menulis sebuah fungsi, yang memplot bumi, dua posisi, dan posisi di antaranya.

```
>function testplot ...
```

```
  useglobal;
  plotearth;
  plotpos(Tugu,"Tugu Jogja"); plotpos(Monas,"Tugu Monas");
  plotposline(v);
  endfunction
```

Sekarang rencanakan semuanya.

```
>plot3d("testplot",angle=25, height=6,>own,>user,zoom=4):
```

images/Pekan 11-12_Dimas Oki Sriwijaya Saputra_Geometri-123.png

Atau gunakan plot3d untuk mendapatkan tampilan anaglyph. Ini terlihat sangat bagus dengan kacamata merah/sian.

```
>plot3d("testplot",angle=25,height=6,distance=5,own=1,anaglyph=1,zoom=4):
```

images/Pekan 11-12_Dimas Oki Sriwijaya Saputra_Geometri-124.png

Latihan

1. Gambarlah segi-n beraturan jika diketahui titik pusat O, n, dan jarak titik pusat ke titik-titik sudut segi-n tersebut (jari-jari lingkaran luar segi-n), r.
Petunjuk:
- Besar sudut pusat yang menghadap masing-masing sisi segi-n adalah (360/n).
- Titik-titik sudut segi-n merupakan perpotongan lingkaran luar segi-n dan garis-garis yang melalui pusat dan saling membentuk sudut sebesar kelipatan (360/n).
- Untuk n ganjil, pilih salah satu titik sudut adalah di atas.
- Untuk n genap, pilih 2 titik di kanan dan kiri lurus dengan titik pusat.
- Anda dapat menggambar segi-3, 4, 5, 6, 7, dst beraturan.

```
>load geometry
```

```
Numerical and symbolic geometry.
```

```
>setPlotRange(-3.5,3.5,-3.5,3.5);
>A=[-2,-2]; plotPoint(A,"A");
>B=[2,-2]; plotPoint(B,"B");
>C=[0,3]; plotPoint(C,"C");
>plotSegment(A,B,"c");
>plotSegment(B,C,"a");
>plotSegment(A,C,"b");
>aspect(1):
```

images/Pekan 11-12_Dimas Oki Sriwijaya Saputra_Geometri-125.png

```
>c=circleThrough(A,B,C);
>R=getCircleRadius(c);
>O=getCircleCenter(c);
>plotPoint(O,"O");
>l=angleBisector(A,C,B);
>color(2); plotLine(l); color(1);
>plotCircle(c,"Lingkaran luar segitiga ABC"):
```

images/Pekan 11-12_Dimas Oki Sriwijaya Saputra_Geometri-126.png

2. Gambarlah suatu parabola yang melalui 3 titik yang diketahui.
Petunjuk:
- Misalkan persamaan parabolanya y= ax^2+bx+c.
- Substitusikan koordinat titik-titik yang diketahui ke persamaan tersebut.
- Selesaikan SPL yang terbentuk untuk mendapatkan nilai-nilai a, b, c.

```
>load geometry;
>setPlotRange(5); P=[2,0]; Q=[4,0]; R=[0,-4];
>plotPoint(P,"P"); plotPoint(Q,"Q"); plotPoint(R,"R"):
```

images/Pekan 11-12_Dimas Oki Sriwijaya Saputra_Geometri-127.png

```
>sol &= solve([a+b=-c,16*a+4*b=-c,c=-4],[a,b,c])
```

```
[[a = - 1, b = 5, c = - 4]]
```

```
>function y&=-x^2+5*x-4
```

```
   2
- x  + 5 x - 4
```

```
>plot2d("-x^2+5*x-4",-5,5,-5,5):
```

images/Pekan 11-12_Dimas Oki Sriwijaya Saputra_Geometri-128.png

3. Gambarlah suatu segi-4 yang diketahui keempat titik sudutnya, misalnya A, B, C, D.

```
   - Tentukan apakah segi-4 tersebut merupakan segi-4 garis singgung
```

(sisinya-sisintya merupakan garis singgung lingkaran yang sama yakni lingkaran dalam segi-4 tersebut).

```
   - Suatu segi-4 merupakan segi-4 garis singgung apabila keempat
```

garis bagi sudutnya bertemu di satu titik.

```
   - Jika segi-4 tersebut merupakan segi-4 garis singgung, gambar
```

lingkaran dalamnya.

```
   - Tunjukkan bahwa syarat suatu segi-4 merupakan segi-4 garis
```

singgung apabila hasil kali panjang sisi-sisi yang berhadapan sama.

```
>load geometry
```

```
  Numerical and symbolic geometry.
```

```
>setPlotRange(-4.5,4.5,-4.5,4.5);
>A=[-3,-3]; plotPoint(A,"A");
>B=[3,-3]; plotPoint(B,"B");
```

```
>C=[3,3]; plotPoint(C,"C");
>D=[-3,3]; plotPoint(D,"D");
>plotSegment(A,B,"");
>plotSegment(B,C,"");
>plotSegment(C,D,"");
>plotSegment(A,D,"");
>aspect(1):
```

images/Pekan 11-12_Dimas Oki Sriwijaya Saputra_Geometri-129.png

```
>l=angleBisector(A,B,C);
>m=angleBisector(B,C,D);
>P=lineIntersection(l,m);
>color(5); plotLine(l); plotLine(m); color(1);
>plotPoint(P,"P"):
```

images/Pekan 11-12_Dimas Oki Sriwijaya Saputra_Geometri-130.png

Dari gambar diatas terlihat bahwa keempat garis bagi sudutnya bertemu di satu titik yaitu titik P.

```
>r=norm(P-projectToLine(P,lineThrough(A,B)));
>plotCircle(circleWithCenter(P,r),"Lingkaran dalam segiempat ABCD"):
```

images/Pekan 11-12_Dimas Oki Sriwijaya Saputra_Geometri-131.png

Dari gambar diatas, terlihat bahwa sisi-sisinya merupakan garis singgung lingkaran yang sama yaitu lingkaran dalam segiempat.
Akan ditunjukkan bahwa hasil kali panjang sisi-sisi yang berhadapan sama.

```
>AB=norm(A-B) //panjang sisi AB
```

```
6
```

```
>CD=norm(C-D) //panjang sisi CD
```

```
6
```

```
>AD=norm(A-D) //panjang sisi AD
```

```
6
```

```
>BC=norm(B-C) //panjang sisi BC
```

```
6
```

```
>AB.CD
```

```
36
```

```
>AD.BC
```

```
36
```

Terbukti bahwa hasil kali panjang sisi-sisi yang berhadapan sama yaitu 36. Jadi dapat dipastikan bahwa segiempat tersebut merupakan segiempat garis singgung.
4. Gambarlah suatu ellips jika diketahui kedua titik fokusnya, misalnya P dan Q. Ingat ellips dengan fokus P dan Q adalah tempat kedudukan titik-titik yang jumlah jarak ke P dan ke Q selalu sama (konstan).
Penyelesaian :
Diketahui kedua titik fokus P = [-1,-1] dan Q = [1,-1]

```
>P=[-1,-1]; Q=[1,-1];
>function d1(x,y):=sqrt((x-P[1])^2+(y-P[2])^2)
>Q=[1,-1]; function d2(x,y):=sqrt((x-P[1])^2+(y-P[2])^2)+sqrt((x-Q[1])^2+(y-Q[2])^2)
>fcontour("d2",xmin=-2,xmax=2,ymin=-3,ymax=1,hue=1):
```

images/Pekan 11-12_Dimas Oki Sriwijaya Saputra_Geometri-132.png

Grafik yang lebih menarik

```
>plot3d("d2",xmin=-2,xmax=2,ymin=-3,ymax=1):
```

images/Pekan 11-12_Dimas Oki Sriwijaya Saputra_Geometri-133.png

Batasan ke garis PQ

```
>plot2d("abs(x+1)+abs(x-1)",xmin=-3,xmax=3):
```

images/Pekan 11-12_Dimas Oki Sriwijaya Saputra_Geometri-134.png

5. Gambarlah suatu hiperbola jika diketahui kedua titik fokusnya, misalnya P dan Q. Ingat ellips dengan fokus P dan Q adalah tempat kedudukan titik-titik yang selisih jarak ke P dan ke Q selalu sama (konstan).

```
>P=[-1,-1]; Q=[1,-1];
>function d1(x,y):=sqrt((x-p[1])^2+(y-p[2])^2)
>Q=[1,-1]; function d2(x,y):=sqrt((x-P[1])^2+(y-P[2])^2)+sqrt((x+Q[1])^2+(y+Q[2])^2)
>fcontour("d2",xmin=-2,xmax=2,ymin=-3,ymax=1,hue=1):
```

images/Pekan 11-12_Dimas Oki Sriwijaya Saputra_Geometri-135.png

```
>plot3d("d2",xmin=-2,xmax=2,ymin=-3,ymax=1):
```

images/Pekan 11-12_Dimas Oki Sriwijaya Saputra_Geometri-136.png

```
>plot2d("abs(x+1)+abs(x-1)",xmin=-3,xmax=3):
```

images/Pekan 11-12_Dimas Oki Sriwijaya Saputra_Geometri-137.png

BAB 7

KB PEKAN 13-14; MENGGUNAKAN EMT UNTUK STATISTIKA

[a4paper,10pt]article eumat

Nama : Dimas Oki Sriwijaya Saputra
Kelas : Matematika E 2022
NIM : 22305141053

EMT untuk Statistika

Dalam buku catatan ini, kami mendemonstrasikan plot statistik utama, pengujian, dan distribusi di Euler.

Mari kita mulai dengan beberapa statistik deskriptif. Ini bukan pengantar statistik. Jadi, Anda mungkin memerlukan beberapa latar belakang untuk memahami detailnya.

Asumsikan pengukuran berikut. Kami ingin menghitung nilai rata-rata dan standar deviasi yang diukur.

```
>M=[1000,1004,998,997,1002,1001,998,1004,998,997]; ...
>mean(M), dev(M),
```

```
999.9
2.72641400622
```

Kita dapat memplot plot kotak-dan-kumis untuk data. Dalam kasus kami tidak ada outlier.

```
>boxplot(M):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra_Statistika-001.png

Kami menghitung probabilitas bahwa suatu nilai lebih besar dari 1005, dengan asumsi nilai terukur dan distribusi normal.

Semua fungsi untuk distribusi di Euler diakhiri dengan ...dis dan menghitung distribusi probabilitas kumulatif (CPF).

$$\text{normaldis(x,m,d)} = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{d\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{t-m}{d})^2} \, dt.$$

Kami mencetak hasilnya dalam % dengan akurasi 2 digit menggunakan fungsi cetak.

```
>print((1-normaldis(1005,mean(M),dev(M)))*100,2,unit=" %")
```

```
3.07 %
```

Untuk contoh berikutnya, kami mengasumsikan jumlah pria berikut dalam rentang ukuran yang diberikan.

```
>r=155.5:4:187.5; v=[22,71,136,169,139,71,32,8];
```

Berikut adalah plot distribusinya.

```
>plot2d(r,v,a=150,b=200,c=0,d=190,bar=1,style="\/"):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra_Statistika-002.png

Kita bisa memasukkan data mentah tersebut ke dalam sebuah tabel.
Tabel adalah metode untuk menyimpan data statistik. Tabel kita harus berisi tiga kolom: Awal jangkauan, akhir jangkauan, jumlah orang dalam jangkauan.
Tabel dapat dicetak dengan header. Kami menggunakan vektor string untuk mengatur header.

```
>T:=r[1:8]' | r[2:9]' | v'; writetable(T,labc=["from","to","count"])
```

```
  from        to     count
 155.5     159.5        22
 159.5     163.5        71
 163.5     167.5       136
 167.5     171.5       169
 171.5     175.5       139
 175.5     179.5        71
 179.5     183.5        32
 183.5     187.5         8
```

Jika kita membutuhkan nilai rata-rata dan statistik lain dari ukuran, kita perlu menghitung titik tengah rentang. Kita dapat menggunakan dua kolom pertama dari tabel kita untuk ini.
Sumbul "|" digunakan untuk memisahkan kolom, fungsi "writetable" digunakan untuk menulis tabel, dengan opsion "labc" adalah untuk menentukan header kolom.

```
>(T[,1]+T[,2])/2 // the midpoint of each interval
```

```
157.5
161.5
165.5
169.5
173.5
```

```
177.5
181.5
185.5
```

Tetapi lebih mudah, untuk melipat rentang dengan vektor [1/2.1/2].

```
>M=fold(r,[0.5,0.5])
```

```
[157.5,  161.5,  165.5,  169.5,  173.5,  177.5,  181.5,  185.5]
```

Sekarang kita dapat menghitung rata-rata dan deviasi sampel dengan frekuensi yang diberikan.

```
>{m,d}=meandev(M,v); m, d,
```

```
169.901234568
5.98912964449
```

Mari kita tambahkan distribusi normal dari nilai-nilai ke plot batang di atas. Rumus untuk distribusi normal dengan mean m dan standar deviasi d adalah:

$$y = \frac{1}{d\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-m)^2}{2d^2}}.$$

Karena nilainya antara 0 dan 1, untuk memplotnya pada bar plot harus dikalikan dengan 4 kali jumlah total data.

```
>plot2d("qnormal(x,m,d)*sum(v)*4", ...
>  xmin=min(r),xmax=max(r),thickness=3,add=1):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra_Statistika-003.png

Tabel

Di direktori notebook ini Anda menemukan file dengan tabel. Data tersebut mewakili hasil survei. Berikut adalah empat baris pertama dari file tersebut. Data berasal dari buku online Jerman "Einführung in die Statistik mit R" oleh A. Handl.

```
>printfile("table.dat",4);
```

```
Could not open the file
table.dat
for reading!
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
printfile:
    open(filename,"r");
```

Tabel berisi 7 kolom angka atau token (string). Kami ingin membaca tabel dari file. Pertama, kami menggunakan terjemahan kami sendiri untuk token.
Untuk ini, kami mendefinisikan set token. Fungsi strtokens() mendapatkan vektor string token dari string yang diberikan.

```
>mf:=["m","f"]; yn:=["y","n"]; ev:=strtokens("g vg m b vb");
```

Sekarang kita membaca tabel dengan terjemahan ini.
Argumen tok2, tok4 dll. adalah terjemahan dari kolom tabel. Argumen ini tidak ada dalam daftar parameter readtable(), jadi Anda harus menyediakannya dengan ":=".

```
>{MT,hd}=readtable("table.dat",tok2:=mf,tok4:=yn,tok5:=ev,tok7:=yn);
```

```
Could not open the file
table.dat
for reading!
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
readtable:
    if filename!=none then open(filename,"r"); endif;
```

```
>load over statistics;
```

Untuk mencetak, kita perlu menentukan set token yang sama. Kami mencetak empat baris pertama saja.

```
>writetable(MT[1:4],labc=hd,wc=5,tok2:=mf,tok4:=yn,tok5:=ev,tok7:=yn);
```

```
MT is not a variable!
Error in:
writetable(MT[1:4],labc=hd,wc=5,tok2:=mf,tok4:=yn,tok5:=ev,tok ...
                  ^
```

Titik "." mewakili nilai-nilai, yang tidak tersedia.
Jika kita tidak ingin menentukan token untuk terjemahan terlebih dahulu, kita hanya perlu menentukan, kolom mana yang berisi token dan bukan angka.

```
>ctok=[2,4,5,7]; {MT,hd,tok}=readtable("table.dat",ctok=ctok);
```

```
Could not open the file
table.dat
for reading!
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
readtable:
    if filename!=none then open(filename,"r"); endif;
```

Fungsi readtable() sekarang mengembalikan satu set token.

```
>ctok
```

```
[2,  4,  5,  7]
```

Tabel berisi entri dari file dengan token yang diterjemahkan ke angka.
String khusus NA="." ditafsirkan sebagai "Tidak Tersedia", dan mendapatkan NAN (bukan angka) dalam tabel. Terjemahan ini dapat diubah dengan parameter NA, dan NAval.

```
>MT[1]
```

```
MT is not a variable!
Error in:
MT[1] ...
     ^
```

Berikut isi tabel dengan angka yang belum diterjemahkan.

```
>writetable(MT,wc=5)
```

```
Variable or function MT not found.
Error in:
writetable(MT,wc=5) ...
             ^
```

Untuk kenyamanan, Anda dapat memasukkan output readtable() ke dalam daftar.

```
>Table={{readtable("table.dat",ctok=ctok)}};
```

```
Could not open the file
table.dat
for reading!
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
readtable:
    if filename!=none then open(filename,"r"); endif;
```

Menggunakan kolom token yang sama dan token yang dibaca dari file, kita dapat mencetak tabel. Kita dapat menentukan ctok, tok, dll. Atau menggunakan daftar Tabel.

```
>writetable(Table,ctok=ctok,wc=5);
```

```
Variable or function Table not found.
Error in:
writetable(Table,ctok=ctok,wc=5); ...
                ^
```

Fungsi tablecol() mengembalikan nilai kolom tabel, melewatkan setiap baris dengan nilai NAN("." dalam file), dan indeks kolom, yang berisi nilai-nilai ini.

```
>{c,i}=tablecol(MT,[5,6]);
```

```
Variable or function MT not found.
Error in:
{c,i}=tablecol(MT,[5,6]); ...
                 ^
```

Kita dapat menggunakan ini untuk mengekstrak kolom dari tabel untuk tabel baru.

```
>j=[1,5,6]; writetable(MT[i,j],labc=hd[j],ctok=[2],tok=tok)
```

```
Variable or function i not found.
Error in:
j=[1,5,6]; writetable(MT[i,j],labc=hd[j],ctok=[2],tok=tok) ...
                          ^
```

Tentu saja, kita perlu mengekstrak tabel itu sendiri dari daftar Tabel dalam kasus ini.

```
>MT=Table[1];
```

```
Table is not a variable!
Error in:
MT=Table[1]; ...
           ^
```

Tentu saja, kita juga dapat menggunakannya untuk menentukan nilai rata-rata kolom atau nilai statistik lainnya.

```
>mean(tablecol(MT,6))
```

```
Variable or function MT not found.
Error in:
mean(tablecol(MT,6)) ...
                ^
```

Fungsi getstatistics() mengembalikan elemen dalam vektor, dan jumlahnya. Kami menerapkannya pada nilai "m" dan "f" di kolom kedua tabel kami.

```
>{xu,count}=getstatistics(tablecol(MT,2)); xu, count,
```

```
Variable or function MT not found.
Error in:
{xu,count}=getstatistics(tablecol(MT,2)); xu, count, ...
                                    ^
```

Kami dapat mencetak hasilnya dalam tabel baru.

```
>writetable(count',labr=tok[xu])
```

```
Variable count not found!
Error in:
writetable(count',labr=tok[xu]) ...
                    ^
```

Fungsi selecttable() mengembalikan tabel baru dengan nilai dalam satu kolom yang dipilih dari vektor indeks. Pertama kita mencari indeks dari dua nilai kita di tabel token.

```
>v:=indexof(tok,["g","vg"])
```

```
Variable or function tok not found.
Error in:
v:=indexof(tok,["g","vg"]) ...
                ^
```

Sekarang kita dapat memilih baris tabel, yang memiliki salah satu nilai dalam v di baris ke-5.

```
>MT1:=MT[selectrows(MT,5,v)]; i:=sortedrows(MT1,5);
```

```
Variable or function MT not found.
Error in:
MT1:=MT[selectrows(MT,5,v)]; i:=sortedrows(MT1,5); ...
                      ^
```

Sekarang kita dapat mencetak tabel, dengan nilai yang diekstrak dan diurutkan di kolom ke-5.

```
>writetable(MT1[i],labc=hd,ctok=ctok,tok=tok,wc=7);
```

```
Variable or function i not found.
Error in:
writetable(MT1[i],labc=hd,ctok=ctok,tok=tok,wc=7); ...
                 ^
```

Untuk statistik berikutnya, kami ingin menghubungkan dua kolom tabel. Jadi kami mengekstrak kolom 2 dan 4 dan mengurutkan tabel.

```
>i=sortedrows(MT,[2,4]);  ...
>  writetable(tablecol(MT[i],[2,4])',ctok=[1,2],tok=tok)
```

```
Variable or function MT not found.
Error in:
i=sortedrows(MT,[2,4]);    writetable(tablecol(MT[i],[2,4])',c ...
                ^
```

Dengan getstatistics(), kita juga dapat menghubungkan hitungan dalam dua kolom tabel satu sama lain.

```
>MT24=tablecol(MT,[2,4]); ...
>{xu1,xu2,count}=getstatistics(MT24[1],MT24[2]); ...
>writetable(count,labr=tok[xu1],labc=tok[xu2])
```

```
Variable or function MT not found.
Error in:
MT24=tablecol(MT,[2,4]); {xu1,xu2,count}=getstatistics(MT24[1] ...
                ^
```

Sebuah tabel dapat ditulis ke file.

```
>filename="test.dat"; ...
>writetable(count,labr=tok[xu1],labc=tok[xu2],file=filename);
```

```
Variable or function count not found.
Error in:
filename="test.dat"; writetable(count,labr=tok[xu1],labc=tok[x ...
                                        ^
```

Kemudian kita bisa membaca tabel dari file.

```
>{MT2,hd,tok2,hdr}=readtable(filename,>clabs,>rlabs); ...
>writetable(MT2,labr=hdr,labc=hd)
```

```
Could not open the file
test.dat
for reading!
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
readtable:
    if filename!=none then open(filename,"r"); endif;
```

Dan hapus filenya.

```
>fileremove(filename);
```

Distribusi

Dengan plot2d, ada metode yang sangat mudah untuk memplot distribusi data eksperimen.

```
>p=normal(1,1000); //1000 random normal-distributed sample p
>plot2d(p,distribution=20,style="\/"); // plot the random sample p
>plot2d("qnormal(x,0,1)",add=1): // add the standard normal distribution plot
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra_Statistika-004.png

Harap dicatat perbedaan antara plot batang (sampel) dan kurva normal (distribusi nyata). Masukkan kembali tiga perintah untuk melihat hasil pengambilan sampel lainnya.

Berikut adalah perbandingan 10 simulasi 1000 nilai terdistribusi normal menggunakan apa yang disebut plot kotak. Plot ini menunjukkan median, kuartil 25% dan 75%, nilai minimal dan maksimal, dan outlier.

```
>p=normal(10,1000); boxplot(p):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra_Statistika-005.png

Untuk menghasilkan bilangan bulat acak, Euler memiliki intrarandom. Mari kita simulasikan lemparan dadu dan plot distribusinya.
Kami menggunakan fungsi getmultiplicities(v,x), yang menghitung seberapa sering elemen v muncul di x. Kemudian kita plot hasilnya menggunakan columnplot().

```
>k=intrandom(1,6000,6);  ...
>columnsplot(getmultiplicities(1:6,k));  ...
>ygrid(1000,color=red):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra_Statistika-006.png

Sementara intrandom(n,m,k) mengembalikan bilangan bulat terdistribusi seragam dari 1 ke k, dimungkinkan untuk menggunakan distribusi bilangan bulat lainnya dengan randpint().
Dalam contoh berikut, probabilitas untuk 1,2,3 berturut-turut adalah 0,4,0,1,0,5.

```
>randpint(1,1000,[0.4,0.1,0.5]); getmultiplicities(1:3,%)
```

```
  [378,  102,  520]
```

Euler dapat menghasilkan nilai acak dari lebih banyak distribusi. Coba lihat referensinya.
Misalnya, kami mencoba distribusi eksponensial. Sebuah variabel acak kontinu X dikatakan memiliki distribusi eksponensial, jika PDF-nya diberikan oleh

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0, \quad \lambda > 0,$$

with parameter

$$\lambda = \frac{1}{\mu}, \quad \mu \text{ is the mean, and denoted by } X \sim \text{Exponential}(\lambda).$$

```
>plot2d(randexponential(1,1000,2),>distribution):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra_Statistika-007.png

Untuk banyak distribusi, Euler dapat menghitung fungsi distribusi dan kebalikannya.

```
>plot2d("normaldis",-4,4):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra_Statistika-008.png

Berikut ini adalah salah satu cara untuk memplot kuantil.

```
>plot2d("qnormal(x,1,1.5)",-4,6);  ...
>plot2d("qnormal(x,1,1.5)",a=2,b=5,>add,>filled):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra_Statistika-009.png

$$\text{normaldis(x,m,d)} = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{d\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{t-m}{d})^2} \; dt.$$

Peluang berada di area hijau adalah sebagai berikut.

```
>normaldis(5,1,1.5)-normaldis(2,1,1.5)
```

```
0.248662156979
```

Ini dapat dihitung secara numerik dengan integral berikut.

$$\int_{2}^{5} \frac{1}{1.5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-1}{1.5})^2} \; dx.$$

```
>gauss("qnormal(x,1,1.5)",2,5)
```

```
0.248662156979
```

Mari kita bandingkan distribusi binomial dengan distribusi normal mean dan deviasi yang sama. Fungsi invbindis() memecahkan interpolasi linier antara nilai integer.

```
>invbindis(0.95,1000,0.5), invnormaldis(0.95,500,0.5*sqrt(1000))
```

```
525.516721219
526.007419394
```

Fungsi qdis() adalah densitas dari distribusi chi-kuadrat. Seperti biasa, evolusi vektor ke fungsi ini. Dengan demikian kita mendapatkan plot semua distribusi chi-kuadrat dengan derajat 5 sampai 30 dengan mudah dengan cara berikut.

```
>plot2d("qchidis(x,(5:5:50)')",0,50):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra_Statistika-010.png

Euler memiliki fungsi yang akurat untuk mengevaluasi distribusi. Mari kita periksa chidis() dengan integral.
Penamaan mencoba untuk konsisten. Misalnya.,
- distribusi chi-kuadrat adalah chidis(),
- fungsi kebalikannya adalah invchidis(),
- kepadatannya adalah qchidis().
Komplemen dari distribusi (ekor atas) adalah chicdis().

```
>chidis(1.5,2), integrate("qchidis(x,2)",0,1.5)
```

```
0.527633447259
0.527633447259
```

Distribusi Diskrit

Untuk menentukan distribusi diskrit Anda sendiri, Anda dapat menggunakan metode berikut.
Pertama kita atur fungsi distribusinya.

```
>wd = 0|((1:6)+[-0.01,0.01,0,0,0,0])/6
```

```
[0,  0.165,  0.335,  0.5,  0.666667,  0.833333,  1]
```

Artinya dengan probabilitas wd[i+1]-wd[i] kita menghasilkan nilai acak i.
Ini adalah distribusi yang hampir seragam. Mari kita mendefinisikan generator nomor acak untuk ini. Fungsi find(v,x) menemukan nilai x dalam vektor v. Fungsi ini juga berfungsi untuk vektor x.

```
>function wrongdice (n,m) := find(wd,random(n,m))
```

Kesalahannya sangat halus sehingga kita hanya melihatnya dengan sangat banyak iterasi.

```
>columnsplot(getmultiplicities(1:6,wrongdice(1,1000000))):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra_Statistika-011.png

Berikut adalah fungsi sederhana untuk memeriksa distribusi seragam dari nilai 1...K dalam v. Kami menerima hasilnya, jika untuk semua frekuensi

$$\left| f_i - \frac{1}{K} \right| < \frac{\delta}{\sqrt{n}}.$$

```
>function checkrandom (v, delta=1) ...
```

```
K=max(v); n=cols(v);
fr=getfrequencies(v,1:K);
return max(fr/n-1/K)<delta/sqrt(n);
endfunction
```

Memang fungsi menolak distribusi seragam.

```
>checkrandom(wrongdice(1,1000000))
```

```
0
```

Dan itu menerima generator acak bawaan.

```
>checkrandom(intrandom(1,1000000,6))
```

```
1
```

Kita dapat menghitung distribusi binomial. Pertama ada binomialsum(), yang mengembalikan probabilitas i atau kurang hit dari n percobaan.

```
>bindis(410,1000,0.4)
```

```
0.751401349654
```

Fungsi Beta terbalik digunakan untuk menghitung interval kepercayaan Clopper-Pearson untuk parameter p. Tingkat default adalah alfa.
Arti interval ini adalah jika p berada di luar interval, hasil pengamatan 410 dalam 1000 jarang terjadi.

```
>clopperpearson(410,1000)
```

```
[0.37932,  0.441212]
```

Perintah berikut adalah cara langsung untuk mendapatkan hasil di atas. Tetapi untuk n besar, penjumlahan langsung tidak akurat dan lambat.

```
>p=0.4; i=0:410; n=1000; sum(bin(n,i)*p^i*(1-p)^(n-i))
```

```
0.751401349655
```

Omong-omong, invbinsum() menghitung kebalikan dari binomialsum().

```
>invbindis(0.75,1000,0.4)
```

```
409.932733047
```

Di Bridge, kami mengasumsikan 5 kartu yang beredar (dari 52) di dua tangan (26 kartu). Mari kita hitung probabilitas distribusi yang lebih buruk dari 3:2 (misalnya 0:5, 1:4, 4:1 atau 5:0).

```
>2*hypergeomsum(1,5,13,26)
```

```
0.321739130435
```

Ada juga simulasi distribusi multinomial.

```
>randmultinomial(10,1000,[0.4,0.1,0.5])
```

```
          381          100          519
          376           91          533
          417           80          503
          440           94          466
          406          112          482
          408           94          498
          395          107          498
          399           96          505
          428           87          485
          400           99          501
```

Merencanakan Data

Untuk plot data, kami mencoba hasil pemilu Jerman sejak tahun 1990, diukur dalam kursi.

```
>BW := [ ...
>1990,662,319,239,79,8,17; ...
>1994,672,294,252,47,49,30; ...
>1998,669,245,298,43,47,36; ...
>2002,603,248,251,47,55,2; ...
>2005,614,226,222,61,51,54; ...
>2009,622,239,146,93,68,76; ...
>2013,631,311,193,0,63,64];
```

Untuk para pihak, kami menggunakan serangkaian nama.

```
>P:=["CDU/CSU","SPD","FDP","Gr","Li"];
```

Mari kita mencetak persentase dengan baik.
Pertama kita ekstrak kolom yang diperlukan. Kolom 3 sampai 7 adalah kursi masing-masing partai, dan kolom 2 adalah jumlah kursi. kolom 1 adalah tahun pemilihan.

```
>BT:=BW[,3:7]; BT:=BT/sum(BT); YT:=BW[,1]';
```

Kemudian kami mencetak statistik dalam bentuk tabel. Kami menggunakan nama sebagai tajuk kolom, dan tahun sebagai tajuk untuk baris. Lebar default untuk kolom adalah wc=10, tetapi kami lebih memilih output yang lebih padat. Kolom akan diperluas untuk label kolom, jika perlu.

```
>writetable(BT*100,wc=6,dc=0,>fixed,labc=P,labr=YT)
```

```
        CDU/CSU   SPD   FDP    Gr    Li
  1990       48    36    12     1     3
  1994       44    38     7     7     4
  1998       37    45     6     7     5
  2002       41    42     8     9     0
  2005       37    36    10     8     9
  2009       38    23    15    11    12
  2013       49    31     0    10    10
```

Perkalian matriks berikut mengekstrak jumlah persentase dua partai besar yang menunjukkan bahwa partai-partai kecil telah memperoleh rekaman di parlemen hingga 2009.

```
>BT1:=(BT.[1;1;0;0;0])'*100
```

```
[84.29,  81.25,  81.1659,  82.7529,  72.9642,  61.8971,  79.8732]
```

Ada juga plot statistik sederhana. Kami menggunakannya untuk menampilkan garis dan titik secara bersamaan. Alternatifnya adalah memanggil plot2d dua kali dengan >add.

```
>statplot(YT,BT1,"b"):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra_Statistika-012.png

Tentukan beberapa warna untuk masing-masing pihak.

```
>CP:=[rgb(0.5,0.5,0.5),red,yellow,green,rgb(0.8,0,0)];
```

Sekarang kita dapat memplot hasil pemilu 2009 dan perubahannya menjadi satu plot menggunakan gambar. Kita dapat menambahkan vektor kolom ke setiap plot.

```
>figure(2,1);  ...
>figure(1); columnsplot(BW[6,3:7],P,color=CP); ...
>figure(2); columnsplot(BW[6,3:7]-BW[5,3:7],P,color=CP);  ...
>figure(0):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra_Statistika-013.png

Plot data menggabungkan deretan data statistik dalam satu plot.

```
>J:=BW[,1]'; DP:=BW[,3:7]'; ...
>dataplot(YT,BT',color=CP);  ...
>labelbox(P,colors=CP,styles="[]",>points,w=0.2,x=0.3,y=0.4):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra_Statistika-014.png

Sebuah kolom plot 3D menunjukkan baris data statistik dalam bentuk kolom. Kami menyediakan label untuk baris dan kolom. angle adalah sudut pandang.

```
>columnsplot3d(BT,scols=P,srows=YT, ...
>  angle=30°,ccols=CP):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra_Statistika-015.png

Representasi lain adalah plot mosaik. Perhatikan bahwa kolom plot mewakili kolom matriks di sini. Karena panjangnya label CDU/CSU, kami mengambil jendela yang lebih kecil dari biasanya.

```
>shrinkwindow(>smaller);  ...
>mosaicplot(BT',srows=YT,scols=P,color=CP,style="#"); ...
>shrinkwindow():
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra_Statistika-016.png

Kita juga bisa membuat diagram lingkaran. Karena hitam dan kuning membentuk koalisi, kami menyusun ulang elemen-elemennya.

```
>i=[1,3,5,4,2]; piechart(BW[6,3:7][i],color=CP[i],lab=P[i]):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra_Statistika-017.png

Berikut adalah jenis plot lainnya.

```
>starplot(normal(1,10)+4,lab=1:10,>rays):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra_Statistika-018.png

Beberapa plot di plot2d bagus untuk statika. Berikut adalah plot impuls dari data acak, terdistribusi secara merata di [0,1].

```
>plot2d(makeimpulse(1:10,random(1,10)),>bar):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra_Statistika-019.png

Tetapi untuk data yang terdistribusi secara eksponensial, kita mungkin memerlukan plot logaritmik.

```
>logimpulseplot(1:10,-log(random(1,10))*10):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra_Statistika-020.png

Fungsi columnplot() lebih mudah digunakan, karena hanya membutuhkan vektor nilai. Selain itu, ia dapat mengatur labelnya ke apa pun yang kita inginkan, kita sudah mendemonstrasikannya dalam tutorial ini.
Ini adalah aplikasi lain, di mana kita menghitung karakter dalam sebuah kalimat dan menyusun statistik.

```
>v=strtochar("the quick brown fox jumps over the lazy dog"); ...
>w=ascii("a"):ascii("z"); x=getmultiplicities(w,v); ...
>cw=[]; for k=w; cw=cw|char(k); end; ...
>columnsplot(x,lab=cw,width=0.05):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra_Statistika-021.png

Dimungkinkan juga untuk mengatur sumbu secara manual.

```
>n=10; p=0.4; i=0:n; x=bin(n,i)*p^i*(1-p)^(n-i); ...
>columnsplot(x,lab=i,width=0.05,<frame,<grid); ...
>yaxis(0,0:0.1:1,style="->",>left); xaxis(0,style="."); ...
>label("p",0,0.25), label("i",11,0); ...
>textbox(["Binomial distribution","with p=0.4"]):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra_Statistika-022.png

Berikut ini adalah cara untuk memplot frekuensi bilangan dalam sebuah vektor.
Kami membuat vektor bilangan bulat bilangan acak 1 hingga 6.

```
>v:=intrandom(1,10,10)
```

```
[8,  5,  8,  8,  6,  8,  8,  3,  5,  5]
```

Kemudian ekstrak nomor unik di v.

```
>vu:=unique(v)
```

```
[3,  5,  6,  8]
```

Dan plot frekuensi dalam plot kolom.

```
>columnsplot(getmultiplicities(vu,v),lab=vu,style="/"):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra_Statistika-023.png

Kami ingin menunjukkan fungsi untuk distribusi nilai empiris.

```
>x=normal(1,20);
```

Fungsi empdist(x,vs) membutuhkan array nilai yang diurutkan. Jadi kita harus mengurutkan x sebelum kita dapat menggunakannya.

```
>xs=sort(x);
```

Kemudian kami memplot distribusi empiris dan beberapa batang kepadatan menjadi satu plot. Alih-alih plot bar untuk distribusi, kami menggunakan plot gigi gergaji kali ini.

```
>figure(2,1); ...
>figure(1); plot2d("empdist",-4,4;xs); ...
>figure(2); plot2d(histo(x,v=-4:0.2:4,<bar));  ...
>figure(0):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra_Statistika-024.png

Plot pencar mudah dilakukan di Euler dengan plot titik biasa. Grafik berikut menunjukkan bahwa X dan X+Y jelas berkorelasi positif.

```
>x=normal(1,100); plot2d(x,x+rotright(x),>points,style=".."):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra_Statistika-025.png

Seringkali, kita ingin membandingkan dua sampel dari distribusi yang berbeda. Ini dapat dilakukan dengan plot kuantil-kuantil.
Untuk pengujian, kami mencoba distribusi student-t dan distribusi eksponensial.

```
>x=randt(1,1000,5); y=randnormal(1,1000,mean(x),dev(x)); ...
>plot2d("x",r=6,style="--",yl="normal",xl="student-t",>vertical); ...
>plot2d(sort(x),sort(y),>points,color=red,style="x",>add):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra_Statistika-026.png

Plot dengan jelas menunjukkan bahwa nilai terdistribusi normal cenderung lebih kecil di ujung ekstrim.
Jika kita memiliki dua distribusi dengan ukuran yang berbeda, kita dapat memperluas yang lebih kecil atau mengecilkan yang lebih besar. Fungsi berikut baik untuk keduanya. Dibutuhkan nilai median dengan persentase antara 0 dan 1.

```
>function medianexpand (x,n) := median(x,p=linspace(0,1,n-1));
```

Mari kita bandingkan dua distribusi yang sama.

```
>x=random(1000); y=random(400); ...
>plot2d("x",0,1,style="--"); ...
>plot2d(sort(medianexpand(x,400)),sort(y),>points,color=red,style="x",>add):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra_Statistika-027.png

Regresi dan Korelasi

Regresi linier dapat dilakukan dengan fungsi polyfit() atau berbagai fungsi fit.
Sebagai permulaan, kami menemukan garis regresi untuk data univariat dengan polifit(x,y,1).

```
>x=1:10; y=[2,3,1,5,6,3,7,8,9,8]; writetable(x'|y',labc=["x","y"])
```

```
         x          y
         1          2
         2          3
         3          1
         4          5
         5          6
         6          3
         7          7
         8          8
         9          9
        10          8
```

Kami ingin membandingkan non-weighted dan weighted fit. Pertama, koefisien kecocokan linier.

```
>p=polyfit(x,y,1)
```

```
  [0.733333,  0.812121]
```

Sekarang koefisien dengan bobot yang menekankan nilai terakhir.

```
>w &= "exp(-(x-10)^2/10)"; pw=polyfit(x,y,1,w=w(x))
```

```
[4.71566,  0.38319]
```

Kami memasukkan semuanya ke dalam satu plot untuk titik dan garis regresi, dan untuk bobot yang digunakan.

```
>figure(2,1);  ...
>figure(1); statplot(x,y,"b",xl="Regression"); ...
>  plot2d("evalpoly(x,p)",>add,color=blue,style="--"); ...
>  plot2d("evalpoly(x,pw)",5,10,>add,color=red,style="--"); ...
>figure(2); plot2d(w,1,10,>filled,style="/",fillcolor=red,xl=w); ...
>figure(0):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra_Statistika-028.png

Sebagai contoh lain kita membaca survei siswa, usia mereka, usia orang tua mereka dan jumlah saudara kandung dari sebuah file.
Tabel ini berisi "m" dan "f" di kolom kedua. Kami menggunakan variabel tok2 untuk mengatur terjemahan yang tepat daripada membiarkan readtable() mengumpulkan terjemahan.

```
>{MS,hd}:=readtable("table1.dat",tok2:=["m","f"]);  ...
>writetable(MS,labc=hd,tok2:=["m","f"]);
```

```
Could not open the file
table1.dat
for reading!
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
readtable:
    if filename!=none then open(filename,"r"); endif;
```

Bagaimana usia bergantung satu sama lain? Kesan pertama datang dari scatterplot berpasangan.

```
>scatterplots(tablecol(MS,3:5),hd[3:5]):
```

```
Variable or function MS not found.
Error in:
scatterplots(tablecol(MS,3:5),hd[3:5]): ...
                        ^
```

Jelas bahwa usia ayah dan ibu bergantung satu sama lain. Mari kita tentukan dan plot garis regresinya.

```
>cs:=MS[,4:5]'; ps:=polyfit(cs[1],cs[2],1)
```

```
MS is not a variable!
Error in:
cs:=MS[,4:5]'; ps:=polyfit(cs[1],cs[2],1) ...
            ^
```

Ini jelas model yang salah. Garis regresinya adalah s=17+0,74t, di mana t adalah usia ibu dan s usia ayah. Perbedaan usia mungkin sedikit bergantung pada usia, tetapi tidak terlalu banyak.
Sebaliknya, kami menduga fungsi seperti s=a+t. Maka a adalah mean dari s-t. Ini adalah perbedaan usia rata-rata antara ayah dan ibu.

```
>da:=mean(cs[2]-cs[1])
```

```
cs is not a variable!
Error in:
da:=mean(cs[2]-cs[1]) ...
              ^
```

Mari kita plot ini menjadi satu plot pencar.

```
>plot2d(cs[1],cs[2],>points);  ...
>plot2d("evalpoly(x,ps)",color=red,style=".",>add);  ...
>plot2d("x+da",color=blue,>add):
```

```
cs is not a variable!
Error in:
plot2d(cs[1],cs[2],>points);  plot2d("evalpoly(x,ps)",color=re ...
            ^
```

Berikut adalah plot kotak dari dua zaman. Ini hanya menunjukkan, bahwa usianya berbeda.

```
>boxplot(cs,["mothers","fathers"]):
```

```
Variable or function cs not found.
Error in:
boxplot(cs,["mothers","fathers"]): ...
          ^
```

Sangat menarik bahwa perbedaan median tidak sebesar perbedaan rata-rata.

```
>median(cs[2])-median(cs[1])
```

```
cs is not a variable!
Error in:
median(cs[2])-median(cs[1]) ...
            ^
```

Koefisien korelasi menunjukkan korelasi positif.

```
>correl(cs[1],cs[2])
```

```
cs is not a variable!
Error in:
correl(cs[1],cs[2]) ...
            ^
```

Korelasi peringkat adalah ukuran untuk urutan yang sama di kedua vektor. Ini juga cukup positif.

```
>rankcorrel(cs[1],cs[2])
```

```
cs is not a variable!
Error in:
rankcorrel(cs[1],cs[2]) ...
                ^
```

Membuat Fungsi baru

Tentu saja, bahasa EMT dapat digunakan untuk memprogram fungsi-fungsi baru. Misalnya, kita mendefinisikan fungsi skewness.

$$\text{sk}(x) = \frac{\sqrt{n}\sum_i (x_i - m)^3}{\left(\sum_i (x_i - m)^2\right)^{3/2}}$$

dimana m adalah mean dari x.

```
>function skew (x:vector) ...
```

```
m=mean(x);
return sqrt(cols(x))*sum((x-m)^3)/(sum((x-m)^2))^(3/2);
endfunction
```

Seperti yang Anda lihat, kita dapat dengan mudah menggunakan bahasa matriks untuk mendapatkan implementasi yang sangat singkat dan efisien. Mari kita coba fungsi ini.

```
>data=normal(20); skew(normal(10))
```

```
-0.198710316203
```

Berikut adalah fungsi lain, yang disebut koefisien skewness Pearson.

```
>function skew1 (x) := 3*(mean(x)-median(x))/dev(x)
>skew1(data)
```

```
-0.0801873249135
```

Simulasi Monte Carlo

Euler dapat digunakan untuk mensimulasikan kejadian acak. Kita telah melihat contoh sederhana di atas. Ini adalah satu lagi, yang mensimulasikan 1000 kali 3 lemparan dadu, dan meminta distribusi jumlah.

```
>ds:=sum(intrandom(1000,3,6))'; fs=getmultiplicities(3:18,ds)
```

```
[5,  17,  35,  44,  75,  97,  114,  116,  143,  116,  104,  53,  40,
22,  13,  6]
```

kita bisa membuat plot ini sekarang

```
>columnsplot(fs,lab=3:18):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra_Statistika-029.png

Untuk menentukan distribusi yang diharapkan tidak begitu mudah. Kami menggunakan rekursi lanjutan untuk ini.

Fungsi berikut menghitung banyaknya cara bilangan k dapat direpresentasikan sebagai jumlah n bilangan dalam rentang 1 sampai m. Ia bekerja secara rekursif dengan cara yang jelas.

```
>function map countways (k; n, m) ...
```

```
    if n==1 then return k>=1 && k<=m
    else
      sum=0;
      loop 1 to m; sum=sum+countways(k-#,n-1,m); end;
      return sum;
    end;
  endfunction
```

Berikut adalah hasil dari tiga lemparan dadu.

```
>cw=countways(3:18,3,6)
```

```
[1,   3,   6,   10,   15,   21,   25,   27,   27,   25,   21,   15,   10,   6,   3,
1]
```

Kami menambahkan nilai yang diharapkan ke plot.

```
>plot2d(cw/6^3*1000,>add); plot2d(cw/6^3*1000,>points,>add):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra_Statistika-030.png

Untuk simulasi lain, simpangan nilai rata-rata dari n 0-1-variabel acak terdistribusi normal adalah 1/sqrt(n).

```
>longformat; 1/sqrt(10)
```

```
0.316227766017
```

Mari kita periksa ini dengan simulasi. Kami memproduksi 10000 kali 10 vektor acak.

```
>M=normal(10000,10); dev(mean(M)')
```

```
0.319493614817
```

```
>plot2d(mean(M)',>distribution):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra_Statistika-031.png

Median 10 0-1-bilangan acak terdistribusi normal memiliki simpangan yang lebih besar.

```
>dev(median(M)')
```

```
0.374460271535
```

Karena kita dapat dengan mudah menghasilkan jalan acak, kita dapat mensimulasikan proses Wiener. Kami mengambil 1000 langkah dari 1000 proses. Kami kemudian memplot deviasi standar dan rata-rata dari langkah ke-n dari proses ini bersama dengan nilai yang diharapkan dalam warna merah.

```
>n=1000; m=1000; M=cumsum(normal(n,m)/sqrt(m)); ...
>t=(1:n)/n; figure(2,1); ...
>figure(1); plot2d(t,mean(M')'); plot2d(t,0,color=red,>add); ...
>figure(2); plot2d(t,dev(M')'); plot2d(t,sqrt(t),color=red,>add); ...
>figure(0):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra_Statistika-032.png

Uji

Uji adalah alat penting dalam statistik. Di Euler, banyak tes diimplementasikan. Semua tes ini mengembalikan kesalahan yang kami terima jika kami menolak hipotesis nol.
Sebagai contoh, kami menguji lemparan dadu untuk distribusi seragam. Pada 600 lemparan, kami mendapatkan nilai berikut, yang kami masukkan ke dalam uji chi-kuadrat.

```
>chitest([90,103,114,101,103,89],dup(100,6)')
```

```
0.498830517952
```

Tes chi-kuadrat juga memiliki mode, yang menggunakan simulasi Monte Carlo untuk menguji statistik. Hasilnya harus hampir sama. Parameter >p menginterpretasikan vektor-y sebagai vektor probabilitas.

```
>chitest([90,103,114,101,103,89],dup(1/6,6)',>p,>montecarlo)
```

```
0.526
```

Kesalahan ini terlalu besar. Jadi kita tidak bisa menolak distribusi seragam. Ini tidak membuktikan bahwa dadu kami adil. Tapi kita tidak bisa menolak hipotesis kita.
Selanjutnya kita menghasilkan 1000 lemparan dadu menggunakan generator angka acak, dan melakukan tes yang sama.

```
>n=1000; t=random([1,n*6]); chitest(count(t*6,6),dup(n,6)')
```

```
0.528028118442
```

Mari kita uji nilai rata-rata 100 dengan uji-t.

```
>s=200+normal([1,100])*10; ...
>ttest(mean(s),dev(s),100,200)
```

```
0.0218365848476
```

Fungsi ttest() membutuhkan nilai rata-rata, simpangan, jumlah data, dan nilai rata-rata yang akan diuji. Sekarang mari kita periksa dua pengukuran untuk mean yang sama. Kami menolak hipotesis bahwa mereka memiliki rata-rata yang sama, jika hasilnya <0,05.

```
>tcomparedata(normal(1,10),normal(1,10))
```

```
0.38722000942
```

Jika kita menambahkan bias ke satu distribusi, kita mendapatkan lebih banyak penolakan. Ulangi simulasi ini beberapa kali untuk melihat efeknya.

```
>tcomparedata(normal(1,10),normal(1,10)+2)
```

```
5.60009101758e-07
```

Pada contoh berikutnya, kita menghasilkan 20 lemparan dadu acak sebanyak 100 kali dan menghitung yang ada di dalamnya. Harus ada 20/6=3,3 yang rata-rata.

```
>R=random(100,20); R=sum(R*6<=1)'; mean(R)
```

```
3.28
```

Kami sekarang membandingkan jumlah satu dengan distribusi binomial. Pertama kita plot distribusi yang.

```
>plot2d(R,distribution=max(R)+1,even=1,style="\/"):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra_Statistika-033.png

```
>t=count(R,21);
```

Kemudian kami menghitung nilai yang diharapkan.

```
>n=0:20; b=bin(20,n)*(1/6)^n*(5/6)^(20-n)*100;
```

Kita harus mengumpulkan beberapa angka untuk mendapatkan kategori yang cukup besar.

```
>t1=sum(t[1:2])|t[3:7]|sum(t[8:21]); ...
>b1=sum(b[1:2])|b[3:7]|sum(b[8:21]);
```

Uji chi-kuadrat menolak hipotesis bahwa distribusi kami adalah distribusi binomial, jika hasilnya <0,05.

```
>chitest(t1,b1)
```

```
0.53921579764
```

Contoh berikut berisi hasil dua kelompok orang (laki-laki dan perempuan, katakanlah) memberikan suara untuk satu dari enam partai.

```
>A=[23,37,43,52,64,74;27,39,41,49,63,76];  ...
>  writetable(A,wc=6,labr=["m","f"],labc=1:6)
```

```
          1     2     3     4     5     6
    m    23    37    43    52    64    74
    f    27    39    41    49    63    76
```

Kami ingin menguji independensi suara dari jenis kelamin. Tes tabel chi^2 melakukan ini. Akibatnya terlalu besar untuk menolak kemerdekaan. Jadi kita tidak bisa mengatakan, jika voting tergantung pada jenis kelamin dari data ini.

```
>tabletest(A)
```

```
0.990701632326
```

Berikut ini adalah tabel yang diharapkan, jika kita mengasumsikan frekuensi pemungutan suara yang diamati.

```
>writetable(expectedtable(A),wc=6,dc=1,labr=["m","f"],labc=1:6)
```

```
          1     2     3     4     5     6
   m   24.9  37.9  41.9  50.3  63.3  74.7
   f   25.1  38.1  42.1  50.7  63.7  75.3
```

Kita dapat menghitung koefisien kontingensi yang dikoreksi. Karena sangat dekat dengan 0, kami menyimpulkan bahwa pemungutan suara tidak tergantung pada jenis kelamin.

```
>contingency(A)
```

```
0.0427225484717
```

Uji Lainnya

Selanjutnya kami menggunakan analisis varians (Uji-F) untuk menguji tiga sampel data yang terdistribusi normal untuk nilai rata-rata yang sama. Metode tersebut disebut ANOVA (analisis varians). Di Euler, fungsi varanalysis() digunakan.

```
>x1=[109,111,98,119,91,118,109,99,115,109,94]; mean(x1),
```

```
106.545454545
```

```
>x2=[120,124,115,139,114,110,113,120,117]; mean(x2),
```

```
119.111111111
```

```
>x3=[120,112,115,110,105,134,105,130,121,111]; mean(x3)
```

```
116.3
```

```
>varanalysis(x1,x2,x3)
```

```
0.0138048221371
```

Ini berarti, kami menolak hipotesis nilai rata-rata yang sama. Kami melakukan ini dengan probabilitas kesalahan 1,3%.
Ada juga uji median, yang menolak sampel data dengan distribusi rata-rata berbeda menguji median sampel bersatu.

```
>a=[56,66,68,49,61,53,45,58,54];
>b=[72,81,51,73,69,78,59,67,65,71,68,71];
>mediantest(a,b)
```

```
0.0241724220052
```

Tes lain tentang kesetaraan adalah tes peringkat. Ini jauh lebih tajam daripada tes median.

```
>ranktest(a,b)
```

```
0.00199969612469
```

Dalam contoh berikut, kedua distribusi memiliki mean yang sama.

```
>ranktest(random(1,100),random(1,50)*3-1)
```

```
0.129608141484
```

Sekarang mari kita coba mensimulasikan dua perlakuan a dan b yang diterapkan pada orang yang berbeda.

```
>a=[8.0,7.4,5.9,9.4,8.6,8.2,7.6,8.1,6.2,8.9];
>b=[6.8,7.1,6.8,8.3,7.9,7.2,7.4,6.8,6.8,8.1];
```

Tes signum memutuskan, jika a lebih baik dari b.

```
>signtest(a,b)
```

```
0.0546875
```

Ini terlalu banyak kesalahan. Kita tidak dapat menolak bahwa a sama baiknya dengan b.
Tes Wilcoxon lebih tajam dari tes ini, tetapi bergantung pada nilai kuantitatif perbedaan.

```
>wilcoxon(a,b)
```

```
0.0296680599405
```

Mari kita coba dua tes lagi menggunakan seri yang dihasilkan.

```
>wilcoxon(normal(1,20),normal(1,20)-1)
```

```
0.0068706451766
```

```
>wilcoxon(normal(1,20),normal(1,20))
```

```
0.275145971064
```

Nomor Acak

Berikut ini adalah pengujian untuk pembangkit bilangan acak. Euler menggunakan generator yang sangat bagus, jadi kita tidak perlu mengharapkan masalah.
Pertama kita menghasilkan sepuluh juta angka acak di [0,1].

```
>n:=10000000; r:=random(1,n);
```

Selanjutnya kita hitung jarak antara dua bilangan kurang dari 0,05.

```
>a:=0.05; d:=differences(nonzeros(r<a));
```

Akhirnya, kami memplot berapa kali, setiap jarak terjadi, dan membandingkan dengan nilai yang diharapkan.

```
>m=getmultiplicities(1:100,d); plot2d(m); ...
>  plot2d("n*(1-a)^(x-1)*a^2",color=red,>add):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra_Statistika-034.png

Hapus datanya.

```
>remvalue n;
```

Pengantar untuk Pengguna Proyek R

Jelas, EMT tidak bersaing dengan R sebagai paket statistik. Namun, ada banyak prosedur dan fungsi statistik yang tersedia di EMT juga. Jadi EMT dapat memenuhi kebutuhan dasar. Bagaimanapun, EMT hadir dengan paket numerik dan sistem aljabar komputer.

Notebook ini cocok untuk Anda yang terbiasa dengan R, tetapi perlu mengetahui perbedaan sintaks EMT dan R. Kami mencoba memberikan gambaran tentang hal-hal yang jelas dan kurang jelas yang perlu Anda ketahui.

Selain itu, kami mencari cara untuk bertukar data antara kedua sistem.

Perhatikan bahwa ini adalah pekerjaan yang sedang berjalan.

Sintaks Dasar

Hal pertama yang Anda pelajari di R adalah membuat vektor. Di EMT, perbedaan utama adalah bahwa : operator dapat mengambil ukuran langkah. Selain itu, ia memiliki daya ikat yang rendah.

```
>n=10; 0:n/20:n-1
```

```
[0,  0.5,  1,  1.5,  2,  2.5,  3,  3.5,  4,  4.5,  5,  5.5,  6,  6.5,
7,  7.5,  8,  8.5,  9]
```

Fungsi c() tidak ada. Dimungkinkan untuk menggunakan vektor untuk menggabungkan sesuatu.

Contoh berikut, seperti banyak contoh lainnya, dari "Interoduction to R" yang disertakan dengan proyek R. Jika Anda membaca PDF ini, Anda akan menemukan bahwa saya mengikuti jalannya dalam tutorial ini.

```
>x=[10.4, 5.6, 3.1, 6.4, 21.7]; [x,0,x]
```

```
[10.4,  5.6,  3.1,  6.4,  21.7,  0,  10.4,  5.6,  3.1,  6.4,  21.7]
```

Operator titik dua dengan ukuran langkah EMT diganti dengan fungsi seq() di R. Kita bisa menulis fungsi ini di EMT.

```
>function seq(a,b,c) := a:b:c; ...
>seq(0,-0.1,-1)
```

```
[0,  -0.1,  -0.2,  -0.3,  -0.4,  -0.5,  -0.6,  -0.7,  -0.8,  -0.9,  -1]
```

Fungsi rep() dari R tidak ada di EMT. Untuk input vektor, dapat ditulis sebagai berikut.

```
>function rep(x:vector,n:index) := flatten(dup(x,n)); ...
>rep(x,2)
```

```
[10.4,  5.6,  3.1,  6.4,  21.7,  10.4,  5.6,  3.1,  6.4,  21.7]
```

Perhatikan bahwa "=" atau ":=" digunakan untuk tugas. Operator "->" digunakan untuk unit di EMT.

```
>125km -> " miles"
```

```
77.6713990297 miles
```

Operator "<-" untuk penugasan tetap menyesatkan, dan bukan ide yang baik untuk R. Berikut ini akan membandingkan a dan -4 di EMT.

```
>a=2; a<-4
```

```
0
```

Di R, "a<-4<3" berfungsi, tetapi "a<-4<-3" tidak. Saya juga memiliki ambiguitas serupa di EMT, tetapi mencoba menghilangkannya perlahan-lahan.
EMT dan R memiliki vektor bertipe boolean. Namun di EMT, angka 0 dan 1 digunakan untuk mewakili salah dan benar. Di R, nilai true dan false dapat digunakan dalam aritmatika biasa seperti di EMT.

```
>x<5, %*x
```

```
[0,   0,   1,   0,   0]
[0,   0,   3.1,   0,   0]
```

EMT melempar kesalahan atau menghasilkan NAN tergantung pada tanda "kesalahan".

```
>errors off; 0/0, isNAN(sqrt(-1)), errors on;
```

```
NAN
1
```

String sama di R dan EMT. Keduanya berada di lokal saat ini, bukan di Unicode.
Di R ada paket untuk Unicode. Di EMT, sebuah string dapat berupa string Unicode. String unicode dapat diterjemahkan ke pengkodean lokal dan sebaliknya. Selain itu, u"..." dapat berisi entitas HTML.

```
>u"&#169; Ren&eacut; Grothmann"
```

```
© René Grothmann
```

Berikut ini mungkin atau mungkin tidak ditampilkan dengan benar di sistem Anda sebagai A dengan titik dan garis di atasnya. Itu tergantung pada font yang Anda gunakan.

```
>chartoutf([480])
```

Penggabungan string dilakukan dengan "+" atau "|". Ini dapat mencakup angka, yang akan dicetak dalam format saat ini.

```
>"pi = "+pi
```

```
pi = 3.14159265359
```

Pengindeksan

Sebagian besar waktu, ini akan berfungsi seperti pada R.
Tetapi EMT akan menginterpretasikan indeks negatif dari belakang vektor, sedangkan R menginterpretasikan x[n] sebagai x tanpa elemen ke-n.

```
>x, x[1:3], x[-2]
```

```
[10.4,   5.6,   3.1,   6.4,   21.7]
[10.4,   5.6,   3.1]
6.4
```

Perilaku R dapat dicapai dalam EMT dengan drop().

```
>drop(x,2)
```

```
[10.4,   3.1,   6.4,   21.7]
```

Vektor logis tidak diperlakukan secara berbeda sebagai indeks di EMT, berbeda dengan R. Anda perlu mengekstrak elemen bukan nol terlebih dahulu di EMT.

```
>x, x>5, x[nonzeros(x>5)]
```

```
[10.4,   5.6,   3.1,   6.4,   21.7]
[1,   1,   0,   1,   1]
[10.4,   5.6,   6.4,   21.7]
```

Sama seperti di R, vektor indeks dapat berisi pengulangan.

```
>x[[1,2,2,1]]
```

```
[10.4,   5.6,   5.6,   10.4]
```

Tetapi nama untuk indeks tidak dimungkinkan di EMT. Untuk paket statistik, ini mungkin sering diperlukan untuk memudahkan akses ke elemen vektor.
Untuk meniru perilaku ini, kita dapat mendefinisikan fungsi sebagai berikut.

```
>function sel (v,i,s) := v[indexof(s,i)]; ...
>s=["first","second","third","fourth"]; sel(x,["first","third"],s)
```

```
Trying to overwrite protected function sel!
Error in:
function sel (v,i,s) := v[indexof(s,i)]; ... ...
             ^
[10.4,   3.1]
```

Tipe Data

EMT memiliki lebih banyak tipe data tetap daripada R. Jelas, di R ada vektor yang tumbuh. Anda dapat mengatur vektor numerik kosong v dan menetapkan nilai ke elemen v[17]. Ini tidak mungkin di EMT.
Berikut ini agak tidak efisien.

```
>v=[]; for i=1 to 10000; v=v|i; end;
```

EMT sekarang akan membuat vektor dengan v dan i ditambahkan pada tumpukan dan menyalin vektor itu kembali ke variabel global v.
Semakin efisien pra-mendefinisikan vektor.

```
>v=zeros(10000); for i=1 to 10000; v[i]=i; end;
```

Untuk mengubah jenis tanggal di EMT, Anda dapat menggunakan fungsi seperti complex().

```
>complex(1:4)
```

```
[ 1+0i ,  2+0i ,  3+0i ,  4+0i  ]
```

Konversi ke string hanya dimungkinkan untuk tipe data dasar. Format saat ini digunakan untuk rangkaian string sederhana. Tetapi ada fungsi seperti print() atau frac().
Untuk vektor, Anda dapat dengan mudah menulis fungsi Anda sendiri.

```
>function tostr (v) ...
```

```
s="[";
loop 1 to length(v);
   s=s+print(v[#],2,0);
   if #<length(v) then s=s+","; endif;
end;
return s+"]";
endfunction
```

```
>tostr(linspace(0,1,10))
```

```
[0.00,0.10,0.20,0.30,0.40,0.50,0.60,0.70,0.80,0.90,1.00]
```

Untuk komunikasi dengan Maxima, terdapat fungsi convertmxm(), yang juga dapat digunakan untuk memformat vektor untuk output.

```
>convertmxm(1:10)
```

```
[1,2,3,4,5,6,7,8,9,10]
```

Untuk Latex perintah tex dapat digunakan untuk mendapatkan perintah Latex.

```
>tex(&[1,2,3])
```

```
\left[ 1 , 2 , 3 \right]
```

Faktor dan Tabel

Dalam pengantar R ada contoh dengan apa yang disebut faktor.
Berikut ini adalah daftar wilayah dari 30 negara bagian.

```
>austates = ["tas", "sa", "qld", "nsw", "nsw", "nt", "wa", "wa", ...
>"qld", "vic", "nsw", "vic", "qld", "qld", "sa", "tas", ...
>"sa", "nt", "wa", "vic", "qld", "nsw", "nsw", "wa", ...
>"sa", "act", "nsw", "vic", "vic", "act"];
```

Asumsikan, kita memiliki pendapatan yang sesuai di setiap negara bagian.

```
>incomes = [60, 49, 40, 61, 64, 60, 59, 54, 62, 69, 70, 42, 56, ...
>61, 61, 61, 58, 51, 48, 65, 49, 49, 41, 48, 52, 46, ...
>59, 46, 58, 43];
```

Sekarang, kami ingin menghitung rata-rata pendapatan di wilayah tersebut. Menjadi program statistik, R memiliki factor() dan tappy() untuk ini.
EMT dapat melakukannya dengan menemukan indeks wilayah dalam daftar wilayah yang unik.

```
>auterr=sort(unique(austates)); f=indexofsorted(auterr,austates)
```

```
[6,  5,  4,  2,  2,  3,  8,  8,  4,  7,  2,  7,  4,  4,  5,  6,  5,  3,
8,  7,  4,  2,  2,  8,  5,  1,  2,  7,  7,  1]
```

Pada titik itu, kita dapat menulis fungsi loop kita sendiri untuk melakukan sesuatu hanya untuk satu faktor.
Atau kita bisa meniru fungsi tapply() dengan cara berikut.

```
>function map tappl (i; f$:call, cat, x) ...
```

```
u=sort(unique(cat));
f=indexof(u,cat);
return f$(x[nonzeros(f==indexof(u,i))]);
endfunction
```

Ini agak tidak efisien, karena menghitung wilayah unik untuk setiap i, tetapi berhasil.

```
>tappl(auterr,"mean",austates,incomes)
```

```
[44.5,  57.3333333333,  55.5,  53.6,  55,  60.5,  56,  52.25]
```

Perhatikan bahwa ini berfungsi untuk setiap vektor wilayah.

```
>tappl(["act","nsw"],"mean",austates,incomes)
```

```
[44.5,  57.3333333333]
```

Sekarang, paket statistik EMT mendefinisikan tabel seperti di R. Fungsi readtable() dan writetable() dapat digunakan untuk input dan output.
Jadi kita bisa mencetak rata-rata pendapatan negara di wilayah dengan cara yang bersahabat.

```
>writetable(tappl(auterr,"mean",austates,incomes),labc=auterr,wc=7)
```

```
    act    nsw     nt    qld     sa    tas    vic     wa
   44.5  57.33   55.5   53.6     55   60.5     56  52.25
```

Kita juga dapat mencoba meniru perilaku R sepenuhnya.
Faktor-faktor tersebut harus dengan jelas disimpan dalam kumpulan dengan jenis dan kategori (negara bagian dan teritori dalam contoh kami). Untuk EMT, kami menambahkan indeks yang telah dihitung sebelumnya.

```
>function makef (t) ...
```

```
## Factor data
## Returns a collection with data t, unique data, indices.
## See: tapply
u=sort(unique(t));
return {{t,u,indexofsorted(u,t)}};
endfunction
```

```
>statef=makef(austates);
```

Sekarang elemen ketiga dari koleksi akan berisi indeks.

```
>statef[3]
```

```
[6,  5,  4,  2,  2,  3,  8,  8,  4,  7,  2,  7,  4,  4,  5,  6,  5,  3,
8,  7,  4,  2,  2,  8,  5,  1,  2,  7,  7,  1]
```

Sekarang kita bisa meniru tapply() dengan cara berikut. Ini akan mengembalikan tabel sebagai kumpulan data tabel dan judul kolom.

```
>function tapply (t:vector,tf,f$:call) ...
```

```
## Makes a table of data and factors
## tf : output of makef()
## See: makef
uf=tf[2]; f=tf[3]; x=zeros(length(uf));
for i=1 to length(uf);
   ind=nonzeros(f==i);
   if length(ind)==0 then x[i]=NAN;
   else x[i]=f$(t[ind]);
   endif;
end;
return {{x,uf}};
endfunction
```

Kami tidak menambahkan banyak jenis pengecekan di sini. Satu-satunya tindakan pencegahan menyangkut kategori (faktor) tanpa data. Tetapi orang harus memeriksa panjang t yang benar dan kebenaran koleksi tf.
Tabel ini dapat dicetak sebagai tabel dengan writetable().

```
>writetable(tapply(incomes,statef,"mean"),wc=7)
```

```
    act    nsw     nt    qld     sa    tas    vic     wa
   44.5  57.33   55.5   53.6     55   60.5     56  52.25
```

Array

EMT hanya memiliki dua dimensi untuk array. Tipe datanya disebut matriks. Akan mudah untuk menulis fungsi untuk dimensi yang lebih tinggi atau pustaka C untuk ini.
R memiliki lebih dari dua dimensi. Dalam R array adalah vektor dengan bidang dimensi.
Dalam EMT, vektor adalah matriks dengan satu baris. Itu dapat dibuat menjadi matriks dengan redim().

```
>shortformat; X=redim(1:20,4,5)
```

```
          1           2           3           4           5
          6           7           8           9          10
         11          12          13          14          15
         16          17          18          19          20
```

Ekstraksi baris dan kolom, atau sub-matriks, sangat mirip dengan R.

```
>X[,2:3]
```

```
          2           3
          7           8
         12          13
         17          18
```

Namun, dalam R dimungkinkan untuk menetapkan daftar indeks spesifik dari vektor ke suatu nilai. Hal yang sama dimungkinkan di EMT hanya dengan loop.

```
>function setmatrixvalue (M, i, j, v) ...
```

```
  loop 1 to max(length(i),length(j),length(v))
     M[i{#},j{#}] = v{#};
  end;
  endfunction
```

Kami mendemonstrasikan ini untuk menunjukkan bahwa matriks dilewatkan dengan referensi di EMT. Jika Anda tidak ingin mengubah matriks asli M, Anda perlu menyalinnya ke dalam fungsi.

```
>setmatrixvalue(X,1:3,3:-1:1,0); X,
```

```
          1           2           0           4           5
          6           0           8           9          10
          0          12          13          14          15
         16          17          18          19          20
```

Perkalian luar dalam EMT hanya dapat dilakukan antar vektor. Ini otomatis karena bahasa matriks. Satu vektor harus menjadi vektor kolom dan yang lainnya vektor baris.

```
>(1:5)*(1:5)'
```

```
          1           2           3           4           5
          2           4           6           8          10
          3           6           9          12          15
          4           8          12          16          20
          5          10          15          20          25
```

Dalam pengantar PDF untuk R ada sebuah contoh, yang menghitung distribusi ab-cd untuk a,b,c,d yang dipilih dari 0 hingga n secara acak. Solusi dalam R adalah membentuk matriks 4 dimensi dan menjalankan table() di atasnya.
Tentu saja, ini dapat dicapai dengan loop. Tapi loop tidak efektif di EMT atau R. Di EMT, kita bisa menulis loop di C dan itu akan menjadi solusi tercepat.
Tapi kita ingin meniru perilaku R. Untuk ini, kita perlu meratakan perkalian ab dan membuat matriks ab-cd.

```
>a=0:6; b=a'; p=flatten(a*b); q=flatten(p-p'); ...
>u=sort(unique(q)); f=getmultiplicities(u,q); ...
>statplot(u,f,"h"):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra_Statistika-035.png

Selain multiplisitas yang tepat, EMT dapat menghitung frekuensi dalam vektor.

```
>getfrequencies(q,-50:10:50)
```

```
[0,  23,  132,  316,  602,  801,  333,  141,  53,  0]
```

Cara paling mudah untuk memplot ini sebagai distribusi adalah sebagai berikut.

```
>plot2d(q,distribution=11):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra_Statistika-036.png

Tetapi juga dimungkinkan untuk menghitung sebelumnya hitungan dalam interval yang dipilih sebelumnya. Tentu saja, berikut ini menggunakan getfrequencies() secara internal.
Karena fungsi histo() mengembalikan frekuensi, kita perlu menskalakannya sehingga integral di bawah grafik batang adalah 1.

```
>{x,y}=histo(q,v=-55:10:55); y=y/sum(y)/differences(x); ...
>plot2d(x,y,>bar,style="/"):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra_Statistika-037.png

Daftar

EMT memiliki dua macam daftar. Salah satunya adalah daftar global yang dapat diubah, dan yang lainnya adalah jenis daftar yang tidak dapat diubah. Kami tidak peduli dengan daftar global di sini.
Jenis daftar yang tidak dapat diubah disebut koleksi di EMT. Itu berperilaku seperti struktur di C, tetapi elemennya hanya diberi nomor dan tidak diberi nama.

```
>L={{"Fred","Flintstone",40,[1990,1992]}}
```

```
Fred
Flintstone
40
[1990,  1992]
```

Saat ini elemen tidak memiliki nama, meskipun nama dapat ditetapkan untuk tujuan khusus. Mereka diakses dengan angka.

```
>(L[4])[2]
```

```
1992
```

File Input dan Output (Membaca dan Menulis Data)

Anda akan sering ingin mengimpor matriks data dari sumber lain ke EMT. Tutorial ini memberitahu Anda tentang banyak cara untuk mencapai ini. Fungsi sederhana adalah writematrix() dan readmatrix().
Mari kita tunjukkan cara membaca dan menulis vektor real ke file.

```
>a=random(1,100); mean(a), dev(a),
```

```
0.49815
0.28037
```

Untuk menulis data ke file, kita menggunakan fungsi writematrix().
Karena pengenalan ini kemungkinan besar berada di direktori, di mana pengguna tidak memiliki akses tulis, kami menulis data ke direktori home pengguna. Untuk notebook sendiri, ini tidak perlu, karena file data akan ditulis ke dalam direktori yang sama.

```
>filename="test.dat";
```

Sekarang kita menulis vektor kolom a' ke file. Ini menghasilkan satu nomor di setiap baris file.

```
>writematrix(a',filename);
```

Untuk membaca data, kita gunakan readmatrix().

```
>a=readmatrix(filename)';
```

dan hapus file ini.

```
>fileremove(filename);
>mean(a), dev(a),
```

```
0.49815
0.28037
```

Fungsi writematrix() atau writetable() dapat dikonfigurasi untuk bahasa lain.
Misalnya, jika Anda memiliki sistem Indonesia (titik desimal dengan koma), Excel Anda memerlukan nilai dengan koma desimal yang dipisahkan oleh titik koma dalam file csv (defaultnya adalah nilai yang dipisahkan koma). File "test.csv" berikut akan muncul di folder cuurent Anda.

```
>filename="test.csv"; ...
>writematrix(random(5,3),file=filename,separator=",");
```

Anda sekarang dapat membuka file ini dengan Excel Indonesia secara langsung.

```
>fileremove(filename);
```

Terkadang kita memiliki string dengan token seperti berikut ini.

```
>s1:="f m m f m m m f f f m m f";  ...
>s2:="f f f m m f f";
```

Untuk tokenize ini, kita mendefinisikan vektor token.

```
>tok:=["f","m"]
```

```
f
m
```

Kemudian kita dapat menghitung berapa kali setiap token muncul dalam string, dan memasukkan hasilnya ke dalam tabel.

```
>M:=getmultiplicities(tok,strtokens(s1))_ ...
>  getmultiplicities(tok,strtokens(s2));
```

Tulis tabel dengan header token.

```
>writetable(M,labc=tok,labr=1:2,wc=8)
```

```
                f       m
       1        6       7
       2        5       2
```

Untuk statika, EMT dapat membaca dan menulis tabel.

```
>file="test.dat"; open(file,"w"); ...
>writeln("A,B,C"); writematrix(random(3,3)); ...
>close();
```

Filenya terlihat seperti ini.

```
>printfile(file)
```

```
A,B,C
0.7003664386138074,0.1875530821001213,0.3262339279660414
0.5926249243193858,0.1522927283984059,0.368140583062521
0.8065535209872989,0.7265910840408142,0.7332619844597152
```

Fungsi readtable() dalam bentuknya yang paling sederhana dapat membaca ini dan mengembalikan kumpulan nilai dan baris judul.

```
>L=readtable(file,>list);
```

Koleksi ini dapat dicetak dengan writetable() ke notebook, atau ke file.

```
>writetable(L,wc=10,dc=5)
```

```
         A         B         C
   0.70037   0.18755   0.32623
   0.59262   0.15229   0.36814
   0.80655   0.72659   0.73326
```

Matriks nilai adalah elemen pertama dari L. Perhatikan bahwa mean() dalam EMT menghitung nilai rata-rata dari baris matriks.

```
>mean(L[1])
```

```
0.40472
0.37102
0.75547
```

File CSV

Pertama, mari kita menulis matriks ke dalam file. Untuk output, kami membuat file di direktori kerja saat ini.

```
>file="test.csv";  ...
>M=random(3,3); writematrix(M,file);
```

Berikut adalah isi dari file ini.

```
>printfile(file)
```

```
0.8221197733097619,0.821531098722547,0.7771240608094004
0.8482947121863489,0.3237767724883862,0.6501422353377985
0.1482301827518109,0.3297459716109594,0.6261901074210923
```

CVS ini dapat dibuka pada sistem bahasa Inggris ke Excel dengan klik dua kali. Jika Anda mendapatkan file seperti itu di sistem Jerman, Anda perlu mengimpor data ke Excel dengan memperhatikan titik desimal. Tetapi titik desimal juga merupakan format default untuk EMT. Anda dapat membaca matriks dari file dengan readmatrix().

```
>readmatrix(file)
```

```
0.82212   0.82153   0.77712
0.84829   0.32378   0.65014
0.14823   0.32975   0.62619
```

Dimungkinkan untuk menulis beberapa matriks ke satu file. Perintah open() dapat membuka file untuk ditulis dengan parameter "w". Standarnya adalah "r" untuk membaca.

```
>open(file,"w"); writematrix(M); writematrix(M'); close();
```

Matriks dipisahkan oleh garis kosong. Untuk membaca matriks, buka file dan panggil readmatrix() beberapa kali.

```
>open(file); A=readmatrix(); B=readmatrix(); A==B, close();
```

```
      1         0         0
      0         1         0
      0         0         1
```

Di Excel atau spreadsheet serupa, Anda dapat mengekspor matriks sebagai CSV (nilai yang dipisahkan koma). Di Excel 2007, gunakan "simpan sebagai" dan "format lain", lalu pilih "CSV". Pastikan, tabel saat ini hanya berisi data yang ingin Anda ekspor.
Berikut adalah contoh.

```
>printfile("excel-data.csv")
```

```
Could not open the file
excel-data.csv
for reading!
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
printfile:
    open(filename,"r");
```

Seperti yang Anda lihat, sistem Jerman saya menggunakan titik koma sebagai pemisah dan koma desimal. Anda dapat mengubah ini di pengaturan sistem atau di Excel, tetapi tidak perlu membaca matriks ke dalam EMT.
Cara termudah untuk membaca ini ke dalam Euler adalah readmatrix(). Semua koma diganti dengan titik dengan parameter >comma. Untuk CSV bahasa Inggris, cukup abaikan parameter ini.

```
>M=readmatrix("excel-data.csv",>comma)
```

```
Could not open the file
excel-data.csv
for reading!
Try "trace errors" to inspect local variables after errors.
readmatrix:
    if filename<>"" then open(filename,"r"); endif;
```

Mari kita plot ini.

```
>plot2d(M'[1],M'[2:3],>points,color=[red,green]'):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra_Statistika-038.png

Ada cara yang lebih mendasar untuk membaca data dari file. Anda dapat membuka file dan membaca angka baris demi baris. Fungsi getvectorline() akan membaca angka dari baris data. Secara default, ia mengharapkan titik desimal. Tapi itu juga bisa menggunakan koma desimal, jika Anda memanggil setdecimaldot(",") sebelum Anda menggunakan fungsi ini.
Fungsi berikut adalah contoh untuk ini. Ini akan berhenti di akhir file atau baris kosong.

```
>function myload (file) ...
```

```
open(file);
M=[];
repeat
   until eof();
   v=getvectorline(3);
   if length(v)>0 then M=M_v; else break; endif;
end;
return M;
close(file);
endfunction
```

```
>myload(file)
```

```
    0.82212          0    0.82153          0    0.77712
    0.84829          0    0.32378          0    0.65014
    0.14823          0    0.32975          0    0.62619
```

Dimungkinkan juga untuk membaca semua angka dalam file itu dengan getvector().

```
>open(file); v=getvector(10000); close(); redim(v[1:9],3,3)
```

```
    0.82212         0    0.82153
          0   0.77712    0.84829
          0   0.32378          0
```

Jadi sangat mudah untuk menyimpan vektor nilai, satu nilai di setiap baris dan membaca kembali vektor ini.

```
>v=random(1000); mean(v)
```

```
  0.50303
```

```
>writematrix(v',file); mean(readmatrix(file)')
```

```
  0.50303
```

Menggunakan Tabel

Tabel dapat digunakan untuk membaca atau menulis data numerik. Sebagai contoh, kami menulis tabel dengan header baris dan kolom ke file.

```
>file="test.tab"; M=random(3,3);  ...
>open(file,"w");  ...
>writetable(M,separator=",",labc=["one","two","three"]);  ...
>close(); ...
>printfile(file)
```

```
  one,two,three
        0.09,       0.39,       0.86
        0.39,       0.86,       0.71
         0.2,       0.02,       0.83
```

Ini dapat diimpor ke Excel.
Untuk membaca file dalam EMT, kami menggunakan readtable().

```
>{M,headings}=readtable(file,>clabs); ...
>writetable(M,labc=headings)
```

```
         one        two      three
        0.09       0.39       0.86
        0.39       0.86       0.71
         0.2       0.02       0.83
```

Menganalisis Garis

Anda bahkan dapat mengevaluasi setiap baris dengan tangan. Misalkan, kita memiliki garis dengan format berikut.

```
>line="2020-11-03,Tue,1’114.05"
```

```
2020-11-03,Tue,1’114.05
```

Pertama kita dapat menandai garis.

```
>vt=strtokens(line)
```

```
2020-11-03
Tue
1’114.05
```

Kemudian kita dapat mengevaluasi setiap elemen garis menggunakan evaluasi yang sesuai.

```
>day(vt[1]),  ...
>indexof(["mon","tue","wed","thu","fri","sat","sun"],tolower(vt[2])),  ...
>strrepl(vt[3],"’","")()
```

```
7.3816e+05
2
1114
```

Menggunakan ekspresi reguler, dimungkinkan untuk mengekstrak hampir semua informasi dari baris data. Asumsikan kita memiliki baris berikut dokumen HTML.

```
>line="<tr><td>1145.45</td><td>5.6</td><td>-4.5</td><tr>"
```

```
<tr><td>1145.45</td><td>5.6</td><td>-4.5</td><tr>
```

Untuk mengekstrak ini, kami menggunakan ekspresi reguler, yang mencari

```
- kurung tutup >,
- string apa pun yang tidak mengandung tanda kurung dengan
```

sub-pertandingan "(...)",

```
- braket pembuka dan penutup menggunakan solusi terpendek,
- lagi string apa pun yang tidak mengandung tanda kurung,
- dan kurung buka <.
```

Ekspresi reguler agak sulit dipelajari tetapi sangat kuat.

```
>{pos,s,vt}=strxfind(line,">([^<>]+)<.+?>([^<>]+)<");
```

Hasilnya adalah posisi kecocokan, string yang cocok, dan vektor string untuk sub-pertandingan.

```
>for k=1:length(vt); vt[k](), end;
```

```
1145.5
5.6
```

Berikut adalah fungsi, yang membaca semua item numerik antara <td> dan </td>.

```
>function readtd (line) ...
```

```
v=[]; cp=0;
repeat
   {pos,s,vt}=strxfind(line,"<td.*?>(.+?)</td>",cp);
   until pos==0;
   if length(vt)>0 then v=v|vt[1]; endif;
   cp=pos+strlen(s);
end;
return v;
endfunction
```

```
>readtd(line+"<td>non-numerical</td>")
```

```
1145.45
5.6
-4.5
non-numerical
```

Membaca dari Web

Situs web atau file dengan URL dapat dibuka di EMT dan dapat dibaca baris demi baris.
Dalam contoh, kami membaca versi saat ini dari situs EMT. Kami menggunakan ekspresi reguler untuk memindai "Versi ..." dalam sebuah judul.

```
>function readversion () ...
```

```
urlopen("http://www.euler-math-toolbox.de/Programs/Changes.html");
repeat
  until urleof();
  s=urlgetline();
  k=strfind(s,"Version ",1);
  if k>0 then substring(s,k,strfind(s,"<",k)-1), break; endif;
end;
urlclose();
endfunction
```

```
>readversion
```

```
Version 2022-05-18
```

Input dan Output Variabel

Anda dapat menulis variabel dalam bentuk definisi Euler ke file atau ke baris perintah.

```
>writevar(pi,"mypi");
```

```
mypi = 3.141592653589793;
```

Untuk pengujian, kami membuat file Euler di direktori kerja EMT.

```
>file="test.e"; ...
>writevar(random(2,2),"M",file); ...
>printfile(file,3)
```

```
  M = [ ..
  0.5991820585590205, 0.7960280262224293;
  0.5167243983231363, 0.2996684599070898];
```

Kita sekarang dapat memuat file. Ini akan mendefinisikan matriks M.

```
>load(file); show M,
```

```
  M =
    0.59918   0.79603
    0.51672   0.29967
```

Omong-omong, jika writevar() digunakan pada variabel, itu akan mencetak definisi variabel dengan nama variabel ini.

```
>writevar(M); writevar(inch$)
```

```
  M = [ ..
  0.5991820585590205, 0.7960280262224293;
  0.5167243983231363, 0.2996684599070898];
  inch$ = 0.0254;
```

Kita juga bisa membuka file baru atau menambahkan file yang sudah ada. Dalam contoh kami menambahkan ke file yang dihasilkan sebelumnya.

```
>open(file,"a"); ...
>writevar(random(2,2),"M1"); ...
>writevar(random(3,1),"M2"); ...
>close();
>load(file); show M1; show M2;
```

```
  M1 =
    0.30287   0.15372
     0.7504   0.75401
  M2 =
    0.27213
   0.053211
    0.70249
```

Untuk menghapus file apa pun, gunakan fileremove().

```
>fileremove(file);
```

Vektor baris dalam file tidak memerlukan koma, jika setiap angka berada di baris baru. Mari kita buat file seperti itu, menulis setiap baris satu per satu dengan writeln().

```
>open(file,"w"); writeln("M = ["); ...
>for i=1 to 5; writeln(""+random()); end; ...
>writeln("];"); close(); ...
>printfile(file)
```

```
M = [
0.344851384551
0.0807510017715
0.876519562911
0.754157709472
0.688392638934
];
```

```
>load(file); M
```

```
[0.34485,  0.080751,  0.87652,  0.75416,  0.68839]
```

catatan : ketika mengenter perintah-perintah diatas ternyata hasil yang didapatkan berbeda-beda

Latihan soal

Nomor 1
Carilah rata-rata dan standar deviasi beserta plot dari data berikut
X = 1000,1500,1700,2500,3500,4000

```
>X=[1000,1500,1700,2500,3500,4000]; ...
>mean(X), dev(X),
```

```
2366.7
1186
```

```
>aspect(1.5); boxplot(X):
```

images/Aplikom_Dimas Oki Sriwijaya Saputra_Statistika-039.png

Nomor 2
Misalkan diberikan data skor hasil statistika dari 14 orang mahasiswa sebagai berikut:
50,92,68,72,84,80,96,64,70,48,88,66,56,84
Tentukan rata-rata dari data tersebut!

```
>X=[62,65,58,90,75,79,82,91,75,75,75,95]
```

```
[62,  65,  58,  90,  75,  79,  82,  91,  75,  75,  75,  95]
```

```
>mean(X)
```

```
76.833
```