Розрахункова робота з теорії ймовірностей студента групи КА-22 Марченка Дмитра

Завдання №1

Варіант №77

За таблицею розподілу координат дискретного випадкового вектора $\vec{\xi} = \binom{\xi_1}{\xi_2}$ знайдемо:

1. ряди розподілу координат ξ_1 та ξ_2;
2. функції розподілу F_{ξ_1} та F_{ξ_2} координат ξ_1 та ξ_2 відповідно та побудуємо графіки цих функцій;
3. функцію розподілу $F_{\vec{\xi}}$ випадкового вектора;
4. математичні сподівання координат та кореляційну матрицю;
5. умовні ряди розподілу для кожної координати;
6. умовні математичні сподівання для кожної координати з перевіркою

Табл.1: Таблиця розподілу координат дискретного випадкового вектора $\vec{\xi} = \binom{\xi_1}{\xi_2}$

ξ_1 \ ξ_2	0	1	5	6
-3	0,07	0,13	0,06	0,01
1	0,07	0,13	0,03	0,01
3	0,1	0,17	0,09	0,13

1. **Ряди розподілу координат ξ_1 та ξ_2.**
Позначимо n = 3, m = 4, події $A_k = \{\xi_1 = k\}$, k = -3, 1, 3, $B_j = \{\xi_2 = j\}$, j = 0, 1, 5, 6. Оскільки величина ξ_2 може набувати тільки значення j = 0, 1, 5, 6, то події B_j, j = 0, 1, 5, 6 утворюють повну групу подій, а тоді за формулою повної ймовірності отримаємо:

$$\mathbb{P}(A_k) = \mathbb{P}(A_k/B_0) \cdot \mathbb{P}(B_0) + \mathbb{P}(A_k/B_1) \cdot \mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(A_k/B_5) \cdot \mathbb{P}(B_5) + \\ +\mathbb{P}(A_k/B_6) \cdot \mathbb{P}(B_6) = \mathbb{P}(A_k \cap B_0) + \mathbb{P}(A_k \cap B_1) + \mathbb{P}(A_k \cap B_5) + \mathbb{P}(A_k \cap B_6).$$

Аналогічно отримуємо формулу:

$$\mathbb{P}(B_j) = \mathbb{P}(B_j/A_{-3}) \cdot \mathbb{P}(A_{-3}) + \mathbb{P}(B_j/A_1) \cdot \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(B_j/A_3) \cdot \mathbb{P}(A_3) = \\ \mathbb{P}(B_j \cap A_{-3}) + \mathbb{P}(B_j \cap A_1) + \mathbb{P}(B_j \cap A_3).$$

Підставивши відповідні значення з таблиці 1 отримаємо:

$$\mathbb{P}(A_{-3}) = \mathbb{P}(A_{-3} \cap B_0) + \mathbb{P}(A_{-3} \cap B_1) + \mathbb{P}(A_{-3} \cap B_5) + \mathbb{P}(A_{-3} \cap B_6) = 0{,}07 + \\ +0{,}13 + 0{,}06 + 0{,}01 = 0{,}27;$$

$$\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_1 \cap B_0) + \mathbb{P}(A_1 \cap B_1) + \mathbb{P}(A_1 \cap B_5) + \mathbb{P}(A_1 \cap B_6) = 0{,}07 + 0{,}13 + \\ +0{,}03 + 0{,}01 = 0{,}24;$$

$$\mathbb{P}(A_3) = \mathbb{P}(A_3 \cap B_0) + \mathbb{P}(A_3 \cap B_1) + \mathbb{P}(A_3 \cap B_5) + \mathbb{P}(A_3 \cap B_6) = 0{,}1 + 0{,}17 + \\ +0{,}09 + 0{,}13 = 0{,}49;$$

Перевірка. Оскільки події A_{-3}, A_1, A_3 утворюють повну групу подій, то сума ймовірностей цих подій має дорівнювати 1.

$$\mathbb{P}(A_{-3}) + \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_3) = 0{,}27 + 0{,}24 + 0{,}49 = 1.$$

Ряд розподілу координати ξ_1 наведено у таблиці 2.

Табл. 2: Ряд розподілу координати ξ_1

ξ_1	-3	1	3
p	0,27	0,24	0,49

Знайдемо ймовірності подій B_m:

$$\mathbb{P}(B_0) = \mathbb{P}(B_0 \cap A_{-3}) + \mathbb{P}(B_0 \cap A_1) + \mathbb{P}(B_0 \cap A_3) = 0{,}07 + 0{,}07 + +0{,}1 = 0{,}24;$$

$$\mathbb{P}(B_1) = \mathbb{P}(B_1 \cap A_{-3}) + \mathbb{P}(B_1 \cap A_1) + \mathbb{P}(B_1 \cap A_3) = 0{,}13 + 0{,}13 + +0{,}17 = 0{,}43;$$

$$\mathbb{P}(B_5) = \mathbb{P}(B_5 \cap A_{-3}) + \mathbb{P}(B_5 \cap A_1) + \mathbb{P}(B_5 \cap A_3) = 0{,}06 + 0{,}03 + +0{,}09 = \\ 0{,}18;$$

$$\mathbb{P}(B_6) = \mathbb{P}(B_6 \cap A_{-3}) + \mathbb{P}(B_6 \cap A_1) + \mathbb{P}(B_6 \cap A_3) = 0{,}01 + 0{,}01 + +0{,}13 = \\ 0{,}15;$$

Перевірка. Оскільки події B_0, B_1, B_5, B_6 утворюють повну групу подій, то сума ймовірностей цих подій має дорівнювати 1.

$$\mathbb{P}(B_0) + \mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(B_5) + \mathbb{P}(B_6) = 0{,}24 + 0{,}43 + 0{,}18 + 0{,}15 = 1.$$

Ряд розподілу координати ξ_2 наведено у таблиці 3.

Табл. 3: Ряд розподілу координати ξ_2

ξ_2	0	1	5	6
p	0,24	0,43	0,18	0,15

2. Функції розподілу координат ξ_1 та ξ_2.

За означенням функції розподілу $F_\xi(x) = \mathbb{P}(\xi < x)$, тому, враховуючи ряди розподілу координат ξ_1 та ξ_2 (таблиці 2 і 3), отримаємо функції розподілу координат:

$$F_{\xi_1}(x) = \begin{cases} \mathbb{P}(\emptyset) = 0, & x \le -3 \\ \mathbb{P}\{\xi_1 = -3\} = 0{,}27, & -3 < x \le 1 \\ \mathbb{P}(\xi_1 = -3 \cup \xi_1 = 1) = \mathbb{P}\{\xi_1 = -3\} + \mathbb{P}\{\xi_1 = 1\} = 0{,}27 + 0{,}24 = 0{,}51, & 1 < x \le 3 \\ \mathbb{P}(\xi_1 = -3 \cup \xi_1 = 1 \cup \xi_1 = 3) = \mathbb{P}\{\xi_1 = -3\} + \mathbb{P}\{\xi_1 = 1\} + \mathbb{P}\{\xi_1 = 3\} = 0{,}27 + 0{,}24 + 0{,}49 = 1, & x > 3 \end{cases}$$

$$F_{\xi_2}(x) = \begin{cases} \mathbb{P}(\emptyset) = 0, & x \le 0 \\ \mathbb{P}\{\xi_2 = 0\} = 0{,}24, & 0 < x \le 1 \\ \mathbb{P}(\xi_2 = 0 \ \cup \ \xi_2 = 1) = \mathbb{P}\{\xi_2 = 0\} + \mathbb{P}\{\xi_2 = 1\} = 0{,}24 + 0{,}43 = 0{,}67, & 1 < x \le 5 \\ \mathbb{P}(\xi_2 = 0 \cup \xi_2 = 1 \cup \xi_2 = 5) = \mathbb{P}\{\xi_2 = 0\} + \mathbb{P}\{\xi_2 = 1\} + \mathbb{P}\{\xi_2 = 5\} = 0{,}24 + 0{,}43 + 0{,}18 = 0{,}85, & 5 < x \le 6 \\ \mathbb{P}(\xi_2 = 0 \cup \xi_2 = 1 \cup \xi_2 = 5 \cup \xi_2 = 6) = \mathbb{P}\{\xi_2 = 0\} + \mathbb{P}\{\xi_2 = 1\} + \mathbb{P}\{\xi_2 = 5\} + \mathbb{P}\{\xi_2 = 6\} = & \\ = 0{,}24 + 0{,}43 + 0{,}18 + 0{,}15 = 1, & x > 6 \end{cases}$$

Графіки функцій розподілу координат ξ_1 та ξ_2 наведено на рис. 1 та рис.2 відповідно.

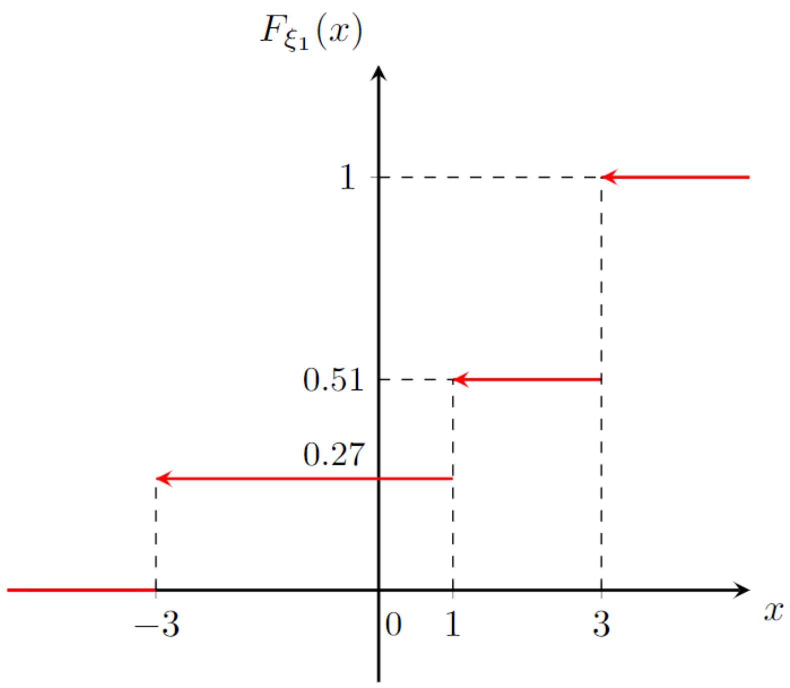


Рис. 1: Функція розподілу координати ξ_1

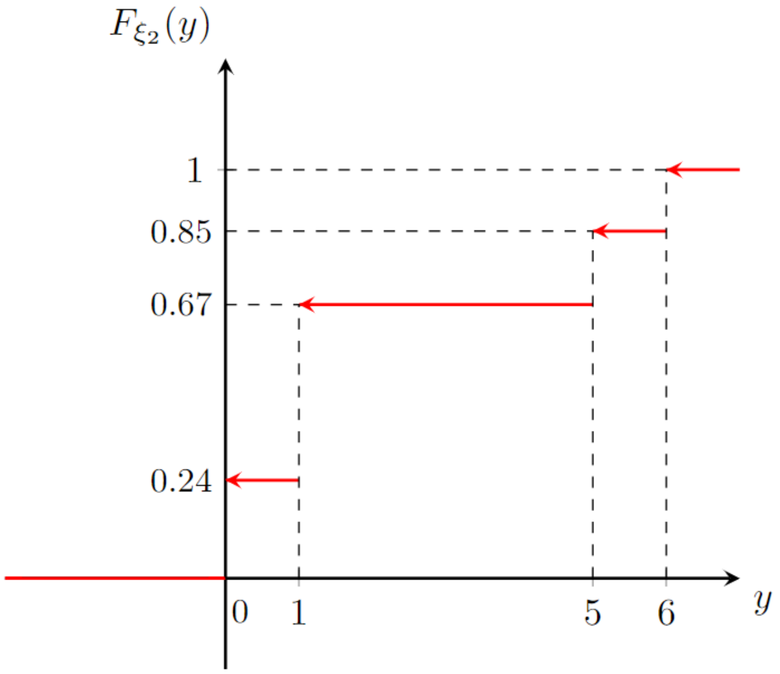


Рис. 2: Функція розподілу координати ξ_2

3. Функція розподілу випадкового вектора $F_{\vec{\xi}}$.

За означенням, $F_{\vec{\xi}}(x, y) = \mathbb{P}\{\xi_1 < x, \xi_2 < y\}$ – ймовірність потрапляння випадкового вектора в середину нескінченного квадранта з вершиною в точці (x, y). Використаємо формулу $F_{\vec{\xi}} = \sum_{k: x_k < x} \sum_{j: y_j < y} p_{kj}$. Значення функції розподілу залежать від множини точок, що попали в кожний із квадрантів. Очевидно, що при $x \leq x_1$ та $y \leq$ $\leq y_1$ маємо $F_{\vec{\xi}}(x, y) = 0$. Побудуємо розбиття іншої частини координатної площини на області $D_{k,j} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon (x_k < x \leq x_{k+1}) \cap (y_j < y \leq y_{j+1})\}$, $k = \overline{1, n-1}, j = \overline{1, m-1}$ (рис. 3). При k = n маємо умову $x > x_n$, а при $j = m$: $y > y_m$.

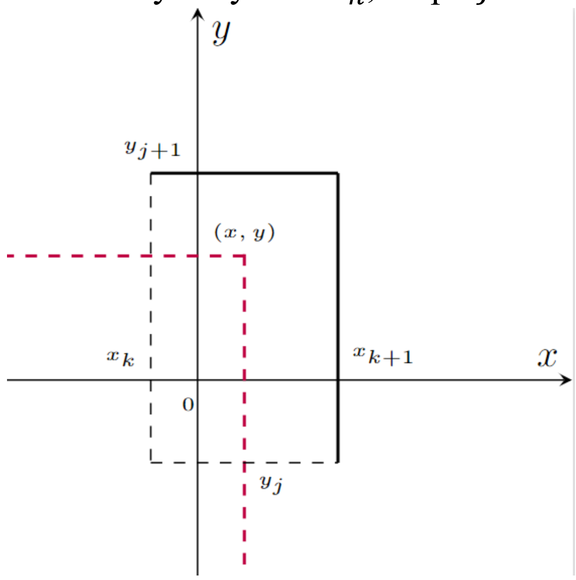


Рис. 3

Для знаходження $F_{\vec{\xi}}(x,y)$ накреслимо на координатній площині точки, що відповідають всім можливим значенням вектора $\vec{\xi}$ (рис. 4) та обчислимо значення сумісної функції розподілу в кожній з областей $D_{k,j}, k=\overline{1,3}, j=\overline{1,4}$. Кожен випадок зображено на відповідному малюнку (рис. 5 – 18).

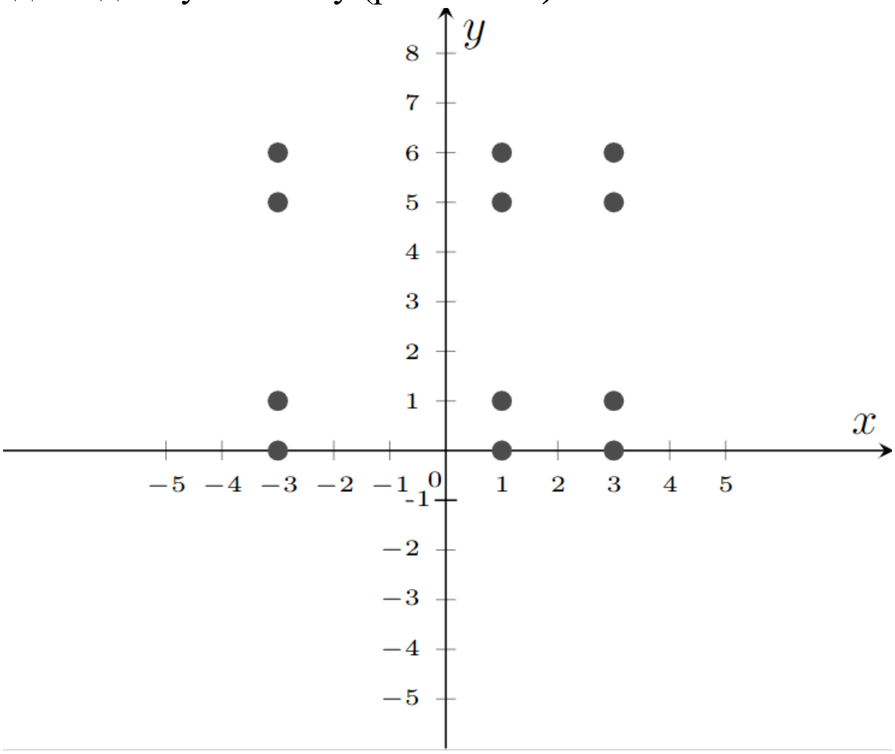


Рис. 4

1. $(x \leq -3) \vee (y \leq 0)$;

$F_{\vec{\xi}}(x,y) = 0$.

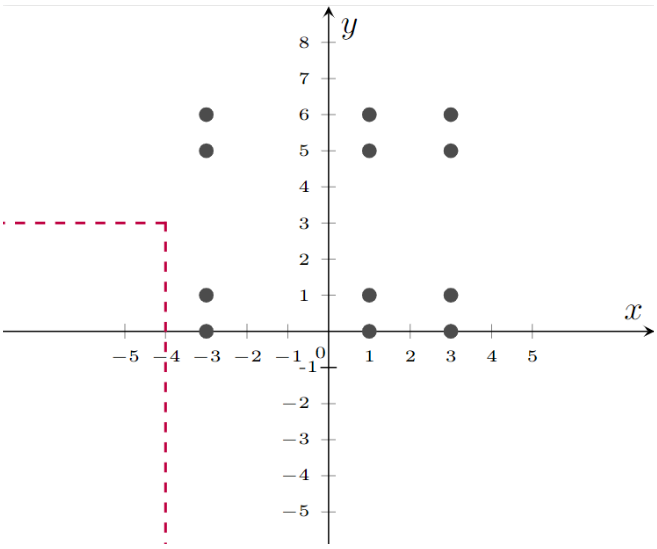


Рис. 5

2. $D_{1,1} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (-3 < x \leq 1) \cap (0 < y \leq 1)\}$;

$$F_{\vec{\xi}}(x,y) = \mathbb{P}\{\xi_1 = -3, \xi_2 = 0\} = 0{,}07$$

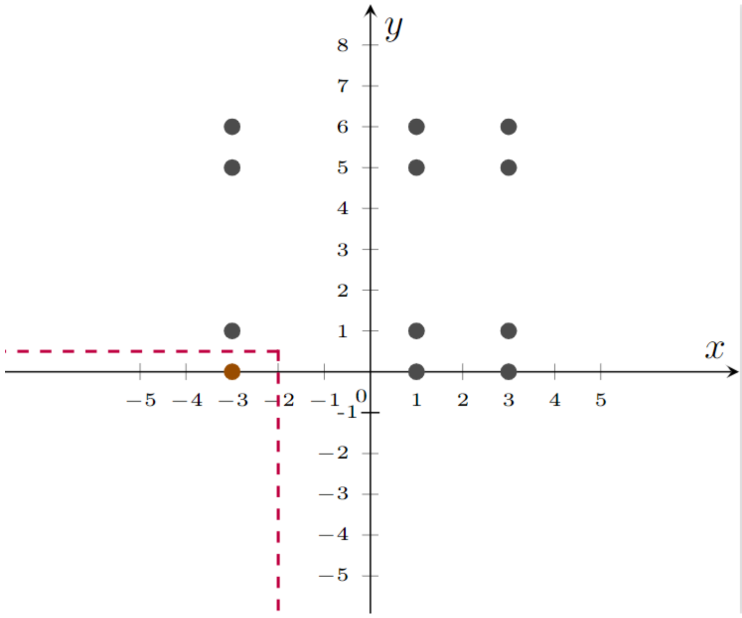


Рис. 6

3. $D_{2,1} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (1 < x \le 3) \cap (0 < y \le 1)\}$;

$$F_{\vec{\xi}}(x,y) = \mathbb{P}\{\xi_1 = -3, \xi_2 = 0\} + \mathbb{P}\{\xi_1 = 1, \xi_2 = 0\} = 0{,}07 + 0{,}07 = 0{,}14$$

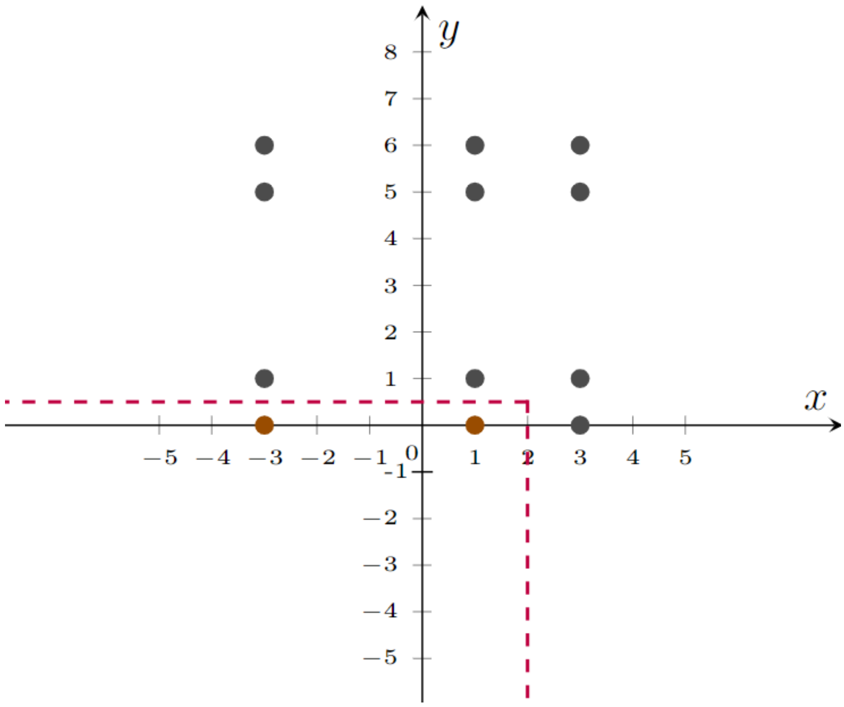


Рис.7

4. $D_{3,1} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x > 3) \cap (0 < y \le 1)\}$;

$$F_{\vec{\xi}}(x,y) = \mathbb{P}\{\xi_1 = -3, \xi_2 = 0\} + \mathbb{P}\{\xi_1 = 1, \xi_2 = 0\} + \mathbb{P}\{\xi_1 = 3, \xi_2 = 0\}$$
$$= 0{,}07 + 0{,}07 + 0{,}1 = 0{,}24$$

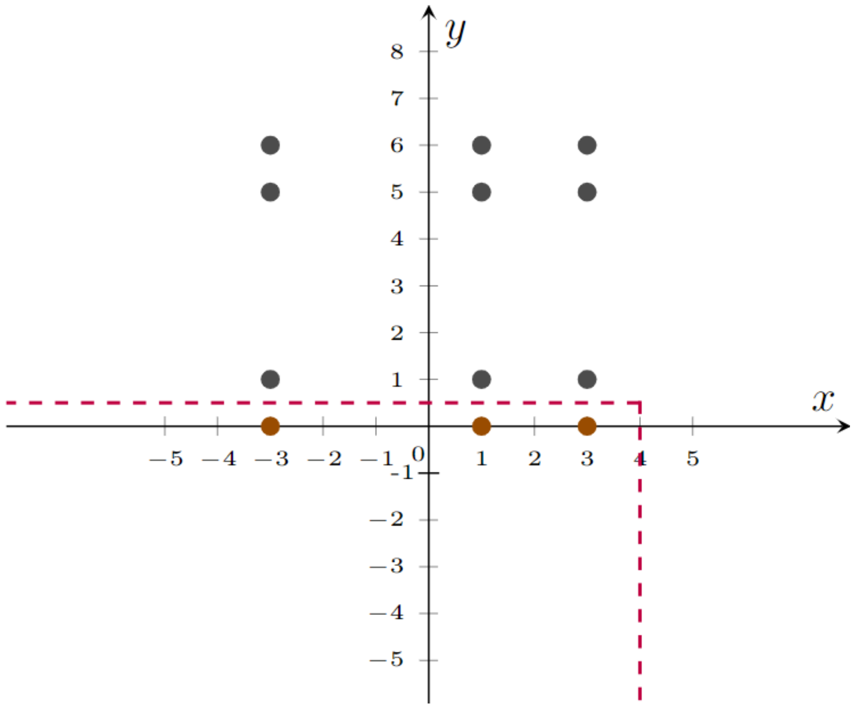


Рис. 8

5. $D_{1,2} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (-3 < x \leq 1) \cap (1 < y \leq 5)\}$;

$$F_{\vec{\xi}}(x, y) = \mathbb{P}\{\xi_1 = -3, \xi_2 = 0\} + \mathbb{P}\{\xi_1 = -3, \xi_2 = 1\} = 0{,}07 + 0{,}13 = 0{,}2$$

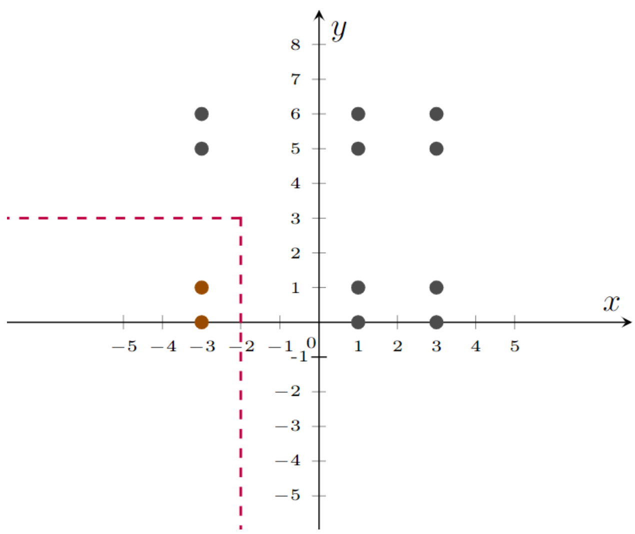


Рис. 9

6. $D_{2,2} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (1 < x \leq 3) \cap (1 < y \leq 5)\}$;

$$F_{\vec{\xi}}(x, y) = \mathbb{P}\{\xi_1 = -3, \xi_2 = 0\} + \mathbb{P}\{\xi_1 = -3, \xi_2 = 1\} + \mathbb{P}\{\xi_1 = 1, \xi_2 = 0\} + \mathbb{P}\{\xi_1 = \\ = 1, \xi_2 = 1\} = 0{,}07 + 0{,}13 + 0{,}07 + 0{,}13 = 0{,}4$$

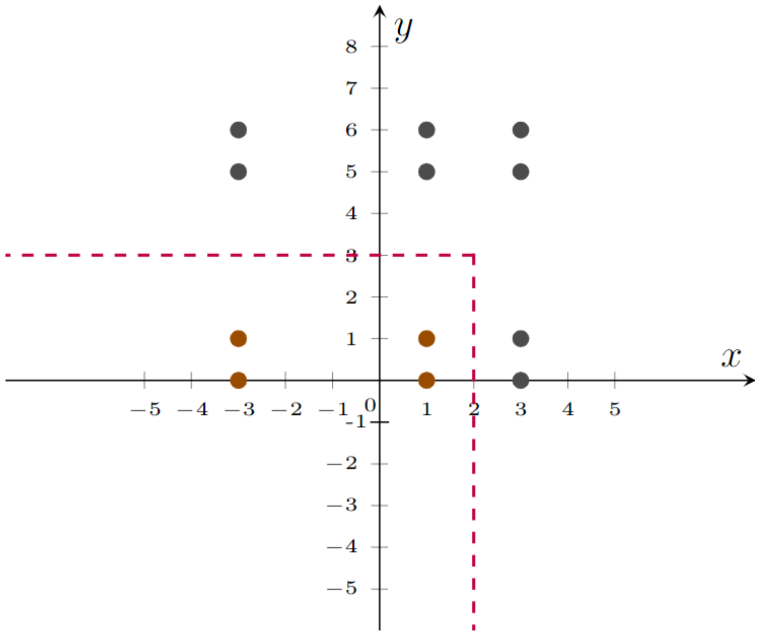


Рис. 10

7. $D_{3,2} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x > 3) \cap (1 < y \leq 5)\}$;

$$F_{\vec{\xi}}(x, y) = \mathbb{P}\{\xi_1 = -3, \xi_2 = 0\} + \mathbb{P}\{\xi_1 = -3, \xi_2 = 1\} + \mathbb{P}\{\xi_1 = 1, \xi_2 = 0\} + \mathbb{P}\{\xi_1 = \\ = 1, \xi_2 = 1\} + \mathbb{P}\{\xi_1 = 3, \xi_2 = 0\} + \mathbb{P}\{\xi_1 = 3, \xi_2 = 1\} = \\ = 0{,}07 + 0{,}13 + 0{,}07 + 0{,}13 + 0{,}1 + 0{,}17 = 0{,}67$$

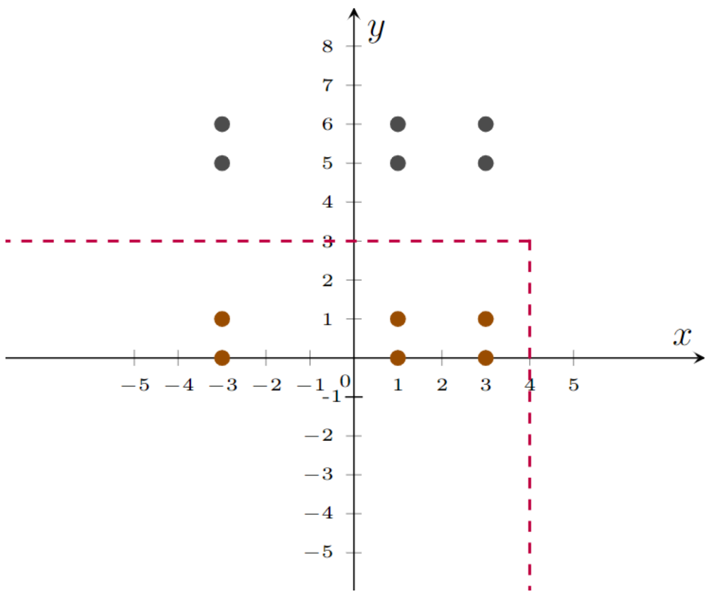


Рис. 11

8. $D_{1,3} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (-3 < x \leq 1) \cap (5 < y \leq 6)\}$;

$$F_{\vec{\xi}}(x, y) = \mathbb{P}\{\xi_1 = -3, \xi_2 = 0\} + \mathbb{P}\{\xi_1 = -3, \xi_2 = 1\} + \mathbb{P}\{\xi_1 = -3, \xi_2 = 5\} \\ = 0{,}07 + 0{,}13 + 0{,}06 = 0{,}26$$

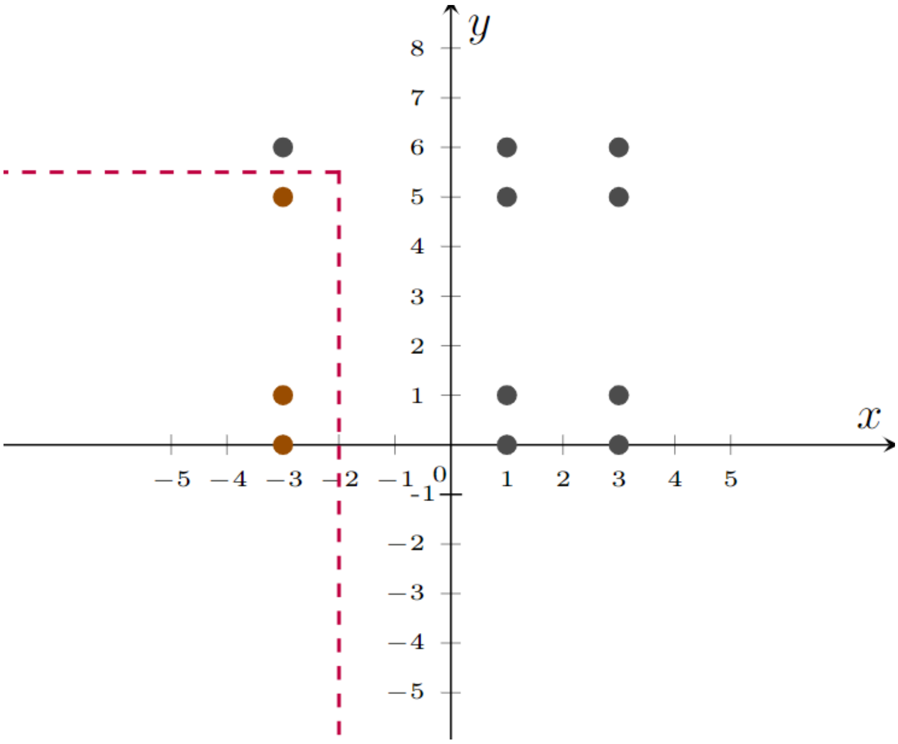


Рис. 12

9. $D_{2,3} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: (1 < x \leq 3) \cap (5 < y \leq 6)\}$;

$$F_{\vec{\xi}}(x, y) = \mathbb{P}\{\xi_1 = -3, \xi_2 = 0\} + \mathbb{P}\{\xi_1 = -3, \xi_2 = 1\} + \mathbb{P}\{\xi_1 = -3, \xi_2 = 5\} + \mathbb{P}\{\xi_1 = 1, \xi_2 = 0\} + \mathbb{P}\{\xi_1 = 1, \xi_2 = 1\} + \mathbb{P}\{\xi_1 = 1, \xi_2 = 5\} = 0{,}07 + 0{,}13 + 0{,}06 + 0{,}07 + 0{,}13 + 0{,}03 = 0{,}49$$

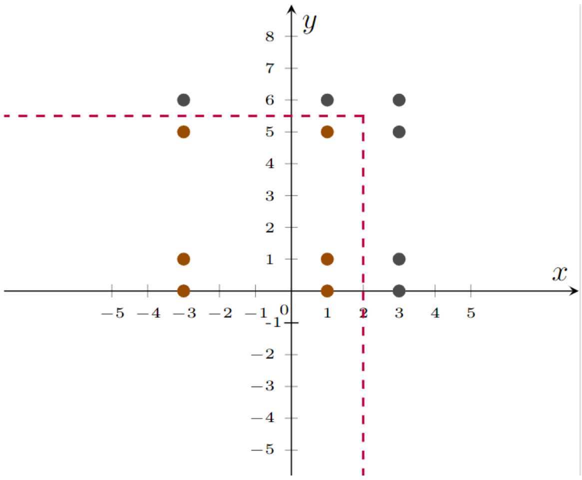


Рис. 13

10. $D_{3,3} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: (x > 3) \cap (5 < y \leq 6)\}$;

$$F_{\vec{\xi}}(x, y) = \mathbb{P}\{\xi_1 = -3, \xi_2 = 0\} + \mathbb{P}\{\xi_1 = -3, \xi_2 = 1\} + \mathbb{P}\{\xi_1 = -3, \xi_2 = 5\} + \mathbb{P}\{\xi_1 = 1, \xi_2 = 0\} + \mathbb{P}\{\xi_1 = 1, \xi_2 = 1\} + \mathbb{P}\{\xi_1 = 1, \xi_2 = 5\} + \mathbb{P}\{\xi_1 = 3, \xi_2 = 0\} + \mathbb{P}\{\xi_1 = 3, \xi_2 = 1\} + \mathbb{P}\{\xi_1 = 3, \xi_2 = 5\} = 0{,}07 + 0{,}13 + 0{,}06 + 0{,}07 + 0{,}13 + 0{,}03 + 0{,}1 + 0{,}17 + 0{,}09 = 0{,}85$$

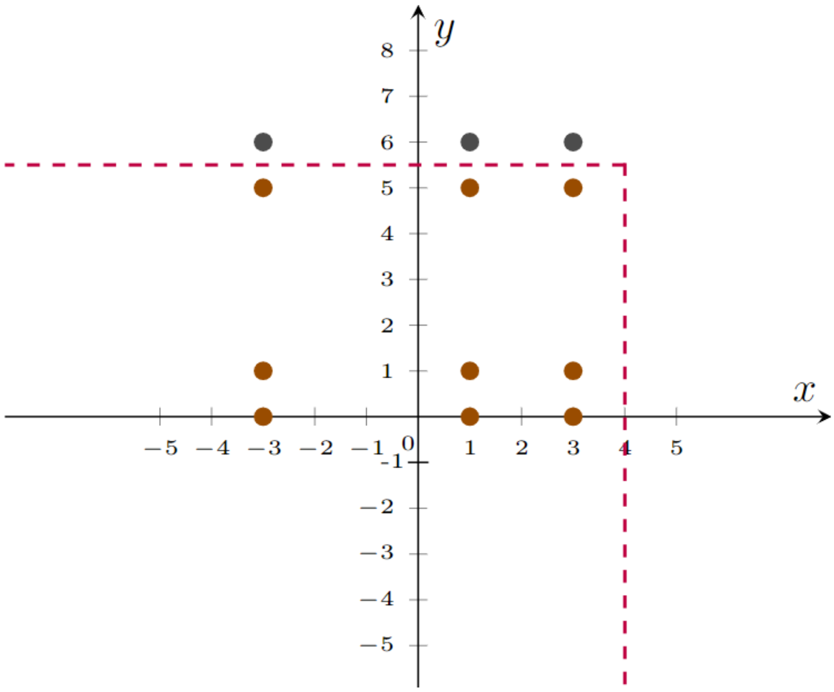


Рис. 14

11. $D_{1,4} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (-3 < x \leq 1) \cap (y > 6)\};$

$$F_{\vec{\xi}}(x, y) = \mathbb{P}\{\xi_1 = -3, \xi_2 = 0\} + \mathbb{P}\{\xi_1 = -3, \xi_2 = 1\} + \mathbb{P}\{\xi_1 = -3, \xi_2 = 5\} + \mathbb{P}\{\xi_1 = -3, \xi_2 = 6\} = 0{,}07 + 0{,}13 + 0{,}06 + 0{,}01 = 0{,}27$$

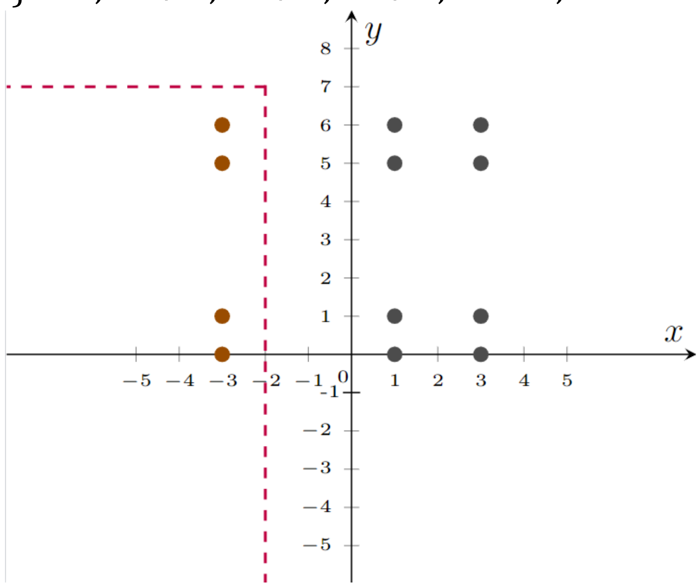


Рис. 15

12. $D_{2,4} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (1 < x \leq 3) \cap (y > 6)\};$

$$F_{\vec{\xi}}(x, y) = \mathbb{P}\{\xi_1 = -3, \xi_2 = 0\} + \mathbb{P}\{\xi_1 = -3, \xi_2 = 1\} + \mathbb{P}\{\xi_1 = -3, \xi_2 = 5\} + \mathbb{P}\{\xi_1 = -3, \xi_2 = 6\} + \mathbb{P}\{\xi_1 = 1, \xi_2 = 0\} + \mathbb{P}\{\xi_1 = 1, \xi_2 = 1\} + \mathbb{P}\{\xi_1 = 1, \xi_2 = 5\} + \mathbb{P}\{\xi_1 = 1, \xi_2 = 6\}$$
$$= 0{,}07 + 0{,}13 + 0{,}06 + 0{,}01 + 0{,}07 + 0{,}13 + 0{,}03 + 0{,}01 = 0{,}51$$

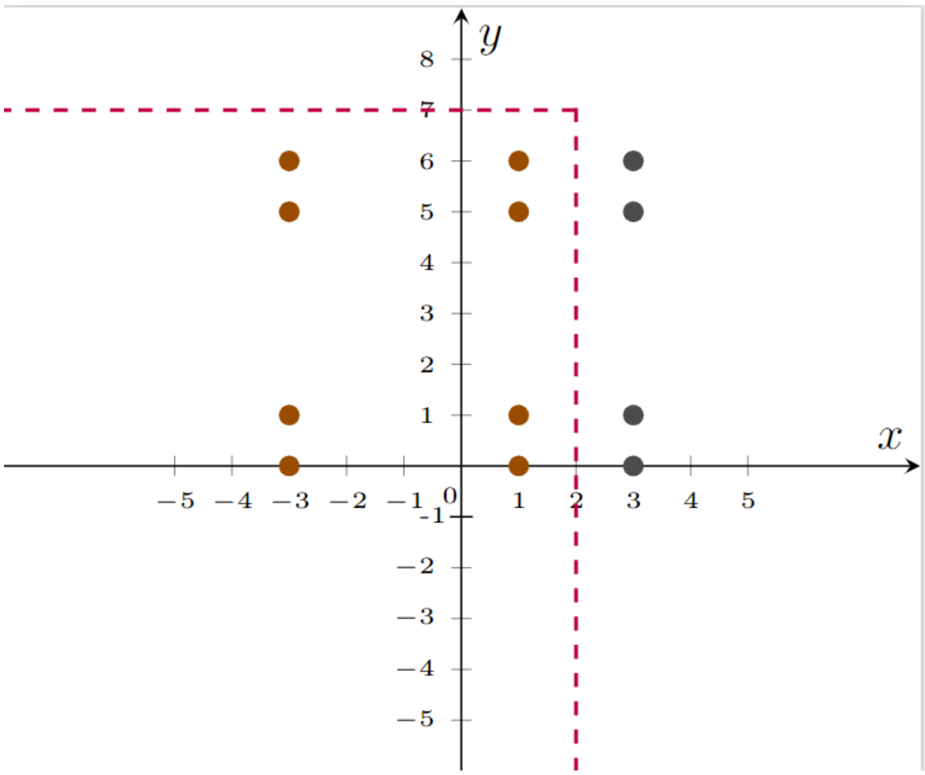


Рис. 16

13. $D_{3,4} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x > 3) \cap (y > 6)\};$

$F_{\vec{\xi}}(x, y) = \mathbb{P}\{\xi_1 = -3, \xi_2 = 0\} + \mathbb{P}\{\xi_1 = -3, \xi_2 = 1\} + \mathbb{P}\{\xi_1 = -3, \xi_2 = 5\} + \mathbb{P}\{\xi_1 =$
$= -3, \xi_2 = 6\} + \mathbb{P}\{\xi_1 = 1, \xi_2 = 0\} + \mathbb{P}\{\xi_1 = 1, \xi_2 = 1\} + \mathbb{P}\{\xi_1 = 1, \xi_2 =$
$= 5\} + \mathbb{P}\{\xi_1 = 1, \xi_2 = 6\} + \mathbb{P}\{\xi_1 = 3, \xi_2 = 0\} + \mathbb{P}\{\xi_1 = 3, \xi_2 = 1\} + \mathbb{P}\{\xi_1$
$= 3, \xi_2 = 5\} + \mathbb{P}\{\xi_1 = 3, \xi_2 = 6\} =$
$= 0{,}07 + 0{,}13 + 0{,}06 + 0{,}01 + 0{,}07 + 0{,}13 + 0{,}03 + 0{,}01 + 0{,}1 + 0{,}17$
$+ 0{,}09 + 0{,}13 = 1$

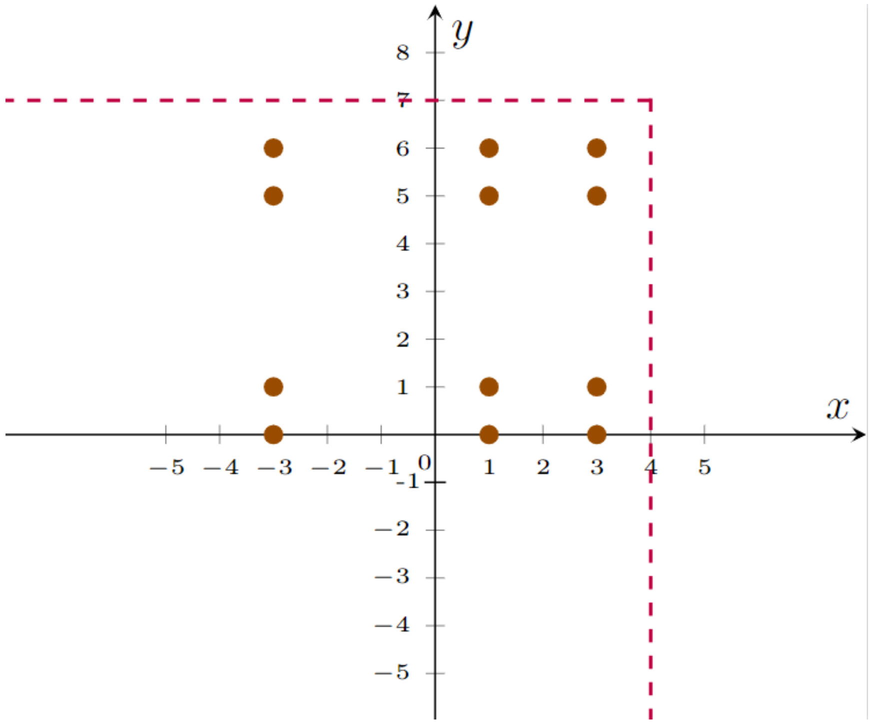


Рис. 17

Маємо сумісну функцію розподілу:

$$F_{\vec{\xi}}(x,y) = \begin{cases} 0, (x,y) \in D_0 \\ 0{,}07, (x,y) \in D_{1,1} \\ 0{,}14, (x,y) \in D_{2,1} \\ 0{,}24, (x,y) \in D_{3,1} \\ 0{,}2, (x,y) \in D_{1,2} \\ 0{,}4, (x,y) \in D_{2,2} \\ 0{,}67, (x,y) \in D_{3,2} \\ 0{,}26, (x,y) \in D_{1,3} \\ 0{,}49, (x,y) \in D_{2,3} \\ 0{,}85, (x,y) \in D_{3,3} \\ 0{,}27, (x,y) \in D_{1,4} \\ 0{,}51, (x,y) \in D_{2,4} \\ 1, (x,y) \in D_{3,4} \end{cases}$$

Значення сумісної функції розподілу зручно звести в таблицю (табл. 4).

Табл. 4: Сумісна функція розподілу

y \ x	$x \le -3$	$-3 < x \le 1$	$1 < x \le 3$	$x > 3$
$y \le 0$	0	0	0	0
$0 < y \le 1$	0	0,07	0,14	0,24
$1 < y \le 5$	0	0,2	0,4	0,67
$5 < y \le 6$	0	0,26	0,49	0,85
$y > 6$	0	0,27	0,51	1

З таблиці можна помітити, що умови узгодженості сумісної функції розподілу випадкового вектора $\vec{\xi}$ з функціями розподілу його координат виконуються, тобто:

$$\begin{cases} \lim\limits_{y\to+\infty} F_{\vec{\xi}}(x,y) = F_{\xi_1}(x) \\ \lim\limits_{x\to+\infty} F_{\vec{\xi}}(x,y) = F_{\xi_2}(y) \end{cases}$$

4. Математичні сподівання координат. Кореляційна та нормована кореляційна матриця.

а) Математичні сподівання координат ξ_1 та ξ_2 знайдемо за їх рядами розподілу, наведеними в табл. 2 та табл. 3, для зручності наведемо їх ще раз.

ξ_1	-3	1	3
p	0,27	0,24	0,49

ξ_2	0	1	5	6
p	0,24	0,43	0,18	0,15

$$\mathbb{E}\xi_1 = (-3)\cdot 0{,}27 + 1\cdot 0{,}24 + 3\cdot 0{,}49 = -0{,}81 + 0{,}24 + 1{,}47 = 0{,}9 \quad (1)$$

$$\mathbb{E}\xi_2 = 0\cdot 0{,}24 + 1\cdot 0{,}43 + 5\cdot 0{,}18 + 6\cdot 0{,}15 = 0 + 0{,}43 + 0{,}9 + 0{,}9 = 2{,}23 \quad (2)$$

Центр розсіювання випадкового вектора $\vec{\xi}$ – точка (0,9; 2,23).

б) Для знаходження кореляційної матриці потрібно обчислити кореляційний момент випадкових величин ξ_1 та ξ_2, а також дисперсію ξ_1 та дисперсію ξ_2. Для зручності ще раз наведемо таблицю розподілу випадкового вектора (табл. 1).

ξ_1 \ ξ_2	0	1	5	6
-3	0,07	0,13	0,06	0,01
1	0,07	0,13	0,03	0,01
3	0,1	0,17	0,09	0,13

$$\mathbb{K}\xi_1\xi_2 = \mathbb{E}\xi_1\xi_2 - \mathbb{E}\xi_1\mathbb{E}\xi_2 = \mathbb{E}\xi_1\xi_2 - 0{,}9\cdot 2{,}23 =$$
$$= (-3)\cdot 1\cdot 0{,}13 + (-3)\cdot 5\cdot 0{,}06 + (-3)\cdot 6\cdot 0{,}01 + 1\cdot 1\cdot 0{,}13 +$$
$$+1\cdot 5\cdot 0{,}03 + 1\cdot 6\cdot 0{,}01 + 3\cdot 1\cdot 0{,}17 + +3\cdot 5\cdot 0{,}09 +$$
$$+3\cdot 6\cdot 0{,}13 - 2{,}007 = 1{,}063$$

$$\mathbb{D}\xi_1 = \mathbb{E}{\xi_1}^2 - (\mathbb{E}\xi_1)^2 = (-3)^2\cdot 0{,}27 + 1\cdot 0{,}24 + 3^2\cdot 0{,}49 - (0{,}9)^2 =$$
$$= 7{,}08 - 0{,}81 = 6{,}27$$

$$\mathbb{D}\xi_2 = \mathbb{E}\xi_2^2 - (\mathbb{E}\xi_2)^2 = 1\cdot 0{,}43 + 5^2\cdot 0{,}18 + 6^2\cdot 0{,}15 - (2{,}23)^2 =$$
$$= 10{,}33 - 4{,}9729 = 5{,}3571$$

Отже, маємо кореляційну матрицю:

$$\mathbb{K}\vec{\xi} = \begin{pmatrix} \mathbb{D}\xi_1 & \mathbb{K}\xi_1\xi_2 \\ \mathbb{K}\xi_1\xi_2 & \mathbb{D}\xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6{,}27 & 1{,}063 \\ 1{,}063 & 5{,}3571 \end{pmatrix}$$

Перевіримо матрицю на додатню визначеність за критерієм Сильвестра:

$$\mathbb{D}\xi_1 = 6{,}27 > 0$$

$$det\begin{pmatrix} 6{,}27 & 1{,}063 \\ 1{,}063 & 5{,}3571 \end{pmatrix} = 6{,}27\cdot 5{,}3571 - (1{,}063^2) = 32{,}459048 > 0$$

Отже, за критерієм Сильвестра, матриця додатно визначена. Знайдемо нормовану кореляційну матрицю.

$$\rho_{\xi_1\xi_2} = \frac{\mathbb{K}\xi_1\xi_2}{\sigma_{\xi_1}\sigma_{\xi_2}} = \frac{1{,}063}{\sqrt{6{,}27 \cdot 5{,}3571}} \approx 0{,}183415$$

Звідси:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}183415 \\ 0{,}183415 & 1 \end{pmatrix}$$

5. **Умовні ряди розподілу кожної координати.**
Складемо умовні ряди розподілу координат, обчисливши умовні ймовірності $\mathbb{P}\{\xi_1 = x_k/\xi_2 = y_j\}$ та $\mathbb{P}\{\xi_2 = y_j/\xi_1 = x_k\}$, де $k = \overline{1,3}, j = \overline{1,4}, x_1 = -3, x_2 = 1, x_3 = 3, y_1 = 0, y_2 = 1, y_3 = 5, y_4 = 6$ за допомогою формул:

$$\mathbb{P}\{\xi_1 = x_k/\xi_2 = y_j\} = \frac{\mathbb{P}\big(\{\xi_1 = x_k\} \cap \{\xi_2 = y_j\}\big)}{\mathbb{P}\{\xi_2 = y_j\}}$$

$$\mathbb{P}\{\xi_2 = y_j/\xi_1 = x_k\} = \frac{\mathbb{P}\big(\{\xi_2 = y_j\} \cap \{\xi_1 = x_k\}\big)}{\mathbb{P}\{\xi_1 = x_k\}}$$

Для зручності ще раз наведемо таблицю розподілу випадкового вектора та ряди розподілу координат ξ_1 та ξ_2:

ξ_1 \ ξ_2	0	1	5	6
-3	0,07	0,13	0,06	0,01
1	0,07	0,13	0,03	0,01
3	0,1	0,17	0,09	0,13

ξ_1	-3	1	3
p	0,27	0,24	0,49

ξ_2	0	1	5	6
p	0,24	0,43	0,18	0,15

$$\mathbb{P}\{\xi_1 = -3/\xi_2 = 0\} = \frac{0{,}07}{0{,}24} = \frac{7}{24} \qquad \mathbb{P}\{\xi_1 = 1/\xi_2 = 0\} = \frac{0{,}07}{0{,}24} = \frac{7}{24}$$

$$\mathbb{P}\{\xi_1 = 3/\xi_2 = 0\} = \frac{0{,}1}{0{,}24} = \frac{10}{24} \qquad \mathbb{P}\{\xi_1 = -3/\xi_2 = 1\} = \frac{0{,}13}{0{,}43} = \frac{13}{43}$$

$$\mathbb{P}\{\xi_1 = 1/\xi_2 = 1\} = \frac{0,13}{0,43} = \frac{13}{43} \qquad \mathbb{P}\{\xi_1 = 3/\xi_2 = 1\} = \frac{0,17}{0,43} = \frac{17}{43}$$

$$\mathbb{P}\{\xi_1 = -3/\xi_2 = 5\} = \frac{0,06}{0,18} = \frac{6}{18} \qquad \mathbb{P}\{\xi_1 = 1/\xi_2 = 5\} = \frac{0,03}{0,18} = \frac{3}{18}$$

$$\mathbb{P}\{\xi_1 = 3/\xi_2 = 5\} = \frac{0,09}{0,18} = \frac{9}{18} \qquad \mathbb{P}\{\xi_1 = -3/\xi_2 = 6\} = \frac{0,01}{0,15} = \frac{1}{15}$$

$$\mathbb{P}\{\xi_1 = 1/\xi_2 = 6\} = \frac{0,01}{0,15} = \frac{1}{15} \qquad \mathbb{P}\{\xi_1 = 3/\xi_2 = 6\} = \frac{0,13}{0,15} = \frac{13}{15}$$

$$\mathbb{P}\{\xi_2 = 0/\xi_1 = -3\} = \frac{0,07}{0,27} = \frac{7}{27} \qquad \mathbb{P}\{\xi_2 = 1/\xi_1 = -3\} = \frac{0,13}{0,27} = \frac{13}{27}$$

$$\mathbb{P}\{\xi_2 = 5/\xi_1 = -3\} = \frac{0,06}{0,27} = \frac{6}{27} \qquad \mathbb{P}\{\xi_2 = 6/\xi_1 = -3\} = \frac{0,01}{0,27} = \frac{1}{27}$$

$$\mathbb{P}\{\xi_2 = 0/\xi_1 = 1\} = \frac{0,07}{0,24} = \frac{7}{24} \qquad \mathbb{P}\{\xi_2 = 1/\xi_1 = 1\} = \frac{0,13}{0,24} = \frac{13}{24}$$

$$\mathbb{P}\{\xi_2 = 5/\xi_1 = 1\} = \frac{0,03}{0,24} = \frac{3}{24} \qquad \mathbb{P}\{\xi_2 = 6/\xi_1 = 1\} = \frac{0,01}{0,24} = \frac{1}{24}$$

$$\mathbb{P}\{\xi_2 = 0/\xi_1 = 3\} = \frac{0,1}{0,49} = \frac{10}{49} \qquad \mathbb{P}\{\xi_2 = 1/\xi_1 = 3\} = \frac{0,17}{0,49} = \frac{17}{49}$$

$$\mathbb{P}\{\xi_2 = 5/\xi_1 = 3\} = \frac{0,09}{0,49} = \frac{9}{49} \qquad \mathbb{P}\{\xi_2 = 6/\xi_1 = 3\} = \frac{0,13}{0,49} = \frac{13}{49}$$

Внесемо отримані результати в таблицю:

ξ_1	-3	1	3
$\mathbb{P}\{\xi_1 = x_k/\xi_2 = 0\}$	$\frac{7}{24}$	$\frac{7}{24}$	$\frac{10}{24}$
$\mathbb{P}\{\xi_1 = x_k/\xi_2 = 1\}$	$\frac{13}{43}$	$\frac{13}{43}$	$\frac{17}{43}$
$\mathbb{P}\{\xi_1 = x_k/\xi_2 = 5\}$	$\frac{6}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{9}{18}$
$\mathbb{P}\{\xi_1 = x_k/\xi_2 = 6\}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{13}{15}$

Перевіримо на правильність умовні ряди розподілу координати ξ_1:

$$\mathbb{P}\{\xi_1 = -3/\xi_2 = 0\} + \mathbb{P}\{\xi_1 = 1/\xi_2 = 0\} + \mathbb{P}\{\xi_1 = 3/\xi_2 = 0\} = \frac{7}{24} + \frac{7}{24} + \frac{10}{24} = \frac{24}{24} = 1.$$

$$\mathbb{P}\{\xi_1 = -3/\xi_2 = 1\} + \mathbb{P}\{\xi_1 = 1/\xi_2 = 1\} + \mathbb{P}\{\xi_1 = 3/\xi_2 = 1\} = \frac{13}{43} + \frac{13}{43} + \frac{17}{43} = \frac{43}{43} = 1.$$

$$\mathbb{P}\{\xi_1 = -3/\xi_2 = 5\} + \mathbb{P}\{\xi_1 = 1/\xi_2 = 5\} + \mathbb{P}\{\xi_1 = 3/\xi_2 = 5\} = \frac{6}{18} + \frac{3}{18} + \frac{9}{18} = \frac{18}{18} = 1.$$

$$\mathbb{P}\{\xi_1 = -3/\xi_2 = 6\} + \mathbb{P}\{\xi_1 = 1/\xi_2 = 6\} + \mathbb{P}\{\xi_1 = 3/\xi_2 = 6\} = \frac{1}{15} + \frac{1}{15} + \frac{13}{15} = \frac{15}{15} = 1.$$

Табл. 6: Умовні ряди розподілу координати ξ_2

ξ_2	0	1	5	6
$\mathbb{P}\{\xi_2 = y_j/\xi_1 = -3\}$	$\frac{7}{27}$	$\frac{13}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{1}{27}$
$\mathbb{P}\{\xi_2 = y_j/\xi_1 = 1\}$	$\frac{7}{24}$	$\frac{13}{24}$	$\frac{3}{24}$	$\frac{1}{24}$
$\mathbb{P}\{\xi_2 = y_j/\xi_1 = 3\}$	$\frac{10}{49}$	$\frac{17}{49}$	$\frac{9}{49}$	$\frac{13}{49}$

Перевіримо на правильність умовні ряди розподілу координати ξ_1:

$$\mathbb{P}\{\xi_2 = 0/\xi_1 = -3\} + \mathbb{P}\{\xi_2 = 1/\xi_1 = -3\} + \mathbb{P}\{\xi_2 = 5/\xi_1 = -3\} + \mathbb{P}\{\xi_2 = 6/\xi_1 = -3\} = \\ = \frac{7}{27} + \frac{13}{27} + \frac{6}{27} + \frac{1}{27} = \frac{27}{27} = 1.$$

$$\mathbb{P}\{\xi_2 = 0/\xi_1 = 1\} + \mathbb{P}\{\xi_2 = 1/\xi_1 = 1\} + \mathbb{P}\{\xi_2 = 5/\xi_1 = 1\} + \mathbb{P}\{\xi_2 = 6/\xi_1 = 1\} = \\ = \frac{7}{24} + \frac{13}{24} + \frac{3}{24} + \frac{1}{24} = \frac{24}{24} = 1.$$

$$\mathbb{P}\{\xi_2 = 0/\xi_1 = 3\} + \mathbb{P}\{\xi_2 = 1/\xi_1 = 3\} + \mathbb{P}\{\xi_2 = 5/\xi_1 = 3\} + \mathbb{P}\{\xi_2 = 6/\xi_1 = 3\} = \\ = \frac{10}{49} + \frac{17}{49} + \frac{9}{49} + \frac{13}{49} = \frac{49}{49} = 1.$$

6. Умовні математичні сподівання для кожної координати з перевіркою.

Формула для знаходження умовних математичних сподівань випадкової величини ξ_1 за умови, що величина ξ_2 набула значення y_j, $j = \overline{1,4}$, $y_1 = 0, y_2 = 1, y_3 = 5, y_4 = 6$, має такий вигляд:

$$\mathbb{E}(\xi_1/\xi_2 = y_j) = \sum_{i=1}^{3} x_i \mathbb{P}\{\xi_1 = x_i/\xi_2 = y_j\},\ \ x_1 = -3, x_2 = 1\,, x_3 = 3.$$

Аналогічний вигляд має і формула для знаходження умовних математичних сподівань випадкової величини ξ_2 за умови, що величина ξ_1 набула значення x_k, $k = \overline{1,3}$, $x_1 = -3, x_2 = 1, x_3 = 3$:

$$\mathbb{E}(\xi_2/\xi_1 = x_k) = \sum_{i=1}^{4} y_i \mathbb{P}\{\xi_2 = y_i/\xi_1 = x_k\},\ \ y_1 = 0, y_2 = 1\,, y_3 = 5, y_4 = 6.$$

Для зручності ще раз наведемо умовні ряди розподілу координат:

ξ_1	-3	1	3
$\mathbb{P}\{\xi_1 = x_k/\xi_2 = 0\}$	$\frac{7}{24}$	$\frac{7}{24}$	$\frac{10}{24}$
$\mathbb{P}\{\xi_1 = x_k/\xi_2 = 1\}$	$\frac{13}{43}$	$\frac{13}{43}$	$\frac{17}{43}$
$\mathbb{P}\{\xi_1 = x_k/\xi_2 = 5\}$	$\frac{6}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{9}{18}$
$\mathbb{P}\{\xi_1 = x_k/\xi_2 = 6\}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{13}{15}$

ξ_2	0	1	5	6
$\mathbb{P}\{\xi_2 = y_j/\xi_1 = -3\}$	$\frac{7}{27}$	$\frac{13}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{1}{27}$
$\mathbb{P}\{\xi_2 = y_j/\xi_1 = 1\}$	$\frac{7}{24}$	$\frac{13}{24}$	$\frac{3}{24}$	$\frac{1}{24}$
$\mathbb{P}\{\xi_2 = y_j/\xi_1 = 3\}$	$\frac{10}{49}$	$\frac{17}{49}$	$\frac{9}{49}$	$\frac{13}{49}$

$$\mathbb{E}(\xi_1/\xi_2 = 0) = (-3)\cdot\frac{7}{24} + 1\cdot\frac{7}{24} + 3\cdot\frac{10}{24} = \frac{2}{3}$$

$$\mathbb{E}(\xi_1/\xi_2 = 1) = (-3)\cdot\frac{13}{43} + 1\cdot\frac{13}{43} + 3\cdot\frac{17}{43} = \frac{25}{43}$$

$$\mathbb{E}(\xi_1/\xi_2 = 5) = (-3)\cdot\frac{6}{18} + 1\cdot\frac{3}{18} + 3\cdot\frac{9}{18} = \frac{2}{3}$$

$$\mathbb{E}(\xi_1/\xi_2 = 6) = (-3)\cdot\frac{1}{15} + 1\cdot\frac{1}{15} + 3\cdot\frac{13}{15} = \frac{37}{15} = 2\frac{7}{15}$$

$$\mathbb{E}(\xi_2/\xi_1 = -3) = 0\cdot\frac{7}{27} + 1\cdot\frac{13}{27} + 5\cdot\frac{6}{27} + 6\cdot\frac{1}{27} = \frac{49}{27} = 1\frac{22}{27}$$

$$\mathbb{E}(\xi_2/\xi_1 = 1) = 0\cdot\frac{7}{24} + 1\cdot\frac{13}{24} + 5\cdot\frac{3}{24} + 6\cdot\frac{1}{24} = \frac{34}{24} = 1\frac{5}{12}$$

$$\mathbb{E}(\xi_2/\xi_1 = 3) = 0\cdot\frac{10}{49} + 1\cdot\frac{17}{49} + 5\cdot\frac{9}{49} + 6\cdot\frac{13}{49} = \frac{140}{49} = 2\frac{6}{7}$$

Тепер можна розглянути випадкові величини $\mathbb{E}(\xi_1/\xi_2)$ та $\mathbb{E}(\xi_2/\xi_1)$, які приймають значення $\mathbb{E}(\xi_1/\xi_2 = y_j)$ та $\mathbb{E}(\xi_2/\xi_1 = x_k)$ з ймовірностями $\mathbb{P}\{\xi_2 = y_j\}$ відповідно $\left(k = \overline{1,3}, x_1 = -3, x_2 = 1, x_3 = 3; j = \overline{1,4}, y_1 = 0, y_2 = 1, y_3 = 5, y_4 = 6\right)$. Складемо ряди розподілу цих випадкових величин. Якщо при обрахунку математичного сподівання випадкової величини $\mathbb{E}(\xi_1/\xi_2)$ отримаємо математичне сподівання випадкової величини ξ_1, то отриманий ряд розподілу є правильним, тобто має виконуватись формула повного математичного сподівання:

$$\mathbb{E}\big(\mathbb{E}(\xi_1/\xi_2)\big) = \mathbb{E}\xi_1. \qquad (3)$$

Табл. 7: Ряд розподілу випадкової величини $\mathbb{E}(\xi_1/\xi_2)$

$\mathbb{E}(\xi_1/\xi_2)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{25}{43}$	$\frac{2}{3}$	$2\frac{7}{15}$
p	0,24	0,43	0,18	0,15

$$\mathbb{E}\big(\mathbb{E}(\xi_1/\xi_2)\big) = 0{,}24\cdot\frac{2}{3} + 0{,}43\cdot\frac{25}{43} + 0{,}18\cdot\frac{2}{3} + 0{,}15\cdot 2\frac{7}{15} =$$
$$= 0{,}16 + \frac{43}{100}\cdot\frac{25}{43} + 0{,}12 + \frac{15}{100}\cdot\frac{37}{15} = 0{,}16 + 0{,}25 + 0{,}12 + 0{,}37 = 0{,}9$$

При порівнянні раніше знайденого математичного сподівання координати ξ_1 (1) та щойно знайденого повного математичного сподівання, приходимо до висновку, що ряд розподілу випадкової величини $\mathbb{E}(\xi_1/\xi_2)$ побудовано правильно. Аналогічно побудуємо ряд розподілу випадкової величини $\mathbb{E}(\xi_2/\xi_1)$ та перевіримо його за формулою повного математичного сподівання, яка в цьому випадку має вигляд:

$$\mathbb{E}\big(\mathbb{E}(\xi_2/\xi_1)\big) = \mathbb{E}\xi_2. \qquad (4)$$

Табл. 8: Ряд розподілу випадкової величини $\mathbb{E}(\xi_2/\xi_1)$

$\mathbb{E}(\xi_2/\xi_1)$	$1\frac{22}{27}$	$1\frac{5}{12}$	$2\frac{6}{7}$
p	0,27	0,24	0,49

Знайдемо математичне сподівання цієї випадкової величини:

$$\mathbb{E}\big(\mathbb{E}(\xi_2/\xi_1)\big) = 0{,}27 \cdot 1\frac{22}{27} + 0{,}24 \cdot 1\frac{5}{12} + 0{,}49 \cdot 2\frac{6}{7} = 0{,}27 \cdot \frac{49}{27} + 0{,}24 \cdot \frac{34}{24} + 0{,}49 \cdot \frac{140}{49}$$
$$= 0{,}49 + 0{,}34 + 1{,}4 = 2{,}23$$

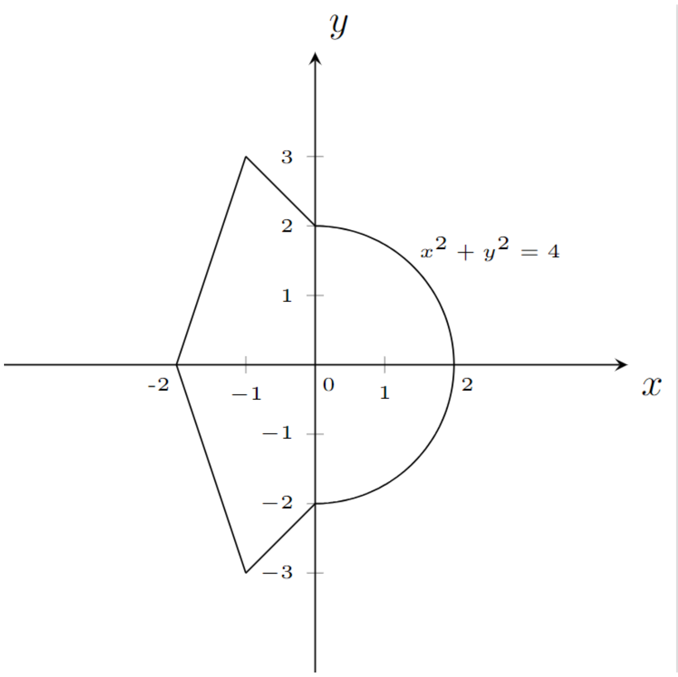
При порівнянні раніше знайденого математичного сподівання координати ξ_2 (2) та щойно знайденого повного математичного сподівання, приходимо до висновку, що ряд розподілу випадкової величини $\mathbb{E}(\xi_2/\xi_1)$ побудовано правильно.

Завдання №2

Варіант №77

Нехай випадковий вектор $\vec{\xi} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$ рівномірно розподілений в області G (область G зображена на рис. 18).

Рис. 18



Знайдемо:

1. щільності розподілу координат ξ_1 та ξ_2;
2. функції розподілу $F_{\xi_1}(x)$ та $F_{\xi_2}(y)$ координат ξ_1 та ξ_2 відповідно;
3. функцію розподілу $F_{\vec{\xi}}(x, y)$ випадкового вектора;
4. математичні сподівання координат та кореляційну матрицю;
5. умовні щільності розподілу для кожної координати;
6. умовні математичні сподівання для кожної координати з перевіркою.

Саму область можна подати у вигляді:

$$G = \Big\{(x, y) \in R^2 : \big((-2 \le x \le -1) \wedge (-3x - 6 \le y \le 3x + 6)\big) \vee$$
$$\vee \big((-1 \le x \le 0) \wedge (x - 2 \le y \le -x + 2)\big) \vee$$
$$\vee \Big((0 \le x \le 2) \wedge \Big(-\sqrt{4 - x^2} \le y \le \sqrt{4 - x^2}\Big)\Big)\Big\}$$

1. Щільності розподілу координат ξ_1 та ξ_2.

Площу області G можна знайти як суму площ рівнобедреного трикутника з основою довжини 6 та висотою довжини 1, перпендикулярною основі, двох рівнобедрених прямокутних трикутників з катетами довжини 1, прямокутника зі сторонами довжини 1 та 4 і половини круга радіуса 2:

$$S(G) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 6 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1^2 + 1 \cdot 4 + \frac{\pi \cdot 2^2}{2} = 3 + 1 + 4 + 2\pi = 8 + 2\pi$$

Оскільки вектор $\vec{\xi}$ рівномірно розподілений в області G, то функція щільності має вигляд:

$$f_{\vec{\xi}}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{S(G)} = \frac{1}{8+2\pi}, & (x, y) \in G \\ 0, & (x, y) \notin G. \end{cases}$$

Знайдемо маргінальні щільності координат ξ_1 та ξ_2 за формулами:

$$f_{\xi_1}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\vec{\xi}}(x, y) dy$$

$$f_{\xi_2}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\vec{\xi}}(x, y) dx$$

$$f_{\xi_1}(x) = \begin{cases} 0, (x \le -2) \vee (x > 2) \\ \frac{1}{2\pi + 8} \int_{-3x-6}^{3x+6} dy = \frac{6x + 12}{2\pi + 8} = \frac{3x + 6}{\pi + 4}, & -2 < x \le -1 \\ \frac{1}{2\pi + 8} \int_{x-2}^{-x+2} dy = \frac{-2x + 4}{2\pi + 8} = \frac{-x + 2}{\pi + 4}, & -1 < x \le 0 \\ \frac{1}{2\pi + 8} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy = \frac{2\sqrt{4 - x^2}}{2\pi + 8} = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{\pi + 4}, & 0 < x \le 2 \end{cases} \quad (5)$$

$$f_{\xi_2}(y)=\begin{cases} 0,(y\le -3)\vee(y>3) \\ \dfrac{1}{2\pi+8}\displaystyle\int_{-\frac{1}{3}y-2}^{y+2}dx=\dfrac{\frac{4}{3}y+4}{2\pi+8}=\dfrac{2y+6}{3\pi+12},-3<y\le -2 \\ \dfrac{1}{2\pi+8}\displaystyle\int_{-\frac{1}{3}y-2}^{\sqrt{4-y^2}}dx=\dfrac{\sqrt{4-y^2}+\frac{1}{3}y+2}{2\pi+8},-2<y\le 0 \\ \dfrac{1}{2\pi+8}\displaystyle\int_{\frac{1}{3}y-2}^{\sqrt{4-y^2}}dx=\dfrac{\sqrt{4-y^2}-\frac{1}{3}y+2}{2\pi+8},0<y\le 2 \\ \dfrac{1}{2\pi+8}\displaystyle\int_{\frac{1}{3}y-2}^{-y+2}dx=\dfrac{-\frac{4}{3}y+4}{2\pi+8}=\dfrac{-2y+6}{3\pi+12},2<y\le 3 \end{cases} \qquad (6)$$

Перевіримо виконання умов нормування для щільностей f_{ξ_1} та f_{ξ_2}:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f_{\xi_1}(x)dx=\int_{-2}^{-1}\frac{3x+6}{\pi+4}dx+\int_{-1}^{0}\frac{-x+2}{\pi+4}dx+\int_{0}^{2}\frac{\sqrt{4-x^2}}{\pi+4}dx=$$

$$=\frac{1}{\pi+4}\left(\int_{-2}^{-1}(3x+6)dx+\int_{-1}^{0}(-x+2)dx+\int_{0}^{2}\sqrt{4-x^2}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi+4}\left(\left(\frac{3\cdot(-1)^2}{2}-6-\frac{3\cdot(-2)^2}{2}+12\right)+\left(\frac{1}{2}+2\right)+\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot 2^2\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi+4}\left(\frac{3}{2}+\frac{5}{2}+\pi\right)=\frac{\pi+4}{\pi+4}=1.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_2}(y)dy =$$

$$= \int_{-3}^{-2} \frac{2y+6}{3\pi+12} dy + \int_{-2}^{0} \frac{\sqrt{4-y^2}+\frac{1}{3}y+2}{2\pi+8} dy + \int_{0}^{2} \frac{\sqrt{4-y^2}-\frac{1}{3}y+2}{2\pi+8} dy +$$

$$+ \int_{2}^{3} \frac{-2y+6}{3\pi+12} =$$

$$= \frac{1}{6\pi+24}\left(\int_{-3}^{-2}(4y+12)dy + \int_{-2}^{0}\left(3\sqrt{4-y^2}+y+6\right)dy +\right.$$

$$\left.+ \int_{0}^{2}\left(3\sqrt{4-y^2}-y+6\right)dy + \int_{2}^{3}(-4y+12)dy\right) =$$

$$= \frac{1}{6\pi+24}\left(2\cdot(-2)^2 - 2\cdot(-3)^2 + 12 + \int_{-2}^{0} 3\sqrt{4-y^2}dy - \frac{(-2)^2}{2} + 12\right.$$

$$\left.+ \int_{0}^{2} 3\sqrt{4-y^2}dy - \frac{2^2}{2} + 12 - 2\cdot 3^2 + 2\cdot 2^2 + 12\right) =$$

$$= \frac{1}{6\pi+24}\left(-10+12+12+12+12-10-4+3\int_{-2}^{2}\sqrt{4-y^2}dy\right) =$$

$$= \frac{1}{6\pi+24}(3\cdot 2\pi + 24) = \frac{6\pi+24}{6\pi+24} = 1.$$

Умови нормування виконуються, тому щільності координат ξ_1 та ξ_2 були знайдені правильно.

2. Функції розподілу F_{ξ_1} та F_{ξ_2} координат ξ_1 та ξ_2 відповідно

Функції розподілу F_{ξ_1} та F_{ξ_2} координат знаходяться за формулами:

$$F_{\xi_1}(x) = \int_{-\infty}^{x} f_{\xi_1}(t)dt;$$

$$F_{\xi_2}(y) = \int_{-\infty}^{y} f_{\xi_2}(s)ds;$$

Спершу обчислимо невизначений інтеграл $I_1 = \int \frac{\sqrt{4-t^2}}{\pi+4} dt$, отриманим значенням будемо користуватися надалі, застосовуючи формулу Ньютона-Лейбніца.

$$I_1 = \int \frac{\sqrt{4-t^2}}{\pi+4} dt = \left| \begin{matrix} t = 2\sin u \Rightarrow u = arcsin\frac{t}{2} \\ dt = 2\cos u\, du \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{\pi+4}\int \sqrt{4-4\,sin^2\,u}\cdot 2\cos u\, du = \frac{2}{\pi+4}\int 2\cos^2 u\, du =$$

$$= \frac{2}{\pi+4}\int (1+\cos 2u)du = \frac{2}{\pi+4}\left(\int du + \int \cos 2u\, du\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi+4}\left(u + \frac{1}{2}\sin 2u\right) + C$$

$$= \frac{1}{\pi+4}\left(2\,arcsin\frac{t}{2} + sin\left(2\,arcsin\frac{t}{2}\right)\right) + C =$$

$$= \frac{2\,arcsin\frac{t}{2} + 2\sin\left(arcsin\frac{t}{2}\right)\cos\left(arcsin\frac{t}{2}\right)}{\pi+4} + C =$$

$$= \frac{2\,arcsin\frac{t}{2} + 2\cdot\frac{t}{2}\cdot\sqrt{1-sin^2\left(arcsin\frac{t}{2}\right)}}{\pi+4} + C =$$

$$= \frac{2\,arcsin\frac{t}{2} + 2\cdot\frac{t}{2}\sqrt{1-\frac{t^2}{4}}}{\pi+4} + C = \frac{2\,arcsin\frac{t}{2} + \frac{t}{2}\sqrt{4-t^2}}{\pi+4} + C$$

Повернемося до знаходження функції розподілу першої координати випадкового вектора $\vec{\xi}$.

$$(x \le -2) \Rightarrow F_{\xi_1}(x) = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0;$$

$$(-2 < x \le -1) \Rightarrow F_{\xi_1}(x) = \int_{-\infty}^{-2} 0dt + \int_{-2}^{x} \frac{3t+6}{\pi+4}dt = \frac{1}{\pi+4}\left(\frac{3t^2}{2} + 6t\right)\Bigg|_{-2}^{x} =$$

$$= \frac{\frac{3x^2}{2}+6x}{\pi+4} - \frac{\frac{3\cdot(-2)^2}{2}-12}{\pi+4} = \frac{3x^2+12x+12}{2\pi+8};$$

$$(-1 < x \le 0) \Rightarrow F_{\xi_1}(x) = \int_{-\infty}^{-2} 0dt + \int_{-2}^{-1} \frac{3t+6}{\pi+4} dt + \int_{-1}^{x} \frac{-t+2}{\pi+4} dt =$$

$$= \frac{1}{\pi+4}\left(\frac{3t^2}{2} + 6t\right)\Big|_{-2}^{-1} + \frac{1}{\pi+4}\left(-\frac{t^2}{2} + 2t\right)\Big|_{-1}^{x} =$$

$$= \frac{\frac{3\cdot(-1)^2}{2} - 6}{\pi+4} - \frac{\frac{3\cdot(-2)^2}{2} - 12}{\pi+4} + \frac{-\frac{x^2}{2} + 2x}{\pi+4} - \frac{-\frac{(-1)^2}{2} - 2}{\pi+4} =$$

$$= \frac{-x^2 + 4x + 8}{2\pi+8};$$

$$(0 < x \le 2) \Rightarrow F_{\xi_1}(x) =$$

$$= \int_{-\infty}^{-2} 0dt + \int_{-2}^{-1} \frac{3t+6}{\pi+4} dt + \int_{-1}^{0} \frac{-t+2}{\pi+4} dt + \int_{0}^{x} \frac{\sqrt{4-t^2}}{\pi+4} dt =$$

$$= \frac{1}{\pi+4}\left(\frac{3t^2}{2} + 6t\right)\Big|_{-2}^{-1} + \frac{1}{\pi+4}\left(-\frac{t^2}{2} + 2t\right)\Big|_{-1}^{0} + (I_1)|_0^x =$$

$$= \frac{\frac{3\cdot(-1)^2}{2} - 6}{\pi+4} - \frac{\frac{3\cdot(-2)^2}{2} - 12}{\pi+4} + \frac{-\frac{0^2}{2} + 2\cdot 0}{\pi+4} - \frac{-\frac{(-1)^2}{2} - 2}{\pi+4}$$

$$+ \frac{2\,arcsin\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}}{\pi+4} - \frac{2\,arcsin\frac{0}{2} + \frac{0}{2}\sqrt{4-0^2}}{\pi+4} =$$

$$= \frac{2\,arcsin\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + 4}{\pi+4} = \frac{4\,arcsin\frac{x}{2} + x\sqrt{4-x^2} + 8}{2\pi+8};$$

$$(x > 2) \Rightarrow F_{\xi_1}(x) = \int_{-\infty}^{-2} 0dt + \int_{-2}^{-1} \frac{3t+6}{\pi+4} dt + \int_{-1}^{0} \frac{-t+2}{\pi+4} dt + \int_{0}^{2} \frac{\sqrt{4-t^2}}{\pi+4} dt =$$

$$= \frac{\frac{3\cdot(-1)^2}{2} - 6}{\pi+4} - \frac{\frac{3\cdot(-2)^2}{2} - 12}{\pi+4} + \frac{-\frac{0^2}{2} + 2\cdot 0}{\pi+4} - \frac{-\frac{(-1)^2}{2} - 2}{\pi+4}$$

$$+ + \frac{2\,arcsin\frac{2}{2} + \frac{2}{2}\sqrt{4-2^2}}{\pi+4} - \frac{2\,arcsin\frac{0}{2} + \frac{0}{2}\sqrt{4-0^2}}{\pi+4}$$

$$= \frac{4}{\pi+4} + \frac{\pi}{\pi+4} == \frac{\pi+4}{\pi+4} = 1.$$

Отже, маємо функцію розподілу першої координати:

$$F_{\xi_1}(x) = \begin{cases} 0, & x \le -2, \\ \dfrac{3x^2 + 12x + 12}{2\pi + 8}, & -2 < x \le -1, \\ \dfrac{-x^2 + 4x + 8}{2\pi + 8}, & -1 < x \le 0, \\ \dfrac{4\,arcsin\dfrac{x}{2} + x\sqrt{4 - x^2} + 8}{2\pi + 8}, & 0 < x \le 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Оскільки розглядається неперервний випадковий вектор, функції розподілу його координат повинні бути неперервними. Дослідимо функцію $F_{\xi_1}(\mathrm{x})$ на неперервність в точках $x = -2, x = -1, x = 0$ та $x = 2$.

Дослідимо функцію $F_{\xi_1}(\mathrm{x})$ на неперервність в точці $x = -2$:

$$\lim_{x \to -2-0} F_{\xi_1}(x) = 0;$$

$$\lim_{x \to -2+0} F_{\xi_1}(x) = \frac{3 \cdot (-2)^2 + 12 \cdot (-2) + 12}{2\pi + 8} = 0.$$

Отже, функція неперервна в точці $x = -2,$ адже $\lim\limits_{x \to -2-0} F_{\xi_1}(x) = \lim\limits_{x \to -2+0} F_{\xi_1}(x).$

Дослідимо функцію $F_{\xi_1}(\mathrm{x})$ на неперервність в точці $x = -1$:

$$\lim_{x \to -1-0} F_{\xi_1}(x) = \frac{3 \cdot (-1)^2 + 12 \cdot (-1) + 12}{2\pi + 8} = \frac{3}{2\pi + 8};$$

$$\lim_{x \to -1+0} F_{\xi_1}(x) = \frac{-(-1)^2 + 4 \cdot (-1) + 8}{2\pi + 8} = \frac{3}{2\pi + 8}.$$

Отже, функція неперервна в точці $x = -1,$ адже $\lim\limits_{x \to -1-0} F_{\xi_1}(x) = \lim\limits_{x \to -1+0} F_{\xi_1}(x).$

Дослідимо функцію $F_{\xi_1}(\mathrm{x})$ на неперервність в точці $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0-0} F_{\xi_1}(x) = \frac{-(0)^2 + 4 \cdot (0) + 8}{2\pi + 8} = \frac{8}{2\pi + 8} = \frac{4}{\pi + 4};$$

$$\lim_{x \to 0+0} F_{\xi_1}(x) = \frac{4\,arcsin\dfrac{0}{2} + 0 \cdot \sqrt{4 - 0^2} + 8}{2\pi + 8} = \frac{8}{2\pi + 8} = \frac{4}{\pi + 4}.$$

Отже, функція неперервна в точці $x = 0,$ адже $\lim\limits_{x \to 0-0} F_{\xi_1}(x) = \lim\limits_{x \to 0+0} F_{\xi_1}(x).$

Дослідимо функцію $F_{\xi_1}(\mathrm{x})$ на неперервність в точці $x = 2$:

$$\lim_{x \to 2-0} F_{\xi_1}(x) = \frac{4\,arcsin\dfrac{2}{2} + 2 \cdot \sqrt{4 - 2^2} + 8}{2\pi + 8} = \frac{4 \cdot \dfrac{\pi}{2} + 8}{2\pi + 8} = \frac{2\pi + 8}{2\pi + 8} = 1;$$

$$\lim_{x\to 2+0} F_{\xi_1}(x) = 1.$$

Отже, функція неперервна в точці $x = 0$, адже $\lim_{x\to 2-0} F_{\xi_1}(x) = \lim_{x\to 2+0} F_{\xi_1}(x)$.

Знайдемо функцію розподілу другої координати:

$$(y \le -3) \Rightarrow F_{\xi_2}(y) = \int_{-\infty}^{y} 0ds = 0;$$

$$(-3 < y \le -2) \Rightarrow F_{\xi_2}(y) = \int_{-\infty}^{-3} 0ds + \int_{-3}^{y} \frac{2s+6}{3\pi+12} ds = \frac{1}{3\pi+12}(s^2+6s)\Big|_{-3}^{y} =$$

$$= \frac{y^2+6y}{3\pi+12} - \frac{(-3)^2+6\cdot(-3)}{3\pi+12} = \frac{y^2+6y+9}{3\pi+12};$$

$$(-2 < y \le 0) \Rightarrow F_{\xi_2}(y)$$

$$= \int_{-\infty}^{-3} 0ds + \int_{-3}^{-2} \frac{2s+6}{3\pi+12} ds +$$

$$+ \int_{-2}^{y} \frac{\sqrt{4-s^2}+\frac{1}{3}s+2}{2\pi+8} ds = \int_{-3}^{-2} \frac{2s+6}{3\pi+12} ds +$$

$$+ \int_{-2}^{y} \frac{\frac{1}{3}s+2}{2\pi+8} ds + \int_{-2}^{y} \frac{\sqrt{4-s^2}}{2\pi+8} ds =$$

$$= \frac{1}{3\pi+12}(s^2+6s)\Big|_{-3}^{-2} + \frac{\frac{s^2}{6}+2s}{2\pi+8}\Bigg|_{-2}^{y} + \frac{I_1}{2}\Big|_{-2}^{y} =$$

$$= \frac{(-2)^2+6\cdot(-2)}{3\pi+12} - \frac{(-3)^2+6\cdot(-3)}{3\pi+12} + \frac{y^2+12y}{12\pi+48}$$

$$- - \frac{(-2)^2+12\cdot(-2)}{12\pi+48} + \frac{2\,arcsin\frac{y}{2}+\frac{y}{2}\sqrt{4-y^2}}{2\pi+8}$$

$$- \frac{2\,arcsin\frac{(-2)}{2}+\frac{(-2)}{2}\sqrt{4-(-2)^2}}{2\pi+8}$$

$$= \frac{12\,arcsin\frac{y}{2}+3y\sqrt{4-y^2}+y^2+12y+6\pi+24}{12\pi+48};$$

$$(0 < y \leq 2) \Rightarrow F_{\xi_2}(y) =$$

$$= \int_{-\infty}^{-3} 0 ds + \int_{-3}^{-2} \frac{2s+6}{3\pi+12} ds + \int_{-2}^{0} \frac{\sqrt{4-s^2} + \frac{1}{3}s + 2}{2\pi+8} ds$$

$$+ \int_{0}^{y} \frac{\sqrt{4-s^2} - \frac{1}{3}s + 2}{2\pi+8} ds$$

$$= \int_{-3}^{-2} \frac{2s+6}{3\pi+12} ds + \int_{-2}^{y} \frac{\sqrt{4-s^2}}{2\pi+8} ds + \int_{-2}^{0} \frac{\frac{1}{3}s+2}{2\pi+8} ds$$

$$+ \int_{0}^{y} \frac{-\frac{1}{3}s+2}{2\pi+8} ds$$

$$= \left(\frac{s^2+6s}{3\pi+12}\right)\Bigg|_{-3}^{-2} + \frac{I_1}{2}\Bigg|_{-2}^{y} + \frac{\frac{s^2}{6}+2s}{2\pi+8}\Bigg|_{-2}^{0} + \frac{-\frac{s^2}{6}+2s}{2\pi+8}\Bigg|_{0}^{y}$$

$$= \frac{(-2)^2+6\cdot(-2)}{3\pi+12} - \frac{(-3)^2+6\cdot(-3)}{3\pi+12} + \frac{0^2+12\cdot 0}{12\pi+48}$$

$$- \frac{(-2)^2+12\cdot(-2)}{12\pi+48} + \frac{2\,arcsin\frac{y}{2} + \frac{y}{2}\sqrt{4-y^2}}{2\pi+8}$$

$$- \frac{2\,arcsin\frac{(-2)}{2} + \frac{(-2)}{2}\sqrt{4-(-2)^2}}{2\pi+8} + \frac{-y^2+12y}{12\pi+48} - \frac{-0^2+12\cdot 0}{12\pi+48}$$

$$= \frac{1}{3\pi+12} + \frac{12\,arcsin\frac{y}{2} + 3y\sqrt{4-y^2} - y^2 + 12y + 6\pi + 20}{12\pi+48}$$

$$= \frac{12\,arcsin\frac{y}{2} + 3y\sqrt{4-y^2} - y^2 + 12y + 6\pi + 24}{12\pi+48};$$

$(2 < y \leq 3) \Rightarrow F_{\xi_2}(y)$

$$= \int_{-\infty}^{-3} 0 ds + \int_{-3}^{-2} \frac{2s+6}{3\pi+12} ds + \int_{-2}^{0} \frac{\sqrt{4-s^2}+\frac{1}{3}s+2}{2\pi+8} ds$$

$$+ \int_{0}^{2} \frac{\sqrt{4-s^2}-\frac{1}{3}s+2}{2\pi+8} ds + \int_{2}^{y} \frac{-2s+6}{3\pi+12} ds$$

$$= \int_{-3}^{-2} \frac{2s+6}{3\pi+12} ds + \int_{-2}^{2} \frac{\sqrt{4-s^2}}{2\pi+8} ds + \int_{-2}^{0} \frac{\frac{1}{3}s+2}{2\pi+8} ds$$

$$+ \int_{0}^{2} \frac{-\frac{1}{3}s+2}{2\pi+8} ds + \int_{2}^{y} \frac{-2s+6}{3\pi+12} ds =$$

$$= \left(\frac{s^2+6s}{3\pi+12}\right)\Bigg|_{-3}^{-2} + \frac{I_1}{2}\Bigg|_{-2}^{2} + \frac{\frac{s^2}{6}+2s}{2\pi+8}\Bigg|_{-2}^{0} + \frac{-\frac{s^2}{6}+2s}{2\pi+8}\Bigg|_{0}^{2} + \left(\frac{-s^2+6s}{3\pi+12}\right)\Bigg|_{2}^{y}$$

$$= \frac{(-2)^2+6\cdot(-2)}{3\pi+12} - \frac{(-3)^2+6\cdot(-3)}{3\pi+12} + \frac{0^2+12\cdot 0}{12\pi+48}$$

$$- \frac{(-2)^2+12\cdot(-2)}{12\pi+48} + \frac{2\,arcsin\frac{2}{2}+\frac{2}{2}\sqrt{4-2^{\,2}}}{2\pi+8}$$

$$- \frac{2\,arcsin\frac{(-2)}{2}+\frac{(-2)}{2}\sqrt{4-(-2)^2}}{2\pi+8} + \frac{-2^2+12\cdot 2}{12\pi+48} - \frac{-0^2+12\cdot 0}{12\pi+48}$$

$$+ \frac{-y^2+6y}{3\pi+12} - \frac{-2^2+6\cdot 2}{3\pi+12} = \frac{-y^2+6y+3}{3\pi+12} + \frac{2\pi}{2\pi+8}$$

$$= \frac{-y^2+6y+3+3\pi}{3\pi+12};$$

$(y > 3) \Rightarrow F_{\xi_2}(y)$

$$= \int_{-\infty}^{-3} 0ds + \int_{-3}^{-2} \frac{2s+6}{3\pi+12} ds + \int_{-2}^{0} \frac{\sqrt{4-s^2} + \frac{1}{3}s + 2}{2\pi+8} ds$$

$$+ \int_{0}^{2} \frac{\sqrt{4-s^2} - \frac{1}{3}s + 2}{2\pi+8} ds + \int_{2}^{3} \frac{-2s+6}{3\pi+12} ds + \int_{3}^{\infty} 0ds$$

$$= \left(\frac{s^2+6s}{3\pi+12}\right)\Bigg|_{-3}^{-2} + \frac{I_1}{2}\Bigg|_{-2}^{2} + \frac{\frac{s^2}{6}+2s}{2\pi+8}\Bigg|_{-2}^{0} + \frac{-\frac{s^2}{6}+2s}{2\pi+8}\Bigg|_{0}^{2} + \left(\frac{-s^2+6s}{3\pi+12}\right)\Bigg|_{2}^{3}$$

$$= \frac{(-2)^2+6\cdot(-2)}{3\pi+12} - \frac{(-3)^2+6\cdot(-3)}{3\pi+12} + \frac{0^2+12\cdot 0}{12\pi+48}$$

$$- \frac{(-2)^2+12\cdot(-2)}{12\pi+48} + \frac{2\,arcsin\frac{2}{2} + \frac{2}{2}\sqrt{4-2^{\,2}}}{2\pi+8}$$

$$- \frac{2\,arcsin\frac{(-2)}{2} + \frac{(-2)}{2}\sqrt{4-(-2)^2}}{2\pi+8} + \frac{-2^2+12\cdot 2}{12\pi+48} - \frac{-0^2+12\cdot 0}{12\pi+48}$$

$$+ \frac{-3^2+6\cdot 3}{3\pi+12} - \frac{-2^2+6\cdot 2}{3\pi+12} = \frac{12}{3\pi+12} + \frac{2\pi}{2\pi+8} = \frac{4}{\pi+4} + \frac{\pi}{\pi+4}$$

$$= \frac{\pi+4}{\pi+4} = 1.$$

Отже, маємо функцію розподілу другої координати:

$$F_{\xi_2}(y) = \begin{cases} 0, & y \le -3 \\ \dfrac{y^2+6y+9}{3\pi+12}, & -3 < y \le -2 \\ \dfrac{12\,arcsin\frac{y}{2} + 3y\sqrt{4-y^2} + y^2 + 12y + 6\pi + 24}{12\pi+48}, & -2 < y \le 0 \\ \dfrac{12\,arcsin\frac{y}{2} + 3y\sqrt{4-y^2} - y^2 + 12y + 6\pi + 24}{12\pi+48}, & 0 < y \le 2 \\ \dfrac{-y^2+6y+3+3\pi}{3\pi+12}, & 2 < y \le 3 \\ 1, & y > 3 \end{cases}$$

Дослідимо функцію $F_{\xi_2}(\text{y})$ на неперервність в точках $y = -3, y = -2, y = 0, y = 2, y = 3$.

Дослідимо функцію $F_{\xi_2}(y)$ на неперервність в точці $y = -3$:

$$\lim_{y\to -3-0} F_{\xi_2}(y) = 0;$$

$$\lim_{y\to -3+0} F_{\xi_2}(y) = \frac{(-3)^2 + 6\cdot(-3) + 9}{3\pi + 12} = 0.$$

Отже, функція неперервна в точці $y = -3,$ адже $\lim\limits_{y\to -3-0} F_{\xi_2}(y) = \lim\limits_{y\to -3+0} F_{\xi_2}(y).$

Дослідимо функцію $F_{\xi_2}(y)$ на неперервність в точці $y = -2$:

$$\lim_{y\to -2-0} F_{\xi_2}(y) = \frac{(-2)^2 + 6\cdot(-2) + 9}{3\pi + 12} = \frac{1}{3\pi + 12};$$

$$\lim_{y\to -2+0} F_{\xi_2}(y) =$$

$$= \frac{12\,arcsin\dfrac{(-2)}{2} + 3\cdot(-2)\cdot\sqrt{4-(-2)^2} + (-2)^2 + 12\cdot(-2) + 6\pi + 24}{12\pi + 48} =$$

$$= \frac{4}{12\pi + 48} = \frac{1}{3\pi + 12}.$$

Отже, функція неперервна в точці $y = -2,$ адже $\lim\limits_{y\to -2-0} F_{\xi_2}(y) = \lim\limits_{y\to -2+0} F_{\xi_2}(y).$

Дослідимо функцію $F_{\xi_2}(y)$ на неперервність в точці $y = 0$:

$$\lim_{y\to 0-0} F_{\xi_2}(y) = \frac{12\,arcsin\dfrac{0}{2} + 3\cdot 0\cdot\sqrt{4-0^2} + 0^2 + 12\cdot 0 + 6\pi + 24}{12\pi + 48} = \frac{1}{2};$$

$$\lim_{y\to 0+0} F_{\xi_2}(y) = \frac{12\,arcsin\dfrac{0}{2} + 3\cdot 0\cdot\sqrt{4-0^2} - 0^2 + 12\cdot 0 + 6\pi + 24}{12\pi + 48} = \frac{1}{2}.$$

Отже, функція неперервна в точці $y = 0,$ адже $\lim\limits_{y\to 0-0} F_{\xi_2}(y) = \lim\limits_{y\to 0+0} F_{\xi_2}(y).$

Дослідимо функцію $F_{\xi_2}(y)$ на неперервність в точці $y = 2$:

$$\lim_{y\to 2-0} F_{\xi_2}(y) = \frac{12\,arcsin\dfrac{2}{2} + 3\cdot 2\cdot\sqrt{4-2^2} - 2^2 + 12\cdot 2 + 6\pi + 24}{12\pi + 48} = \frac{12\pi + 44}{12\pi + 48}$$

$$= \frac{3\pi + 11}{3\pi + 12};$$

$$\lim_{y\to 2+0} F_{\xi_2}(y) = \frac{-2^2 + 6\cdot 2 + 3 + 3\pi}{3\pi + 12} = \frac{3\pi + 11}{3\pi + 12}.$$

Отже, функція неперервна в точці $y = 2,$ адже $\lim\limits_{y\to 2-0} F_{\xi_2}(y) = \lim\limits_{y\to 2+0} F_{\xi_2}(y).$

Дослідимо функцію $F_{\xi_2}(\text{y})$ на неперервність в точці $y = 3$:

$$\lim_{y\to 3-0} F_{\xi_2}(y) = \frac{-3^2 + 6\cdot 3 + 3 + 3\pi}{3\pi + 12} = \frac{3\pi + 12}{3\pi + 12} = 1;$$

$$\lim_{y\to 3+0} F_{\xi_2}(y) = 1.$$

Отже, функція неперервна в точці $y = 3,$ адже $\lim\limits_{y\to 3-0} F_{\xi_2}(y) = \lim\limits_{y\to 3+0} F_{\xi_2}(y)$.

3. Сумісна функція розподілу випадкового вектора.

За означенням $F_{\vec{\xi}} = \mathbb{P}\{\xi_1 < x, \xi_2 < y\}$ – це ймовірність потрапляння випадкового вектора в середину нескінченного квадранта з вершиною в точці (x,y). Враховуючи вигляд подвійного інтеграла по області *G*, розіб'ємо координатну площину на області $D_k, k = \overline{0{,}17}$, в яких функція розподілу набуває однакових значень. Опишемо ці області аналітично:

$$D_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x \le -2) \cup (y \le -3) \cup (3x + y \le -6)\};$$

$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (-2 < x \le -1) \cap (-3x - 6 < y \le 0)\};$$

$$D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (-1 < x \le 0) \cap (x - 2 < y \le 0)\};$$

$$D_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \big((-1 < x \le 0) \cap (-3 < y \le x - 2)\big) \cup \big((-3 < y \le -2) \cap (x > 0)\big)\};$$

$$D_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (0 < x \le 2) \cap \left(-\sqrt{4 - x^2} < y \le 0\right)\};$$

$$D_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left((0 < x \le 2) \cap \left(-2 < \text{y} \le -\sqrt{4 - \text{x}^2}\right)\right) \cup \big((x > 2) \cap (-2 < y \le 0)\big)\};$$

$$D_6 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (-2 < x \le -1) \cap (y > 3\text{x} + 6)\};$$

$$D_7 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (-2 < x \le -1) \cap (0 < y \le 3x + 6)\};$$

$$D_8 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (-1 < x \le 0) \cap (0 < y \le -x + 2)\};$$

$$D_9 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (0 < x \le 2) \cap \left(0 < y \le \sqrt{4 - x^2}\right)\};$$

$$D_{10} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (0 < x \le 2) \cap \left(\sqrt{4 - x^2} < y \le 2\right)\};$$

$$D_{11} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (-1 < x \le 0) \cap (-x + 2 < y \le 3)\};$$

$$D_{12} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (0 < x \le 2) \cap (2 < y \le 3)\};$$

$$D_{13} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x > 2) \cap (0 < y \le 2)\};$$

$$D_{14} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x > 2) \cap (2 < y \le 3)\};$$

$$D_{15} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (-1 < x \le 0) \cap (y > 3)\};$$

$$D_{16} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: (0 < x \leq 2) \cap (y > 3)\};$$

$$D_{17} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: (x > 2) \cap (y > 3)\};$$

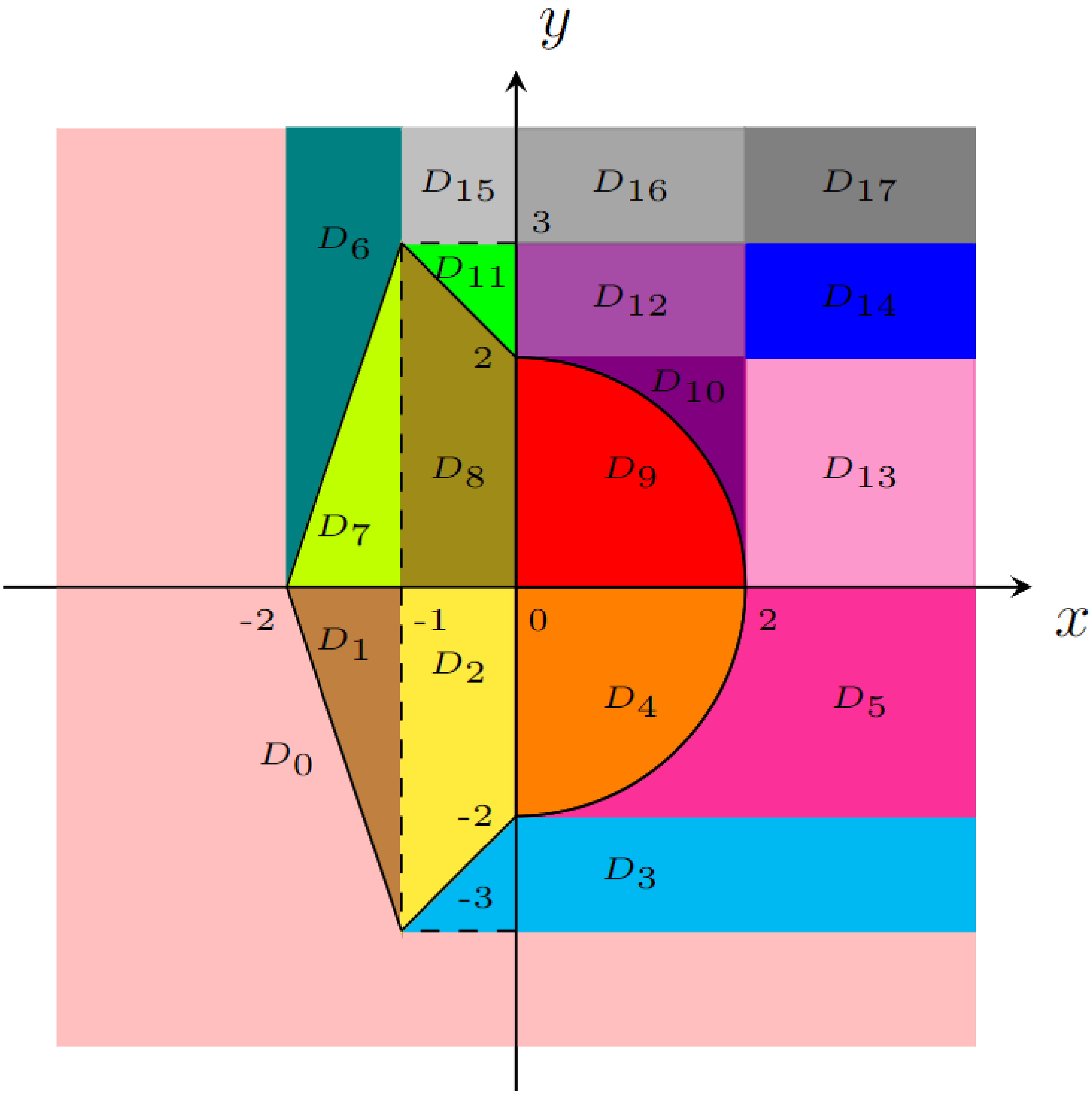


Рис.19: Розбиття координатної площини на області $D_k, k = \overline{0,17}$

Для знаходження подвійного інтеграла від сумісної функції розподілу перейдемо до системи координат Ots та позначимо $G_k = G \cap \{(t < x) \cap (s < y)\}$, якщо $(x, y) \in D_k, k = \overline{0,17}$.

Для знаходження сумісної функції розподілу скористаємося формулою:

$$F_{\vec{\xi}}(x, y) = \iint\limits_{G_k} f_{\vec{\xi}}(t, s) dtds = \iint\limits_{G_k} \frac{1}{2\pi + 8} dtds = \frac{1}{2\pi + 8} \iint\limits_{G_k} dtds = \frac{S(G_k)}{2\pi + 8},$$

$$\text{якщо } (x, y) \in D_k, k = \overline{0,17}$$

Перейдемо до знаходження сумісної функції розподілу:

1. Область D_0 (рис. 20):

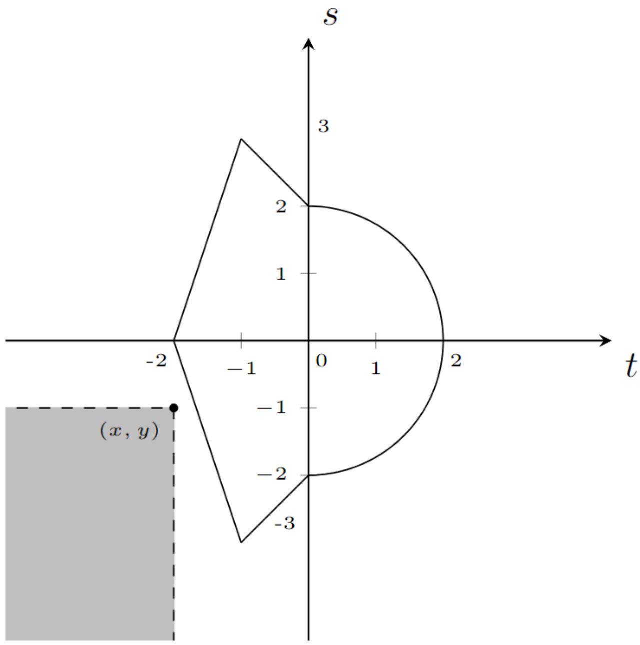


Рис. 20: Знаходження сумісної функції розподілу в області D_0

$$(x, y) \in D_0 \Rightarrow G_0 = \emptyset \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x, y) = \frac{S(\emptyset)}{2\pi + 8} = 0.$$

2. Область D_2 (рис. 21): можна знайти як частину площі прямокутного трикутника, обмеженого прямими $s = -3t - 6, s = y$ та $t = x$.

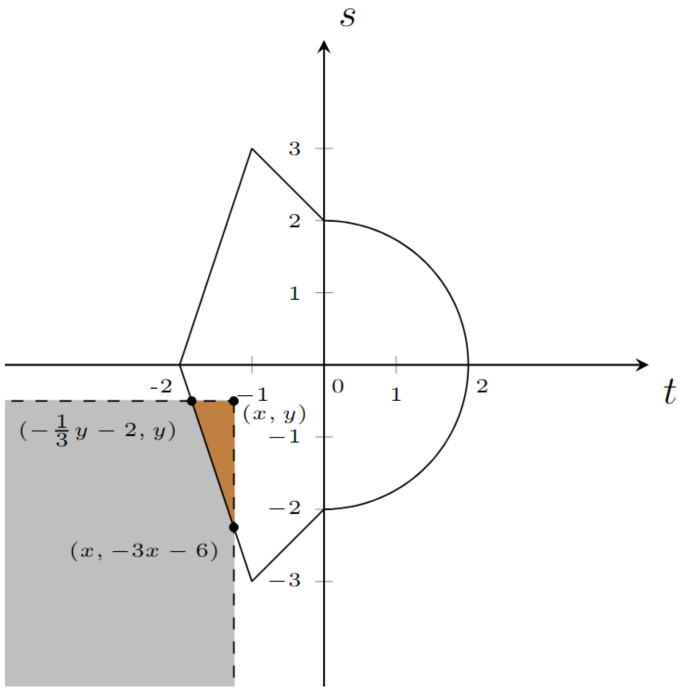


Рис. 21: Знаходження сумісної функції розподілу в області D_1

$$(x,y) \in D_1 \Rightarrow G_1 = \{(t,s) \in \mathbb{R}^2 : (-3x-6 \le s < y) \wedge \left(-\frac{1}{3}s - 2 \le t < x\right)\}$$

$$\Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x,y) = \frac{1}{2\pi+8} \iint\limits_{G_1} dtds = \frac{1}{2\pi+8} \int_{-3x-6}^{y} ds \int_{-\frac{1}{3}s-2}^{x} dt$$

$$= \frac{1}{2\pi+8} \int_{-3x-6}^{y} \left(x + \frac{1}{3}s + 2\right) ds$$

$$= \frac{1}{2\pi+8} \left(\int_{-3x-6}^{y} (x+2) ds + \int_{-3x-6}^{y} \frac{1}{3} s ds \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi+8} \left((x+2)(y+3x+6) + \frac{1}{6}(y^2 - (3x+6)^2) \right)$$

$$= \frac{1}{12\pi+48} (y+3x+6)^2$$

3. Область D_2 (рис. 22): площу зафарбованої області можна знайти як значення подвійного інтеграла від сумісної функції щільності по області G_2.

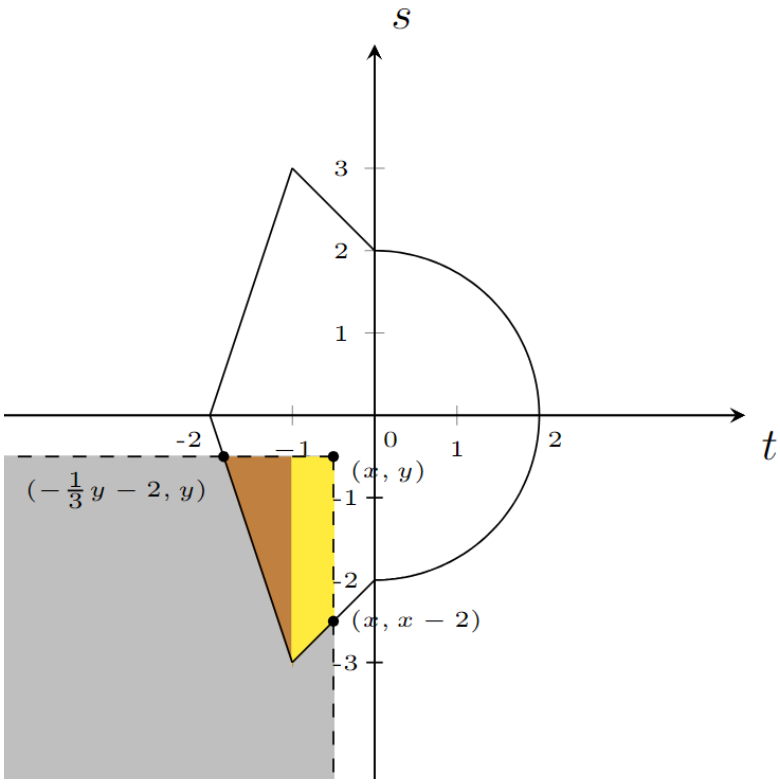


Рис. 22: Знаходження сумісної функції розподілу в області D_2

$$
\begin{aligned}
(x,y) \in D_2 \Rightarrow G_2 = G_2' \cup G_2'' = \{(t,s) \\
\in \mathbb{R}^2 : (-3 \le s < y) \wedge \left(-\frac{1}{3}s - 2 \le t < -1\right)\} \cup \{(t,s) \\
\in \mathbb{R}^2 : (-1 \le t < x) \wedge (t - 2 \le s < y)\} \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x,y) \\
= \frac{1}{2\pi + 8} \iint\limits_{G_2} dtds = \frac{1}{2\pi + 8}\left(\int_{-3}^{y} ds \int_{-\frac{1}{3}s-2}^{-1} dt + \int_{-1}^{x} dt \int_{t-2}^{y} ds\right) \\
= \frac{1}{2\pi + 8}\left(\int_{-3}^{y}\left(\frac{1}{3}s + 1\right)ds + \int_{-1}^{x}(y - t + 2)dt\right) \\
= \frac{1}{2\pi + 8}\left(\int_{-3}^{y}\left(\frac{1}{3}s + 1\right)ds + \int_{-1}^{x}(y + 2)dt - \int_{-1}^{x} tdt\right) \\
= \frac{1}{2\pi + 8}\left(\frac{y^2}{6} + y - \frac{3}{2} + 3 + xy + 2x + y + 2 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\right) = \\
= \frac{1}{2\pi + 8}\left(\frac{y^2}{6} + 2y - \frac{x^2}{2} + 2x + 4 + xy\right)
\end{aligned}
$$

4. Область D_3 (рис. 23): площу зафарбованої області можна знайти як значення подвійного інтеграла від сумісної функції щільності по області G_3.

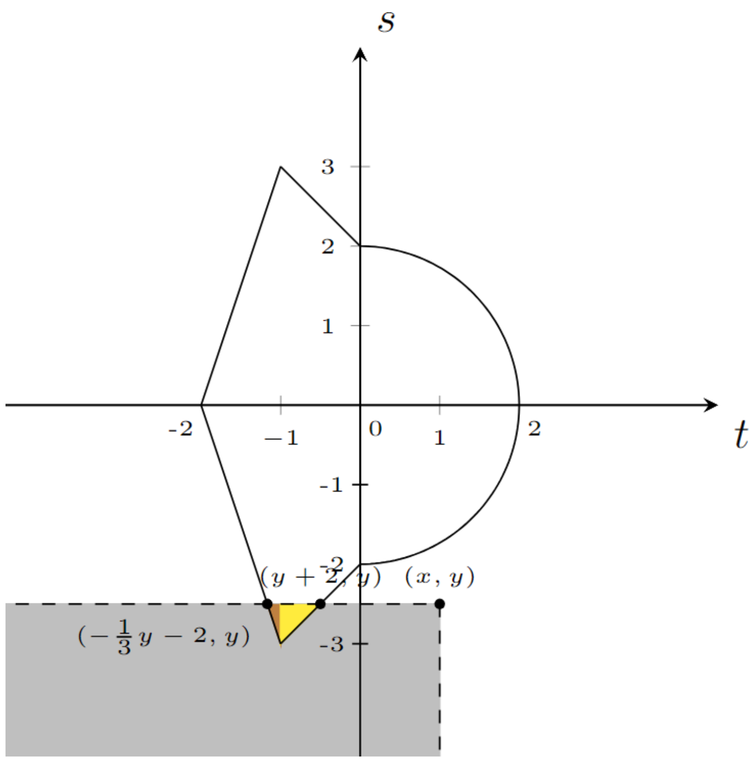


Рис. 23: Знаходження сумісної функції розподілу в області D_3.

$$(x, y) \in D_3 \Rightarrow G_3 = \{(t, s) \in \mathbb{R}^2 : (-3 \le s < y) \wedge \left(-\frac{1}{3}s - 2 \le t < s + 2\right)\}$$

$$\Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x, y) = \frac{1}{2\pi + 8} \iint\limits_{G_3} dtds = \frac{1}{2\pi + 8}\left(\int_{-3}^{y} ds \int_{-\frac{1}{3}s-2}^{s+2} dt\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi + 8}\left(\int_{-3}^{y}\left(\frac{4}{3}s + 4\right)ds\right) = \frac{1}{2\pi + 8}\left(\frac{2y^2}{3} + 4y - \frac{2}{3} \cdot 3^2 + 12\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi + 8}\left(\frac{2y^2}{3} + 4y + 6\right) = \frac{y^2 + 6y + 9}{3\pi + 12}$$

5. Область D_4 (рис. 24): площу зафарбованої області можна знайти як значення подвійного інтеграла від сумісної функції щільності по області G_4.

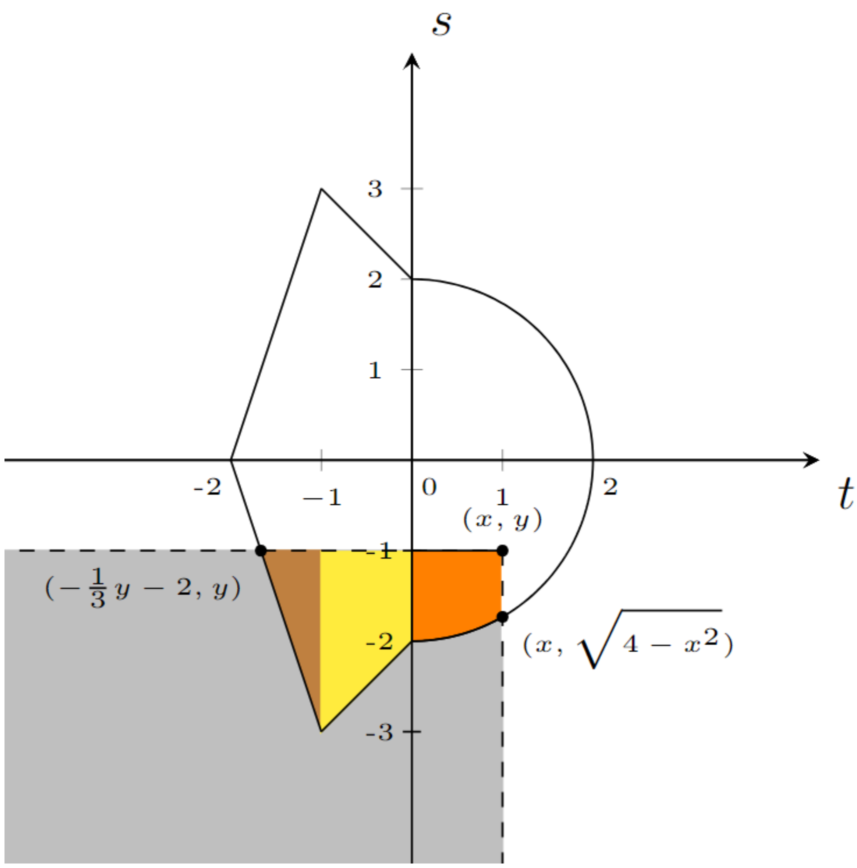


Рис. 24: Знаходження сумісної функції розподілу в області D_4.

$(x, y) \in D_4 \Rightarrow G_4 = G_4' \cup G_4'' \cup G_4''' = \{(t, s) \in \mathbb{R}^2 : (-3 \le s < y) \wedge \left(-\frac{1}{3}s - 2 \le t < -1\right)\} \cup \{(t, s) \in \mathbb{R}^2 : (-1 \le t < 0) \wedge (t - 2 \le s < y)\} \cup \{(t, s) \in \mathbb{R}^2 : (0 \le t < x) \wedge \left(-\sqrt{4 - t^2} \le s < y\right)\} \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x, y) = \frac{1}{2\pi+8} \iint_{G_4} dtds = \frac{1}{2\pi+8}\left(\int_{-3}^{y} ds \int_{-\frac{1}{3}s-2}^{-1} dt + \int_{-1}^{0} dt \int_{t-2}^{y} ds +\right.$

$$\int_0^x dt \int_{-\sqrt{4-t^2}}^{y} ds\Big) = \frac{1}{2\pi+8}\left(\int_{-3}^{y}\left(\frac{1}{3}s+1\right)ds + \int_{-1}^{0}(y-t+2)dt + \int_0^x\left(y+\sqrt{4-t^2}\right)dt\right) =$$

$$\frac{1}{2\pi+8}\left(\int_{-3}^{y}\left(\frac{1}{3}s+1\right)ds + \int_{-1}^{0}(y+2)dt - \int_{-1}^{0}tdt + \int_0^x ydt + (\pi+4)\int_0^x \frac{\sqrt{4-t^2}}{\pi+4}dt\right) =$$

$$\frac{1}{2\pi+8}\left(\frac{y^2}{6}+y-\frac{3}{2}+3+y+2+\frac{1}{2}+xy+(\pi+4)I_1\Big|_0^x\right) == \frac{1}{2\pi+8}\left(\frac{y^2}{6}+2y+4+xy+\right.$$

$$\left.2\,arcsin\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{x\sqrt{4-x^2}}{2}\right)$$

6. Область D_5 (рис. 25): площу зафарбованої області можна знайти як значення подвійного інтеграла від сумісної функції щільності по області G_5.

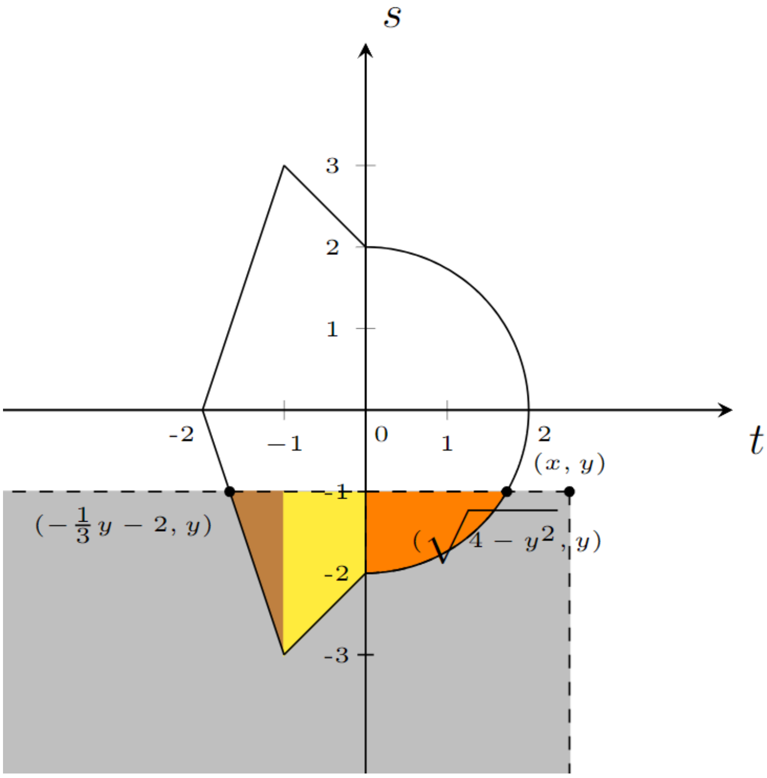


Рис. 25: Знаходження сумісної функції розподілу в області D_5.

$$(x,y) \in D_5 \Rightarrow G_5 = G_5' \cup G_5'' \cup G_5''' = \{(t,s) \in \mathbb{R}^2 : (-3 \le s < y) \wedge \left(-\frac{1}{3}s - 2 \le t < -1\right)\} \cup \{(t,s) \in \mathbb{R}^2 : (-1 \le t < 0) \wedge (t - 2 \le s < y)\} \cup \{(t,s) \in \mathbb{R}^2 : (-2 \le s < y) \wedge \left(0 \le t < \sqrt{4 - s^2}\right)\} \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x,y)$$

$$= \frac{1}{2\pi + 8} \iint\limits_{G_5} dtds$$

$$= \frac{1}{2\pi + 8}\left(\int_{-3}^{y} ds \int_{-\frac{1}{3}s-2}^{-1} dt + \int_{-1}^{0} dt \int_{t-2}^{y} ds + \int_{-2}^{y} ds \int_{0}^{\sqrt{4-s^2}} dt\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi + 8}\left(\int_{-3}^{y} \left(\frac{1}{3}s + 1\right) ds + \int_{-1}^{0} (y - t + 2)dt + \int_{-2}^{y} \sqrt{4 - s^2} ds\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi + 8}\left(\int_{-3}^{y} \left(\frac{1}{3}s + 1\right) ds + \int_{-1}^{0} (y + 2)dt - \int_{-1}^{0} tdt + \right.$$

$$\left. + (\pi + 4) \int_{-2}^{y} \frac{\sqrt{4 - s^2}}{\pi + 4} ds\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi + 8}\left(\frac{y^2}{6} + y - \frac{3}{2} + 3 + y + 2 + \frac{1}{2} + (\pi + 4) I_1 \Big|_{-2}^{y}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi + 8}\left(\frac{y^2}{6} + 2y + 4 + 2\,arcsin\left(\frac{y}{2}\right) + \frac{y\sqrt{4 - y^2}}{2} - 2\,arcsin\left(\frac{-2}{2}\right) \right.$$

$$\left. - \frac{(-2)\sqrt{4 - (-2)^2}}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi + 8}\left(\frac{y^2}{6} + 2y + 4 + 2\,arcsin\left(\frac{y}{2}\right) + \frac{y\sqrt{4 - y^2}}{2} + \pi\right)$$

7. Область D_6 (рис. 26): площу зафарбованої області можна знайти як значення подвійного інтеграла від сумісної функції щільності по області G_6.

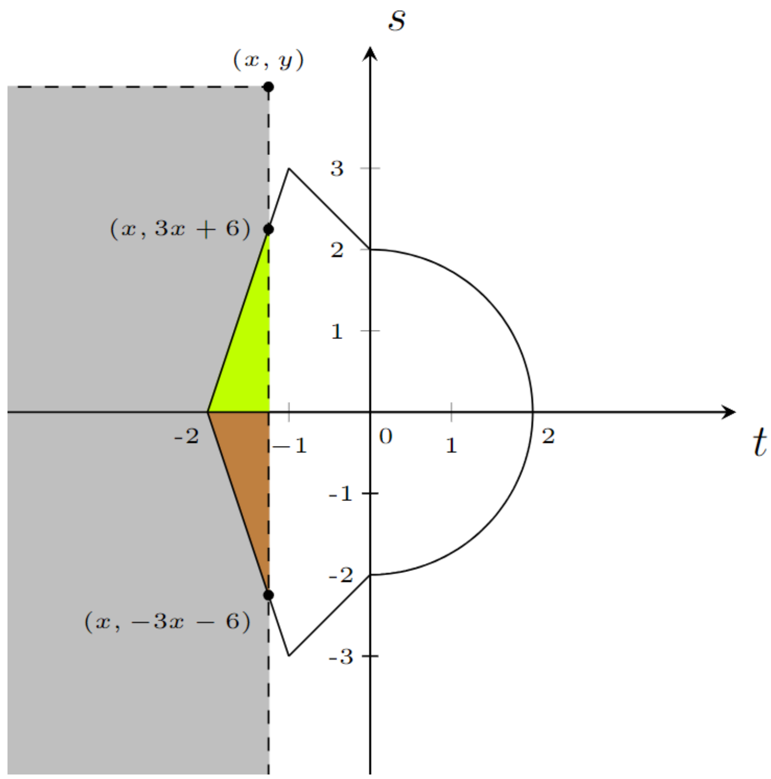


Рис. 26: Знаходження сумісної функції розподілу в області D_6.

$$(x,y) \in D_6 \Rightarrow G_6 = \{(t,s) \in \mathbb{R}^2 : (-2 \le t < x) \wedge (-3t-6 \le s < 3t+6)\} \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x,y)$$

$$= \frac{1}{2\pi+8} \iint\limits_{G_6} dtds = \frac{1}{2\pi+8} \int_{-2}^{x} dt \int_{-3t-6}^{3t+6} ds = \frac{1}{2\pi+8} \int_{-2}^{x} (6t+12)dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi+8}(3x^2+12x-12+24) = \frac{3}{2\pi+8}(x+2)^2$$

8. Область D_7 (рис. 27): площу зафарбованої області можна знайти як значення подвійного інтеграла від сумісної функції щільності по області G_7

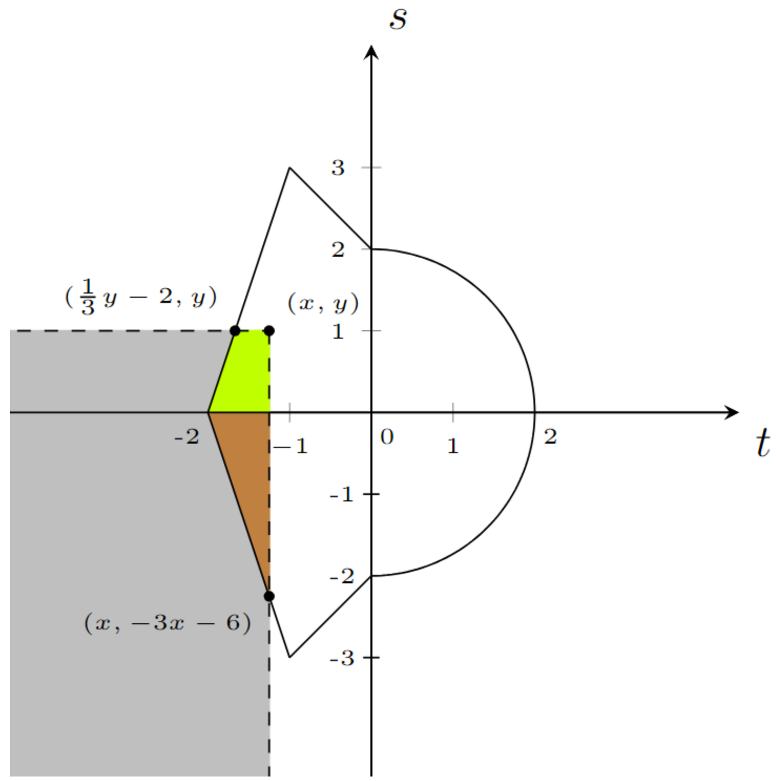


Рис. 27: Знаходження сумісної функції розподілу в області D_7.

$$(x,y) \in D_7 \Rightarrow G_7 = G_7' \cup G_7'' = \{(t,s) \in \mathbb{R}^2 : (-2 \le t < x) \wedge (-3t-6 \le s < 0)\} \cup \{(t,s) \in \mathbb{R}^2 : (0 \le s < y) \wedge \left(\frac{1}{3}s - 2 \le t < x\right)\} \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x,y) =$$

$$= \frac{1}{2\pi+8}\iint\limits_{G_7} dtds = \frac{1}{2\pi+8}\left(\int_{-2}^{x} dt \int_{-3t-6}^{0} ds + \int_{0}^{y} ds \int_{\frac{1}{3}s-2}^{x} dt\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi+8}\left(\int_{-2}^{x}(3t+6)dt + \int_{0}^{y}\left(x - \frac{1}{3}s + 2\right)ds\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi+8}\left(\frac{3x^2}{2} + 6x - 6 + 12 + xy - \frac{y^2}{6} + 2y\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi+8}\left(\frac{3x^2}{2} + 6x + 6 + xy - \frac{y^2}{6} + 2y\right)$$

9. Область D_8 (рис. 28): площу зафарбованої області можна знайти як значення подвійного інтеграла від сумісної функції щільності по області G_8

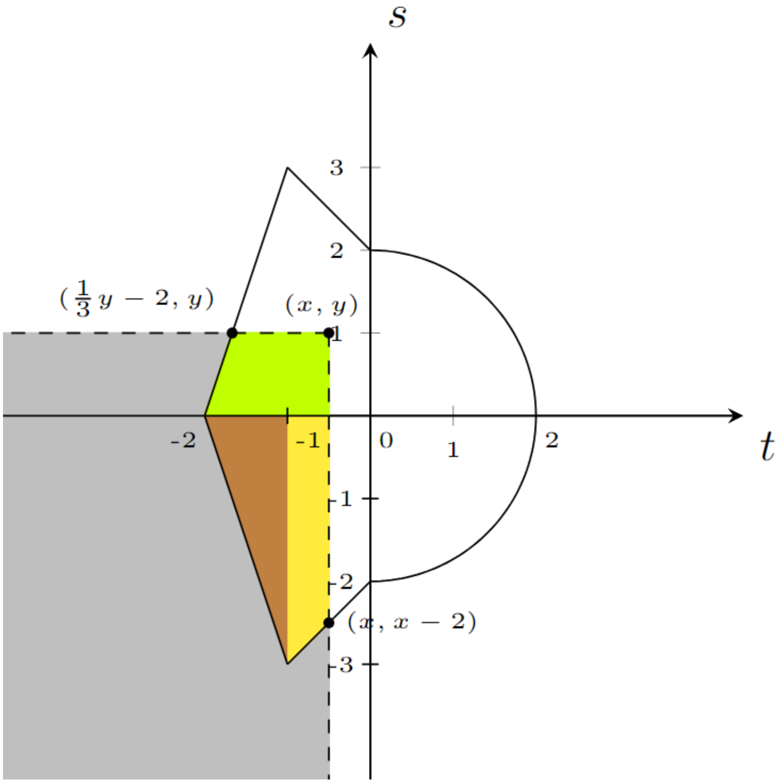


Рис. 28: Знаходження сумісної функції розподілу в області D_8.

$$(x,y) \in D_8 \Rightarrow G_8 = G_8' \cup G_8'' \cup G_8''' = \{(t,s) \in \mathbb{R}^2 : (-2 \le t < -1) \wedge (-3t-6 \le s < 0)\} \cup \{(t,s) \in \mathbb{R}^2 : (-1 \le t < x) \wedge (t-2 \le s < 0)\} \cup \{(t,s) \in \mathbb{R}^2 : (0 \le s < y) \wedge \left(\frac{1}{3}s - 2 \le t < x\right)\} \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x,y) =$$

$$= \frac{1}{2\pi + 8} \iint\limits_{G_8} dtds =$$

$$= \frac{1}{2\pi + 8}\left(\int_{-2}^{-1} dt \int_{-3t-6}^{0} ds + \int_{-1}^{x} dt \int_{t-2}^{0} ds + \int_{0}^{y} ds \int_{\frac{1}{3}s-2}^{x} dt\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi + 8}\left(\int_{-2}^{-1} (3t+6)dt + \int_{-1}^{x} (-t+2)dt + \int_{0}^{y} \left(x - \frac{1}{3}s + 2\right) ds\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi + 8}\left(\frac{3}{2} - 6 - 6 + 12 - \frac{x^2}{2} + 2x + \frac{1}{2} + 2 + xy - \frac{y^2}{6} + 2y\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi + 8}\left(-\frac{x^2}{2} + 2x + 4 + xy - \frac{y^2}{6} + 2y\right)$$

10. Область D_9 (рис. 29): площу зафарбованої області можна знайти як значення подвійного інтеграла від сумісної функції щільності по області G_9

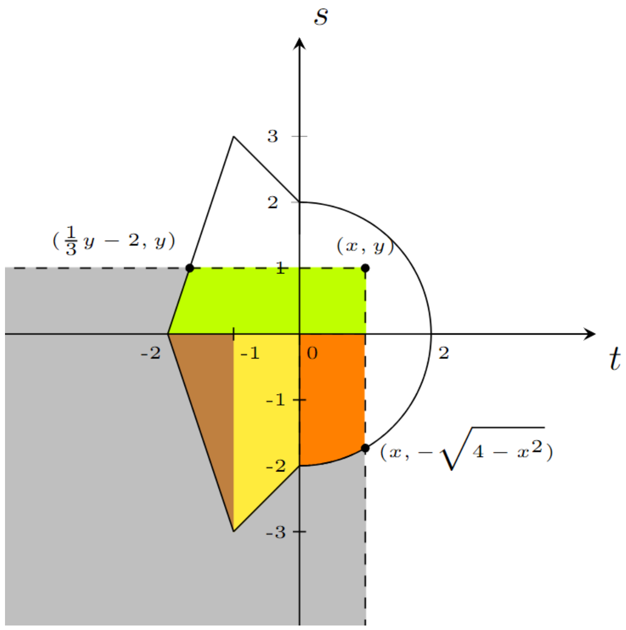


Рис. 29: Знаходження сумісної функції розподілу в області D_9.

$$(x,y)\in D_9 \Rightarrow G_9 = G_9' \cup G_9'' \cup G_9''' \cup G_9'''' = \{(t,s) \in \mathbb{R}^2 : (-2 \le t < -1) \wedge (-3t-6 \le s < 0)\} \cup \{(t,s) \in \mathbb{R}^2 : (-1 \le t < 0) \wedge (t-2 \le s < 0)\} \cup \{(t,s) \in \mathbb{R}^2 : (0 \le t < x) \wedge \left(-\sqrt{4-t^2} \le s < 0\right)\} \cup \{(t,s) \in \mathbb{R}^2 : (0 \le s < y) \wedge \left(\frac{1}{3}s - 2 \le t < x\right)\} \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x,y) == \frac{1}{2\pi+8}\iint_{G_9} dtds =$$

$$= \frac{1}{2\pi+8}\left(\int_{-2}^{-1} dt \int_{-3t-6}^{0} ds + \int_{-1}^{0} dt \int_{t-2}^{0} ds + \int_{0}^{x} dt \int_{-\sqrt{4-t^2}}^{0} ds + \int_{0}^{y} ds \int_{\frac{1}{3}s-2}^{x} dt\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi+8}\left(\int_{-2}^{-1} (3t+6)dt + \int_{-1}^{0} (-t+2)dt + \int_{0}^{x} \sqrt{4-t^2}dt + \int_{0}^{y} \left(x - \frac{1}{3}s + 2\right) ds\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi+8}\left(\frac{3}{2} - 6 - 6 + 12 + \frac{1}{2} + 2 + 2\,arcsin\frac{x}{2} + \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + xy - \frac{y^2}{6} + 2y\right) == \frac{1}{2\pi+8}\left(2\,arcsin\frac{x}{2} + \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + 4 + xy - \frac{y^2}{6} + 2y\right)$$

11. Область D_{10} (рис. 30): площу зафарбованої області можна знайти як значення подвійного інтеграла від сумісної функції щільності по області G_{10}

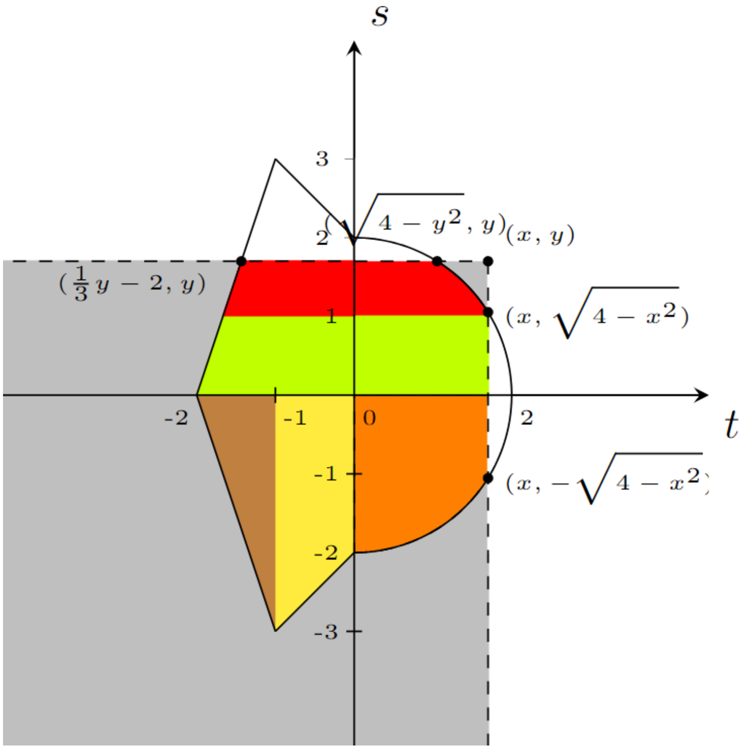


Рис. 30: Знаходження сумісної функції розподілу в області D_{10}.

$$(x,y) \in D_{10} \Rightarrow G_{10} = G'_{10} \cup G''_{10} \cup G'''_{10} \cup G''''_{10} \cup G'''''_{10} = \{(t,s)$$

$$\in \mathbb{R}^2 : (-2 \le t < -1) \wedge (-3t - 6 \le s < 0)\} \cup \{(t,s)$$

$$\in \mathbb{R}^2 : (-1 \le t < 0) \wedge (t - 2 \le s < 0)\} \cup \{(t,s)$$

$$\in \mathbb{R}^2 : (0 \le t < x) \wedge \left(-\sqrt{4 - t^2} \le s < 0\right)\} \cup \{(t,s)$$

$$\in \mathbb{R}^2 : \left(0 \le s < \sqrt{4 - x^2}\right) \wedge \left(\frac{1}{3}s - 2 \le t < x\right)\} \cup \{(t,s)$$

$$\in \mathbb{R}^2 : \left(\sqrt{4 - x^2} \le s < \mathrm{y}\right) \wedge \left(\frac{1}{3}s - 2 \le t < \sqrt{4 - s^2}\right)\} \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x,y)$$

$$== \frac{1}{2\pi + 8} \iint\limits_{G_{10}} dtds =$$

$$= \frac{1}{2\pi + 8}\left(\int_{-2}^{-1} dt \int_{-3t-6}^{0} ds + \int_{-1}^{0} dt \int_{t-2}^{0} ds + \int_{0}^{x} dt \int_{-\sqrt{4-t^2}}^{0} ds + \right.$$

$$\left. + \int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} ds \int_{\frac{1}{3}s-2}^{x} dt + \int_{\sqrt{4-x^2}}^{y} ds \int_{\frac{1}{3}s-2}^{\sqrt{4-s^2}} dt \right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi + 8}\left(\int_{-2}^{-1} (3t + 6)dt + \int_{-1}^{0} (-t + 2)dt + \int_{0}^{x} \sqrt{4 - t^2}dt + \right.$$

$$\left. + \int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} \left(x - \frac{1}{3}s + 2\right) ds + \int_{\sqrt{4-x^2}}^{y} \left(\sqrt{4 - s^2} - \frac{1}{3}s + 2\right) ds \right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi + 8}\left(\int_{-2}^{-1} (3t + 6)dt + \int_{-1}^{0} (-t + 2)dt + \int_{0}^{x} \sqrt{4 - t^2}dt + \right.$$

$$\left. + \int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} xds + \int_{\sqrt{4-x^2}}^{y} \sqrt{4 - s^2}ds + \int_{0}^{y} \left(-\frac{1}{3}s + 2\right) ds \right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi + 8}\left(\frac{3}{2} - 6 - 6 + 12 + \frac{1}{2} + 2 + 2\,arcsin\frac{x}{2} + \frac{x\sqrt{4 - x^2}}{2}\right.$$

$$+ x\sqrt{4 - x^2} + 2\,arcsin\frac{y}{2} + \frac{y\sqrt{4 - y^2}}{2} - 2\,arcsin\frac{\sqrt{4 - x^2}}{2}$$

$$\left. - \frac{|x|\sqrt{4 - x^2}}{2} - \frac{y^2}{6} + 2y\right) = [\text{оскільки } x > 0] =$$

$$= \frac{1}{2\pi + 8}\left(2\,arcsin\frac{x}{2} + x\sqrt{4 - x^2} + 4 + 2\,arcsin\frac{y}{2} + \frac{y\sqrt{4 - y^2}}{2}\right.$$

$$\left. - -2\,arcsin\frac{\sqrt{4 - x^2}}{2} - \frac{y^2}{6} + 2y\right)$$

12. Область D_{11} (рис. 31): площу зафарбованої області можна знайти як значення подвійного інтеграла від сумісної функції щільності по області G_{11}

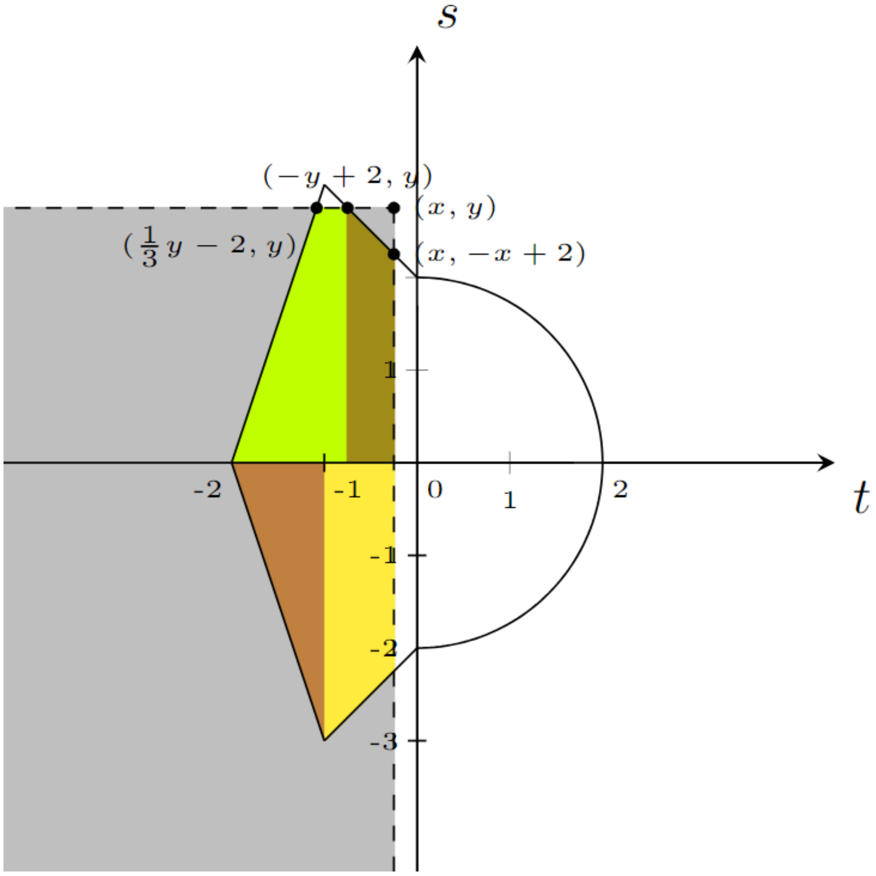


Рис. 31: Знаходження сумісної функції розподілу в області D_{11}.

$$(x,y) \in D_{11} \Rightarrow G_{11} = G'_{11} \cup G''_{11} \cup G'''_{11} \cup G''''_{11} = \{(t,s) \in \mathbb{R}^2 : (-2 \le t < -1) \wedge (-3t-6 \le s < 0)\} \cup \{(t,s) \in \mathbb{R}^2 : (-1 \le t < x) \wedge (t-2 \le s < 0)\} \cup \{(t,s) \in \mathbb{R}^2 : (0 \le s < y) \wedge \left(\frac{1}{3}s - 2 \le t < -\mathrm{y} + 2\right)\} \cup \{(t,s) \in \mathbb{R}^2 : (-y+2 \le t < x) \wedge (0 \le s < -t+2)\} \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x,y) =$$

$$= \frac{1}{2\pi + 8} \iint\limits_{G_{11}} dtds =$$

$$= \frac{1}{2\pi + 8}\left(\int_{-2}^{-1} dt \int_{-3t-6}^{0} ds + \int_{-1}^{x} dt \int_{t-2}^{0} ds + \int_{0}^{y} ds \int_{\frac{1}{3}s-2}^{-\mathrm{y}+2} dt + \int_{-y+2}^{x} dt \int_{0}^{-\mathrm{t}+2} ds\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi + 8}\left(\int_{-2}^{-1} (3t+6)dt + \int_{-1}^{x} (-t+2)dt + \int_{0}^{y}\left(-y - \frac{1}{3}s + 4\right)ds + \int_{-y+2}^{x} (-\mathrm{t}+2)dt\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi + 8}\left(\frac{3}{2} - 6 - 6 + 12 - \frac{x^2}{2} + 2x + \frac{1}{2} + 2 - y^2 - \frac{y^2}{6} + 4y - \frac{x^2}{2} + 2x + \frac{(y-2)^2}{2} + 2y - 4\right) = \frac{1}{2\pi + 8}\left(2 - \mathrm{x}^2 + 4x + 4y - \frac{2y^2}{3}\right)$$

13. Область D_{12} (рис. 32): площу зафарбованої області можна знайти як значення подвійного інтеграла від сумісної функції щільності по області G_{12}

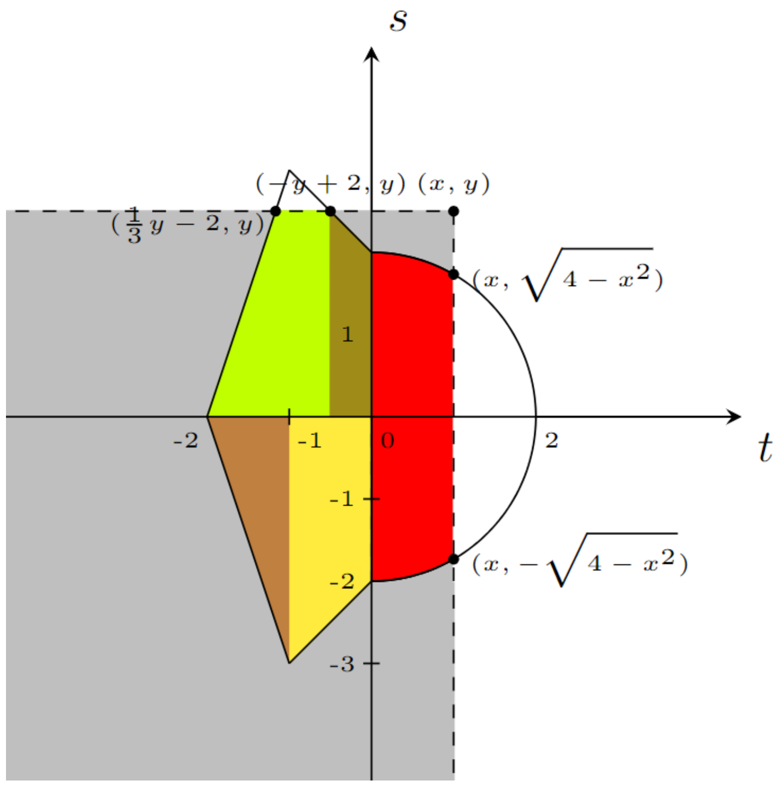


Рис. 32: Знаходження сумісної функції розподілу в області D_{12}.

$$(x,y) \in D_{12} \Rightarrow G_{12} = G'_{12} \cup G''_{12} \cup G'''_{12} \cup G''''_{12} \cup G'''''_{12} = \{(t,s) \in \mathbb{R}^2 : (-2 \le t < -1) \wedge (-3t-6 \le s < 0)\} \cup \{(t,s) \in \mathbb{R}^2 : (-1 \le t < 0) \wedge (t-2 \le s < 0)\} \cup \{(t,s) \in \mathbb{R}^2 : (0 \le s < y) \wedge \left(\frac{1}{3}s - 2 \le t < -\mathrm{y} + 2\right)\} \cup \{(t,s) \in \mathbb{R}^2 : (-y+2 \le t < 0) \wedge (0 \le s < -t+2)\} \cup \{(t,s) \in \mathbb{R}^2 : (0 \le t < x) \wedge \left(-\sqrt{4-t^2} \le s < \sqrt{4-t^2}\right)\} \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x,y) =$$

$$= \frac{1}{2\pi + 8} \iint_{G_{12}} dtds =$$

$$= \frac{1}{2\pi + 8}\left(\int_{-2}^{-1} dt \int_{-3t-6}^{0} ds + \int_{-1}^{0} dt \int_{t-2}^{0} ds + \int_{0}^{y} ds \int_{\frac{1}{3}s-2}^{-\mathrm{y}+2} dt + \int_{-y+2}^{0} dt \int_{0}^{-\mathrm{t}+2} ds + \int_{0}^{x} dt \int_{-\sqrt{4-t^2}}^{\sqrt{4-t^2}} ds\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi + 8}\left(\int_{-2}^{-1} (3t+6)dt + \int_{-1}^{0} (-t+2)dt + \int_{0}^{y} \left(-y - \frac{1}{3}s + 4\right) ds + \int_{-y+2}^{0} (-\mathrm{t}+2)dt + 2\int_{0}^{x} \sqrt{4-t^2}dt\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi + 8}\left(\frac{3}{2} - 6 - 6 + 12 + \frac{1}{2} + 2 - y^2 - \frac{y^2}{6} + 4y + \frac{(y-2)^2}{2} + 2y - 4 + 4\arcsin\frac{\mathrm{x}}{2} + \mathrm{x}\sqrt{4-\mathrm{x}^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi + 8}\left(2 + 4y - \frac{2y^2}{3} + 4\arcsin\frac{\mathrm{x}}{2} + \mathrm{x}\sqrt{4-\mathrm{x}^2}\right)$$

14. Область D_{13} (рис. 33): площу зафарбованої області можна знайти як значення подвійного інтеграла від сумісної функції щільності по області G_{13}

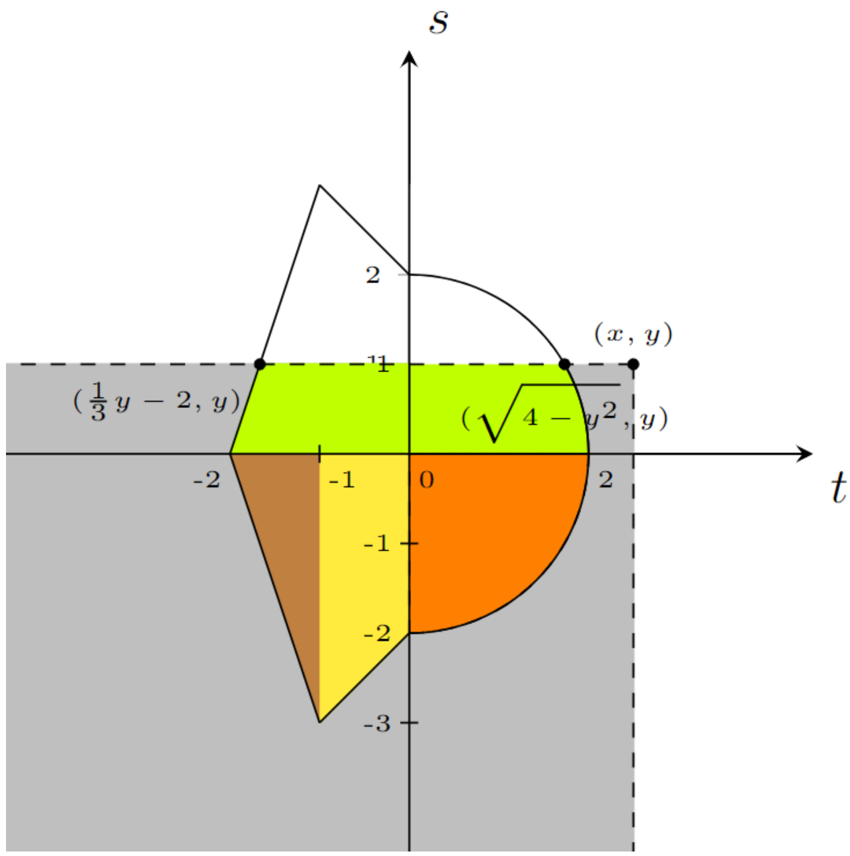


Рис. 33: Знаходження сумісної функції розподілу в області D_{13}.

$$(x,y)\in D_{13}\Rightarrow G_{13}=G'_{13}\cup G''_{13}\cup G'''_{13}\cup G''''_{13}=\{(t,s)\in\mathbb{R}^2:(-2\le t<-1)\wedge(-3t-6\le s<0)\}\cup\{(t,s)\in\mathbb{R}^2:(-1\le t<0)\wedge(t-2\le s<0)\}\cup\{(t,s)\in\mathbb{R}^2:(0\le s<y)\wedge\left(\frac{1}{3}s-2\le t<\sqrt{4-s^2}\right)\}\cup\{(t,s)\in\mathbb{R}^2:(-2\le s<0)\wedge\left(0\le t<\sqrt{4-s^2}\right)\}\Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x,y)=$$

$$=\frac{1}{2\pi+8}\iint\limits_{G_{13}}dtds=$$

$$=\frac{1}{2\pi+8}\left(\int_{-2}^{-1}dt\int_{-3t-6}^{0}ds+\int_{-1}^{0}dt\int_{t-2}^{0}ds+\int_{0}^{y}ds\int_{\frac{1}{3}s-2}^{\sqrt{4-s^2}}dt+\int_{-2}^{0}ds\int_{0}^{\sqrt{4-s^2}}dt\right)=$$

$$=\frac{1}{2\pi+8}\left(\int_{-2}^{-1}(3t+6)dt+\int_{-1}^{0}(-t+2)dt+\int_{0}^{y}\left(\sqrt{4-s^2}-\frac{1}{3}s+2\right)ds+\int_{-2}^{0}\sqrt{4-s^2}ds\right)=$$

$$=\frac{1}{2\pi+8}\left(\frac{3}{2}-6-6+12+\frac{1}{2}+2+2\,arcsin\frac{y}{2}+\frac{y\sqrt{4-y^2}}{2}-\frac{y^2}{6}+2y+2\arcsin\frac{0}{2}+2\sqrt{4-0^2}+2\arcsin\frac{2}{2}-2\sqrt{4-2^2}\right)$$

$$=\frac{1}{2\pi+8}\left(4-\frac{y^2}{6}+2y+2\,arcsin\frac{y}{2}+\frac{y\sqrt{4-y^2}}{2}+\pi\right)$$

15. Область D_{14} (рис. 34): площу зафарбованої області можна знайти як значення подвійного інтеграла від сумісної функції щільності по області G_{14}

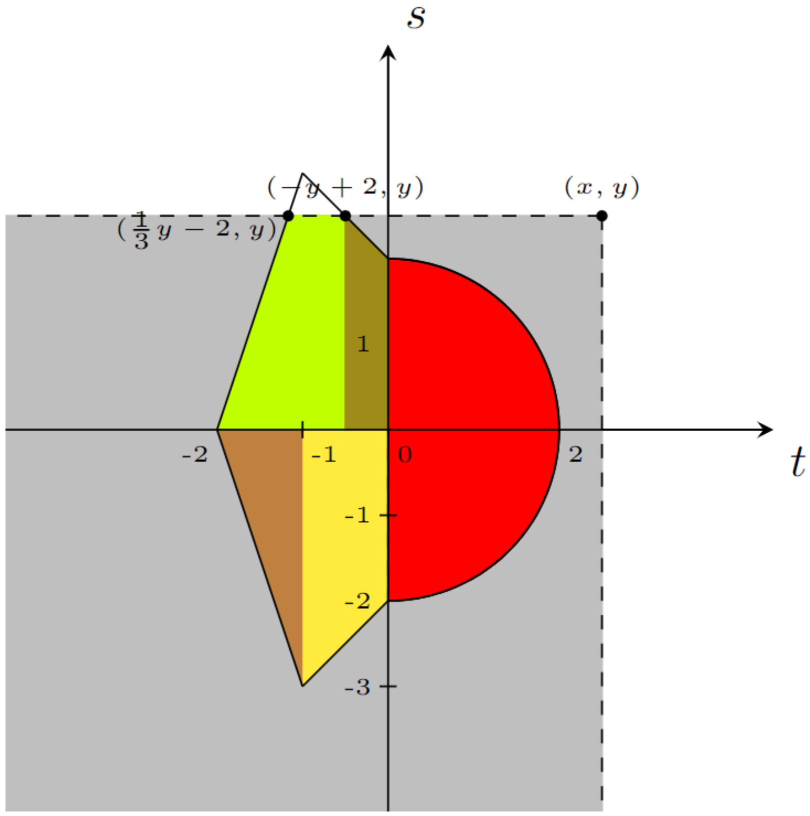


Рис. 34: Знаходження сумісної функції розподілу в області D_{14}.

$$(x,y) \in D_{14} \Rightarrow G_{14} = G'_{14} \cup G''_{14} \cup G'''_{14} \cup G''''_{14} \cup G'''''_{14} = \{(t,s) \in \mathbb{R}^2 : (-2 \le t < -1) \wedge (-3t - 6 \le s < 0)\} \cup \{(t,s) \in \mathbb{R}^2 : (-1 \le t < 0) \wedge (t - 2 \le s < 0)\} \cup \{(t,s) \in \mathbb{R}^2 : (0 \le s < y) \wedge \left(\frac{1}{3}s - 2 \le t < -\mathrm{y} + 2\right)\} \cup \{(t,s) \in \mathbb{R}^2 : (-y + 2 \le t < 0) \wedge (0 \le s < -t + 2)\} \cup \{(t,s) \in \mathbb{R}^2 : (0 \le t < 2) \wedge \left(-\sqrt{4 - t^2} \le s < \sqrt{4 - t^2}\right)\} \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x,y) =$$

$$= \frac{1}{2\pi + 8} \iint\limits_{G_{14}} dtds =$$

$$= \frac{1}{2\pi + 8}\left(\int_{-2}^{-1} dt \int_{-3t-6}^{0} ds + \int_{-1}^{0} dt \int_{t-2}^{0} ds + \int_{0}^{y} ds \int_{\frac{1}{3}s-2}^{-\mathrm{y}+2} dt + \int_{-y+2}^{0} dt \int_{0}^{-\mathrm{t}+2} ds + \int_{0}^{2} dt \int_{-\sqrt{4-t^2}}^{\sqrt{4-t^2}} ds\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi + 8}\left(\int_{-2}^{-1} (3t + 6)dt + \int_{-1}^{0} (-t + 2)dt + \int_{0}^{y} \left(-y - \frac{1}{3}s + 4\right) ds + \int_{-y+2}^{0} (-\mathrm{t} + 2)dt + 2\int_{0}^{2} \sqrt{4 - t^2} dt\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi + 8}\left(\frac{3}{2} - 6 - 6 + 12 + \frac{1}{2} + 2 - y^2 - \frac{y^2}{6} + 4y + \frac{(y-2)^2}{2} + 2y - 4 + 4\arcsin\frac{2}{2} + 2\sqrt{4 - 2^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi + 8}\left(2 + 2\pi + 4y - \frac{2y^2}{3}\right)$$

16. Область D_{15} (рис. 35): площу зафарбованої області можна знайти як значення подвійного інтеграла від сумісної функції щільності по області G_{15}

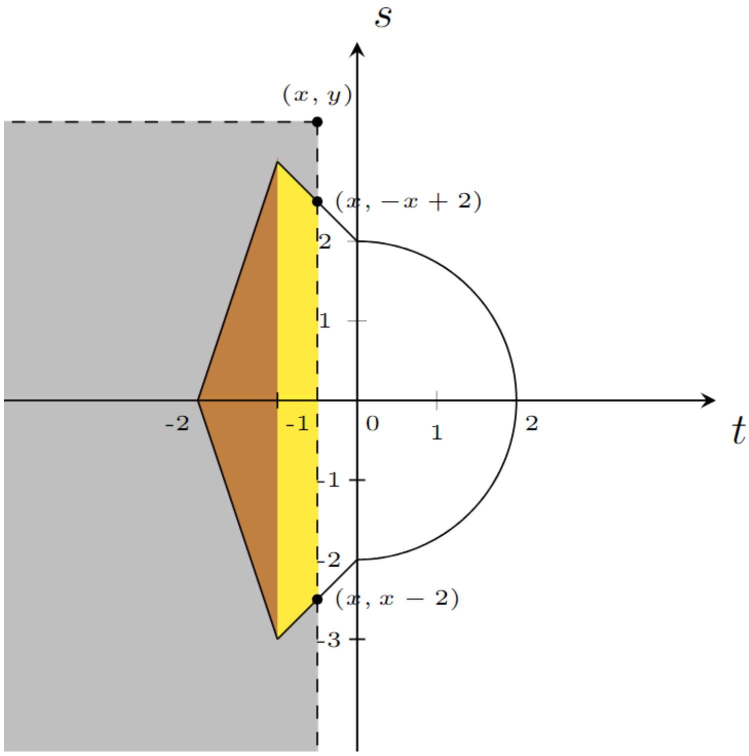


Рис. 35: Знаходження сумісної функції розподілу в області D_{15}.

$(x, y) \in D_{15} \Rightarrow G'_{15} \cup G''_{15} = (t, s)$
$\in \mathbb{R}^2 \colon (-2 \le t < -1) \wedge (-3t - 6 \le s < 3t + 6) \cup (t, s)$
$\in \mathbb{R}^2 \colon (-1 \le t < x) \wedge (t - 2 \le s < -t + 2) \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x, y) =$

$$= \frac{1}{2\pi + 8} \iint\limits_{G_{15}} dtds = \frac{1}{2\pi + 8}\left(\int_{-2}^{-1} dt \int_{-3t-6}^{3t+6} ds + \int_{-1}^{x} dt \int_{t-2}^{-t+2} ds\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi + 8}\left(\int_{-2}^{-1} (6t + 12)dt + \int_{-1}^{x} (-2t + 4)dt\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi + 8}(3 \cdot (-1)^2 - 12 - 12 + 24 - x^2 + 4x + 1 + 4) =$$

$$= \frac{1}{2\pi + 8}(-x^2 + 4x + 8)$$

17. Область D_{16} (рис. 36): площу зафарбованої області можна знайти як значення подвійного інтеграла від сумісної функції щільності по області G_{16}

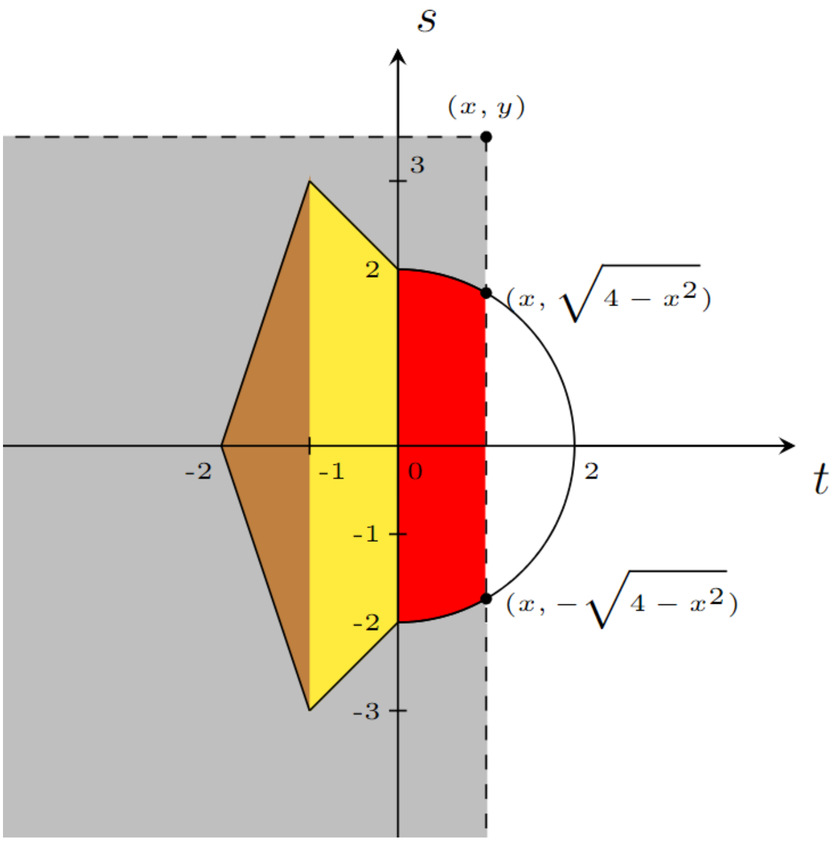


Рис. 36: Знаходження сумісної функції розподілу в області D_{16}.

$$(x,y) \in D_{16} \Rightarrow G'_{16} \cup G''_{16} \cup G'''_{16} = (t,s)$$
$$\in \mathbb{R}^2: (-2 \le t < -1) \wedge (-3t - 6 \le s < 3t + 6) \cup (t,s)$$
$$\in \mathbb{R}^2: (-1 \le t < 0) \wedge (t - 2 \le s < -t + 2) \cup (t,s)$$
$$\in \mathbb{R}^2: (0 \le t < x) \wedge \left(-\sqrt{4 - \mathrm{t}^2} \le s < \sqrt{4 - \mathrm{t}^2}\right) \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x,y) =$$

$$= \frac{1}{2\pi + 8} \iint\limits_{G_{16}} dtds =$$
$$= \frac{1}{2\pi + 8}\left(\int_{-2}^{-1} dt \int_{-3t-6}^{3t+6} ds + \int_{-1}^{0} dt \int_{t-2}^{-t+2} ds + \int_{0}^{x} dt \int_{-\sqrt{4-\mathrm{t}^2}}^{\sqrt{4-\mathrm{t}^2}} ds\right) =$$
$$= \frac{1}{2\pi + 8}\left(\int_{-2}^{-1} (6t + 12)dt + \int_{-1}^{0} (-2t + 4)dt + 2\int_{0}^{x} \sqrt{4 - t^2} dt\right)$$
$$=$$
$$= \frac{1}{2\pi + 8}\left(3 \cdot (-1)^2 - 12 - 12 + 24 + 1 + 4 + 4\, arcsin \frac{x}{2}\right.$$
$$\left. + x\sqrt{4 - x^2}\right) = \frac{1}{2\pi + 8}\left(4\, arcsin \frac{x}{2} + x\sqrt{4 - x^2} + 8\right)$$

18. Область D_{17} (рис. 37): площу зафарбованої області можна знайти як значення подвійного інтеграла від сумісної функції щільності по області G_{17}

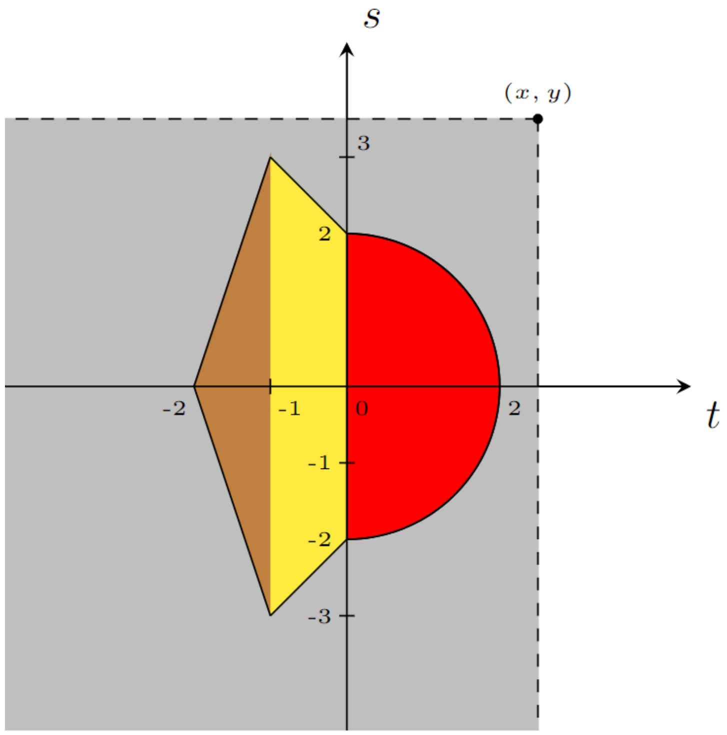


Рис. 37: Знаходження сумісної функції розподілу в області D_{17}.

$$(x,y)\in D_{17}\Rightarrow G'_{17}\cup G''_{17}\cup G'''_{17}=\{(t,s)\in\mathbb{R}^2:(-2\le t<-1)\wedge(-3t-6\le s<3t+6)\}\cup\{(t,s)\in\mathbb{R}^2:(-1\le t<0)\wedge(t-2\le s<-t+2)\}\cup\{(t,s)\in\mathbb{R}^2:(0\le t<2)\wedge\left(-\sqrt{4-\mathrm{t}^2}\le s<\sqrt{4-\mathrm{t}^2}\right)\}=\mathrm{G}_{17}=\mathrm{G}$$

$$\Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x,y)=\frac{1}{2\pi+8}\iint\limits_{G_{17}}dtds=\frac{S(G)}{2\pi+8}=\frac{2\pi+8}{2\pi+8}$$

Отже, маємо сумісну функцію розподілу:

$$F_{\vec{\xi}}(x,y)=\begin{cases}0,(x,y)\in D_0\\ \frac{1}{12\pi+48}(y+3x+6)^2,(x,y)\in D_1\\ \frac{1}{2\pi+8}\left(\frac{y^2}{6}+2y-\frac{x^2}{2}+2x+4+xy\right),(x,y)\in D_2\\ \frac{y^2+6y+9}{3\pi+12},(x,y)\in D_3\\ \frac{1}{2\pi+8}\left(\frac{y^2}{6}+2y+4+xy+2\,arcsin\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{x\sqrt{4-x^2}}{2}\right),(x,y)\in D_4\\ \frac{1}{2\pi+8}\left(\frac{y^2}{6}+2y+4+2\,arcsin\left(\frac{y}{2}\right)+\frac{y\sqrt{4-y^2}}{2}+\pi\right),(x,y)\in D_5\\ \frac{3}{2\pi+8}(x+2)^2,(x,y)\in D_6\\ \frac{1}{2\pi+8}\left(\frac{3x^2}{2}+6x+6+xy-\frac{y^2}{6}+2y\right),(x,y)\in D_7\\ \frac{1}{2\pi+8}\left(-\frac{x^2}{2}+2x+4+xy-\frac{y^2}{6}+2y\right),(x,y)\in D_8\\ \frac{1}{2\pi+8}\left(2\,arcsin\frac{x}{2}+\frac{x\sqrt{4-x^2}}{2}+4+xy-\frac{y^2}{6}+2y\right),(x,y)\in D_9\\ \frac{1}{2\pi+8}\left(2\,arcsin\frac{x}{2}+x\sqrt{4-x^2}+4+2\,arcsin\frac{y}{2}+\frac{y\sqrt{4-y^2}}{2}-2\,arcsin\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}-\frac{y^2}{6}+2y\right),(x,y)\in D_{10}\\ \frac{1}{2\pi+8}\left(2-\mathrm{x}^2+4x+4y-\frac{2y^2}{3}\right),(x,y)\in D_{11}\\ \frac{1}{2\pi+8}\left(2+4y-\frac{2y^2}{3}+4\,\mathrm{arcsin}\frac{\mathrm{x}}{2}+\mathrm{x}\sqrt{4-\mathrm{x}^2}\right),(x,y)\in D_{12}\\ \frac{1}{2\pi+8}\left(4-\frac{y^2}{6}+2y+2\,arcsin\frac{y}{2}+\frac{y\sqrt{4-y^2}}{2}+\pi\right),(x,y)\in D_{13}\\ \frac{1}{2\pi+8}\left(2+2\pi+4y-\frac{2y^2}{3}\right),(x,y)\in D_{14}\\ \frac{1}{2\pi+8}(-x^2+4x+8),(x,y)\in D_{15}\\ \frac{1}{2\pi+8}\left(4\,arcsin\frac{x}{2}+x\sqrt{4-x^2}+8\right),(x,y)\in D_{16}\\ 1,(x,y)\in D_{17}\end{cases}$$

Перевірка неперервності отриманої сумісної функції розподілу на лініях стику областей наведена в додатку 1.

4. Математичне сподівання координат та кореляційна матриця.

Математичні сподівання координат неперервного випадкового вектора знаходяться за формулами:

$$\mathbb{E}\xi_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\xi_1}(x)dx\,;$$

$$\mathbb{E}\xi_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_{\xi_2}(y)dy\,;$$

Використаємо раніше знайдені маргінальні функції щільності розподілу (5) та (6):

$$\mathbb{E}\xi_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\xi_1}(x)dx$$

$$= \int_{-2}^{-1} \frac{3x^2+6x}{\pi+4}dx + \int_{-1}^{0} \frac{-x^2+2x}{\pi+4}dx + \int_{0}^{2} \frac{x\sqrt{4-x^2}}{\pi+4}dx = \int_{-2}^{-1} \frac{3x^2+6x}{\pi+4}dx$$

$$+ \int_{-1}^{0} \frac{-x^2+2x}{\pi+4}dx - \frac{1}{2}\int_{0}^{2} \frac{\sqrt{4-x^2}}{\pi+4}d(4-x^2) =$$

$$= \left.\frac{x^3+3x^2}{\pi+4}\right|_{-2}^{-1} + \left.\frac{-x^3+3x^2}{3\pi+12}\right|_{-1}^{0} - \left.\frac{(4-x^2)\sqrt{4-x^2}}{3\pi+12}\right|_{0}^{2} =$$

$$= \frac{(-1)^3+3\cdot(-1)^2}{\pi+4} - \frac{(-2)^3+3\cdot(-2)^2}{\pi+4} + \frac{-0^3+3\cdot 0^2}{3\pi+12} - \frac{(-1)^3+3\cdot(-1)^2}{3\pi+12}$$

$$- \frac{(4-2^2)\sqrt{4-2^2}}{3\pi+12} + \frac{(4-0^2)\sqrt{4-0^2}}{3\pi+12} = -\frac{2}{\pi+4} - \frac{4}{3\pi+12} + \frac{8}{3\pi+12} =$$

$$= -\frac{2}{3\pi+12}.$$

$$\mathbb{E}\xi_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_{\xi_2}(y)dy$$

$$= \int_{-3}^{-2} \frac{2y^2+6y}{3\pi+12}dy + \int_{-2}^{0} \frac{y\sqrt{4-y^2}+\frac{1}{3}y^2+2y}{2\pi+8}dy$$

$$+ \int_{0}^{2} \frac{y\sqrt{4-y^2}-\frac{1}{3}y^2+2y}{2\pi+8}dy + \int_{2}^{3} \frac{-2y^2+6y}{3\pi+12}dy =$$

$$= \int_{-3}^{-2} \frac{2y^2+6y}{3\pi+12}dy + \int_{-2}^{0} \frac{\frac{1}{3}y^2+2y}{2\pi+8}dy + \int_{0}^{2} \frac{-\frac{1}{3}y^2+2y}{2\pi+8}dy$$

$$+ \int_{-2}^{2} \frac{y\sqrt{4-y^2}}{2\pi+8}dy + \int_{2}^{3} \frac{-2y^2+6y}{3\pi+12}dy$$

$$= \left.\frac{2y^3+9y^2}{9\pi+36}\right|_{-3}^{-2} + \left.\frac{y^3+9y^2}{18\pi+72}\right|_{-2}^{0} + 0 + \left.\frac{-y^3+9y^2}{18\pi+72}\right|_{0}^{2} + \left.\frac{-2y^3+9y^2}{9\pi+36}\right|_{2}^{3}$$

$$= \frac{2\cdot(-2)^3+9\cdot(-2)^2}{9\pi+36} - \frac{2\cdot(-3)^3+9\cdot(-3)^2}{9\pi+36} + \frac{0^3+9\cdot 0^2}{18\pi+72}$$

$$- \frac{(-2)^3+9\cdot(-2)^2}{18\pi+72} + \frac{-2^3+9\cdot 2^2}{18\pi+72} - \frac{-0^3+9\cdot 0^2}{18\pi+72} + \frac{-2\cdot 3^3+9\cdot 3^2}{9\pi+36}$$

$$- \frac{-2^3+9\cdot 2^2}{9\pi+36} = -\frac{7}{9\pi+36} + \frac{7}{9\pi+36} = 0.$$

Зауважимо, що інтеграл $\int_{-2}^{2} \frac{y\sqrt{4-y^2}}{2\pi+8}dy$ дорівнює 0, оскільки інтегрується непарна функція по симетричному проміжку.

Отже, центр розсіювання випадкового вектора $\vec{\xi}$ має координати:

$$\mathbb{E}\vec{\xi} = \begin{pmatrix} \mathbb{E}\xi_1 \\ \mathbb{E}\xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3\pi+12} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Для побудови кореляційної матриці знайдемо кореляційний момент $\mathbb{K}\xi_1\xi_2$ та дисперсії $\mathbb{D}\xi_1, \mathbb{D}\xi_2$:

$$\mathbb{K}\xi_1\xi_2 = \mathbb{E}\xi_1\xi_2 - \mathbb{E}\xi_1\mathbb{E}\xi_2$$

$$= \iint\limits_{\mathbb{R}^2} xyf_{\vec{\xi}}(x,y)dxdy - 0 = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} xyf_{\vec{\xi}}(x,y)dxdy$$

$$= \frac{1}{2\pi+8}\left(\int_{-2}^{-1} dx \int_{-3x-6}^{3x+6} xydy + \int_{-1}^{0} dx \int_{x-2}^{-x+2} xydy + \int_{0}^{2} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} xydy\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi+8}\left(\int_{-2}^{-1} \frac{xy^2}{2}\Bigg|_{y=-3x-6}^{y=3x+6} dx + \int_{-1}^{0} \frac{xy^2}{2}\Bigg|_{y=x-2}^{y=-x+2} dx + \int_{0}^{2} \frac{xy^2}{2}\Bigg|_{y=-\sqrt{4-x^2}}^{y=\sqrt{4-x^2}} dx\right)$$

$$=$$

$$= \frac{1}{4\pi+16}\left(\int_{-2}^{-1} x((3x+6)^2 - (-3x-6)^2)dx\right.$$

$$\left. + \int_{-1}^{0} x((-x+2)^2 - (x-2)^2)dx + \int_{0}^{2} x(4 - x^2 - 4 + x^2)dx\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi+16}\left(\int_{-2}^{-1} 0xdx + \int_{-1}^{0} 0xdx + \int_{0}^{2} 0xdx\right) = \frac{1}{4\pi+16}\cdot 0 = 0.$$

$$\mathbb{D}\xi_1 = \mathbb{E}\xi_1^2 - (\mathbb{E}\xi_1)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_{\xi_1}(x)dx - \left(-\frac{2}{3\pi+12}\right)^2.$$

Спершу знайдемо $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_{\xi_1}(x)dx$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_{\xi_1}(x)dx = \int_{-2}^{-1} \frac{3x^3+6x^2}{\pi+4}dx + \int_{-1}^{0} \frac{-x^3+2x^2}{\pi+4}dx + \int_{0}^{2} \frac{x^2\sqrt{4-x^2}}{\pi+4}dx$$

$$= \frac{1}{\pi+4}\left(\int_{-2}^{-1}(3x^3+6x^2)dx + \int_{-1}^{0}(-x^3+2x^2)dx + \int_{0}^{2} x^2\sqrt{4-x^2}dx\right)$$

$$= \frac{1}{\pi+4}\left(\left(\frac{3x^4}{4} + 2x^3\right)\Bigg|_{-2}^{-1} + \left(\frac{-x^4}{4} + \frac{2x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{0} + \int_{0}^{2} x^2\sqrt{4-x^2}dx\right)$$

$$= \frac{1}{\pi+4}\left(\frac{3}{4} - 2 - 12 + 16 + \frac{1}{4} + \frac{2}{3} + \int_{0}^{2} x^2\sqrt{4-x^2}dx\right)$$

$$= \frac{1}{\pi+4}\left(3\frac{2}{3} + \int_{0}^{2} x^2\sqrt{4-x^2}dx\right).$$

Знайдемо окремо інтеграл $\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}dx$, отримане значення будемо використовувати надалі:

$$I_2 = \int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}dx = 2\int_0^2 x^2\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}\,dx = \left|\begin{matrix} x = 2\,sin\,t \Rightarrow t = arcsin\frac{x}{2} \\ dx = 2\,cos\,t\,dt \\ x \in [0;2] \Rightarrow t \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right] \end{matrix}\right|$$

$$= 16\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2\,t\,sin^2\,t\,dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2\,2t\,dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-cos\,4t}{2}dt$$

$$= 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{sin\,4t}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{sin\left(4\cdot\frac{\pi}{2}\right)}{2} + \frac{sin(4\cdot 0)}{2} = \pi$$

Отже, можемо повернутись до обчислення інтеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_{\xi_1}(x)dx$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_{\xi_1}(x)dx = \frac{1}{\pi+4}\left(3\frac{2}{3}+\pi\right) = \frac{1}{\pi+4}\cdot\frac{3\pi+11}{3} = \frac{3\pi+11}{3\pi+12}$$

І нарешті, обчислимо дисперсію:

$$\mathbb{D}\xi_1 = \frac{3\pi+11}{3\pi+12} - \frac{4}{(3\pi+12)^2} = \frac{(3\pi+11)(3\pi+12)-4}{(3\pi+12)^2} = \frac{9\pi^2+69\pi+128}{(3\pi+12)^2} \approx 0{,}9446$$

Враховуючи зроблені раніше обчислення, знайдемо дисперсію другої координати:

$$\mathbb{D}\xi_2 = \mathbb{E}\xi_2^2 - (\mathbb{E}\xi_2)^2 = \mathbb{E}\xi_2^2 - 0 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_{\xi_2}(y)dy$$

$$= \int_{-3}^{-2} \frac{2y^3 + 6y^2}{3\pi + 12} dy + \int_{-2}^{0} \frac{y^2\sqrt{4 - y^2} + \frac{1}{3}y^3 + 2y^2}{2\pi + 8} dy$$

$$+ \int_{0}^{2} \frac{y^2\sqrt{4 - y^2} - \frac{1}{3}y^3 + 2y^2}{2\pi + 8} dy + \int_{2}^{3} \frac{-2y^3 + 6y^2}{3\pi + 12} dy$$

$$= \int_{-3}^{-2} \frac{2y^3 + 6y^2}{3\pi + 12} dy + \int_{-2}^{0} \frac{\frac{1}{3}y^3 + 2y^2}{2\pi + 8} dy + \int_{0}^{2} \frac{-\frac{1}{3}y^3 + 2y^2}{2\pi + 8} dy$$

$$+ \int_{2}^{3} \frac{-2y^3 + 6y^2}{3\pi + 12} dy + \int_{-2}^{2} \frac{y^2\sqrt{4 - y^2}}{2\pi + 8} dy$$

$$= \frac{y^4 + 4y^3}{6\pi + 24}\bigg|_{-3}^{-2} + \frac{y^4 + 8y^3}{24\pi + 96}\bigg|_{-2}^{0} + \frac{-y^4 + 8y^3}{24\pi + 96}\bigg|_{0}^{2} + \frac{-y^4 + 4y^3}{6\pi + 24}\bigg|_{2}^{3} + \frac{I_2}{\pi + 4}$$

$$= \frac{(-2)^4 + 4\cdot(-2)^3}{6\pi + 24} - \frac{(-3)^4 + 4\cdot(-3)^3}{6\pi + 24} - \frac{(-2)^4 + 8\cdot(-2)^3}{24\pi + 96} + \frac{-2^4 + 8\cdot 2^3}{24\pi + 96}$$

$$+ \frac{-3^4 + 4\cdot 3^3}{6\pi + 24} - \frac{-2^4 + 4\cdot 2^3}{6\pi + 24} + \frac{\pi}{\pi + 4}$$

$$= \frac{11}{6\pi + 24} + \frac{96}{24\pi + 96} + \frac{11}{6\pi + 24} + \frac{3\pi}{3\pi + 12} = \frac{3\pi + 23}{3\pi + 12} \approx 1{,}5134.$$

Кореляційна матриця має вигляд:

$$\mathbb{K}\vec{\xi} = \begin{pmatrix} \mathbb{D}\xi_1 & \mathbb{K}\xi_1\xi_2 \\ \mathbb{K}\xi_1\xi_2 & \mathbb{D}\xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}9446 & 0 \\ 0 & 1{,}5134 \end{pmatrix}$$

Перевіримо матрицю на додатну визначеність за критерієм Сильвестра:

$$\mathbb{D}\xi_1 = 0{,}9446 > 0;$$

$$det\mathbb{K}\vec{\xi} = det\begin{pmatrix} 0{,}9446 & 0 \\ 0 & 1{,}5134 \end{pmatrix} = 0{,}9446 \cdot 1{,}5134 > 0.$$

Отже за критерієм Сильвестра матриця додатньо визначена.

Побудуємо нормовану кореляційну матрицю:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{\xi_1\xi_2} \\ \rho_{\xi_1\xi_2} & 1 \end{pmatrix}$$

, де $\rho_{\xi_1\xi_2} = \frac{\mathbb{K}\xi_1\xi_2}{\sqrt{\mathbb{D}\xi_1\mathbb{D}\xi_2}}$

Оскільки координати даного випадкового вектора некорельовані, то коефіцієнти кореляції нульові. Звідси:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Умовні щільності розподілу для кожної координати

Умовні щільності розподілу знайдемо за формулами:

$$f_{\xi_1}(x/y) = \frac{f_{\vec{\xi}}(x,y)}{f_{\xi_2}(y)};$$

$$f_{\xi_2}(y/x) = \frac{f_{\vec{\xi}}(x,y)}{f_{\xi_1}(y)};$$

Для зручності наведемо функції щільності розподілу обох координат (див. (5) та (6)):

$$f_{\xi_1}(x) = \begin{cases} 0, (x \le -2) \vee (x > 2) \\ \dfrac{1}{2\pi + 8}\displaystyle\int_{-3x-6}^{3x+6} dy = \dfrac{3x+6}{\pi+4}, -2 < x \le -1 \\ \dfrac{1}{2\pi + 8}\displaystyle\int_{x-2}^{-x+2} dy = \dfrac{-x+2}{\pi+4}, -1 < x \le 0 \\ \dfrac{1}{2\pi + 8}\displaystyle\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy = \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{\pi+4}, 0 < x \le 2 \end{cases}$$

$$f_{\xi_2}(y) = \begin{cases} 0, (y \le -3) \vee (y > 3) \\ \dfrac{1}{2\pi + 8}\displaystyle\int_{-\frac{1}{3}y-2}^{y+2} dx = \dfrac{\frac{4}{3}y+4}{2\pi+8} = \dfrac{2y+6}{3\pi+12}, -3 < y \le -2 \\ \dfrac{1}{2\pi + 8}\displaystyle\int_{-\frac{1}{3}y-2}^{\sqrt{4-y^2}} dx = \dfrac{\sqrt{4-y^2}+\frac{1}{3}y+2}{2\pi+8}, -2 < y \le 0 \\ \dfrac{1}{2\pi + 8}\displaystyle\int_{\frac{1}{3}y-2}^{\sqrt{4-y^2}} dx = \dfrac{\sqrt{4-y^2}-\frac{1}{3}y+2}{2\pi+8}, 0 < y \le 2 \\ \dfrac{1}{2\pi + 8}\displaystyle\int_{\frac{1}{3}y-2}^{-y+2} dx = \dfrac{-\frac{4}{3}y+4}{2\pi+8} = \dfrac{-2y+6}{3\pi+12}, 2 < y \le 3 \end{cases}$$

Оскільки з пункту 1 маємо $f_{\vec{\xi}}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi+8}, (x,y) \in G \\ 0, (x,y) \notin G \end{cases}$, то:

$$f_{\xi_1}(x/y) = \begin{cases} 0, (y \le -3) \vee (y > 3) \\ \dfrac{3}{4y+12}, (-3 < y \le -2), \left(-\dfrac{1}{3}y - 2 < x \le y + 2\right) \\ 0, (-3 < y \le -2), \left(x \le -\dfrac{1}{3}y - 2\right) \vee (x > y + 2) \\ \dfrac{1}{\sqrt{4-y^2} + \dfrac{1}{3}y + 2}, (-2 < y \le 0), \left(-\dfrac{1}{3}y - 2 < x \le \sqrt{4-y^2}\right) \\ 0, (-2 < y \le 0), \left(x \le -\dfrac{1}{3}y - 2\right) \vee \left(x > \sqrt{4-y^2}\right) \\ \dfrac{1}{\sqrt{4-y^2} - \dfrac{1}{3}y + 2}, (0 < y \le 2), \left(\dfrac{1}{3}y - 2 < x \le \sqrt{4-y^2}\right) \\ 0, (0 < y \le 2), \left(x \le \dfrac{1}{3}y - 2\right) \vee \left(x > \sqrt{4-y^2}\right) \\ \dfrac{3}{-4y+12}, (2 < y \le 3), \left(\dfrac{1}{3}y - 2 < x \le -y + 2\right) \\ 0, (2 < y \le 3), \left(x \le \dfrac{1}{3}y - 2\right) \vee (x > y + 2) \end{cases}$$

$$f_{\xi_2}(y/x) = \begin{cases} 0, (x \le -2) \vee (x > 2) \\ \dfrac{1}{6x+12}, (-2 < x \le -1), (-3x - 6 < y \le 3x + 6) \\ 0, (-2 < x \le -1), (y \le -3x - 6) \vee (y > 3x + 6) \\ \dfrac{1}{-2x+4}, (-1 < x \le 0), (x - 2 < y \le -x + 2) \\ 0, (-1 < x \le 0), (y \le x - 2) \vee (y > x + 2) \\ \dfrac{1}{2\sqrt{4-x^2}}, (0 < x \le 2), \left(-\sqrt{4-x^2} < y \le \sqrt{4-x^2}\right) \\ 0, (0 < x \le 2), \left(y \le -\sqrt{4-x^2}\right) \vee \left(y > \sqrt{4-x^2}\right) \end{cases}$$

Перевіримо умови нормування для умовних щільностей:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1}(x/y)dx = \int_{-\frac{1}{3}y-2}^{y+2} \frac{3}{4y+12}dx = \frac{3y+6+y+6}{4y+12} = 1.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1}(x/y)dx = \int_{-\frac{1}{3}y-2}^{\sqrt{4-y^2}} \frac{1}{\sqrt{4-y^2}+\frac{1}{3}y+2}dx = \frac{\sqrt{4-y^2}+\frac{1}{3}y+2}{\sqrt{4-y^2}+\frac{1}{3}y+2} = 1.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1}(x/y)dx = \int_{\frac{1}{3}y-2}^{\sqrt{4-y^2}} \frac{1}{\sqrt{4-y^2}-\frac{1}{3}y+2}dx = \frac{\sqrt{4-y^2}-\frac{1}{3}y+2}{\sqrt{4-y^2}-\frac{1}{3}y+2} = 1.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1}(x/y)dx = \int_{\frac{1}{3}y-2}^{-y+2} \frac{3}{-4y+12}dx = \frac{-3y+6-y+6}{4y+12} = 1.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_2}(y/x)dy = \int_{-3x-6}^{3x+6} \frac{1}{6x+12}dx = \frac{3x+6+3x+6}{6x+12} = 1.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_2}(y/x)dy = \int_{x-2}^{-x+2} \frac{1}{-2x+4}dx = \frac{-x+2-x+2}{-2x+4} = 1.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_2}(y/x)dy = \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{1}{2\sqrt{4-x^2}}dx = \frac{\sqrt{4-x^2}+\sqrt{4-x^2}}{2\sqrt{4-x^2}} = 1.$$

Отже, умови нормування виконуються, і звідси можна зробити висновок, що умовні щільності були знайдені правильно.

6. Умовні математичні сподівання для кожної координати з перевіркою

Умовні математичні сподівання знайдемо за формулами:

$$\mathbb{E}(\xi_1/\xi_2 = y) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\xi_1}(x/y)dx;$$

$$\mathbb{E}(\xi_2/\xi_1 = x) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_{\xi_2}(y/x)dy.$$

Знайдемо $\mathbb{E}(\xi_1/\xi_2 = y)$:

$$(y \le -3) \vee (y > 3) \Rightarrow \mathbb{E}(\xi_1/\xi_2 = y) = 0;$$

$$(-3 < y \le -2) \Rightarrow \mathbb{E}(\xi_1/\xi_2 = y) = \int_{-\frac{1}{3}y-2}^{y+2} \frac{3x}{4y+12}dx = \frac{3x^2}{8y+24}\Bigg|_{-\frac{1}{3}y-2}^{y+2}$$

$$= \frac{3(y+2)^2 - 3\left(-\frac{1}{3}y-2\right)^2}{8y+24} = \frac{3y^2+12y+12-\frac{1}{3}y^2-4y-12}{8y+24} = \frac{y}{3};$$

$$(-2 < y \le 0) \Rightarrow \mathbb{E}(\xi_1/\xi_2 = y) = \int_{-\frac{1}{3}y-2}^{\sqrt{4-y^2}} \frac{x}{\sqrt{4-y^2}+\frac{1}{3}y+2}dx$$

$$= \frac{x^2}{2\sqrt{4-y^2}+\frac{2}{3}y+4}\Bigg|_{-\frac{1}{3}y-2}^{\sqrt{4-y^2}} = \frac{4-y^2-\left(-\frac{1}{3}y-2\right)^2}{2\sqrt{4-y^2}+\frac{2}{3}y+4}$$

$$= \frac{4-y^2-\frac{y^2}{9}-\frac{4}{3}y-4}{2\sqrt{4-y^2}+\frac{2}{3}y+4} = \frac{-\frac{10}{9}y^2-\frac{4}{3}y}{2\sqrt{4-y^2}+\frac{2}{3}y+4} = \frac{-5y^2-6y}{9\sqrt{4-y^2}+3y+18};$$

$$(0 < y \le 2) \Rightarrow \mathbb{E}(\xi_1/\xi_2 = y) = \int_{\frac{1}{3}y-2}^{\sqrt{4-y^2}} \frac{x}{\sqrt{4-y^2}-\frac{1}{3}y+2}dx$$

$$= \frac{x^2}{2\sqrt{4-y^2}-\frac{2}{3}y+4}\Bigg|_{\frac{1}{3}y-2}^{\sqrt{4-y^2}} = \frac{4-y^2-\left(\frac{1}{3}y-2\right)^2}{2\sqrt{4-y^2}-\frac{2}{3}y+4}$$

$$= \frac{4-y^2-\frac{y^2}{9}+\frac{4}{3}y-4}{2\sqrt{4-y^2}-\frac{2}{3}y+4} = \frac{-\frac{10}{9}y^2+\frac{4}{3}y}{2\sqrt{4-y^2}-\frac{2}{3}y+4} = \frac{-5y^2+6y}{9\sqrt{4-y^2}-3y+18};$$

$$(2 < y \le 3) \Rightarrow \mathbb{E}(\xi_1/\xi_2 = y) = \int_{\frac{1}{3}y-2}^{-y+2} \frac{3x}{-4y+12}dx = \frac{3x^2}{-8y+24}\Bigg|_{\frac{1}{3}y-2}^{-y+2}$$

$$= \frac{3(y-2)^2 - 3\left(\frac{1}{3}y-2\right)^2}{-8y+24} = \frac{3y^2-12y+12-\frac{1}{3}y^2+4y-12}{-8y+24} = -\frac{y}{3};$$

Перейдемо до обчислення $\mathbb{E}(\xi_2/\xi_1 = x)$:

$$(x \le -2) \vee (x > 2) \Rightarrow \mathbb{E}(\xi_2/\xi_1 = x) = 0.$$

$$(-2 < x \le -1) \Rightarrow \mathbb{E}(\xi_2/\xi_1 = x) = \int_{-3x-6}^{3x+6} \frac{y}{6x+12} dy = \frac{y^2}{12x+24}\Bigg|_{-3\mathrm{x}-6}^{3x+6}$$

$$= \frac{(3x+6)^2 - (-3x-6)^2}{6x+12} = \frac{0}{12x+24} = 0;$$

$$(-1 < x \le 0) \Rightarrow \mathbb{E}(\xi_2/\xi_1 = x) = \int_{x-2}^{-x+2} \frac{y}{-2x+4} dy = \frac{y^2}{-4x+8}\Bigg|_{\mathrm{x}-2}^{-x+2}$$

$$= \frac{(-x+2)^2 - (x-2)^2}{-4x+8} = \frac{0}{-4x+8} = 0;$$

$$(0 < x \le 2) \Rightarrow \mathbb{E}(\xi_2/\xi_1 = x) = \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{y}{2\sqrt{4-x^2}dy} = \frac{y^2}{4\sqrt{4-x^2}}\Bigg|_{-\sqrt{4-\mathrm{x}^2}}^{\sqrt{4-x^2}}$$

$$= \frac{4 - x^2 - 4 + x^2}{4\sqrt{4-x^2}} = 0;$$

Отже, тепер маємо $\mathbb{E}(\xi_1/\xi_2 = y)$ та $\mathbb{E}(\xi_2/\xi_1 = x)$:

$$\mathbb{E}(\xi_1/\xi_2 = y) = \begin{cases} 0, (y \le -3) \vee (y > 3); \\ \frac{y}{3}, -3 < y \le -2; \\ \frac{-5y^2 - 6y}{9\sqrt{4-y^2} + 3y + 18}, -2 < y \le 0; \\ \frac{-5y^2 + 6y}{9\sqrt{4-y^2} - 3y + 18}, 0 < y \le 2; \\ -\frac{y}{3}, 2 < y \le 3 \end{cases}$$

$$\mathbb{E}(\xi_2/\xi_1 = x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

Розглянемо випадкову величину $\mathbb{E}(\xi_1/\xi_2)$. За формулою повного математичного сподівання має справджуватися рівність:

$$\mathbb{E}\big(\mathbb{E}(\xi_1/\xi_2)\big) = \mathbb{E}\xi_1.$$

Знайдемо математичне сподівання випадкової величини $\mathbb{E}(\xi_1/\xi_2)$:

$$\mathbb{E}\big(\mathbb{E}(\xi_1/\xi_2)\big) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{E}(\xi_1/\xi_2 = y) f_{\xi_2}(y)dy$$

$$= \int_{-3}^{-2} \frac{y}{3}\cdot\frac{2y+6}{3\pi+12}dy + \int_{-2}^{0} \frac{-5y^2-6y}{9\sqrt{4-y^2}+3y+18}\cdot\frac{\sqrt{4-y^2}+\frac{1}{3}y+2}{2\pi+8}dy$$

$$+ \int_{0}^{2} \frac{-5y^2+6y}{9\sqrt{4-y^2}-3y+18}\cdot\frac{\sqrt{4-y^2}-\frac{1}{3}y+2}{2\pi+8}dy + \int_{2}^{3} -\frac{y}{3}\cdot\frac{-2y+6}{3\pi+12}dy$$

$$= \frac{2y^3+9y^2}{27\pi+108}\bigg|_{-3}^{-2} + \frac{-5y^3-9y^2}{54\pi+216}\bigg|_{-2}^{0} + \frac{-5y^3+9y^2}{54\pi+216}\bigg|_{0}^{2} + \frac{2y^3-9y^2}{27\pi+108}\bigg|_{2}^{3}$$

$$= \frac{2\cdot(-2)^3+9\cdot(-2)^2}{27\pi+108} - \frac{2\cdot(-3)^3+9\cdot(-3)^2}{27\pi+108} - \frac{-5\cdot(-2)^3-9\cdot(-2)^2}{54\pi+216}$$

$$+ \frac{-5\cdot 2^3+9\cdot 2^2}{54\pi+216} + \frac{2\cdot 3^3-9\cdot 3^2}{27\pi+108} - \frac{2\cdot 2^3-9\cdot 2^2}{27\pi+108} = -\frac{2}{3\pi+12}.$$

Рівність справджується. Тепер розглянемо випадкову величину $\mathbb{E}(\xi_2/\xi_1)$ і перевіримо аналогічну рівність для умовного математичного сподівання другої координати:

$$\mathbb{E}\big(\mathbb{E}(\xi_2/\xi_1)\big) = \mathbb{E}\xi_2$$

Знайдемо математичне сподівання випадкової величини $\mathbb{E}(\xi_2/\xi_1)$:

$$\mathbb{E}\big(\mathbb{E}(\xi_2/\xi_1)\big) = 0, \text{оскільки } \mathbb{E}(\xi_2/\xi_1) = 0$$

Оскільки раніше було знайдено, що $\mathbb{E}\xi_2 = 0$, то рівність справджується, і можна стверджувати, що умовні математичні сподівання координат були знайдені правильно.

Зобразимо лінії регресії випадкових величин $\mathbb{E}(\xi_1/\xi_2 = y)$ та $\mathbb{E}(\xi_2/\xi_1 = x)$ (рис. 38 та рис. 39 відповідно).

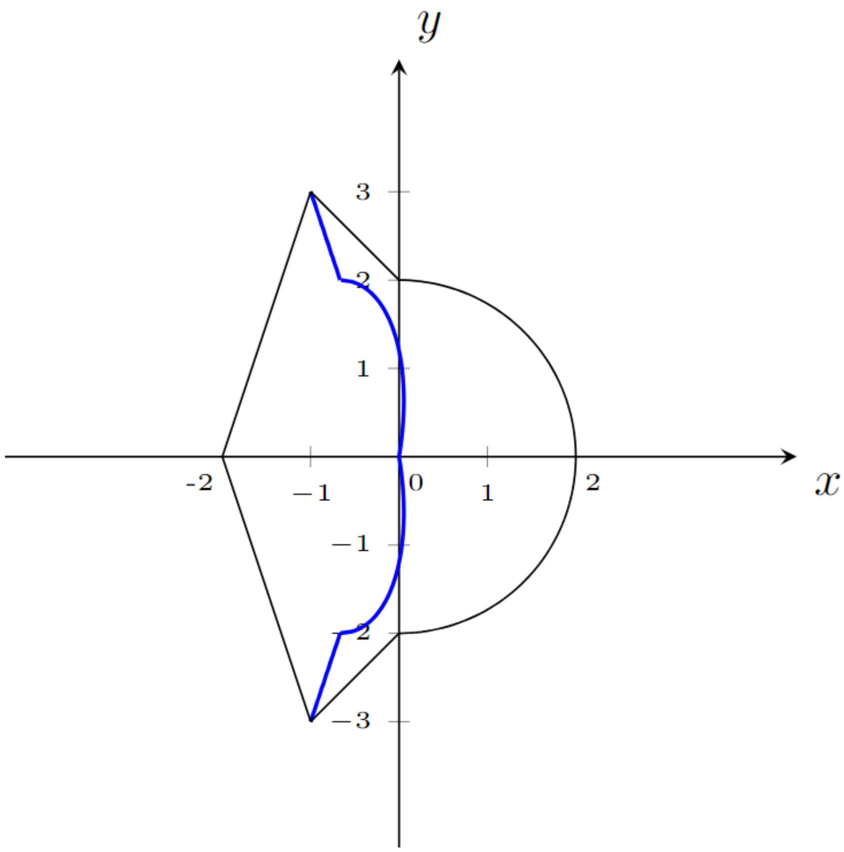


Рис. 38: Лінія регресії випадкової величини $\mathbb{E}(\xi_1/\xi_2 = y)$

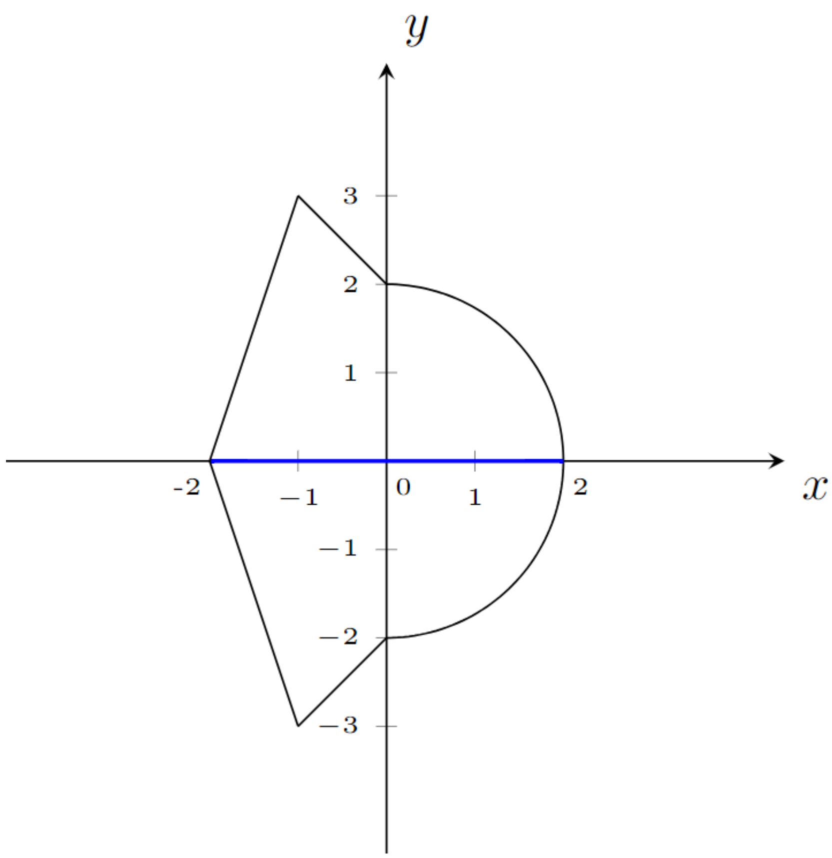


Рис. 39: Лінія регресії випадкової величини $\mathbb{E}(\xi_2/\xi_1 = x)$

Додаток 1

Перевірка неперервності функції розподілу на межах областей:

1. Перевіримо неперервність $F_{\vec{\xi}}(x,y)$ на стику областей D_0 і D_1:

$$\begin{cases} y = -3x - 6 \\ -2 \le x \le -1 \end{cases}$$

При $(x,y) \in D_0 \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x,y) = 0.$

При $(x,y) \in D_1 \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x,y) = \frac{1}{12\pi+48}(y+3x+6)^2 = \frac{1}{12\pi+48}(-3x-6+3x+6)^2 =$ $= 0.$

Отже, неперервність $F_{\vec{\xi}}(x,y)$ на межі D_0 і D_1 виконується.

2. Перевіримо неперервність $F_{\vec{\xi}}(x,y)$ на стику областей D_0 і D_3:

$$\begin{cases} y = -3 \\ x \ge -1 \end{cases}$$

При $(x,y) \in D_0 \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x,y) = 0.$

При $(x,y) \in D_3 \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x,y) = \frac{y^2+6y+9}{3\pi+12} = \frac{(-3)^2+6\cdot(-3)+9}{3\pi+12} = 0.$

Отже, неперервність $F_{\vec{\xi}}(x,y)$ на межі D_0 і D_3 виконується.

3. Перевіримо неперервність $F_{\vec{\xi}}(x,y)$ на стику областей D_0 і D_6:

$$\begin{cases} x = -2 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

При $(x,y) \in D_0 \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x,y) = 0.$

При $(x,y) \in D_6 \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x,y) = \frac{3}{2\pi+8}(x+2)^2 = \frac{3}{2\pi+8}(-2+2)^2 = 0.$

Отже, неперервність $F_{\vec{\xi}}(x,y)$ на межі D_0 і D_6 виконується.

4. Перевіримо неперервність $F_{\vec{\xi}}(x,y)$ на стику областей D_1 і D_2:

$$\begin{cases} x = -1 \\ -3 \le y \le 0 \end{cases}$$

При $(x,y) \in D_1 \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x,y) = \frac{1}{12\pi+48}(y+3x+6)^2 = \frac{1}{12\pi+48}(y+3\cdot(-1)+6)^2 =$ $\frac{1}{12\pi+48}(y+3)^2$

При $(x,y)\in D_2 \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x,y)=\frac{1}{2\pi+8}\left(\frac{y^2}{6}+2y-\frac{x^2}{2}+2x+4+xy\right)=\frac{1}{2\pi+8}\left(\frac{y^2}{6}+2y-\right.$
$\left.-\frac{(-1)^2}{2}-2+4-y\right)=\frac{1}{2\pi+8}\left(\frac{y^2}{6}+y+\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{12\pi+48}(y^2+6y+9)=\frac{1}{12\pi+48}(y+3)^2$

Отже, неперервність $F_{\vec{\xi}}(x,y)$ на межі D_1 і D_2 виконується.

5. Перевіримо неперервність $F_{\vec{\xi}}(x,y)$ на стику областей D_1 і D_7:

$$\begin{cases} y=0 \\ -2\le x\le -1 \end{cases}$$

При $(x,y)\in D_1 \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x,y)=\frac{1}{12\pi+48}(y+3x+6)^2=\frac{1}{12\pi+48}(3x+6)^2=$
$\frac{3}{4\pi+16}(x++2)^2$

При $(x,y)\in D_7 \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x,y)=\frac{1}{2\pi+8}\left(\frac{3x^2}{2}+6x+6+xy-\frac{y^2}{6}+2y\right)=\frac{1}{2\pi+8}\left(\frac{3x^2}{2}+\right.$
$\left.+6x+6\right)=\frac{3}{4\pi+16}(x^2+4x+4)=\frac{3}{4\pi+16}(x+2)^2$

Отже, неперервність $F_{\vec{\xi}}(x,y)$ на межі D_1 і D_7 виконується.

6. Перевіримо неперервність $F_{\vec{\xi}}(x,y)$ на стику областей D_2 і D_3:

$$\begin{cases} x=y+2 \\ -3\le y\le -2 \end{cases}$$

При $(x,y)\in D_2 \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x,y)=\frac{1}{2\pi+8}\left(\frac{y^2}{6}+2y-\frac{x^2}{2}+2x+4+xy\right)=\frac{1}{2\pi+8}\left(\frac{y^2}{6}+2y-\right.$
$\left.-\frac{(y+2)^2}{2}+2(y+2)+4+y(y+2)\right)=\frac{1}{2\pi+8}(\frac{2y^2}{3}+4y+6)=\frac{y^2+6y+9}{3\pi+12}$

При $(x,y)\in D_3 \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x,y)=\frac{y^2+6y+9}{3\pi+12}$

Отже, неперервність $F_{\vec{\xi}}(x,y)$ на межі D_2 і D_3 виконується.

7. Перевіримо неперервність $F_{\vec{\xi}}(x,y)$ на стику областей D_2 і D_4:

$$\begin{cases} x=0 \\ -2\le y\le 0 \end{cases}$$

При $(x,y)\in D_2 \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x,y)=\frac{1}{2\pi+8}\left(\frac{y^2}{6}+2y-\frac{x^2}{2}+2x+4+xy\right)=\frac{1}{2\pi+8}\left(\frac{y^2}{6}+2y+\right.$
$\left.+4\right)=\frac{1}{2\pi+8}(\frac{y^2}{6}+2y+4)$

При $(x,y) \in D_4 \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x,y) = \frac{1}{2\pi+8}\left(\frac{y^2}{6} + 2y + 4 + xy + 2\,arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2}\right) = \frac{1}{2\pi+8}\left(\frac{y^2}{6} + 2y + 4 + 0y + 2\,arcsin\left(\frac{0}{2}\right) + \frac{0\sqrt{4-0^2}}{2}\right) = \frac{1}{2\pi+8}(\frac{y^2}{6} + 2y + 4)$

Отже, неперервність $F_{\vec{\xi}}(x,y)$ на межі D_2 і D_4 виконується.

8. Перевіримо неперервність $F_{\vec{\xi}}(x,y)$ на стику областей D_2 і D_4:

$$\begin{cases} x = 0 \\ -2 \le y \le 0 \end{cases}$$

При $(x,y) \in D_2 \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x,y) = \frac{1}{2\pi+8}\left(\frac{y^2}{6} + 2y - \frac{x^2}{2} + 2x + 4 + xy\right) = \frac{1}{2\pi+8}\left(\frac{y^2}{6} + 2y + +4\right) = \frac{1}{2\pi+8}(\frac{y^2}{6} + 2y + 4)$

При $(x,y) \in D_4 \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x,y) = \frac{1}{2\pi+8}\left(\frac{y^2}{6} + 2y + 4 + xy + 2\,arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2}\right) = \frac{1}{2\pi+8}\left(\frac{y^2}{6} + 2y + 4 + 0y + 2\,arcsin\left(\frac{0}{2}\right) + \frac{0\sqrt{4-0^2}}{2}\right) = \frac{1}{2\pi+8}(\frac{y^2}{6} + 2y + 4)$

Отже, неперервність $F_{\vec{\xi}}(x,y)$ на межі D_2 і D_4 виконується.

9. Перевіримо неперервність $F_{\vec{\xi}}(x,y)$ на стику областей D_2 і D_8:

$$\begin{cases} y = 0 \\ -1 \le x \le 0 \end{cases}$$

При $(x,y) \in D_2 \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x,y) = \frac{1}{2\pi+8}\left(\frac{y^2}{6} + 2y - \frac{x^2}{2} + 2x + 4 + xy\right) = \frac{1}{2\pi+8}\left(-\frac{x^2}{2} + +2x + 4\right)$

При $(x,y) \in D_8 \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x,y) = \frac{1}{2\pi+8}\left(-\frac{x^2}{2} + 2x + 4 + xy - \frac{y^2}{6} + 2y\right) = \frac{1}{2\pi+8}\left(-\frac{x^2}{2} + +2x + 4\right)$

Отже, неперервність $F_{\vec{\xi}}(x,y)$ на межі D_2 і D_8 виконується.

10. Перевіримо неперервність $F_{\vec{\xi}}(x,y)$ на стику областей D_3 і D_5:

$$\begin{cases} y = -2 \\ x \ge 0 \end{cases}$$

При $(x,y) \in D_3 \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x,y) = \frac{y^2+6y+9}{3\pi+12} = \frac{1}{3\pi+12}$

При $(x,y) \in D_5 \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x,y) = \frac{1}{2\pi+8}\left(\frac{y^2}{6} + 2y + 4 + 2\,arcsin\left(\frac{y}{2}\right) + \frac{y\sqrt{4-y^2}}{2} + \pi\right) =$

$$= \frac{1}{2\pi + 8}\left(\frac{(-2)^2}{6} + 2\cdot(-2) + 4 + 2\,arcsin\left(\frac{-2}{2}\right) + \frac{(-2)\sqrt{4-(-2)^2}}{2} + \pi\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi + 8}\left(\frac{2}{3} + 2\cdot(-2) + 4 - \pi + \pi\right) = \frac{1}{3\pi + 12}$$

Отже, неперервність $F_{\vec{\xi}}(x, y)$ на межі D_3 і D_5 виконується.

11. Перевіримо неперервність $F_{\vec{\xi}}(x, y)$ на стику областей D_4 і D_5:

$$\begin{cases} x = \sqrt{4 - y^2} \\ -2 \le y \le 0 \end{cases}$$

При $(x, y) \in D_4 \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x, y) = \frac{1}{2\pi+8}\left(\frac{y^2}{6} + 2y + 4 + xy + 2\,arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2}\right) =$

$\frac{1}{2\pi+8}\left(\frac{y^2}{6} + 2y + 4 + y\sqrt{4-y^2} + 2\,arcsin\left(\frac{\sqrt{4-y^2}}{2}\right) + \frac{\sqrt{4-y^2}\sqrt{4-\left(\sqrt{4-y^2}\right)^2}}{2}\right) =$

$\frac{1}{2\pi+8}\left(\frac{y^2}{6} + +2y + 4 + y\sqrt{4-y^2} + 2\,arcsin\left(\frac{\sqrt{4-y^2}}{2}\right) + \frac{|y|\sqrt{4-y^2}}{2}\right) =$

$$= \left| \begin{array}{c} (y \le 0) \Rightarrow |y| = -y \\ 2\,arcsin\left(\frac{\sqrt{4-y^2}}{2}\right) = 2\,arcsin\left(\sqrt{1 - \frac{y^2}{4}}\right) = \\ = 2\,arccos\frac{|y|}{2} = 2\left(\frac{\pi}{2} - arcsin\frac{|y|}{2}\right) = \pi + 2\,arcsin\frac{y}{2} \end{array} \right|$$

$$= \frac{1}{2\pi + 8}\left(\frac{y^2}{6} + 2y + 4 + \frac{y\sqrt{4-y^2}}{2} + \pi + 2\,arcsin\frac{y}{2}\right)$$

При $(x, y) \in D_5 \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x, y) = \frac{1}{2\pi+8}\left(\frac{y^2}{6} + 2y + 4 + 2\,arcsin\left(\frac{y}{2}\right) + \frac{y\sqrt{4-y^2}}{2} + \pi\right)$

Отже, неперервність $F_{\vec{\xi}}(x, y)$ на межі D_4 і D_5 виконується.

12. Перевіримо неперервність $F_{\vec{\xi}}(x, y)$ на стику областей D_4 і D_9:

$$\begin{cases} y = 0 \\ 0 \le x \le 2 \end{cases}$$

При $(x, y) \in D_4 \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x, y) = \frac{1}{2\pi+8}\left(\frac{y^2}{6} + 2y + 4 + xy + 2\,arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2}\right) =$

$\frac{1}{2\pi+8}\left(4 + 2\,arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2}\right)$

При $(x,y) \in D_9 \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x,y) = \frac{1}{2\pi+8}\left(2\,arcsin\frac{x}{2} + \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + 4 + xy - \frac{y^2}{6} + 2y\right) = \frac{1}{2\pi+8}\left(2\,arcsin\frac{x}{2} + \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + 4\right)$

Отже, неперервність $F_{\vec{\xi}}(x,y)$ на межі D_5 і D_{13} виконується.

13. Перевіримо неперервність $F_{\vec{\xi}}(x,y)$ на стику областей D_5 і D_{13}:

$$\begin{cases} y = 0 \\ x \geq 2 \end{cases}$$

При $(x,y) \in D_5 \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x,y) = \frac{1}{2\pi+8}\left(\frac{y^2}{6} + 2y + 4 + 2\,arcsin\left(\frac{y}{2}\right) + \frac{y\sqrt{4-y^2}}{2} + \pi\right) =$

$$= \frac{1}{2\pi + 8}(4 + \pi) = \frac{1}{2}$$

При $(x,y) \in D_{13} \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x,y) = \frac{1}{2\pi+8}\left(4 - \frac{y^2}{6} + 2y + 2\,arcsin\frac{y}{2} + \frac{y\sqrt{4-y^2}}{2} + \pi\right) =$

$$= \frac{1}{2\pi + 8}(4 + \pi) = \frac{1}{2}$$

Отже, неперервність $F_{\vec{\xi}}(x,y)$ на межі D_5 і D_{13} виконується.

14. Перевіримо неперервність $F_{\vec{\xi}}(x,y)$ на стику областей D_6 і D_7:

$$\begin{cases} y = 3x + 6 \\ -2 \leq x \leq -1 \end{cases}$$

При $(x,y) \in D_6 \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x,y) = \frac{3}{2\pi+8}(x+2)^2$

При $(x,y) \in D_7 \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x,y) = \frac{1}{2\pi+8}\left(\frac{3x^2}{2} + 6x + 6 + xy - \frac{y^2}{6} + 2y\right) = \frac{1}{2\pi+8}\left(\frac{3x^2}{2} + \right.$

$\left. +6x + 6 + x(3x+6) - \frac{(3x+6)^2}{6} + 2(3x+6)\right) = \frac{1}{2\pi+8}\left(\frac{9x^2}{2} + +18x + 18 - \frac{(3x+6)^2}{6}\right) =$

$\frac{1}{2\pi+8}(3x^2 + 12x + 12) = \frac{3}{2\pi+8}(x+2)^2$

Отже, неперервність $F_{\vec{\xi}}(x,y)$ на межі D_6 і D_7 виконується.

15. Перевіримо неперервність $F_{\vec{\xi}}(x,y)$ на стику областей D_6 і D_{15}:

$$\begin{cases} x = -1 \\ y \geq 3 \end{cases}$$

При $(x,y) \in D_6 \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x,y) = \frac{3}{2\pi+8}(x+2)^2 = \frac{3}{2\pi+8}(-1+2)^2 = \frac{3}{2\pi+8}$

При $(x,y) \in D_{15} \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x,y) = \frac{1}{2\pi+8}(-x^2+4x+8) = \frac{1}{2\pi+8}(-(-1)^2+4\cdot(-1)+$
$+8) = \frac{3}{2\pi+8}$

Отже, неперервність $F_{\vec{\xi}}(x,y)$ на межі D_6 і D_{15} виконується.

16. Перевіримо неперервність $F_{\vec{\xi}}(x,y)$ на стику областей D_7 і D_8:

$$\begin{cases} x = -1 \\ 0 \le y \le 3 \end{cases}$$

При $(x,y) \in D_7 \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x,y) = \frac{1}{2\pi+8}\left(\frac{3x^2}{2} + 6x + 6 + xy - \frac{y^2}{6} + 2y\right) = \frac{1}{2\pi+8}\left(\frac{3\cdot(-1)^2}{2} +\right.$
$\left.+6\cdot(-1) + 6 - y - \frac{y^2}{6} + 2y\right) = \frac{1}{2\pi+8}\left(\frac{3}{2} - \frac{y^2}{6} + y\right)$

При $(x,y) \in D_8 \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x,y) = \frac{1}{2\pi+8}\left(-\frac{x^2}{2} + 2x + 4 + xy - \frac{y^2}{6} + 2y\right) = \frac{1}{2\pi+8}\left(-\frac{(-1)^2}{2} -\right.$
$\left.-2 + 4 - y - \frac{y^2}{6} + 2y\right) = \frac{1}{2\pi+8}\left(\frac{3}{2} - \frac{y^2}{6} + y\right)$

Отже, неперервність $F_{\vec{\xi}}(x,y)$ на межі D_7 і D_8 виконується.

17. Перевіримо неперервність $F_{\vec{\xi}}(x,y)$ на стику областей D_8 і D_9:

$$\begin{cases} x = 0 \\ 0 \le y \le 2 \end{cases}$$

При $(x,y) \in D_8 \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x,y) = \frac{1}{2\pi+8}\left(-\frac{x^2}{2} + 2x + 4 + xy - \frac{y^2}{6} + 2y\right) = \frac{1}{2\pi+8}\left(4 - \frac{y^2}{6} +\right.$
$\left.+2y\right)$

При $(x,y) \in D_9 \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x,y) = \frac{1}{2\pi+8}\left(2\,arcsin\frac{x}{2} + \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + 4 + xy - \frac{y^2}{6} + 2y\right) =$
$\frac{1}{2\pi+8}\left(4 - \frac{y^2}{6} + 2y\right)$

Отже, неперервність $F_{\vec{\xi}}(x,y)$ на межі D_8 і D_9 виконується.

18. Перевіримо неперервність $F_{\vec{\xi}}(x,y)$ на стику областей D_8 і D_{11}:

$$\begin{cases} y = -\mathrm{x} + 2 \\ -1 \le x \le 0 \end{cases}$$

При $(x,y) \in D_8 \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x,y) = \frac{1}{2\pi+8}\left(-\frac{x^2}{2} + 2x + 4 + x(-x+2) - \frac{(-x+2)^2}{6} + 2(-x++2)\right) = \frac{1}{2\pi+8}\left(-\frac{10x^2}{6} + 2x + \frac{2}{3}x + 8 - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2\pi+8}\left(-\frac{5x^2}{3} + \frac{8}{3}x + \frac{22}{3}\right)$

При $(x,y) \in D_{11} \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x,y) = \frac{1}{2\pi+8}\left(2 - x^2 + 4x + 4y - \frac{2y^2}{3}\right) = \frac{1}{2\pi+8}\left(2 - x^2 + 4x + +4\cdot(-x+2) - \frac{2\cdot(-x+2)^2}{3}\right) = \frac{1}{2\pi+8}\left(-\frac{5x^2}{3} + \frac{8}{3}x + \frac{22}{3}\right)$

Отже, неперервність $F_{\vec{\xi}}(x,y)$ на межі D_8 і D_{11} виконується.

19. Перевіримо неперервність $F_{\vec{\xi}}(x,y)$ на стику областей D_9 і D_{10}:

$$\begin{cases} y = \sqrt{4-x^2} \\ 0 \le x \le 2 \end{cases}$$

При $(x,y) \in D_9 \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x,y) = \frac{1}{2\pi+8}\left(2\,arcsin\frac{x}{2} + \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + 4 + xy - \frac{y^2}{6} + 2y\right) = \frac{1}{2\pi+8}\left(2\,arcsin\frac{x}{2} + \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + 4 + x\sqrt{4-x^2} - \frac{4-x^2}{6} + 2\sqrt{4-x^2}\right)$

При $(x,y) \in D_{10} \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x,y) = \frac{1}{2\pi+8}\left(2\,arcsin\frac{x}{2} + x\sqrt{4-x^2} + 4 + 2\,arcsin\frac{y}{2} + \frac{y\sqrt{4-y^2}}{2} - 2\,arcsin\frac{\sqrt{4-x^2}}{2} - \frac{y^2}{6} + 2y\right) = \frac{1}{2\pi+8}\left(2\,arcsin\frac{x}{2} + x\sqrt{4-x^2} + 4 + +2\,arcsin\frac{\sqrt{4-x^2}}{2} + \frac{|x|\sqrt{4-x^2}}{2} - 2\,arcsin\frac{\sqrt{4-x^2}}{2} - \frac{4-x^2}{6} + 2\sqrt{4-x^2}\right) =$ [оскільки $x \ge 0$, то $|x| = x$] $= \frac{1}{2\pi+8}\left(2\,arcsin\frac{x}{2} + x\sqrt{4-x^2} + 4 + \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} - \frac{4-x^2}{6} + 2\sqrt{4-x^2}\right)$

Отже, неперервність $F_{\vec{\xi}}(x,y)$ на межі D_9 і D_{10} виконується.

20. Перевіримо неперервність $F_{\vec{\xi}}(x,y)$ на стику областей D_{10} і D_{12}:

$$\begin{cases} y = 2 \\ 0 \le x \le 2 \end{cases}$$

При $(x,y) \in D_{10} \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x,y) = \frac{1}{2\pi+8}\left(2\,arcsin\frac{x}{2} + x\sqrt{4-x^2} + 4 + 2\,arcsin\frac{y}{2} + \frac{y\sqrt{4-y^2}}{2} - 2\,arcsin\frac{\sqrt{4-x^2}}{2} - \frac{y^2}{6} + 2y\right) = \frac{1}{2\pi+8}\left(2\,arcsin\frac{x}{2} + x\sqrt{4-x^2} + 4 + \right.$

$+2\,arcsin\frac{2}{2}+\frac{2\sqrt{4-2^2}}{2}-2\,arcsin\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}-\frac{2^2}{6}+4\Big)=$

$$\left|\begin{matrix} (x\geq 0)\Rightarrow |x|=x \\ 2\,arcsin\left(\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}\right)=2\,arcsin\left(\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\right)= \\ =2\,arccos\frac{|x|}{2}=2\left(\frac{\pi}{2}-arcsin\frac{|x|}{2}\right)=\pi-2\,arcsin\frac{x}{2}\end{matrix}\right|=\frac{1}{2\pi+8}\Big(2\,arcsin\frac{x}{2}+$$

$x\sqrt{4-x^2}++4+\pi-\pi+2\,arcsin\frac{x}{2}-\frac{2^2}{6}+4\Big)=\frac{1}{2\pi+8}\left(4\,arcsin\frac{x}{2}+x\sqrt{4-x^2}+\frac{22}{3}\right)$

При $(x,y)\in D_{12}\Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x,y)=\frac{1}{2\pi+8}\left(2+4y-\frac{2y^2}{3}+4\,arcsin\frac{x}{2}+x\sqrt{4-x^2}\right)=$
$\frac{1}{2\pi+8}\left(2+4\cdot 2-\frac{2\cdot 2^2}{3}+4\,arcsin\frac{x}{2}+x\sqrt{4-x^2}\right)=\frac{1}{2\pi+8}\left(\frac{22}{3}+4\,arcsin\frac{x}{2}+x\sqrt{4-x^2}\right)$

Отже, неперервність $F_{\vec{\xi}}(x,y)$ на межі D_{10} і D_{12} виконується.

21. Перевіримо неперервність $F_{\vec{\xi}}(x,y)$ на стику областей D_{10} і D_{13}:

$$\begin{cases} x=2 \\ 0\leq y\leq 2\end{cases}$$

При $(x,y)\in D_{10}\Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x,y)=\frac{1}{2\pi+8}\Big(2\,arcsin\frac{x}{2}+x\sqrt{4-x^2}+4+2\,arcsin\frac{y}{2}+$
$+\frac{y\sqrt{4-y^2}}{2}-2\,arcsin\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}-\frac{y^2}{6}+2y\Big)=\frac{1}{2\pi+8}\Big(2\,arcsin\frac{2}{2}+2\sqrt{4-2^2}+4+$
$+2\,arcsin\frac{y}{2}+\frac{y\sqrt{4-y^2}}{2}-2\,arcsin\frac{\sqrt{4-2^2}}{2}-\frac{y^2}{6}+2y\Big)=\frac{1}{2\pi+8}\Big(\pi+4+2\,arcsin\frac{y}{2}+$
$+\frac{y\sqrt{4-y^2}}{2}-\frac{y^2}{6}+2y\Big)$

При $(x,y)\in D_{13}\Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x,y)=\frac{1}{2\pi+8}\left(4-\frac{y^2}{6}+2y+2\,arcsin\frac{y}{2}+\frac{y\sqrt{4-y^2}}{2}+\pi\right)$

Отже, неперервність $F_{\vec{\xi}}(x,y)$ на межі D_{10} і D_{13} виконується.

22. Перевіримо неперервність $F_{\vec{\xi}}(x,y)$ на стику областей D_{11} і D_{12}:

$$\begin{cases} x=0 \\ 2\leq y\leq 3\end{cases}$$

При $(x,y)\in D_{11}\Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x,y)=\frac{1}{2\pi+8}\left(2-x^2+4x+4y-\frac{2y^2}{3}\right)=\frac{1}{2\pi+8}\left(2+4y-\frac{2y^2}{3}\right)$

При $(x, y) \in D_{12} \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x, y) = \frac{1}{2\pi+8}\left(2 + 4y - \frac{2y^2}{3} + 4\,arcsin\frac{x}{2} + x\sqrt{4 - x^2}\right) =$

$$= \frac{1}{2\pi + 8}\left(2 + 4y - \frac{2y^2}{3}\right)$$

Отже, неперервність $F_{\vec{\xi}}(x, y)$ на межі D_{11} і D_{12} виконується.

23. Перевіримо неперервність $F_{\vec{\xi}}(x, y)$ на стику областей D_{11} і D_{12}:

$$\begin{cases} x = 0 \\ 2 \le y \le 3 \end{cases}$$

При $(x, y) \in D_{11} \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x, y) = \frac{1}{2\pi+8}\left(2 - x^2 + 4x + 4y - \frac{2y^2}{3}\right) = \frac{1}{2\pi+8}\left(2 + 4y - \frac{2y^2}{3}\right)$

При $(x, y) \in D_{12} \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x, y) = \frac{1}{2\pi+8}\left(2 + 4y - \frac{2y^2}{3} + 4\,arcsin\frac{x}{2} + x\sqrt{4 - x^2}\right) =$

$$= \frac{1}{2\pi + 8}\left(2 + 4y - \frac{2y^2}{3}\right)$$

Отже, неперервність $F_{\vec{\xi}}(x, y)$ на межі D_{11} і D_{12} виконується.

24. Перевіримо неперервність $F_{\vec{\xi}}(x, y)$ на стику областей D_{11} і D_{15}:

$$\begin{cases} y = 3 \\ -1 \le x \le 0 \end{cases}$$

При $(x, y) \in D_{11} \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x, y) = \frac{1}{2\pi+8}\left(2 - x^2 + 4x + 4y - \frac{2y^2}{3}\right) = \frac{1}{2\pi+8}(2 - x^2 + 4x +$

$+12 - 6) = \frac{1}{2\pi+8}(-x^2 + 4x + 8)$

При $(x, y) \in D_{15} \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x, y) = \frac{1}{2\pi+8}(-x^2 + 4x + 8)$

Отже, неперервність $F_{\vec{\xi}}(x, y)$ на межі D_{11} і D_{12} виконується.

25. Перевіримо неперервність $F_{\vec{\xi}}(x, y)$ на стику областей D_{12} і D_{14}:

$$\begin{cases} x = 2 \\ 2 \le y \le 3 \end{cases}$$

При $(x, y) \in D_{12} \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x, y) = \frac{1}{2\pi+8}\left(2 + 4y - \frac{2y^2}{3} + 4\,arcsin\frac{x}{2} + x\sqrt{4 - x^2}\right) =$
$\frac{1}{2\pi+8}\left(2 + 4y - \frac{2y^2}{3} + 4\,arcsin\frac{2}{2} + 2\sqrt{4 - 2^2}\right) = \frac{1}{2\pi+8}\left(2 + 4y - \frac{2y^2}{3} + 2\pi\right)$

При $(x,y) \in D_{14} \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x,y) = \frac{1}{2\pi+8}\left(2 + 2\pi + 4y - \frac{2y^2}{3}\right)$

Отже, неперервність $F_{\vec{\xi}}(x,y)$ на межі D_{12} і D_{14} виконується.

26. Перевіримо неперервність $F_{\vec{\xi}}(x,y)$ на стику областей D_{12} і D_{16}:

$$\begin{cases} y = 3 \\ 0 \le x \le 2 \end{cases}$$

При $(x,y) \in D_{12} \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x,y) = \frac{1}{2\pi+8}\left(2 + 4y - \frac{2y^2}{3} + 4\,arcsin\frac{x}{2} + x\sqrt{4-x^2}\right) =$ $\frac{1}{2\pi+8}\left(2 + 12 - 6 + 4\,arcsin\frac{x}{2} + x\sqrt{4-x^2}\right) = \frac{1}{2\pi+8}\left(4\,arcsin\frac{x}{2} + x\sqrt{4-x^2} + 8\right)$

При $(x,y) \in D_{16} \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x,y) = \frac{1}{2\pi+8}\left(4\,arcsin\frac{x}{2} + x\sqrt{4-x^2} + 8\right)$

Отже, неперервність $F_{\vec{\xi}}(x,y)$ на межі D_{12} і D_{16} виконується.

27. Перевіримо неперервність $F_{\vec{\xi}}(x,y)$ на стику областей D_{13} і D_{14}:

$$\begin{cases} y = 2 \\ x \ge 2 \end{cases}$$

При $(x,y) \in D_{13} \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x,y) = \frac{1}{2\pi+8}\left(4 - \frac{y^2}{6} + 2y + 2\,arcsin\frac{y}{2} + \frac{y\sqrt{4-y^2}}{2} + \pi\right) =$

$$= \frac{1}{2\pi+8}\left(4 - \frac{2^2}{6} + 4 + 2\,arcsin\frac{2}{2} + \frac{2\sqrt{4-2^2}}{2} + \pi\right) = \frac{1}{2\pi+8}\left(2\pi + \frac{22}{3}\right)$$

При $(x,y) \in D_{14} \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x,y) = \frac{1}{2\pi+8}\left(2 + 2\pi + 4y - \frac{2y^2}{3}\right) = \frac{1}{2\pi+8}\left(2 + 2\pi + 4\cdot 2 -\right.$ $\left.- \frac{2\cdot 2^2}{3}\right) = \frac{1}{2\pi+8}\left(2\pi + \frac{22}{3}\right)$

Отже, неперервність $F_{\vec{\xi}}(x,y)$ на межі D_{13} і D_{14} виконується.

28. Перевіримо неперервність $F_{\vec{\xi}}(x,y)$ на стику областей D_{15} і D_{16}:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y \ge 3 \end{cases}$$

При $(x,y) \in D_{15} \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x,y) = \frac{1}{2\pi+8}(-x^2 + 4x + 8) = \frac{4}{\pi+4}$

При $(x,y) \in D_{16} \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x,y) = \frac{1}{2\pi+8}\left(4\,arcsin\frac{x}{2} + x\sqrt{4-x^2} + 8\right) = \frac{4}{\pi+4}$

Отже, неперервність $F_{\vec{\xi}}(x,y)$ на межі D_{15} і D_{16} виконується.

29. Перевіримо неперервність $F_{\vec{\xi}}(x,y)$ на стику областей D_{14} і D_{17}:

$$\begin{cases} y = 3 \\ x \geq 2 \end{cases}$$

При $(x, y) \in D_{14} \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x, y) = \frac{1}{2\pi+8}\left(2 + 2\pi + 4y - \frac{2y^2}{3}\right) = \frac{1}{2\pi+8}(2\pi + 8) = 1$

При $(x, y) \in D_{17} \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x, y) = 1$

Отже, неперервність $F_{\vec{\xi}}(x, y)$ на межі D_{14} і D_{17} виконується.

30. Перевіримо неперервність $F_{\vec{\xi}}(x, y)$ на стику областей D_{16} і D_{17}:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y \geq 3 \end{cases}$$

При $(x, y) \in D_{16} \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x, y) = \frac{1}{2\pi+8}\left(4\, arcsin\frac{x}{2} + x\sqrt{4 - x^2} + 8\right) = \frac{1}{2\pi+8}\left(4\, arcsin\frac{2}{2} + 2\sqrt{4 - 2^2} + 8\right) = \frac{1}{2\pi+8}(2\pi + 8) = 1$

При $(x, y) \in D_{17} \Rightarrow F_{\vec{\xi}}(x, y) = 1$

Отже, неперервність $F_{\vec{\xi}}(x, y)$ на межі D_{16} і D_{17} виконується.