Міністерство освіти і науки України

Національний технічний університет України „Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського"

„Інститут прикладного системного аналізу"

Кафедра ММСА

Розрахунково-графічна робота №1

Варіант №18

З дисципліни:

Дискретна математика

Виконав:

Студент I курсу

Групи КА-22

Марченко Д. С.

Перевірив:

Спекторський І. Я.

Київ 2022

1. Алгебра множин

1.1. Аксіоматичне доведення тотожностей

Довести тотожність аксіоматично. Операції „$\setminus$" та „Δ" розкрити за формулами

$A \setminus B = A \cap B^c$ та $A \Delta B = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)$

18. $(A \setminus B) \cap (B^c \Delta (B \Delta A)) = \varnothing$

Праву частину рівності неможливо спростити. Спростимо ліву частину, зводячи її до вигляду $\varnothing$. Перетворення будемо робити поступово, спрощуючи підформули, які входять у ліву частину (над знаками рівності вказано номери законів, які застосовувалися на даному переході):

1. $B \Delta A = (B \cap A^c) \cup (B^c \cap A)$

2. $B^c \Delta ((B \cap A^c) \cup (B^c \cap A)) =$

$= (B^c \cap ((B \cap A^c) \cup (B^c \cap A))^c) \cup ((B^c)^c \cap$

$\cap ((B \cap A^c) \cup (B^c \cap A))) \overset{11, 10, 8}{=} ((B^c \cap (B^c \cup A)) \cap$

$\cap (B \cup A^c)) \cup (B \cap ((B \cap A^c) \cup (B^c \cap A))) \overset{2, 6}{=}$

$= (B^c \cap (B \cup A^c)) \cup ((B \cap (B \cap A^c)) \cup$

$\cup (B \cap (B^c \cap A))) \overset{8,2,7,1}{=} ((B^c \cap B) \cup (B^c \cap A^c)) \cup$

$\cup ((B \cap A^c) \cup ((B \cap B^c) \cap A)) \overset{1,4,5}{=} (\varnothing \cup (B^c \cap A^c)) \cup$

$\cup ((B \cap A^c) \cup \varnothing) \overset{1,3}{=} (A^c \cap B^c) \cup (A^c \cap B) \overset{12}{=}$

$= A^c$

3. $(A \setminus B) \cap A^c = (A \cap B^c) \cap A^c \overset{1,8,4}{=} \varnothing \cap B^c \overset{5}{=} \varnothing$

Тотожність доведено.

1.2. Модельне доведення тотожностей

Довести тотожність модельним шляхом

18. $((A \setminus D) \times (C \cap B)) \cup (D \times ((B \cup C) \setminus (B \triangle C))) =$

$= (A \cup D) \times (C \cap B)$

1. Розглянемо належність пари (x, y) лівій частині тотожності:

$(x, y) \in (((A \setminus D) \times (C \cap B)) \cup (D \times ((B \cup C) \setminus (B \triangle C)))) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \{(x, y) \in ((A \setminus D) \times (C \cap B))) \vee ((x, y) \in$

$\in (D \times ((B \cup C) \setminus (B \triangle C)))\} \Leftrightarrow ((x \in (A \setminus D)) \wedge$

$\wedge (y \in (C \cap B))) \vee ((x \in D) \wedge (y \in ((B \cup C) \setminus (B \triangle C))))$

Розглянемо належність y формулі $((B\cup C)\setminus(B\Delta C))$.

$y\in((B\cup C)\setminus(B\Delta C))\Leftrightarrow(y\in(B\cup C))\wedge$

$\wedge(y\notin(B\Delta C))\Leftrightarrow((y\in B)\vee(y\in C))\wedge(y\notin((B\cap C')\cup$

$\cup(B'\cap C)))\Leftrightarrow((y\in B)\vee(y\in C))\wedge((y\in(B'\cup C))\wedge$

$\wedge(y\in(B\cup C')))\Leftrightarrow((y\in B)\vee(y\in C))\wedge$

$\wedge(((y\notin B)\vee(y\in C))\wedge((y\in B)\vee(y\notin C)))\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(((y\in B)\wedge(y\notin B))\vee(y\in C))\wedge((y\in B)\vee(y\notin C))$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(0\vee(y\in C))\wedge((y\in B)\vee(y\notin C))\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(y\in C)\wedge((y\in B)\vee(y\notin C))\Leftrightarrow((y\in C)\wedge(y\in B))\vee$

$\vee((y\in C)\wedge(y\notin C))\Leftrightarrow((y\in C)\wedge(y\in B))\vee 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(y\in B)\wedge(y\in C)\Leftrightarrow y\in(B\cap C)$

Отже, виконавши спрощення, отримуємо вираз

$((x\in(A\setminus D))\wedge(y\in(C\cap B)))\vee((x\in D)\wedge$

$\wedge(y\in(B\cap C)))\Leftrightarrow((x\in A)\wedge(x\notin D)\wedge$

$\wedge(y\in C)\wedge(y\in B))\vee((x\in D)\wedge(y\in B)\wedge(y\in C))$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow((y\in B)\wedge(y\in C))\wedge(((x\in A)\wedge(x\notin D))\vee(x\in D))\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow((y\in B)\wedge(y\in C))\wedge(((x\in A)\vee(x\in D))\wedge((x\notin D)\vee$

$\vee(x\in D)))\Leftrightarrow((y\in B)\wedge(y\in C))\wedge(((x\in A)\vee$

$\vee(x\in D))\wedge 1)\Leftrightarrow((y\in B)\wedge(y\in C))\wedge((x\in A)\vee(x\in D))$

2. Розпишемо належність пари (x, y) правої частини тотожності

$$(x, y) \in (A \cup D) \times (C \cap B) \Leftrightarrow (x \in (A \cup D)) \wedge$$

$$\wedge (y \in (C \cap B)) \Leftrightarrow ((x \in A) \vee (x \in D)) \wedge$$

$$\wedge ((y \in C) \wedge (y \in B)) \Leftrightarrow ((y \in B) \wedge (y \in C)) \wedge$$

$$\wedge ((x \in A) \vee (x \in D))$$

Отже, тотожність доведено.

1.3 Розв'язання системи рівнянь

Розв'язати систему рівнянь відносно змінної X.

18. $$\begin{cases} (A \cup X) \cap C = C \setminus B; \\ (X \setminus A) \setminus C = B; \end{cases}$$

1. Розв'яжемо перше рівняння системи.

$$(A \cup X) \cap C = C \setminus B \Leftrightarrow ((A \cup X) \cap C) \circ (C \setminus B) = \varnothing \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (((A \cup X) \cap C) \cap (C \cap B^c)^c) \cup (((A \cup X) \cap C)^c \cap (C \cap B^c)) = \varnothing \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow$ (За правилом де Моргана вносимо доповнення до пропорційних дужок) $\Leftrightarrow (((A \cup X) \cap C) \cap (C^c \cup B)) \cup$

$\cup \left(\left((A^c \cap X^c) \cup C^c \right) \cap (C \cap B^c) \right) = \varnothing \Leftrightarrow$ (за дистрибутивністю виносимо перетин під об'єднання) $\Leftrightarrow$

$\left((A \cup X) \cap \left(C \cap (C^c \cup B) \right) \right) \cup \left(\left((A^c \cap X^c) \cap (C \cap B^c) \right) \cup (C^c \cap C \cap B^c) \right) = \varnothing$

$$\Updownarrow$$

$\left((A \cup X) \cap (C \cap B) \right) \cup (A^c \cap X^c \cap C \cap B^c) = \varnothing$

$$\Updownarrow$$

$(A \cap B \cap C) \cup (X \cap C \cap B) \cup (A^c \cap X^c \cap C \cap B^c) = \varnothing$

(випишемо і розв'яжемо еквівалентну систему рівнянь)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A \cap B \cap C = \varnothing \\ X \cap C \cap B = \varnothing \\ A^c \cap X^c \cap C \cap B^c = \varnothing \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A \cap B \cap C = \varnothing \\ X \cap (C^c \cup B^c)^c = \varnothing \\ (A^c \cap C \cap B^c) \subset X \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A \cap B \cap C = \varnothing \\ X \subset (B^c \cup C^c) \\ (A^c \cap C \cap B^c) \subset X \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A \cap B \cap C = \varnothing \\ (A^c \cap C \cap B^c) \subset X \subset (B^c \cup C^c) \end{cases}$$

2. Розв'яжемо друге рівняння системи, враховуючи умови, отримані при розв'язанні першого рівняння.

$$(X \setminus A) \setminus C = B \Leftrightarrow ((X \cap A^c) \cap C^c) \triangle B = \emptyset \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ((X \cap A^c \cap C^c) \cap B^c) \cup ((X \cap A^c \cap C^c)^c \cap B) = \emptyset \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (X \cap A^c \cap B^c \cap C^c) \cup ((X^c \cup A \cup C) \cap B) = \emptyset \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (X \cap A^c \cap B^c \cap C^c) \cup (X^c \cap B) \cup (A \cap B) \cup (C \cap B) = \emptyset \Leftrightarrow$$

(випишемо і розв'яжемо еквівалентну систему рівнянь)

$$\begin{cases} X \cap A^c \cap B^c \cap C^c = \emptyset \\ X^c \cap B = \emptyset \\ A \cap B = \emptyset \\ C \cap B = \emptyset \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A \cap B = \emptyset \\ B \cap C = \emptyset \\ B \subset X \subset (A \cup B \cup C) \end{cases}$$

3. Зводячи розв'язки першого і другого рівняння до загальної системи, отримуємо:

$$\begin{cases} (A \cup X) \cap C = C \setminus B \\ (X \setminus A) \setminus C = B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A \cap B = \emptyset \\ B \cap C = \emptyset \\ A \cap B \cap C = \emptyset \\ (A^c \cap C \cap B^c) \subset X \subset (B^c \cup C^c) \\ B \subset X \subset (A \cup B \cup C) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A \cap B = \emptyset \\ B \cap C = \emptyset \\ A \cap B \cap C = \emptyset \\ (A^c \cap C \cap B^c) \cup B \subset X \subset (B^c \cup C^c) \cap (A \cup B \cup C) \end{cases}$$

$$(A^c \cap C \cap B^c) \cup B \Leftrightarrow (A^c \cup B) \cap (C \cup B) \cap (B^c \cup B) \Leftrightarrow B \cup (C \setminus A)$$

$(B^c \cup C^c) \cap (A \cup B \cup C) \Leftrightarrow (B \cap C)^c \cap (A \cup B \cup C) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} \text{За умови} \\ B \cap C = \varnothing \end{array} \right| \Leftrightarrow U \cap (A \cup B \cup C) \Leftrightarrow A \cup B \cup C$

$$\begin{cases} A \cap B = \varnothing \\ B \cap C = \varnothing \\ A \cap B \cap C = \varnothing \\ (B \cup (C \setminus A)) \subset X \subset (A \cup B \cup C) \end{cases}$$

Відповідь: Якщо $A \cap B = \varnothing$, $B \cap C = \varnothing$ та $A \cap B \cap C = \varnothing$, розв'язками системи є ті і тільки ті X, що задовольняють умову $(B \cup (C \setminus A)) \subset X \subset (A \cup B \cup C)$.

Інакше система розв'язків не має.