

Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης  
Πολυτεχνική Σχολή  
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

## Εργασία Συστημάτων Αυτομάτου Ελέγχου

Αξιμιώτης Δημήτρης 10622

Νοέμβριος 2024

# 1 Τμήμα Α

## 1.1 N(s)=1

### 1.1.1 i)

Σύμφωνα με το μπλοκ διάγραμμα η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος κλειστού βρόχου δίνεται από:

$$H_c = \frac{y}{r} = \frac{H(s)}{1 + H(s)}$$

κάνοντας αντικατάσταση

$$H_c = \frac{k}{s^2 * T + s + k}$$

ή

$$H_c = \frac{\frac{k}{T}}{s^2 + \frac{s}{T} + \frac{k}{T}}$$

οπότε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του κλειστού βρόχου δίνεται από :

$$s^2 + \frac{s}{T} + \frac{k}{T}$$

με  $\omega_n^2 = \frac{k}{T}$  και  $2\zeta\omega_n = \frac{1}{T}$  οπότε προκύπτει  $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{T}}$  και  $\zeta = \frac{1}{2\sqrt{kT}}$ . Μπορούμε να υπολογίσουμε τις εξισώσεις κατάστασης ως προς το σφάλμα  $\varepsilon(t) = r(t) - y(t)$

$$\frac{y}{u} = H(s)$$

,

$$y = \frac{k}{s(Ts + 1)}u$$

,

$$ys^2T + ys = ku$$

παίρνοντας αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace,

$$\ddot{y}T + \dot{y} = ku$$

Εφόσον  $u=e(t)$

$$\ddot{y}T + \dot{y} = ke$$

Μπορούμε να δημιουργήσουμε μορφές του σφάλματος στην εξίσωση ως εξής:

$$\ddot{r}T - \ddot{y}T + \dot{r} - \dot{y} + ke = \ddot{r}T + \dot{r}$$

$$\ddot{e}T + \dot{e} + ke = \ddot{r}T + \dot{r}$$

Επιλέγω καταστάσεις τις φασικές μεταβλητές του σφάλματος δηλαδή  $x_1 = e$  και  $x_2 = \dot{e}$  οπότε έχουμε γραμμικό σύστημα της μορφής:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\frac{1}{T}x_2 - \frac{k}{T}x_1 + \ddot{r} + \frac{1}{T}\dot{r} \end{aligned} .$$

### 1.1.2 ii)

-Επιλέγοντας βηματική είσοδο  $r(t) = A$  ισχύει ότι  $\ddot{r} = 0$  και  $\dot{r} = 0$  οπότε οι εξισώσεις κατάστασης του συστήματος μετασχηματίζονται ως εξής:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\frac{1}{T}x_2 - \frac{k}{T}x_1 \end{aligned} .$$

Έχουμε σημεία ισορροπίας για  $\dot{x}_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$  και  $\dot{x}_2 = 0$ ,  $x_1 = 0$ . Θα εξετάσουμε την ευστάθεια του γραμμικού συστήματος βρίσκοντας τις ιδιοτιμές του.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{T} & -\frac{1}{T} \end{bmatrix}$$

$$\det(sI - A) = \begin{vmatrix} s & -1 \\ \frac{k}{T} & s + \frac{1}{T} \end{vmatrix} = s^2 + \frac{1}{T}s + \frac{k}{T}$$

Οι συντελεστές του πολυωνύμου είναι θετικοί και εφόσον είναι 2ου βαθμού έχουμε ρίζες στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο, οπότε από το κριτήριο Hurwitz το (0,0) είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας του συστήματος. Συνεπώς ξέρουμε πως η τιμή της εξόδου με την πάροδο του χρόνου πλησιάζει ολοένα και περισσότερο τη τιμή της είσοδου.

Για  $\zeta < 1$ :

$$t_s = \frac{4}{2\zeta\omega_n} = 4T$$

Άρα όσο μεγαλύτερο είναι το T τόσο πιο αργή είναι η σύγκλιση του y στο r.

Για  $\zeta \geq 1$ :

Ο χρόνος αποκατάστασης εξαρτάται από την ιδιοτιμή που είναι πιο κοντά στον φανταστικό άξονα. Λύνοντας την εξίσωση του πολυωνύμου παίρνουμε ρίζες :

$$s_1 = \frac{-\frac{1}{T} + \sqrt{\frac{1}{T^2} - \frac{4k}{T}}}{2}$$

$$s_2 = \frac{-\frac{1}{T} - \sqrt{\frac{1}{T^2} - \frac{4k}{T}}}{2}$$

οπότε ο χρόνος αποκατάστασης εξαρτάται από την  $s_2$  με :  $t_s = \frac{8T}{1 - \sqrt{1 - 4kT}}$  Συνεπώς όσο μεγαλύτερο το T πάλι παρατηρούμε πως έχουμε πιο αργή σύγκλιση στο (0,0) ενώ αυξάνοντας το k το  $t_s$  για  $\zeta \geq 1$  παίρνει μικρότερη τιμή.

-Για ράμπα κλίσης  $B$   $r(t) = Bt$  οι εξισώσεις κατάστασης παίρνουν μορφή :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\frac{1}{T}x_2 - \frac{k}{T}x_1 + \frac{B}{T} \end{aligned} .$$

Το σύστημα έχει σημείο ισορροπίας για  $x_2 = 0$  και  $x_1 = \frac{B}{k}$ . Παρατηρούμε πως όσο μεγαλύτερο είναι το  $k$  τόσο μικρότερο είναι το σφάλμα της εξόδου στην μόνιμη κατάσταση δηλαδή η έξοδος τείνει να ταυτιστεί με την ράμπα που βάζουμε ως είσοδο. Ένας άλλος τρόπος να το αποδείξουμε είναι να πάρουμε το μόνιμο σφάλμα ταχύτητας με

$e_{ssv} = \frac{1}{K_v}$ ,  $K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sA(s)$ , με  $A(s) = H(s)$  άρα  $K_v = k$  και για πλάτος  $B$  έχουμε τελικό σφάλμα ταχύτητας  $e_v = \frac{B}{k}$ .

Μπορούμε να ορίσουμε συνάρτηση Lyapunov:  $V(x_1, x_2) = \frac{T}{2k}x_2^2 + \frac{1}{2}(x_1 - \frac{B}{k})^2$  είναι θετικά ορισμένη αφού μηδενίζεται μόνο στο σημείο ισορροπίας  $(B/k, 0)$ .

Παίρνουμε την παράγωγο και έχουμε :

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{T}{k}x_2\dot{x}_2 + (x_1 - \frac{B}{k})\dot{x}_1 \\ \dot{V} &= \frac{T}{k}x_2(-\frac{k}{T}x_1 - \frac{1}{T}x_2 + \frac{B}{T}) + x_1x_2 - \frac{B}{k}x_2 \\ \dot{V} &= -\frac{1}{k}x_2^2 \leq 0 \end{aligned}$$

είναι αρνητικά ημιορισμένη αφού μηδενίζεται για κάθε  $(\alpha, 0)$  οπότε θα χρησιμοποιήσουμε θεώρημα Lassaie. Άρα το  $(B/k, 0)$  είναι ευσταθές σημείο ισορροπίας.

-Για  $x_2 = 0, \dot{x}_2 = 0$  προκύπτει  $\dot{x}_1 = 0, x_1 = \frac{B}{k}$  οπότε το σύνολο  $(\frac{B}{k}, 0)$  είναι το μεγαλύτερο αμετάβλητο σύνολο οπότε το  $(\frac{B}{k}, 0)$  είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας.

### 1.1.3 iii)

Προσομοιώσεις για βηματική είσοδο πλάτους  $A=0.5$

1) Για αρχικές συνθήκες  $(y(0), \dot{y}(0)) = (-2, 0)$ ,  $(r(0), \dot{r}(0)) = (0.5, 0)$

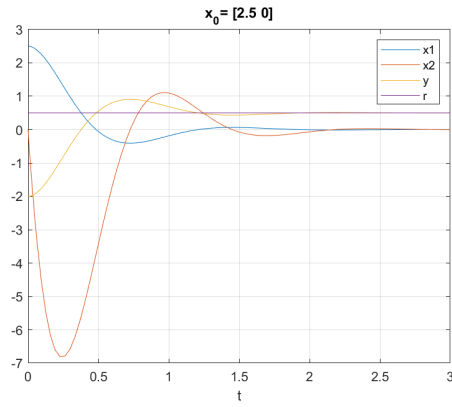


Figure 1: Χρονική μεταβολή των καταστάσεων/Απόκριση της εξόδου στον χρόνο

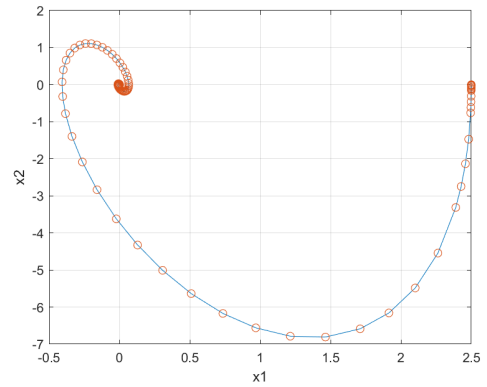


Figure 2: Καταστάσεις στο φασικό επίπεδο

2) Για αρχικές συνθήκες  $(y(0), \dot{y}(0)) = (1, 0)$ ,  $(r(0), \dot{r}(0)) = (0.5, 0)$

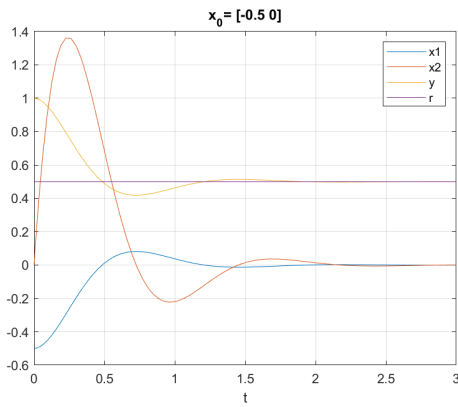


Figure 3

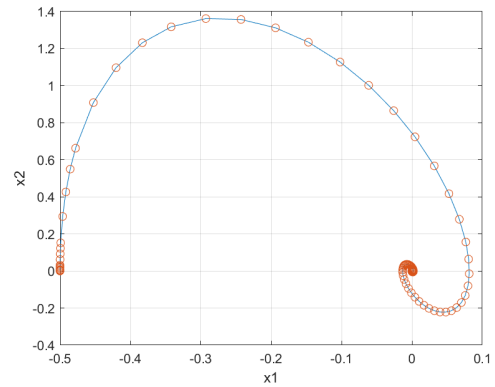


Figure 4

3) Για αρχικές συνθήκες  $(y(0), \dot{y}(0)) = (0, 0.5)$ ,  $(r(0), \dot{r}(0)) = (0.5, 0)$

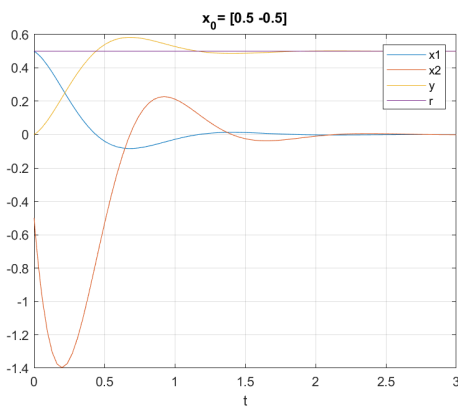


Figure 5: Χρονική μεταβολή των καταστάσεων/Απόκριση της εξόδου στον χρόνο

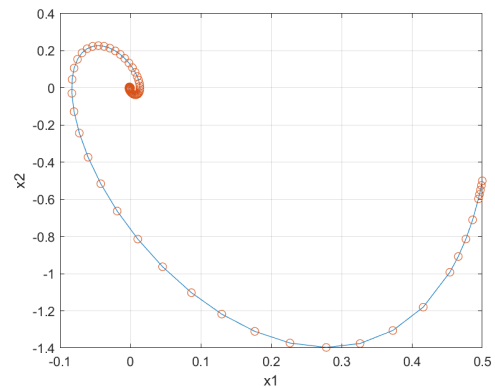


Figure 6: Καταστάσεις στο φασικό επίπεδο

4) Για αρχικές συνθήκες  $(y(0), y'(0))=(2,2)$ ,  $(r(0), r'(0))=(0.5,0)$

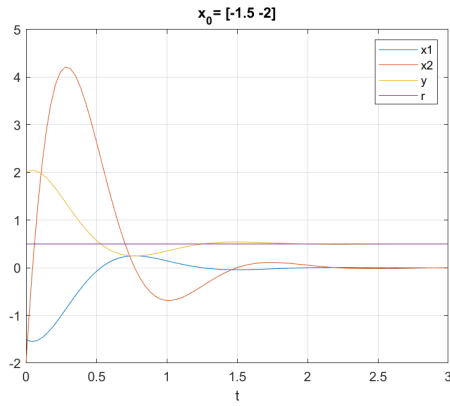


Figure 7: Χρονική μεταβολή των καταστάσεων/Απόκριση της εξόδου στον χρόνο

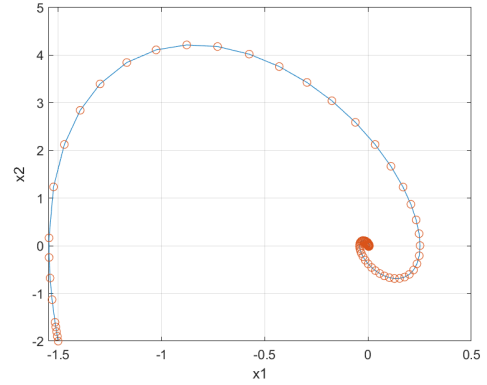


Figure 8: Καταστάσεις στο φασικό επίπεδο

5) Για αρχικές συνθήκες  $(y(0), y'(0))=(2.5,-1)$ ,  $(r(0), r'(0))=(0.5,0)$

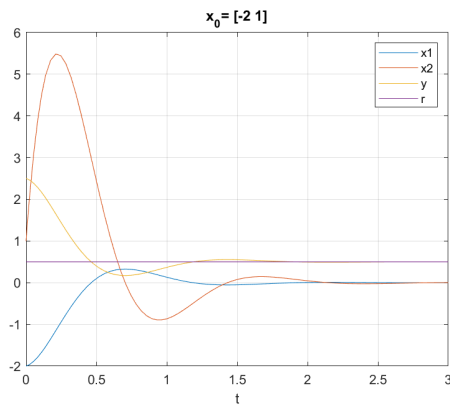


Figure 9: Χρονική μεταβολή των καταστάσεων/Απόκριση της εξόδου στον χρόνο

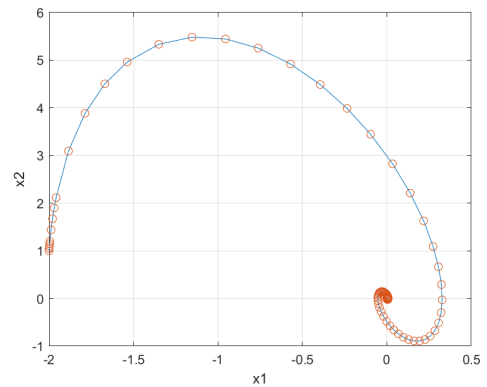


Figure 10: Καταστάσεις στο φασικό επίπεδο

6) Για αρχικές συνθήκες  $(y(0), y'(0))=(1.1,2)$ ,  $(r(0), r'(0))=(0.5,0)$

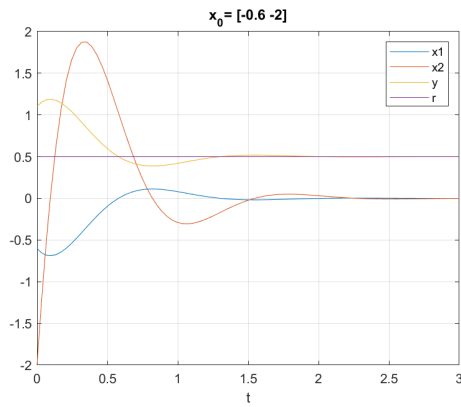


Figure 11: Χρονική μεταβολή των καταστάσεων/Απόκριση της εξόδου στον χρόνο

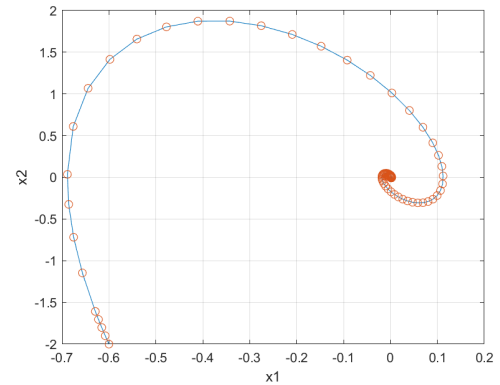


Figure 12: Καταστάσεις στο φασικό επίπεδο

Παρατηρούμε πως για κάθε αρχικό σημείο η απόκριση συγκλίνει ασυμπτωτικά στην τιμή της εισόδου  $r$ . Επίσης οι καταστάσεις συγκλίνουν ασυμπτωτικά στο 0, πράγμα που το περιμένα όπως αναλύσαμε παραπάνω.

-Προσομοιώσεις για είσοδο ράμπας  $r(t)=Bt$  όπου  $B=1.2$

1) Για αρχικές συνθήκες  $(y(0), \dot{y}(0))=(-2,0)$ ,  $(r(0), \dot{r}(0))=(0,1.2)$

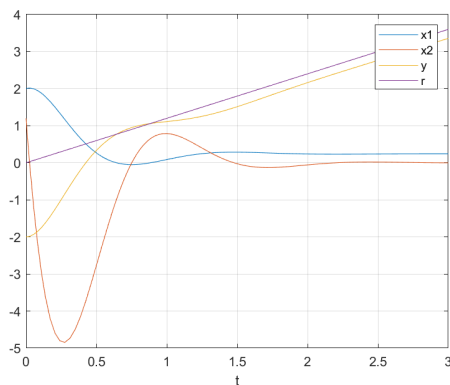


Figure 13: Χρονική μεταβολή των καταστάσεων/Απόκριση της εξόδου στον χρόνο

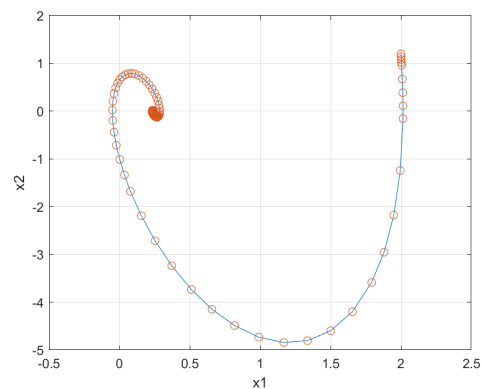


Figure 14: Καταστάσεις στο φασικό επίπεδο

2) Για αρχικές συνθήκες  $(y(0), \dot{y}(0))=(1,0)$ ,  $(r(0), \dot{r}(0))=(0,1.2)$

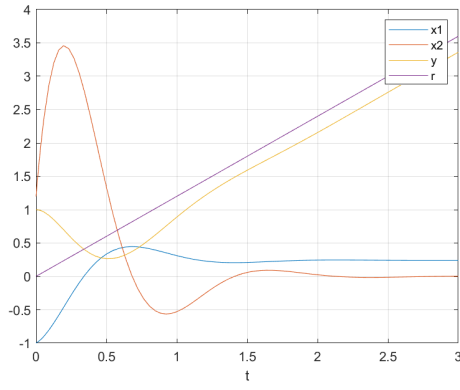


Figure 15

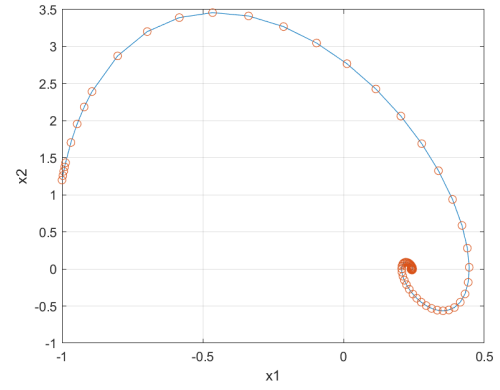


Figure 16

3) Για αρχικές συνθήκες  $(y(0), y'(0)) = (0, 0.5)$ ,  $(r(0), r'(0)) = (0, 1.2)$

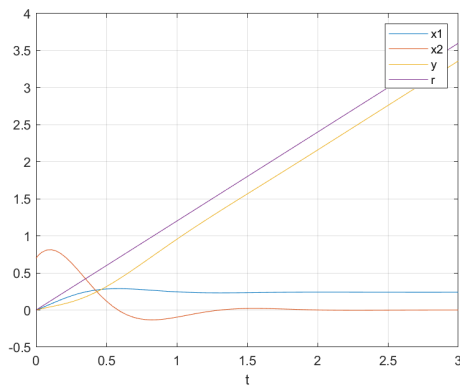


Figure 17: Χρονική μεταβολή των καταστάσεων/Απόκριση της εξόδου στον χρόνο

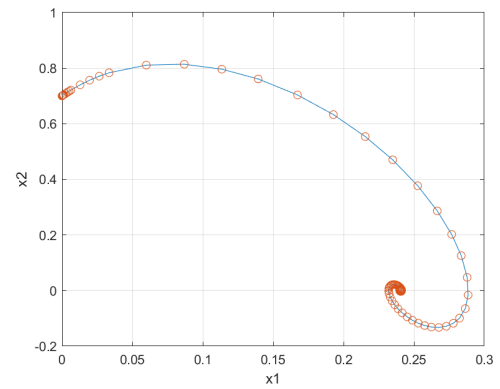


Figure 18: Καταστάσεις στο φασικό επίπεδο

4) Για αρχικές συνθήκες  $(y(0), y'(0)) = (2, 2)$ ,  $(r(0), r'(0)) = (0, 1.2)$



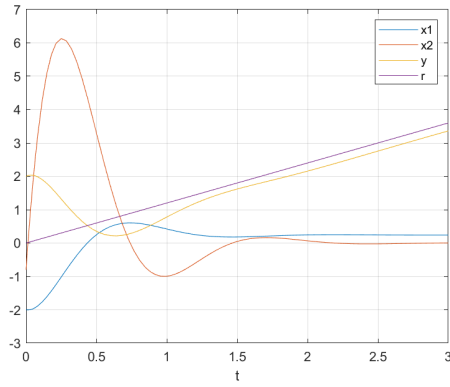


Figure 19: Χρονική μεταβολή των καταστάσεων/Απόκριση της εξόδου στον χρόνο

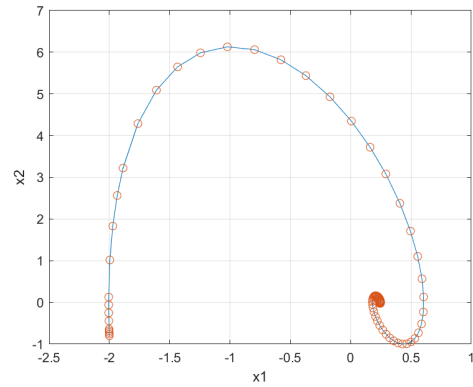


Figure 20: Καταστάσεις στο φασικό επίπεδο

5) Για αρχικές συνθήκες  $(y(0), \dot{y}(0)) = (2.5, -1)$ ,  $(r(0), \dot{r}(0)) = (0, 1.2)$

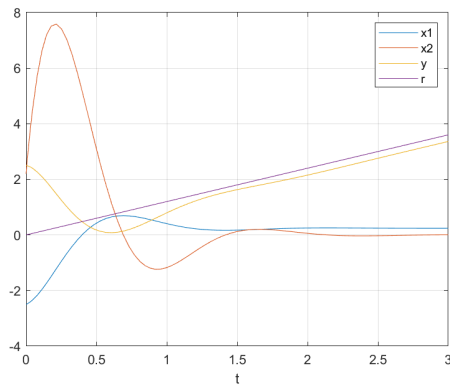


Figure 21: Χρονική μεταβολή των καταστάσεων/Απόκριση της εξόδου στον χρόνο

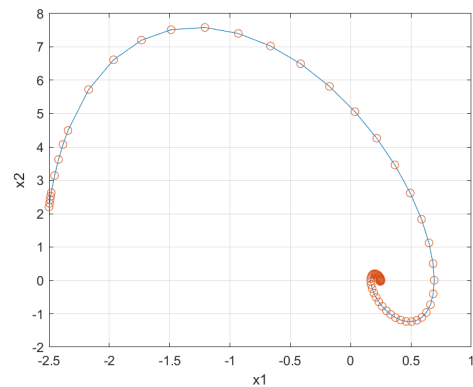


Figure 22: Καταστάσεις στο φασικό επίπεδο

6) Για αρχικές συνθήκες  $(y(0), \dot{y}(0)) = (1.1, 2)$ ,  $(r(0), \dot{r}(0)) = (0, 1.2)$

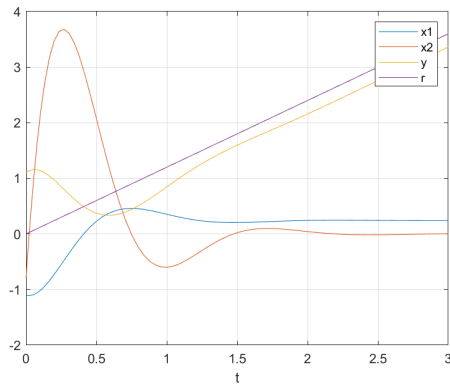


Figure 23: Χρονική μεταβολή των καταστάσεων/Απόκριση της εξόδου στον χρόνο

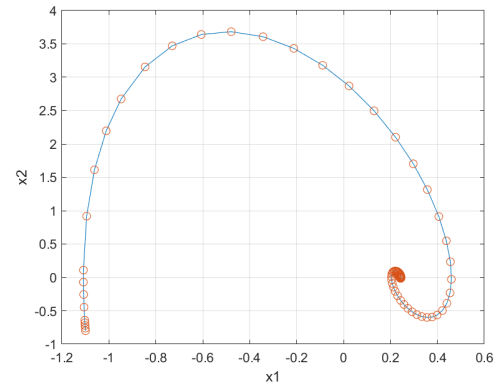


Figure 24: Καταστάσεις στο φασικό επίπεδο

Παρατηρούμε ότι η έξοδος  $y$  συγκλίνει στην είσοδο  $r$  ωστόσο με ένα σφάλμα το οποίο είναι σταθερό και το έχουμε υπολογίσει παραπάνω. Για δεδομένη τιμή  $B=1.2$  και  $k=5$  προκύπτει ότι το σημείο ισορροπίας  $x_1 = 0.24$  όπως και το  $e_{ssv}$  γεγονός που επαληθεύεται ακριβώς από τις προσομοιώσεις των παραπάνω γραφικών παραστάσεων.

## 1.2 $N(s)=ae(s)$

### 1.2.1 i)

Στην ουσία έχουμε μια είσοδο ελέγχου για την οποία ισχύει

$$u = \begin{cases} e(t), & \text{αν } |e(t)| > e_0, \\ ae(t), & \text{αν } |e(t)| \leq e_0. \end{cases}$$

Όποτε εφόσον ισχύει ότι  $\frac{y}{u} = H(s)$

$$s(sT + 1)y = ku$$

παίρνοντας αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace έχουμε

$$T\ddot{y} + \dot{y} = ku$$

Διακρίνουμε 2 περιπτώσεις για τον ελεγκτή  $u$  οπότε για

α)  $u=e(t)$

$$T\ddot{y} + \dot{y} = ke(t)$$

όπως αναλύσαμε πιο πάνω

$$T\ddot{e} + \dot{e} + ke(t) = T\ddot{r} + \dot{r}$$

και σε εξισώσεις κατάστασης

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\frac{1}{T}x_2 - \frac{k}{T}x_1 + \ddot{r} + \frac{1}{T}\dot{r} \end{aligned} .$$

$$|x_1| > e_0$$

με ίδια ανάλυση όπως πριν πάλι προκύπτει  $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{T}}, \zeta = \frac{1}{2\sqrt{kT}}$

$$\beta) u = ae(t)$$

$$T\ddot{y} + \dot{y} = kae(t)$$

όπως αναλύσαμε πιο πάνω

$$T\ddot{e} + \dot{e} + kae(t) = T\ddot{r} + \dot{r}$$

και σε εξισώσεις κατάστασης

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\frac{1}{T}x_2 - \frac{ak}{T}x_1 + \ddot{r} + \frac{1}{T}\dot{r} \end{aligned} .$$

$$|x_1| \leq e_0$$

Η συνάρτηση κλειστού βρόχου θα δίνεται από

$$H_c = \frac{y}{r} = \frac{aH(s)}{1 + aH(s)}$$

κάνοντας αντικατάσταση

$$H_c = \frac{ka}{s^2 * T + s + ka}$$

άρα έχουμε χαρακτηριστικό πολυώνυμο με

$$s^2 + \frac{s}{T} + \frac{k\alpha}{T}$$

$$\text{και } \omega_n = \sqrt{\frac{ka}{T}}, \zeta = \frac{1}{2\sqrt{kaT}}$$

### 1.2.2 ii)

α)  $r(t) = A$  βηματική είσοδος Για  $|x_1| \leq e_0$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\frac{1}{T}x_2 - \frac{k}{T}x_1 \end{aligned} .$$

έχουμε μοναδικό σημείο ισορροπίας το (0,0). Προκύπτει με ίδια ανάλυση που κάναμε στο πρώτο μέρος η ασυμπτωτική ευστάθεια στου σημείου ισορροπίας.

Όταν  $|x_1| > e_0$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\frac{1}{T}x_2 - \frac{k\alpha}{T}x_1 \end{aligned} .$$

πάλι προκύπτει σημείο ισορροπίας το  $(0,0)$  όμως  $|x_1| > e_0$  οπότε το  $x_1$  δεν μπορεί να πάρει την τιμή 0 και δεν έχουμε σημείο ισορροπίας.

β) Για ράμπα κλίσης B  $r(t) = Bt$  οι εξισώσεις κατάστασης παίρνουν μορφή :

Όταν  $|x_1| > e_0$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\frac{1}{T}x_2 - \frac{k}{T}x_1 + \frac{B}{T} \end{aligned} .$$

έχουμε σημείο ισορροπίας όταν  $x_2 = 0$  και  $x_1 = \frac{B}{k}$  μπορεί να είναι σημείο ισορροπίας μόνο αν το  $|\frac{B}{k}| > e_0$  αλλιώς όταν  $\frac{B}{k} \leq e_0$  δεν έχουμε σημείο ισορροπίας όταν  $|x_1| > e_0$ .

Όταν  $|x_1| \leq e_0$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\frac{1}{T}x_2 - \frac{ka}{T}x_1 + \frac{B}{T} \end{aligned} .$$

θα έχουμε σημείο ισορροπίας το όταν  $x_2 = 0$  και  $x_1 = \frac{B}{ka}$  οπότε αν  $|\frac{B}{ka}| \leq e_0$  έχουμε σημείο ισορροπίας. Στην περίπτωση που ισχύει ταυτόχρονα ότι  $|\frac{B}{ka}| > e_0$  και  $|\frac{B}{k}| \leq e_0$ . Μπορούμε με ίδια συνάρτηση Lyapunov κεντραρισμένη στα σημεία ισορροπίας να αποδείξουμε την ασυμπτωτική ευστάθεια.

### 1.2.3 iii)

-Προσομοιώσεις για βηματική είσοδο πλάτους A=0.5

1) Για αρχικές συνθήκες  $(y(0), \dot{y}(0)) = (-2, 0)$ ,  $(r(0), \dot{r}(0)) = (0.5, 0)$

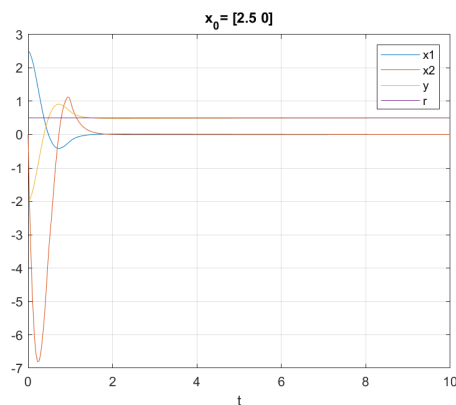


Figure 25: Χρονική μεταβολή των καταστάσεων/Απόκριση της εξόδου στον χρόνο

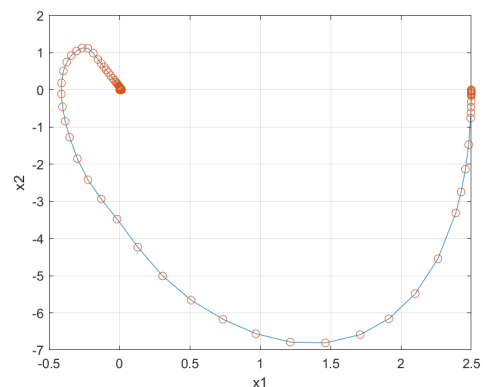


Figure 26: Καταστάσεις στο φασικό επίπεδο

2) Για αρχικές συνθήκες  $(y(0), \dot{y}(0))=(1,0)$ ,  $(r(0), \dot{r}(0))=(0.5,0)$

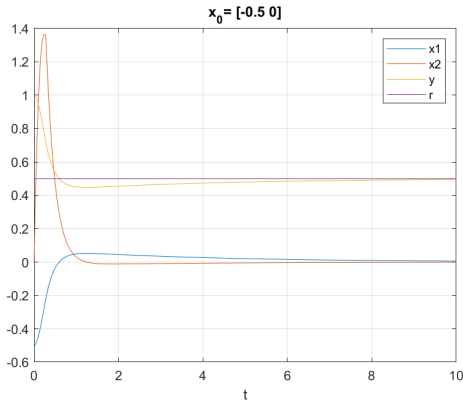


Figure 27

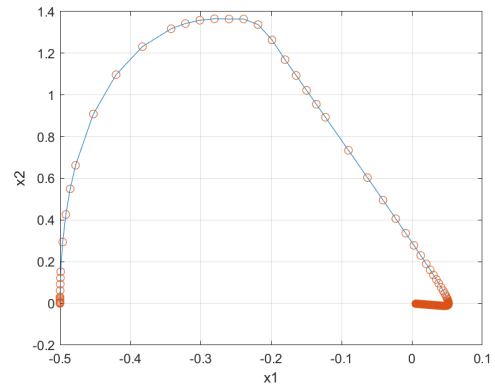


Figure 28

3) Για αρχικές συνθήκες  $(y(0), \dot{y}(0))=(0,0.5)$ ,  $(r(0), \dot{r}(0))=(0.5,0)$

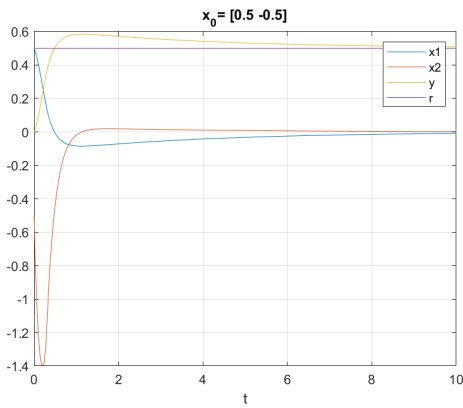


Figure 29: Χρονική μεταβολή των καταστάσεων/Απόκριση της εξόδου στον χρόνο

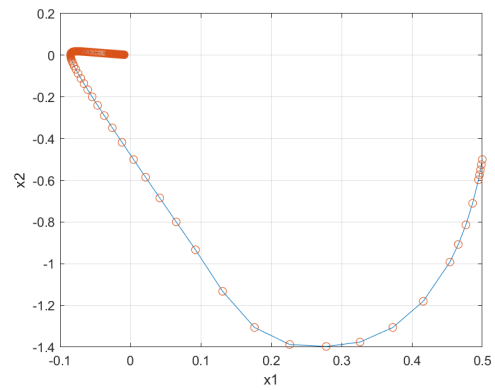


Figure 30: Καταστάσεις στο φασικό επίπεδο

4) Για αρχικές συνθήκες  $(y(0), \dot{y}(0))=(2,2)$ ,  $(r(0), \dot{r}(0))=(0.5,0)$

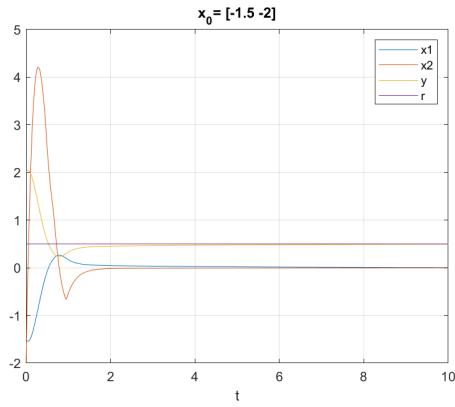


Figure 31: Χρονική μεταβολή των καταστάσεων/Απόκριση της εξόδου στον χρόνο

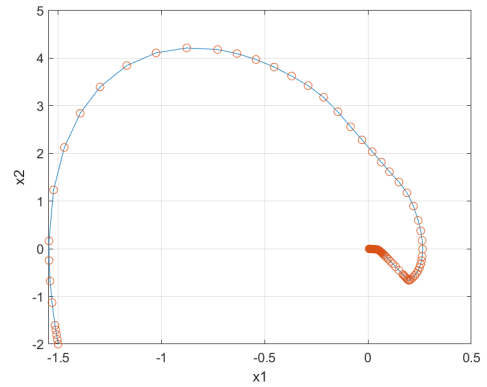


Figure 32: Καταστάσεις στο φασικό επίπεδο

5) Για αρχικές συνθήκες  $(y(0), \dot{y}(0)) = (2.5, -1)$ ,  $(r(0), \dot{r}(0)) = (0.5, 0)$

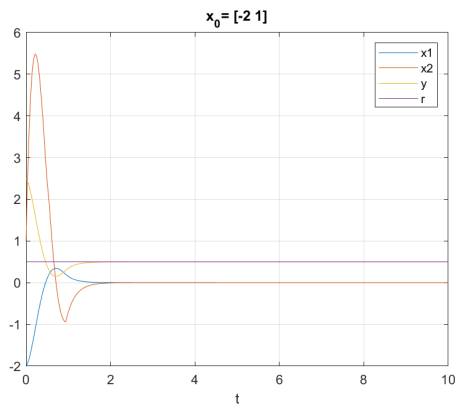


Figure 33: Χρονική μεταβολή των καταστάσεων/Απόκριση της εξόδου στον χρόνο

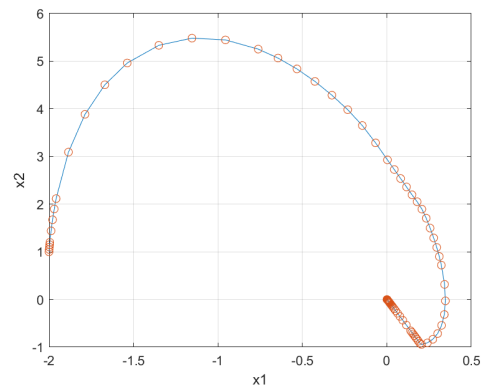


Figure 34: Καταστάσεις στο φασικό επίπεδο

6) Για αρχικές συνθήκες  $(y(0), \dot{y}(0)) = (1.1, 2)$ ,  $(r(0), \dot{r}(0)) = (0.5, 0)$

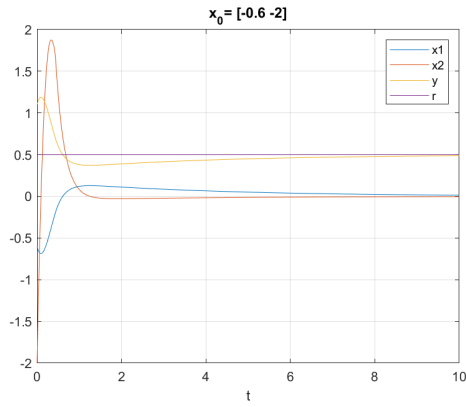


Figure 35: Χρονική μεταβολή των καταστάσεων/Απόκριση της εξόδου στον χρόνο

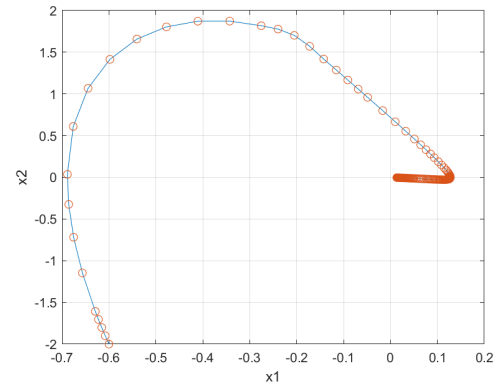


Figure 36: Καταστάσεις στο φασικό επίπεδο

Όπως περιμέναμε έχουμε ασυμπτωτική ευσταθεία του συστήματος των καταστάσεων οπότε και η έξοδος συγκλίνει ασυμπτωτικά στην είσοδο  $r$ .

-Προσομοιώσεις για είσοδο ράμπας  $r(t)=Bt$  όπου  $B=1.2$

1) Για αρχικές συνθήκες  $(y(0), y'(0))=(-2, 0)$ ,  $(r(0), r'(0))=(0, 1.2)$

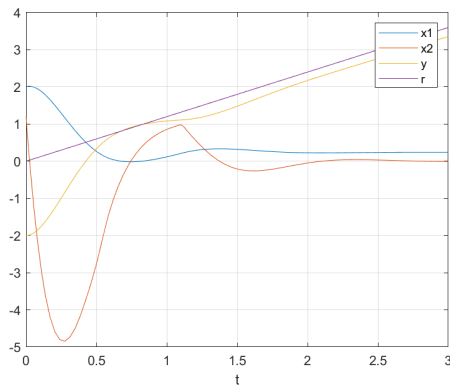


Figure 37: Χρονική μεταβολή των καταστάσεων/Απόκριση της εξόδου στον χρόνο

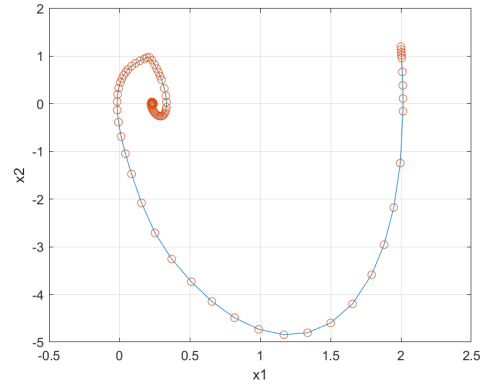


Figure 38: Καταστάσεις στο φασικό επίπεδο

2) Για αρχικές συνθήκες  $(y(0), y'(0))=(1, 0)$ ,  $(r(0), r'(0))=(0, 0.5)$

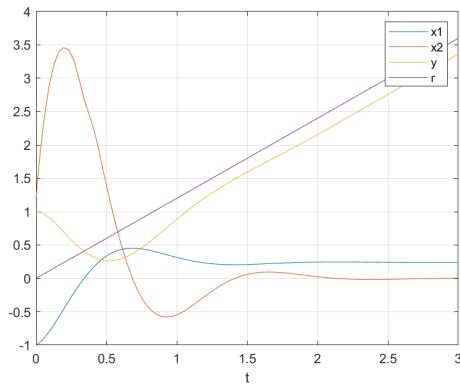


Figure 39

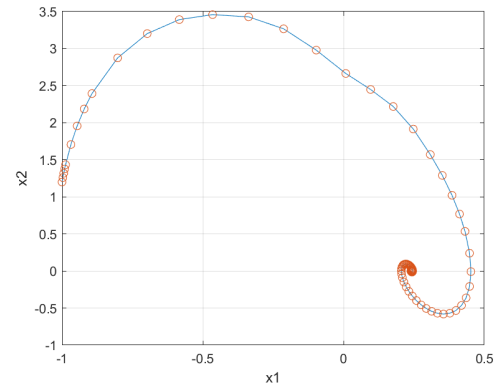


Figure 40

3) Για αρχικές συνθήκες  $(y(0), y'(0)) = (0, 0.5)$ ,  $(r(0), r'(0)) = (0, 1.2)$

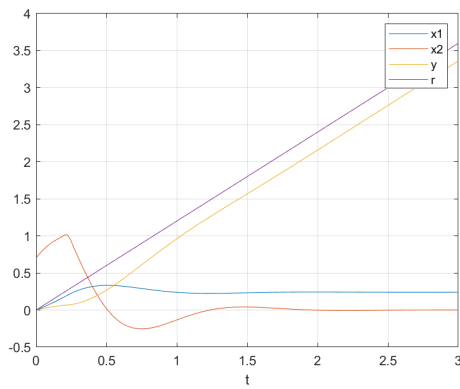


Figure 41: Χρονική μεταβολή των καταστάσεων/Απόκριση της εξόδου στον χρόνο

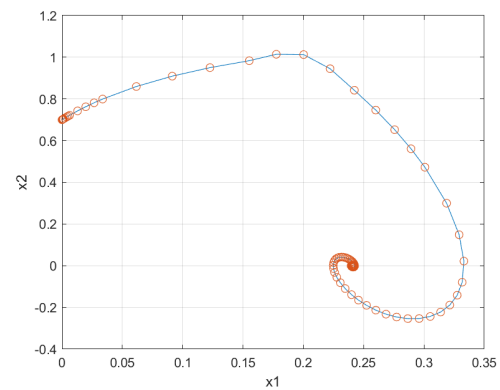


Figure 42: Καταστάσεις στο φασικό επίπεδο

4) Για αρχικές συνθήκες  $(y(0), y'(0)) = (2, 2)$ ,  $(r(0), r'(0)) = (0, 1.2)$



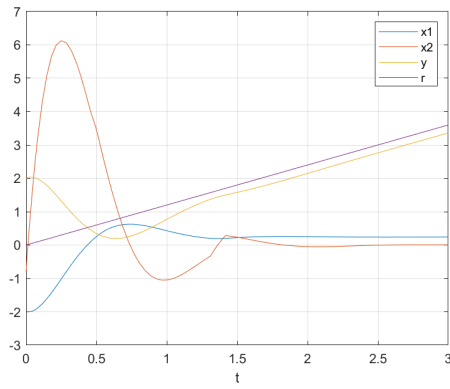


Figure 43: Χρονική μεταβολή των καταστάσεων/Απόκριση της εξόδου στον χρόνο

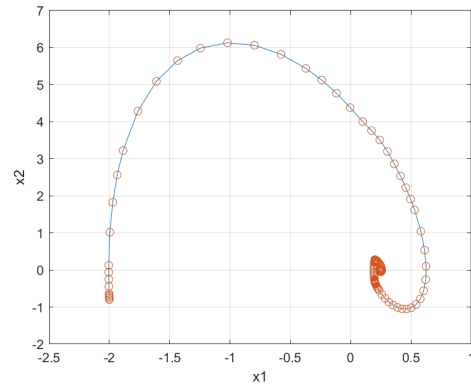


Figure 44: Καταστάσεις στο φασικό επίπεδο

5) Για αρχικές συνθήκες  $(y(0), \dot{y}(0)) = (2.5, -1)$ ,  $(r(0), \dot{r}(0)) = (0, 1.2)$

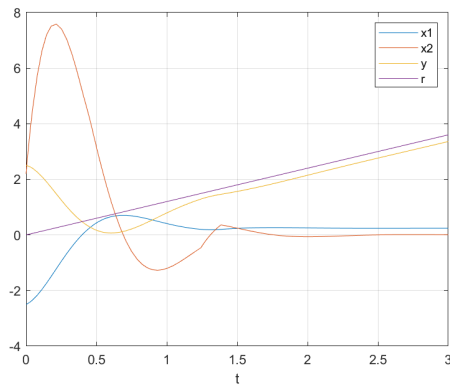


Figure 45: Χρονική μεταβολή των καταστάσεων/Απόκριση της εξόδου στον χρόνο

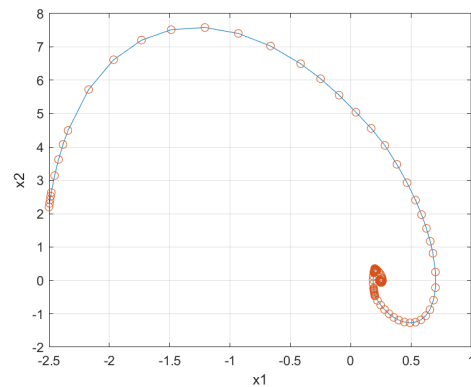


Figure 46: Καταστάσεις στο φασικό επίπεδο

6) Για αρχικές συνθήκες  $(y(0), \dot{y}(0)) = (1.1, 2)$ ,  $(r(0), \dot{r}(0)) = (0, 1.2)$

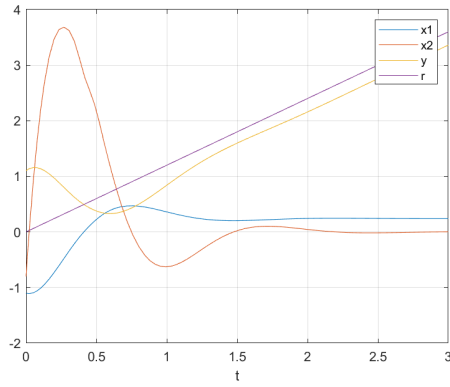


Figure 47: Χρονική μεταβολή των καταστάσεων/Απόκριση της εξόδου στον χρόνο

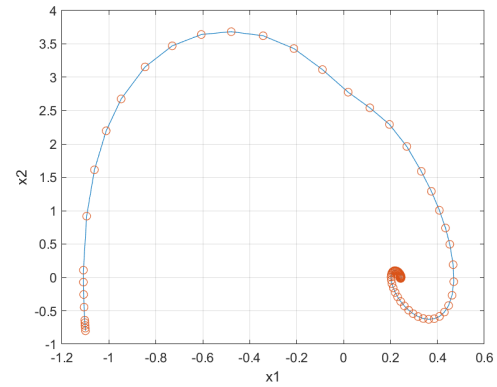


Figure 48: Καταστάσεις στο φασικό επίπεδο

Βρισκόμαστε στην περίπτωση όπου  $|\frac{B}{k}| > e_0$  αφού  $e_0 = 0.2$  και  $B=1.2$ , συνεπώς έχουμε σημείο ισορροπίας και αυτό είναι το  $(0,0.24)$  και η σύγκλιση είναι ασυμπτωτική, επίσης η έξοδος δεν προσεγγίζει εντελώς την είσοδο  $r$  καθώς έχουμε το σφάλμα ταχύτητας το οποίο ταυτίζεται με την τιμή του  $x_1$  στο σημείο ισορροπίας.

-Προσομοιώσεις για είσοδο ράμπας  $r(t)=Bt$  όπου  $B=0.04$

1) Για αρχικές συνθήκες  $(y(0), \dot{y}(0))=(-2,0)$ ,  $(r(0), \dot{r}(0))=(0,0.04)$

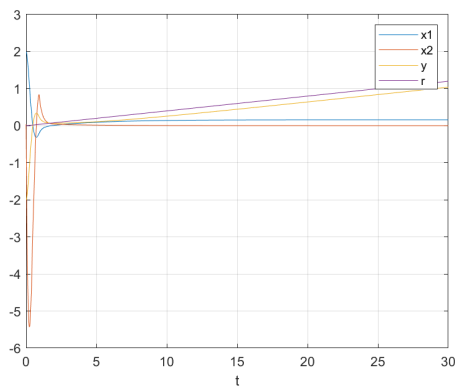


Figure 49: Χρονική μεταβολή των καταστάσεων/Απόκριση της εξόδου στον χρόνο

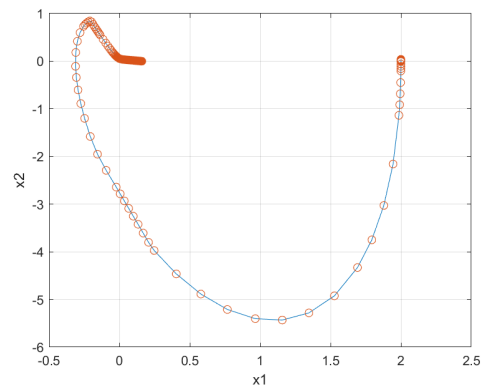


Figure 50: Καταστάσεις στο φασικό επίπεδο

2) Για αρχικές συνθήκες  $(y(0), \dot{y}(0))=(1,0)$ ,  $(r(0), \dot{r}(0))=(0,0.04)$

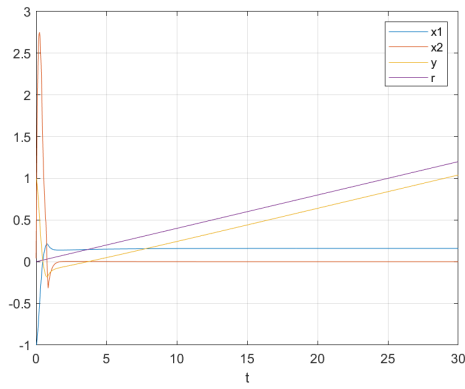


Figure 51

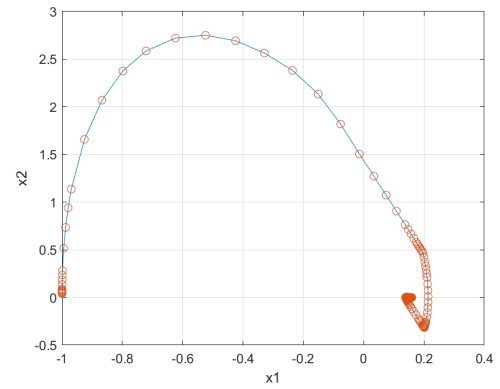


Figure 52

3) Για αρχικές συνθήκες  $(y(0), y'(0)) = (0, 0.5)$ ,  $(r(0), r'(0)) = (0, 0.04)$

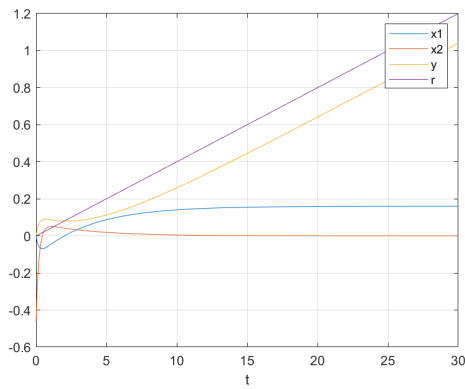


Figure 53: Χρονική μεταβολή των καταστάσεων/Απόκριση της εξόδου στον χρόνο

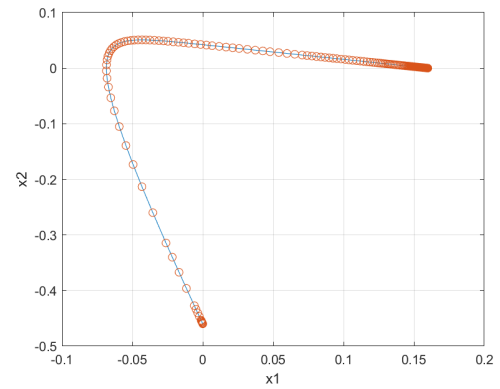


Figure 54: Καταστάσεις στο φασικό επίπεδο

4) Για αρχικές συνθήκες  $(y(0), y'(0)) = (2, 2)$ ,  $(r(0), r'(0)) = (0, 0.04)$

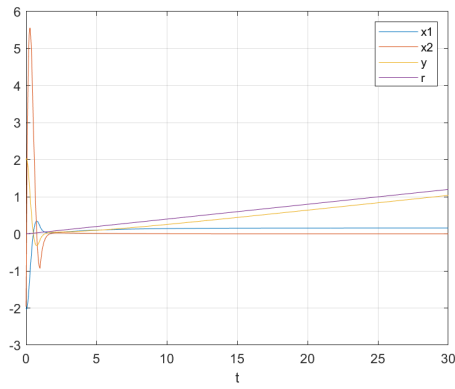


Figure 55: Χρονική μεταβολή των καταστάσεων/Απόκριση της εξόδου στον χρόνο

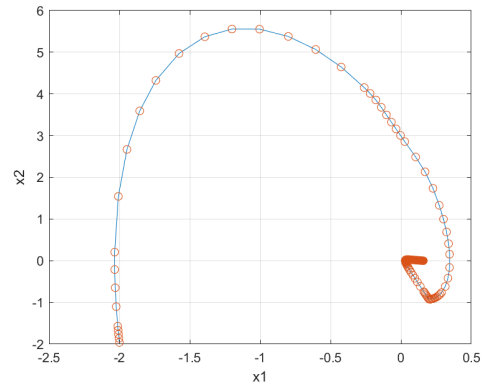


Figure 56: Καταστάσεις στο φασικό επίπεδο

5) Για αρχικές συνθήκες  $(y(0), \dot{y}(0)) = (2.5, -1)$ ,  $(r(0), \dot{r}(0)) = (0, 0.04)$

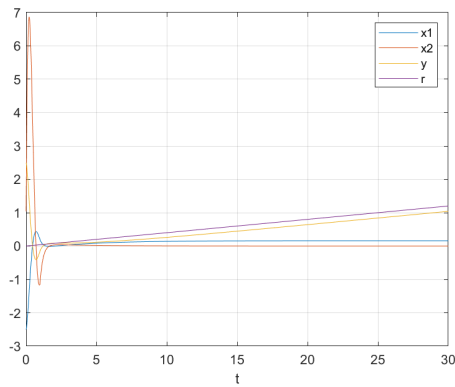


Figure 57: Χρονική μεταβολή των καταστάσεων/Απόκριση της εξόδου στον χρόνο

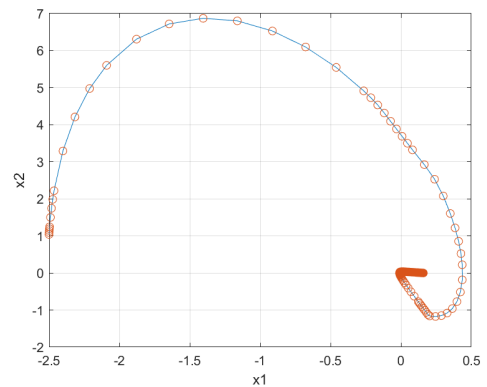


Figure 58: Καταστάσεις στο φασικό επίπεδο

6) Για αρχικές συνθήκες  $(y(0), \dot{y}(0)) = (1.1, 2)$ ,  $(r(0), \dot{r}(0)) = (0, 0.04)$

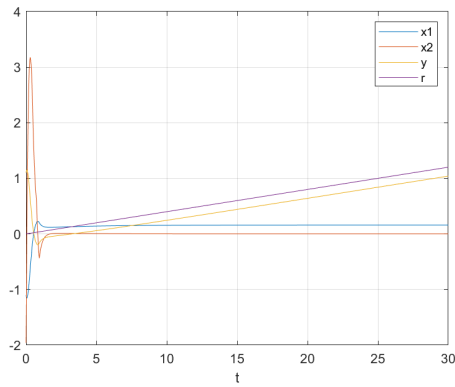


Figure 59: Χρονική μεταβολή των καταστάσεων/Απόκριση της εξόδου στον χρόνο

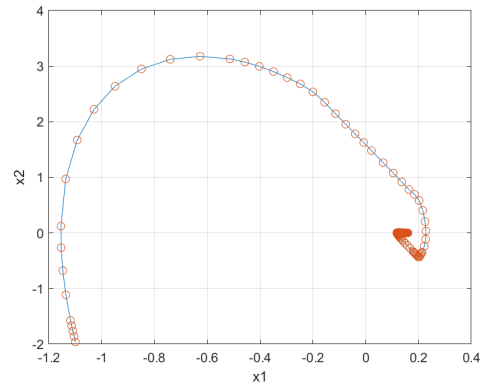


Figure 60: Καταστάσεις στο φασικό επίπεδο

Βρισκόμαστε στην περίπτωση όπου  $|\frac{B}{ka}| < e_0$  αφού  $e_0 = 0.2$  και  $B=0.04$  οπότε  $\frac{B}{ka} = 0.16$  συνεπώς έχουμε σημείο ισορροπίας και αυτό είναι το  $(0, 0.16)$  και η σύγκλιση είναι ασυμπτωτική, επίσης η έξοδος δεν προσεγγίζει εντελώς την είσοδο  $r$  καθώς έχουμε το σφάλμα ταχύτητας το οποίο ταυτίζεται με την τιμή του  $x_1$  στο σημείο ισορροπίας.

-Προσομοιώσεις για είσοδο ράμπας  $r(t)=Bt$  όπου  $B=0.5$

1) Για αρχικές συνθήκες  $(y(0), \dot{y}(0))=(-2, 0)$ ,  $(r(0), \dot{r}(0))=(0, 0.5)$

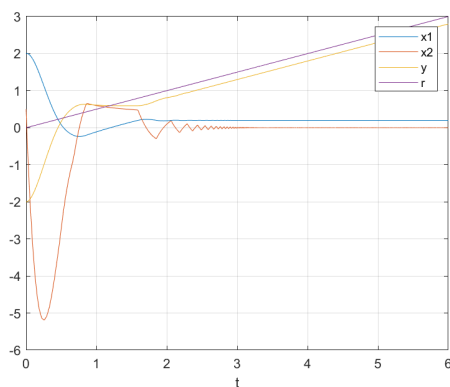


Figure 61: Χρονική μεταβολή των καταστάσεων/Απόκριση της εξόδου στον χρόνο

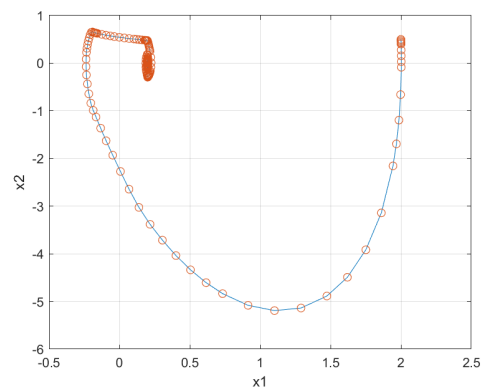


Figure 62: Καταστάσεις στο φασικό επίπεδο

2) Για αρχικές συνθήκες  $(y(0), \dot{y}(0))=(1, 0)$ ,  $(r(0), \dot{r}(0))=(0, 0.5)$

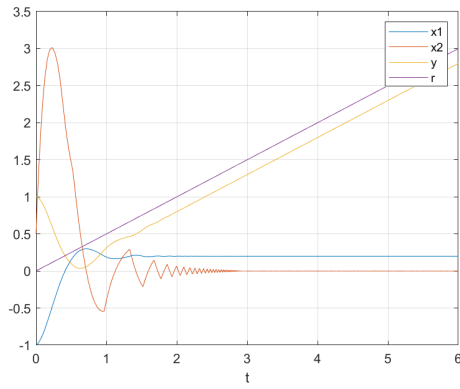


Figure 63

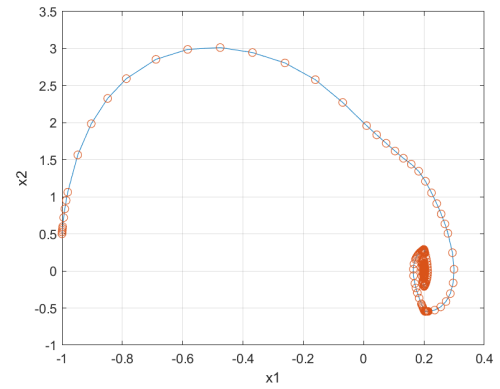


Figure 64

3) Για αρχικές συνθήκες  $(y(0), y'(0)) = (0, 0.5)$ ,  $(r(0), r'(0)) = (0, 0.5)$

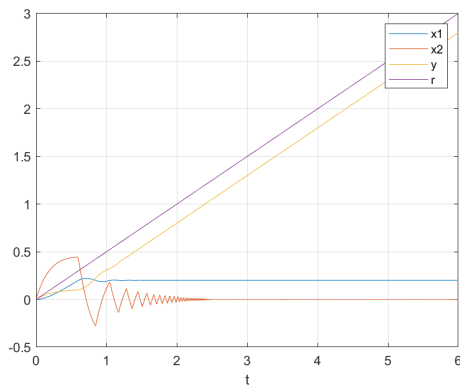


Figure 65: Χρονική μεταβολή των καταστάσεων/Απόκριση της εξόδου στον χρόνο

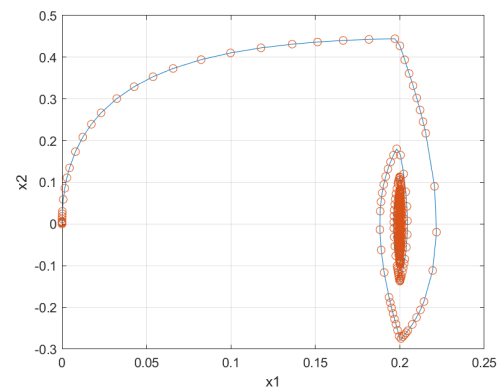


Figure 66: Καταστάσεις στο φασικό επίπεδο

4) Για αρχικές συνθήκες  $(y(0), y'(0)) = (2, 2)$ ,  $(r(0), r'(0)) = (0, 0.5)$

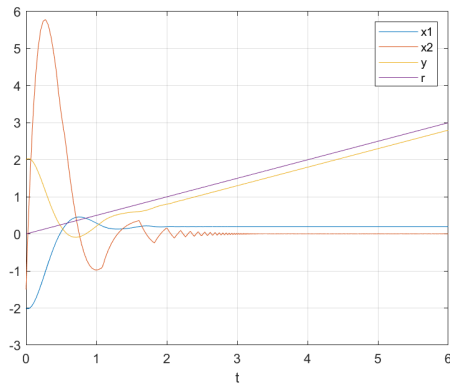


Figure 67: Χρονική μεταβολή των καταστάσεων/Απόκριση της εξόδου στον χρόνο

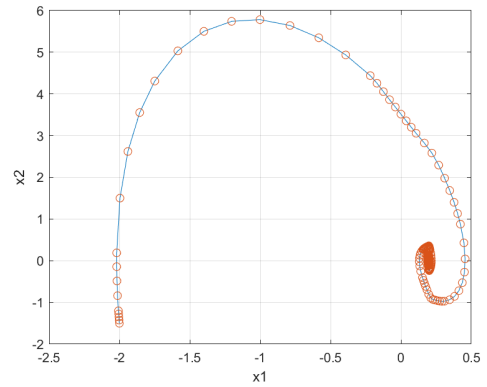


Figure 68: Καταστάσεις στο φασικό επίπεδο

5) Για αρχικές συνθήκες  $(y(0), \dot{y}(0)) = (2.5, -1)$ ,  $(r(0), \dot{r}(0)) = (0, 0.5)$

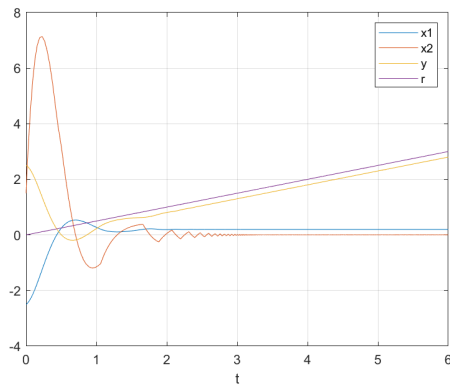


Figure 69: Χρονική μεταβολή των καταστάσεων/Απόκριση της εξόδου στον χρόνο

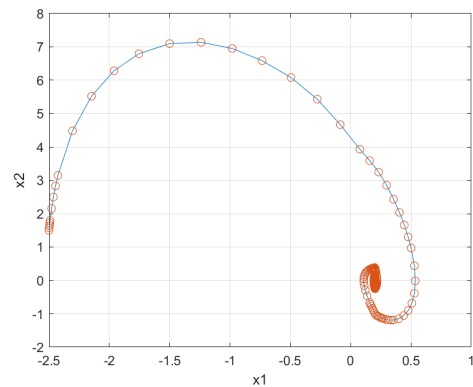


Figure 70: Καταστάσεις στο φασικό επίπεδο

6) Για αρχικές συνθήκες  $(y(0), \dot{y}(0)) = (1.1, 2)$ ,  $(r(0), \dot{r}(0)) = (0, 0.5)$

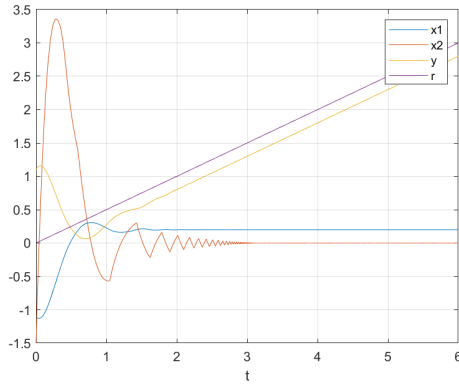


Figure 71: Χρονική μεταβολή των καταστάσεων/Απόκριση της εξόδου στον χρόνο

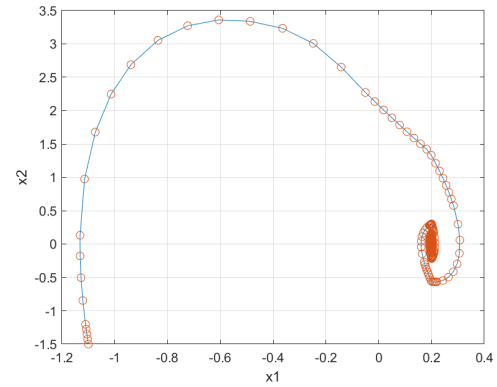


Figure 72: Καταστάσεις στο φασικό επίπεδο

Σε αυτή την περίπτωση το σύστημα δεν έχει σημείο ισορροπίας καθώς  $|\frac{B}{ka}| > e_0$  με  $\frac{B}{ka} = 2$  και  $\frac{B}{k} \leq e_0$  αφού  $\frac{B}{k} = 0.1$ . Από την μορφή των διαγραμμάτων φαίνεται ότι οι καταστάσεις συγκλίνουν σε σταθερές τιμές ωστόσο καθώς το σύστημα δεν έχει σημεία ισορροπίας στην ουσία ταλαντώνονται στο 0.2 για το  $x_1$  και στο 0 για το  $x_2$ . Αυτό επίσης φαίνεται και από το φασικό διάγραμμα όπου παρατηρούμε αυτή την ταλάντωση των καταστάσεων γύρω από το (0.2,0). Κάνοντας ένα zoom στα αντίστοιχα διαγράμματα θα παρατηρήσουμε το εξής:

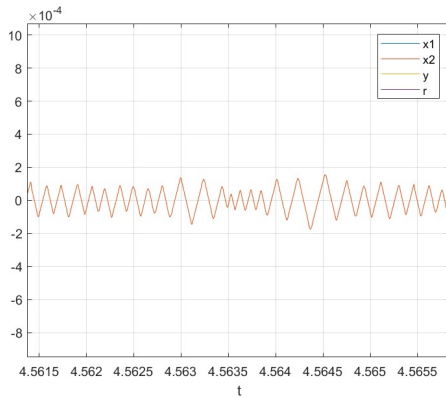


Figure 73: Χρονική μεταβολή της  $x_1$

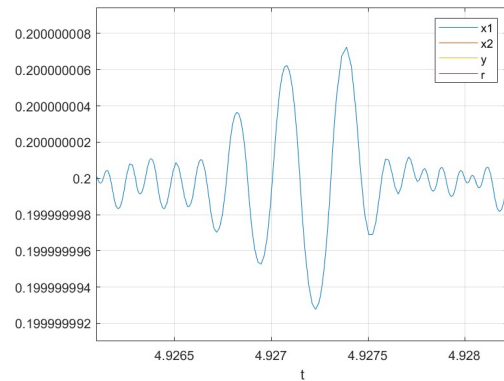


Figure 74: Χρονική μεταβολή της  $x_2$

## 2 Τμήμα Β

### 2.1 1

#### 2.1.1 i

Το σύστημα γράφεται σε εξισώσεις κατάστασης ως εξής:



$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + g(x) + u(x)\end{aligned}$$

, για τον ανοιχτό βρόχο το  $u$  μηδενίζεται. Μια εναλλακτική μορφή να γραφτεί είναι

$$\dot{x} = Ax + bg(x)$$

με

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

και

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

. Για δοσμένο  $Q=0.2I$  θα υπολογίσουμε τον  $P$  μέσω εξίσωσης Lyapunov αφού το γραμμικοποιημένο κομμάτι του συστήματος είναι ευσταθές, δηλαδή ο  $A$  είναι ευσταθής πίνακας. με:

$$\det(sI - A) = \begin{vmatrix} s+1 & -1 \\ 1 & s \end{vmatrix} = s^2 + s + 1$$

είναι πολυώνυμο δευτέρου βαθμού και οι συντελεστές είναι θετικοί οπότε το πραγματικό μέρος των ιδιοτιμών είναι αρνητικό οπότε  $A$  ευσταθής πίνακας. Από την εξίσωση Lyapunov έχουμε,

$$A^T P + P A = -Q$$

θέτοντας

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix}$$

=>

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.2 & 0 \\ 0 & -0.2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -p_1 - p_2 & -p_2 - p_3 \\ p_1 & p_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -p_1 - p_2 & p_1 \\ -p_2 - p_3 & p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.2 & 0 \\ 0 & -0.2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} -2p_1 - 2p_2 & p_1 - p_2 - p_3 \\ p_1 - p_2 - p_3 & 2p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.2 & 0 \\ 0 & -0.2 \end{bmatrix}$$

Προκύπτει λύνοντας τις εξισώσεις  $p_2 = -0.1, p_1 = 0.2, p_3 = 0.3$  οπότε

$$P = \begin{bmatrix} 0.2 & -0.1 \\ -0.1 & -0.3 \end{bmatrix}$$

. Επιλέγοντας συνάρτηση Lyapunov  $V = x^T P x$  είναι θετικά ορισμένη αφού  $P$  συμμετρικός πίνακας και θετικά ορισμένος άρα το  $(0,0)$  είναι το μοναδικό σημείο ισορροπίας. Παίρνουμε την παράγωγο ,

$$\dot{V} = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x}$$

=

$$\dot{V} = (x^T A^T + g^T b^T) P x + x^T P (Ax + bg)$$

=

$$\dot{V} = x^T A^T P x + x^T P A x + 2x^T P b g$$

=

$$\dot{V} = -x^T Q x + 2x^T P b g$$

. Θέλουμε  $\dot{V} \leq 0$  οπότε αφού Q ορισμένος θετικά πίνακας  $-x^T Q x \leq -\lambda_{\min(Q)} \|x\|^2$  και  $2x^T P b g \leq 2\|x\|^3 \|P\|$ . Αυτό ισχύει καθώς  $\|b\| = 1$  και  $g(x) = x_1 x_2 + \frac{1}{2} x_2^2 < x_2^2 + x_1^2 = \|x\|^2$  οπότε αρκεί

$$-\lambda_{\min(Q)} \|x\|^2 + 2\|x\|^3 \|P\| < 0$$

,

$$\|x\| \leq \frac{\lambda_{\min(Q)}}{2\|P\|}$$

, όπου P θετικά ορισμένος πίνακας και συμμετρικός οπότε  $\|P\| = \lambda_{\max(P)}$ . Θα βρούμε τις ιδιοτιμές του πίνακα P

$$P = \begin{bmatrix} 0.2 & -0.1 \\ -0.1 & 0.3 \end{bmatrix}$$

$$sI - P = \begin{bmatrix} s - 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & s - 0.3 \end{bmatrix}$$

$$\det(sI - P) = s^2 - 0.5s + 0.05$$

$$\lambda_{\max} = \frac{0.1(5 + \sqrt{5})}{2}$$

,όρα

$$\|x\| < \frac{0.2}{0.1(5 + \sqrt{5})} \Rightarrow$$

$$\|x\| < 0.2764$$

. Επομένως ψάχνουμε την μεγαλύτερη ισοσταθμική  $V(x) < c$  για την οποία ισχύει  $\|x\| < 0.2764$ . Έστω λοιπόν

$$0.2x_1^2 - 0.2x_1x_2 + 0.3x_2^2 = c$$

$$0.2x_1^2 - 0.2x_1x_2 + 0.3x_2^2 - c = 0$$

Η παραπάνω μορφή είναι γενικευμένη δευτεροβάθμια εξίσωση και επειδή  $0.2^2 - 4 \cdot 0.3 \cdot 0.2 < 0$  έχουμε έλλειψη. Το κέντρο αυτής της εξίσωσης έλλειψης είναι το (0,0) και προκειμένου να βρούμε την μεγαλύτερη ισοσταθμική για την οποία ισχύει  $\|x\| < 0.2764$ , θα βρούμε το μήκος του μεγαλύτερου άξονα το οποίο θα εξισώσουμε με την ακτίνα 0.2764. Οπότε για την γενικευμένη μορφή,

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

το μέγιστο μήκος δίνεται από

$$b = -\frac{\sqrt{2(AE^2 + CD^2 + F(B^2 - 4AC))((A + C) + \sqrt{(A - C)^2 + B^2})}}{(B^2 - 4AC)}$$

, κάνοντας αντικατάσταση όπου  $E=D=0$ ,  $A=0.2, C=0.3, B=-0.2, F=-c$  έχουμε

$$b = -\frac{\sqrt{2 * (-c)(0.2^2 - 4 * 0.3 * 0.2)(0.5 + \sqrt{0.1^2 + 0.2^2})}}{0.2^2 - 4 * 0.3 * 0.2}$$

$$b = \frac{\sqrt{0.289c}}{0.2}$$

επιλέγουμε  $b=0.2764$  όσο το μήκος του περιορισμού, θέλουμε δηλαδή το μήκος του μεγαλύτερου άξονα να είναι ίσο με την ακτίνα του κύκλου από τον περιορισμό  $\|x\| < 0.2764$  καθώς τότε έχουμε μοναδική λύση. Προκύπτει  $c = 1.057 \cdot 10^{-2}$ . Σύμφωνα με τον ορισμό του πεδίου έλξης κατά Lyapunov έχουμε :

$-S_a = \{x \in R^2 : V(x) < c\}$  μια περιοχή γύρω από το σημείο ισορροπίας  $(0,0)$ ,

$-V$  θετικά ορισμένη συνάρτηση με  $V(0,0)=0$ ,

-και  $\dot{V} < 0$  για κάθε  $V(x) < c$  πλην του  $(0,0)$

,άρα το  $S_a$  είναι μια εκτίμηση του πεδίου έλξης δηλαδή μία περιοχή γύρω από ένα σημείο ισορροπίας όπου οι τροχιές του συστήματος είναι εγγυημένα φθίνουσες οπότε ξεκινώντας μέσα σε αυτές μπορούμε να εγγυηθούμε την σύγκλιση στο  $(0,0)$ .

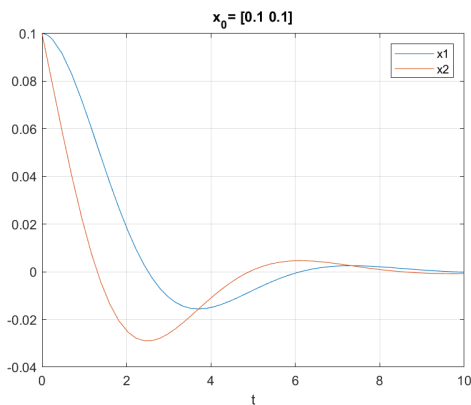


Figure 75

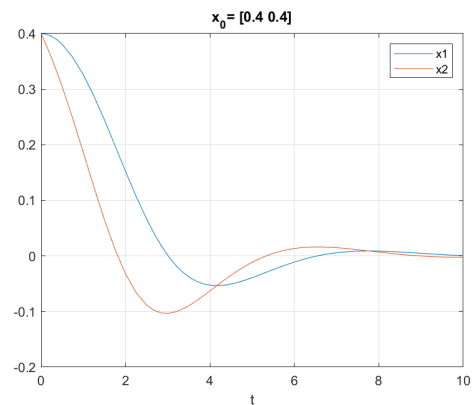


Figure 76

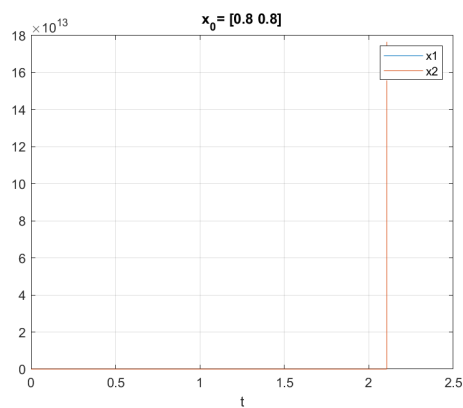


Figure 77

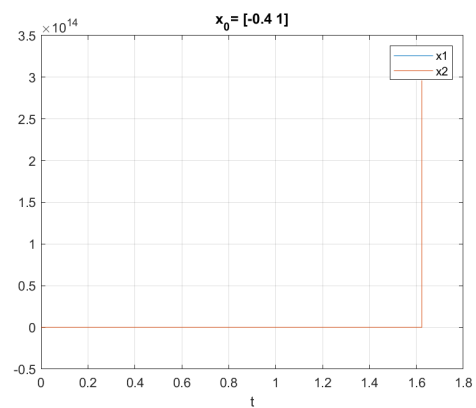


Figure 78

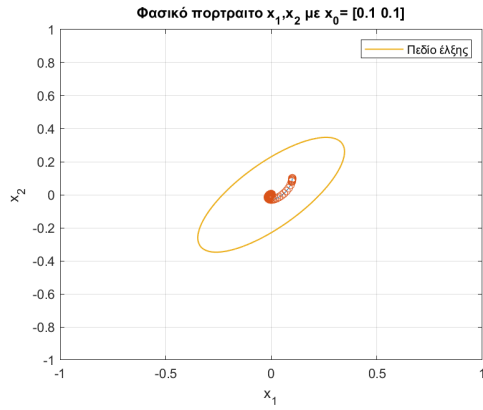


Figure 79

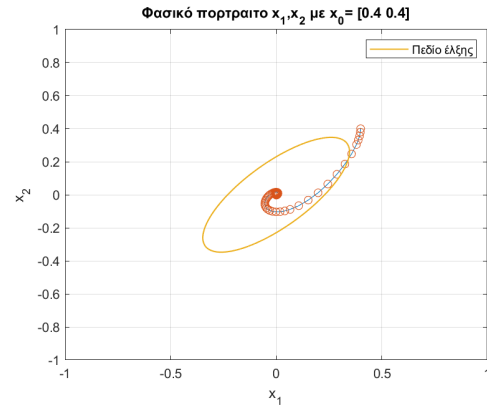


Figure 80

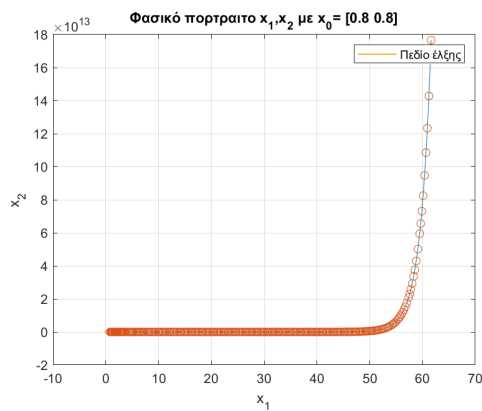


Figure 81

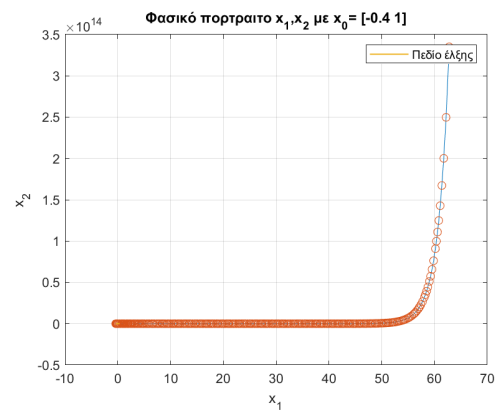


Figure 82

Για τα δεδομένα σημεία εκκίνησης ισχύει ότι :

Το  $x_0 = [0.1, 0.1]$  βρίσκεται αντικαθιστώντας την  $V(x)$  σε τροχιά  $c=0.003 < 0.01057$  οπότε είναι φθίνουσα τροχιά και συγκλίνουμε στο σημείο ισορροπίας του, όπως αποδεικνύεται και από την χρονική απόκριση παραπάνω.

Το  $x_0 = [0.4, 0.4]$  βρίσκεται αντικαθιστώντας την  $V(x)$  σε τροχιά  $c=0.048 > 0.01057$  βρίσκεται δηλαδή σε μεγαλύτερη ισοσταθμική. Ωστόσο η παραπάνω ανάλυση είναι μια εκτίμηση του πεδίου έλξης και έχουμε φτάσει σε  $v(x) < c$  παίρνοντας φράγματα για την  $\dot{V}$  συνεπώς αυτό που έχουμε υπολογίσει δεν είναι αυστηρό κριτήριο για την σύγκλιση στο  $(0,0)$  δηλαδή υπάρχουν και άλλα αρχικά σημεία εκκίνησης με τα οποία μπορούμε να συγκλίνουμε στο  $(0,0)$  σε ανώτερες ισοσταθμικές. Ωστόσο με την εκτίμηση του πεδίου έλξης που έχουμε υπολογίσει εγγυόμαστε την σύγκλιση στο  $(0,0)$ .

Το  $x_0 = [0.8, 0.8]$  βρίσκεται σε ισοσταθμική  $c=0.192 > 0.01057$  συνεπώς περιμένουμε από την εκτίμηση του πεδίου έλξης που υπολογίσαμε ότι βρίσκεται σε τροχιά που δεν είναι φθίνουσα. Όπως φαίνεται από την χρονική απόκριση το σύστημα για αυτό το σημείο εκκίνησης

αποκλίνει. Επίσης η προσμοίωση τερματίζεται πρόωρα στα στα 2.2s καθώς φτάνουμε σε πολύ μεγάλους αριθμούς που το Matlab δεν μπορεί να κάνει πράξεις.

Το  $x_0 = [-0.4, 1]$  βρίσκεται σε ισοσταθμική  $c=0.412 > 0.01057$  συνεπώς περιμένουμε από την εκτίμηση του πεδίου έλξης που υπολογίσαμε ότι βρίσκεται σε τροχιά που δεν είναι φθίνουσα. Όπως φαίνεται από την χρονική απόκριση το σύστημα για αυτό το σημείο εκκίνησης αποκλίνει. Επίσης η προσμοίωση τερματίζεται πρόωρα στα στα 1.6s καθώς φτάνουμε σε πολύ μεγάλους αριθμούς που το Matlab δεν μπορεί να κάνει πράξεις.

### 2.1.2 ii

α)  $\theta=0.5$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + g(x) + u(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + x_1x_2 + 0.5x_2^2 + u(x)\end{aligned}$$

Επιλεγώ ελεγκτή γραμμικοποίησης  $u = -x_1x_2 - 0.5x_2^2 - v$ , όπου  $v$  ένας γραμμικός ελεγκτής ανάδρασης καταστάσεων για να στείλουμε τις ιδιοτιμές σε τιμές -3. Αντικαθιστώντας έχουμε σύστημα

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + v\end{aligned}$$

$$\dot{x} = Ax + bv$$

με

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

και

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

. το ζεύγος  $(A, b)$  είναι ελέγξιμο αφού έχει πίνακα ελεγχσιμότητας,  $M = [b, A*b]$ .

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

και

$$A * b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

.

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

έχει ορίζουσα διάφορη του 0 οπότε το γραμμικοποιημένο σύστημα είναι ελέγξιμο. Βάζοντας  $v = -k_1x_1 - k_2x_2$ ,

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_1(1 + k_1) - k_2x_2\end{aligned}$$

$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1-k_1 & -k_2 \end{bmatrix}$  βρίσκουμε την ορίζουσα  $\det(sI - \tilde{A}) = s^2 + (k_2 + 1)s + k_1 + k_2 + 1$ , και αφού θέλουμε διπλή ιδιοτιμή στο  $-3$  το επιθυμητό χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι το  $s^2 + 6s + 9$  εξισώνοντας έχουμε  $k_2 = 5, k_1 = 3$ . οπότε ο νόμος ελέγχου είναι  $u(x) = -x_1x_2 - 0.5x_2^2 - 3x_1 - 5x_2$ . Οπότε για το γραμμικό σύστημα το  $(0,0)$  θα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας.

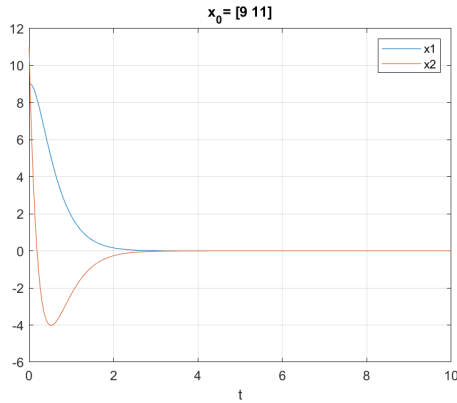


Figure 83

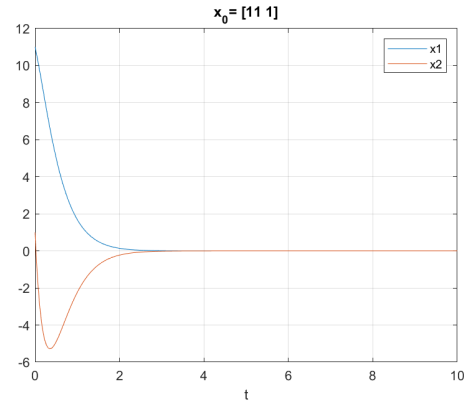


Figure 84

β)  $\vartheta=1$  Θεωρώντας εκτίμηση  $\vartheta=1$  στον νόμο ελέγχου και διπλή ιδιοτιμή στο  $-3$  έχουμε  $u(x) = -x_1x_2 - 1x_2^2 - 3x_1 - 5x_2$ , οπότε το σύστημα έρχεται σε μορφή,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 &= -3x_1 - 5x_2 - 0.5x_2^2 \end{aligned}$$

. έχουμε σημεία ισορροπίας για

$$\dot{x}_1 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = 0 \Rightarrow -8x_1 - 0.5x_1^2 = 0 \Rightarrow x_1(x_1 + 16) = 0$$

,έχουμε 2 σημεία ισορροπίας το  $(0,0)$  και  $(-16,-16)$ .

Για να ελέγξουμε την ευστάθεια του σημείου ισορροπίας  $(0,0)$  θα ορίσουμε συνάρτηση Lyapunov  $V(x) = \frac{3}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$  θετικά ορισμένη αφού είναι θετική παντού και μηδενίζεται μόνο στο σημείο  $(0,0)$ .

$$\dot{V} = 3x_1(-x_1 + x_2) + x_2(-3x_1 - 5x_2 - 0.5x_2^2)$$

$$\dot{V} = -3x_1^2 - 5x_2^2 - 0.5x_2^3$$

$$\dot{V} = -3x_1^2 - 0.5x_2^2(10 + x_2)$$

οπότε για  $x_2 > -10$  η  $\dot{V}$  είναι αρνητικά ορισμένη οπότε θα υπολογίσουμε μια εκτίμηση πεδίου έλξης. Με  $x_2 = -10$ ,

$$V(x) = 1.5x_1^2 + 50 = c$$

,θέλουμε την μεγαλύτερη ισοσταθμική για την οποία  $\dot{V} < 0$  οπότε πρέπει η παραπάνω εξίσωση να έχει μοναδική λύση που ισχύει για  $x_1 = 0$ , άρα  $c=50$ .

Σύμφωνα με τον ορισμό του πεδίου έλξης κατά Lyapunov έχουμε :

$-S_a = \{x \in \mathbb{R}^2 : V(x) < c\}$  μια περιοχή γύρω από το σημείο ισορροπίας  $(0,0)$ ,

$-V$  θετικά ορισμένη συνάρτηση με  $V(0,0)=0$ ,

-και  $\dot{V} < 0$  για κάθε  $V(x) < 50$  πλην του  $(0,0)$  οπότε μπορούμε να εγγυηθούμε ότι για κάποιο αρχικό σημείο που βρίσκεται σε ισοσταθμική  $c < 50$ , ότι θα έχουμε ασυμπτωτική ευστάθεια στο  $(0,0)$ .

Με τα δοσμένα αρχικά σημεία  $[9,11]$  και  $[11,1]$  εαν θα κάνουμε αντικατάσταση στη συνάρτηση Lyapunov που έχουμε επιλέξει θα βούμε ότι ανήκουν σε ισοσταθμική ανώτερης τάξης (Με  $V(0) = 182$ ), συνεπώς περιμένουμε ότι το σύστημα κλειστού βρόχου δεν θα συγκλίνει στο 0.

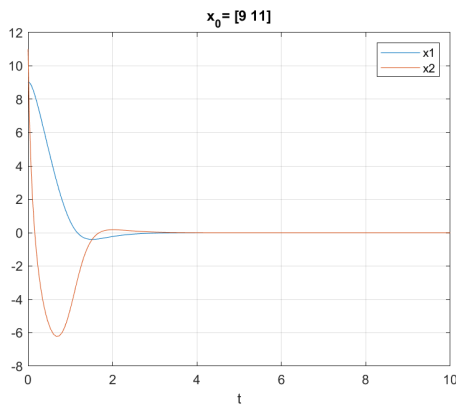


Figure 85

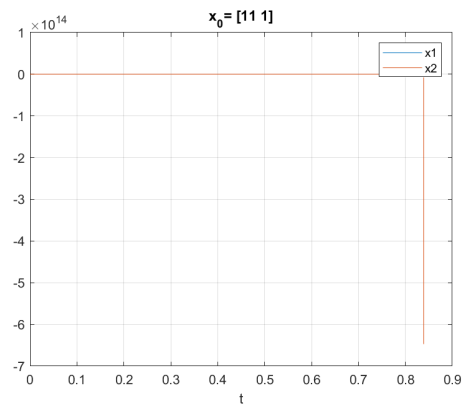


Figure 86

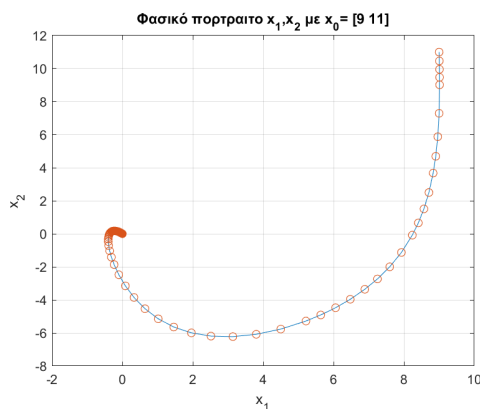


Figure 87

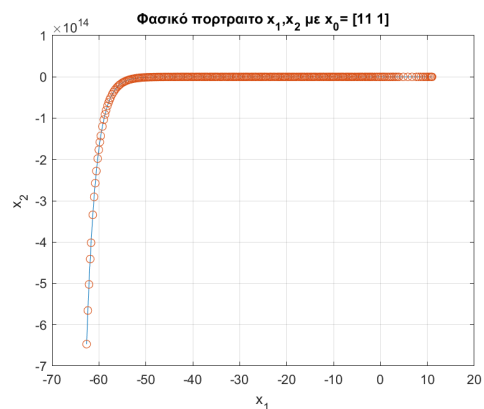


Figure 88

Παρατηρούμε πως ενώ τα 2 σημεία ξεκινούν από την ίδια ισοσταθμική έχουμε ασυμπτωτική ευστάθεια για το  $[9,11]$  και όχι για το  $[11,1]$ . Σύμφωνα με την ανάλυση που αναπτύξαμε

καθώς τα αρχικά σημεία είναι σε μεγαλύτερη ισοσταθμική περιμέναμε ότι το σύστημα δεν θα συνέκλινε στο 0, συνεπώς η λανθασμένη εκτίμηση του ελεγκτή μπορεί να επηρεάσει σημαντικά την ευστάθεια του συστήματος. Ωστόσο όπως φαίνεται παρακάτω με διαφορετικές αρχικές συνθήκες στις οποίες ξεκινάμε από χαμηλότερη ισοσταθμική εντός του πεδίου έλξης συγκλίνουμε ασυμπτωτικά στο (0,0).

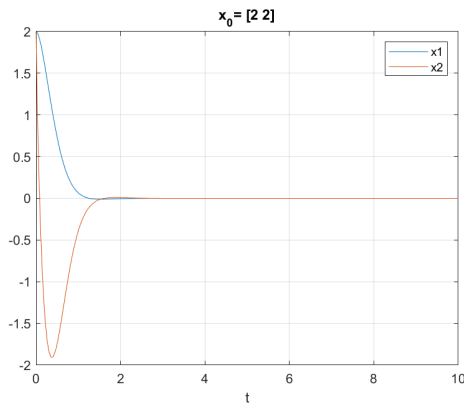


Figure 89

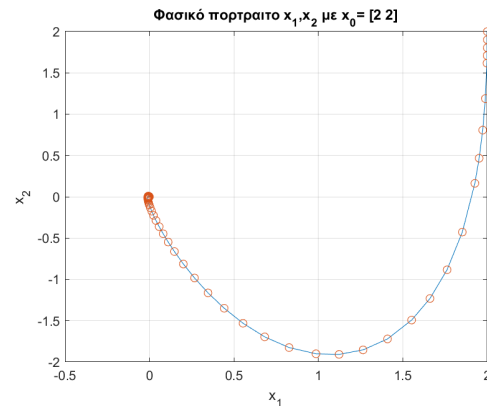


Figure 90

### 2.1.3 iii

Εφόσον ο  $A$  είναι ευσταθής πίνακας θα λύσουμε την εξίσωση Lyapunov με

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ και } A^T P + P A = -Q$$

προκύπτει κάνοντας τις πράξεις θετικά ορισμένος πίνακας και συμμετρικός

$$P = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

. Προκειμένου να εκτιμήσουμε την άγνωστη μεταβλητή  $\theta$  προσθέτουμε στο σύστημα επιπλέον μεταβλητή κατάστασης  $\tilde{\theta}(t) = \theta - \hat{\theta}(t)$ . Το  $\theta$  είναι η άγνωστη σταθερή παράμετρος που προσπαθούμε να εκτιμήσουμε ενώ το  $\hat{\theta}(t)$  είναι χρονικά μεταβαλλόμενη μεταβλητή την οποία θα την υπολογίσουμε μέσω από την συνάρτηση Lyapunov. Η μορφή του ελεγκτή που θα χρησιμοποιήσουμε είναι  $u(x) = -x_1 x_2 - \tilde{\theta} x_2^2$ . Συνεπώς με την προσθήκη 3ης κατάστασης και την επιλογή του παραπάνω ελεγκτή το σύστημα κλειστού βρόχου θα έχει μορφή,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + \tilde{\theta} x_2^2, \\ \dot{\tilde{\theta}} &= f(x) \end{aligned}$$

. όπου η  $f(x)$  θα προκύψει από τον νόμο εκτίμησης  $\hat{\theta}$ . Επιλέγοντας συνάρτηση Lyapunov

$$V = x^T P x + \tilde{\theta}(t)^2$$

, η  $V$  είναι θετικά ορισμένη συνάρτηση αφού είναι θετική παντού και μηδενίζεται μόνο στο (0,0,0) για τις 3 μεταβλητές κατάστασης  $x_1, x_2, \tilde{\theta}$ . Η παράγωγος της Lyapunov,

$$\dot{V} = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} + 2\tilde{\theta}\dot{\tilde{\theta}}$$



$$= \dot{V} = (x^T A^T + g^T b^T + u b^T) P x + x^T P (A x + b g + b u) + 2(\theta - \hat{\theta})(-\dot{\hat{\theta}})$$

$$= \dot{V} = x^T A^T P x + x^T P A x + 2x^T P b g + 2u b^T P x + 2(\theta - \hat{\theta})(-\dot{\hat{\theta}})$$

$$= \dot{V} = -x^T Q x + 2x^T P b g + 2u b^T P x + 2(\theta - \hat{\theta})(-\dot{\hat{\theta}})$$

. η πράξη  $b^T P x$  είναι ισοδύναμη με  $x^T P b$ , αφού είναι βαθμωτά μεγέθη και ισούται με

$$b^T P x = 5x_2 - 2x_1$$

οπότε αντικαθιστώντας ,

$$\dot{V} = -x^T Q x + 2(g(x) + u(x))(5x_2 - 2x_1) + 2(\theta - \hat{\theta})(-\dot{\hat{\theta}})$$

θέτοντας όπου u τον νόμο ελέγχου που αναφέραμε παραπάνω έχουμε ,

$$\dot{V} = -x^T Q x + 2x_2^2(\theta - \hat{\theta})(5x_2 - 2x_1) + 2(\theta - \hat{\theta})(-\dot{\hat{\theta}})$$

$$\dot{V} = -x^T Q x + 2(\theta - \hat{\theta})(5x_2^3 - 2x_2^2 x_1 - \dot{\hat{\theta}})$$

, και εφόσον  $Q = \text{diag}[2, 4]$

$$\dot{V} = -2x_1^2 - 4x_2^2 + 2(\theta - \hat{\theta})(5x_2^3 - 2x_2^2 x_1 - \dot{\hat{\theta}})$$

. Καθώς το  $\theta$  είναι άγνωστη παράμετρος και ο όρος  $-2x_1^2 - 4x_2^2$  μπορούμε να επιλέξουμε εκτίμηση  $\dot{\hat{\theta}}$  που θα μηδενίσει το υπόλοιπο μέρος. Οπότε με επιλογή

$$\dot{\hat{\theta}} = 5x_2^3 - 2x_2^2 x_1$$

,άρα  $f(x_1, x_2) = -\dot{\hat{\theta}}$  ,δηλαδή

$$\dot{\hat{\theta}} = -5x_2^3 + 2x_2^2 x_1$$

παράγωγος της συνάρτησης Lyapunov ισούται με

$$\dot{V} = -2x_1^2 - 4x_2^2 \leq 0$$

Η παράγωγος  $\dot{V}$  είναι αρνητικά ημιορισμένη οπότε το σύστημα είναι ευσταθές και για  $\dot{V} \leq 0$  ,  $V(t) \leq V(0)$  οπότε τα σήματα  $x_1, x_2, \hat{\theta}$  είναι φραγμένα. Θα αποδείξουμε ότι η  $\dot{V}$  είναι ομοιόμορφα συνεχής, χρησιμοποιώντας λήμμα Barbalat παίρνουμε την δεύτερη παράγωγο με

$$\ddot{V} = -4x_1\dot{x}_1 - 8x_2\dot{x}_2$$

$$\ddot{V} = -4x_1(-x_1 + x_2) - 8x_2(-x_1 + \tilde{\theta}x_2^2)$$

Καθώς τα σήματα  $x_1, x_2, \tilde{\theta}$  είναι φραγμένα άρα και  $\ddot{V}$  είναι φραγμένη , οπότε η  $\dot{V}$  είναι ομοιόμορφα συνεχής. Συνεπώς  $\dot{V} \rightarrow 0$  για  $t \rightarrow \infty$  στο άπειρο, άρα  $x_1 \rightarrow 0$  και  $x_2 \rightarrow 0$  τείνουν ασυμπτωτικά στο 0.

Με τις συγκεκριμένες επιλογές  $V, \dot{V}$  εκτίμησης  $\hat{\theta}$  και νόμου ελέγχου έχουμε απόδειξει ότι τα σήματα είναι φραγμένα, καθώς και την ασυμπτωτική σύγκλιση των αρχικών καταστάσεων  $x_1, x_2$  στο  $(0,0)$ . Ωστόσο για το  $\hat{\theta}$  έχουμε δείξει ότι είναι φραγμένο σήμα αλλά δεν μπορούμε να δείξουμε ότι συγκλίνει στο 0. Συνεπώς το σύστημα δεν μπορούμε να πούμε επιτυχάνει την ασυμπτωτική σύγκλιση όλως των καταστάσεων στο 0, οπότε δεν μπορούμε πούμε ότι ο νόμος εκτίμησης θα τείνει στην πραγματική τιμή  $\theta$ .

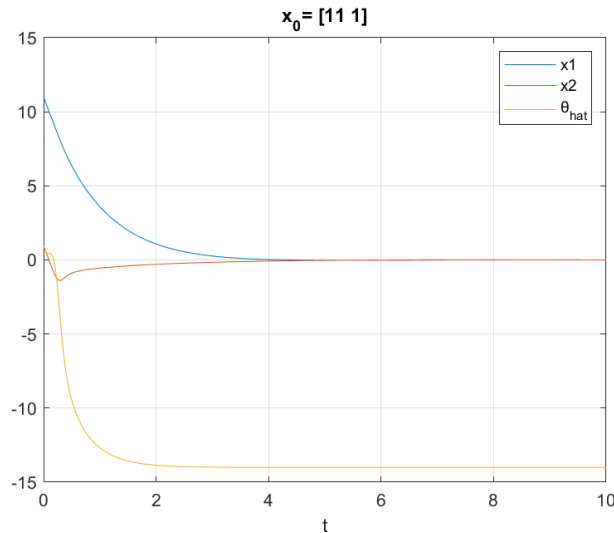


Figure 91

Όπως φαίνεται από την γραφική παράσταση επιβεβαιώνεται η ανάλυση που αναπτύξαμε προηγουμένως δηλαδή τα  $x_1$ , και  $x_2$  συγκλίνουν ασυμπτωτικά στο 0 ωστόσο η εκτίμηση  $\hat{\theta}$  δεν συγκλίνει στην πραγματική τιμή  $\theta=0.5$ , καθώς  $\hat{\theta}$  όπως αναφέραμε δεν μπορούμε να δείξουμε ότι συγκλίνει στο 0 με την επιλογή συνάρτησης Lyapunov.

## 2.2 2

Στην ουσία έχουμε να σχεδιάσουμε έναν νομο ελέγχου με προσθετικές αβεβαιότητες. Το σύστημα κλειστού βρόχου μπορεί να γραφεί σε ισοδύναμη μορφή :

$$\dot{x} = Ax + bg(x) + bu$$

Ο Α πίνακας αποδείξαμε παραπάνω ότι είναι ευσταθής πίνακας οπότε μπορούμε επιλέγοντας

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

να βρούμε πίνακας  $P = P^T$  και θετικά ορισμένο από εξίσωση Lyapunov με  $A^T P + PA = -Q$

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix}$$

=>

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2p_1 - 2p_2 & p_1 - p_2 - p_3 \\ p_1 - p_2 - p_3 & 2p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

προκύπτει εξισώνοντας στις αντίστοιχες θέσεις του πίνακα,  $p_1 = 1, p_2 = -0.5, p_3 = 1.5$ . Επιλέγοντας συνάρτηση Lyapunov,  $V = x^T P x$ , είναι θετικά ορισμένη και μηδενίζεται μόνο στο σημείο ισορροπίας  $(0,0)$ .

$$\dot{V} = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x}$$

$$\dot{V} = (x^T A + g b^T + u b^T) P x + x^T P (A x + b g(x) + b u)$$

$$\dot{V} = x^T (A^T P + P A) x + g b^T P x + x^T P b g + u b^T P x + u x^T P b$$

$$\dot{V} = -x^T Q x + 2g b^T P x + 2u b^T P x$$

Θα προσπαθήσουμε να πάρουμε άνω φράγμα για την παράγωγο ,

$$\begin{aligned} \dot{V} &< -x^T Q x + 2|g| * |b^T P x| + 2u b^T P x \leq \\ &-x^T Q x + 4||x||^2 * |b^T P x| + 2u b^T P x \end{aligned}$$

Ο όρος  $-x^T Q x$  είναι αρνητικά ορισμένος οπότε αν μηδενίσουμε με κατάλληλη επιλογή  $u$  του υπόλοιπων όρων έχουμε αποδείξει ότι  $\dot{V} < 0$ . Επιλέγουμε  $u = -2\text{sign}(x^T P b) ||x||^2$ , οπότε  $\dot{V} < -x^T Q x$  άρα το  $(0,0)$  θα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας.

Οπότε με επιλογή ελέγχου  $u = -2\text{sign}(x^T P b)(x_1^2 + x_2^2)$ , έχουμε τα παρακάτω διαγράμματα με συνάρτηση  $g$  από το πρώτο ερώτημα.

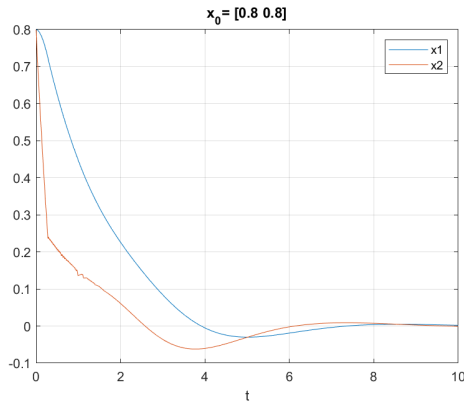


Figure 92

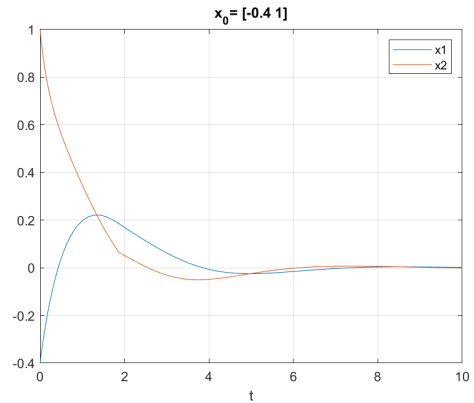


Figure 93

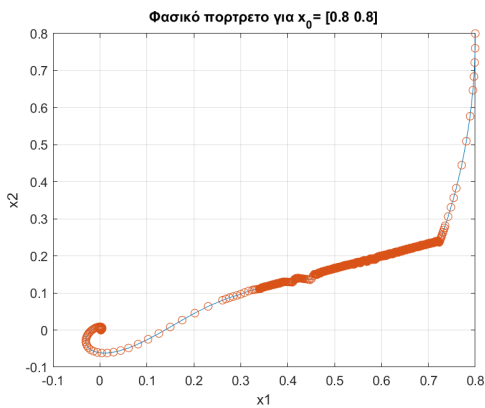


Figure 94

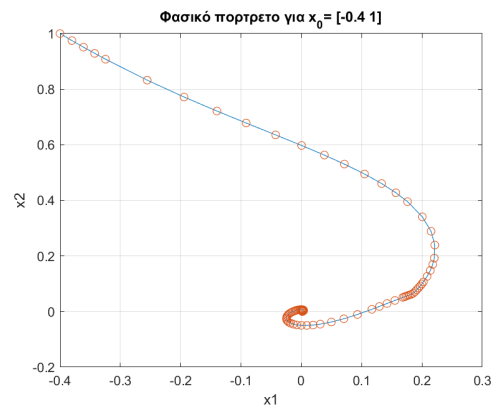


Figure 95

Όπως επιβεβαιώνεται από την θεωρητική ανάλυση έχουμε καταφέρει με την συγκεκριμένη επιλογή  $u$  την ασυμπτωτική σύγκλιση των μεταβλητών κατάστασης στο  $(0,0)$ .