1 Pre-knowledge

Cauchy-Binet Theorem:

- A是$n*m$的矩阵，B是$m*n$的矩阵，$m \geq n$。
- $det(AB)$为从A中选取n列的行列式与从B中选取对应n行的行列式的乘积之和。
- $det(AA^T)$为A中选取n列的行列式平方之和。

2 Main idea

构造$P \in \mathbb{R}^{n*e}$，即P是$|V|$行$|E|$列的矩阵。
设第j条边e_j连接了(u_j, v_j)，那么令$P_{u_j,j} = 1, P_{v_j,j} = -1$。
验证发现基尔霍夫矩阵K恰好等于PP^T。
设P_0为删去P最后一行得到的矩阵，则$K_0 = P_0 * (P_0)^T$。
根据Cauchy-Binet公式，K_0的行列式为P_0所有$n-1$阶子式的平方和，意识到P_0的任意$n-1$阶子式对应着从原图中选出$n-1$条边的一种方式。我们尝试证明：如果这种选边方式构成生成树，对应的行列式值恰好为1或-1；如果不构成生成树，对应的行列式为0。假设上述命题成立，Kirchoff定理也就成立了。

2.1 Situation1

假设一种选边方式构成生成树，设该新图为F，对应的$n-1$阶矩阵为A。
把n作为根，考虑将F从n开始DFS，对A作交换行列的操作，把深度小的节点对应的行放置在上面的行，假设交换完后A中第i行的节点是a_i，其连向父亲的边为e_j，则把e_j所在的列也交换到第i列，如此交换，行列式的绝对值不变。
并且交换完之后有：

- 一个点父亲在矩阵中对应的行一定在该点所在行的上方
- 第i列表示的边是第i行表示的点到其父亲的连边

交换完毕后，从最后一行开始，消元过程中，始终保持还没消的最后一行第i行只有第i列为± 1，其余列为0。若第i行对应节点的父亲所在行为j，就把第i行加到第j行上，由于第i列中第i行和第j列一正一负，加完之后(j, i)肯定为0。
做完消元，发现矩阵的对角线全是± 1，且其余位置为0，行列式必然为± 1。

2.2 Situation2

如果不是生成树，那么必然存在环，注意到环所在的联通块对应子式的行和为0，线性相关，行列式必然为0。

3 Conclusion

证明需要用到线性代数的相关知识，并且以上证明只是大体思路，中间有很多细节需要补证，但该内容在oi中不作要求，有兴趣可以了解。