STADTGYMNASIUM

FACHARBEIT IM LK-PHYSIK

Analyse von Rotationsbewegungen am Beispiel des Trebuchets

Autor:
Max PERNKLAU

Lehrer:
Martin WINDT

23. März 2013

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Abbildung 1.1: Nachbau eines historischen Trebuchets. Standort: Burg Castelnaud, Südfrankreich

1.1 Vorwort

Das Thema einer Facharbeit in Physik sollte drei Kriterien erfüllen: Es sollte eine Erweiterung des im Unterricht durchgenommenen Stoffes darstellen, es sollte eine gewisse Komplexität aufweisen, ohne jedoch kompliziert zu sein und schließlich sollte es -nach Möglichkeit- experimentell belegbar bzw. anschaulich sein.

Welches Thema wäre daher also passender als das Trebuchet? Die Rotationsdynamik gehört nicht zum Stoff des Unterrichtes, kann sich aber mit vertretbaren Aufwand angeeignet werden, zumal einige Unterrichtsthemen schon darauf hinarbeiten (z.B. die Hebelgesetze). Bei der Herleitung der Rechnung kann (bis auf eine Ausnahme) auf einfache Schulmathematik zurückgegriffen werden, sodass sie trotz ihrer Länge nachvollziehbar bleibt.

Mit dem Trebuchet ist des Weiteren die Rotationsdynamik gut zu veranschaulichen, da man statt schlecht fassbarer Trägheitsmomente oder Winkelgeschwindigkeiten etwa die gut vorstellbare Schussweite ausrechnen kann. Mit einem interessanten Experiment kann ferner nicht nur die Richtigkeit der Berechnungen belegt, sondern auch das Experiment optimiert werden.

Neben meinem persönlichen Interesse ist das Trebuchet also ein spannendes und angemessenes Thema, das eines genaueren Blicks wert ist.

Diese Facharbeit beschäftigt sich im Besonderen mit der Frage, wie weit ein Trebuchet schießen kann. Dies ist, neben der Schusshöhe, die interessanteste und anschaulichste Problemstellung. Dabei wird die für die Fragestellung relevante Mechanik starrer Körper definiert und angewandt, um diese Frage angemessen zu beantworten.

1.2 Das Trebuchet

Das Trebuchet, im deutschen Raum auch *Bilde* oder *Tribock* genannt, ist eine Belagerungswaffe aus dem Hochmittelalter. Es wurde vermutlich um 1097 erfunden und -trotz der Einführung des Schießpulvers im 13. Jahrhundert- bis ins 15. Jahrhundert hinein benutzt.

Die Grundkonstruktion des Trebuchets besteht aus einem Hebel mit einem kurzen und einem langen Arm. Am Ende des kurzen Arms ist ein sogenanntes Gegengewicht befestigt, das den Antrieb der Waffe darstellt. Am Ende des langen Arms befindet sich ein Geschoss, welches beim Hinunterfallen des Gegengewichtes geschleudert wird. Weil das Trebuchet also keine Federn, Seile oder ähnliches als Antrieb benutzt, konnte es in fast beliebiger Größe und aus gut verfügbaren Materialien gebaut werden, sodass es eine der verheerendsten und ausgereiftesten Waffen des Mittelalters wurde.

2 Physikalische Grundlagen

2.1 Drehmoment und -impuls

Im Grunde ist die Mechanik starrer Körper keine neue *Entdeckung* im Reich der Physik. Sie ist nur eine *Erweiterung* der Mechanik der Massepunkte, um gewisse Problemstellungen zu vereinfachen. Ohne Experimente, sondern nur mit Mathematik und physikalischem Denken lässt sie sich aus der Mechanik der Massepunkte herleiten.

Das Hebelgesetz. Das Hebelgesetz sagt aus, dass sich ein drehbar gelagerter Balken, an dessen Enden zwei Gewichte hängen (oder allgemeiner: zwei Kräfte wirken), sich in Ruhe befindet, wenn

$$r_1 F_1 = r_2 F_2 \tag{2.1.1}$$

gilt. Dabei sind r_1 und r_2 die Entfernungen der jeweiligen Kräfte zum Drehpunkt. Wenn die Kräfte nicht nur senkrecht zum Balken wirken dürfen, muss (2.1.1) vektoriell geschrieben werden:

$$\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = -\vec{r}_2 \times \vec{F}_2 \tag{2.1.2}$$

Anhand dieser Formel lässt sich nun das Drehmoment $\vec{M}$ definieren:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{2.1.3}$$

$$\vec{M}_1 = -\vec{M}_2 \tag{2.1.4}$$

$$\Leftrightarrow \vec{0} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 \tag{2.1.5}$$

Gleichen sich also alle Drehmomente aus, befindet sich der Hebel oder -allgemeiner- ein starrer Körper im Gleichgewicht, analog zum Gleichgewicht durch Kräftefreiheit. Dabei ist jedoch zu berücksichtigen, dass, wenn an einem Körper zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ angreifen, dieser zwar keiner Translation unterzogen wird, aber trotzdem anfangen kann, zu rotieren, da die Kräfte an unterschiedlichen Punkten angreifen können ($r_1 F_1 \neq -r_2 F_2$, weil $r_1 \neq r_2$).

Der Drehimpuls. Analog zum Impuls von Massepunkten kann auch der Drehimpuls $\vec{L}$ als zeitliche Aufleitung des Drehmomentes definiert werden:

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{2.1.6}$$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} \tag{2.1.7}$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \tag{2.1.8}$$

$$= \vec{r} \times m\vec{v} \tag{2.1.9}$$

Da nach $\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{p} = \overrightarrow{\mathrm{const.}}$ Impulserhaltung gilt, gilt diese auch für den Drehimpuls $\vec{M} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \overrightarrow{\mathrm{const.}}$, denn L wird nur mit einem zeitlich konstanten Wert multipliziert (r). Ein starrer Körper, auf den kein Drehmoment wirkt, rotiert also mit gleichbleibender *Winkelgeschwindigkeit*: Jeder Massepunkt des Körpers bewegt sich auf einer Kreisbahn und alle Massepunkte eines starren Körpers besitzen die gleiche Winkelgeschwindigkeit.

2.2 Trägheitsmoment

Mit der bisherigen Herleitung ergibt sich ein Problem: Mit den bisherigen Formeln wird nur der statische Fall betrachtet. Aber wie wirkt sich ein Drehmoment auf die Geschwindigkeit eines starren Körpers aus, also wie groß ist dessen Trägheit?

Der starre Körper. Ein starrer Körper ist ein System von Massepunkten, die untereinander (in guter Näherung) fest verbunden sind. Die Rotationsmechanik berücksichtigt also nicht mehr nur den Schwerpunkt von Körpern, sondern auch deren tatsächliche Ausdehnung, denn ein Körper verteilt seine Masse über sein gesamtes Volumen:

$$m = \int\limits_V \varrho(\vec{r})\mathrm{d}V \tag{2.2.10}$$

Um die tatsächliche Trägheit des gesamten Systems zur berechnen, müssen also nur die Trägheiten der einzelnen Massepunkte aufaddiert werden. Wie stark ein Massepunkt zur Trägheit des starren Körpers beiträgt, hängt davon ab, wie weit er von der Rotationsachse entfernt liegt (2.1.9). Dabei wird über den Drehimpuls argumentiert, denn der Gesamtdrehimpuls muss gleich dem Drehimpuls aller Massepunkte sein:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i \tag{2.2.11}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i), \text{ da } \vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i \tag{2.2.12}$$

Auflösen und vereinfachen ergibt:

$$\vec{L} = \vec{\omega} \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2 \tag{2.2.13}$$

Analog zur Definition des Impulses ($\vec{p} = \vec{v}m$) wird auch hier eine Geschwindigkeit mit einer Trägheit multipliziert. Es wird also zusammengefasst:

$$I = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2 \tag{2.2.14}$$

$$\vec{L} = I\vec{\omega} \tag{2.2.15}$$

$$\vec{M} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = I\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} \tag{2.2.16}$$

Durch Integration über das Volumen kann man so das Trägheitsmoment beliebig geformter Körper relativ zu beliebig ausgerichteten Drehachsen berechnen:

$$I = \int_V \varrho(\vec{r}) r^2 \mathrm{d}V \tag{2.2.17}$$

2.3 Rotationsenergie

Die Rotationsenergie kann aus der kinetischen Energie aller Massepunkte hergeleitet werden:

$$E_{kin} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i v_i^2}{2} \tag{2.3.18}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i(\vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2}{2} \tag{2.3.19}$$

Eine längere Rechnung ergibt die -erwartungsgemäß zur kinetischen Energie analoge- Rotationsenergie:

$$E_{rot} = \frac{I\omega^2}{2} \tag{2.3.20}$$

3 Anwendung

Abbildung 3.1: Links: Die Konstruktion des Trebuchets. Rechts: Der Autor spannt das Trebuchet.

3.1 Variablendeklaration

Um Unklarheiten in der Benennung von Variablen im Vorhinein zu vermeiden, ist es am besten, sämtliche Variablennamen ganz auszuschreiben (z.B. $m_{Geschoss}$). Dadurch werden jedoch viele Terme, insbesondere in (3.3), unleserlich. Deswegen habe ich mich für einen, maximal zwei Buchstaben pro Objekt entschlossen. Folgende, nicht selbsterklärende Indices werden verwendet:

$_k$ Der kurze Hebelarm, an dem das Gegengewicht befestigt ist.

$_l$ Der lange Hebelarm, an dessen Ende sich das Geschoss befindet.

$_{lk}$ Der gesamte Hebelarm.

$_P$ Das Geschoss (abgeleitet von Projektil).

$_G$ Das Gegengewicht.

Wenn eine Variable auch ohne Index einen eindeutigen Namen besitzt (etwa das Drehmoment M), wird der Index ausgelassen.

3.2 Erste Abschätzungen mithilfe der allgemeinen Energieerhaltung

Bei vielen Problemen in der Mechanik ist es ausreichend oder zumindest hilfreich zu versuchen, das Problem mithilfe der Energieerhaltung zu formulieren, um eine erste Abschätzung vornehmen zu können.

Energie des Wurfarmes. So auch hier: Zunächst bestimmen wir die Gesamtenergie, die wir dem Trebuchet zuführen:

$$E_{ges} = m_G g h_0 \tag{3.2.1}$$

Dabei ist h_0 die Höhe und m_G die Masse des Gegengewichtes. Wenn wir davon ausgehen, dass das Geschoss in dem Moment freigegeben wird, in dem das Gegengewicht seine tiefste Stelle erreicht (also wenn $h = 0$ gilt), wird diese Energie auch bestmöglich genutzt. Man könnte jetzt (vorschnell) schlussfolgern, dass die Reichweite des Trebuchets direkt von E_{ges} abhinge, also $E_{ges} = E_P$ sei. Jedoch schwingt der Wurfarm nach Abwurf des Geschosses weiter. Dafür ist natürlich auch Energie notwendig, die dann nicht mehr dem Geschoss zur Verfügung stehen kann. Natürlich gibt es auch keine lineare Abhängigkeit, also etwa $E_P = \frac{m_P}{m_{Trebuchet}} E_{ges}$, denn der Wurfarm hat an verschiedenen Stellen eine unterschiedliche Geschwindigkeit und deswegen auch eine unterschiedlich hohe, kinetische Energie.

Energie des Geschosses. Die Reichweite s des Trebuchets hängt hauptsächlich von der Anfangsgeschwindigkeit und so von der anfänglichen, kinetischen Energie des Geschosses ab:

$$s = \frac{v_{0,P}^2 \sin 2\varphi_P}{g} \tag{3.2.2}$$

$$E_P = \frac{m_P v_P^2}{2} \tag{3.2.3}$$

Wenn man die Luftreibung vernachlässigt und den Abwurfwinkel $\varphi_P = \frac{\pi}{4}$ setzt, um die maximale Reichweite zu erzielen (ein Winkel von 0 entspricht der Waagerechten), ergibt sich durch Äquivalenzumformung sofort die Reichweite in Abhängigkeit von der Energie:

$$s(E) = \frac{2E_P}{m_P} \frac{\sin 2\varphi_P}{g} \tag{3.2.4}$$

Damit ist klar, dass für die reale Reichweite s_{real} in jedem Fall

$$s_{real} < s(E_{ges}) \tag{3.2.5}$$

gelten muss. Mehr Informationen können mit der einfachen Energieerhaltung noch nicht gewonnen werden (die Verbesserung wird in (3.4) vorgenommen).

3.3 Berechnung als starrer Körper

Um die tatsächliche Abwurfgeschwindigkeit und damit die Reichweite des Trebuchets zu bestimmen, ist es nun notwendig, den Wurfarm als starren Körper anzusehen.

Das Drehmoment des Gegengewichtes. An einem Ende des Wurfarms (bzw. Hebelarms, denn physikalisch ist dieser nichts anderes) greift die Gewichtskraft des Gegengewichts an. Beim Schwingen zwingt der Wurfarm das Gegengewicht auf eine Kreisbahn. Es liegt also ein Drehmoment vor, welches vom Winkel des Wurfarmes abhängt, denn die Gewichtskraft des Gegengewichts zeigt immer nach unten, während der Wurfarm seinen Winkel verändert:

$$F = m_G g \cos\varphi \tag{3.3.6}$$

$$\vec{M} = \vec{r}_k \times \vec{F}_G \tag{3.3.7}$$

Dabei beschreibt $\varphi = 0$ die Waagerechte.

Das Trägheitsmoment des Wurfarms. Um die Beschleunigung des Wurfarms zu bestimmen, muss dessen Trägheitsmoment bekannt sein. Der Wurfarm wird dazu zu einem Quader von homogener Dichte ϱ vereinfacht, der den Querschnitt $A = ab$ und die Länge $r = r_k + r_l$ besitzt[1]. Ein Blick in die Formelsammlung oder ein einfaches Volumenintegral[2] liefert folgendes:

$$I_1 = m_{lk}\frac{r^2 + b^2}{12} \tag{3.3.8}$$

Dabei bleibt jedoch die Lage der Rotationsachse unberücksichtigt: Diese muss nicht mit der Symmetrieachse des Wurfarmes (wie I_1 suggeriert) zusammenfallen. Etwa bei historischen Trebuchets liegt sie bei $\frac{1}{6}r$. Um (3.3.8) entsprechend zu modifizieren, wird der *Steiner'sche Verschiebungssatz* verwendet:

$$\Delta r_{rot} = \frac{r}{2} - (r_l - r_k) \tag{3.3.9}$$

$$I_2 = m_{lk}\frac{r^2 + b^2}{12} + m_{lk}(\Delta r_{rot})^2 \tag{3.3.10}$$

In (3.3.9) wird die Entfernung der Symmetrieachse zur tatsächlichen Rotationsachse berechnet. Bisher wurde nur das Trägheitsmoment des Arms berechnet, jedoch nicht das des Geschosses. Dieses kann hier gut durch das Trägheitsmoment einer Punktmasse am Ende des Wurfarmes repräsentiert werden, welches einfach zu I_2 addiert wird:

$$I = m_{lk}\frac{r^2 + b^2}{12} + m_{lk}(\Delta r_{rot})^2 + m_P r_l^2 \tag{3.3.11}$$

Warum beeinflusst das Gegengewicht des Trebuchets I nicht? Das Gegengewicht gibt die Geschwindigkeit des Arms vor: Der Arm des Trebuchets kann natürlich niemals schneller werden als das fallende Gegengewicht. Oder anders ausgedrückt: Die Trägheit des Gegen-

[1] Natürlich gilt $m_{lk} = \varrho A r$

[2] Für Berechnung siehe Anhang

gewichts spielt keine Rolle, da es niemals durch den Arm beschleunigt wird, sondern nur durch die Gravitationskraft.

Die Endgeschwindigkeit. Mit den Formeln (3.3.7) und (3.3.11) kann nun die allgemeine Bewegungsgleichung aufgestellt werden, es gilt (2.2.16):

$$M = r_k m_G g \cos\varphi = I\dot{\omega} \tag{3.3.12}$$

$$\Leftrightarrow g\cos\left(\varphi(t)\right)\frac{r_k m_G}{I} = \frac{\mathrm{d}\omega(t)}{\mathrm{d}t} \tag{3.3.13}$$

$$\approx \varsigma g \frac{r_k m_G}{I} = \frac{\mathrm{d}\omega(t)}{\mathrm{d}t} \tag{3.3.14}$$

Hier wird ein grundlegendes Problem deutlich: Die Bewegungsgleichung enthält den Kosinus ihrer eigenen (zweifachen) Aufleitung. Die Lösung der sich daraus ergebenden Differentialgleichung würde sowohl den mathematischen Rahmen dieser Facharbeit sprengen als auch die Nachvollziehbarkeit der weiteren Rechnung erheblich beeinträchtigen. Deswegen wird die *Vereinfachung* $\cos\varphi \approx \varsigma$ mit $\varsigma = 0.77$ für $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ vorgenommen [3]. Wenn man (3.3.14) jetzt nach der Zeit integriert, erhält man die Winkelgeschwindigkeit, nochmaliges Integrieren führt zum Winkel des Wurfarmes:

$$\int \frac{\mathrm{d}\omega(t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \int \varsigma g \frac{r_k m_G}{I}\mathrm{d}t =$$

$$\omega(t) = \varsigma g \frac{r_k m_G}{I} t \tag{3.3.15}$$

$$\Leftrightarrow \int \omega(t)\mathrm{d}t = \int \varsigma g \frac{r_k m_G}{I} t\mathrm{d}t =$$

$$\varphi(t) = \varsigma g \frac{r_k m_G}{2I} t^2 \tag{3.3.16}$$

Dabei ist der Winkel des Wurfarmes relativ zur Horizontalen, d.h. $\varphi = 0$ ist waagerecht. Um die Endwinkelgeschwindigkeit ω_e zu erhalten, muss man nun (3.3.16) nach t umformen und in (3.3.15) einsetzen[4]. Dann kann man nach (2.1.9) die Abwurfgeschwindigkeit des Geschosses errechnen, welches sich bei r_l befindet:

$$\omega(\varphi) = \varsigma g \frac{r_k m_G}{I}\sqrt{\frac{2\varphi}{\dot{\omega}}} \tag{3.3.17}$$

$$v_{0,P} = \varsigma g \frac{r_l r_k m_G}{I}\sqrt{\frac{2\varphi}{\dot{\omega}}} \tag{3.3.18}$$

[3] Das ergibt sich aus dem Mittelwert des Kosinus, gewichtet in Richtung $\varphi = 0$, denn der beschleunigende Wurfarm hält sich viel länger bei $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$ als bei $\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ auf: $\frac{\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \mathrm{d}\varphi}{\frac{\pi}{2}} + \frac{\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\varphi \mathrm{d}\varphi}{\frac{\pi}{4}}}{2} \approx 0.77$

[4] Für genaue Äquivalenzumformung siehe Anhang

Das so errechnete $v_{0,P}$ wird in (3.2.2) eingesetzt und mit (3.3.14) vereinfacht,

$$\begin{aligned} s =& \frac{2\varphi_{lk}\varsigma^2 g^2 m_G^2 r_l^2 r_k^2 \sin(2\varphi_P)}{\dot{\omega} I^2 g} \\ =& \frac{2\varphi_{lk}\varsigma^2 g^2 m_G^2 r_l^2 r_k^2 \sin(2\varphi_P)}{\varsigma g \frac{r_l m_k}{I} I^2 g} \\ =& 2\varphi_{lk}\varsigma \sin(2\varphi_P) \ \frac{m_G r_k r_l^2}{I} \end{aligned} \tag{3.3.19}$$

um dann mit (3.3.11) und weitere Vereinfachung auf die Reichweite des Trebuchets zu kommen:

$$\begin{aligned} s =& 2\varphi_{lk}\varsigma \sin(2\varphi_P) \ \frac{m_G r_k r_l^2}{m_{lk}\frac{r^2+b^2}{12} + m_{lk}(\frac{r}{2} - (r_l - r_k))^2 + m_P r_l^2} \\ =& 2\varphi_{lk}\varsigma \sin(2\varphi_P) \ \frac{m_G r_k r_l^2}{m_{lk}\frac{r^2+b^2}{12} + m_{lk}(\frac{3r_k - r_l}{2})^2 + m_P r_l^2} \end{aligned} \tag{3.3.20}$$

Deutung. Dieser Term besteht aus verschiedenen, mit einander „konkurrierenden“ Ausdrücken: Um eine maximale Reichweite zu erreichen, muss φ_P möglichst $45°$ sein ($\sin(2\varphi_P) = 1$), während φ_{lk} möglichst $90°$ betragen sollte, da der Hebelarm bis zu diesem Punkt das Geschoss (in Schussrichtung) beschleunigen kann (danach wird es verzögert, denn das Gegengewicht wird wieder angehoben). Mit einem einfachen Hebelarm (bei dem $\varphi_P = \varphi_{lk}$) ist nur ein Kompromiss erreichbar, weswegen bei vielen echten Trebuchets das Geschoss über ein Seil mit dem Wurfarm verbunden ist. Da das Geschoss nicht sofort beschleunigt wird, sondern erst das Seil gestrafft werden muss, ist $\varphi_P < \varphi_{lk}$. Ein positiver Nebeneffekt ist, dass das Seil r_l vergrößert, ohne jedoch das Trägheitsmoment nennenswert zu steigern, da $m_{Seil} << m_l$. Das „hinterherhinkende“ Seil zu berechnen ist indes doch recht komplex, weswegen es hier nicht berücksichtigt wird.

Zwei weitere konkurrierende Faktoren sind die Länge der Hebelarme und ihre Trägheitsmomente: Ein größeres r_k erhöht natürlich das Drehmoment des Gegengewichtes und kann das Geschoss also besser beschleunigen. Deswegen steht r_k im Zähler. Aber ein größeres r_k führt natürlich auch zu einem größeren m_k, was das Trägheitsmoment erhöht. Das wiederum verringert die Beschleunigung des Geschosses. Deswegen steht r_k auch im Nenner. Das gleiche gilt natürlich auch für r_l.

In der Praxis ist es also wichtig, m_{lk} möglichst klein gegenüber m_P zu halten, ohne jedoch auf einen großen Hebel (r) zu verzichten. Darin liegt auch die Schwierigkeit, ein gutes Trebuchet zu bauen: Wie man dem Term ansieht, ist es nicht ohne weiteres möglich, ein Maximum auszurechnen.

3.4 Berechnung mithilfe der Energieerhaltung unter Berücksichtigung der Rotationsmechanik

Der bisherige Rechenweg ist recht aufwändig gewesen. Vielleicht bietet die Energieerhaltung einen einfacheren Lösungsweg, wenn man sie um die Erhaltung der Rotationsenergie erweitert (2.3.20)?

Energie des Wurfarmes. Gleichung (3.2.1) gilt natürlich weiterhin; die Energie des Wurfarmes wird diesmal aber auch durch die Rotationsenergie ausgedrückt:

$$E_{ges} = \frac{I\omega^2}{2} \tag{3.4.21}$$

Damit wird es möglich, die Energie auszurechnen, die dem Trebuchet verloren geht, wenn das Geschoss sich löst. Dafür werden die unterschiedlichen Trägheitsmomente (3.3.10, 3.3.11) gebraucht, die schon im vorherigen Unterkapitel ausgerechnet worden sind:

$$\Delta I = I - I' = m_P r_l^2 \tag{3.4.22}$$
$$\frac{I\omega^2}{2} = \frac{I'\omega^2}{2} + E_P \tag{3.4.23}$$
$$\Leftrightarrow E_P = \frac{\omega^2}{2}\Delta I \tag{3.4.24}$$

Damit und mit den Erkenntnissen aus (3.1) kann die Reichweite beschrieben werden:

$$\begin{aligned} s(E_P) &= \frac{2\frac{\omega^2}{2}\Delta I}{m_P}\frac{\sin 2\varphi_P}{g} \\ &= \frac{\omega^2 m_P r_l^2}{m_P}\frac{\sin 2\varphi_P}{g} \end{aligned} \tag{3.4.25}$$

Diese Gleichung sieht schon erheblich einfacher aus als etwa (3.3.20). Doch es tritt ein Problem auf: Um ω zu berechnen, benötigt man wieder das gesamte Trägheitsmoment und die in (3.3) vorgenommene Vereinfachung. Wenn man weiter umformt und einsetzt, erhält man (3.3.20). Hier ist die Energieerhaltung also kein einfacherer Weg zum Ziel, sondern ein gleichwertiger. Nichtsdestoweniger bestätigt sie die Richtigkeit des ersten Lösungsweges.

4 Praktische Überprüfung

Abbildung 4.1: Das Trebuchet in Aktion.

4.1 Aufbau

Das von mir gebaute Trebuchet besteht aus zwei 1 m langen PVC-Rohren (4 cm Durchmesser) auf allen vier Seiten, wobei jeweils vier Rohre über zwei $45°$-Stücke und ein T-Stück verbunden sind (siehe Bild). Die zwei T-Stücke sind über die Drehachse miteinander verbunden und werden durch zwei Abspannseile gesichert. Die Achse befindet sich in etwa 1,5 m Höhe und ist 1 m lang, ihre Biegefestigkeit wird durch im Innern liegende Holzstäbe verbessert. Der Hebelarm besteht aus einem 2 m langen Rohr als Wurfarm und zwei 44 cm langen Rohren als Gegengewichtsarm, an dessen Ende mit einem Gartenschlauch ein gefüllter Getränkekasten (Gewicht 1-18 Kg, je nach Anzahl der Flaschen) befestigt ist. Diese drei Rohre sind über drei T-Stücke miteinander verbunden, die Rohre des Hebelarmes und die T-Stücke haben einen größeren Innendurchmesser als die Achse, um drehbar zu sein. Des weiteren ist der Wurfarm mit dem Gegengewichtsarm über ein 1 m langes Rohr verbunden, da die T-Stücke allein nicht verwindungssteif sind.

Das Geschoss ist ein Golfball, der mit Drachenschnur an einem Haken am Ende des Wurfarmes hängt.

Technische Daten $\varphi_{lk} = \frac{3\pi}{4}$, $\varphi_P = \frac{\pi}{4}$ $m_G = 12\,\mathrm{Kg}$, $m_{lk} = 1.75\,\mathrm{Kg}$, $m_P = 44\,\mathrm{g}$ $r_k = 44\,\mathrm{cm}$, $r_l = 2\,\mathrm{m}$, $r_P = 2.1\,\mathrm{cm}$, $b = 4\,\mathrm{cm}$

4.2 Durchführung

Um das Geschoss abzuschießen, wird der Wurfarm nach unten gedrückt oder das Gegengewicht angehoben. Dann wird die Schlaufe der Schnur, an der der Golfball hängt, an einen Haken am Ende des Wurfarmes eingehängt. Die Länge der Schnur und der Winkel des Hakens bestimmen den Abwurfwinkel. Schließlich wird der Wurfarm freigegeben und das Geschoss wird geworfen. Ein Video zur Demonstration ist im Internet unter http://goo.gl/lE9gR zu finden.

4.3 Ergebnisse

Die maximale Reichweite des Trebuchets liegt nach einigen Testläufen mit 12 Kg Gegengewicht bei 49 m. Einsetzen der realen Werte meines Trebuchets in (3.3.20) ergibt folgendes[1]:

$$\begin{aligned} s &= 2\varphi_{lk}\varsigma \sin(2\varphi_P)\ \frac{m_G r_k r_l^2}{m_{lk}\frac{r^2+b^2}{12} + m_{lk}(\frac{3r_k - r_l}{2})^2 + m_P r_l^2} \\ &= 2 \cdot \frac{3\pi}{4} \cdot 0.81 \frac{12\,\mathrm{Kg} \cdot 0.44\,\mathrm{m} \cdot (2\,\mathrm{m})^2}{1.75\,\mathrm{Kg} \cdot \frac{(2.44\,\mathrm{m})^2 + (0.04\,\mathrm{m})^2}{12} + 1.75\,\mathrm{Kg} \cdot (\frac{3 \cdot 0.44\,\mathrm{m} - 2\,\mathrm{m}}{2})^2 + 0.044\,\mathrm{Kg} \cdot (2\,\mathrm{m})^2} \\ &\doteq 65\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

Die Abweichung von ca. 25% ist auf den nicht perfekten Abwurfwinkel, die Vereinfachung in (3.3.14) und vor allem auf die Reibungsverluste durch die Achse zurückzuführen. Der Luftwiederstand und der Federeffekt (siehe Bild) des Hebelarms spielen auch eine nicht unerhebliche Rolle.

[1] Der Faktor ς muss natürlich angepasst werden, denn der Wurfarm kann bis auf $-45°$ heruntergezogen werden, wie dem Bild zu entnehmen ist: $\frac{\frac{\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \mathrm{d}\varphi}{\frac{3\pi}{4}} + \frac{\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \cos\varphi \mathrm{d}\varphi}{\frac{\pi}{4}}}{2} \approx 0.81$

Der Luftwiderstand des Geschosses hingegen ist kein Faktor, der die Reichweite meines Trebuchets stark beeinflusst, denn der Golfball ist recht aerodynamisch und die maximale Geschwindigkeit des Geschosses (etwa 20 m/s) ist gering. Die Stokes'sche Reibung des Balles ist mit maximal $F_R = 6\pi r_P v_{max} \cdot 1.9 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{Pa\,s} \doteq 1.5 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{N}$ vernachlässigbar gering.

Zwar ist die Abweichung recht groß, aber wenn man bedenkt, dass die Formel weder die Reibungsverluste an der Achse noch den Luftwiderstand des Hebelarms berücksichtigt, ist sie trotzdem eine gute Abschätzung für die Reichweite.

5 Schluss

5.1 Reflexion

Ich wäre gerne noch genauer auf die Berechnung des Trägheitsmoments eingegangen, z.B. in Form einer ausführlichen Herleitung. Auch wäre eine Herleitung zum Steiner'sche Verschiebungssatz mithilfe von (2.2.17) wünschenswert gewesen. Ich habe darauf aber verzichtet, da diese Herleitungen mathematischer Natur sind und die Länge dieser Facharbeit noch weiter gesteigert hätten.

Ein weiterer Punkt ist der Verzicht auf die Definition der Einheiten von I, $\vec{M}$ und $\vec{L}$. Dies geschah vor allen deswegen, weil sie für die Berechnungen am Trebuchet keine Rolle spielen, da sie sich am Ende herauskürzen, und weil diese Einheiten tendenziell eher schwierig zu fassen, d.h. vorzustellen sind. Es ist also nicht zweckdienlich, diese hier zu definieren.

Ich habe auch weitestgehend lange Äquivalenzumformungen vermieden, um die Facharbeit kurz und übersichtlich zu halten. Äquivalenzumformungen sind schließlich rein mathematisch und im Zweifelsfall am Computer oder auf dem Papier schnell und einfach nachzuvollziehen.

Ferner hätte ich gerne noch die Reibungsverluste an der Achse mit in die Formel aufgenommen, aber der Reibungskoeffizienten von PVC gegen PVC scheint nur sehr schwierig zu finden zu sein. Das gleiche gilt für die „Federhärte" der Rohre.

5.2 Ausblick

Mit den diskutierten Formeln kann man natürlich nicht nur das Experiment überprüfen, sondern auch verbessern. Z.B. mit einem Funktionsplotter lässt sich die Reichweite in Abhängigkeit verschiedener Parameter trotz der komplexen Formel gut darstellen und so das bereits gebaute Trebuchet optimieren.

Das Schmieren der Drehachse oder der Einbau eines Kugellagers könnten ferner die Reichweite zusätzlich erhöhen. Eine andere Möglichkeit ist es, das Gegengewicht nicht nur mit der Schnur am Hebel zu befestigen, sondern auch diese über eine Evolvente (wie etwa über einen Zahn eines Zahnrads) abzurollen, um den Hebel beim Fallen des Gegengewichts zu vergrößern, um die sich verringernde Kraft senkrecht zum Hebelarm zu kompensieren.

Eine sehr einfache Möglichkeit ist es, das Gegengewicht zu vergrößern: Bei meinen Experimenten habe ich mit bis zu 18 Kg getestet, jedoch sind für weitere Massesteigerungen dickere Rohre notwendig, um eine zu große Belastung an den Übergangsstellen, die flexibel sein müssen, zu vermeiden. Es ist auch möglich, den Wurfarm ganz oder teilweise durch kohlefaserverstärktes Drachengestänge zu ersetzen, um das Trägheitsmoment zu verringern (ein Halbieren der Hebelmasse hätte eine 1.8xFache Steigerung der Reichweite zur Folge).

Aber auch die Formel selbst lässt sich noch verbessern: Durch das Einbeziehen von Reibung an der Achse kann die Genauigkeit noch erhöht werden. Mithilfe einer numerischen Analyse kann auch der Luftwiderstand des Hebels und ohne die Vereinfachung gerechnet werden. Natürlich ist dafür dann aber ein Computer notwendig.

6 Anhang

6.1 Quellenverzeichnis

[1] Dieter Meschede (Hg.), *Gerthsen Physik*, 24. Aufl., Bonn 1948-2010, ISBN 978-3-642-12893-6.

[2] Bierwerth, Hartmann, Herr, Wieneke, *Formeln der Technik*, 1. Aufl., Haan-Gruiten 2007, ISBN 978-3-8085-5321-3.

[3] Chevedden, Paul E., *The Invention of the Counterweight Trebuchet: A Study in Cultural Diffusion*, 2000.

[4] Metin Tolan, Physik A2 im WS 2011/2012, Powerpoint-Folien zur Vorlesung[1].

6.2 Bildnachweis

Das Bild (1.1) stammt von der Website http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/b/b2/Trebuchet_Castelnaud.jpg, alle anderen Bilder wurden vom Autor erstellt.

6.3 Anmerkung zum Format

Der besseren Übersicht wegen fängt jedes Kapitel auf einer neuen Seite an. Auch erscheinen Formelblöcke immer als Ganzes auf einer Seite und haben mindestens eine Zeile führenden Text. Würde ich auf diese Maßnahmen verzichten, würde sich die Zahl der Seiten meines Textes (ohne Anhang) von 14 auf 12 Seiten reduzieren.

6.4 Volumenintegral eines Quaders

Ein Quader besteht aus 6 Flächen, von denen jeweils zwei ihn in einer Richtung begrenzen. Wenn z die Rotationsachse ist, dann hängt das Trägheitsmoment nur von x und y nach dem

[1] Diese sind nicht mehr im Internet verfügbar, ich arbeitete mit den bereits früher heruntergeladenen Folien

Satz des Pythagoras ab. Bei homogener Dichte ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int\limits_V \varrho \vec{r}^2 \mathrm{d}V \\
&= \varrho \int\limits_V (x^2 + y^2) \mathrm{d}V \\
&= \varrho \int\limits_z \int\limits_y \int\limits_x (x^2 + y^2) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z \\
&= \varrho \int\limits_z \int\limits_y (\frac{x^3}{3} + xy^2) \mathrm{d}y \mathrm{d}z \\
&= \varrho \int\limits_z (\frac{yx^3}{3} + \frac{xy^3}{3}) \mathrm{d}z \\
&= \varrho xyz (\frac{x^2 + y^2}{3}) \\
&= m \frac{x^2 + y^2}{3} \text{,da } m = \varrho V
\end{aligned}
$$

Damit ist das Trägheitsmoment des Quaders ausgerechnet. Die Rotationsachse liegt aber noch auf der Z-Achse des Koordinatensystems. Das wird mit dem Steiner'sche Verschiebungssatz geändert:

$$
\begin{aligned}
I &= m \frac{x^2 + y^2}{3} + m(\frac{x}{2})^2 + m(\frac{y}{2})^2 \\
&= m \frac{x^2 + y^2}{12}
\end{aligned}
$$

6.5 Hilfsmittel

Um Berechnungen anzustellen, benutzte ich einen *Casio fx-991DE Plus Taschenrechner* und für aufwändigere Berechnungen *Microsoft Mathemathics*. Die Bilder wurden mit einer Digitalkamera photographiert und sind in *Photoshop CS2* nachbearbeitet. Der Text wurden mit *Tex Live*, einer LaTeX-Distribution, gelayoutet und in *Sublime Text 2* geschrieben.

Die für das Experiment verwendeten Materialien und Werkzeuge sind: PVC-Rohre und -Winkel mit 4 cm und 5 cm Querschnitt, Gafferband, Holzstäbe, ein Getränkekasten mit gefüllten Flaschen, verschiedene Seile und Schnur, Heringe, Gartenschlauch, ein Haken aus Metall, ein kurzes Alu-Rohr, ein Ultraschall-Entfernungsmessgerät, eine Säge, ein Golfball.

6.6 Selbständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich, Max Pernklau, diese Facharbeit selbständig verfasst und angefertigt habe. Ich habe nur die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt. Bei der Ausführung des Experimentes half mir Yannick Bungers.

Dortmund, 23. März 2013 . . . .

(Unterschrift)