Nr. 2

a) χ^2-Test mit $H_0: f(x_i) = 31{,}3 \;\forall\; x_i$

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{7} \frac{(y_i - f(x_i))^2}{(\sigma_{i,\text{Modell}})^2}$$

mit $\sigma_i = 0{,}5$

und y_i = Messwerte

$$\chi^2 = \frac{(31{,}6-31{,}3)^2}{0{,}5^2} + \frac{(32{,}2-31{,}3)^2}{0{,}5^2} + \ldots$$

$\approx 6{,}08$

$n = 7-1 = 6$ Freiheitsgrade

$\chi^2_{n=6,\,\alpha=0{,}05} = 12{,}59$

$\leadsto \chi^2 < \chi^2_{n=6,\,\alpha=0{,}05}$

d.h. bei einer Signifikanz von $\alpha = 0{,}05$ kann die Nullhypothese nicht verworfen werden

b) χ^2-Test mit $\cancel{H_0(x_i)=}$ $H_0: f(x_i) = 30{,}7 \;\forall\; x_i$

$\Rightarrow \chi^2 \approx 21{,}92$

$\Rightarrow \chi^2 > \chi^2_{n=6,\,\alpha=0{,}05}$ d.h. die Hypothese b muss verworfen werden

Nr. 3

a) $\mathcal{L}(\theta, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$

$\Gamma(x) = \frac{\sup_{\theta} \mathcal{L}_1(\theta|x)}{\sup_{\theta \in \Theta} \mathcal{L}_2(\theta|x)}$ wobei im Zähler die Likelihood unter der Bedingung, dass H_0 wahr ist (dh. $\mu = \mu_0$), maximiert wird und der Nenner über allen mit der Messdaten vereinbaren Parametern.

b) Zähler: $\mathcal{L}_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu_0)}{2\sigma^2}\right)$

$\to$ $\mu = \mu_0$, da dies durch H_0 gegeben ist

$\to$ $\sigma^2 = s^2$ Stichprobenvarianz, da diese eine Gaußverteilungs-Likelihood bei gegebenen Daten maximiert (siehe früheren Übungszettel)

Nenner: $\mathcal{L}_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)}{2\sigma^2}\right)$

mit $\to$ $\mu = \langle\mu\rangle$ arithmetisches Mittel

$\to$ $\sigma^2 = s^2$ Stichprobenvarianz

beides maximiert $\mathcal{L}$ für eine Gaußverteilung bei gegebenen Daten (siehe früheren Übungszettel).

c) $\Gamma(x) = \frac{\prod_i \cancel{\frac{1}{\sqrt{2\pi s^2}}} \exp\left(-\frac{(x_i-\mu_0)^2}{2s^2}\right)}{\prod_i \cancel{\frac{1}{\sqrt{2\pi s^2}}} \exp\left(-\frac{(x_i-\langle\mu\rangle)^2}{2s^2}\right)}$ das Produkt läuft über die n Messungen x_i

$= \prod_i \left(\exp\left(-\frac{(x_i-\mu_0)^2}{2s^2} + \frac{(x_i-\langle\mu\rangle)^2}{2s^2}\right)\right)$

$\cancel{= \prod_i \left(\exp\left(\frac{x_i^2 - 2x_i\mu_0 + \mu_0^2 + x_i^2 - 2x_i\langle\mu\rangle + \langle\mu\rangle^2}{2s^2}\right)\right)}$

$= \prod_i \left(\exp\left(\frac{\cancel{-x_i^2} + 2x_i\mu_0 - \mu_0^2 \cancel{+x_i^2} - 2x_i\langle\mu\rangle + \langle\mu\rangle^2}{2s^2}\right)\right)$

$= \exp\left(-\sum_i \frac{x_i(-2\mu_0 + 2\langle\mu\rangle) + \mu_0^2 - \langle\mu\rangle^2}{2s^2}\right)$

$= \exp\left(-\frac{(-2\mu_0 + 2\langle\mu\rangle)\sum_i x_i + n(\mu_0^2 - \langle\mu\rangle^2)}{2s^2}\right)$

$= \exp\left(-\frac{(-2\mu_0\langle\mu\rangle + 2\langle\mu\rangle^2)\cdot n + n(\mu_0^2 - \langle\mu\rangle^2)}{2s^2}\right)$

$$= \exp\left(-\frac{n}{2s^2}\left(\mu_0^2 - 2\mu_0\langle\mu\rangle + \langle\mu\rangle^2\right)\right)$$

$$= \exp\left(-\frac{n}{2s^2}\left(\mu_0 - \langle\mu\rangle\right)^2\right) \leq c$$

Bringe das auf eine t-verteilte Größe

$$\Rightarrow \quad -\frac{n}{2s^2}\left(\mu_0 - \langle\mu\rangle\right)^2 \leq \ln(c)$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{\frac{n}{2s^2}}\,\left|\mu_0 - \langle\mu\rangle\right| \geq \sqrt{-\ln(c)}$$

$\Leftrightarrow$ ~~...~~

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\left|\langle\mu\rangle - \mu_0\right|}{\sqrt{s^2/n}} \geq c^* \quad \text{folgt einer t-Statistik}$$

d) $\mu_0 = 200$, $n = 25$, $\bar{x} = \langle\mu\rangle = 205$, $s = 10$

$$\Rightarrow \quad \frac{\left|\langle\mu\rangle - \mu_0\right|}{\sqrt{s^2/n}} = 2{,}5$$

Betrachte t-Test-Tabelle für ~~$n=25-2=23$~~ $n=25-1=24$ Freiheitsgrade,

$\alpha = 0{,}025$ (da beidseitigen Test)

$\Rightarrow$ Tabelle: $T = 2{,}064 \leq 2{,}5$

d.h. wir müssen die Nullhypothese bei einer Signifikanz von 5% abweisen