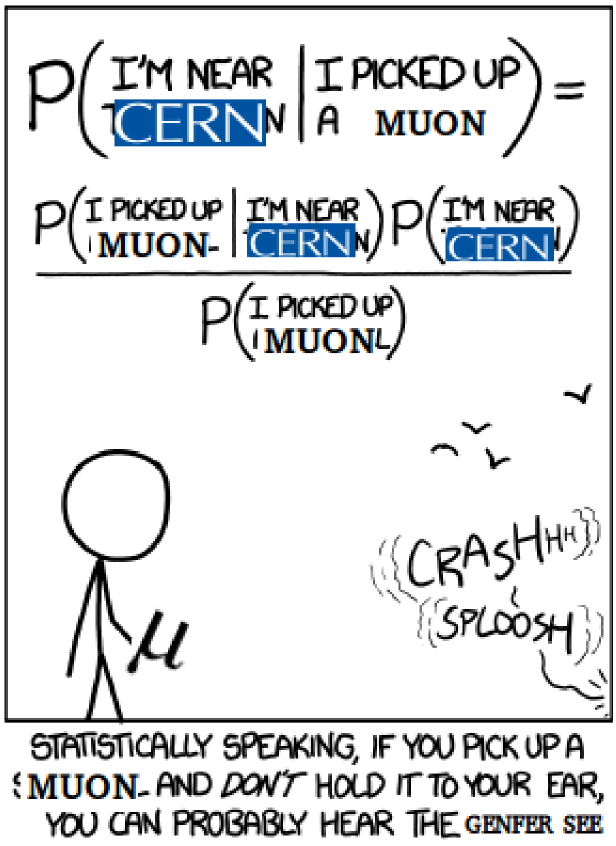
SMD Blatt 10



Kollek, Alameddine, Pernklau

Nr.2

a) χ^2-Test mit $H_0: f(x_i) = 31,3 \ \forall x_i$

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{7} \frac{(y_i - f(x_i))^2}{(\sigma_{i,\text{Modell}})^2}$$

mit $\sigma_i = 0,5$

und y_i = Messwerte

$$\chi^2 = \frac{(31,6-31,3)^2}{0,5^2} + \frac{(32,2-31,3)^2}{0,5^2} + \dots$$

$\approx 6,08$

$n = 7-1 = 6$ Freiheitsgrade

$\chi^2_{n=6,\ \alpha=0,05} = 12,59$

$\rightsquigarrow \chi^2 < \chi^2_{n=6,\ \alpha=0,05}$

d.h. bei einer Signifikanz von $\alpha = 0,05$ kann die Nullhypothese nicht verworfen werden

b) χ^2-Test mit ~~$H_0(x_i)=$~~ $H_0: f(x_i) = 30,7 \ \forall x_i$

$\Rightarrow \chi^2 \approx 21,92$

$\Rightarrow \chi^2 > \chi^2_{n=6,\ \alpha=0,05}$ d.h. die Hypothese H_0 muss verworfen werden

Nr. 3

a) $\mathcal{L}(\Theta, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$

$\Gamma(x) = \frac{\sup_{\Theta} \mathcal{L}_1(\Theta|x)}{\sup_{\Theta_0} \mathcal{L}_2(\Theta|x)}$ wobei im Zähler die Likelihood unter der Bedingung, dass H_0 wahr ist (d.h. $\mu = \mu_0$), maximiert wird und der Nenner unter allen mit den Messdaten vereinbaren Parametern.

b) Zähler: $\mathcal{L}_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu_0)}{2\sigma^2}\right)$

$\rightarrow$ $\mu = \mu_0$, da dies durch H_0 gegeben ist

$\rightarrow$ $\sigma^2 = s^2$ Stichprobenvarianz, da diese eine Gaußverteilungs-Likelihood bei gegebenen Daten maximiert (siehe früheren Übungszettel)

Nenner: $\mathcal{L}_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)}{2\sigma^2}\right)$

mit $\rightarrow$ $\mu = \langle\mu\rangle$ arithmetisches Mittel

$\rightarrow$ $\sigma^2 = s^2$ Stichprobenvarianz

beides maximiert $\mathcal{L}$ für eine Gaußverteilung bei gegebenen Daten (siehe früheren Übungszettel).

c) $\Gamma(x) = \frac{\prod_i \cancel{\frac{1}{\sqrt{2\pi s^2}}} \exp\left(-\frac{(x_i-\mu_0)^2}{2s^2}\right)}{\prod_i \cancel{\frac{1}{\sqrt{2\pi s^2}}} \exp\left(-\frac{(x_i-\langle\mu\rangle)^2}{2s^2}\right)}$ das Produkt läuft über die n Messungen x_i

$= \prod_i \left(\exp\left(-\frac{(x_i-\mu_0)^2}{2s^2} + \frac{(x_i-\langle\mu\rangle)^2}{2s^2}\right)\right)$

$\cancel{= \prod_i \left(\exp\left(\frac{x_i^2 - 2x_i\mu_0 + \mu_0^2 + x_i^2 - 2x_i\langle\mu\rangle + \langle\mu\rangle^2}{2s^2}\right)\right)}$

$= \prod_i \left(\exp\left(\frac{-\cancel{x_i^2} + 2x_i\mu_0 - \mu_0^2 + \cancel{x_i^2} - 2x_i\langle\mu\rangle + \langle\mu\rangle^2}{2s^2}\right)\right)$

$= \exp\left(-\sum_i \frac{x_i(-2\mu_0 + 2\langle\mu\rangle) + \mu_0^2 - \langle\mu\rangle^2}{2s^2}\right)$

$= \exp\left(-\frac{(-2\mu_0 + 2\langle\mu\rangle)\sum_i x_i + n(\mu_0^2 - \langle\mu\rangle^2)}{2s^2}\right)$

$= \exp\left(-\frac{(-2\mu_0\langle\mu\rangle + 2\langle\mu\rangle^2)\cdot n + n(\mu_0^2 - \langle\mu\rangle^2)}{2s^2}\right)$

$$= \exp\left(-\frac{n}{2s^2}\left(\mu_0^2 - 2\mu_0\langle x\rangle + \langle x\rangle^2\right)\right)$$

$$= \exp\left(-\frac{n}{2s^2}\left(\mu_0 - \langle x\rangle\right)^2\right) \leq c$$

Bringe das auf eine t-verteilte Größe

$$\Rightarrow \; -\frac{n}{2s^2}\left(\mu_0 - \langle x\rangle\right)^2 \leq \ln(c)$$

$$\Leftrightarrow \; \sqrt{\frac{n}{2s^2}}\,\left|\mu_0 - \langle x\rangle\right| \geq \sqrt{-\ln(c)}$$

$$\Leftrightarrow \; \frac{\left|\langle x\rangle - \mu_0\right|}{\sqrt{s^2/n}} \geq c^* \quad \text{folgt einer } t\text{-Statistik}$$

d) $\mu_0 = 200$, $n = 25$, $\bar{x} = \langle x\rangle = 205$, $s = 10$

$$\Rightarrow \; \frac{\left|\langle x\rangle - \mu_0\right|}{\sqrt{s^2/n}} = 2{,}5$$

Betrachte t-Test-Tabelle für ~~$n = 25 - 2 = 23$~~ $n = 25 - 1 = 24$ Freiheitsgrade,

$\alpha = 0{,}025$ (da beidseitiger Test)

$\Rightarrow$ Tabelle: $T = 2{,}064 \leq 2{,}5$

d.h. wir müssen die Nullhypothese bei einer Signifikanz von 5% abweisen

4

Benutze Satz von Bayes: $(x \in \{\pi, K, p\})$

$$P(x \text{ im Detektor}) = \begin{cases} ,80 & ,\pi \\ ,1 & ,K \\ ,1 & ,p \end{cases}$$

$P(x \text{ gemessen} \mid x \text{ im Detektor}) = L_x$

$P(x \text{ gemessen}) = N \;\forall x$ (Normierungsfaktor)

$P(x \text{ im Detektor} \mid x \text{ gemessen})$: Beobachtungswahrsch.

$$P(x \text{ im Det.} \mid x \text{ gem}) = \frac{P(x \text{ gem.} \mid x \text{ im Det.}) \cdot P(x \text{ im Det})}{N} = P_x$$

a)

$P_\pi N = 0{,}104$ $\quad$ $P_\pi = 34{,}2\%$

$P_K N = 0{,}15$ $\quad\rightarrow\quad$ $P_K = 49{,}3\%$

$P_p N = 0{,}05$ $\quad$ $P_p = 16{,}4\%$

Σ $\quad 0{,}304 = N$

b)

$$\begin{array}{cccc} & \pi & K & p \\ \underline{\vec{P}} = & (96{,}7\%; & 3{,}0\%; & 3‰) \end{array}$$

c) $\underline{\vec{P}} = (23{,}7\%;\ 21{,}2\%;\ 55{,}1\%)$

1

a) $H_0 : s_0 = 0$

$$-\partial_b F\Big|_{b_0} \overset{!}{=} 0 = (N_{off} + N_{on})\, b_0^{-1} - (1+\alpha) \cancel{+\text{const}}. \quad \Leftrightarrow \quad b_0 = \frac{N_{on} + N_{off}}{1+\alpha}$$

Da $N_{on}, N_{off} \gg 10$ ist $\mathcal{L}$ annährend gaußförmig und es kann Bbbel 6.11 verwendet werden:

$$\sigma_b \approx \left(\frac{d^2 F}{db^2}\Big|_{b_0} \right)^{-1/2} = \sqrt{\frac{b_0^2}{N_{on} + N_{off}}} = \underline{\sqrt{\frac{1}{1+\alpha}}\sqrt{b_0}}$$

b)

$$\Gamma = \frac{\mathcal{L}(b_0, s_0)}{\mathcal{L}(\hat{b}, \hat{s})} = \frac{\exp(N_{off} \ln b_0 + N_{on} \ln(\alpha b_0) - (1+\alpha) b_0 - 0 - \ln N_{off}! - \ln N_{on}!)}{\exp(N_{off} \ln \hat{b} + N_{on} \ln(\hat{s} + \alpha \hat{b}) - (1+\alpha)\hat{b} - s - \ln N_{off}! - \ln N_{on}!)}$$

$$= \frac{\exp\left(N_{off} \ln \frac{N_{on} + N_{off}}{1+\alpha} + N_{on} \ln \frac{N_{on} + N_{off}}{1/\alpha + 1} - N_{on} - N_{off} \right)}{\exp\left(N_{off} \ln N_{off} + N_{on} \ln(\underbrace{N_{on}}_{= N_{on} - \alpha N_{off} + \alpha N_{off}}) - N_{off} \underline{-\alpha N_{off}} - N_{on} + \underline{\alpha N_{off}} \right)}$$

$N_{\Sigma} = N_{on} + N_{off}$

$$= \underline{\left(\frac{\frac{N_{\Sigma}}{1+\alpha}}{N_{off}} \right)^{N_{off}} \cdot \left(\frac{\frac{N_{\Sigma}}{1+1/\alpha}}{N_{on}} \right)^{N_{on}}}$$

c)

$$D = -2\ln\lambda \text{ ist } \chi^2\text{-Verteilt mit einem Freiheitsgrad} \overset{\text{Definition der } \chi^2\text{-Verteilung}}{\Leftrightarrow} \sqrt{D} = d \text{ ist standard-normalverteilt.}$$

$$\rightarrow \sqrt{-2\ln\lambda} \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{x^2}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2\ln\left(\sqrt{-4\pi\ln\lambda}\right)} = x$$

Da die SNV eine Varianz von 1 hat, ist x die Signifikanz in Einheiten von σ.

d)

Einsetzen liefert:
(Rechnung in Code)

- $1{,}75\,\sigma$
- $2{,}19\,\sigma$