Aufgabe 1

a)

Die Likelihoodfunktion ergibt sich zu

$$L = \prod_{n_i} \frac{\lambda^{n_i}}{n_i!} e^{-\lambda},$$

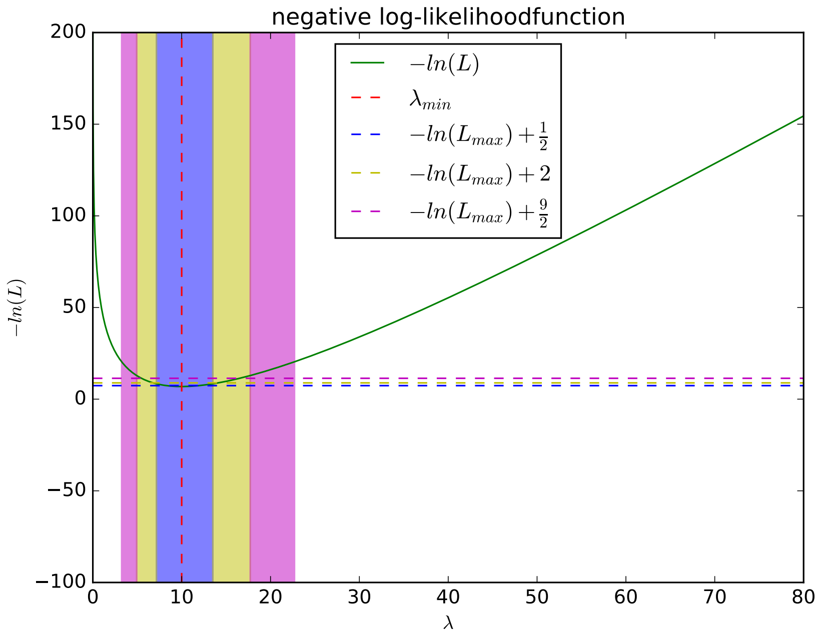
wobei

$$n_i = \{13, 8, 9\}$$

annehmen kann. Aus der Likelihoodfunktion folgt schließlich

$$\begin{aligned} -\ln(L) &= -\sum_{n_i} \ln\left(\frac{\lambda^{n_i}}{n_i!} e^{-\lambda}\right) \\ &= 3\lambda - \ln\left(\frac{\lambda^{13}}{13!}\right) - \ln\left(\frac{\lambda^{8}}{8!}\right) - \ln\left(\frac{\lambda^{9}}{9!}\right) \\ &= 3\lambda - 30\ln(\lambda) + \ln(13! \cdot 9! \cdot 8!) \end{aligned}$$

für die negative Log-Likelihoodfunktion, welche in der nächsten Abbildung geplottet wird.



negative log-likelihoodfunction
$-ln(L)$
λ_{min}
$-ln(L_{max})+\frac{1}{2}$
$-ln(L_{max})+2$
$-ln(L_{max})+\frac{9}{2}$
200
150
100
50
0
−50
−100
0
10
20
30
40
50
60
70
80
λ
$-ln(L)$

b)

Im Folgenden wird das Minimum der Funktion bestimmt.

$$\begin{aligned}\frac{\partial(-\ln(L))}{\partial\lambda} &= 3 - \frac{30}{\lambda} \stackrel{!}{=} 0\\ &\Rightarrow \lambda_{min} = 10.\end{aligned}$$

c)

Aus der Bedingung

$$-\ln(\lambda_{min}) + a = -\ln(\lambda)$$

folgt mit $\lambda_{min} = 10$

$$3\lambda + 30(\ln(\lambda) - 1 - \ln(10)) - a = 0,$$

wobei

$$a = \left\{\frac{1}{2}, 2, \frac{9}{2}\right\}$$

ist. Die Nullstelle wird numerisch über das Newton-Verfahren mit Kenntnis der Ableitung der negativen Log-Likelihoodfunktion bestimmt, wobei jeweils rechts und links von λ_{min} gestartet wird. Daraus ergeben sich die Grenzen der Intervalle

$$\begin{aligned}&[7.162, 13.504] \text{ und } len = 6.342, \text{ für } a = \frac{1}{2};\\ &[4.932, 17.722] \text{ und } len = 12.79, \text{ für } a = 2;\\ &[3.245, 22.696] \text{ und } len = 19.451, \text{ für } a = \frac{9}{2}.\end{aligned}$$

Diese Intervalle sind ebenfalls im Plot eingezeichnet. Diese Intervalle können Konfidenzintervalle bzgl. der Schätzung des Erwartungswertes λ darstellen. Liegt das tatsächliche λ außerhalb dieses gewählten Bereiches kann die Schäzung verworfen werden.

d)

Das zweite Taylorpolynom ergibt sich zu

$$T_2(30, -\ln(L)) = 30 - 30\ln(30) + \frac{1}{60}(\lambda - 30)^2 + \ln(13! \cdot 9! \cdot 8!).$$

Diese Funktion ist in der nächsten Abbildung zu sehen.

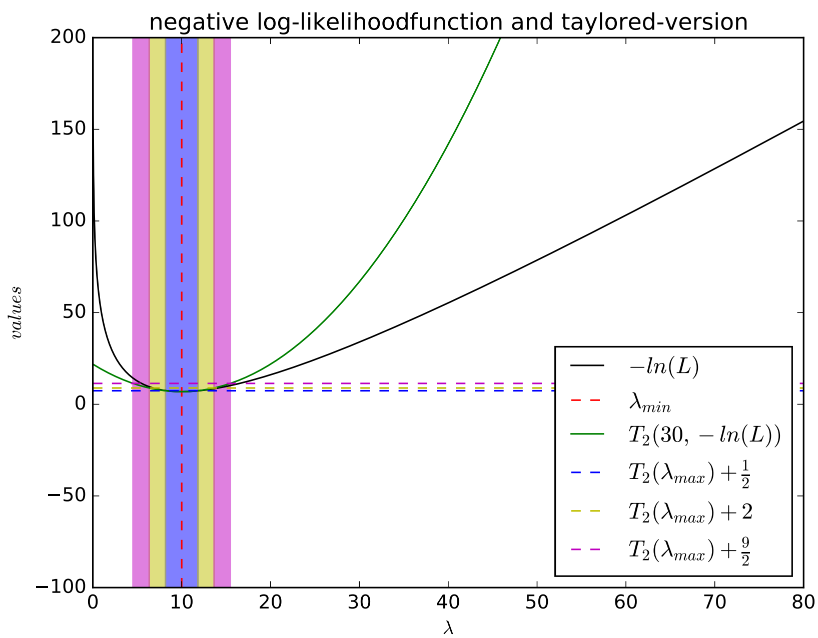


Figure 1: Negative Log-Likelihoodfunktion und Taylorpolynom.

Die λ werden auch hier numerisch bestimmt, wobei diese hier auch analytisch gewonnen werden können. Die Intervalle lauten

$$[8.174, 11.826] \text{ und } len = 3.651, \text{ für } a = \frac{1}{2};$$
$$[6.349, 13.651] \text{ und } len = 7.303, \text{ für } a = 2;$$
$$[4.523, 15.477] \text{ und } len = 10.954, \text{ für } a = \frac{9}{2}.$$

Die relativen Abweichungen zum exakten Ergebnis lauten

$$
\begin{aligned}
&42.425\,\%, \;\text{für } a = \frac{1}{2};\\
&42.901\,\%, \;\text{für } a = 2;\\
&43.682\,\%, \;\text{für } a = \frac{9}{2}.
\end{aligned}
$$

Diese Abweichungen sind sehr stark und somit ist das Taylorpolynom keine so gute Näherung an die analytisch kompliziertere negative Log-Likelihoodfunktion. Der Vorteil am Polynom ist, dass damit viel besser gerechnet werden kann und es gibt einem in diesem Beispiel kleineren Konfidenzbereich an, in dem sich der Mittelwert bewegen kann.