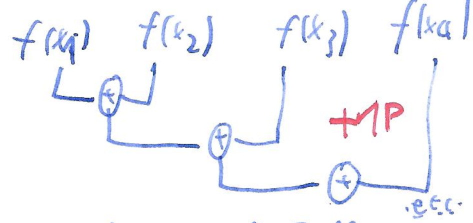
Aufgabe 1: *Numerik* (6 P.)

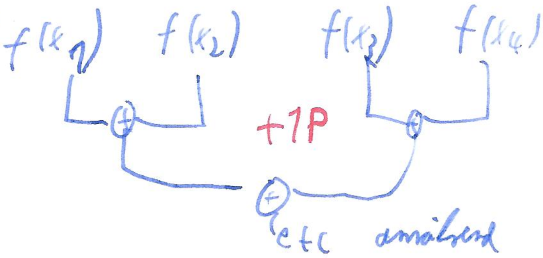
1) Gegeben seien kleine Zahlen $f(x_i)$ der gleichen Größenordnung. Skizzieren Sie die zwei Summationsverfahren aus der Vorlesung und begründen Sie, welches von beiden die Fortpflanzung numerischer Fehler im vorliegenden Fall reduziert. **(3 P.)**

CPV:



+1P

GPV:



+1P

hier wird eine große Zahl mit einer kleinen Zahl zusammen addiert. ~~Im Computer~~ wenn irgendwann die große Zahl so groß ist dass die kleine Zahl keine Änderung mehr macht bei der Speicherung kommen schnell Fehler auf.

+1P

hier werden immer annähernd gleich große Zahlen addiert also entstehen weniger ~~Fehler~~ Fehler

3/3

2) Stabilisieren Sie die Funktion $f(x)$ für den Fall $x \gg 1$. **(3 P.)**

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}} \tag{1}$$

⇒ Instabil

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{\sqrt{x^2+x}}$$

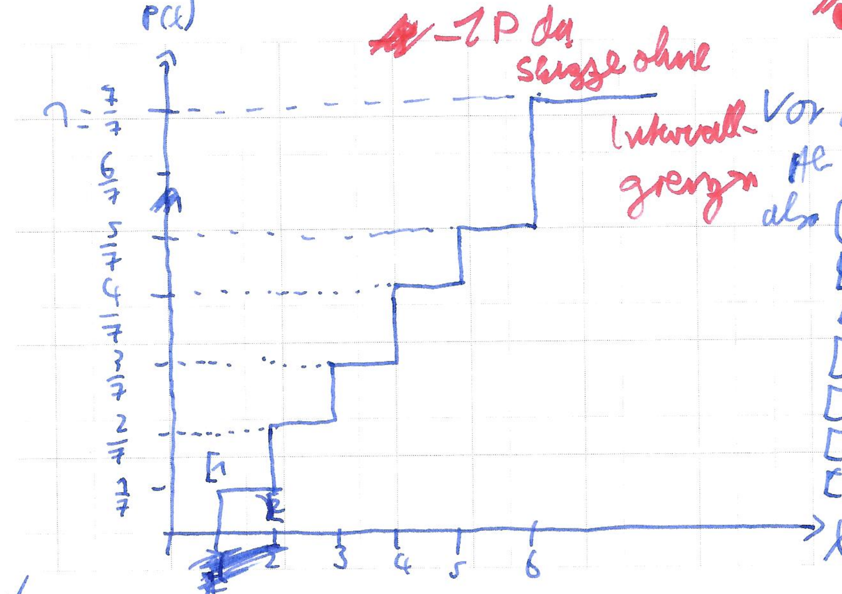
0/3

Aufgabe 2: *Verteilungen* (8 P.)

1) Skizzieren Sie die Verteilungsfunktion $F_X(x)$ eines gezinkten, sechsseitigen Würfels. Der Betrüger hat die Gewichtsverteilung im Würfel so gezinkt, dass gilt:

$$P(X = 6) = 2 \cdot P(X = N), \quad \text{mit } N \in [1, 2, 3, 4, 5].$$

Denken Sie an Achsenbeschriftungen und markieren Sie falls nötig offene bzw. geschlossene Intervallgrenzen. **(5 P.)**



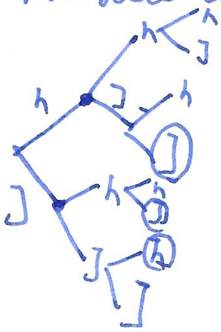
−1 P da Skizze ohne Intervallgrenzen

Vor der Zahl)
Ab der Zahl [
also $(-\infty, 1) = 0$
$[1, 2) = \frac{1}{7}$
$[2, 3) = \frac{2}{7}$
$[3, 4) = \frac{3}{7}$
$[4, 5) = \frac{4}{7}$
$[5, 6) = \frac{5}{7}$
$[6, \infty) = 1$

4/5

2) Sie werfen dreimal zufällig auf eine Dartscheibe und kein Wurf geht daneben. Die gesamte Scheibe hat eine Fläche von $A_S = 908\,\text{cm}^2$. Die „Triple 20" hat eine Fläche von $A_{T20} = 2.9\,\text{cm}^2$. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit aus den drei zufälligen Würfen zweimal die „Triple 20" zu treffen? **(3 P.)**

Wahrscheinlichkeit 1. Tripel 20 bei einem Wurf $P_1(T20) = \frac{2{,}9\,\text{cm}^2}{908\,\text{cm}^2} = 3{,}193 \cdot 10^{-3}$ +1P



2. Triple 20 Treffen 3 möglichkeiten:

$W = 2 \cdot P_1(1. T20) \cdot P_1(\text{Rest}) = \frac{2{,}9\,\text{cm}^2}{908\,\text{cm}^2} \cdot \frac{2{,}9\,\text{cm}^2}{908\,\text{cm}^2} \cdot \left(1 - \frac{2{,}9\,\text{cm}^2}{908\,\text{cm}^2}\right)$
$= 1{,}0167988 \cdot 10^{-5}$

Die Wahrscheinlichkeit liegt bei $1{,}0167988 \cdot 10^{-3}\,\%$ für 1. Möglichkeit

Das 3 · W = $3{,}0503964 \cdot 10^{-3}\,\%$

Die Wahrscheinlichkeit dafür das man 2-mal aus 3 Würfen "Triple 20" erreicht liegt bei $3{,}0503964 \cdot 10^{-3}\,\%$ +2P

3/3

Aufgabe 3: *Zufallszahlen* (10 P.)

1) Geben Sie eine analytische Funktion an, um Zufallszahlen der Verteilung mit der Dichte $f(x) = \frac{1}{x}$ im Bereich von 1 bis b aus gleichverteilten Zufallszahlen z zu erzeugen. **(6 P.)**

[Zuerst z normieren auf 0 bis 1 $z_{nom} = \left|\frac{z}{z_{max}}\right|$] Info an Tafel zu spät

$z_{nom} = z$

$$A = \int_1^b \frac{1}{x}\,dx = [\ln(x)]_1^b = \ln(b) - \ln(1) = \ln(b)$$ ✓ +2P

$$A(x) = \int_1^x \frac{1}{x'}\,dx' = [\ln(x')]_1^x = \ln(x) - \ln(1) = \ln(x)$$

$$\frac{A(x)}{A} = z_{norm}(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(b)} \Rightarrow \ln(b) \cdot z_{norm}(x) = \ln(x)$$

$$x = e^{\ln(b) \cdot z_{norm}} = b^{z_{norm}}$$ ✓ +4P

6/6

2) Nennen Sie zwei Methoden zur Generation von beliebig verteilten Zufallszahlen mit Hilfe von gleichverteilten Zufallszahlen. Nennen Sie für jede Methode jeweils einen Vorteil und einen Nachteil. **(4 P.)**

1 Transformationsmethode
Nachteil: Muss Integrierbar sein +0.5P
+ ~~Invertierbar~~
Vorteil: Dauert nicht ~~so~~ so lange
noch +1P

2. Neumann'sches Rückweisungsverfahren +1P
Vorteil: kann mit jeder Funktion gemacht werden
Nachteil wenn Funktion zum bsp so aussieht werden sehr viele Zufallszahlen (Punkte) weggeschmissen
man muss somit lange warten. +1P

~~3.5P~~ 3.5/4P

Aufgabe 4: *Schätzen* (8 P.)

1) Seien $X_1, \dots, X_N$ unabhängig identisch verteilte Zufallsvariablen. Prüfen Sie den Schätzer $\hat{\mu} = 2\left(\frac{X_1}{2} - n\bar{X} + \sum_{i=1}^{n} X_i\right)$ für den Erwartungswert auf Erwartungstreue. Korrigieren Sie gegebenenfalls. **(5 P.)**

$$E\left(2\left(\frac{X_1}{2} - n\bar{X} + \sum_{i=1}^{n} X_i\right)\right) = 2 \cdot E\left(\frac{X_1}{2} - n\bar{X} + \sum_{i=1}^{n} X_i\right)$$
$$= 2\left[E\left(\frac{X_1}{2}\right) + E\left(-n\bar{X}\right) + E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\right]$$
$$= \bar{X} - 2n\,E(\bar{X}) + 2\sum_{i=1}^{n} E(X_i)$$
$$= \bar{X} - 2n\bar{X} + 2n\bar{X} = \bar{X} = \mu$$

$\frac{5}{5}$

2) Eine Urne enthält $N = 8$ Kugeln, die entweder rot oder schwarz sind. Die genaue Anzahl $M \in \{0, 1, \ldots, 8\}$ der roten Kugeln ist nicht bekannt. Nacheinander werden $n = 4$ Kugeln gezogen und jeweils wieder zurück in die Urne gelegt. Beobachtet werden $x_1 = 1$ (erste Kugel ist rot), $x_2 = 1$ (zweite Kugel ist rot), $x_3 = 0$ (dritte Kugel ist schwarz) und $x_4 = 1$ (vierte Kugel ist rot).

Was ist die nach dem Maximum-Likelihood-Prinzip plausibelste Zusammensetzung der Kugeln in der Urne? **(3 P.)**

$\frac{1}{3}$

Poisson-Verteilung !

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^{4} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda} = \left(\frac{\lambda^1}{1!} e^{-\lambda}\right)^3 \cdot \left(\frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda}\right)$$

$$= \frac{\lambda^3}{1} e^{-4\lambda}$$

$\log = \ln$

$$\log(L(\lambda)) = \log(\lambda^3) + \log(e^{-4\lambda}) = -4\lambda + \log(\lambda^3)$$

$$F(\lambda) = -\log(L(\lambda)) = -\ln(\lambda^3) + 4\lambda$$

$$0 = \frac{d(F(\lambda))}{d\lambda} = 4 - \frac{1}{\lambda^3} 3\lambda^2 = 4 - \frac{3}{\lambda} \Rightarrow \frac{3}{\lambda} = 4$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4} = \lambda$$

$$0 = \frac{d^2(F(\lambda))}{d\lambda^2} = \frac{3}{\lambda^2} > 0 \Rightarrow \text{Tief Punkt}$$

1P.

nach max. ~~Likelyhoo~~ Likelihood wäre am ~~der~~ wahrscheinlichsten das In der Urne $8 \cdot \lambda = 6$ rote und 2 schwarze Kugeln drinne wären.

Aufgabe 5: *Berücksichtigung von Häufigkeitsinformationen* (10 P.)

1) Eine neue tödliche Krankheit wurde entdeckt. Die einzige Möglichkeit zu testen, ob jemand an der unbekannten Krankheit erkrankt ist, ist ein Speicheltest. Der Speicheltest gibt den Zustand des Patienten in 2.3 % fälschlicherweise als positiv und in 1.4 % fälschlicherweise als negativ an.

Es gibt keine Gründe anzunehmen, dass Sie an der Krankheit erkrankt sind. Sie lassen sich aber trotzdem testen und erhalten ein positives Testergebnis. Nehmen Sie für diese Aufgabe an, das Vorkommen der Krankheit liege bei 1:10 000.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie wirklich an der Krankheit erkrankt sind? **(6 P.)**

6/6

$\frac{1}{10000}$ 2,3 % fälschlicherweise als positiv

Also von 10000 hat 1 die Krankheit

Negativ: 9999 ~~falsch positiv~~ falsch positiv

=> 229,977 ≈ 230 fälschlicherweise als positiv

1

Hat Krankheit $100 : 10000 \cdot 1 = \frac{1}{100}$ %

Hat nicht Krankheit $\frac{99}{100}$ %

Fälschlicherweise Positiv 2,3 %

Fälschlicherweise Negativ 1,4 %

=> ~~Als~~ positiv erkannt ~~231~~ ~~davon 1 Krank~~

6P.

~~Hat Krankheit: $100 : 231 \cdot 1 = \frac{100}{231} \approx 0{,}432900$ %~~

~~Hat nicht Krankheit $100 : 231 \cdot 230 = \frac{23000}{231} \approx 99{,}567099$ %~~

~~Er hat mit der Wahrscheinlichkeit von 0,432900 % die Krankheit~~

=> Als positiv erkannt $230 + \underline{0{,}986}$ ← ist Krank

Hat Krankheit $100 : (230 + 0{,}986) \cdot 0{,}986 \approx 0{,}42687$ %

Hat nicht Krankheit $(100 - ✓) \approx 99{,}57313$ %

mit der Wahrscheinlichkeit von 0,42687 % ist er Krank ✓

2) Was sagt eine bayesische Wahrscheinlichkeitsdichte aus? **(2 P.)**

Bei der Bayesischen Wahrscheinlichkeit wird die ~~Ergebnis~~ Wahrscheinlichkeit als grad physikalischer Überzeugung interpretiert

2P.

$\frac{2}{2}$

3) Wie werden im Falle der bayesischen Statistik Kredibilitätsintervalle bestimmt? **(2 P.)**

0P.

$\frac{0}{2}$

Aufgabe 6: *Kleinste Quadrate* (20 P.)

In einem Praktikumsversuch werden folgende (unkorrelierte) Werte gemessen:

x	0.2	0.6	1.0
y	1.0 ± 0.5	4.0 ± 1.0	5.0 ± 0.5

Führen Sie eine **gewichtete** Anpassung der Parameter a_1 und a_2 mit dem Ansatz

$$y = f(x, a_1, a_2) = a_1 + e^{a_2 x} \tag{2}$$

durch und gehen Sie dazu folgendermaßen vor:

a) Entwickeln Sie das Modell um $x = 0$ in eine Taylorreihe bis zur ersten Ordnung. **(2 P.)**

$f'(x) = a_2 e^{a_2 x}$ $\quad f'(0) = a_2$

$f(0) = a_1 + 1$

$y_{Tay}: a_1 + 1 + a_2 \cdot x = a_2 x + \underbrace{(a_1 + 1)}_{= a^*}$ ✓

1.5 P.

b) Stellen Sie die Designmatrix **A** auf. **(2 P.)**

$\cancel{A = \begin{pmatrix} 1,0 & 1 \\ 4,0 & 1 \\ 5,0 & 1 \end{pmatrix}}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 0,2 & 1 \\ 0,6 & 1 \\ 1,0 & 1 \end{pmatrix}$

2P.

c) Berechnen Sie den Lösungsvektor **a** für die Parameter nach der Methode der kleinsten Quadrate. Falls Ihnen Aufgabenteil b) nicht gelungen ist, verwenden Sie die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1.2 \\ 1 & 1.6 \\ 1 & 2.0 \end{pmatrix}$. (Diese Matrix ist nicht das richtige Ergebnis aus b)) **(10 P.)** ⇓

3P.

$$\hat{a} = (A^T W A)^{-1} \cdot A^T W f(x) \; f$$

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 1 \\ 0{,}6 & 1 \\ 1{,}0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0{,}2 & 1 \\ 0{,}6 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1{,}4 & 1{,}8 \\ 1{,}8 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}4 & 1{,}8 \\ 1{,}8 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(A^T A)^{-1} = \frac{1}{1{,}4 \cdot 3 - 1{,}8 \cdot 1{,}8} \begin{pmatrix} 3 & -1{,}8 \\ -1{,}8 & 1{,}4 \end{pmatrix} = \frac{25}{24} \begin{pmatrix} 3 & -1{,}8 \\ -1{,}8 & 1{,}4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1{,}0 \\ 4{,}0 \\ 5{,}0 \end{pmatrix}$$

$$\cancel{(A^T A)^{-1}} \cdot A^T f(x) = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7{,}6 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7{,}6 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 7{,}6 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\hat{a} = (A^T A)^{-1} \cdot A^T f(x) = \frac{25}{24} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1{,}8 \\ -1{,}8 & 1{,}4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4{,}8 \\ 0{,}32 \end{pmatrix} = \frac{25}{24} \begin{pmatrix} 4{,}8 \\ 0{,}32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad (\checkmark)$$

$$\Rightarrow \hat{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

d) Berechnen Sie die Kovarianzmatrix **V**[**a**]. **(4 P.)**

4 P.

$$W[y] = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sigma_3^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$\sigma_1 = 0{,}5$

$\sigma_2 = 1{,}0$

$\sigma_3 = 0{,}5$

$$A^T W[y] = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}6 & 4 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$V[a]^{-1} = A^T W[y] A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}6 & 4 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}2 & 1 \\ 0{,}6 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4{,}52 & 5{,}4 \\ 5{,}4 & 9 \end{pmatrix}$$

$$V[a] = \frac{1}{4{,}52 \cdot 9 - 5{,}4 \cdot 5{,}4} \begin{pmatrix} 9 & -5{,}4 \\ -5{,}4 & 4{,}52 \end{pmatrix} = \frac{25}{288} \begin{pmatrix} 9 & -5{,}4 \\ -5{,}4 & 4{,}52 \end{pmatrix}$$ (✓)

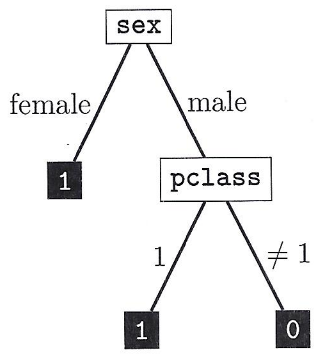
e) Berechnen Sie den Korrelationskoeffizienten. **(2 P.)**

2 PT.

$$\rho = \text{Korrelationskoeffizient} = \frac{-5{,}4 \cdot \frac{25}{288}}{\sqrt{9 \cdot \frac{25}{288} \cdot 4{,}52 \cdot \frac{25}{288}}} = \frac{-5{,}4}{\sqrt{9 \cdot 4{,}52}} = -0{,}84664878$$ (✓)

Aufgabe 7: *Data Mining* (20 P.)

1) Sie haben ein Modell mittels eines Entscheidungsbaumes erstellt, um eine Vorhersage über das Überleben der Passagiere der Titanic zu machen ($1 \rightarrow$ überlebt und $0 \rightarrow$ gestorben):



a) Wenden sie das Modell auf die folgenden Daten an: **(4 P.)**

	name	sex	pclass	survived	**Vorhersage**
1	Rekic, Mr. Tido	male	3	0	0
2	Phillips, Miss. Alice Frances Louisa	female	2	1	1
3	Jacobsohn, Mr. Sidney Samuel	male	2	0	0
4	Risien, Mr. Samuel Beard	male	3	0	0
5	Denbury, Mr. Herbert	male	2	0	0
6	Sandstrom, Miss. Marguerite Rut	female	3	1	1
7	Anderson, Mr. Harry	male	1	1	1
8	Peuchen, Major. Arthur Godfrey	male	1	1	1
9	Ashby, Mr. John	male	2	0	0
10	Johannesen-Bratthammer, Mr. Bernt	male	3	1	0
11	Pernot, Mr. Rene	male	2	0	0
12	Elias, Mr. Joseph	male	3	0	0
13	Hamalainen, Master. Viljo	male	2	1	0
14	Turja, Miss. Anna Sofia	female	3	1	1
15	Ryerson, Miss. Susan Parker SSuzette"	female	1	1	1

4 P.

... unterschied

b) Bestimmen Sie Genauigkeit für die Klassifikation, sowie Reinheit und Effizienz für die Überlebenden. **(2 P.)**

$tp = 6$

$fp = 2$

$tn = 7$

$fn = 0$

$\overline{15}$

$$\text{Reinheit} = \frac{tp}{tp+fp} = \frac{6}{6+2} = \frac{3}{4}$$

$$\text{Effizienz} = \frac{tp}{tp+fn} = \frac{6}{6+0} = 1$$

$$\text{Genauigkeit} = \frac{tp+tn}{tp+fn+tn+fp} = \frac{6+7}{6+7+2+0} = \frac{13}{15}$$

2 P.

2) Vollziehen Sie einen Teil des Trainings eines Entscheidungsbaumes nach. Es wird ein Datensatz mit Wetterbedingungen (Tabelle nächste Seite) betrachtet. Vorhergesagt werden soll, ob ein Regenbogen entsteht.
Hinweis: $\log_2(x) = \log_{10}(x)/\log_{10}(2)$

a) Berechnen Sie per Hand die Entropie der Wurzel. **(3 P.)** $H(D) := -\sum_{i=1}^{2} P_i \log_2(P_i)$

4 · True , 10 · False => 14 Daten

$H(D) = -\frac{4}{14} \log_2\left(\frac{4}{14}\right) - \frac{10}{14} \cdot \log_2\left(\frac{10}{14}\right)$ ✓ 1p ✓ 1p

$= 0{,}8631205686$ ✓ 1p

3/3

b) Berechnen Sie per Hand den Informationsgewinn für das Attribut Sonne. **(6 P.)**

~~6 · True~~ , ~~8 · False~~

~~$H(D_{True})$~~

6 · False → 6 · nicht geregnet ✓ 1p ; 0 · geregnet ✓ 1p

8 · True → |||| = 4 · nicht geregnet ✓ 1p ; |||| = 4 geregnet ✓ 1p

6/6

$H(D^{Sonne}_{False}) = -\frac{6}{6} \log_2\left(\frac{6}{6}\right) - \frac{0}{6} \log_2\left(\frac{0}{6}\right)$

$= -1 \log_2(1) = 0$

$H(D^{Sonne}_{True}) = -\frac{4}{8} \log_2\left(\frac{4}{8}\right) - \frac{4}{8} \log_2\left(\frac{4}{8}\right) = 1$

$\text{gain}(D^{Sonne}) = H(D) - \frac{\# D^{Sonne}_{False}}{\# D} \cdot H(D^{Sonne}_{False}) - \frac{\# D^{Sonne}_{True}}{\# D} H(D^{Sonne}_{True})$

$= 0{,}8631205686 - \frac{6}{14} \cdot 0 - \frac{8}{14} \cdot 1 = 0{,}2916919977$ ✓ 1p ✓ 1p

Regenbogen	Sonne	Wind	Regen	Nebel
1 False	1 False	False	True	True
2 False	True 1	False	False	False
3 False	2 False	True	False	True
4 False	True 2	True	False	False
True 1	True 3	False	True	False
True 2	True 4	False	True	False
True 3	True 5	True	False	False
5 False	3 False	False	True	False
6 False	4 False	True	False	False
7 False	5 False	True	True	True
8 False	True 6	True	False	False
True 4	True 7	True	True	False
9 False	6 False	True	False	False
10 False	True 8	False	True	False
Informationsgewinn:	$\boxed{0{,}29}$	0.01	0.07	0.12

c) Tragen Sie das Attribut mit dem höchsten Informationsgewinn in die Wurzel des Baumes ein. Den Informationsgewinn der Attribute `Wind`, `Regen` und `Nebel` finden Sie in Tabelle zum Aufgabenteil **b)**. Füllen Sie auch die die nächste Ebene an Knoten aus. Nutzen Sie dafür die wurzelabhängigen Informationsgewinne aus Tabelle 1. Wenn Sie **b)** nicht geschafft haben, verwenden Sie `Nebel` als Wurzel. **(5 P.)** ⇓

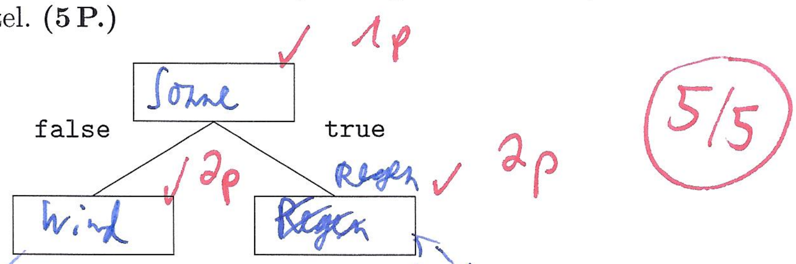


Tabelle 1: Informationsgewinne für verschiedene Wurzelknoten (Attribute in der Kopfzeile) im Hinblick auf den jeweils `rechten` oder `linken` Teilbaum für die Wahl eines weiteren Attributes (1. Spalte).

$\texttt{Attribut}_{\texttt{Teilbaum}}$	$\texttt{Sonne}_{\texttt{rechts}}$	$\texttt{Wind}_{\texttt{rechts}}$	$\texttt{Regen}_{\texttt{rechts}}$	$\texttt{Nebel}_{\texttt{rechts}}$
Sonne	–	0.00	0.19	0.00
Wind	0.31	–	0.07	0.12
Regen	0.52	0.01	–	0.29
Nebel	0.00	0.00	0.00	–

$\texttt{Attribut}_{\texttt{Teilbaum}}$	$\texttt{Sonne}_{\texttt{links}}$	$\texttt{Wind}_{\texttt{links}}$	$\texttt{Regen}_{\texttt{links}}$	$\texttt{Nebel}_{\texttt{links}}$
Sonne	–	0.00	0.00	0.00
Wind	0.25	–	0.11	0.11
Regen	0.13	0.03	–	0.03
Nebel	0.22	0.00	0.15	–

Aufgabe 8: Entfaltung (18 P.)

1) Gegeben sei die Antwortmatrix

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\epsilon & 1-\epsilon \\ 1-\epsilon & 1+\epsilon \end{pmatrix}$$

mit $0 \leq \epsilon \leq 1$ die den Messprozess $Af = g$ modelliert, wobei f die wahre und g die gemessene Verteilung ist.

a) Welchen Messprozess beschreibt A? Welche Eigenschaften hat der Detektor für $\epsilon = 1$ und $\epsilon \ll 1$? **(2 P.)**

~~Die Hälfte der Daten gehen verloren ($\frac{1}{2}$ vor der Matrix)~~

Mit der Wahrscheinlichkeit ϵ Ereignisse ~~werden~~ wird die ~~Ereign~~ in falsche zugeordnet

$\epsilon = 1$ $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Alle Ereignisse werden richtig zugeordnet

Der Detektor beledt besitzt alle Verteilungen.

$\epsilon \ll 1$ Bsp $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ Der Detektor hat nur die Hälfte der Daten gemessen & hat alle Ereignisse falsch zugeordnet

1 P.

b) Transformieren sie die Verteilungen $f = (f_1, f_2)$ und $g = (g_1, g_2)$ in die Eigenbasis von A. Normieren Sie die Eigenvektoren v_1, v_2 und geben sie die Transformationsmatrix U an. Wie lautet die Faltungsgleichung in den transformierten Verteilungen $f \to b$ und $g \to c$? **(4 P.)**

EW von A:

$$\det A = \begin{pmatrix} \frac{1+\epsilon}{2} - \lambda & \frac{1-\epsilon}{2} \\ \frac{1-\epsilon}{2} & \frac{1+\epsilon}{2} - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\left(\frac{1+\epsilon}{2} - \lambda\right)^2 - \left(\frac{1-\epsilon}{2}\right)^2 = 0$$

$$\left(\frac{1+\epsilon}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1+\epsilon}{2}\lambda + \lambda^2 - \left(\frac{1-\epsilon}{2}\right)^2 = 0$$

$$\lambda^2 - (1+\epsilon)\lambda + \frac{1}{4}\cdot\left[(1+\epsilon)^2 - (1-\epsilon)^2\right] = 0$$

$$(1+\epsilon)^2 - (1-\epsilon)^2 = 1 + 2\epsilon + \epsilon^2 - (1 - 2\epsilon + \epsilon^2) = 1 + 2\epsilon + \epsilon^2 - 1 + 2\epsilon - \epsilon^2 = 4\epsilon$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - (1+\epsilon)\lambda + \epsilon = 0$$

$$\lambda = \frac{(1+\epsilon)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1+\epsilon}{2}\right)^2 - \epsilon} = \frac{1+\epsilon}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}2\epsilon + \frac{1}{4}\epsilon^2 - \epsilon}$$

$$= \frac{1+\epsilon}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cdot 2\epsilon + \frac{1}{4}\epsilon^2}$$

$$\lambda = \frac{1+\epsilon}{2} \pm \sqrt{\frac{(1-\epsilon)^2}{4}} = \frac{(1+\epsilon)}{2} \pm \frac{(1-\epsilon)}{2}$$

$\lambda = \frac{(1+\varepsilon)}{2} \pm \frac{(1-\varepsilon)}{2}$ $\lambda_1 = \frac{1}{2}(1+\varepsilon+1-\varepsilon) = \frac{1}{2}(2) = 1$ ✓

$\lambda_2 = \frac{1}{2}(1+\varepsilon-1+\varepsilon) = \frac{1}{2}(2\varepsilon) = \varepsilon$ ✓

EV: $\lambda_1 = 1$

$\left(\begin{array}{cc|c} \frac{\varepsilon-1}{2} & \frac{1-\varepsilon}{2} & 0 \\ \frac{1-\varepsilon}{2} & \frac{\varepsilon-1}{2} & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \Rightarrow \\ II+I \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} \frac{\varepsilon-1}{2} & \frac{1-\varepsilon}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$\frac{\varepsilon-1}{2} v_1 = \frac{\varepsilon-1}{2} v_2 \Rightarrow v_1 = v_2 \Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ ✓ normiert $\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 1$ ✓

$\lambda_2 = \varepsilon$

$\left(\begin{array}{cc|c} \frac{1-\varepsilon}{2} & \frac{1-\varepsilon}{2} & 0 \\ \frac{1-\varepsilon}{2} & \frac{1-\varepsilon}{2} & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ II-I \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} \frac{1-\varepsilon}{2} & \frac{1-\varepsilon}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

3P.

$\frac{1-\varepsilon}{2} v_1 = \frac{\varepsilon-1}{2} v_2 \Rightarrow v_1 = \frac{\varepsilon-1}{1-\varepsilon} v_2 = -v_2 \Rightarrow \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ ✓ normiert $\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 1$ ✓

$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ ✓ $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$ ✓ | $g = A \cdot f$, $A = UDU^{-1}$ ✓

$U^{-1} g = DU^{-1} f \Rightarrow c = Db$; $c = U^{-1} g$ ✓, $b = U^{-1} f$ ✓

c) Entfalten Sie die in der Diagonalbasis von A und transformieren Sie die entfaltete Verteilung $\hat{b}$ zurück in die ursprüngliche Basis. Drücken Sie die entfaltete Verteilung $\hat{f}$ als Linearkombination der Eigenvektoren v_1, v_2 aus. **(4 P.)**

c, b explizit fehlen

Entfalte $D^{-1} c = b$ ✓ $\Rightarrow \begin{pmatrix} c_1/1 \\ c_2/\varepsilon \end{pmatrix} = b = U^{-1} f$

$U \begin{pmatrix} c_1 \\ \frac{c_2}{\varepsilon} \end{pmatrix} = f$

$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2/\varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} c_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} c_2/\varepsilon \\ \frac{1}{\sqrt{2}} c_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{c_2}{\varepsilon} \end{pmatrix}$

$= v_1 c_1 + v_2 \frac{c_2}{\varepsilon} = f$ //

$U^{-1} = U$

$f = c_1 v_1 + \frac{c_2}{\varepsilon} v_2$ //

$U^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} g_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} g_2 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} g_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} g_2 \end{pmatrix}$

$f = -\frac{1}{\sqrt{2}}(g_1+g_2) v_1 - \frac{1}{\sqrt{2}\varepsilon}(g_1 - g_2) \vec{v}_2$ $= -g_1 \vec{v}_1 - g_2 \vec{v}_2$ //

(✓) 3P.

d) Nehmen Sie nun an, dass die gemessene Verteilung folgender Relation folgt:

$$(g_1 - g_2)^2 \leq g_1 + g_2$$

dass heißt, die Differenz $g_1 - g_2$ ist nicht statistisch signifikant. Betrachten Sie ihr Ergebnis aus **c)** unter dieser Voraussetzung. Welche Konsequenz hat das für die entfaltete Verteilung $\hat{f}$ im Falle kleiner ϵ? **(2 P.)**

$\hat{f}$: Im Fall kleiner ϵ würde der Term mit $(g_1 - g_2)$ nicht ~~ti~~ mehr Bedeutung erlangen. Da aber $|(g_1 - g_2)| \leq \sqrt{g_1 + g_2}$ muss ϵ sehr klein sein damit es erst richtig beiträgt.

1P.

8/12

2) Erklären Sie kurz den `pullmode` von TRUEE. Beschreiben Sie, wie die Einträge des Histogramms auf der Abbildung berechnet wurden und was sie aussagen. Wie beurteilen Sie die Entfaltung? **(6 P.)**

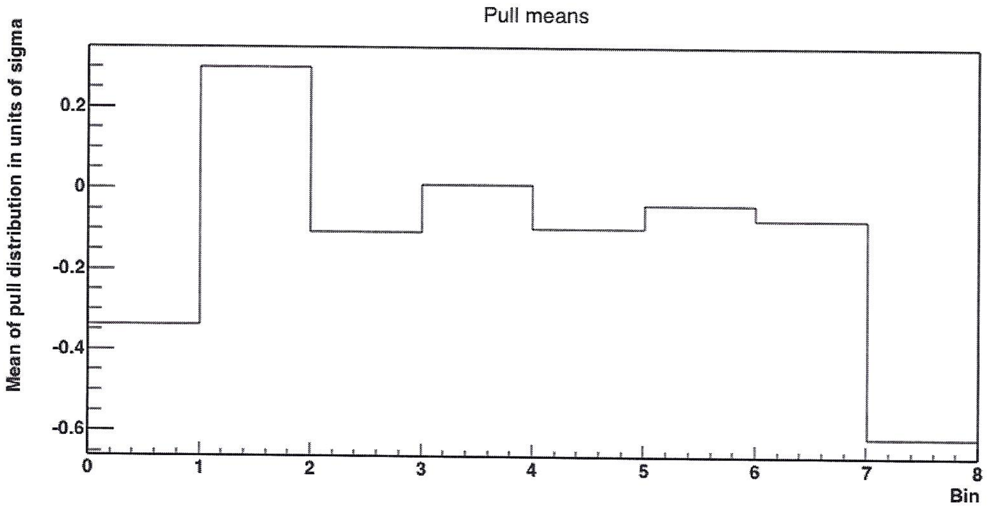


Abbildung 1: TRUEE-Plot eines 100-fachen Pulls.

Beim Pullmode wird sehr oft hintereinander hier 100 mal der Test ~~ind~~ mode durchgeführt um bessere Abweichungen festzustellen und um bessere Ergebnisse zu erlangen. +1P

Berechnung falsch f. zu unklare Erklärung

~~I.~~ Das ~~D~~ Histogramm wird dadurch erzeugt indem er ~~die~~ alle 100 Mittelwerte von jedem Bin nimmt und guckt wie stark die vom Mittelwert ~~vom Mittelwert abweichen~~ und das drückt er in Einheiten von σ aus

Das bedeutet wenn er ein Wert unter 1 ist liegt das Ergebnis im 1σ Bereich. +1P

2/6

Bezug zum vorliegenden Plot fehlt !! ☹

Zusatzblatt: Bitte bei der Aufgabestellung vermerken und hier die entsprechende Aufgabe und Aufgabenteil angeben.

Zusatzblatt: Bitte bei der Aufgabestellung vermerken und hier die entsprechende Aufgabe und Aufgabenteil angeben.

Zusatzblatt: Bitte bei der Aufgabestellung vermerken und hier die entsprechende Aufgabe und Aufgabenteil angeben.

Zusatzblatt: Bitte bei der Aufgabestellung vermerken und hier die entsprechende Aufgabe und Aufgabenteil angeben.