

Abgabe Blatt 11

Jean-Marco Alameddine, Johannes Kollek, Max Pernklau

Tuesday, January 31, 2017

Aufgabe 3

a)

Die vorgebene Matirix beschreibt einen Messprozess, in dem die Zählraten in 20 verschiedene Ereignisse, bzw. Bins aufgeteilt weden können. Dabei ordnet der Detektor jedes Ereignis mit einer Wahrscheinlichkeit von je ϵ fälschlicherweise einem direkt benachbarten Bin zu. Ansonsten wird das Ereignis richtig zugeordnet, es gehen keine Zählraten gänzlich verloren.

b)

Siehe Code

c)

Mit

$$A = UDU^{-1} \tag{1}$$

folgt

$$\begin{aligned} \vec{g} &= A\vec{f} \\ \Leftrightarrow \vec{g} &= UDU^{-1}\vec{f} \\ \Leftrightarrow \underbrace{U^{-1}\vec{g}}_{:=\vec{c}} &= D\underbrace{U^{-1}\vec{f}}_{:=\vec{b}}. \end{aligned}$$

Vorteilhaft ist nun, dass jede Komponente von \vec{b} nur noch an die dazugehörige Komponente von \vec{c} koppelt, und diese lediglich über den jeweiligen Eigenwert zusammenhängen.

Dies liegt natürlich an der Diagonalform der Matrix D .

d)

Die Transformation in b und c findet mit den oben angegebenen Formeln statt. Die Kovarianzmatrix von f ergibt sich aufgrund der Poissionverteilung der unkorrelierten Werte als Diagonalmatrix mit den jeweiligen Messwerten von f als Diagonalelementen. Die Transformation wird mit

$$V[b] = U^{-1}V[f]U^{-1\top} \quad (2)$$

durchgeführt. Für die entfalteten Koeffizienten, die sich aus

$$b = \underbrace{D^{-1}U^{-1}}_{:=L}g \quad (3)$$

errechnen lassen, ergeben sich die Standardabweichungen aus der Transformation der Kovarianzmatrix

$$V[b^{mess}] = LV[g^{mess}]L^{\top}. \quad (4)$$

Dabei besteht die Kovarianzmatrix von g^{mess} wegen der Poissonverteilung wieder aus den Messwerten g_{mess} , die die Diagonalelemente darstellen.

Folgender Plot zeigt die Koeffizienten b_j in Abhängigkeit vom Index j . Man erkennt, dass die Koeffizienten ab einem bestimmten Index um die 1 herum oszillieren. Diese Oszillationen bringen jedoch keinen Mehrwert ehr, da sie keine Informationen enthalten.

Um dies zu verdeutlichen, sind in einem weiteren Plot die Werte von b der “wahren” Verteilung sowie die Werte b der von uns “verfälschten” Verteilung eingezeichnet. Es wird deutlich, dass die Oszillationen nur für die veränderten b auftreten. Dies zeigt, dass numerische Schwankungen hier starke Abweichungen von den wahren Messwerten erzeugen.

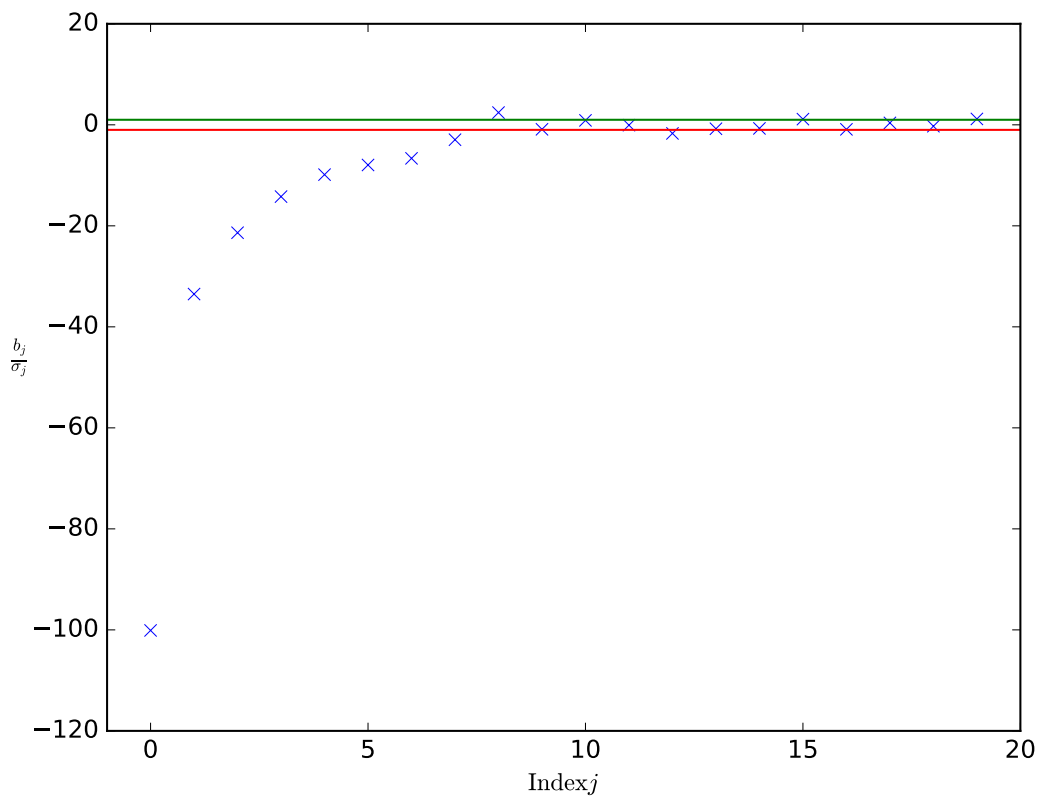
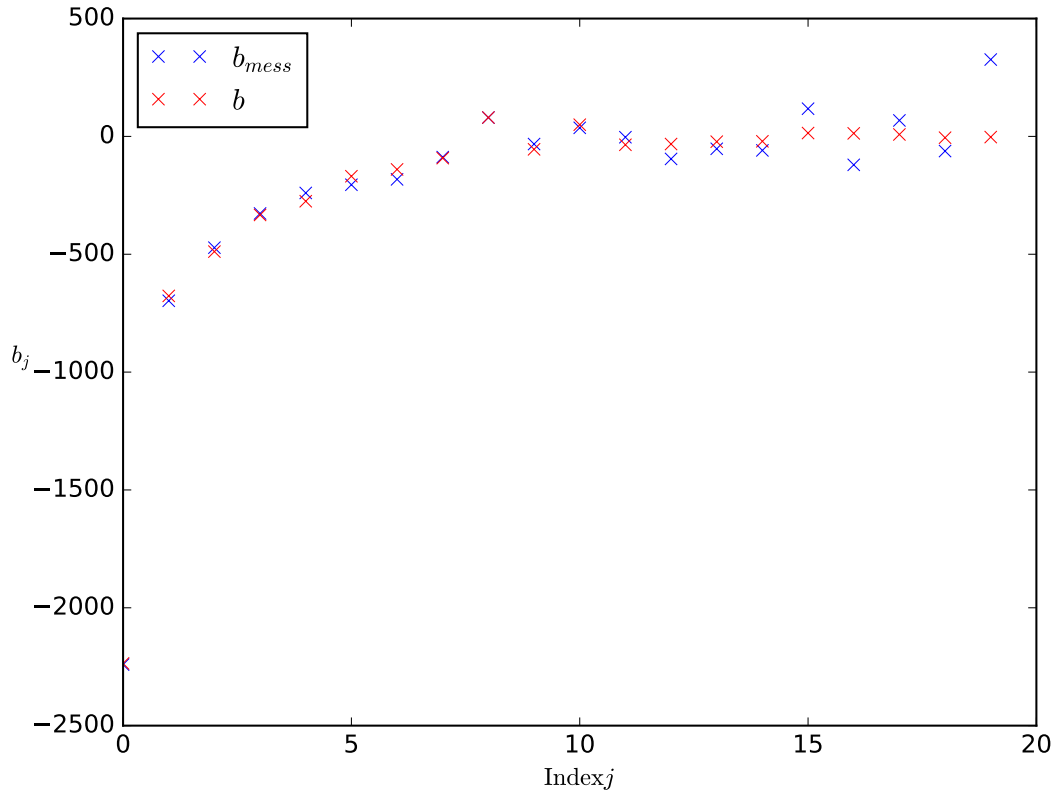


Abbildung 1: Aufgabe 3. Normierte Koeffizienten b .

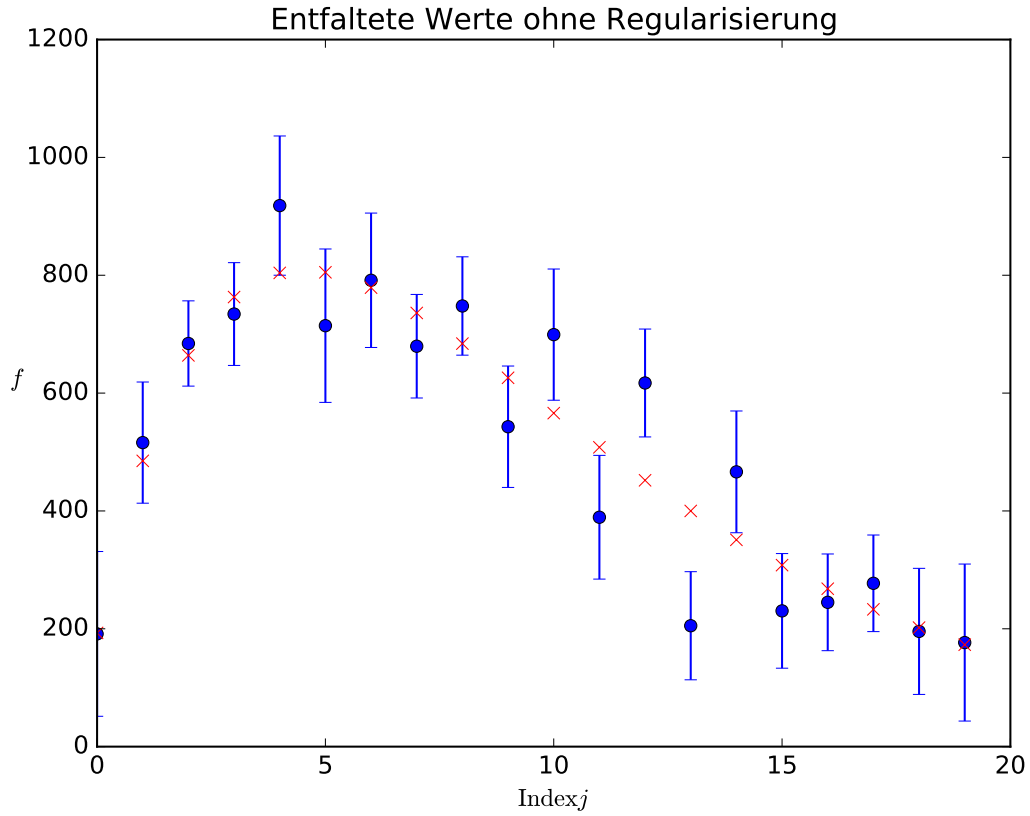


e)

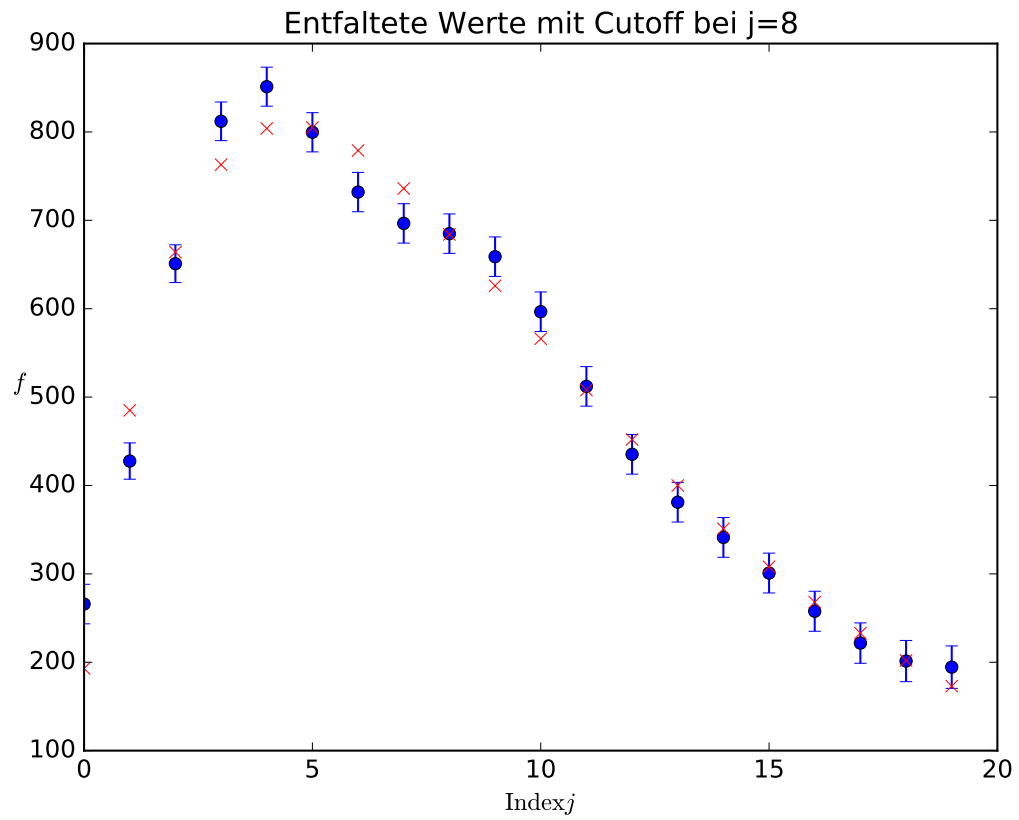
Zum Schluss wird über die Formel

$$f_{mess} = Ub_{mess} \quad (5)$$

aus dem zuvor bestimmten b die Entfaltung ermittelt. Um den Fehler einzuzeichnen, muss die Kovarianzmatrix von b weiter in die Kovarianzmatrix von f transformiert werden. Im folgenden Plot sind die entfalteten Werte zusammen mit den wahren Werten von f abgetragen. Es fällt auf, dass die Werte sehr stark um die wahre Verteilung oszillieren.



Stattdessen kann ein “Cutoff” verwendet werden, bei dem jedes b ab einem bestimmten Index 0 gesetzt wird. Es fällt auf, dass die Werte nun deutlich weniger stark oszillieren. Zwar ergeben sich vor allem für die ersten Bins nach wie vor stärkere Abweichungen, im Allgemeinen ist eine Besserung deutlich erkennbar. Dies macht sich auch in den kleineren Fehlern bemerkbar.



Aufgabe 1

a)

$$\mu = \lambda$$

$$\sigma = \sqrt{\lambda}$$

d)

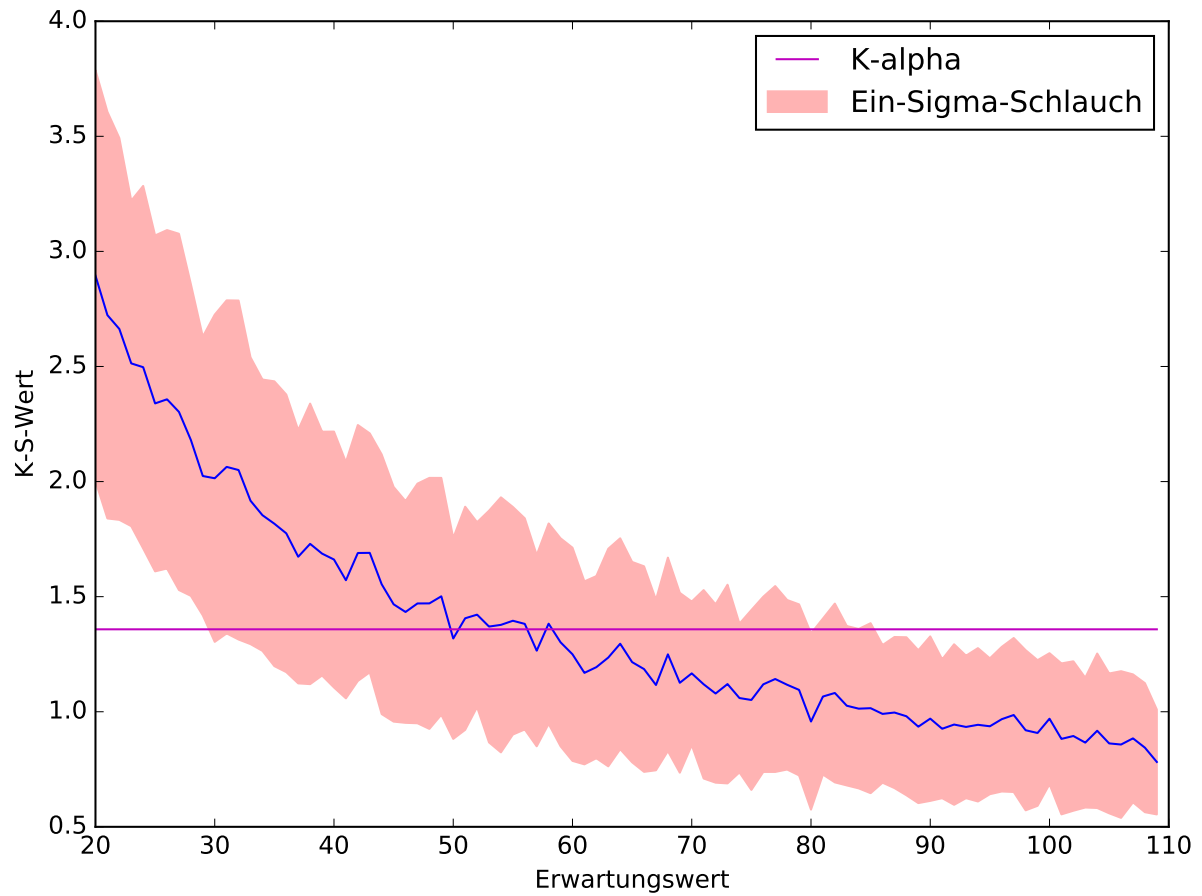


Abbildung 2: $\alpha = 5\%$. Ab etwa $\lambda = 88$ kann man sagen, dass die entsprechende Konfidenz erreicht wurde.

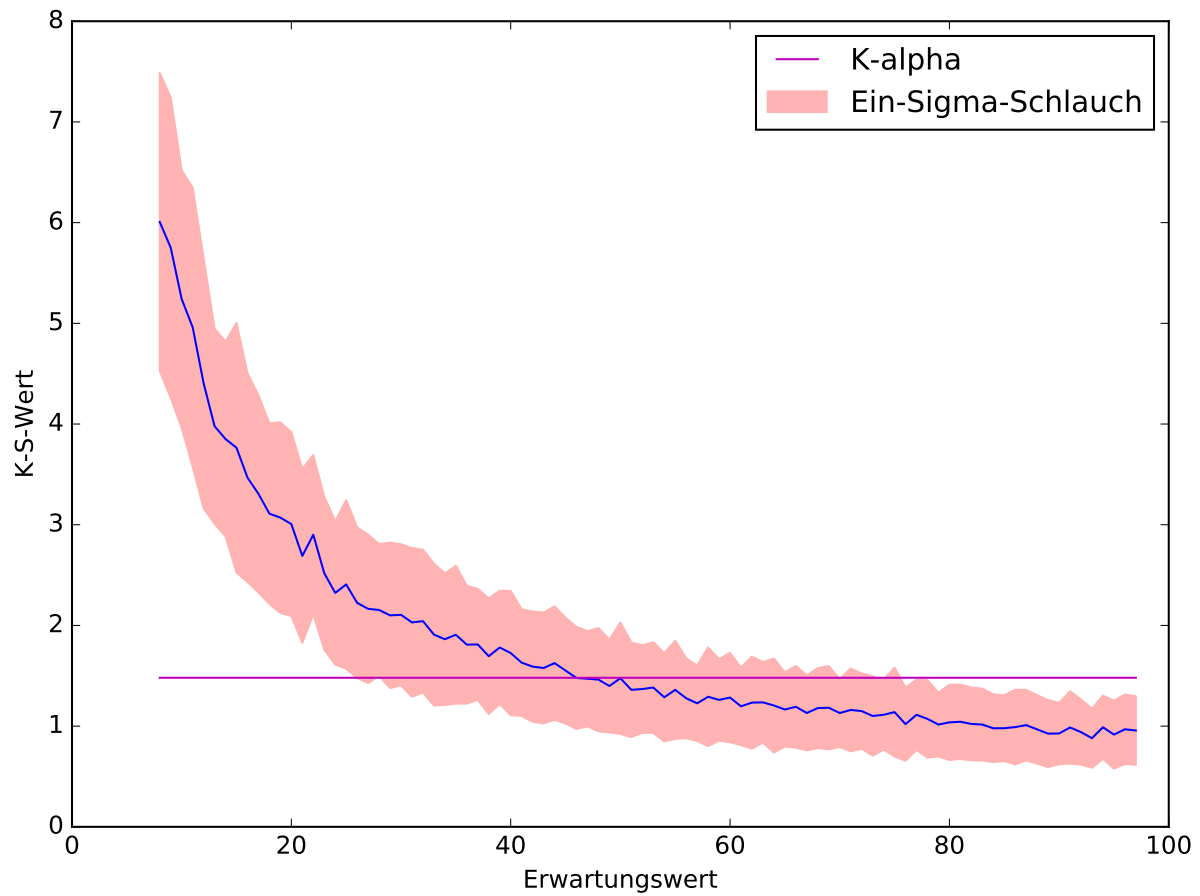


Abbildung 3: $\alpha = 2.5\%$. Ab etwa $\lambda = 80$ kann man sagen, dass die entsprechende Konfidenz erreicht wurde.

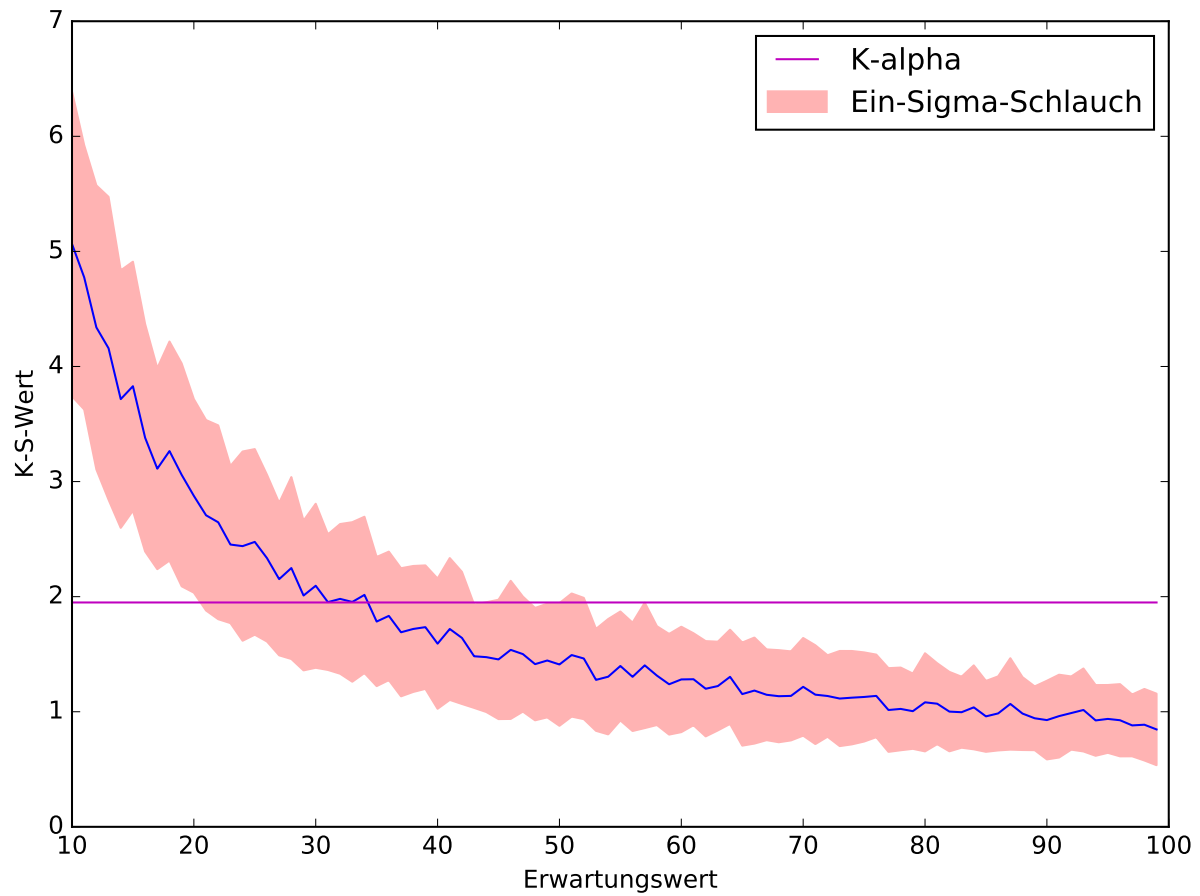


Abbildung 4: $\alpha = 0.1\%$. Ab etwa $\lambda = 60$ kann man sagen, dass die entsprechende Konfidenz erreicht wurde.

Nr. 2

$$a) \underline{A} \cdot \vec{f} = \vec{g} \quad \text{mit} \quad \underline{A} = \begin{pmatrix} 1-\varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 1-\varepsilon \end{pmatrix} \cdot \frac{4}{5}$$

$$b) \underline{A}^{-1} = \frac{5}{4} \frac{1}{1-2\varepsilon} \begin{pmatrix} 1-\varepsilon & -\varepsilon \\ -\varepsilon & 1-\varepsilon \end{pmatrix}$$

$$\text{d.h. } \vec{f} = \underline{A}^{-1} \cdot \vec{g} = \frac{5}{4} \frac{1}{1-2\varepsilon} \begin{pmatrix} 1-\varepsilon & -\varepsilon \\ -\varepsilon & 1-\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{5}{4} \frac{1}{1-2\varepsilon} \begin{pmatrix} (1-\varepsilon)g_1 - \varepsilon g_2 \\ (1-\varepsilon)g_2 - \varepsilon g_1 \end{pmatrix}$$

$$c) \text{ für } V[g] = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \vec{f} = \underline{A}^{-1} \vec{g} \quad \text{gilt zunächst allgemein:}$$

$$V[f] = \underline{A}^{-1} V[g] (\underline{A}^{-1})^T$$

$$= \frac{25}{16} \frac{1}{(1-2\varepsilon)^2} \begin{pmatrix} 1-\varepsilon & -\varepsilon \\ -\varepsilon & 1-\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-\varepsilon & -\varepsilon \\ -\varepsilon & 1-\varepsilon \end{pmatrix}$$

$$= \frac{25}{16} \frac{1}{(1-2\varepsilon)^2} \begin{pmatrix} 1-\varepsilon & -\varepsilon \\ -\varepsilon & 1-\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1^2(1-\varepsilon) & -\varepsilon\sigma_1^2 \\ -\varepsilon\sigma_2^2 & \sigma_2^2(1-\varepsilon) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{25}{16} \frac{1}{(1-2\varepsilon)^2} \begin{pmatrix} \sigma_1^2(1-\varepsilon)^2 + \varepsilon^2\sigma_2^2 & -\varepsilon(1-\varepsilon)\sigma_1^2 - \varepsilon(1-\varepsilon)\sigma_2^2 \\ -\varepsilon(1-\varepsilon)\sigma_1^2 - \varepsilon(1-\varepsilon)\sigma_2^2 & \sigma_2^2(1-\varepsilon)^2 + \varepsilon^2\sigma_1^2 \end{pmatrix}$$

$$d) g_1 = 200, \quad g_2 = 169, \quad \varepsilon = 0.1,$$

$$\sigma_1^2 = 200, \quad \sigma_2^2 = 169 \quad \text{da Poisson verteilt}$$

$$\rightarrow f_1 \approx 254.8 \quad \rightarrow f_2 \approx 206.4$$

$$\rightarrow V[f] = \begin{pmatrix} 399.6 & -81.1 \\ -81.1 & 339.1 \end{pmatrix}$$

$$\text{d.h. } \sigma_{f_1} \approx 19.9, \quad \sigma_{f_2} \approx 18.4, \quad \rho \approx -0.22$$

$$e) \rightarrow V[f] = \begin{pmatrix} 3868.75 & -3459.4 \\ -3459.4 & 3626.6 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \sigma_{f_1} \approx 62.2 \quad \rightarrow \sigma_{f_2} \approx 60.2 \quad \rightarrow \rho \approx -0.92$$

Wir erhalten größere Fehler. Dies bedeutet, dass die Entfallung "schwieriger" wird, bzw. fehlerbehafteter ist, da der "Detektor" durch das große ε die Ereignisse stärker vermischt.

f) A^{-1} kann nicht ermittelt werden, da A nicht invertierbar. Entfallung nicht möglich, da durch $\varepsilon = 0.5$ jegliche Information durch den Detektor verloren geht!