Abgabe Blatt 9

Jean-Marco Alameddine, Johannes Kollek, Max Pernklau

Tuesday, January 17, 2017

Aufgabe 2

Die Aufgabe wurde handschiftlich Bearbeitet. Wo Rechenschritte fehlen, beispielsweise beim Berechnen vom Lösungsvektor, wird die Rechnung im Code in der Datei *aufg2.py* durchgeführt. Diese enthält als Ausgabe ebenfalls die in der Aufgabenstellung gefragten Werte.

Nr. 2

a) $f(\varphi) = a_1 f_1(\varphi) + a_2 f_2(\varphi)$

$\quad = a_1 \cos(\varphi) + a_2 \sin(\varphi)$

$$A = \begin{pmatrix} f_1(\varphi_1) & f_2(\varphi_1) \\ \vdots & \vdots \\ f_n(\varphi_n) & f_n(\varphi_n) \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & 1 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \\ -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & -1 \\ 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 0^\circ \\ 30^\circ \\ 60^\circ \\ 90^\circ \\ 120^\circ \\ 150^\circ \\ 180^\circ \\ 210^\circ \\ 240^\circ \\ 270^\circ \\ 300^\circ \\ 330^\circ \end{array}$$

b)

Lösungsvektor: $\hat{\vec{a}} = (A^T A)^{-1} A^T \vec{y}$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (A^T A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/6 & 0 \\ 0 & 1/6 \end{pmatrix}$$

mit $\vec{y} = \begin{pmatrix} -0{,}032 \\ 0{,}010 \\ 0{,}057 \\ \vdots \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \hat{\vec{a}} = \begin{pmatrix} -0{,}0375063 \\ 0{,}07739978 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

c) Asymmetriewerte sind (vermutlich) unkorreliert mit $\sigma = 0{,}011$

$$\Rightarrow V[\hat{\vec{a}}] = \sigma^2 (A^T A)^{-1}$$

$$= (0{,}011)^2 \cdot \begin{pmatrix} 1/6 & 0 \\ 0 & 1/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}0167 \cdot 10^{-5} & 0 \\ 0 & 2{,}0167 \cdot 10^{-5} \end{pmatrix}$$

$$= V[\hat{\vec{a}}]$$

$\Rightarrow$ Fehler von a_1 / a_2 ist $\sqrt{2{,}0167 \cdot 10^{-5}} \approx 0{,}004907$

Korrelationskoeffizient ist 0, da die Nebendiagonalelemente der Kovarianzmatrix verschwinden

d) $f(\varphi) = a_1 \cos(\varphi) + a_2 \sin(\varphi)$

$A_0 \cdot \cos(\varphi + \delta) = A_0 \cdot \cos(\varphi)\cos(\delta) - A_0 \sin(\varphi) \cdot \sin(\delta)$

$\Rightarrow A_0 \cdot \cos(\delta) = a_1 \; (\mathrm{I}) \wedge -A_0 \cdot \sin(\delta) = a_2 \quad (\mathrm{II})$

dh $\frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}$: $-\tan(\delta) = \frac{a_2}{a_1} \Rightarrow \underline{\delta = \arctan(-\frac{a_2}{a_1})}$

und: aus I: $A_0 \cdot \cos(\arctan(-\frac{a_2}{a_1})) = a_1$

$\Leftrightarrow A_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{a_2^2/a_1^2 + 1}} = a_1$

$\Rightarrow \underline{\underline{A_0 = a_1 \sqrt{a_2^2/a_1^2 + 1}}}$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} A_0 &= -0{,}086008 \\ \delta &= 1{,}1195615 \end{aligned}}$$

Transformation? $V[A_0, \delta] = J \cdot V[a_1, a_2] \cdot J^T$ mit $V[a_1, a_2] = \begin{pmatrix} 2{,}0167 \cdot 10^{-5} & 0 \\ 0 & 2{,}0167 \cdot 10^{-5} \end{pmatrix}$

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_0}{\partial a_1} & \frac{\partial A_0}{\partial a_2} \\ \frac{\partial \delta}{\partial a_1} & \frac{\partial \delta}{\partial a_2} \end{pmatrix}$$

$\frac{\partial A_0}{\partial a_1} = \left(\frac{a_2^2}{a_1^2} + 1\right)^{-1/2} \approx 0{,}436077$

$\frac{\partial A_0}{\partial a_2} = \frac{a_2}{a_1} \left(\frac{a_2^2}{a_1^2} + 1\right)^{-1/2} \approx -0{,}89991$

$\frac{\partial \delta}{\partial a_1} = \frac{a_2}{a_1^2 + a_2^2} \approx 10{,}46304$

$\frac{\partial \delta}{\partial a_2} = \frac{-a_1}{a_1^2 + a_2^2} \approx 5{,}07017$

$$\Rightarrow V[A_0, \delta] = \begin{pmatrix} 2{,}016 \cdot 10^{-5} & -1{,}12707 \cdot 10^{-10} \\ -1{,}12707 \cdot 10^{-5} & 2{,}72528 \cdot 10^{-3} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ • $\sigma_{A_0} \approx 0{,}00449$

• $\sigma_\delta \approx 0{,}0522$

• $\rho_{A_0,\delta} = \frac{\sigma^2_{A_0,\delta}}{\sigma_{A_0} \sigma_\delta} = \frac{-1{,}12707 \cdot 10^{-10}}{\sigma_{A_0} \cdot \sigma_\delta} \approx -0{,}00205$ als Korrelationskoeffizient

Zudem führt *auf2_test.py* den zuvor berechneten Fit durch, um zu Zeigen dass die Methode erfolgreich war.

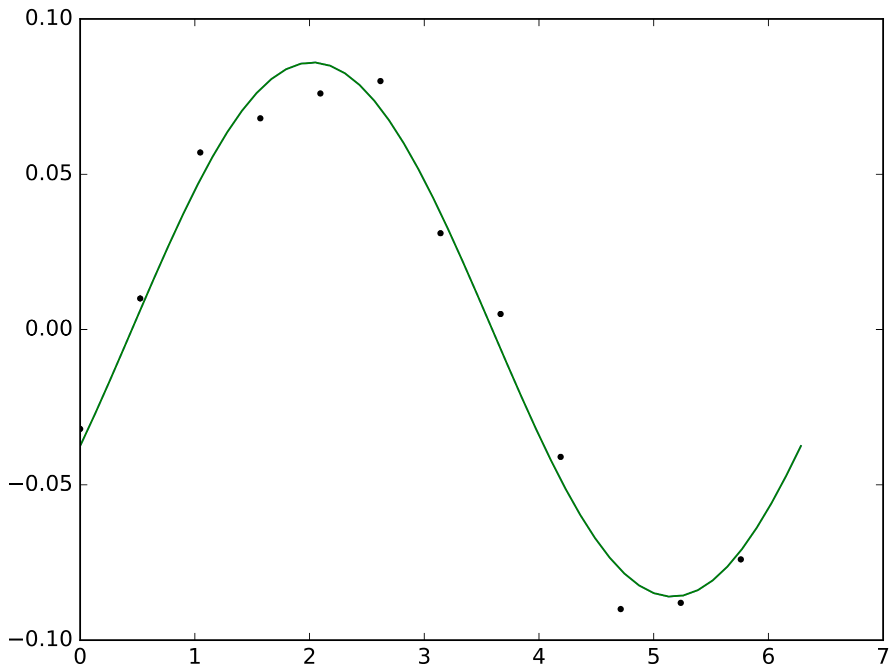

Figure 1: Aufgabe 2- Fit.

Aufgabe 3

a)

Zunächst werden die Daten mit der Methode der kleinsten Quadrate gefittet. Der Lösungsvektor ergibt sich aus

$$\hat{a} = (A^\top A)^{-1} A^\top \vec{y} \tag{1}$$

Die Koeffizienten lauten

$$
\begin{aligned}
a_0 &= -6.744\,532\,69 \times 10^{-2} && (2)\\
a_1 &= 6.096\,090\,41 \times 10^{-1} && (3)\\
a_2 &= -5.137\,482\,17 \times 10^{-1} && (4)\\
a_3 &= 2.105\,665\,23 \times 10^{-1} && (5)\\
a_4 &= -4.520\,077\,56 \times 10^{-2} && (6)\\
a_5 &= 4.785\,680\,54 \times 10^{-3} && (7)\\
a_6 &= -1.962\,881\,98 \times 10^{-4} && (8)\\
& && (9)
\end{aligned}
$$

(*INFO*: Die Koeffizienten und alle folgenden Werte werden auch von der Konsole beim Ausführen von *aufg3.py*. Im Zweifel sind die dort ausgegebenen Werte die richtigen, da Kopierfehler immer passieren können…)

b)

Als nächstes wird eine Regularisierung genutzt. Dabei wird der Parameter λ varriert.

Der Schätzparameter ergibt sich zu

$$\hat{a}^{reg} = (A^\top A + \lambda (CA)^\top (CA))^{-1} A^\top \vec{y} \tag{10}$$

wobei C Teil einer Regularisierung mithilfe der zweiten numerischen Ableitung ist (siehe Skript, Seite 92, Kapitel Testen.)

Die Koeffizienten für alle Lambdas werden durch die Konsole ausgegeben, als Beispiel seien die Koeffizienten für $\lambda = 0.1$ angegeben:

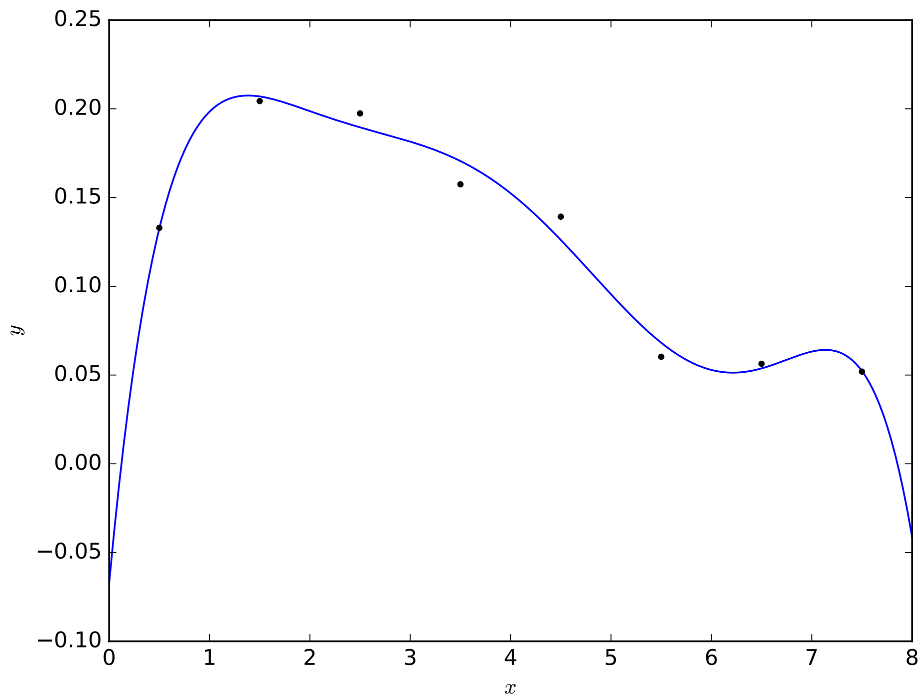

Figure 2: Aufgabe 3a - Fit.

$$
\begin{align}
a_0 &= 5.279\,658\,56 \times 10^{-2} \tag{11}\\
a_1 &= 2.595\,311\,49 \times 10^{-1} \tag{12}\\
a_2 &= -1.932\,312\,85 \times 10^{-1} \tag{13}\\
a_3 &= 7.696\,672\,46 \times 10^{-2} \tag{14}\\
a_4 &= -1.716\,280\,69 \times 10^{-2} \tag{15}\\
a_5 &= 1.903\,764\,83 \times 10^{-3} \tag{16}\\
a_6 &= -8.103\,496\,97 \times 10^{-5} \tag{17}\\
& \tag{18}
\end{align}
$$

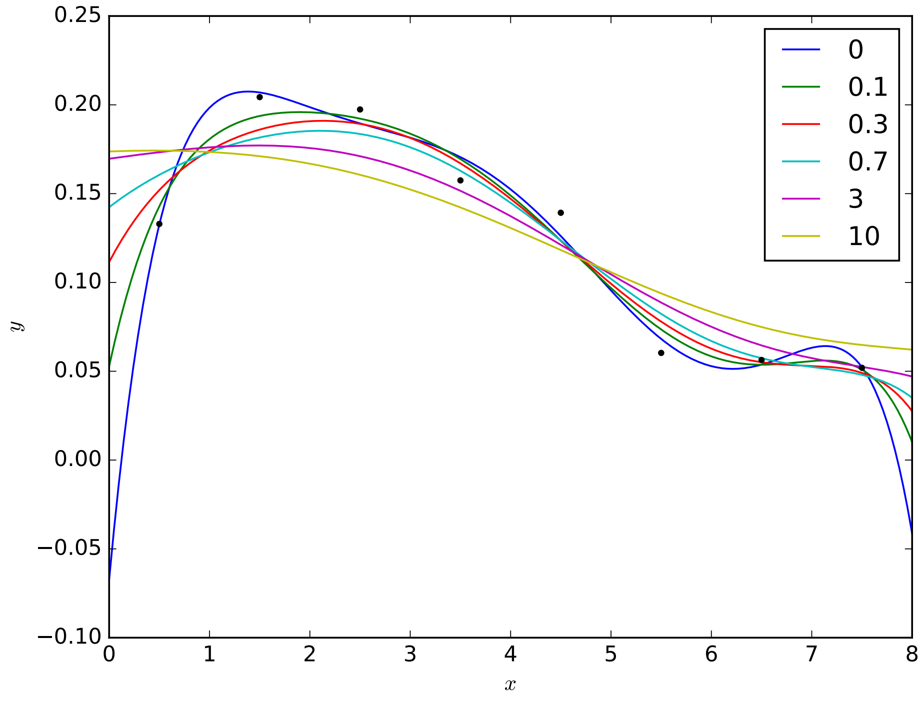

Figure 3: Aufgabe 3b - Fit.

c)

Zuletzt soll an einer größeren Datenmenge die gewichtete Methode zum Fitten genutzt weden.

Gefittet wird dabei jeweils an den Mittelwert der Messdaten zu jedem x, das Quadrat der Inverse vom Fehler des Mittelwertes wird dabei jeweils als Wichtungsparameter verwendet. (Ist das Qudarat hier richtig/nötig?)

Als Schäter ergibt sich nun

$$\hat{a} = (A^\top AWA)^{-1} A^\top W \vec{y} \tag{19}$$

wobei die Gewichtsmatrix W jeweils als Diagonalelemente die bereits angesprochenen Gewichte enthält.

Als Gewichte ergeben sich dabei:

$$a_0 = -1.114\,069\,47 \times 10^{-1} \tag{20}$$
$$a_1 = 7.632\,110\,82 \times 10^{-1} \tag{21}$$
$$a_2 = -6.800\,067\,87 \times 10^{-1} \tag{22}$$
$$a_3 = 2.893\,991\,63 \times 10^{-1} \tag{23}$$
$$a_4 = -6.339\,377\,99 \times 10^{-2} \tag{24}$$
$$a_5 = 6.792\,775\,85 \times 10^{-3} \tag{25}$$
$$a_6 = -2.810\,139\,23 \times 10^{-4} \tag{26}$$
$$\tag{27}$$

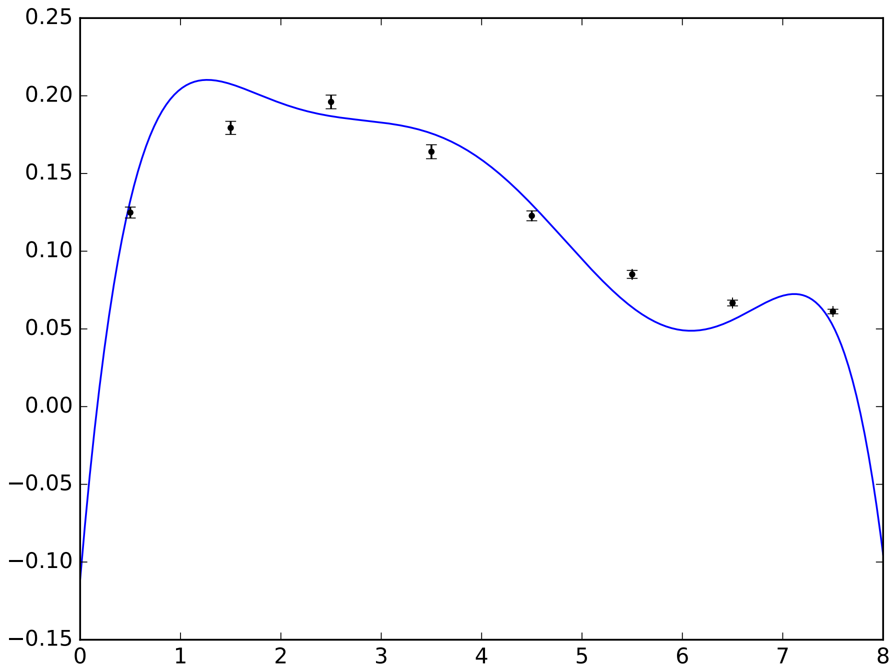

Figure 4: Aufgabe 3c - Fit.