Nr. 2

a) $$f(\varphi) = a_1 f_1(\varphi) + a_2 f_2(\varphi)$$
$$= a_1 \cos(\varphi) + a_2 \sin(\varphi)$$

$$A = \begin{pmatrix} f_1(\varphi_1) & f_2(\varphi_1) \\ \vdots & \vdots \\ f_n(\varphi_n) & f_n(\varphi_n) \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & 1 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \\ -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & -1 \\ 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} 0° \\ 30° \\ 60° \\ 90° \\ 120° \\ 150° \\ 180° \\ 210° \\ 240° \\ 270° \\ 300° \\ 330° \end{array}$$

b) Lösungsvektor: $\hat{\vec{a}} = (A^T A)^{-1} A^T \vec{y}$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (A^T A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/6 & 0 \\ 0 & 1/6 \end{pmatrix}$$

mit $\vec{y} = \begin{pmatrix} -0{,}032 \\ 0{,}010 \\ 0{,}057 \\ \vdots \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \hat{\vec{a}} = \begin{pmatrix} -0{,}0375063 \\ 0{,}07739978 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

c) Asymmetriewerte sind (vermutlich) unkorreliert mit $\sigma = 0{,}011$

$$\Rightarrow V[\hat{\vec{a}}] = \sigma^2 (A^T A)^{-1}$$
$$= (0{,}011)^2 \cdot \begin{pmatrix} 1/6 & 0 \\ 0 & 1/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}0167 \cdot 10^{-5} & 0 \\ 0 & 2{,}0167 \cdot 10^{-5} \end{pmatrix}$$
$$= V[\hat{\vec{a}}]$$

$\Rightarrow$ Fehler von a_1/a_2 ist $\sqrt{2{,}0167 \cdot 10^{-5}} \approx 0{,}0044907$

Korellationskoeffizient ist 0, da die Nebendiagonalelemente der Kovarianzmatrix verschwinden

d) $f(\varphi) = a_1 \cos(\varphi) + a_2 \sin(\varphi)$

$A_0 \cdot \cos(\varphi + \delta) = A_0 \cdot \cos(\varphi)\cos(\delta) - A_0 \sin(\varphi) \cdot \sin(\delta)$

$\Rightarrow A_0 \cdot \cos(\delta) = a_1 \text{ (I)} \wedge -A_0 \cdot \sin(\delta) = a_2 \text{ (II)}$

d.h. $\frac{II}{I}$: $-\tan(\delta) = \frac{a_2}{a_1} \Rightarrow \underline{\delta = \arctan\left(-\frac{a_2}{a_1}\right)}$

und: aus I: $A_0 \cdot \cos\left(\arctan\left(-\frac{a_2}{a_1}\right)\right) = a_1$

$\Leftrightarrow A_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{a_2^2/a_1^2 + 1}} = a_1$

$\Rightarrow \underline{\underline{A_0 = a_1 \sqrt{a_2^2/a_1^2 + 1}}}$

$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} A_0 &= -0{,}086008 \\ \delta &= 1{,}1195615 \end{aligned}}$

Transformation? $V[A_0, \delta] = J \cdot V[a_1, a_2] \cdot J^T$ mit $V[a_1, a_2] = \begin{pmatrix} 2{,}0167 \cdot 10^{-5} & 0 \\ 0 & 2{,}0167 \cdot 10^{-5} \end{pmatrix}$

$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_0}{\partial a_1} & \frac{\partial A_0}{\partial a_2} \\ \frac{\partial \delta}{\partial a_1} & \frac{\partial \delta}{\partial a_2} \end{pmatrix}$

$\frac{\partial A_0}{\partial a_1} = \left(\frac{a_2^2}{a_1^2} + 1\right)^{-1/2} \approx 0{,}436077$

$\frac{\partial A_0}{\partial a_2} = \frac{a_2}{a_1}\left(\frac{a_2^2}{a_1^2} + 1\right)^{-1/2} \approx -0{,}89991$

$\frac{\partial \delta}{\partial a_1} = \frac{a_2}{a_1^2 + a_2^2} \approx 10{,}46304$

$\frac{\partial \delta}{\partial a_2} = \frac{-a_1}{a_1^2 + a_2^2} \approx 5{,}07017$

$\Rightarrow V[A_0, \delta] = \begin{pmatrix} 2{,}016 \cdot 10^{-5} & -1{,}12707 \cdot 10^{-10} \\ -1{,}12707 \cdot 10^{-5} & 2{,}72528 \cdot 10^{-3} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ • $\sigma_{A_0} \approx 0{,}00449$

• $\sigma_\delta \approx 0{,}0522$

• $\rho_{A_0\delta} = \frac{\sigma^2_{A_0\delta}}{\sigma_{A_0} \sigma_\delta} = \frac{-1{,}12707 \cdot 10^{-10}}{\sigma_{A_0} \cdot \sigma_\delta} \approx -0{,}00205$ als Korrelationskoeffizient