

Aufgabe 1

a)

Die Likelihoodfunktion ergibt sich zu

$$L = \prod_{n_i} \frac{\lambda^{n_i}}{n_i!} e^{-\lambda},$$

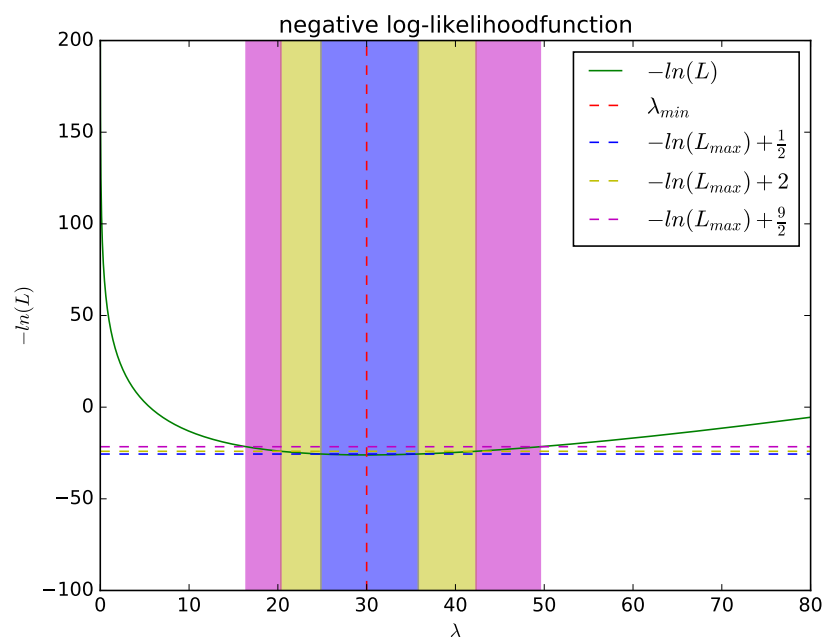
wobei

$$n_i = \{13, 8, 9\}$$

annehmen kann. Aus der Likelihoodfunktion folgt schließlich

$$\begin{aligned} -\ln(L) &= -\sum_{n_i} \ln\left(\frac{\lambda^{n_i}}{n_i!} e^{-\lambda}\right) \\ &= \lambda - \ln\left(\frac{\lambda^{13}}{13!}\right) - \ln\left(\frac{\lambda^8}{8!}\right) - \ln\left(\frac{\lambda^9}{9!}\right) \\ &= \lambda - 30 \ln(\lambda) + \ln(13! \cdot 9! \cdot 8!) \end{aligned}$$

für die negative Log-Likelihoodfunktion, welche in der nächsten Abbildung geplottet wird.



b)

Im Folgenden wird das Minimum der Funktion bestimmt.

$$\begin{aligned}\frac{\partial(-\ln(L))}{\partial\lambda} &= 1 - \frac{30}{\lambda} \stackrel{!}{=} 0 \\ \Rightarrow \lambda_{min} &= 30.\end{aligned}$$

c)

Aus der Bedingung

$$-\ln(\lambda_{min}) + a = -\ln(\lambda)$$

folgt mit $\lambda_{min} = 30$

$$\lambda + 30(\ln(\lambda) - 1 - \ln(30)) - a = 0,$$

wobei

$$a = \left\{ \frac{1}{2}, 2, \frac{9}{2} \right\}$$

ist. Die Nullstelle wird numerisch über das Newton-Verfahren mit Kenntnis der Ableitung der negativen Log-Likelihoodfunktion bestimmt, wobei jeweils rechts und links von λ_{min} gestartet wird. Daraus ergeben sich die Intervalle

$$\begin{aligned}[24.523, 35.477] \text{ und } len &= 10.965, \text{ für } a = \frac{1}{2}; \\ [20.336, 42.326] \text{ und } len &= 21.99, \text{ für } a = 2; \\ [16.421, 49.559] \text{ und } len &= 33.139, \text{ für } a = \frac{9}{2}.\end{aligned}$$

Diese Intervalle sind ebenfalls im Plot eingezeichnet. Diese Intervalle können Konfidenzintervalle bzgl. der Schätzung des Erwartungswertes λ darstellen. Liegt das tatsächliche λ außerhalb dieses gewählten Bereiches kann die Schätzung verworfen werden.

d)

Das zweite Taylorpolynom ergibt sich zu

$$T_2(30, -\ln(L)) = 30 - 30 \ln(30) + \frac{1}{60}(\lambda - 30)^2 + \ln(13! \cdot 9! \cdot 8!).$$

Diese Funktion ist in der nächsten Abbildung zu sehen.

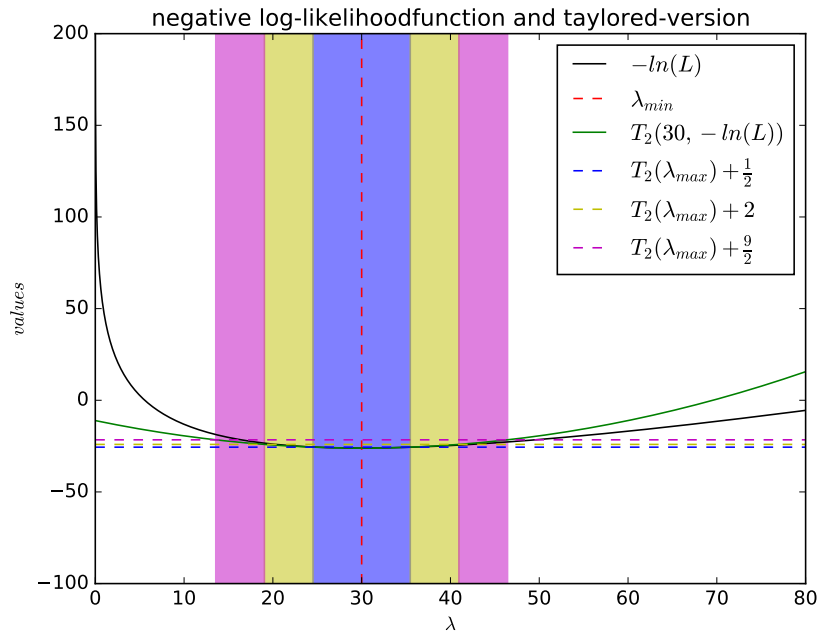


Figure 1: Negative Log-Likelihoodfunktion und Taylorpolynom.

Die λ werden auch hier numerisch bestimmt, wobei diese hier auch analytisch gewonnen werden können. Die Intervalle lauten

$$\begin{aligned} & [24.523, 35.477] \text{ und } len = 10.954, \text{ für } a = \frac{1}{2}; \\ & [19.046, 40.954] \text{ und } len = 21.909, \text{ für } a = 2; \\ & [13.568, 46.432] \text{ und } len = 32.863, \text{ für } a = \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

Die relativen Abweichungen zum exakten Ergebnis lauten

$$\begin{aligned}
&0.093 \%, \text{ für } a = \frac{1}{2}; \\
&0.369 \%, \text{ für } a = 2; \\
&0.828 \%, \text{ für } a = \frac{9}{2}.
\end{aligned}$$

Diese Abweichungen sind sehr gering und somit ist das Taylorpolynom eine sehr gute Näherung an die analytisch kompliziertere negative Log-Likelihoodfunktion. Der Vorteil am Polynom ist, dass damit viel besser gerechnet werden kann.