

VERSUCH 602

Röntgenemission und -absorption

Marius Hötting
Marius.Hoetting@udo.edu

Matthias Jaeger
Matthias.Jaeger@udo.edu

Durchführung: 19.04.2016

Abgabe: 26.04.2016

Inhaltsverzeichnis

1	Zielsetzung	3
2	Theorie	3
2.1	Emission von Röntgenstrahlung	3
2.2	Absorption von Röntgenstrahlung	3
2.3	Abschirmung	4
2.4	Bragg-Bedingung	5
3	Versuchsaufbau	5
4	Durchführung	5
5	Fehlerrechnung	6
6	Auswertung	7
6.1	Überprüfung der Bragg Bedingung	7
6.2	Das Emissionsspektrum einer Cu-Röntgenröhre	8
6.2.1	Grenzwinkel	9
6.2.2	Halbwertsbreite	9
6.2.3	Abschirmkonstante	11
6.3	Das Absorptionsspektrum verschiedener Absorber	11
6.4	Moseleysches Gesetz	14
7	Diskussion	16
	Literatur	17

1 Zielsetzung

Ziel des durchgeführten Versuchs ist es, Emissions- und Absorptionsspektren diverser Elemente aufzunehmen. Die verwendeten Wellenlängen liegen dabei im Bereich der Röntgenstrahlung.

2 Theorie

2.1 Emission von Röntgenstrahlung

Röntgenstrahlung entsteht beim Auftreffen von Elektronen auf eine Anode. Sie setzt sich aus der sogenannten Bremsstrahlung sowie der charakteristischen Röntgenstrahlung zusammen. Die Bremsstrahlung wiederum entsteht in Folge des Abbremsens der Elektronen im Coulombfeld des Atomkerns. Das Elektron verliert dabei kinetische Energie und das entstehende Photon wird mit eben dieser Energie ausgesandt. Dies führt zu einem kontinuierlichen Spektrum, dessen obere Begrenzung durch die maximale Energie des im elektrischen Feld beschleunigten Elektrons gegeben ist. Diese beträgt mit der Beschleunigungsspannung U

$$E_{\text{acc}} = eU .$$

Damit und mit der Energie eines Photons mit Wellenlänge λ

$$E_{\text{photon}} = \frac{hc}{\lambda} \quad (1)$$

ergibt sich die minimale Wellenlänge des durch Bremsstrahlung entstehenden Photons zu

$$\lambda_{\text{min}} = \frac{hc}{eU} . \quad (2)$$

Die charakteristische Strahlung hingegen entsteht durch Ionisierung des Anodenmaterials in Folge einschlagender Elektronen. Ein Elektron des Anodenmaterials verlässt daraufhin seine äußere Schale und wandert in die entstandene Leerstelle in der inneren Schale. Dabei wird Strahlung frei, dessen Energie der Differenz der beiden Energieniveaus entspricht. Die entstehenden Peaks sind dann charakteristisch für das jeweilige Anodenmaterial. Zur Benennung der für diesen Versuch relevanten Übergänge sowie der Visualisierung der Vorgänge dient Abbildung 1. Infolge von Bahndrehimpuls und Elektronenspin haben die Elektronen auch innerhalb einer Schale leicht unterschiedliche Bindungsenergien. Es ist also kein scharfer Peak zu erwarten, sondern vielmehr eine Superposition von mehreren Übergangsenergien. Dies wird als Feinstruktur bezeichnet.

2.2 Absorption von Röntgenstrahlung

Bei der Absorption von Röntgenstrahlung sind der Comptoneffekt sowie der Photoeffekt die maßgeblichen Vorgänge, die zur Abschwächung der Strahlung beitragen. Es zeigt sich, dass die Absorption in Abhängigkeit der Strahlung für verschiedene Absorbermaterialien charakteristische Verläufe annimmt. An den Übergangsenergien ist ein Sprung zu erwarten, sodass Strahlung höherer Energie stärker absorbiert wird. Dies ist dadurch zu begründen, dass nun die Energie ausreicht, solche Übergänge anzuregen. Diese Punkte im Spektrum werden als Kanten bezeichnet.

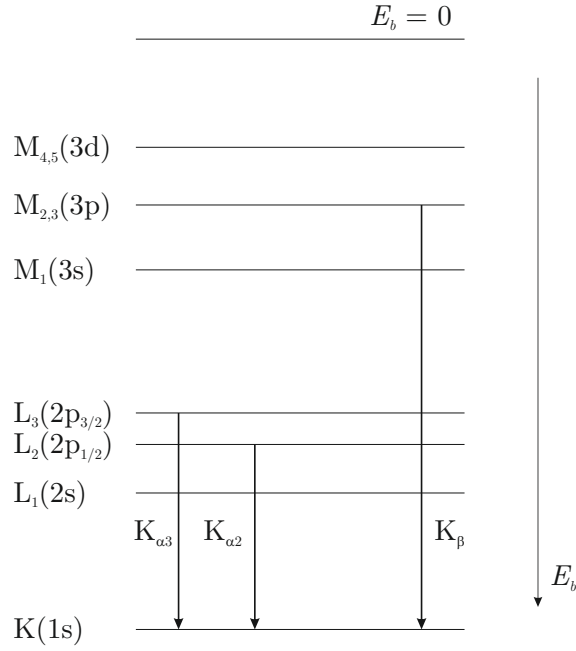


Abbildung 1: Verschiedene Übergänge zwischen Energieniveaus und deren Bezeichnungen. Die Bindungsenergie nimmt nach unten hin zu. Während mehrere Energieniveaus aus derselben Schale, z.B. $n=2$, verschiedene Niveaus haben, lassen sich solche Übergänge nicht immer auflösen (Stichwort Feinstruktur).

2.3 Abschirmung

Elektronen auf den äußeren Schalen werden durch Elektronen auf den inneren Schalen von der Kernladung abgeschirmt, sodass sie leichter zu ionisieren sind als die inneren Elektronen. Die äußeren Elektronen haben daher eine geringere Bindungsenergie. Das Moseleysche Gesetz beschreibt nun einen Zusammenhang zwischen Energie und Ordnungszahl. Dabei fließt die sogenannte Abschirmkonstante σ ein.

$$E_{nm} = Rhc(z - \sigma)^2 \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (3)$$

Hierin ist R die Rydberg-Konstante, h das Plancksche Wirkungsquantum, c die Vakuumlichtgeschwindigkeit, z die Kernladungszahl und n und m die Quantenzahlen der Schalen. Ein wichtiger Übergang ist der K_α Übergang. Hier ist $m = 1$ und $n = 2$, sodass für die Energie

$$E_{21} = E_{K_\alpha} = Rhc(z - \sigma)^2 \frac{3}{4} \quad (4)$$

folgt. Für Übergänge von höheren Schalen muss die Feinstruktur berücksichtigt werden, sodass die Berechnung der Abschirmkonstante kompliziert wird. Für die Übergänge der L-Kanten gilt jedoch folgende Gleichung [1].

$$\sigma_L = Z - \sqrt{\frac{4}{\alpha} \sqrt{\frac{\Delta E}{hcR_\infty}} - \frac{5\Delta E}{hcR}} \sqrt{1 + \frac{19\alpha^2 \Delta E}{32hcR}} \quad (5)$$

Hierin sind α die Sommerfeldsche Feinstrukturkonstante und Δ_E die Energiedifferenz

$$\Delta E = E_{L_{II}} - E_{L_{III}}. \quad (6)$$

2.4 Bragg-Bedingung

Die Energie von Röntgenstrahlung kann mit Hilfe der Bragg-Bedingung gemessen werden. Fällt die Strahlung auf einen Kristall mit bekannter Gitterkonstante d , so erfährt die reflektierte Strahlung konstruktive Interferenz, wenn

$$2d \sin(\Theta) = n\lambda \quad (7)$$

gilt. Hierin sind Θ der Winkel zwischen Kristalloberfläche und eintreffender Strahlung, λ die Wellenlänge der Strahlung und n die Ordnungszahl. Durch Einsetzen von Gleichung 1 und Umstellen nach dem Winkel Θ folgt hieraus

$$\Theta = \arcsin\left(\frac{nhc}{2dE}\right). \quad (8)$$

Falls Θ der Bragg-Bedingung (7) genügt, wird dieser Winkel auch als Glanzwinkel bezeichnet, weil hier maximale Intensität zu erwarten ist. Für gleiche Ordnungszahl, z.B. $n = 1$, gilt, dass der Glanzwinkel mit zunehmender Energie abnimmt.

3 Versuchsaufbau

Zur Erzeugung der Röntgenstrahlung wird eine Cu-Röntgenröhre verwendet. Die Beschleunigungsspannung beträgt stets 35kV, der Emissionsstrom beträgt 1mA. Abbildung 2 zeigt den Aufbau des Experiments. Die in der Röntgenröhre generierte Strahlung trifft auf einen LiF-

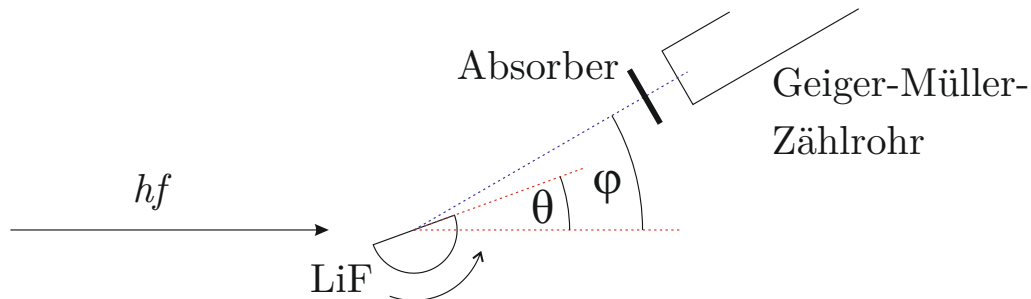


Abbildung 2: Schematischer Aufbau des Experiments.

Kristall mit Gitterkonstante $d = 201,4\text{pm}$. Dieser kann um einen Winkel Θ rotiert werden. Ebenso kann der Detektor samt Absorber um einen Winkel ϕ rotiert werden. Dabei existiert die Möglichkeit, den Winkel ϕ fest auf das doppelte des Winkels Θ einzustellen, sodass stets das Intensitätsmaximum beobachtet wird. Der Detektor ist ein Geiger-Müller-Zählrohr und als Absorber stehen verschiedene Elemente zur Verfügung.

4 Durchführung

Zunächst wird die Bragg-Bedingung überprüft, indem bei festem Kristallwinkel $\Theta = 14^\circ$ der Detektor von $\phi = 26^\circ..30^\circ$ in $0,1^\circ$ Schritten rotiert wird. Das Maximum der detektierten Intensität ist bei $2\Theta = 28^\circ$ zu erwarten. Anschließend wird eine Messung ohne Absorber im

Winkelbereich $4^\circ \leq \Theta \leq 26^\circ$ in $0,2^\circ$ -Schritten durchgeführt, um das Emissionsspektrum der Cu-Röntgenröhre aufzunehmen. Schließlich werden die Spektren der Elemente aufgenommen. Dazu wird ein geeigneter Winkelbereich um die aus den Übergangsenergien berechneten Glanzwinkel eingestellt. Von besonderem Interesse für die leichten Elemente ist der K_α -Übergang, aus dessen Energiewert gemäß Gleichung (4) die Abschirmkonstante σ_K berechnet werden kann. Für Gold wird die L -Kante ausgewählt. Hierbei werden 2 Kanten in unmittelbarer Nähe erwartet, aus deren Energiedifferenz sich gemäß Gleichung (5) die Abschirmungskonstante σ_L ergibt. Die Integrationszeit wird von vormals 5s auf 20s angehoben, um der verringerten Strahlungsdosis entgegenzuwirken.

5 Fehlerrechnung

Dieses Kapitel listet kurz und bündig die benötigten und aus den Methoden der Statistik bekannten Formeln für die Fehlerrechnung auf. Die Schätzung der Standardabweichung ist

$$\Delta X = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} . \quad (9)$$

Der Mittelwert ist

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad (10)$$

Der Fehler des Mittelwertes ist

$$\Delta \bar{X} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} . \quad (11)$$

Für fehlerbehaftete Größen, die auch in folgenden Formeln verwendet werden, muss die Fehlerfortpflanzung nach Gauß berücksichtigt werden.

$$\Delta f = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial X_i} \right)^2 \cdot (\Delta X_i)^2} \quad (12)$$

Bei der linearen Regressionsrechnung sind die Parameter m und b der Ausgleichsgerade $y = mx + b$ wie folgt gegeben:

$$m = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} \quad b = \bar{y} - m\bar{x} . \quad (13)$$

Dabei sind x_i und y_i linear abhängige Messgrößen. Der Fehler dieser Parameter wiederum errechnet sich aus

$$\sigma_m^2 = \frac{\sigma^2}{n(\overline{x^2} - \bar{x}^2)} \quad \sigma_b^2 = \frac{\sigma^2 \bar{x}^2}{n(\overline{x^2} - \bar{x}^2)} \quad (14)$$

6 Auswertung

6.1 Überprüfung der Bragg Bedingung

Aus der folgenden Graphik und den dazugehörigen Messwerten in Tabelle 1 kann das Maximum der Kurve bei

$$\theta = 13.8^\circ$$

entnommen werden.

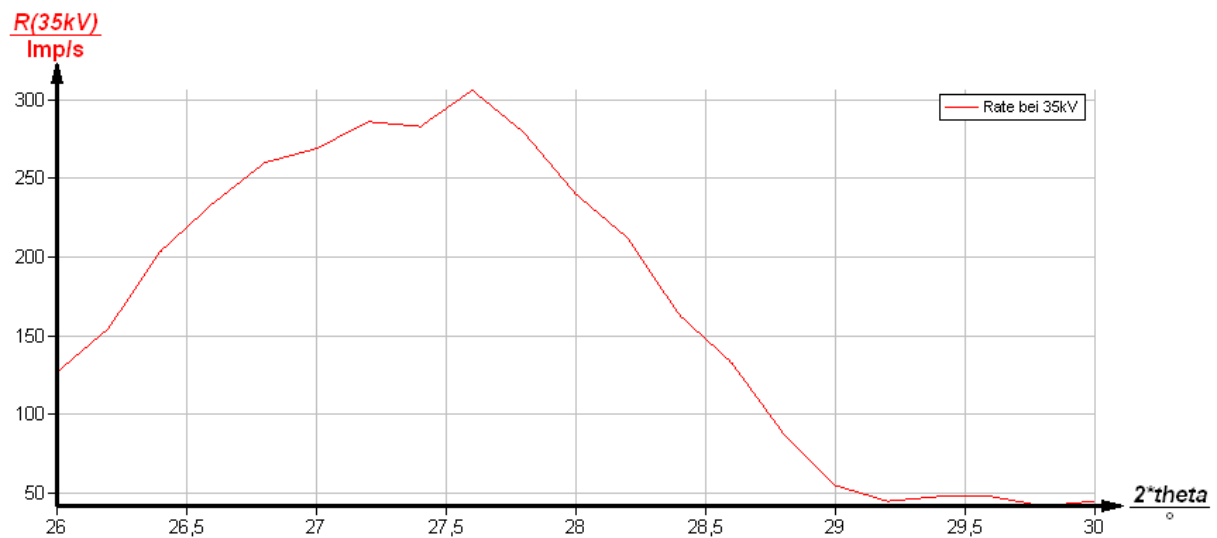


Abbildung 3: Überprüfung des Bragg Bedingung.

Tabelle 1: Messdaten Bragg Bedingung.

$\theta / ^\circ$	<i>Zaehlrate</i>
26,0	127
26,2	155
26,4	204
26,6	234
26,8	260
27,0	269
27,2	286
27,4	283
27,6	306
27,8	279
28,0	240
28,2	212
28,4	163
28,6	133
28,8	88
29,0	55
29,2	45
29,4	48
29,6	48
29,8	42
30,0	45

6.2 Das Emissionsspektrum einer Cu-Röntgenröhre

In Abbildung 4 ist das Emissionsspektrum der Kupferanode mit den charakteristischen, lokalen Maxima dargestellt.

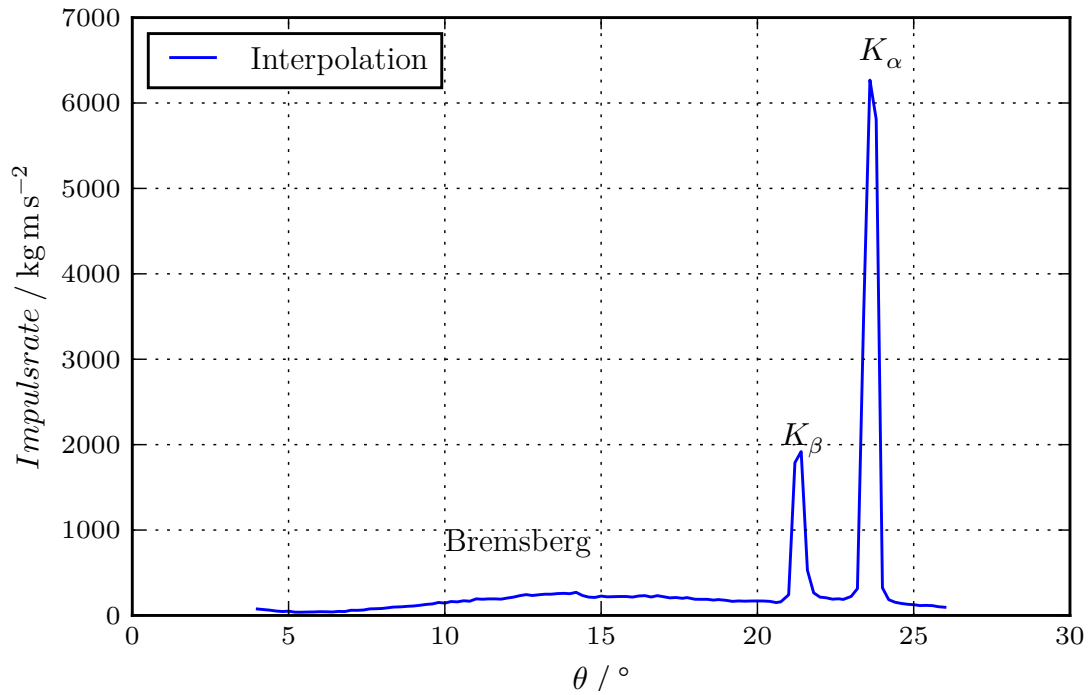


Abbildung 4: Emissionsspektrum der Kupferanode.

6.2.1 Grenzwinkel

Anhand des Grenzwinkels, der nach Abbildung 4 bei $\theta_G = 5.4^\circ$ liegt, wird mit Gleichung 7 die minimale Wellenlänge λ_{\min} bzw. die maximale Energie E_{\max} des Bremspektrums bestimmt.

$$\begin{aligned}\lambda_{\min} &= 37,91 \text{ pm} \\ E_{\max} &= 32,71 \text{ keV}\end{aligned}$$

6.2.2 Halbwertsbreite

Für die Berechnung der Halbwertsbreite $\Delta\theta$ wird das Emissionsspektrum nur in der Umgebung um K_α und K_β betrachtet. Die Spline-Interpolation dieser beiden Umgebungen sind in Abbildung 5 und 6 dargestellt.

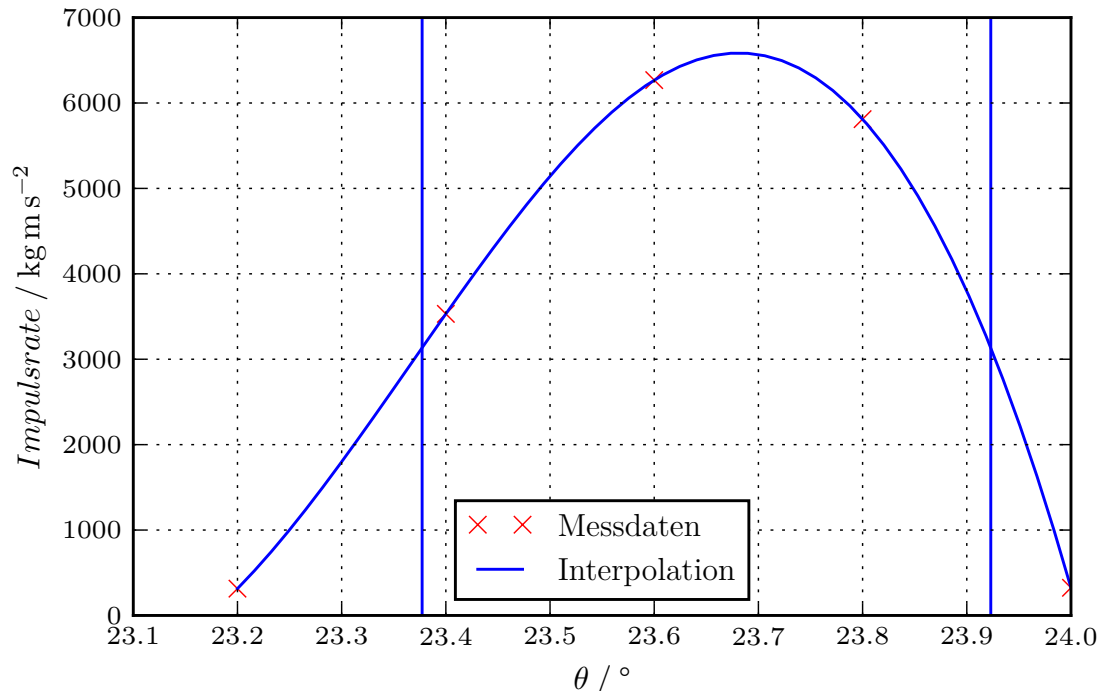


Abbildung 5: Interpolation der K_α - Umgebung.

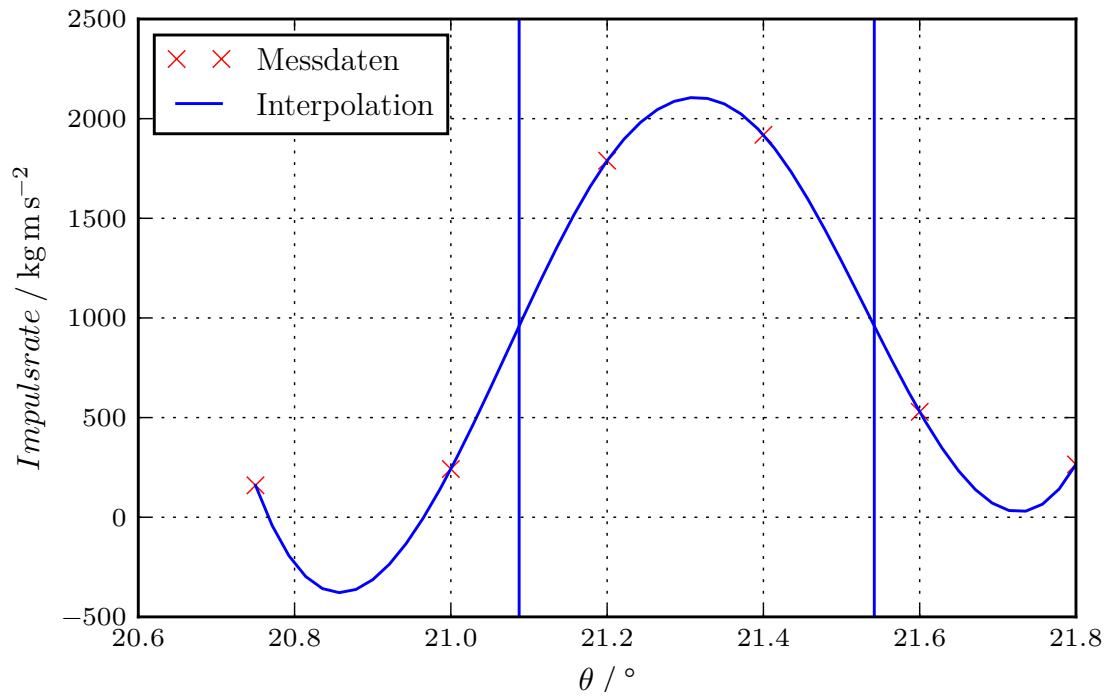


Abbildung 6: Interpolation der K_β - Umgebung.

Mit der Bragg'schen Bedingung und Gleichung 1 wird die Halbwertsbreite $\Delta\theta$ und das Auflösungsvermögen ΔE bestimmt.

$$\begin{aligned}\Delta\theta_{K_\alpha} &= 0,55^\circ \\ \Delta E_{K_\alpha} &= 0,17 \text{ keV}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta\theta_{K_\beta} &= 0,45^\circ \\ \Delta E_{K_\beta} &= 0,17 \text{ keV}\end{aligned}$$

6.2.3 Abschirmkonstante

Aus Abbildung 4 werden die Winkel der K_α - und K_β -Maxima bei

$$\begin{aligned}\theta_{K_\alpha} &= 23,60^\circ \\ \theta_{K_\beta} &= 21,40^\circ\end{aligned}$$

abgelesen. Mit der Bragg'schen Bedingung wird die dazugehörige Energie E berechnet, weiter werden durch Umstellung bzw. Aufteilung von Gleichung 4

$$\sigma_{K_\beta} = z_{\text{Kupfer}} - \sqrt{\frac{\Delta E_{K_\beta}}{R_\infty}} \quad (15)$$

$$\sigma_{K_\alpha} = z_{\text{Kupfer}} - 2\sqrt{\frac{R_\infty(z_{\text{Kupfer}} - \sigma_{K_\beta})^2 - \Delta E_{K_\alpha}}{R_\infty}} \quad (16)$$

die Abschirmkonstanten $\sigma_{K_\alpha}, \sigma_{K_\beta}$ ermittelt.

$$\begin{aligned}\sigma_{K_\alpha} &= 4,09 \\ \sigma_{K_\beta} &= 14,17\end{aligned}$$

6.3 Das Absorptionsspektrum verschiedener Absorber

In den Abbildungen 7 - 10 sind die gemessenen Absorptionsspektren von Germanium, Gold, Zink und Zirkonium dargestellt.

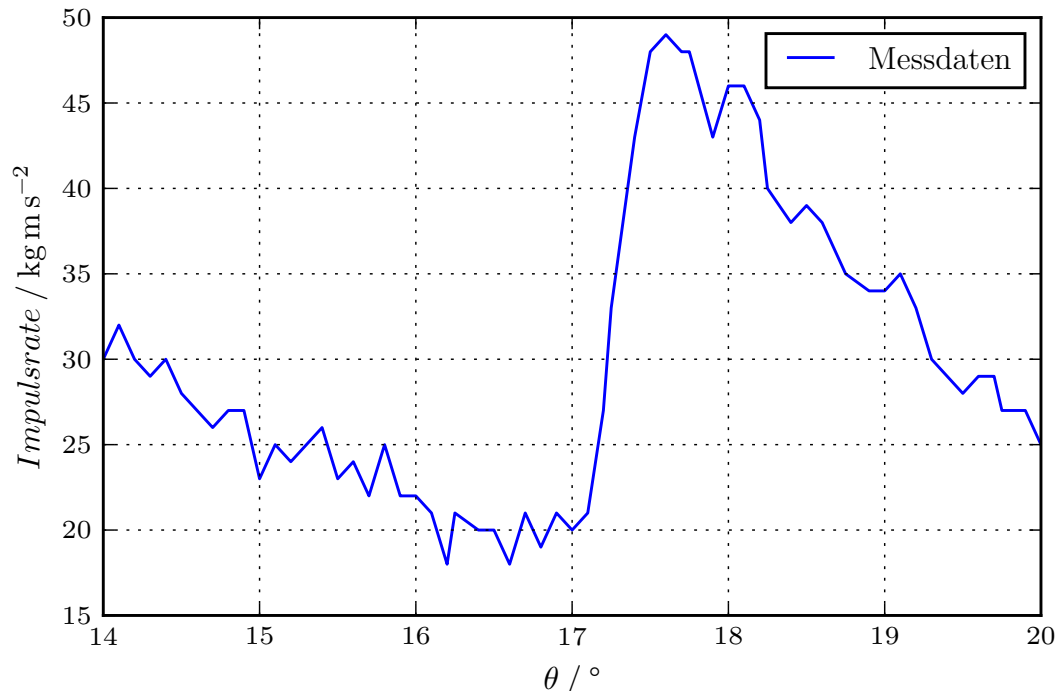


Abbildung 7: Absorptionsspektrum von Germanium.

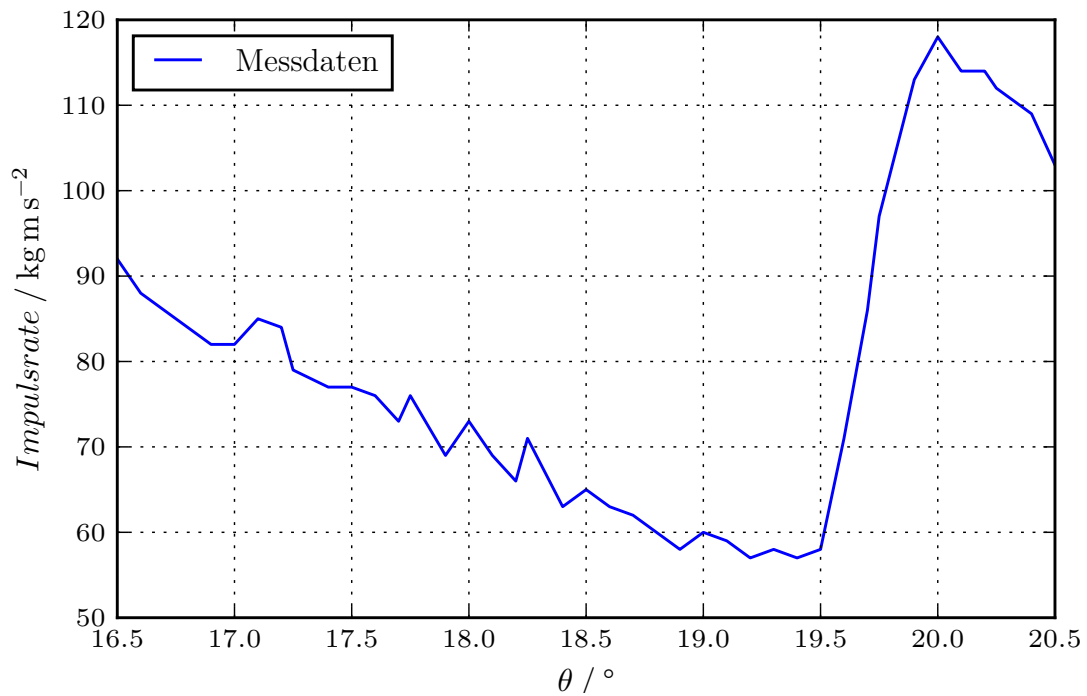


Abbildung 8: Absorptionsspektrum von Zink.

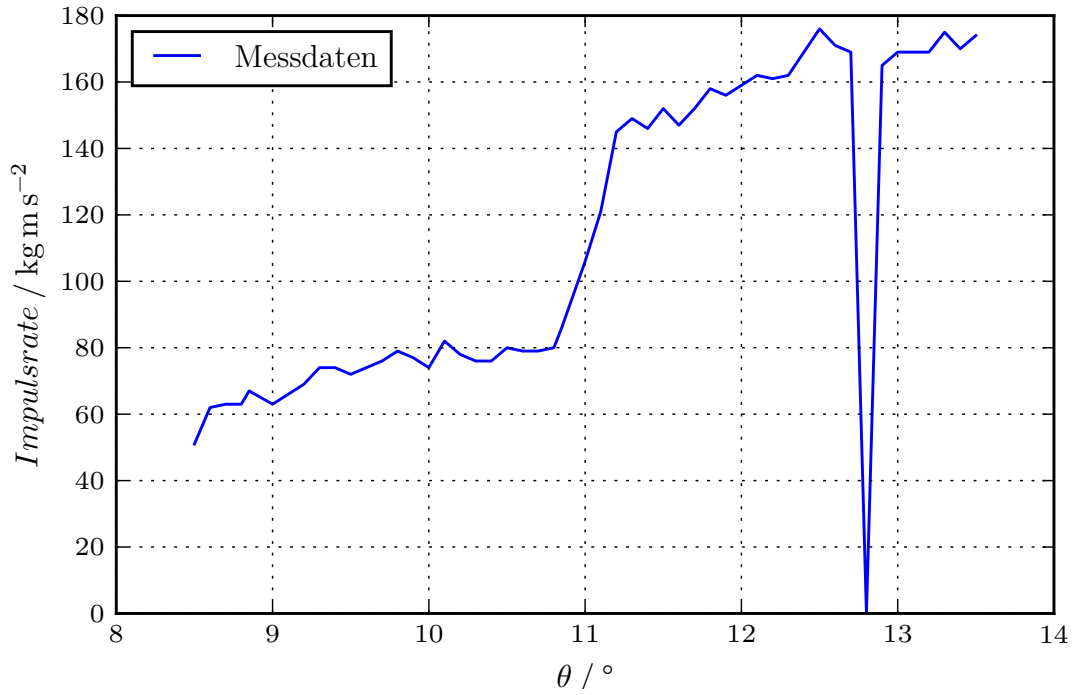


Abbildung 9: Absorptionsspektrum von Zirkonium.

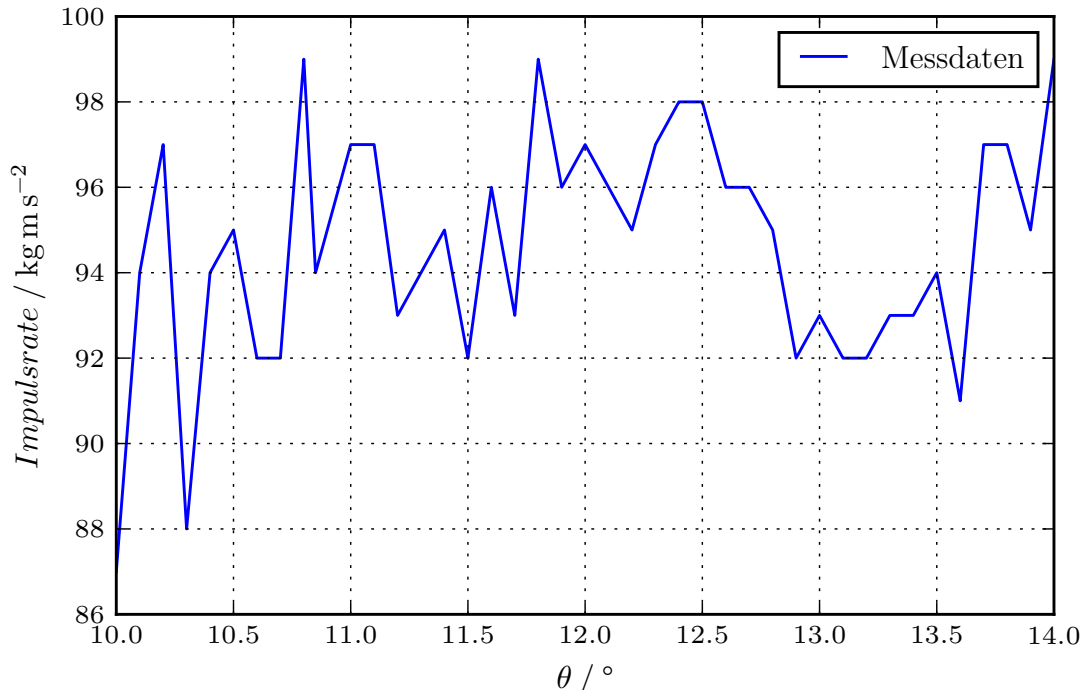


Abbildung 10: Absorptionsspektrum Gold.

Durch eine lineare Näherung der jeweiligen Kantenübergänge ergeben sich die Absorptionswinkel θ_{K_α} , wodurch mit Gleichung 1 die Absorptionsenergien E_{K_α} berechnet werden. Die Ergebnisse

sind in der folgenden Tabelle aufgelistet.

	$E_{K_\alpha} / \text{keV}$
Ge (Germanium)	10,32
Zn (Zink)	9,11
Zr (Zirkonium)	16,13

Tabelle 2: Auflistung der Absorptionsenergien E_{K_α} .

Mit den zuvor berechneten Absorptionsenergien E_{K_α} werden gemäß

$$\sigma_{K_\alpha} = z - \sqrt{\frac{E_{K_\alpha}}{R_\infty} - \frac{\alpha}{4} z^4} \quad (17)$$

die jeweiligen Abschirmkonstanten der drei Absorber berechnet. Die Ergebnisse sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst.

	σ_{K_α}
Ge (Germanium)	4,70
Zn (Zink)	4,33
Zr (Zirkonium)	6,06

Tabelle 3: Auflistung der Abschirmkonstanten σ .

6.4 Moseleysches Gesetz

In Abbildung 11 ist die Wurzel aus den in Kapitel 6.3 berechneten Absorptionsenergien $\sqrt{E_{K_\alpha}}$ gegen die Kernladungszahlen Z aufgetragen. Aus der Steigung des linearen Zusammenhangs, lässt sich auf die Rydbergkonstante R_∞ schließen.

$$\begin{aligned} hcR_\infty &= (13,3 \pm 0,1) \text{ eV} \\ R_\infty &= (10\,756\,312 \pm 110\,875) \text{ m}^{-1} \end{aligned}$$

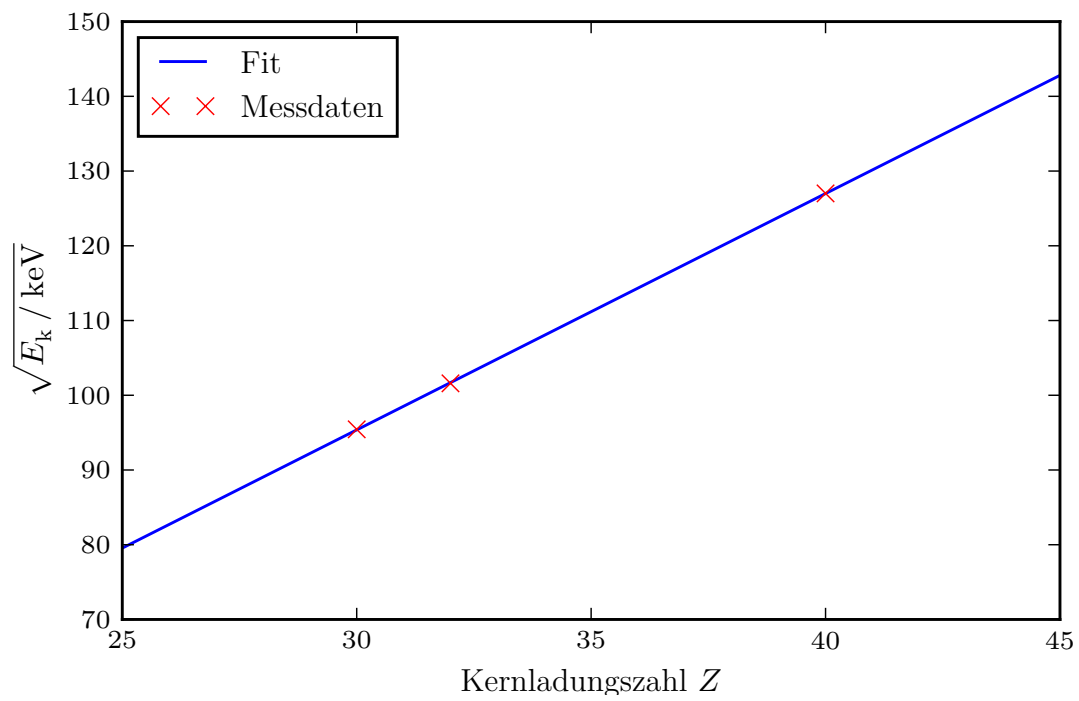


Abbildung 11: Moseley-Diagramm.

7 Diskussion

Die Überprüfung der Braggbedingung, in Kapitel 6.1, ergibt einen Kristallwinkel von $\theta = 13,8^\circ$. Der zuvor eingestellte Winkel betrug $\theta_{\text{eing.}} = 14,0^\circ$. Die resultierende relative Abweichung von 1,34% ist auf eine nicht exakte Kalibrierung des Geräts zurückzuführen.

Bei der Ermittlung der maximalen Energie des Bremsspektrums, in Kapitel 6.2.1, ist eine Abweichung um 6,54% zu dem vorab eingestellten Wert von $E_{\text{eing.}} = 35\text{keV}$ festzustellen. Die Abweichung lässt sich ebenfalls auf die nicht exakte Kalibrierung des Geräts zurückführen.

Desweiteren folgt, nach Kapitel 6.2.2, aus der Halbwertsbreite des Emissionsspektrums, ein Auflösungsvermögen von der verwendeten Apparatur von 0,17 keV. Da das Auflösungsvermögen so gering ist, ist es nicht sinnvoll den statistischen Fehler zu bestimmen.

In der folgenden Tabelle werden die in Kapitel 6.2.3 und 6.3 berechneten Absorptionsenergien und Abschirmkonstanten mit den Literaturwerte verglichen.

	$E_{\text{Lit.}} / \text{keV}$	$E_{\text{ermittelt}} / \text{keV}$	σ_{Lit}	$\sigma_{\text{ermittelt}}$
Cu (Kupfer)	8,05	7,76	3,41	4,09
Ge (Germanium)	10,9	10,32	3,68	4,70
Zn (Zink)	9,65	9,11	3,56	4,33
Zr (Zirkonium)	16,89	16,13	4,09	6,06

Tabelle 4: Vergleich der Absorptionsenergien und Abschirmkonstanten.

Über die Kante des Absorber aus Gold kann keine Aussage getroffen werden, da in Abbildung 11 keine eindeutige Kante zu erkennen ist. Somit kann ebenfalls keine Aussagen über die Absorptionsenergie und die Abschirmkonstante getroffen werden.

Zu der in Kapitel 6.4 berechneten Rydbergkonstante ist eine Abweichung von ca. 2% zu dem Literaturwert $R_\infty = 10973731.56\text{m}^{-1}$ festzustellen.

Die Abweichungen, bezüglich der Absorber und der Rydbergkonstante, lassen sich auf eine nicht exakte Kalibrierung des Geräts zurückzuführen.

Literatur

- [1] *TU Dortmund - Fachbereich Physik : Anfängerpraktikum Anleitung zu Versuch Nr. 203.*
http://129.217.224.2/HOMEPAGE/Anleitung__AP.html. Nov. 2015.