Blatt 5

Marius Hölting, Matthias Jaeger

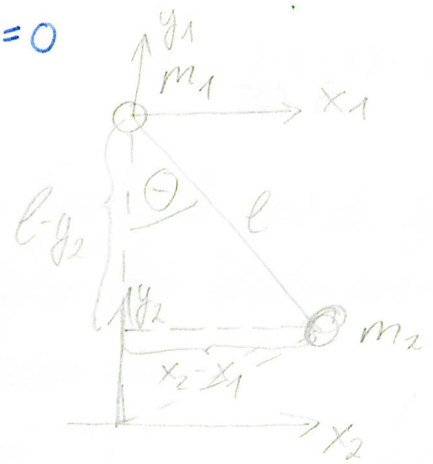
$\Sigma\ 20$

A1 a) $\mathcal{L} = T - V \qquad V = m_2 g y_2 \qquad T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$

$$v_2 = \sqrt{\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) - m_2 g y_2$$

b) $y_1 = 0$



Mit der links gezeigten Wahl des KS gilt

$$l^2 = (l - y_2)^2 + (x_2 - x_1)^2$$

$\Rightarrow$ 2 Zwangsbedingungen bei 4 unterschiedl. Koordinaten bricht das Problem auf 2 unabhängige Koordinaten runter. Wähle hier x_1, Θ (rotatorische Freiheitsgrade der Massen existieren wie üblich nicht bei Punktmassen)

c) $x_2 = x_1 + l \sin\Theta \Rightarrow \dot{x}_2 = \dot{x}_1 + \dot{\Theta} l \cos\Theta$

$y_2 = l - l\cos\Theta \Rightarrow \dot{y}_2 = \dot{\Theta} l \sin\Theta$

$$\Rightarrow v_2^2 = \dot{x}_1^2 + 2\dot{x}_1 \dot{\Theta} l \cos\Theta + \dot{\Theta}^2 l^2$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(\cancel{x_1}, \dot{x}_1, \dot{\Theta}, \Theta) = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_1^2 + 2\dot{x}_1 \dot{\Theta} l \cos\Theta + \dot{\Theta}^2 l^2) - m_2 g (l - l\cos\Theta)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 0 = \ddot{x}_1 (m_1 + m_2) + m_2 (\ddot{\Theta} l \cos\Theta - \dot{\Theta}^2 l \sin\Theta)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Theta}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Theta} = 0 = m_2 l (\ddot{x}_1 \cos\Theta - \dot{x}_1 \dot{\Theta} \sin\Theta) + l^2 m_2 \ddot{\Theta} - (-m_2 l \dot{x}_1 \dot{\Theta} \sin\Theta - m_2 g l \sin\Theta)$$

$$0 = m_2 l \ddot{x}_1 \cos\Theta + l^2 m_2 \ddot{\Theta} + m_2 g l \sin\Theta$$

$$\Leftrightarrow 0 = \ddot{x}_1 \cos\Theta + l\ddot{\Theta} + g \sin\Theta$$

d) x_1 ist zyklische Koordinate

$$\Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_1} = \text{const.} = \dot{x}_1 (m_1 + m_2) + m_2 l \dot{\Theta} \cos\Theta$$

e) Gesamtimpuls in x-Richtung $= \dot{x}_1 (m_1 + m_2) + m_2 l \dot{\Theta} \cos\Theta \overset{!}{=} 0 \quad | \int dt$

$$x_1 (m_1 + m_2) + m_2 l \sin\Theta = \underbrace{\text{const.}}_{A}$$

Wähle Koordinatenursprung derart, dass $A=0$ gilt $\Rightarrow x_1 = -\frac{m_2}{m_1+m_2} l \sin\Theta$ ✓

$\Rightarrow x_2 = x_1 + l\sin\Theta = l\sin\Theta \cdot \left(1 - \frac{m_2}{m_1+m_2}\right) = l\sin\Theta \cdot \frac{m_1}{m_1+m_2}$ ✓

$y_2 = l - l\cos\Theta = l(1-\cos\Theta)$

Dies ist die Bahn einer Ellipse mit Halbachsen $\frac{m_1}{m_1+m_2} l$ und l. ✓

Insbesondere ergibt sich näherungsweise eine Kreisbahn, falls $m_1 \gg m_2$.

schön

5/5

a) $\dot{G} = \sum_i \dot{\vec{p}}_i \cdot \vec{r}_i + \vec{p}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i \underset{\uparrow\, m\ddot{r} = \dot{p}}{=} \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \vec{r}_i + m_i \dot{\vec{r}}_i^{\,2} \underset{\uparrow\, \text{Newton}}{=} \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i + 2T$

b)

$$\left\langle \frac{dG}{dt} \right\rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{dG}{dt} = \frac{1}{T} \int_0^T \sum_i \vec{F}_i \vec{r}_i + \frac{1}{T} \int_0^T 2T\, dt$$

$$= \frac{1}{T} \left(G(T) - G(0) \right) \qquad (*)$$

c) Beschränkt, weil das System gebunden ist. So kann in einem solchen System kein Teilchen unendlich weit weg fliegen, da es ja sonst ungebunden wäre.

Damit ist

$$\lim_{T \to \infty} \left\langle \frac{dG}{dt} \right\rangle = \lim_{T \to \infty} \frac{\overbrace{G(T) - G(0)}^{< M}}{\underbrace{T}_{\to \infty}} = 0$$

Somit gilt nach Umstellen von $(*)$:

$$\boxed{\left\langle \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i \right\rangle = -2 \langle T \rangle \qquad \text{Virialsatz}}$$

d) $\vec{F} = -\vec{\nabla} V(\vec{r}) \overset{k=-1}{=} -\alpha \cdot |\vec{r}|^{-2} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = -\alpha \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \qquad \Big| \; V(\vec{r}) = -\alpha |\vec{r}|^k$

$$\sum_i^{N=1} \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i = -\alpha \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} \vec{r} = -\alpha \frac{1}{|\vec{r}|} = +V$$

$$\underset{\text{Virialsatz}}{\Rightarrow} \quad \langle V \rangle = -2 \langle T \rangle \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{\langle V \rangle}{\langle T \rangle} = -2}$$

$k=2$: $-\vec{\nabla} V(\vec{r}) = +\vec{\nabla} \alpha |\vec{r}|^2 = +2\alpha |\vec{r}| \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = +2\alpha \vec{r}$

schön

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{N=1} \vec{F}_i \vec{r}_i = +2\alpha \vec{r}\vec{r} = +2\alpha |\vec{r}|^2 = -2 \cdot V$$

5/5

$$\Rightarrow -2 \langle V \rangle = -2 \langle T \rangle \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{\langle V \rangle}{\langle T \rangle} = 1}$$

allg. $\quad k \cdot \langle V \rangle = 2 \langle T \rangle$

5 a) Bewegungsgleichung des harmon. Osz.:

$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$

$x \to x' = x + \alpha\cos\omega t$

$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \dot{x}' + \omega\alpha\sin\omega t$ ✓

$\ddot{x} = \ddot{x}' + \underbrace{\omega^2\alpha\cos\omega t}_{= \omega^2 x' - \omega^2 x}$ ✓

transformierte Bew.gl.:

$\Rightarrow \ddot{x}' + \omega^2 x' - \omega^2 x + \omega^2 x = 0$

$\Leftrightarrow \ddot{x}' + \omega^2 x' = 0 \implies x'$ ist Symmetrietrafo

entspricht der Lagrange-Gl.: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{x}'}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial x'} = 0$

Es folgt durch verschärftes Hingucken: $\Rightarrow \omega^2 x' = -\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial x'}$

$\mathcal{L}' = m\left(\frac{\dot{x}'^2}{2} - \frac{1}{2}\omega^2 x'^2\right) + C$

~~Eigentlich ist die Idee hier $x', \dot{x}'$ einzusetzen, ändert aber nur ein VZ~~

Setze ein:

$\dot{x} = \dot{x}' + \alpha\omega\sin(\omega t)$

$x = x' - \alpha\cos(\omega t)$

aber auch $\mathcal{L} = m\left(\frac{\dot{x}^2}{2} - \frac{1}{2}\omega^2 x^2\right)$

$= \underbrace{m\left(\frac{1}{2}\dot{x}'^2 - \frac{1}{2}\omega^2 x'^2\right)}_{\mathcal{L}' - C} + \underbrace{\dot{x}'\alpha\omega\sin(\omega t) + \frac{1}{2}\alpha^2\omega^2\sin^2(\omega t) + \omega^2 x'\alpha\cos(\omega t) - \frac{1}{2}\alpha^2\omega^2\cos^2(\omega t)}$ ✓

Eichung: $\frac{d}{dt}\left(\mathcal{X}'(x', t, \alpha)\right) = C$

$\mathcal{X}'(x', t, \alpha) = m\int\left[\dot{x}'\alpha\omega\sin(\omega t) + x'\alpha\omega^2\cos(\omega t) + \frac{1}{2}\alpha^2\omega^2\underbrace{(\sin^2\omega t - \cos^2\omega t)}_{= -\cos(2\omega t)}\right]dt$

$= \left[x'\alpha\omega\sin(\omega t) - \frac{1}{4}\alpha^2\omega\sin(2\omega t)\right]m$ ✓

$J = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right)\Big|_{\alpha=0} - \left(\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial \alpha}\right)\Big|_{\alpha=0} = m\cdot\left[-\dot{x}\cos(\omega t) - x\omega\sin(\omega t)\right]$ ✓

mit $\mathcal{X}(x, t, \alpha)$

$= x\alpha\omega\sin\omega t + \mathcal{O}(\alpha^2)$

$\Longrightarrow \cdot \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial \alpha}\Big|_{\alpha=0} = x\omega\sin(\omega t)$

- $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$
- $\frac{\partial x}{\partial \alpha} = -\cos(\omega t)$

b) $x = A\cos\omega t + B\sin\omega t$ ✓

$\dot{x} = -\omega A\sin\omega t + \omega B\cos\omega t$ ✓ $\Rightarrow J = m\left(\cos(\omega t)\cdot(A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t))\omega - (A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t))\omega\sin(\omega t)\right) = -mB\omega$

$= \text{const.}$ ✓

Idee ist: $x(x', \alpha, t)$ hier einsetzen (ändert Vorzeichen)

c) $\mathcal{L} = V - T = -mbx + \frac{1}{2}m\dot{x}^2$

b: Grav. beschl.

$\boxed{\begin{array}{l} x' = x + \alpha t \qquad \dot{x}' = \dot{x} + \alpha \\ \text{Bew.gl.:} \\ m\ddot{x} = mg \\ \ddot{x}' = g \quad ✓ \\ \Rightarrow x' \text{ ist Symmetrietransf.} \end{array}}$

$\mathcal{L}' = -mbx' + \frac{1}{2}m\dot{x}'^2$

$= -mb(x + \alpha t) + \frac{1}{2}m(\dot{x} + \alpha)^2$

$= \underbrace{-mbx + \frac{1}{2}m\dot{x}^2}_{\mathcal{L}} \underbrace{- mb\alpha t + m\dot{x}\alpha + \frac{\alpha^2}{2}}_{\frac{d}{dt}\chi}$

$\chi(\alpha, x, t) = \frac{\alpha^2}{2}t + \alpha\cdot\left(-\frac{1}{2}mbt^2 + mx\right)$

$J = \underbrace{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}}\left(\frac{\partial x}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=0}}_{=t} - \left(\frac{\partial\chi}{\partial\alpha}\right)\Big|_{\alpha=0} = -m\dot{x}t + \frac{1}{2}mbt^2 - mx$

hier müsste dann ein + stehen

das Vorzeichen ist wichtig, denn: $\frac{dJ}{dt} = +m\ddot{x}t + m\dot{x} + mbt - m\dot{x}$

$= mt(\ddot{x} + g) = 0$

noch 5/5

ebenes Zentralkraftproblem:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mu\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) + b \cdot r^n$$

führe Transformation durch:

$$\boxed{\begin{aligned} r &\mapsto \tilde{r} = \alpha \cdot r \\ t &\mapsto \tilde{t} = \beta \cdot t \\ \mathcal{L} &\mapsto \tilde{\mathcal{L}} = \gamma \cdot \mathcal{L} \end{aligned}} \Rightarrow \begin{aligned} \dot{\tilde{r}} &= \frac{d\tilde{r}}{d\tilde{t}} = \frac{\alpha}{\beta}\dot{r} \\ \dot{\tilde{\varphi}} &= \frac{d\varphi}{d\tilde{t}} = \frac{1}{\beta}\dot{\varphi} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \tilde{\mathcal{L}} = \frac{1}{2}\mu\left(\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2\dot{r}^2 + \alpha^2 r^2 \frac{\dot{\varphi}^2}{\beta^2}\right) + \alpha^n b r^n = \gamma \cdot \left[\frac{1}{2}\mu\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) + br^n\right]$$

Koeffizientenvergleich! $\gamma \cdot 1 = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2$, $\gamma \cdot 1 = \alpha^n$

$$\Rightarrow \frac{\alpha^2}{\beta^2} = \alpha^n \Rightarrow \alpha^{2-n} = \beta^2$$

z. B. Keplerproblem: $n = -1 \Rightarrow \alpha^3 = \beta^2$

(3. Kepler-Gesetz)

5/5