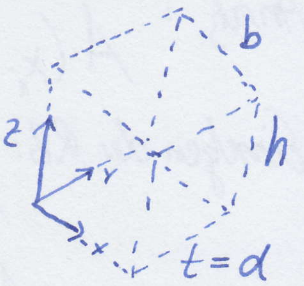
Blatt 10 — M. Hötting, M. Jaeger

A1) 19,5/20



a) Randbedingungen

$\vec{e}_x \cdot \nabla\phi(0,y,z,t) = \vec{e}_y \nabla\phi(x,0,z,t) = \vec{e}_z\nabla\phi(x,y,0,t)$

$= \vec{e}_x\nabla\phi(b,y,z,t) = \vec{e}_y\nabla\phi(x,d,z,t) = \vec{e}_z\nabla\phi(x,y,h,t)$

$= 0$ denn die ~~Geschwindigkeiten~~ Geschwindigkeitskomponenten senkrecht zur Wand müssen am festen Rand 0 sein.

b) Ansatz: $\phi(x,y,z,t) = A(x,y,z)\cdot\cos(\omega t)$

Dann wird die DGL $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = \Delta\phi$

zu $-\frac{1}{c^2}\omega^2 A(x,y,z)\cos(\omega t) = \cos(\omega t)\cdot\Delta A(x,y,z)$

$\Leftrightarrow \quad \cos(\omega t)\cdot\left(\frac{\omega^2}{c^2}\cdot A(x,y,z) + \Delta A(x,y,z)\right) = 0$

Muss für alle Zeiten t gelten, daher

$$\Delta A + \frac{\omega^2}{c^2}A = 0 \qquad (1)$$

c) Die Aufgabenstellung legt einen Separationsansatz der Form

$$A(x,y,z) = A(x)\cdot A(y)\cdot A(z)\cdot \underbrace{C}_{\text{konst.}}$$ nahe.

Setzen wir den doch mal in (1) ein.

$$\frac{\partial^2 A(x)}{\partial x^2}A(y)A(z) + \frac{\partial^2 A(y)}{\partial y^2}A(x)A(z) + \frac{\partial^2 A(z)}{\partial z^2}A(x)A(y) + \frac{\omega^2}{c^2}A(x)A(y)A(z) = 0$$

und teilen wie üblich durch $A(x,y,z)$:

$$\frac{1}{A(x)}\frac{\partial^2 A(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{A(y)}\frac{\partial^2 A(y)}{\partial y^2} + \frac{1}{A(z)}\frac{\partial^2 A(z)}{\partial z^2} = -\frac{\omega^2}{c^2} = -k^2 = \text{konst.}$$

d.h. $$\frac{\frac{\partial^2 A(x_i)}{\partial x_i^2}}{A(x_i)} \stackrel{!}{=} \text{konst.} =: -k_i^2$$

Wir raten dann mal fröhlich die cos-Funktion, damit die Ableitung (sin) gemäß den Randbedingungen bei 0 verschwindet.

Ansatz: $A(x_i) = \cos(k_i x_i)$

Einsetzen der RB:

$$A'(x=0) = -\sin(k_x \cdot 0) \cdot k_x = 0 \checkmark$$

$$A'(x=b) = -\sin(k_x \cdot b) \cdot k_x = 0$$

$$\Leftrightarrow k_x \cdot b = n_x \cdot \pi \Leftrightarrow k_x = \frac{\pi}{b} n_x$$

äquivalent folgt $k_y = \frac{\pi}{d} n_y$, $k_z = \frac{\pi}{h} n_z$ mit $n_x, n_y, n_z \in \mathbb{Z}$ ✓

d) Das war eben unser Ansatz, nämlich der Separationsansatz.

$$A(x) \cdot A(y) \cdot A(z) = \cos(k_x x)\cos(k_y y)\cos(k_z z) = \frac{1}{G} \cdot A(x,y,z)$$

$$\Delta A(x,y,z) = G \cdot (-1) \cdot (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \cdot A(x)A(y)A(z) = -(k_x^2+k_y^2+k_z^2) A(x,y,z)$$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} -(k_x^2+k_y^2+k_z^2) A(x,y,z) + k^2 A(x,y,z) = 0$$

$\Leftrightarrow$ löst DGL für $k = \sqrt{k_x^2+k_y^2+k_z^2} = \frac{\omega}{c}$ (Dispersionsrelation) ✓

e) Die Eigenfrequenzen erhalte ich aus der soeben gefundenen Dispersionsrelation, indem ich weiß, dass k_x, k_y und k_z diskrete Werte annehmen, da $n_x, n_y, n_z \in \mathbb{Z}$.

$$n_x = l, \quad n_y = m, \quad n_z = n$$

$$\Rightarrow \omega_{l,m,n} = c \cdot \sqrt{\left(\frac{\pi}{b} l\right)^2 + \left(\frac{\pi}{d} m\right)^2 + \left(\frac{\pi}{h} n\right)^2} = c \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l^2}{b^2} + \frac{m^2}{d^2} + \frac{n^2}{h^2}}$$ ✓

f) Sei $b = h = d =: a$

$$\rightarrow \omega_{1,0,0} = c\pi \frac{1}{a} = \omega_{0,1,0} = \omega_{0,0,1}$$

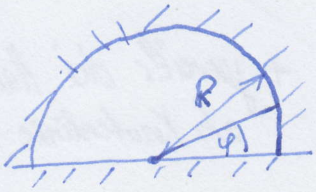
dreifach entartete Eigenfrequenz

Ich vermute, das gibt dann eine Knotenebene, die den Würfel diagonal schneidet, also die Raumdiagonale beinhaltet. ✓

5/5

A2

a)



Die Auslenkung am Rand muss verschwinden!

$\Rightarrow U(R, \varphi, t) = 0$

$U(r, \varphi = 0, t) = 0$ ✓

$U(r, \varphi = \pi, t) = 0$

b) $J_m(k \cdot R) \overset{!}{=} 0 \quad \forall m, k$

$A \cdot \sin(0) + B\cos(0) = 0 \Rightarrow \boxed{B = 0}$

Dies ist die einzig echte Änderung gegenüber der Vollkreismembran

$A \cdot \sin(m\pi) = 0 \Rightarrow m \in \mathbb{Z}$

(ist sowieso erfüllt)

Sei $\alpha_{m,n}$ die n-te NST der Besselfkt. $\quad \hookrightarrow n = 1, 2, 3, \dots, \infty \quad ; n \in \mathbb{N}$

Dann muss $k \cdot R = \alpha_{m,n}$ gelten $\Rightarrow k = \frac{\alpha_{m,n}}{R} =: k_{m,n}$ ✓

c) Mit der Dispersionsrelation $k_{m,n} = \frac{\omega_{m,n}}{c}$ lassen sich die Eigenmoden aufschreiben:

$$u_{m,n}(r, \varphi, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} J_m(k_{m,n} r)\left(A_{m,n} \sin(m\varphi)\right)\left(C_{m,n} \sin(\omega_{m,n} t) + D_{m,n} \cos(\omega_{m,n} t)\right)$$

$m = 0, 1, \dots \infty$

$n = 1, 2, \dots \infty$

Die allgemeine Lösung folgt aus Superposition:

$$U(r, \varphi, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{m,n}(r, \varphi, t)$$ ✓

Mit einem Anfangswertproblem $(t = 0)$ folgen die Konstanten.

Im Übrigen ist $U(r, \varphi, t) = 0$ für $\varphi \in [\pi, 2\pi]$ und vielfachen dieses Intervalls. Diese Randbedingung lässt sich nicht direkt mit den 2π-periodischen sin und cos Fkt. darstellen. Hier könnte auf eine π-Periodizität zurückgegriffen werden, indem ~~$A_{m,n} = (-1)_n$~~ um den $\sin(m\varphi)$-Term Betragsstriche gesetzt werden. 4

per. Fortsetzung in $[\pi, 2\pi]$ kann ignoriert werden, vgl. z.B. Gitarrensaite

d) Für die Darstellungen benutzen wir der Einfachheit halber Anfangsbedingungen, sodass

$$C_{m,n} \sin(\omega_{m,n} t) + D_{m,n} \cos(\omega_{m,n} t) = 1 \quad \forall m, n \quad \text{für } t = 0$$

Die $\alpha_{m,n}$ können numerisch ermittelt werden. Es folgt:

m	n=1	n=2	n=3
J_1	3,832	7,016	10,174
J_2	5,135	8,417	11,620
J_3	6,380	9,761	13,015

Für $m = 0$ existiert keine Schwingung, da $\sin(m\varphi) = 0$. (weil $B = 0$)

Die Abbildung beziehen sich auf $t = 0$!

Der Radius beträgt 0,5 m und auch wird $A_{m,n} = 1$ gesetzt.

Es bilden sich $m-1$ radiale Knotenlinien $\rightarrow$ gut zu sehen bei $1,1 \rightarrow 2,1 \rightarrow 3,1$

$m=1$ $m=2$ $m=3$

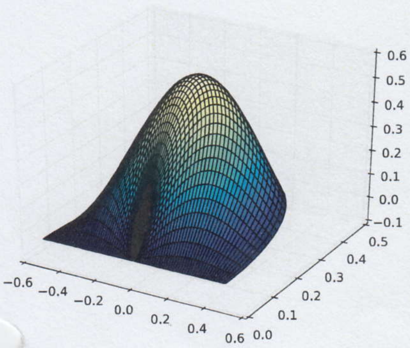
+ jeweils die Halbierende ebenfalls als Knotenlinie

und $n-1$ konzentrische, kreisförmige Knotenlinien $\rightarrow$ gut zu sehen bei $1,1 \rightarrow 1,2 \rightarrow 1,3$

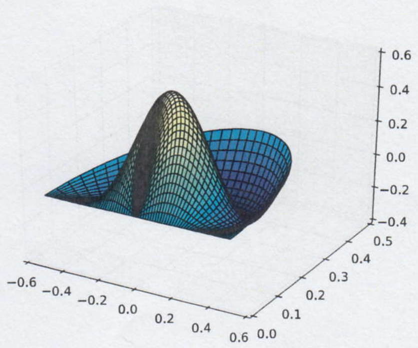
$n=1$ $n=2$ $n=3$

+ jeweils der runde Rand der halben Trommel ebenfalls als Knotenlinie

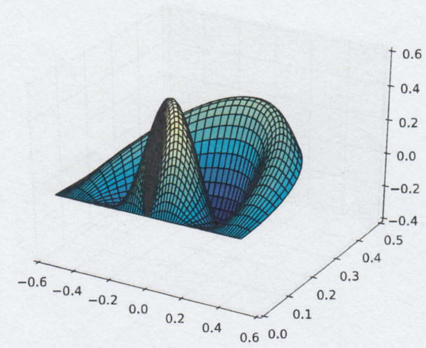
5/5



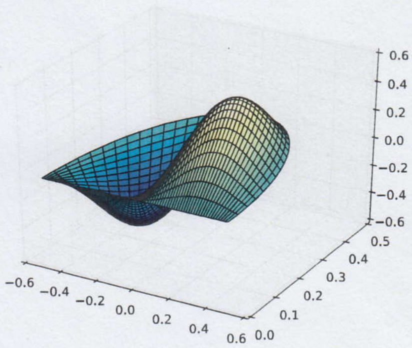
$u_{1,1}$



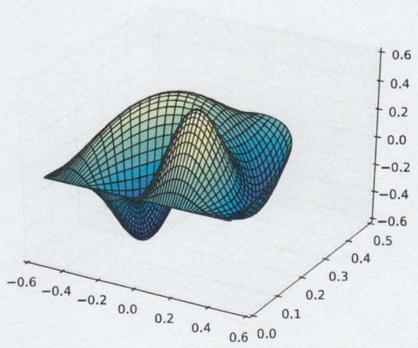
$u_{1,2}$



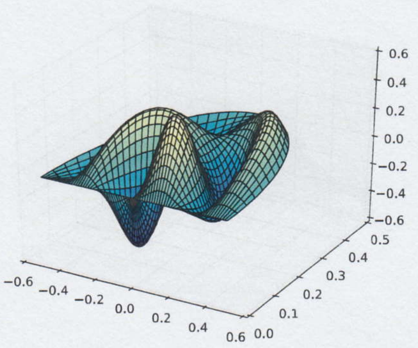
$u_{1,3}$



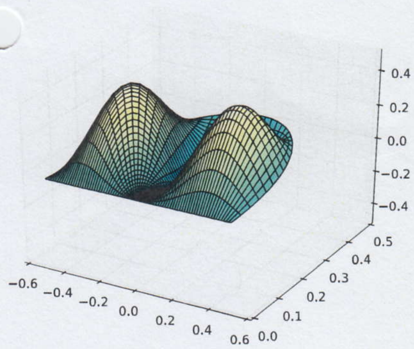
$u_{2,1}$



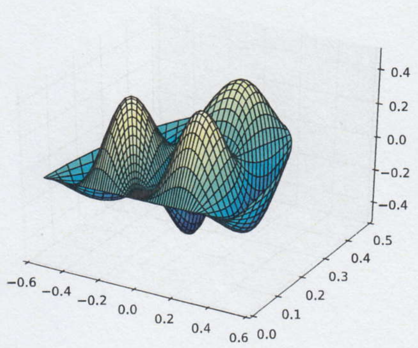
$u_{2,2}$



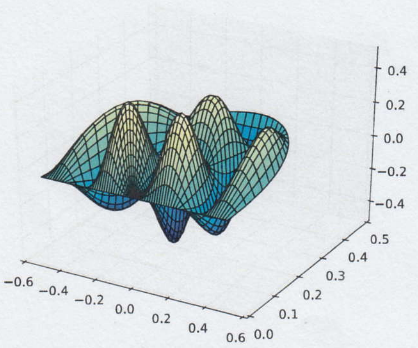
$u_{2,3}$



$u_{3,1}$



$u_{3,2}$



$u_{3,3}$

Abbildung 1: Eigenmoden der halben Trommel.

Aufgabe 3

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \qquad g_1 = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial r}\right| = \left|\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}\right| = 1$$

$$g_2 = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}\right| = \left|\begin{pmatrix} -r\sin(\varphi) \\ r\cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{r^2} = r$$

$$g_3 = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial z}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = 1$$

$$\Longrightarrow \Delta\phi = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(r\frac{\partial}{\partial z}\right)\right]\phi$$

$$= \left(\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(r\frac{\partial}{\partial z}\right)\right)\right)\phi \quad ✓$$

Bearbeitung durch Zurückführung auf Bessel-DGl (siehe b)

b) $\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)u = 0$

$$\Longleftrightarrow \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}u - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)u - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}u - \frac{\partial^2}{\partial z^2}u = 0$$

Seperationsansatz:

$$u(r,\varphi,z,t) = A(r,\varphi)\cdot B(z)\cdot C(t)$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{c^2}A\cdot B\frac{\partial^2}{\partial t^2}C - B\cdot C\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\cdot A - B\cdot C\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}A$$

$$- A\cdot C\cdot\frac{\partial^2}{\partial z^2}B = 0 \quad |:u = A\cdot B\cdot C$$

$$\Longleftrightarrow \underbrace{\frac{1}{c^2}\frac{1}{C(t)}\frac{\partial^2}{\partial t^2}C(t)}_{=-k^2} \underbrace{- \frac{1}{A}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)A - \frac{1}{A}\cdot\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}A}_{=k_{r\varphi}^2}$$

$$\underbrace{-\frac{1}{B}\frac{\partial^2}{\partial z^2}B(z)}_{=k_z^2} = 0$$

$$\Longrightarrow k^2 = k_{r,\varphi}^2 + k_z^2$$

$$\longrightarrow k_{r,\varphi}^2 = -\frac{1}{A}\cdot\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}A - \frac{1}{A}\frac{\partial^2}{\partial r^2}A - \frac{1}{A}\cdot\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}A \quad \Big| r^2\cdot A\cdot(-1)$$

$$\Longleftrightarrow k_{r,\varphi}^2 A(r,\varphi) + r\frac{\partial}{\partial r}A(r,\varphi) + r^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}A(r,\varphi) + \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}A(r,\varphi) = 0$$

mit den Seperationsansatz $A(r,\varphi) = R(r)\cdot\Phi(\varphi)$

$$\Longrightarrow k_r^2 r^2 + r\cdot\frac{R'(r)}{R(r)} + r^2\cdot\frac{R''(r)}{R(r)} + \underbrace{\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}}_{=-m^2} = 0$$

$$\Longrightarrow k_r^2 r^2 + r\frac{R'(r)}{R(r)} + r^2\frac{R''(r)}{R(r)} - m^2 = 0$$

$$\Longleftrightarrow k_r^2 R(r) + \frac{1}{r}R'(r) + R''(r) - \frac{m^2}{r^2}R(r) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \frac{1}{r}R'(r) + R''(r) + \left(k_r^2 - \frac{m^2}{r^2}\right)R(r) = 0 \quad \text{Bessel}$$

$$U(r,\varphi,z,t) = \Phi_0 \sin(m\varphi + \delta_\varphi) \cdot J_m(k_r \cdot r) \cdot \beta_0 \sin(k_z \cdot z + \delta_B)$$
$$\cdot\, C_0 \sin(\omega t + \delta_t)$$ ✓

mit $k^2 = k_{r,\varphi}^2 + k_z^2$, $\omega = k \cdot c$ $\quad m \in \mathbb{Z}$

Randbed.:

Gedackt: $\partial_z U(r,\varphi, z=0,t) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \sin(k_z \cdot 0 + \delta_B) = 0 \Rightarrow \delta_B = 0$

$\partial_z U(r,\varphi, z=H,t) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \sin(k_z \cdot H) = 0 \Rightarrow k_z \cdot H = n_1 \pi$

$\Leftrightarrow \boxed{k_z = \frac{n_1 \pi}{H}}$

$U(r=R_{aup},\varphi,z,t) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow J_m(k_r \cdot R_{aup}) = 0$

$\Rightarrow k_r \cdot R_{aup} \stackrel{!}{=} \alpha_{m,n} \Rightarrow \boxed{k_r = \frac{\alpha_{m,n}}{R_{aup}}}$

$$\Rightarrow \omega_{n_1,n_2,m} = k \cdot c = c \cdot \sqrt{k_r^2 + k_z^2} = c \cdot \sqrt{\left(\frac{\alpha_{m,n}}{R_{aup}}\right)^2 + \left(\frac{n_1 \pi}{H}\right)^2}$$

Ungedackt:

$\partial_z U(r,\varphi, z=H,t) \stackrel{!}{=} \max$ $= 0$ $\Rightarrow \sin(k_z \cdot H) = \max$

$\Rightarrow k_z \cdot H = n_3 \cdot \frac{\pi}{2}$

$\Leftrightarrow \boxed{k_z = n_3 \cdot \frac{\pi}{2H}}$ für n_3 ungrade

$\Rightarrow n_3 = (2\tilde{n}_3 + 1),\ \tilde{n}_3 \in \mathbb{Z}$

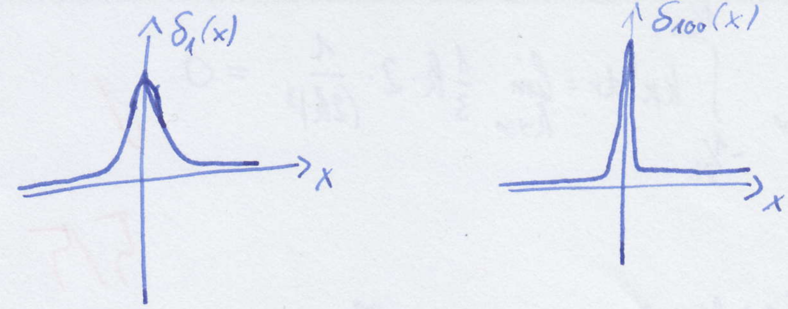
$$\Rightarrow \omega_{n_1,n_3,m} = k \cdot c = c \cdot \sqrt{k_r^2 \cdot k_z^2} = c \cdot \sqrt{\left(\frac{\alpha_{m,n}}{R_{aup}}\right)^2 + \left(\frac{n_3 \pi}{2H}\right)^2}$$ ✓

c) Beide werden genutzt, da auf gleicher Länge versch. Frequenzen erreicht werden. ✓

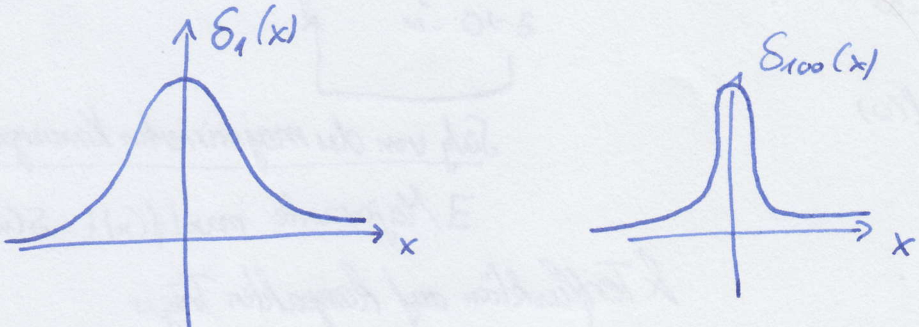
4,5/5

A4

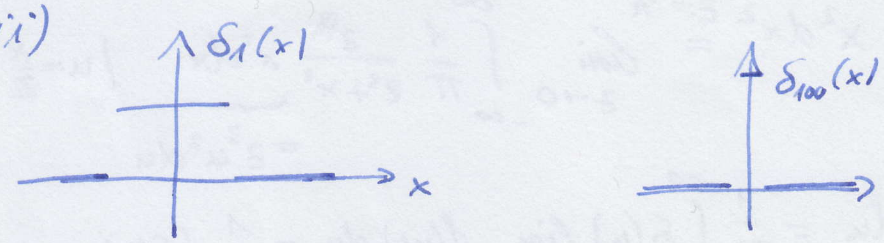
a) i)



ii)



iii)



b)

ii) $$\frac{1}{\pi k}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{k^{-2}+x^2}dx = \frac{k}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+k^2x^2}dx = \frac{1}{\pi}(\operatorname{atan} z)\Big|_{-\infty}^{\infty} = 1$$

i) $$\sqrt{\frac{k}{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2\frac{k}{2}}dx \underset{z=x\sqrt{\frac{k}{2}}}{=} \sqrt{\frac{k}{2\pi}}\sqrt{\frac{2}{k}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-z^2}dz \underset{\text{Gauß-Integral}}{=} 1$$

iii) $$\int_{-\infty}^{\infty}\delta_k\,dx = \int_{-1/2k}^{1/2k}k\,dx = kx\Big|_{-1/2k}^{1/2k} = 1$$

c) i) $$\lim_{k\to\infty}\sqrt{\frac{k}{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\underset{u}{x}\cdot\underbrace{xe^{-x^2\frac{k}{2}}}_{v'}dx \underset{\lim_{k\to\infty}}{=} \left(\cancel{-\frac{x}{k}e^{-x^2\frac{k}{2}}}\Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{k}\underbrace{\int 1\cdot e^{-x^2\frac{k}{2}}}_{=\frac{1}{k}\cdot\sqrt{\frac{2}{k}}\cdot\sqrt{\pi}\,=\,0}\right)$$

$\cancel{\ldots} \to 0$

$$v = -e^{-x^2}$$

ii) $$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{k^{-2}+x^2}dx = \lim_{k\to\infty}\frac{k}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{1+k^2x^2}dx \overset{u:=kx\quad du=k\,dx}{=} \frac{k}{\pi}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{k}du\,\frac{1}{k^2}\frac{u^2}{1+u^2}}$$

Das Integral existiert nicht. (Denn $\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{-1}{1+u^2}+1\right)du$ divergiert.

Ich müsste hier zwei verschiedene Grenzwerte miteinander vergleichen. Mathematika sagt, dass das 0 wird, aber die mathematische Begründung sehe ich nicht. [$\int\frac{u^2}{1+u^2}du = \operatorname{atan}(u)+u$ divergiert halt]

iii) $\lim_{k\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot \delta_k(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} \int_{-1/2k}^{1/2k} kx^2\,dx = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{3} k \cdot 2 \cdot \frac{1}{(2k)^3} = 0$ ✓

5/5

zu ii) **Idee**: $\lim_{k\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_k(x) f(x)\,dx = \ldots = \underbrace{\lim_{z\to 0} \int_{-\infty}^{\infty}}\delta(u) f(zu)\,du$

$= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(u) f(0)\,du = f(0)$

Satz von der majorisierten Konvergenz

$\exists$ Majorante $\max|f(x)| \cdot \delta(u)$ integrabel

& Testfunktion auf kompakten Träger

Konkret: $\lim_{k\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{1/k}{\frac{1}{k^2}+x^2} x^2\,dx^2 \overset{z:=1/k}{=} \lim_{z\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{z}{z^2+x^2} \underbrace{x^2\,dx}_{=z^3u^2\,du} \quad \Big| u := \frac{x}{z}$

$= \lim_{z\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \underbrace{\frac{1}{1+u^2}}_{\delta(u)} \underbrace{u^2 z^2}_{f(uz)}\,du = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(u) \underbrace{\lim_{z\to 0} f(uz)}_{=0}\,du = \frac{1}{\pi} \int \delta(u) \cdot 0\,du = 0$