A1| Ausgangspunkt: kanonische Trafo

Blatt 7

Marius Hetting, Matthias Jaeger

$$\frac{dF}{dt} = \sum_k p_k \dot{q}_k - \sum_k P_k \dot{Q}_k - (H(q_k, p_k, t) - \tilde{H}(Q_k, P_k, t))$$ ✓

tot. Differential: $\frac{d}{dt} F_3 = \frac{d}{dt} F_3(p_k, Q_k, t) = \frac{\partial F_3}{\partial p_k} \cdot \dot{p}_k + \frac{\partial F_3}{\partial Q_k} \cdot \dot{Q}_k + \frac{\partial F_3}{\partial t}$ ✓

A1	A2	A3	A4	Σ
5	4,5	2	3,5	15

Koeff. vgl.: $\Rightarrow \frac{\partial F_3}{\partial Q_k} = -P_k$ ✓ $\frac{\partial F_3}{\partial t} = \tilde{H} - H$ ✓ $(*)$

und kleine Variationsrechnung $\delta \int_{t_1}^{t_2} p_k \dot{q}_k \, dt = \delta [p_k q_k]_{t_1}^{t_2} - \delta \int_{t_1}^{t_2} \dot{p}_k q_k \, dt$

$\rightarrow 0$ da an den Rändern des Intervalls nicht variiert wird

$$\rightarrow \frac{dF}{dt} = \sum_k q_k \dot{p}_k - \sum P_k \dot{Q}_k - (H - \tilde{H})$$

$$\Rightarrow \frac{\partial F_3}{\partial p_k} = -q_k \quad ✓ \quad (**)$$

Jetzt fordern wir, und das ist die Ausgangssituation der Hamilton-Jacobi-Gl.en, dass die neuen Koordinaten P, Q zyklisch sind, d.h.

$$\frac{\partial \tilde{H}(P, Q, t)}{\partial P} = 0 \qquad \frac{\partial \tilde{H}(P, Q, t)}{\partial Q} = 0$$

Außerdem soll auch $\tilde{H}$ nicht von der Zeit abhängen. Diese Forderungen werden von einem konstanten $\tilde{H}$ erfüllt. Genauer gesagt auch von $\tilde{H} = 0$!

$$\tilde{H} = 0 \overset{(*)}{\Rightarrow} H(q_k, p_k, t) + \frac{\partial F_3}{\partial t} = 0$$

$$\overset{(**)}{\Leftrightarrow} \boxed{H\left(-\frac{\partial F_3}{\partial p_k}, p_k, t\right) + \frac{\partial F_3(p_k, Q_k, t)}{\partial t} = 0} \quad \text{I}$$

$(*)$ und $(**)$ sind die von F_3 zu erfüllenden DGLen. ✓

Hamilton-Jacobi-Gl. für $F_3(p_k, Q_k, t)$

b) $\downarrow g$, $\uparrow q$

$$\frac{\partial F_3}{\partial t} + \frac{p^2}{2m} - mg \frac{\partial F_3}{\partial p} = 0 \quad ✓$$

Ansatz: $F_3(p, t) = F_{3,1}(p) + F_{3,2}(t)$

$$\rightarrow \frac{\partial F_{3,2}(t)}{\partial t} + \frac{p^2}{2m} - mg \frac{\partial F_{3,1}(p)}{\partial p} = 0 \quad ✓$$

wähle $F_{3,2}(t) = \overset{Q}{\overset{\shortparallel}{\alpha}} \cdot t$ Warum?

$$\Rightarrow \alpha + \frac{p^2}{2m} - mg \frac{\partial F_{3,1}(p)}{\partial p} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{mg} \int \left(\alpha + \frac{p^2}{2m}\right) dp = \int \underbrace{\frac{\partial F_{3,1}(p)}{\partial p}}_{= \frac{d}{dp} F_{3,1}(p)} dp = F_{3,1}(p)$$

$$\Rightarrow F_{3,1}(p) = \frac{1}{mg}\left(\alpha p + \frac{p^3}{6m} + C'\right) \qquad \text{und} \quad q = -\frac{\partial F_3}{\partial p} = -\frac{1}{mg}\left(\alpha + \frac{p^2}{2m}\right)$$

$$F_3 = F_3(\alpha, p_k, t) = \frac{1}{mg}\left(\alpha p + \frac{p^3}{6m}\right) + \alpha t + C$$ ✓

$$\frac{\partial F_3}{\partial Q_k} = \frac{\partial F_3}{\partial \alpha} = \frac{1}{mg} p + t = -P$$ ✓

$$\Rightarrow P = \beta = -\frac{1}{mg} p - t \underset{\text{nach Forderung}}{=} \text{konst.} \quad \Leftrightarrow p = -mg(\beta + t)$$

$$\Rightarrow q = -\frac{\alpha}{mg} - \frac{g}{2}(\beta + t)^2$$

$$p(t=0) = mv_0 \Rightarrow \beta = -\frac{v_0}{g}$$

$$q(t=0) = 0 \Leftrightarrow 0 = -\frac{\alpha}{mg} - \frac{v_0^2}{2g} \Rightarrow \alpha = -\frac{mv_0^2}{2}$$

$$\Rightarrow p(t) = mv_0 - mgt$$ ✓

$$q(t) = \cancel{\frac{v_0^2}{2g}} - \frac{g}{2}\cdot\left(\cancel{+\frac{v_0^2}{g^2}} - 2\frac{v_0}{g}t + t^2\right) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$ ✓

looking good!

Argumentation bei b) → Übung ; sonst schön

5/5

Aufgabe 2: Kanonische Transformation II

a)

$$x_{zyl.} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \qquad |\dot{x}_{zyl}|^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2$$

$$H = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + V(r)$$

$$H = \frac{1}{2} m \left(P_r^2 + \frac{P_\varphi^2}{r^2} + P_z^2 \right) + V(r)$$ ✓

b)

Wir nehmen für die Koordinaten an:

$$\tilde{r} = r = \frac{\partial F_2}{\partial p_{\tilde{r}}} \checkmark \rightarrow \int r \, d p_{\tilde{r}} = F_2 = r \cdot \tilde{p}_r + f(\varphi, z, p_{\tilde{\varphi}}, p_{\tilde{z}}) \quad (1)$$ aber ok

$$\tilde{\varphi} = \varphi - \omega t = \frac{\partial F_2}{\partial p_{\tilde{\varphi}}} \checkmark \rightarrow F_2 = \varphi \cdot \tilde{P}_\varphi - \omega t \, p_{\tilde{\varphi}} \quad (2)$$

$$\tilde{z} = z = \frac{\partial F_2}{\partial p_{\tilde{z}}} \checkmark \rightarrow F_2 = z \cdot \tilde{P}_z \quad (3)$$

(1), (2), (3) ergeben sich durch weitere Annahmen:

$$P_r = \frac{\partial F_2}{\partial r} = \tilde{P}_r \quad \text{und} \quad P_\varphi = \frac{\partial F_2}{\partial \varphi} = \tilde{P}_\varphi \quad (4)$$

$$P_z = \frac{\partial F_2}{\partial z} = \tilde{P}_z$$ ✓

(4) gilt nach

$$T = \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2 \quad \text{mit der Annahme } T = \tilde{T} \text{ folgt}$$

$$\tilde{T} = \frac{1}{2} I \dot{\tilde{\varphi}}^2 = \frac{1}{2} I (\dot{\tilde{\varphi}}^2 + 2\omega\dot{\tilde{\varphi}} + \omega^2)$$

$$\tilde{P}_\varphi = \frac{\partial}{\partial \dot{\tilde{\varphi}}} \tilde{T} = I(\dot{\tilde{\varphi}} + \omega) = \tilde{P}_\varphi$$

Somit ergibt sich für F_2 aus (1), (2), (3)

$$F_2 = \tilde{P}_k q_k - \omega t \, p_{\tilde{\varphi}} + f(\varphi)$$

Was ist $\tilde{p}_k, q_k$? Fehlt da eine Summe?

Wähle in Ermangelung weiterer Bedingungen $f(\varphi) = 0$

nehmt (1), (2) und (3) und ihr habt F_2!

$$\Rightarrow F_2 = \tilde{P}_k q_k - \omega t \, p_{\tilde{\varphi}}$$

c)

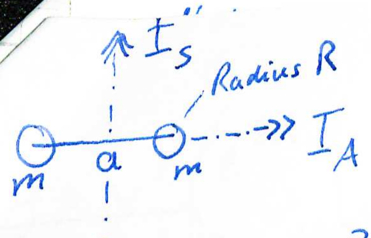
$$K = H(q_k, \tilde{p}_k, t) + \frac{\partial F_2}{\partial t} = \frac{p_{\tilde{r}}^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} + p_{\tilde{z}}^2}{2m} + V(r) - \omega p_{\tilde{\varphi}}$$ ✓

Der ~~Term~~ Term $\omega p_{\tilde{\varphi}}$ hat die Einheit einer Energie. ✓

Und bei einem sich drehenden Koordinatensystem treten Scheinkräfte auf → Energieterm

4,5 / 5

1a



Zunächst Trägheitsmoment einer Kugel

$$I_{\alpha\beta} = \int_{\mathbb{R}^3} dV \rho(\vec r)\left(\vec r^{\,2} \delta_{\alpha\beta} - x_\alpha x_\beta\right)$$

$\rho(\vec r) = \rho = \frac{M}{V}$

z.B. I_{xx}, denn $I_{xx} = I_{yy} = I_{zz}$ (symmetrie)

$$\to I_{xx} = \underbrace{\frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3}}_{\frac{m}{V}} \cdot \int_V dV \left(x^2+y^2+\underbrace{z^2-z^2}_{0}\right)$$ das ist aber I_{zz} ··

Kugelkoord. $x = r\cos\varphi\sin\Theta$, $y = r\sin\varphi\sin\Theta$

$$\to I_{xx} = \frac{m}{V}\cdot \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} r^2\sin^2\Theta(1)\, r^2\sin\Theta\, dr\, d\Theta\, d\varphi$$

$$= \frac{m}{V}\cdot 2\pi\frac{R^5}{5}\cdot\int_0^{\pi}(1-\cos^2\Theta)\sin\Theta\, d\Theta$$

$u := \cos\Theta \to du = -\sin\Theta\, d\Theta$

$$= \frac{m\cdot 3}{4\pi R^3}\cdot 2\pi\frac{R^5}{5}\cdot\int_1^{-1}(u^2-1)\,du = \frac{3}{5}mR^2\cdot\frac{1}{2}\cdot\underbrace{\left(\frac{u^3}{3}-u\right)\Big|_1^{-1}}_{=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=\frac{4}{3}} = \frac{2}{5}mR^2$$ ✓

schön!

$I_A = 2\cdot I_K$ offensichtlich $= \frac{4}{5}mR^2$

Satz von Steiner

$$I_S = 2\cdot I_K + 2\cdot m\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{4}{5}mR^2+\frac{1}{2}ma^2$$ ✓

b) $I_A = I_3 \to I_S = I_2 = I_1$ ✓

Euler-Gl.:

$$I_1\dot\omega_1 + (I_3-I_2)\omega_3\omega_2 = T_1 \quad \text{Ia}$$
$$I_2\dot\omega_2 + (I_1-I_3)\omega_1\omega_3 = T_2 \quad \text{IIa}$$
$$I_3\dot\omega_3 + (I_2-I_1)\omega_1\omega_2 = T_3 \quad \text{IIIa}$$

hier: freier Kreisel $\to \vec T = 0$ ✓ ; $I_3 - I_2 = \frac{4}{5}mR^2 - \left(\frac{4}{5}mR^2+\frac{1}{2}ma^2\right) = -\frac{1}{2}ma^2 = -(I_1-I_3)$

$\Rightarrow$ gezeigt mit $\gamma = \frac{I_3-I_2}{I_1}$ ✓ $= \frac{-\frac{1}{2}a^2}{\frac{4}{5}R^2+\frac{1}{2}a^2}$

$\Rightarrow \dot\omega_1 + \gamma\omega_3\omega_2 = 0$ (I) ✓, $\dot\omega_2 - \gamma\omega_1\omega_3 = 0$ (II) ✓, $\dot\omega_3 = 0$ (III) ✓

c) Bilde $\frac{d}{dt}(I)$: $\ddot\omega_1 + \gamma\cdot(\cancel{\dot\omega_3\omega_2} + \omega_3\dot\omega_2) = 0$ (III) $\Rightarrow \omega_3 = \text{konst.}$

(II) $\Leftrightarrow \ddot\omega_1 + \gamma\cdot\omega_3\cdot\gamma\omega_1\omega_3 = 0 \Leftrightarrow \ddot\omega_1 + \gamma^2\overbrace{\omega_3^2}^{\text{konst.}}\cdot\omega_1 = 0$ (IV) ✓

Die DGL (IV) ist ein Harmon. Oszillator mit der Lösung

$$\omega_1(t) = A \cdot \sin(|\gamma \cdot \omega_3| t + \varphi_0)$$

Wieso nun $\omega_3 = \omega_0$ sein soll, ist mir nicht ersichtlich, denn $|\vec{\omega}| = \omega_0 = \sqrt{\omega_3^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2} \geq \omega_3$

und $\omega_0 = \omega_3 \Leftrightarrow \underbrace{\omega_1 = \omega_2 = 0}$

dies ist aber nur für $|\gamma\omega_3| \cdot t + \varphi_0 = n \cdot \pi$ erfüllt...

c) $$\begin{pmatrix} \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & -\gamma\omega_0 \\ \gamma\omega_0 & 0 \end{pmatrix}}^{A} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}$$

lin. DGL-System 1. Ordnung, homogen

Für ω_1 habt ihr bereits eine DGL, genauso geht das auch für ω_2

Bestimmung des Fundamentalsystems

$\hookrightarrow \underline{\underline{Y}} = (\vec{y}_1, \vec{y}_2)$

Ansatz: $\vec{y} = e^{\lambda t}\vec{v}$, $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow \vec{y}\,' = \lambda e^{\lambda t}\vec{v} \stackrel{!}{=} A\vec{y} = A e^{\lambda t}\vec{v} \Rightarrow \lambda\vec{v} = A\vec{v}$, also ist $\vec{v}$ Eigenvektor und λ ist Eigenwert

$\Rightarrow \det(A - \lambda \cdot \mathrm{Id}) = 0$

$\Leftrightarrow \lambda^2 + \gamma^2\omega_0^2 = 0 \rightarrow \lambda_{1/2} = \pm i \cdot \gamma\omega_0$

EV zu $\lambda_1 = i\gamma\omega_0$: $\begin{pmatrix} i\gamma\omega_0 & -\gamma\omega_0 \\ \gamma\omega_0 & i\gamma\omega_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \vec{v} = t_1\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \cdot t_1$

EV zu $\lambda_2 = -i\gamma\omega_0$: $\begin{pmatrix} -i\gamma\omega_0 & -\gamma\omega_0 \\ \gamma\omega_0 & -i\gamma\omega_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \vec{w} = t_2\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - i \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \vec{v}^* \cdot t_2$

$\Rightarrow \vec{y}_1 = e^{i\gamma\omega_0 t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} t_1$, $\vec{y}_2 = e^{-i\gamma\omega_0 t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} t_2$

$= \begin{pmatrix} \cos\gamma\omega_0 t + i\sin\gamma\omega_0 t \\ -\sin\gamma\omega_0 t + i\cos\gamma\omega_0 t \end{pmatrix} \cdot t_1$ $\quad = \begin{pmatrix} \cos\gamma\omega_0 t - i\sin\omega_0\gamma t \\ -\sin\gamma\omega_0 t - i\cos\gamma\omega_0 t \end{pmatrix} \cdot t_2$

Wir ersetzen diese durch die linear unabhängigen reellen Lösungen

$\psi_1(t) = \mathrm{Re}(\vec{y}_1) = \begin{pmatrix} \cos\gamma\omega_0 t \\ -\sin\gamma\omega_0 t \end{pmatrix} t_1$,

$\psi_2(t) = \mathrm{Im}(\vec{y}_2) = \begin{pmatrix} \sin\gamma\omega_0 t \\ \cos\gamma\omega_0 t \end{pmatrix} t_2$

$\rightarrow \underline{\underline{Y}} = \begin{pmatrix} \cos\gamma\omega_0 t \; t_1 & \sin\gamma\omega_0 t \; t_2 \\ -\sin\gamma\omega_0 t \; t_1 & \cos\gamma\omega_0 t \; t_2 \end{pmatrix}$

$$\vec{\omega} = \underbrace{\underline{\underline{Y}} \cdot \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}}_{} = \begin{pmatrix} \cos(\gamma\omega_0 t)\, t_1 e^{\lambda_1 t} + \sin(\gamma\omega_0 t)\, t_2 e^{\lambda_2 t} \\ -\sin(\gamma\omega_0 t)\, t_1 e^{\lambda_1 t} + \cos(\gamma\omega_0 t)\, t_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1(t) \\ \omega_2(t) \end{pmatrix}$$

das ist doch nun doppelt, oder? $\vec{Y}$ ist bereits Fundamentallösung

$$\omega_1(t=0) \stackrel{!}{=} \alpha = t_1$$

$$\dot{\omega}_2 = t_1 \cdot \left(-\gamma\omega_0 \cos(\gamma\omega_0 t) e^{\lambda_1 t} - \lambda_1 \sin(\gamma\omega_0 t) e^{\lambda_1 t}\right) + t_2 \cdot \left(-\gamma\omega_0 \sin(\gamma\omega_0 t) e^{\lambda_2 t} + \lambda_2 \cos(\gamma\omega_0 t) e^{\lambda_2 t}\right)$$

$$\dot{\omega}_2(0) \stackrel{!}{=} 0 = -t_1 \gamma\omega_0 + t_2 \lambda_2$$

$$\Rightarrow t_2 = \frac{t_1 \gamma\omega_0}{\lambda_2} = \frac{t_1 \gamma\omega_0}{-i\gamma\omega_0} = i \cdot t_1 = i \cdot \alpha$$

$$\Rightarrow \omega_1(t) = \alpha \cdot \left[\cos^2(\gamma\omega_0 t) + i\cos(\gamma\omega_0 t)\sin(\gamma\omega_0 t) + i \cdot \sin\gamma\omega_0 t \cos\gamma\omega_0 t + \underbrace{\sin^2(\omega_0 t)}_{=1-\cos^2}\right]$$

$$e^{\lambda_1 t} = e^{i\gamma\omega_0 t} = \cos\gamma\omega_0 t + i\sin\gamma\omega_0 t \quad \Big| \quad e^{\lambda_2 t} = e^{-i\gamma\omega_0 t} = \cos\gamma\omega_0 t - i\sin\gamma\omega_0 t$$

$$= \alpha \cdot (1 + \underbrace{2i \sin\gamma\omega_0 t \cos\gamma\omega_0 t}_{\text{Nutation}})$$

$$\omega_2(t) = \alpha \cdot \left[-\sin\cos - i\sin^2 + i \cdot \cos^2 + \sin\cos\right]$$

$$= \alpha \cdot (\underbrace{1 - 2i\sin^2(\gamma\omega_0 t)}_{})$$

d) Kurzer Blick auf die Uhr: 00:47 Uhr -.- gute Nacht.

Das kann ich nach der Rechnung auch gut verstehen

2/5

a) Wähle $\frac{1}{\cancel{2}m}\tilde{p}^2 = p^2 \rightarrow p = \frac{\tilde{p}}{\sqrt{m}}$, $q^2 = \frac{m\omega^2}{\cancel{2}}\tilde{q}^2 \Rightarrow q = \omega\sqrt{m}\,\tilde{q}$

$\tilde{p} \rightarrow \tilde{p} = \sqrt{m}\,p$ $\qquad \tilde{q} \rightarrow \tilde{q} = \frac{q}{\sqrt{m}\,\omega}$

das funktioniert nicht; zB: $\frac{\partial H_0}{\partial p} = \dot{q} = \sqrt{m}\,\omega\,\dot{\tilde{q}} = \sqrt{m}\,\omega\frac{\partial \tilde{H}_0}{\partial \tilde{p}} = \sqrt{m}\,\omega\,\tilde{p}\cdot\frac{1}{m} = \omega\tilde{p}\frac{1}{\sqrt{m}} = p\omega \neq \frac{\partial H_0}{\partial p}$ ↯

b) $H(p,q) = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}q^2 + \frac{g}{4}q^4$, $0 < g \ll 1$

Kanonische Gl.:

$$\frac{\partial H}{\partial q} = -\dot{p} \; ✓ \quad , \quad \frac{\partial H}{\partial p} = \dot{q} \; ✓$$

$$\Leftrightarrow \quad q + gq^3 = -\dot{p} \qquad \mathrm{I}$$
$$p = \dot{q} \qquad \mathrm{II}$$

Ansatz: $q(t) = q_0(t) + g q_1(t) + O(g^2)$ ✓, $p(t) = p_0(t) + g p_1(t) + O(g^2)$ ✓

$\Rightarrow \dot{p} = \ddot{q} = \ddot{q}_0(t) + g\ddot{q}_1(t) + O(g^2)$ einsetzen in I: ($O(g^2)$ wegstreichen)

$$q_0 + gq_1 + g\left(q_0^3 + \cancel{3q_0g^2q_1} + \cancel{3q_0^2gq_1} + \cancel{g^3q_1^3}\right) = -\ddot{q}_0 - g\ddot{q}_1$$

Koeffvgl. mit beliebigem g : $q_0 = -\ddot{q}_0$ ✓ (dimensionslos und so) $\quad (g=0)$ $\underline{\mathrm{III}}$

$$\Rightarrow \quad q_0^3 + q_1 = -\ddot{q}_1 \; ✓ \qquad (g \neq 0) \quad \underline{\mathrm{IV}}$$

Take a look at $\underline{\mathrm{III}}$: Hier steht n harmon. Oszillator, $\rightarrow q_0 = A\cos(\varphi + t)$, einsetzen in $\underline{\mathrm{IV}}$:

$$q_1 + \underbrace{\left(A'\cos^3(t+\varphi)\right)}_{= A'\cdot\frac{1}{4}(\cos 3t + 3\cos t)} = -\ddot{q}_1 \; ✓$$

sieht schon ähnlich aus, ok, jetzt setzen wir einfach die angeg. Lsg. in $\underline{\mathrm{IV}}$ und $\underline{\mathrm{III}}$ ein!

$$\ddot{q}_1 = -\frac{a^3}{32}\left(3^2\cos(3t) - \cos t\right) - \frac{3a^3}{8}(2\cos t - t\sin t) \; ✓$$
$$= -\frac{8}{32}a^3\cos(3t) - \frac{6a^3}{8}\cos t - q_1 \qquad \text{einsetzen in } \underline{\mathrm{IV}}!$$

$$\cancel{+}\frac{1}{4}a^3\cdot\underbrace{(\cos 3t + 3\cos t)}_{=\cos^3 t} \cancel{-q_1} = \cancel{-q_1} \cancel{+} q_0^3$$

$$\Rightarrow q_0 = a\cos t$$

Dies löst auch $\underline{\mathrm{III}}$, damit ist $q_1(t)$ wie angeg. Lösung der DGL. Unschön ist der Term $t\cdot\sin(t)$, der einen linearen Anstieg ~~der~~ von $\tilde{q}$ mit der Zeit t liefert. ✓

c) $\tilde{H} = \tilde{H}(Q,P) = H(-\frac{\partial F_3}{\partial p}, p, t) + \frac{\partial F_3(Q,p,t)}{\partial t}$

$= \tilde{H}(Q, -\frac{\partial F_3(Q,p,t)}{\partial Q})$

Gl. (12)

$$\frac{\partial F_3}{\partial *} \begin{cases} p: & -Q + g(3c_1 Q p^2 + c_2 Q^3) \\ Q: & -p + g(c_1 p^3 + 3c_2 Q^2 p) \\ t: & 0 \end{cases}$$

- $H(-\frac{\partial F_3}{\partial p}, p) = \frac{p^2}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F_3}{\partial p}\right)^2 + \frac{g}{4}\left(\frac{\partial F_3}{\partial p}\right)^4$ (*)

$= \frac{p^2}{2} + \frac{1}{2}(Q^2 - 2Qg(3c_1Qp^2 + c_2Q^3) + g^2(3c_1Qp^2 + c_2Q^3)^2) + \frac{g}{4}Q^4$

$\approx \frac{p^2}{2} + \frac{1}{2}(Q^2 - 2Qg(3c_1Qp^2 + c_2Q^3) + \frac{g}{4}Q^4$ I

- $\tilde{H}_0(Q, -\frac{\partial F_3}{\partial Q}) = \frac{1}{2}(Q^2 + (p^2 - 2pg(c_1p^3 + 3c_2Q^2p) + g^2(c_1p^3 + 3c_2Q^2p))$

$\approx \frac{1}{2}(Q^2 + p^2 - 2pg(c_1p^3 + 3c_2Q^2p))$

- $\tilde{H}(Q, -\frac{\partial F_3}{\partial Q}) = $ ——— " ——— $+ g\alpha \cdot \frac{1}{4}(Q^4 + 2Q^2p^2 + p^4 + \mathcal{O}(g^2))$

$\tilde{H}(Q,p) \approx \frac{Q^2}{2} + \frac{p^2}{2} - g(c_1p^4 + 3c_2Q^2p^2) + \frac{g\alpha}{4}(Q^4 + 2Q^2p^2 + p^4)$ II

(*): $\frac{g}{4}\left(\frac{\partial F_3}{\partial p}\right)^4 = \frac{g}{4}(Q^4 + \mathcal{O}(g)) \approx \frac{g}{4}Q^4$

Jetzt machen wir Koeff.vgl. zwischen I und II, denn hier müssen die Koeffizienten von 1.: p^2Q^2, 2.: p^4, 3.: Q^4 übereinstimmen, was uns die benötigten 3 Gleichungen für α, c_1 und c_2 liefert:

$I \leftrightarrow II$

p^2Q^2: $-6\cancel{g}c_1 = -3^{6}\cancel{g}c_2 + \frac{1}{2}g\alpha \Rightarrow c_2 = \frac{6c_1 + \frac{1}{2}\alpha}{36} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$

p^4: $0 = -gc_1 + g\frac{\alpha}{4} \Rightarrow c_1 = \frac{1}{4}\alpha$

Q^4: $g/4 - c_2 \cdot g = g\alpha/4 \Rightarrow \alpha = 1 - 4c_2$

Schade! Sonst schön

$$\frac{\partial H(P,Q)}{\partial P} = \dot{Q} \iff P + g\left((P^2+Q^2)\cdot P\right) = \dot{Q} \qquad \text{III}$$

$$P\cdot(1+g\cdot H_0(Q,P)) = \dot{Q}$$

$$\frac{\partial H(P,Q)}{\partial Q} = -\dot{P} \iff Q + g\left((P^2+Q^2)Q\right) = -\dot{P} \qquad \text{IV}$$

$$Q\cdot(1+g\cdot H_0(Q,P)) = -\dot{P}$$

Ansatz (6), (7)

↪ IV: $-\dot{P}_0 - g\cdot\dot{P}_1 = Q_0 + gQ_1 + g\cdot Q_0\cdot(P_0^2+Q_0^2+\mathcal{O}(g)) + \mathcal{O}(g^2)$

$\approx Q_0 + gQ_0(P_0^2+Q_0^2) + gQ_1$

Koeff vgl. $\dot{P}_0 = -Q_0$ $\underline{\text{V}}$ $\quad \dot{P}_1 = -Q_0(P_0^2+Q_0^2) + Q_1$ $\underline{\text{VII}}$

↪ $\underline{\text{III}}$: äquivalent folgt: $\dot{Q}_0 = P_0$ $\underline{\text{VI}}$ und $\dot{Q}_1 = P_0(P_0^2+Q_0^2) + P_1$

---

mal ohne den „g-Ansatz": mit $H_0(Q,P) = \text{const.}$

$$\Rightarrow \frac{\partial H}{\partial P} = \dot{Q} = P\cdot(1+2g\cdot H_0) \qquad \underline{\text{III}}$$

$$\frac{\partial H}{\partial Q} = -\dot{P} = Q(1+2gH_0) \qquad \underline{\text{IV}}$$

(⇐) $\frac{d}{dt}H_0 = 0$

$$\ddot{Q} = \dot{P}\cdot(1+2gH_0) = -Q\cdot(1+2gH_0)^2 \qquad (✓)$$

$$\ddot{Q} + Q\cdot\underbrace{(1+gH_0)^2}_{\omega^2} = 0 \qquad (✓)$$

$$-\ddot{P} = \dot{Q}(1+2gH_0) = -P\cdot(1+2gH_0)^2$$

harmon. Oszillator

$$\ddot{P} + P(1+2gH_0)^2 = 0$$

$\Rightarrow Q(t) = A_1\cos(\omega t) + B_1\sin(\omega t)$, $P(t) = A_2\cos(\omega t) + B_2\sin(\omega t)$

Rücktrafo

mit $c_1 = 1/4$, $c_2 = 2/3$

$$q = -\frac{\partial F_3}{\partial p} = +Q - g\left(\frac{3}{4}Qp^2 + \frac{2}{3}Q^3\right) \qquad \underline{\text{V}} \qquad (✓)$$

$$P = -\frac{\partial F_3}{\partial Q} = p - g\left(\frac{1}{4}p^3 + 2Q^2p\right) \qquad \underline{\text{VI}}$$

~~Koeff. vgl. liefert: $q = Q$; $p = P$~~ aus $gp = gP - g^2(\dots)$ $\Rightarrow$ ersetze p^2 durch P^2

~~$\frac{3}{4}Qp^2 + \frac{1}{4}Q^3 = 0$; $\frac{1}{4}p^3 + \frac{3}{4}pQ^2 = 0$~~

Wir machen erneut den Ansatz der Näherung in lin. Ordn. von g:

$$q(t) = q_0(t) + g q_1(t) + \cancel{O(g^2)}$$
$$p(t) = p_0(t) + g p_1(t) + \cancel{O(g^2)}$$

in $\underline{V}$: $q_0(t) + g \cdot q_1(t) = Q - g\left(\frac{3}{4}Q(p_0+gp_1)^2 + \frac{2}{3}Q^3\right)$ $\underline{VII}$

in $\underline{VI}$: $P = p_0 - g \cdot \left(\frac{1}{4}(p_0+gp_1)^3 + 2Q(p_0+gp_1)\right) + g \cdot p_1$ $\underline{VIII}$

Koeff.vgl. in g: $Q = q_0(t)$, $P = p_0(t)$ $(*)$

$\hookrightarrow$ • und aus $\underline{VIII}$: $p_1 = \frac{1}{4}(p_0^3 + p_0^2 g p_1) + 2Q^2(p_0 + gp_1)$

$Q = q_0$ $\Leftrightarrow$ $p_1 = p_1 \frac{1}{4} g \cdot (p_0^2 + 8q_0^2) + \frac{1}{4} \cdot p_0 \cdot (p_0^2 + 8q_0^2)$ 3,5/5

erneuter Koeff.vgl.: $p_0^2 + 8q_0^2 = 0$

und $p_1 = \frac{1}{4}p_0 \cdot (p_0^2 + 8q_0^2) = 0$

$\Rightarrow p(t) = p_0(t)$ $\Rightarrow$ $P = p_0 = p$

$\longrightarrow$ • und aus $\underline{VII}$:

$$q_1(t) = -\frac{3}{4}Q \cdot (p_0 + gp_1)^2 - \frac{2}{3}Q^3$$

$Q = q_0$, $p_1 = 0$ $\Leftrightarrow$ $q_1 = -\frac{3}{4}q_0 \cdot (p_0)^2 - \frac{2}{3}q_0^3$

$\Rightarrow q(t) = q_0(t) + g \cdot q_0 \cdot \left(-\frac{3}{4}p_0^2 - \frac{2}{3}q_0^2\right)$ (✓)

sollte bis auf Koeff. i.O. sein

Anf. Bed.: $p(0) = 0$: $P \overset{(*)}{=} p_0 = A_2 \cos(\omega t) + B_2 \sin(\omega t) = p$

$P(t=0) = 0 = A_2$ $\Rightarrow$ $p_0 = B_2 \sin \omega t = p(t)$

$q(0) = a$: $a = A_1 + g \cdot A_1 \cdot \left(0 - \frac{2}{3}A_1^2\right) \overset{\text{Koeff.vgl.???}}{\Rightarrow} A_1 = a$?

Irgendwas läuft hier falsch, ich vermute aber, dass der Unterschied zu b) in der Abwesenheit des expliziten t zu finden ist. richtig!

$\Rightarrow q(t) = (a\cos\omega t + B_1 \sin \omega t) \cdot \left[1 + g \cdot \left(-\frac{3}{4}B_2^2 \sin^2 \omega t - \frac{2}{3}(a\cos\omega t + B_1 \sin\omega t)^2\right)\right]$