A1 9/10 Blatt 1

Valentin Enders, Marius Hötting, Matthias Jaeger

a) $\vec{F}_L = q\vec{E} + q\vec{v}\times\vec{B}$ ✓ mit $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \partial_t\vec{A}$ ✓

$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$ ✓

$= q(-\vec{\nabla}\phi - \partial_t\vec{A} + \vec{v}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})$

Sollte auf etwas wirken.

$= e(-\vec{\nabla}\phi - \partial_t\vec{A} + \vec{\nabla}(\vec{v}\vec{A}) - \vec{A}(\vec{v}\vec{\nabla}))$

(q = e) Elektron

$= -e\vec{\nabla}(\phi - \vec{v}\vec{A}) - e\partial_t\vec{A} - e(\vec{v}\vec{\nabla})\vec{A}$ ✓

b) $\frac{d}{dt}\vec{A} = \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + (\vec{\nabla}\vec{A})\dot{\vec{r}}$ f $(\dot{\vec{r}}\nabla)\vec{A}$

Newton 2: $\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = -e\vec{\nabla}\phi + e\vec{\nabla}(\vec{v}\vec{A}) - e\partial_t\vec{A} - e(\vec{v}\vec{\nabla})\vec{A} = \vec{F}_L$

$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}(m\vec{v}) + e\partial_t\vec{A} + e(\vec{\nabla}\vec{A})\dot{\vec{r}} = e(\vec{\nabla}\vec{A})\dot{\vec{r}} - e(\vec{v}\vec{\nabla})\vec{A} - \vec{\nabla}\cdot(e\phi - e\vec{v}\vec{A})$

$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}(mv + \vec{A}e) = \underbrace{e(\vec{\nabla}\vec{A})\vec{v} - e(\vec{v}\vec{\nabla})\vec{A}}_{\text{die Terme sind m. E. nach nicht gleich!}} - \vec{\nabla}(e\phi - e\vec{v}\vec{A})$ (✓)

gen. Impuls: $m\vec{v} + \vec{A}e = \vec{p}$ ✓

gen. Kraft: $-\vec{\nabla}(e\phi - e\vec{v}\vec{A})$ ✓

c) $mv + \vec{A}e = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v} \Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 + e\vec{v}\vec{A} + C(x)$ ✓ (I)

E-L.-Gl.: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\vec{v}}\right) - \underbrace{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\vec{r}}}_{\text{Potential}} = 0$

$\Rightarrow \mathcal{L} = -e\phi + e\vec{v}\vec{A} + D(\vec{v})$

|| durch Vergleich mit (I) $\frac{1}{2}m\vec{v}^2$

$\Rightarrow \mathcal{L} = -e\phi + e\vec{v}\vec{A} + \frac{1}{2}m\vec{v}^2$ ✓

d) $H = \vec{p}\vec{v} - \mathcal{L}(\vec{p},\vec{v})$; $\vec{p} = m\vec{v} + \vec{A}e \Rightarrow \vec{v} = \frac{1}{m}(\vec{p} - \vec{A}e)$ ✓ 4/5

$\mathcal{L} = -e\phi + e\vec{v}\vec{A} + \frac{1}{2m}(\vec{p}^2 - 2\vec{p}\vec{A}e + \vec{A}^2e^2)$

$\Rightarrow H = \frac{1}{2m}(\vec{p}^2 - \vec{A}^2e^2) + e\phi - e\frac{1}{m}(\vec{p}\vec{A} - \vec{A}^2e) = \frac{1}{2m}(\vec{p}^2 + \vec{A}^2e^2) - \frac{1}{m}e\vec{p}\vec{A} + e\phi = \underline{\underline{\frac{1}{2m}(\vec{p} - \vec{A}e)^2 + e\phi}}$ ✓

A2]

$$\frac{dA}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial A}{\partial p_k} \frac{\partial p_k}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial r_k} \frac{\partial r_k}{\partial t} \right) + \frac{\partial A}{\partial t}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial A}{\partial p_k} \dot{p}_k + \frac{\partial A}{\partial r_k} \dot{r}_k \right) + \frac{\partial A}{\partial t}$$

$$\dot{r}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}$$

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial r_k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(-\frac{\partial A}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial r_k} + \frac{\partial A}{\partial r_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} \right) + \frac{\partial A}{\partial t}$$

$$= \left\{ A, H \right\} + \frac{\partial A}{\partial t}$$

5/5