

PRAKTIKUMSPROTOKOLL DES 3.5.2016

Millikan-Versuch

Thea SCHNEIDER
thea.schneider@udo.edu

Max PERNKLAU
max.pernklau@udo.edu

18. Mai 2016

1 Abstract

In diesem Versuch wird über die Bewegungsgeschwindigkeit von geladenen Öltröpfchen im Kondensator die Elementarladung bestimmt. Wegen des Luftwiderstandes erreichen die Tropfen eine konstante Geschwindigkeit, welche über ein Mikroskop gemessen wird.

2 Theorie

2.1 Überblick

Beim Zerstäuben von Öl werden die entstehenden Tröpfchen schwach geladen. Bringt man diese in einen geladenen Kondensator ein, erfahren sie durch das elektrische Feld die Kraft

$$F_E = qE .$$

Zudem wirkt eine Gravitationskraft von

$$F_G = mg$$

und der Luftwiderstand F_R . Da die Tröpfchen ausreichend klein sind, genügt eine Betrachtung über die Stoke'schen Reibung

$$F_R = 6\pi\eta r v ,$$

wobei r der "Radius" des Tröpfchens (die Oberflächenspannung dominiert bei den hier vorliegenden, kleinen Maßstäben, die Tröpfchen sind annähernd kugelförmig¹) und η die Viskosität der Luft ist.

Die Öltröpfchen erreichen nach kurzer Zeit eine konstante Geschwindigkeit; es muss also ein Kräftegleichgewicht bestehen:

$$|F_E + F_G| = F_R$$

Durch das Auflösen nach der Ladung erhält man kein kontinuierliches Ladungsspektrum, wie man klassisch erwarten würde. Stattdessen gibt es nur diskrete Ladungen, die ein Tröpfchen besitzen kann. Es liegt nahe, dass das kleinste gemeinsame Vielfache der möglichen Ladungen die Elementarladung sein muss.

2.2 Details

Die Tröpfchen sind zu klein, um direkt beobachtet zu werden², weswegen ein Dunkelfeldmikroskop zum Einsatz kommt, mit dem die Beugungsbilder der Tröpfchen beobachtet werden können.

¹sofern in dieser Größenordnung noch von "rund" gesprochen werden kann; der Tropfen besteht nur aus einigen hundert bis tausend Atomen.

²Wellenlängen des sichtbaren Lichts sind um eine Größenordnung zu groß

Entsprechend kann die Masse des Tropfens nicht optisch über dessen Durchmesser bestimmt werden; sie wird deswegen über die Stokes'sche Reibung erschlossen: Für die Kräftegleichung eines Tropfens außerhalb des elektrischen Feldes muss

$$|F_G| = F_R$$

gelten. Bei bekannter Geschwindigkeit lässt sich die Gleichung mithilfe der Dichtebeziehung

$$m = \rho \frac{4\pi}{3} r^3 \quad (1)$$

nach der Masse auflösen. Analog kann der Radius bestimmt werden.

Die dafür benötigte Endgeschwindigkeit ohne elektrisches Feld ist schwierig zu messen, da sie recht klein sein kann. Deswegen wird hier die Zweifeldmethode angewandt, bei der die Geschwindigkeit des Teilchens bei beiden möglichen Polungen des Kondensators gemessen wird:

$$\begin{aligned} F_G + F_E &= F_R(v_{\text{ab}}) \\ F_G - F_E &= F_R(v_{\text{auf}}) \\ F_G &= F_R(v_0) \end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow 2v_0 = v_{\text{ab}} - v_{\text{auf}} . \quad (2)$$

Schließlich ist zu beachten, dass die Viskosität der Luft von der Teilchengröße abhängt. Da die betrachteten Tropfen kleiner als die freie Weglänge in Luft sind wird die *Cunningham*-Korrektur angewandt:

$$\eta = \eta_{\text{klassisch}} \frac{1}{1 + B/(pr)} \quad (3)$$

Dabei ist B eine experimentell bestimmte Konstante, r der Tröpfchenradius und p der Luftdruck.

Der Auftrieb der Tropfen in Luft muss indes nicht berücksichtigt werden, da $\rho_{\text{Öl}} \gg \rho_{\text{Luft}}$ ist.

Unter Berücksichtigung der oben genannten Zusammenhänge ergibt sich folgendes Ergebnis für die Ladung eines Tropfens:

$$q = 3\pi\eta \frac{v_{\text{ab}} + v_{\text{auf}}}{E} \sqrt{\frac{9\eta(v_{\text{ab}} - v_{\text{auf}})}{4g\rho}} . \quad (4)$$

3 Gaußsche Fehlerrechnung

3.1 Berechnung der Standardabweichung

Alle Messwerte sind als empirische Mittelwerte mit ihrer geschätzten Standardabweichung des Mittelwertes angegeben. Diese unterschätzt die wahre Standardabweichung, da die Wurzel aus der geschätzten Varianz gezogen wird. Der arithmetische Mittelwert ist definiert als

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i . \quad (5)$$

Die geschätzte Standardabweichung ist gegeben durch

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (6)$$

mit der geschätzten Standardabweichung des Mittelwertes als

$$\Delta \bar{x} = \frac{s}{\sqrt{n}} \quad (7)$$

3.2 Gaußsche Fehlerfortpflanzung

Das Berechnen von Funktionen mit fehlerbehafteten Parametern erfolgt mittels der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung

$$\Delta f = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{df}{dy_i} \right)^2 (\Delta y_i)^2} \quad \text{mit } f(y_1, \dots, y_n) \quad (8)$$

4 Aufbau und Durchführung

Der Millikan-Versuch besteht aus einem Plattenkondensator innerhalb einer Kammer. Der detaillierte Versuchsaufbau findet sich in Abbildung 1.

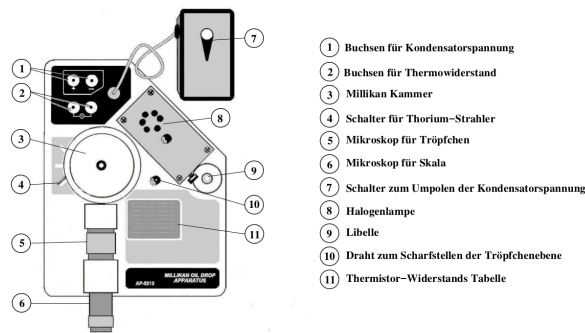


Abbildung 1: Versuchsaapparatur zum Millikan-Versuch. [Skript V503]

Mit Hilfe eines Zerstäubers können Öltröpfchen durch eine Öffnung in der oberen Platte des Kondensators eingesprüht werden. Ihre Dichte beträgt

$$\rho_{\text{oel}} = 886 \text{ kg m}^{-3} . \quad (9)$$

Mit einem Mikroskop (siehe Kapitel 2.2) können die Tröpfchen, die durch eine Halogenlampe angestrahlt werden, auf einem Monitor beobachtet werden. Im Hintergrund ist ein Gitter mit einer Kästchenbreite von

$$b = 0.5 \text{ mm} \quad (10)$$

zu sehen, mit dessen Hilfe die Strecke gemessen werden kann, die sich die Tröpfchen in einer bestimmten Zeit fortbewegen. Die Öltröpfchen sind elektrisch geladen bzw. können mit einem radioaktiven Präparat geladen werden, und können daher durch den Plattenkondensator beeinflusst werden. Die Temperatur innerhalb der Kammer kann über einen Thermowiderstand gemessen werden und wird während der Messung regelmäßig notiert.

Für die Messung wird ein Tropfen ausgewählt, der durch die angelegte Spannung am Kondensator beeinflusst wird. Es wird die Zeit gemessen, die der Tropfen braucht um eine bestimmte Strecke zurückzulegen, dann wird das elektrische Feld umgeschaltet und die Zeit gemessen, die der Tropfen in die entgegengesetzte Richtung benötigt. Die Messung wird so oft wie möglich wiederholt. Dann wird die Geschwindigkeit v_0 bestimmt, die der Tropfen bei abgeschaltetem Feld benötigt. Die Messung wird für verschiedene Tröpfchen wiederholt, sowie für verschiedene Spannungen.

5 Auswertung

Der Abstand der Kondensatorplatten beträgt

$$d = (7.6250 \pm 0.0051) \text{ mm} . \quad (11)$$

Die gemessenen Geschwindigkeiten befinden sich in Tabelle 1. Es wurde die Zeit gemessen, die ein Tröpfchen benötigt um eine gewisse Anzahl an Kästchen zu durchlaufen. Über

$$v = \frac{s}{t} \quad (12)$$

kann damit die Geschwindigkeit ermittelt werden. Wobei der Weg

$$s = \text{Kästchenanzahl} \cdot 0.5 \text{ mm} \quad (13)$$

beträgt.

Es war nicht für jedes Tröpfchen möglich v_0 zu bestimmen, daher konnten nur sehr wenige Tröpfchen auf Grund der Beziehung

$$2v_0 = v_{\text{ab}} - v_{\text{auf}} \quad (14)$$

aussortiert werden. Auch mit der Annahme einer Messungenauigkeit von 25% fallen damit alle Tröpfchen weg, für die überhaupt v_0 gemessen wurde. Als nächstes werden alle Geschwindigkeiten, die zu einem bestimmten Tröpfchen gehören, mit Hilfe von Gleichung (5) und (7) gemittelt und die geschätzte Standardabweichung des Mittelwerts berechnet.

Mit Gleichung (4) kann nun aus den gemittelten Werten die unkorrigierte Ladung q_{unkorr} berechnet werden. Die dafür benötigte unkorrigierte Viskosität wird über den Thermistor-Widerstand bestimmt. Aus der Tabelle in Abbildung 2 kann daraus die Temperatur abgelesen werden und aus Abbildung 3 die daraus resultierende Viskosität:

$$\Omega_{\text{anfang}} = 1.86 \text{ M}\Omega \quad \rightarrow 28^\circ\text{C} \rightarrow \eta_{\text{L}} = 1.862 \cdot 10^{-5} \text{ N s m}^{-2} \quad (15)$$

$$\Omega_{\text{ende}} = 1.82 \text{ M}\Omega \quad \rightarrow 29^\circ\text{C} \rightarrow \eta_{\text{L}} = 1.8665 \cdot 10^{-5} \text{ N s m}^{-2} . \quad (16)$$

T[°C]	R [MΩ]	T[°C]	R [MΩ]	T[°C]	R [MΩ]
10	3.239	20	2.300	30	1.774
11	3.118	21	2.233	31	1.736
12	3.004	22	2.169	32	1.700
13	2.897	23	2.110	33	1.666
14	2.795	24	2.053	34	1.634
15	2.700	25	2.000	35	1.603
16	2.610	26	1.950	36	1.574
17	2.526	27	1.902	37	1.547
18	2.446	28	1.857	38	1.521
19	2.371	29	1.815	39	1.496

Abbildung 2: Thermistor-Widerstandstabelle. [Skript V503]

Tabelle 1: Geschwindigkeiten der Öltröpfchen mit zugehöriger angelegter Ladung. Eine nicht vorliegende Messung ist durch den Wert 0 gekennzeichnet.

Spannung in V	v_0 in 10^{-5}m s^{-1}	v_{ab} in 10^{-5}m s^{-1}	v_{auf} in 10^{-5}m s^{-1}
227	7.14	16.67	10.87
227	0.00	22.73	18.18
301	0.00	30.00	21.43
301	0.00	35.71	31.25
301	0.00	39.68	28.41
301	0.00	39.68	26.32
301	0.00	26.04	17.24
301	2.60	30.12	19.23
282	0.00	16.89	12.56
282	0.00	24.27	19.53
282	0.00	30.12	16.45
282	4.85	28.41	21.01
282	0.00	18.25	9.43
299	0.00	20.66	9.92
299	0.00	21.93	18.94
299	3.85	21.28	19.61
299	0.00	27.17	22.73
299	0.00	30.12	16.13
299	0.00	11.57	5.98
299	0.00	9.26	5.80
299	0.00	15.62	15.01
299	0.00	20.16	14.62
299	0.00	15.92	8.14
299	1.38	11.79	6.94
299	0.00	27.78	20.00
299	0.00	19.53	11.16
299	0.00	10.16	5.19
299	0.00	11.79	7.14
299	0.00	11.85	9.33
299	0.00	25.77	21.19
299	0.00	24.51	21.01
299	0.00	33.78	28.41
299	0.00	33.78	28.09
299	0.00	39.68	33.78
299	0.00	39.06	25.00
299	0.00	27.78	27.78

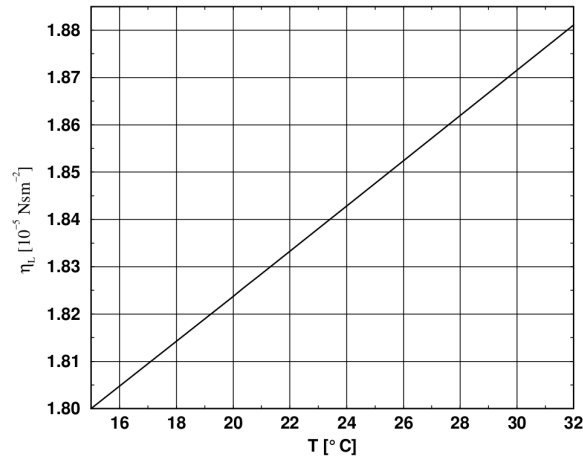


Abbildung 3: Die Viskosität η von Luft als Funktion der Temperatur. [Skript V503]

Die Viskosität kann nun nach Cunningham mit Gleichung (3) korrigiert werden, wodurch sich die korrigierte Ladung für jedes Tröpfchen ergibt. Der Cunningham-Korrekturterm beträgt $B = 6.17 \cdot 10^{-3} \text{ Torr cm}$ [Skript V503]. Die korrigierte Ladung q_{kor} ist in Abbildung 4 gegen die Tröpfchennummer aufgetragen, die Werte sind in Tabelle 2 zu finden.

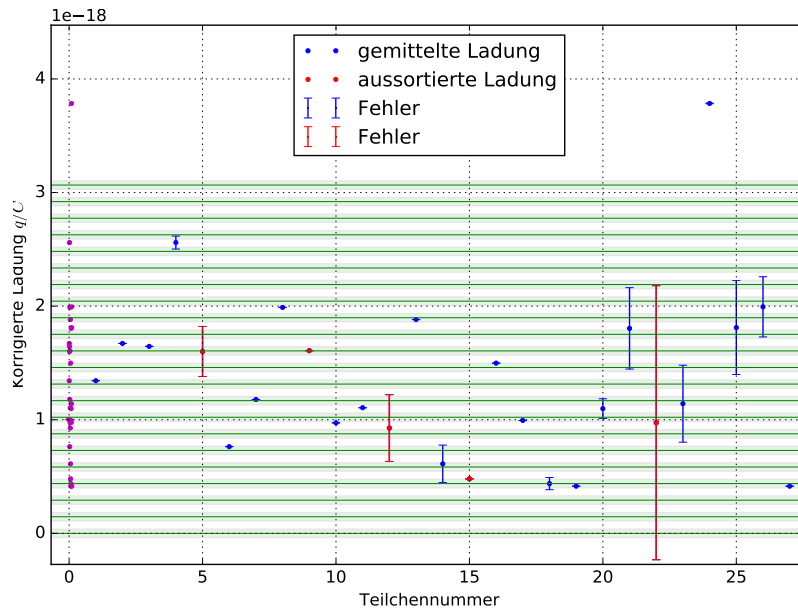


Abbildung 4: Plot der korrigierten Ladungen gegen ihre Teilchennummer mit grünen Niveaulinien der ermittelten Elementarladung. Zu Vergleichszwecken sind die gemittelten Ladungen zusätzlich in Magenta auf eine Linie geplottet worden.

Tabelle 2: Gemittelte Ladungen q und korrigierte Ladungen q_{korrr} .

$q/10^{-19} \text{ C}$	$q_{\text{korrr}}/10^{-19} \text{ C}$
8.5866 \pm 0.0057	10.0216 \pm 0.0067
11.2959 \pm 0.0076	13.4348 \pm 0.0090
14.7063 \pm 0.0098	16.718 \pm 0.011
13.8194 \pm 0.0092	16.461 \pm 0.011
22.98 \pm 0.62	25.60 \pm 0.57
14.2 \pm 2.1	16.0 \pm 2.2
6.3891 \pm 0.0043	7.6296 \pm 0.0051
9.9428 \pm 0.0067	11.7852 \pm 0.0079
17.952 \pm 0.012	19.888 \pm 0.013
14.0154 \pm 0.0094	16.082 \pm 0.011
8.5680 \pm 0.0057	9.7236 \pm 0.0065
9.8547 \pm 0.0066	11.0564 \pm 0.0074
7.5 \pm 2.9	9.3 \pm 2.9
17.010 \pm 0.011	18.823 \pm 0.013
5.1 \pm 1.6	6.1 \pm 1.6
4.0564 \pm 0.0027	4.7995 \pm 0.0032
13.1015 \pm 0.0088	14.985 \pm 0.010
8.7311 \pm 0.0058	9.9401 \pm 0.0066
3.70 \pm 0.52	4.38 \pm 0.53
3.3054 \pm 0.0022	4.1542 \pm 0.0028
9.14 \pm 0.84	10.98 \pm 0.86
15.5 \pm 3.5	18.0 \pm 3.6
8 \pm 2	10 \pm 2
9.4 \pm 3.4	11.4 \pm 3.4
34.220 \pm 0.023	37.845 \pm 0.025
16.0 \pm 4.0	18.1 \pm 4.1
17.5 \pm 2.6	19.9 \pm 2.7
2.6998 \pm 0.0018	4.1531 \pm 0.0028

Mit Hilfe einer leichten Abwandlung des Euklidischen Algorithmus (siehe Abbildung 5) lässt sich nun aus den korrigierten Ladungen ein größter gemeinsamer Teiler bestimmen, der die Elementarladung e_0 darstellen soll.

Aus den Daten ergibt sich mit diesem Code für die Elementarladung

$$e_0 = (1.46 \pm 0.25) \cdot 10^{-19} \text{ C} . \quad (17)$$

Sie weicht von der tatsächlichen Elementarladung $e_{0,\text{theorie}} = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ um ca. 8.8% ab. Die Niveaulinien, die sich aus der berechneten Elementarladung ergeben, sind in Abbildung 4 mit einer Abweichung von 25% in grün eingezeichnet. Die Avogadrokonstante berechnet sich mit Hilfe der Faraday-Konstante ($F = 96485.33289 \text{ C mol}^{-1}$) und der bestimmten Elementarladung zu

$$N_A = \frac{F}{e_0} = 6.6086 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1} . \quad (18)$$

Die Abweichung zum Theoriewert $N_{A,\text{theorie}} = 6.022140857 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ beträgt ca. 9.7%.

```

def GCD(q,maxi):
    #q: Vektor mit reellen Zahlenwerten
    #maxi: maximale Iterationszahl für einen GCD
    gcd = q[0]
    for i in range(1,len(q)):
        n = 0
        while abs(gcd-q[i]) > 1e-19 and n <= maxi :
            if gcd > q[i]:
                gcd = gcd - q[i]
            else:
                q[i] = q[i] - gcd
            n = n+1
    return gcd

```

Abbildung 5: Sourcecode des benutzten geänderten Euklidischen Algorithmus in *python*.

6 Diskussion

Die starke Varianz der Fehler unter den Ladungen ist darauf zurückzuführen, dass für manche Tröpfchen nur eine Messung vorgenommen wurde. Während für andere bis zu fünf Messungen des selben Tröpfchens möglich waren, die dann gemittelt werden konnten. Generell war es schwierig ausreichend geladene Teilchen zu finden, die außerdem über den gesamten Zeitraum der Messung stabil blieben. Die Messung der Gleichgewichtsgeschwindigkeit v_0 war nur für sechs von 28 Tröpfchen möglich. Die Tröpfchen, für die eine Messung von v_0 möglich war, mussten auch mit der Annahme einer Messungenauigkeit von 25% aufgrund von Gleichung (14) aussortiert werden. Aufgrund der fehlenden v_0 Messungen ist es daher den Autoren nicht möglich, weitere eventuell fehlerhafte Messwerte (d.h. Öltröpfchen, die während der Messung ihre Ladung änderten) auszusortieren.

Wie in Abbildung 4 an den magentafarbenen Messwerten zu sehen ist, ist zwar eine “Gruppierung” der gemittelten Ladungen um bestimmte Werte zu erkennen, aber sie ist nicht eindeutig und macht die Zuordnung einiger Werte zu einer bestimmten “Gruppe” schwierig. Daher wurde ein an den *Euklidischen-Algorithmus* angelehnter Algorithmus für die Ermittlung des größten gemeinsamen Teilers programmiert. Die Abweichung der berechneten Elementarladung zum Theoriewert um ca. 8.8% ist daher akzeptabel.

Aufgrund der Antiproportionalität zwischen der Elementarladung und der Avogadrokonstante ist es nicht verwunderlich, dass auch hier die Abweichung der experimentell bestimmten Avogadrokonstante zum Theoriewert ca. 9.7% beträgt.

7 Literaturangabe

Bilder und Daten aus dem Skript zu *Millikan-Versuch*, Versuch 503, TU Dortmund, abrufbar auf:

<http://129.217.224.2/HOME PAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/Millikan.pdf>

(Stand 09.05.16)

Theoriewerte der physikalischen Konstanten

NIST, *Faradaykonstante*, abrufbar auf:

<http://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Value?f>

(Stand 09.05.16)

NIST, *Avogadrokonstante*, abrufbar auf:

<http://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Value?na>

(Stand 09.05.16)