6. Übungszettel | Matthias Jaeger, Marius Hölting

19,5/20

Teufelchen

Aufgabe 1:

a) $\lambda = e^x > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ ✓

$u = \frac{\partial f}{\partial x} = e^x \Leftrightarrow x = \ln(u)$

$g_1 = \sum_{i=1}^{n} u_i x_i - f = u \cdot (\ln u - 1)$ ✓

2. Legendre-Transformation:

$f(v) = v \cdot (\ln v - 1)$

$u = \frac{\partial f}{\partial v} = \ln(v)$

$g_2 = \sum_{i=1}^{n} u_i x_i - f = (\ln v) \cdot v - v \cdot (\ln v - 1) v = v$

$\Rightarrow u = \ln v \Leftrightarrow e^u = v \Rightarrow e^u = f(u) \mathrel{\hat{=}} e^x$ ∎ ✓

b) $u_1 = \frac{\partial f}{\partial x} = 2x \Leftrightarrow x = \frac{u_1}{2}$

$u_2 = \frac{\partial f}{\partial y} = 2y \Leftrightarrow y = \frac{u_2}{2}$

$g = \sum_{i=1}^{n} u_i x_i - f = \frac{u_1^2}{4} + \frac{u_2^2}{4}$ ✓

$v_1 = \frac{\partial g}{\partial u_1} = \frac{u_1}{2}$; $v_2 \frac{\partial g}{\partial u_2} = \frac{u_2}{2}$

$\Rightarrow g(v_1, v_2) = v_1^2 + v_2^2$ ✓

$h(v_1, v_2) = \sum_{i=1}^{n} u_i x_i - f = v_1 \cdot 2v_1 + v_2 \cdot 2v_2 - v_1^2 - v_2^2 = v_1^2 + v_2^2$ ∎ $= g(v_1, v_2)$

c)

$$df = d\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 \ \dots \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 + \quad \vdots \\ \vdots \qquad \vdots \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{J_f}}} \underbrace{\begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix}}_{\underline{dx}}$$ ✓

d) $h := f \circ g$

$\Leftrightarrow dh = d(f \circ g) = d(f(g)) \underset{c)}{=} \underline{\underline{J_f}} \cdot dg \underset{c)}{=} \underline{\underline{J_f}} \cdot \underline{\underline{J_g}} \cdot dx$ ∎ ✓

e) $\ell = m = n$

$h = f(g(x)) = g^{-1}(g(x)) = x$

$\Rightarrow dh = dx \underset{d)}{=} \underbrace{J_f J_g}_{\mathbb{1}} dx = dx \Rightarrow \underline{\underline{J_g^{-1}}} = \underline{\underline{J_f}}$ ✓ 5/5

A2) a)

- $$\{\underbrace{q_j}_{f},\underbrace{q_k}_{g}\} = \sum_{i=1}^{N}\left(\underbrace{\frac{\partial q_j}{\partial q_i}}_{1 \text{ für } i=j}\frac{\partial q_k}{\partial p_i} - \frac{\partial q_j}{\partial p_i}\underbrace{\frac{\partial q_k}{\partial q_i}}_{1 \text{ für } i=k}\right) = \frac{\partial q_k}{\partial p_j} - \frac{\partial q_k}{\partial p_j} = 0$$

$$\frac{\partial q}{\partial p} = \frac{\partial p}{\partial q} = 0$$

- $$\{p_j, p_k\} = \sum_{i=1}^{N}\left(\cancel{\frac{\partial p_j}{\partial q_i}}^{0}\frac{\partial p_k}{\partial p_i} - \frac{\partial p_j}{\partial p_i}\cancel{\frac{\partial p_k}{\partial q_i}}^{0}\right) = 0$$

- $$\{q_j, p_k\} = \sum_{i=1}^{N}\underbrace{\left(\underbrace{\frac{\partial q_j}{\partial q_i}}_{1 \text{ für } i=j}\underbrace{\frac{\partial p_k}{\partial p_i}}_{1 \text{ für } i=k}\right.}_{1 \text{ für } j=k}\left. - \cancel{\frac{\partial q_j}{\partial p_i}}^{0}\cancel{\frac{\partial p_k}{\partial q_i}}^{0}\right) = \delta_{jk} = \begin{cases}1, & j=k\\ 0, & j\neq k\end{cases}$$ ✓

A2 Wir verwenden hierzu Tensorrechnung.

b) Und führen ein:

$$(x_\mu) = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_f \\ p_1 \\ \vdots \\ p_f \end{pmatrix}$$

, also die zusammengefassten generalisierten Koordinaten

außerdem benötigen wir die symplektische Matrix $J = \begin{pmatrix} & Id_f \\ -Id_f & \end{pmatrix}$

~~$\{f, g\} =$~~

mit Id_f : Einheitsmatrix der Dimension f

Dann ist dank der Summenkonvention

$$\{f,g\} = \sum_{i=1}^{f} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial f}{\partial x_\mu} J_{\mu\nu} \frac{\partial g}{\partial x_\nu}$$

Def.: $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}$

$$\boxed{\{f,g\} = \partial_\mu f \, J_{\mu\nu} \partial_\nu g}$$

$$\Rightarrow \{f, \{g,h\}\} = \partial_\mu f \, J_{\mu\nu} \partial_\nu (\{g,h\}) = \partial_\mu f \, J_{\mu\nu} \partial_\nu \underbrace{(\partial_\alpha g \, J_{\alpha\beta} \partial_\beta h)}_{\text{Produktregel}}$$

$$= \partial_\mu f \, J_{\mu\nu} \partial_\nu \partial_\alpha g \, J_{\alpha\beta} \partial_\beta h$$
$$+ \partial_\mu f \, J_{\mu\nu} \partial_\alpha g \, J_{\alpha\beta} \partial_\nu \partial_\beta h$$

Damit schreiben wir $\{f, \{g,h\}\} + \{g, \{h,f\}\} + \{h, \{f,g\}\} =$

$$\partial_\mu f \, J_{\mu\nu} \partial_\nu \partial_\alpha g \, J_{\alpha\beta} \partial_\beta h + \partial_\mu f \, J_{\mu\nu} \partial_\alpha g \, J_{\alpha\beta} \partial_\nu \partial_\beta h$$
$$+ \partial_\mu g \, J_{\mu\nu} \partial_\nu \partial_\alpha h \, J_{\alpha\beta} \partial_\beta f + \partial_\mu g \, J_{\mu\nu} \partial_\alpha h \, J_{\alpha\beta} \partial_\nu \partial_\beta f$$
$$+ \partial_\mu h \, J_{\mu\nu} \partial_\nu \partial_\alpha f \, J_{\alpha\beta} \partial_\beta g + \partial_\mu h \, J_{\mu\nu} \partial_\alpha f \, J_{\alpha\beta} \partial_\nu \partial_\beta g$$

sehr elegant!

Wir betrachten jetzt die ähnlichen Terme, d.h. wo jeweils die 2. Ableitungen von jeweils f, g und h vorkommen

~~f~~: $\partial_\mu f \, J_{\mu\nu} \partial_\nu \partial_\alpha g \, J_{\alpha\beta} \partial_\beta h + \underbrace{\partial_\mu h \, J_{\mu\nu} \partial_\alpha f \, J_{\alpha\beta} \partial_\nu \partial_\beta g}_{\text{Stichwort Indexshifting!}} = \ldots$ ✓

$\mu \to \beta \quad \alpha \to \mu$
$\nu \to \alpha \quad \beta \to \nu$

~~$J_{\beta\alpha} = -J_{\alpha\beta}$~~

A2)

Taylorentwicklung nach t gefragt

c) $f(q,p) \approx f(0,0) + \underbrace{\partial q_i \overbrace{f(0,0)}^{f_0} \cdot q_i + \partial p_i f(0,0) p_i}_{\text{Vgl. mit Aufg. stellung: } = t\{f_0, H\} \text{ ①}} + \underset{②}{\text{Rest}}$

nein, das wäre sowas wie 1. Ord. Zeitentwicklung, stimmt aber auch nicht ganz

① $t\{f_0, H\} = \sum \left(\frac{\partial f_0}{\partial q_i} t \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f_0}{\partial p_i} t \frac{\partial H}{\partial q_i} \right)$ $\Rightarrow$ $q_i = t \frac{\partial H}{\partial p_i}$?

$p_i = -t \frac{\partial H}{\partial q_i}$?

bilde $\frac{d}{dt}$! (H nicht explizit zeitabhängig!)

damit $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ aber nicht $\frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p_i}$

$$\underbrace{\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}}_{\text{entspricht den Hamiltongleichungen, ist also ok!}}$$

② $\text{Rest} = \frac{1}{2} \partial q_i \partial q_i f(0,0) q_i^2 + \partial q_i \partial p_i f(0,0) p_i q_i + \frac{1}{2} \partial p_i \partial p_i f(0,0) p_i^2$ (*)

Vergleiche mit $\frac{t^2}{2}\{\{f_0, H\}, H\}$ (**)

$$= \frac{t^2}{2}\left(\frac{\partial \{f_0, H\}}{\partial q} \cdot \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial \{f_0, H\}}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q} \right)$$

$$= \frac{t^2}{2}\Big[\partial_q \big((\partial_q f_0)(\partial_p H) - (\partial_p f_0)(\partial_q H) \big) \cdot \partial_p H$$

$$- \partial_p \big((\partial_q f_0)(\partial_p H) - (\partial_p f_0)(\partial_q H) \big) \cdot \partial_q H \Big]$$

$$= \frac{t^2}{2}\Big[\big(\partial_q ((\partial_q f_0)\dot{q} + (\partial_p f_0)\dot{p}) \cdot \dot{q} + \big(\partial_p ((\partial_q f_0)\dot{q} + (\partial_p f_0)\dot{p}) \cdot \dot{p} \big) \Big]$$

$\dot{q}_i = \partial_{p_i} H$

$\dot{p}_i = -\partial_{q_i} H$

$$= \sum_{i=1}^{f} \frac{t^2}{2} \left(\frac{\partial^2 f_0}{\partial q_i^2} \dot{q}_i^2 + \frac{\partial^2 f_0}{\partial q_i \partial p_i} \dot{p}_i \dot{q}_i + \frac{\partial^2 f_0}{\partial p_i \partial q_i} \dot{q}_i \dot{p}_i + \frac{\partial^2 f_0}{\partial p_i^2} \dot{p}_i^2 \right)$$

Unterschied zu (*): $\frac{t^2}{2} \dot{q}_i^2 = \frac{1}{2} q_i^2$?

$\Leftrightarrow \frac{t^2}{\cancel{2}} \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \right)^2 = q_i^2$? $\quad |\sqrt{\ }\ | \frac{d}{dt}$

$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i$ ✓

äquivalent für $\frac{t^2}{2} \dot{p}_i^2 = \frac{1}{2} p_i^2$?

$2 \cdot \frac{t^2}{2} \dot{q}_i \dot{p}_i = p_i q_i$?

ja, stimmt, denn wir haben gezeigt: $t \cdot \dot{q}_i = q_i$

und $t \cdot \dot{p}_i = p_i$

nein, s.o.

$\Rightarrow$ (*) und (**) sind äquivalent.

$$\ldots = (\partial_\mu f) J_{\mu\nu} (\partial_\nu \partial_\alpha g) J_{\alpha\beta} (\partial_\beta h)$$

$$+ (\partial_\beta h) \underbrace{J_{\beta\alpha}}_{= \ominus J_{\alpha\beta}} (\partial_\mu f) J_{\mu\nu} (\partial_\alpha \partial_\nu g) = 0$$

$= \ominus J_{\alpha\beta}$, weil $J_{\alpha\beta} = -J_{\alpha\beta}$ aufgr. symplektisch

Äquivalent heben sich ebenfalls die anderen jeweils zwei Summanden mit den zweiten Ableitungen von f und h auf. $\boxtimes$

d) $\frac{df}{dt} = 0 \Rightarrow \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \quad (*)$, $\frac{dg}{dt} = 0 \Rightarrow \{g, H\} + \frac{\partial g}{\partial t} = 0 \quad (**)$

$$\frac{d}{dt}\{f, g\} = \{\{f, g\}, H\} + \frac{\partial \{f, g\}}{\partial t}$$

nach Produktregel

$$= \{g, \{H, f\}\} + \{f, \{g, H\}\} + \underbrace{\left\{\frac{\partial f}{\partial t}, g\right\} + \left\{f, \frac{\partial g}{\partial t}\right\}}$$

Jacobi-Identität: $\{\{f, g\}, H\} = -\{H, \{f, g\}\} = -(-\{g, \{H, f\}\} - \{f, \{g, H\}\})$

Antisymmetrie der Poisson-Klammern

$$= \{f, \underbrace{\{g, H\} + \frac{\partial g}{\partial t}}_{\overset{(*)}{=} 0}\} + \{g, \underbrace{-\{f, H\} - \frac{\partial f}{\partial t}}_{\overset{(**)}{=} 0}\} = 0$$

Linearität der Poisson-Klammern

✓ ✓

e) Durch die Aussage, dass sich die Planeten in der x, y - Ebene bewegen, wird das System auf einen speziellen Zustand begrenzt. Eine Erhaltungsgröße gilt aber in jedem Zustand. Daher sind L^i_x und L^i_y keine Erhaltungsgrößen und somit L^i_z ebenfalls nicht.

✓

4,5/5

A3| a) Wir gehen von Gl. (5) aus und leiten ab:

$$\frac{d}{dx}\left(F - z'\frac{\partial F}{\partial z'}\right) = 0$$

schön

- $\frac{d}{dx}F(z,z') = \frac{\partial F}{\partial z}\overbrace{\frac{dz}{dx}}^{=z'} + \frac{\partial F}{\partial z'}\frac{dz'}{dx}$

heben sich weg

- $\frac{d}{dx}\left(z'\frac{\partial F}{\partial z'}\right) = \frac{dz'}{dx}\frac{\partial F}{\partial z'} + z'\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right)$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(F - z'\frac{\partial F}{\partial z'}\right) = z'\cdot\underbrace{\left(\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right)\right)}_{} = 0$$

$$\Rightarrow z' \overset{!}{=} 0 \text{ (trivial) } \vee \boxed{\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right) \overset{!}{=} 0}$$

b) Es gelte Energieerhaltung:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgz \quad \rightarrow v = \sqrt{2gz}$$

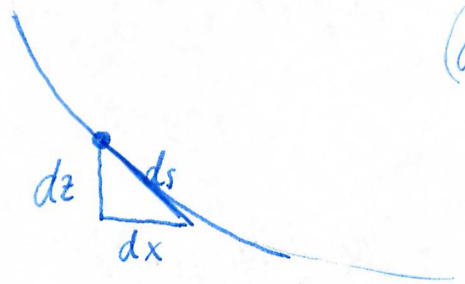
Das sieht schonmal so aus wie der Nenner.

Die benötigte Zeit soll minimiert werden. Die Zeit ergibt sich aus der Aufsummierung aus $\frac{\text{Wegänderung}}{\text{wegabh. Geschw.}}$, also aus dem Integral

$$\int_A^B \frac{ds}{v} = T$$

(*) Anmerkung: Die Tatsache, dass T, also das Integral $\int F dx$ minimiert bzw. auf einen Extremalwert gebracht werden soll durch Wahl von $y(x)$ ist gerade die Ausgangssituation der Variationsrechnung.

ds wiederum folgt aus Pythagoras:



$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dz)^2$$

$$\Rightarrow ds = +\sqrt{(dx)^2 + (dz)^2}$$

$$= \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\, dx$$

$$= \sqrt{1 + z'^2}\, dx$$

☺ Aha, da steht fast der Zähler!

$$T = \int_A^B \frac{ds}{v} = \int_0^{x_b} \frac{\sqrt{1+z'^2}}{\sqrt{2gz}}\, dx = \int_0^{x_b} F(z,z')\, dx$$

$F(z,z')$ entspricht also der ~~gesuchten Kurve~~ passenden Funktion für das Problem. (*)

c) $F - z' \frac{\partial F}{\partial z'} = c \quad , \quad \frac{\partial F}{\partial z'} = \frac{z'}{2gz} \cdot \sqrt{\frac{2gz}{1+z'^2}}$

$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{1+z'^2}{2gz}} - z' \cdot \frac{z'}{2gz} \sqrt{\frac{2gz}{1+z'^2}} = c \qquad | \cdot \sqrt{2gz}$

$\Leftrightarrow \sqrt{1+z'^2} - z'^2 \cdot \frac{2gz}{2gz} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+z'^2}} = c \cdot \sqrt{2gz} \qquad | \cdot \sqrt{1+z'^2}$

$\Leftrightarrow 1 + \cancel{z'^2} - \cancel{z'^2} = c \cdot \sqrt{2gz(1+z'^2)} \qquad |^2$

$1 = c^2 (2gz(1+z'^2))$

$1 = 2gzc^2 + 2gzc^2z'^2$

$\Leftrightarrow z'^2 = \frac{1-2gzc^2}{2gzc^2}$

$\Leftrightarrow z' = \sqrt{\frac{1-2gzc^2}{2gzc^2}} = \frac{dz}{dx}$

$\Leftrightarrow dx = \sqrt{\frac{2gzc^2}{1-2gzc^2}} \, dz$

$\Leftrightarrow dx = \sqrt{\frac{z}{\frac{1}{2gc^2} - z}} \, dz = \sqrt{\frac{z}{2\frac{1}{4gc^2} - z}} \, dz = \sqrt{\frac{z}{2R-z}} \, dz \qquad |\int$

$\Leftrightarrow \int dx = \int \sqrt{\frac{z}{2R-z}} \, dz$ ✓

d)

$z = 2R \sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right) \quad \rightarrow dz = 2R \sin\frac{\phi}{2} \cos\frac{\phi}{2} \, d\phi$

$\Rightarrow \int dx = \int \sqrt{\frac{z}{2R-z}} \, dz = \sqrt{\frac{2R\sin^2\frac{\phi}{2}}{2R\underbrace{(1-\sin^2\frac{\phi}{2})}_{=\cos^2\frac{\phi}{2}}}} \cdot 2R \sin\frac{\phi}{2} \cos\frac{\phi}{2} \, d\phi$

$\Leftrightarrow x - a = \int R \left| \frac{\sin\phi/2}{\cancel{\cos\phi/2}} \right| \cdot 2 \sin\frac{\phi}{2} \cancel{\cos\frac{\phi}{2}} \, d\phi$

$\Leftrightarrow x - a = \int 2R \sin^2\frac{\phi}{2} \, d\phi \qquad \Leftrightarrow x - a = 2R \cdot \frac{1}{2} (\phi - \sin\phi)$

$\sin^2\frac{\phi}{2} = (1-\cos\phi)$

$\Leftrightarrow x = x(\phi) = \underbrace{R(\phi - \sin\phi) + a}$, a = konst.

Zykloidenbahn, s. Aufg. blatt 1

$z = z(\phi) = \overbrace{2R(1-\cos\phi)}$

✓

5/5

Aufgabe 4

a)

$$x(t,\theta) = a\sin(\omega t) + a\sin(\omega t+\theta)$$

$$y(t,\theta) = a\cos(\omega t) + a\cos(\omega t+\theta)$$

$$z(t,\theta) = 0$$

Da keine äußeren Kräfte wirken ist $V=0$

$$\mathcal{L} = T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)$$

$$\dot{x} = a\cos(\omega t)\omega + a\cos(\theta+\omega t)\cdot(\omega+\dot{\theta})$$

$$\dot{y} = -a\sin(\omega t)\omega - a\sin(\theta+\omega t)(\omega+\dot{\theta})$$

$$\dot{x}^2 = a^2\cos^2(\omega t)\omega^2 + 2a\cos(\omega t)\omega\cdot a\cos(\theta+\omega t)(\omega+\dot{\theta}) + a^2\cos^2(\theta+\omega t)^2\cdot(\omega+\dot{\theta})^2$$

$$\dot{y}^2 = a^2\sin^2(\omega t)\omega^2 + 2a\sin(\omega t)\omega\cdot a\sin(\theta+\omega t)(\omega+\dot{\theta}) + a^2\sin^2(\theta+\omega t)(\omega+\dot{\theta})^2$$

$$T = \frac{1}{2}m\left(a^2\omega^2 + 2a^2\omega(\omega+\dot{\theta})(\cos(\omega t)\cos(\theta+\omega t) + \sin(\omega t)\cdot\sin(\omega t+\theta) + a^2(\omega+\dot{\theta})^2\right)$$

mit $\cos(a+b)\cos(a) + \sin(a+b)\cdot\sin(a) = \cos(b)$ folgt

$$T = \frac{1}{2}m(a^2\omega^2 + 2a^2\omega(\omega+\dot{\theta})\cdot\cos(\theta) + a^2(\omega+\dot{\theta})^2$$

$$= \frac{1}{2}ma^2\omega^2 + a^2m\omega(\omega+\dot{\theta})\cdot\cos\theta + \frac{1}{2}a^2m(\omega^2+2\omega\dot{\theta}+\dot{\theta}^2)$$

$$= ma^2\omega^2 + a^2m\omega(\omega+\dot{\theta})\cos\theta + a^2m\omega\dot{\theta} + a^2\frac{1}{2}m\cdot\dot{\theta}^2$$

b)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = 0$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} = a^2m\omega\cos\theta + a^2\omega m + a^2m\dot{\theta}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = -a^2m\omega\sin\theta + a^2m\omega\dot{\theta}(-\sin\theta)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} = a^2m\omega(-\sin\theta)\cdot\dot{\theta} + a^2m\ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow -a^2m\omega\sin(\theta)\cdot\dot{\theta} + a^2m\ddot{\theta} + a^2m\omega^2\sin(\theta) + a^2m\omega\dot{\theta}\sin\theta = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2m\ddot{\theta} + a^2m\omega^2\sin(\theta) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\theta} + \omega^2\sin\theta = 0$$

Das ist die Bewegungsgleichung für ein Fadenpendel

c) $H = \dot{q} p - \mathcal{L}$ $\qquad p_\Theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\Theta} = ma^2(\omega + \dot\Theta + \omega\cos\Theta)$

$= \dot\Theta a^2 m(\omega\cos(\theta) + \dot\theta + \omega) - a^2 m(\omega\cos(\theta)(\dot\theta\omega) + \frac{1}{2}\dot\theta^2 + \dot\theta\omega + \omega^2)$

$= a^2 m(\dot\theta\omega\cos(\theta) + \dot\theta^2 + \dot\theta\omega - \frac{1}{2}\dot\theta^2 - \dot\theta\omega\cos(\theta) - \omega^2\cos(\theta) - \dot\theta\omega - \omega^2$

$= a^2 m(\frac{1}{2}\dot\theta^2 - \omega^2(1+\cos(\theta)))$

mit $\dot\theta = \frac{p}{a^2 m} - \omega\cos(\theta) - \omega$ folgt

$H = a^2 m(\frac{1}{2}(\frac{p}{a^2 m} - \omega\cos(\theta) - \omega)^2 - \omega^2 - \omega^2\cos(\theta)$

$= a^2 m(\frac{1}{2}(\frac{p^2}{a^4 m^2} - 2\frac{p}{a^2 m}\omega\cos(\theta) - 2\frac{p}{a^2 m}\omega + \omega^2\cos^2(\theta) + 2\omega^2\cos(\theta) + \omega^2)$

$-\omega^2 - \omega^2\cos(\theta))$

$= a^2 m(\frac{1}{2}\frac{p^2}{a^4 m^2} - \frac{p}{a^2 m}\omega\cos(\theta) - \frac{p}{a^2 m}\omega + \frac{1}{2}\omega^2\cos^2(\theta) + \omega^2\cos(\theta) + \frac{1}{2}\omega^2)$

$-\omega^2 - \omega^2\cos(\theta)$

$= a^2 m(\frac{p}{a^2 m}(\frac{1}{2}\frac{p}{a^2 m} - \omega\cos(\theta) - \omega) + \frac{1}{2}\omega^2\cos^2(\theta) - \frac{1}{2}\omega^2)$ ✓

d)

mit den Hamilton-Gleichungen $\frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \dot\theta$ und $-\frac{\partial H}{\partial \theta} = \dot p_\theta$ folgt

$\dot\theta = \frac{\partial H}{\partial p} = a^2 m(\frac{p}{a^4 m^2} - \frac{1}{a^2 m}\omega\cos(\theta) - \frac{1}{a^2 m}\omega)$

$\dot p_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -a^2 m(\frac{p}{a^2 m}\omega\sin(\theta) - \omega^2\cos(\theta)\sin(\theta))$ ✓ 5/5

$\ddot\Theta = \frac{\dot p_\Theta}{ma^2} + \omega\sin(\Theta)\cdot\dot\Theta = \ldots = -\omega^2\sin\Theta$