Matthias Jaeger, Marius Hötting

20/20

Aufgabe 1

a i) $\tilde{h}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \; e^{-a|x|} \; e^{-ikx} dx$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ \int_{-\infty}^{0} dx \exp(ax - ikx) + \int_{0}^{\infty} dx \exp(x(-a-ik)) \right]$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ \frac{1}{a-ik} \underbrace{\exp(x(a-ik)) \Big|_{-\infty}^{0}}_{1-0} + \frac{1}{-a-ik} \underbrace{\exp(x(-a-ik)) \Big|_{0}^{\infty}}_{0-1} \right]$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left( \frac{1}{a-ik} + \frac{1}{a+ik} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2a}{a^2+k^2}$ ✓

ii) $\tilde{h}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \; \delta(x-x_0) \exp(-ikx)$

mit $z = x - x_0$ folgt $\delta(z) \cdot \exp(-ik(z+x_0))$

$= \frac{e^{-ikx_0}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dz \; \delta(z) \, e^{-ikz} = \frac{e^{-ikx_0}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \underbrace{e^0}_{=1}$ ✓

b $\widetilde{(f * g)} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \; f(y) \, g(x-y) \exp(-ikx)$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) dy \int_{-\infty}^{\infty} dx \; g(x-y) \exp(-ikx) \cdot \exp(iky) \exp(-iky)$

$z = x - y \quad dz = dx$

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dy \; f(y) \exp(-iky)}_{\sqrt{2\pi}\,\tilde{f}(k)} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dz \; g(z) \, e^{-ikz}}_{\sqrt{2\pi}\,\tilde{g}(k)}$

$= \sqrt{2\pi} \, \tilde{f}(k) \, \tilde{g}(k)$ ✓

5/5

Aufgabe 2

$$\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{ml^2}, \quad \dot{p}_\varphi = -mgl \sin\varphi - \alpha p_\varphi$$

a) Bestimme Fixpunkte $(\dot{\varphi}, \dot{p}_\varphi) \overset{!}{=} (0,0)$

$\Rightarrow \dot{\varphi} = 0$ und $0 \overset{!}{=} -mgl \sin\varphi - \alpha p_\varphi \Rightarrow \sin\varphi = -\frac{\alpha}{mgl} p_\varphi$

Die Gleichung ist nur erfüllt wenn $\sin\varphi = 0$ ist, dies gilt für $\varphi = k \cdot \pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Mit Kleinwinkelnäherung $\sin\varphi = \pm\varphi$ folgt

$$\begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{p}_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{ml^2} \\ \pm mgl & -\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ p_\varphi \end{pmatrix}$$

Im folgenden werden die Eigenwerte der Matrix M bestimmt (→ Ljapunov-Exponenten)

$\det(M - \lambda \mathbb{1}) \overset{!}{=} 0$

$\Rightarrow -\lambda(-\alpha - \lambda) \pm \frac{mgl}{ml^2} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda\alpha \pm g/l = 0$

$\Leftrightarrow \lambda_{1/2} = -\frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} \pm \frac{g}{l}}$

Vorsicht beim Kenntlichmachen der 4 Fälle

Bed. für Chaos $Re(\lambda_1) > 0 \vee Re(\lambda_2) > 0$

Für $\alpha > 0$ kann nur Chaos enstehen wenn

$\sqrt{\frac{\alpha^2}{4} \mp \frac{g}{l}} > \frac{\alpha}{2}$ ist.

$\Leftrightarrow \frac{\alpha^2}{4} \pm \frac{g}{l} > \frac{\alpha^2}{4} \Rightarrow \pm \frac{g}{l} > 0$

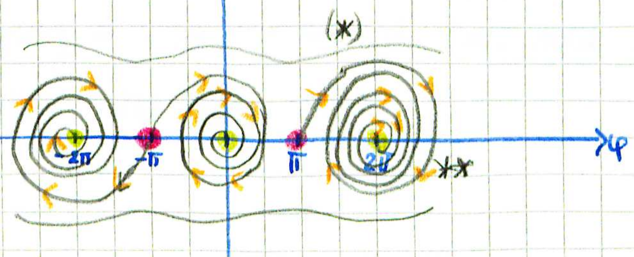
Wenn $\frac{g}{l}$ negativ ist ersteht erneut stabilität nur durch den positiven Wert von $\frac{g}{l}$ wird instabilität erzeugt.

Für $\alpha = 0$

$\lambda_{1/2} = \cancel{\frac{-\alpha}{2}} \pm \sqrt{\pm \frac{g}{l}}$

Nur durch die positive Betrachtung in und außerhalb der Wurzel ensteht Chaos (✓) welche Punkte (in-)stabil?

2b) $\alpha > 0$



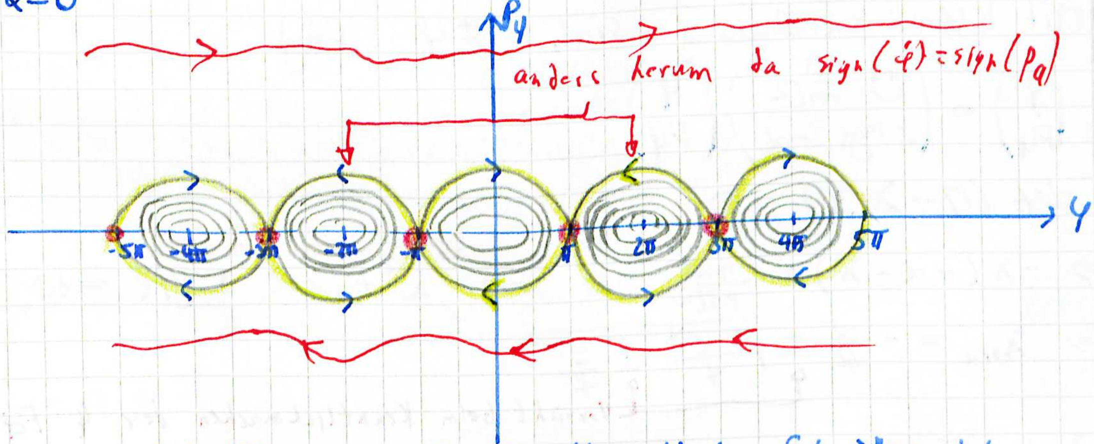
c) Bei (*) macht das Pendel Überschläge, die irgendwann durch die Reibung in eine Pendelbewegung übergehen und somit in einen Kreisel (**) enden.

Wenn in einen Pendelbewegung gestartet wird bleibt diese in dem anfänglichen Trichter. (✓)

($\alpha = 0$) – Bewegungstyp?

wo „entsteht" Chaos?

d) $\alpha = 0$




Es entstehen bei $(2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ theoretische Schnittpunkte. Diese sind aber nicht Real. Alle Bewegungen nähern sich maximal den roten Punkten an aber erreichen diese nur im unendlichen und überschreiten sie nicht. ✓ schön!

e) $H = T + V = \frac{1}{2} m \dot\varphi^2 = \frac{1}{2} m \frac{p_\varphi^2}{m^2 l^4} + m g \cdot l \sin(\varphi)$

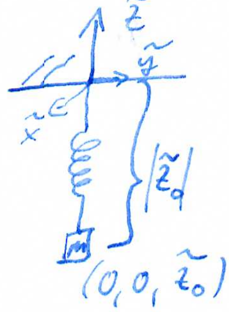
da $\frac{dH}{dt} = 0$ ist, ist die Energie erhalten. ✓

5/5

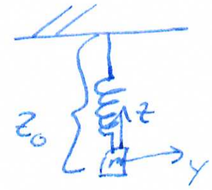
$$mg = k(\cancel{\ell} - \tilde{z}_0 - l_0)$$

$$\Rightarrow \tilde{z}_0 = -\frac{mg}{k} - l_0$$

$$\rightarrow z_0 = \frac{mg}{k} + l_0 \quad ✓$$

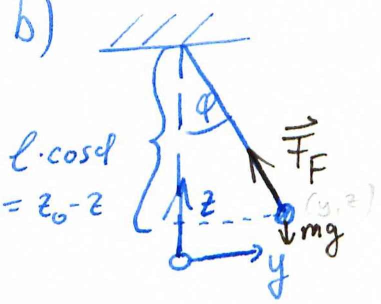



neues KS $(x,y,z)$




$$z = \tilde{z} + \tilde{z}_0$$

b)




$$\vec{F}_F = F_F \cdot \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$\sin\varphi = \frac{y}{\ell} \quad , \quad \cos\varphi = \frac{z_0 - z}{\ell}$$

$$F_F = k \cdot (\ell - l_0)$$

$$\Rightarrow \vec{F}_F = k(\ell - l_0)\frac{1}{\ell}\begin{pmatrix} -y \\ z_0 - z \end{pmatrix} = k \cdot \left(-1 + \frac{l_0}{\ell}\right) \cdot \begin{pmatrix} y \\ z - z_0 \end{pmatrix}$$

$$F_y = F_{F,y} = \underline{\underline{yk\left(\frac{l_0}{\ell} - 1\right)}} \qquad (\mathrm{I})$$

$$F_z = F_{F,z} - mg = (z - z_0)k\left(\frac{l_0}{\ell} - 1\right) - mg = \underline{\underline{k \cdot (z - z_0)\left(\frac{l_0}{\ell} - 1\right) - mg}} \quad (\mathrm{II}$$

c) +d) $$l_0 \cdot \frac{1}{\ell} = l_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{y^2 + \tilde{z}^2}} = l_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{y^2 + (z - z_0)^2}} = l_0 \cdot \frac{1}{z_0 \cdot \sqrt{\frac{z^2 - 2zz_0 + y^2}{z_0^2} + \frac{z_0^2}{z_0^2}}} \quad ($$

Substituiere $u := \frac{z^2 - 2zz_0 + y^2}{z_0^2}$

$$\Rightarrow l_0 \cdot \frac{1}{\ell} = \frac{l_0}{z_0 \cdot \sqrt{u+1}}$$

Entwickle nun $\sqrt{u+1}^{-1}$ um die Ruhelage $(0,0)$ $\rightarrow u_0 = 0$

$$T_2\left(\left(\sqrt{u+1}\right)^{-1}; 0\right) = \underline{1} - \frac{1}{2}u + \frac{3}{8}u^2 \approx \frac{1}{\ell} \cdot \cancel{\frac{l_0}{l_0}} \cdot z_0$$

$$\boxed{\begin{aligned} \left((u+1)^{-1/2}\right)' &= -\tfrac{1}{2} \cdot (u+1)^{-3/2} \\ \left(\;''\;\right)'' &= \tfrac{3}{4} \cdot (u+1)^{-5/2} \end{aligned}}$$

Zur weiteren Vereinfachung vernachlässige nun in Hinblick auf Gl. $\underline{\mathrm{II}}$, wo noch mit $z_0$ multipliziert, aber gleichzeitig noch ~~..~~ aufgrund Gl. (*) noch durch $z_0$ dividiert, sowie den Hinweis in d), alle Terme mit $\mathcal{O}\left(\frac{1}{z_0^3}\right)$.

Rücksubst.: $$\frac{l_0}{\ell} \approx \frac{l_0}{z_0} \cdot \left(\underline{1} - \frac{1}{2}\left(\frac{z^2 - 2zz_0 + y^2}{z_0^2}\right) + \frac{3}{8} \cdot \left(\frac{(z^2 - 2zz_0 + y^2)^2}{z_0^4}\right)\right)$$

$$= \Big[1 - \frac{1}{2}\Big(\frac{z^2-2zz_0+y^2}{z_0^2}\Big) + \frac{3}{8}\Big(\frac{\cancel{z^4} - \cancel{4z^3z_0} + \cancel{2z^2y^2} + 4z^2z_0^2 - \cancel{4zz_0y^2} + \cancel{y^4}}{z_0^4}\Big)$$

$$\approx \frac{l_0}{z_0}\Big[1 + \frac{-\frac{1}{2}z^2z_0 + zz_0^2 - \frac{1}{2}y^2z_0}{z_0^3} + \frac{\frac{3}{2}\,z^2z_0}{z_0^3}\Big]$$

$$= \frac{l_0}{z_0}\Big(1 + \frac{z^2z_0 + zz_0^2 - \frac{1}{2}y^2z_0}{z_0^3}\Big) = l_0\cdot\Big(\frac{z_0^2+z^2+zz_0-\frac{1}{2}y^2}{z_0^3}\Big) \approx \underline{\frac{l_0}{l}}$$

$\Rightarrow$ • $F_z = -mg + k(z-z_0)\cdot\left(\frac{l_0}{l}-1\right)$

$$= -mg + k\cdot(z_0-z) + kl_0(z-z_0)\frac{1}{l}$$

$$= -mg + k(z_0-z) + k\cdot l_0\cdot\Big[\frac{zz_0^2 + z^3 + z^2z_0 - \frac{1}{2}zy^2}{z_0^3} - \frac{z_0^3 + z^2z_0 + zz_0^2 - \frac{1}{2}y^2z_0}{z_0^3}\Big]$$

$$= -mg + k(z_0-z) + kl_0\cdot\Big(\frac{\cancel{z^3} - \cancel{\frac{1}{2}zy^2} + \frac{1}{2}y^2z_0}{z_0^3} - 1\Big)$$

Benutze a): $-k\cdot l_0 \underset{a)}{=} -k\cdot(z_0 - mg/k) = mg - kz_0$

$$= -mg + mg + kz_0 - kz_0 - kz + kl_0\cdot\frac{y^2}{2z_0}$$

$$= -kz + \frac{kl_0}{2z_0}y^2 \qquad \checkmark$$

• $F_y = yk\left(\frac{l_0}{l}-1\right) = yk\cdot\frac{l_0}{z_0^3}\cdot\left(z_0^2 + z^2 + zz_0 - \frac{1}{2}y^2\right) - yk$

$$= yk\cdot\left(\frac{l_0}{z_0} + \frac{l_0 z}{z_0^2} - 1\right)$$

Benutze erneut $\cancel{k}\cdot l_0 = \cancel{k}z_0 - mg/k$

$$\Rightarrow F_y = yk\cdot\Big(\frac{\cancel{z_0}}{\cancel{z_0}} - \frac{mg}{kz_0} + \frac{l_0 z}{z_0^2} \cancel{-1}\Big)$$

$$= -\frac{mg}{z_0}y + \frac{l_0 k}{z_0^2}yz \qquad \checkmark$$

$= F_z \quad \Leftrightarrow \quad m\ddot{z} + kz - \frac{kl_0}{2z_0^2} y^2 = 0$

$\Leftrightarrow \quad \underline{\ddot{z} + \omega^2 z - By^2 = 0} \qquad \text{III}$

$\omega^2 = \frac{k}{m}$

$B = \frac{kl_0}{2mz_0^2}$

$m\ddot{y} = F_y \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{y} + \frac{g}{z_0} y - \frac{kl_0}{mz_0^2} yz = 0$

$\Leftrightarrow \quad \underline{\ddot{y} + \Omega^2 y - 2Byz = 0} \qquad \text{IV}$

$\Omega^2 = \frac{g}{z_0}$

Spezialfall $y \equiv 0$ : III: $\ddot{z} + \omega^2 z = 0$

$\to$ harmonischer Oszillator,

Logisch, da vertikale Federschwingung ohne Pendel-Effekt. ✓

f) Gleichung III beschreibt einen ungedämpften harmonischen Oszillator mit erzwungener Anregung $B \cdot y^2 = B \cdot (A\cos(\Omega t))^2$.

$\cos^2 \Omega t = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\Omega t))$

$\Rightarrow \quad \ddot{z} + \omega^2 z = \frac{1}{2} BA^2 (1 + \cos(2\Omega t))$

$= C\,(1 + \cos(2\Omega t))$

$= C + C \cdot \cos(2\Omega t)$

$C =$ Konst., dieser Term tut nichts schlimmes, sondern verschiebt einfach $z$. $C \cdot \cos(2\Omega t)$ hingegen entspricht einer periodischen Anregung. Resonanzkatastrophe: $\omega_{Res} = 2\Omega_{Res} \Rightarrow \Omega_{Res} = \frac{\omega}{2} = \frac{k}{2m}$

Im Fall der Resonanzkatastrophe geht $\Omega \to \Omega_{Res}$

$\Rightarrow z \to \infty$ ! Das System zerlegt sich... Bam!

✓

5/5

Euler-Gl.

$$\cancel{I_1 \dot\omega_1}^{\omega_1 = \text{konst.}} + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 = 0 \qquad \text{I}$$

$$\Rightarrow \omega_2 \vee \omega_3 = 0$$

$$I_2 \dot\omega_2 + (I_1 - I_3)\omega_1\omega_3 = 0 \qquad \text{II}$$

$$I_3 \dot\omega_3 + (I_2 - I_1)\omega_1\omega_2 = 0 \qquad \text{III}$$

Fall 1: $\omega_2 = 0 \rightarrow \dot\omega_2 = 0$

$\overset{\text{II}}{\hookrightarrow}$ $\omega_1 \omega_3 = 0$ mit $\omega_1 = \text{konst.} \neq 0 \Rightarrow \omega_1 = 0$

Fall 2: $\omega_3 = 0 \rightarrow \dot\omega_3 = 0$

$\overset{\text{III}}{\hookrightarrow}$ $\omega_1 \omega_2 = 0$ mit $\omega_1 = \text{konst.} \neq 0 \Rightarrow \omega_2 = 0$

In beiden Fällen sind also $\omega_1$ und $\omega_2$ beide gleich 0. Damit handelt es sich um eine stabile Rotation um $\omega_3$. Auf demselben Wege müssen auch Rotationen um $\omega_1$ und $\omega_2$ stabil sein. Hier beinhaltet der Begriff der stabilen Rotation allerdings auch die labile Rotationsachse mit $I_{min} < I_{labil} < I_{max}$. ✓

genau, instabiler Fixpunkt ? Schön

~~Denn Drehungen~~

b) $\omega_1 = \omega_0 + \delta\omega_1(t)$

$\omega_2 = \delta\omega_2(t)$

$\omega_3 = \delta\omega_3(t)$

Euler-Gl.:

- $I_1 \delta\dot\omega_1 + (I_3 - I_2)\cancel{\delta\omega_2 \delta\omega_3}^{0} = 0 \qquad \text{I}$

$\Rightarrow \delta\omega_1 = \text{konst.}$

- $I_2 \delta\dot\omega_2 + (I_1 - I_3)\omega_0 \delta\omega_3 = 0 \qquad \text{II}$
- $I_3 \delta\dot\omega_3 + (I_2 - I_1)\omega_0 \delta\omega_2 = 0 \qquad \text{III}$

$\frac{d}{dt}\text{III}$: $I_3 \ddot\omega_3 + (I_2 - I_1)\omega_0 \delta\dot\omega_2 \Leftrightarrow \delta\dot\omega_2 = \frac{I_3 \delta\ddot\omega_3}{(I_1 - I_2)\omega_0}$

in II:

$$I_2 \cdot \frac{I_3 \delta\ddot\omega_3}{(I_1 - I_2)\omega_0} + (I_1 - I_3)\omega_0 \delta\omega_3 = 0 \qquad (*)$$

Betrachte die 3 möglichen Fälle:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{I} & I_1 > I_2 > I_3 \\ \text{II} & I_2 > I_3 > I_1 \\ \text{III} & I_3 > I_1 > I_2 \end{array}}$$

Def.: $A = \frac{I_2 I_3}{\omega_0 (I_1 - I_2)}$

$I_1 = I_j$ ?

$B = (I_1 - I_3)\omega_0$

I: A pos., B pos.

II: A neg., B neg.

} harmon. Oszillator

III A pos., B neg.

$\rightarrow$ e-Ansatz

$\overset{(*)}{\Rightarrow}$ $\delta\ddot{\omega}_3(t) + \underbrace{\frac{(I_1-I_3)(I_2-I_2)}{I_2 I_3}}_{-\Omega^2} \delta\omega_3(t) = 0$

$\rightarrow \delta\omega_3 = Ae^{\Omega t} + Be^{-\Omega t}$

Fall I u. II : $\Omega$ ~~neg.~~ imaginär (sonst divergiert $e^{-\Omega t}$-Term) → oszilliert ; Fall III : $\Omega$ reell pos. → haut ab, allerdings haben wir die $(\delta\omega)^2$-Terme vernachlässigt (✓)

c) Siehe b). Nur Rotationen um $I_{max}$ und $I_{min}$ sind stabil. ✓

5/5