6. Übung zur Physik III　　　　　WS 2015/2016

Ausgabe: 18.11.2015　　　　　Prof. Dr. F. Anders
Abgabe: 25.11.2015 bis 12:00　　　　　Prof. Dr. M. Bayer

Hausaufgabe 1: Legendre-Transformation und Jacobimatrix　　　　　5 Punkte

- Die Legendre-Transformation einer stetig-differenzierbaren Funktion $f(x_1, ..., x_n)$ ist definiert als

$$g(u_1, ..., u_n) = \sum_{i=1}^{n} u_i x_i - f, \tag{1}$$

wobei $u_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$. Damit die Legendre-Transformation eindeutig definiert ist, muss die Funktion f entweder konkav oder konvex sein.

Gegeben seien die folgenden Funktionen:

a) $f(x) = e^x$

b) $f(x, y) = x^2 + y^2$.

Grenzen Sie bei allen Funktionen den Definitionsbereich so ein, dass die Hessematrix $\underline{\underline{H}}(f)$ entweder positiv oder negativ definit ist. Führen Sie auf diesem Intervall für jede Variable jeweils eine Legendre-Transformation durch. Wenden Sie die Legendre-Transformation jeweils noch einmal an und untersuchen Sie, ob Sie wieder die Ausgangsfunktion erhalten.

- Gegeben sei eine differenzierbare Funktion $\underline{f}$: $\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ mit Komponenten $f_i(y_1, ..., y_n)$ für $i \in \{1, ..., m\}$.

c) Beweisen Sie, dass das Differenzial $d\underline{f}$ von $\underline{f}$ durch die Formel

$$d\underline{f} = \underline{\underline{J_f}}\ d\underline{y} \tag{2}$$

gegeben ist, wobei $\underline{\underline{J_f}}$ die Jacobimatrix der Funktion $\underline{f}$ ist. Stellen Sie die Elemente der Matrix explizit auf.
Hinweis: Schreiben Sie df_i, das Differenzial der Komponente f_i, als die Summe der partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$.

d) Sei nun $\underline{y} = \underline{g}(\underline{x})$ eine differenzierbare Funktion $\underline{g}$: $\mathbb{R}^l \mapsto \mathbb{R}^n$ mit Komponenten $g_i(x_1, ..., x_l)$ für $i \in \{1, ..., n\}$, so dass $\underline{h} := \underline{f} \circ \underline{g}$. Zeigen Sie, dass die Kettenregel

$$d\underline{h} = \underline{\underline{J_f}}\ \underline{\underline{J_g}}\ d\underline{x} \tag{3}$$

gilt, wobei $\underline{\underline{J_g}}$ die Jacobimatrix der Funktion $\underline{g}$ ist.

e) Sei $l = m = n$, wie sieht dann $\underline{\underline{J_f}}$ in dem speziellen Fall $\underline{f} = \underline{g}^{-1}$ aus?

Hausaufgabe 2: Eigenschaften der Poissonklammern　　　　　5 Punkte

Aus der Vorlesung kennen Sie die Poissonklammer zweier Observablen $f(q_i, p_i, t)$ und $g(q_i, p_i, t)$:

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right).$$

a) Bestimmen Sie $\{q_j, q_k\}$, $\{p_j, p_k\}$ und $\{q_j, p_k\}$.

b) Beweisen Sie die Jacobiidenität der Poissonklammer:

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0.$$

c) Zeigen Sie, dass die Taylorentwicklung einer beliebigen, nicht explizit zeitabhängigen Funktion $f(q_i(t), p_i(t))$ sich für konservative Systeme als

$$f(q_i(t), p_i(t)) = f_0 + t\,\{f_0, H\} + \frac{t^2}{2}\,\{\{f_0, H\}\,, H\} + \ldots$$

schreiben lässt, wobei $f_0 \equiv f(q_i(0), p_i(0))$.

d) Zeigen Sie, dass die aus zwei Erhaltungsgrößen f und g gebildete Poissonklammer $\{f, g\}$ ebenfalls eine Erhaltungsgröße ist.

e) Betrachten Sie ein Planetensystem mit N Planeten ($N > 2$). Wenn sich alle Planeten in der x-y-Ebene bewegen, sind die Drehimpulskomponenten L_x^i und L_y^i null, also zeitlich konstant. Nach d) sollte nun folgen, dass $L_z^i = \left\{L_x^i, L_y^i\right\}$ eine Erhaltungsgröße ist - trotz der gegenseitigen Wechselwirkung der Planeten.

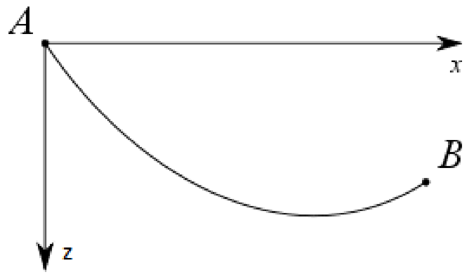
Was ist an dieser Argumentation falsch?

Hausaufgabe 3: Variationsrechnung — 5 Punkte

Johann Bernoulli (Juni 1696): *“Wenn in einer verticalen Ebene zwei Punkte A und B gegeben sind, soll man dem beweglichen Punkte M eine Bahn AMB anweisen, auf welcher er von A ausgehend vermöge seiner eigenen Schwere in kürzester Zeit nach B gelangt.“*

“Damit Liebhaber solcher Dinge Lust bekommen sich an die Lösung dieses Problems zu wagen, mögen sie wissen, dass es nicht, wie es scheinen könnte, blosse Speculation ist und keinen praktischen Nutzen hat. Vielmehr erweist es sich sogar, was man kaum glauben sollte, auch für andere Wissenszweige, als die Mechanik, sehr nützlich. Um einem voreiligen Urtheile entgegenzutreten, möge noch bemerkt werden, dass die gerade Linie AB zwar die kürzeste zwischen A und B ist, jedoch nicht in kürzester Zeit durchlaufen wird. Wohl aber ist die Curve AMB eine den Geometern sehr bekannte; die ich angeben werde, wenn sie nach Verlauf dieses Jahres kein anderer genannt hat.“

Heutzutage würde Johann Bernoulli vermutlich sagen: Gegeben seien zwei Punkte $A = (0,0)$ und $B = (x_b, z_b)$. Bestimmen Sie die Kurve, auf der ein Teilchen mit Masse m und Anfangsgeschwindigkeit null unter dem Einfluss des Gravitationsfeldes am schnellsten von Punkt A nach B gelangt. Lösen Sie das Problem wie folgt:



a) Zeigen Sie, dass wenn $F(z, z')$ die Euler-Lagrange-Gl.

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial z'} - \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \tag{4}$$

mit $z' = \frac{dz}{dx}$ erfüllt und zusätzlich nicht explizit von x abhängt, die Gleichung

$$F - z'\frac{\partial F}{\partial z'} = c = \text{const} \tag{5}$$

gilt.
Hinweis: Kluges Ergänzen einer Null.

b) Zeigen Sie, dass das zu Johann Bernoullis Problem passende $F(z, z')$ gegeben ist durch

$$F(z, z') = \sqrt{\frac{1 + z'^2}{2gz}} \tag{6}$$

mit der Erdbeschleunigung g.

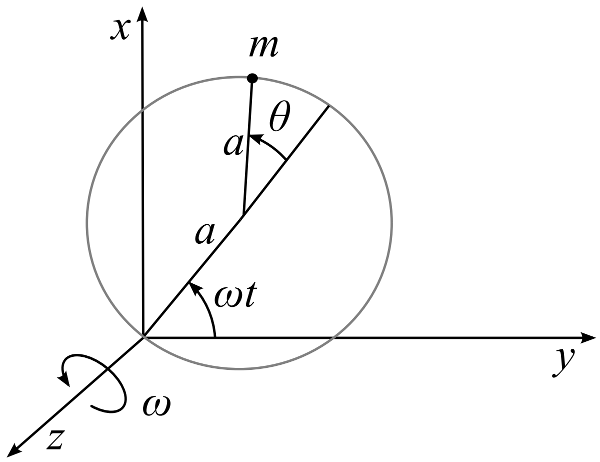
c) Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabenteil a), dass

$$\int \mathrm{d}x = \int \sqrt{\frac{z}{2R - z}}\, \mathrm{d}z \quad \text{mit} \quad R := \frac{1}{4gc^2} \tag{7}$$

gilt.

d) Substituieren Sie $z = 2R\sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right) = R\,(1 - \cos(\phi))$ und zeigen Sie, dass die gesuchte Lösung eine Zykloide ist.

Hausaufgabe 4: Perle auf kreisförmigem Drahtring — 5 Punkte



In der xy-Ebene rotiert mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω ein kreisförmiger Drahtring mit dem Radius a um den Punkt (0,0), der auf der Kreislinie liegt. Auf dem Ring gleitet reibungsfrei eine Perle der Masse m. Es wirken keine äußeren Kräfte.

a) Bestimmen Sie die Lagrangefunktion in Abhängigkeit der verallgemeinerten Koordinate θ (siehe Skizze, *Hinweis:* Vereinfachen Sie so weit wie möglich!).

b) Bestimmen Sie aus der Lagrangefunktion die Bewegungsgleichungen für θ! Kommt Ihnen das Ergebnis bekannt vor?

c) Bestimmen Sie den zu θ konjugierten verallgemeinerten Impuls p_θ und die Hamiltonfunktion $H(\theta, p_\theta)$ (*Hinweis:* Schreiben Sie *zunächst* L als Funktion von $\dot{\theta}$ und θ und vereinfachen Sie so weit wie möglich! Eliminieren Sie *dann* $\dot{\theta}$ zugunsten von p_θ!).

d) Bestimmen Sie aus den Hamiltonschen (kanonischen) Gleichungen die Bewegungsgleichung für θ!