10. Übung zur Physik III — WS 2015/2016

Ausgabe: 16.12.2015
Abgabe: 06.01.2016 bis 12 Uhr!

Prof. Dr. F. Anders
Prof. Dr. M. Bayer

Aufgabe 1: Eigenfrequenzen einer Duschkabine — 5 Punkte

Gegeben sei eine Duschkabine mit den Abmessungen h,b,t. Gesucht sind die Lösungen der Wellengleichung

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = \Delta\Phi$$

für das Geschwindigkeitspotential Φ, wobei $\nabla\Phi = v$. Verwenden sie für keine der Rechnungen Exponentialfunktionen.

a) Geben sie die Randbedingungen für das Geschwindigkeitspotential an, die sich daraus ergibt, dass die Dusche feste Wände hat.

b) Bei einer stehenden Welle schwingt jedes Element des Mediums mit der gleichen Frequenz und Phase, daher ist die Zeitabhängigkeit gegeben durch:

$$\Phi(x, y, z, t) = A(x, y, z) \cdot \cos(\omega t)$$

Bestimmen Sie eine DGL aus der Wellengleichung für die $A(x, y, z)$

c) Die Differenzialgleichung erinnert sie entfernt(!) an den harmonischen Oszillator. Raten sie spezielle Lösungen $A(x)$, $A(y)$, $A(z)$ der Differentialgleichung von $A(x, y, z)$, welche den Randbedingungen genügen.

d) Zeigen sie, dass auch das Produkt spezieller Lösungen die DGL für $A(x, y, z)$ erfüllt.

e) Um die Eigenfrequenzen zu bestimmen setzen Sie die vollständige Lösung $\Phi(x, y, z, t)$ in die Wellengleichung ein.

f) Was fällt Ihnen auf, wenn Sie die Eigenfrequenzen $\omega_{l,m,n}$:$\omega_{1,0,0}$, $\omega_{0,1,0}$ und $\omega_{0,0,1}$ für eine Kubische Dusche (b=h=t) betrachten?

Aufgabe 2: Halbe Trommel — 5 Punkte

Bestimmen Sie anhand der Lösung der Schwingungsgleichung für eine Vollkreismembran

$$U(r, \varphi, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} J_m(kr)\,(A\sin(m\varphi) + B\cos(m\varphi))\,(C\sin(\omega t) + D\cos(\omega t))$$

die Eigenschwingung einer ringsum eingespannten Halbkreismembran mit Radius R.

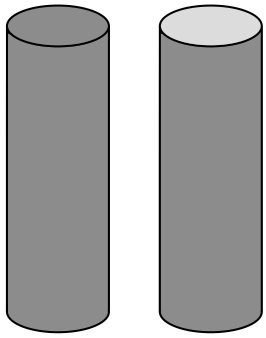
a) Geben Sie die Randbedingungen für eine ringsum eingespannte Halbkreismembran an.

b) Was folgt mit den Randbedingungen für die φ-Abhängigen Winkelfunktionen, was für die Besselfunktion?

c) Wie sieht nun die Lösung der Wellengleichung aus?

d) Stellen Sie einige einfache Eigenschwingungen grafisch dar.

Aufgabe 3: Orgelpfeifen **5 Punkte**



Eine Orgelpfeife kann in guter Näherung als zylindrischer Resonator mit geschlossenem Boden betrachtet werden. Gedackte Orgelpfeifen sind oben geschlossen (linke Orgelpfeife), während ungedackte Orgelpfeifen oben offen sind (rechte Orgelpfeife).

a) Leiten Sie den Laplaceoperator in Zylinderkoordinaten her, denken Sie dabei an

$$\Delta\phi = \frac{1}{g_1 g_2 g_3}\left(\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{g_2 g_3}{g_1}\frac{\partial}{\partial u_1}\right) + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{g_1 g_3}{g_2}\frac{\partial}{\partial u_2}\right) + \frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{g_1 g_2}{g_3}\frac{\partial}{\partial u_3}\right)\right)\phi.$$

Wie können Sie diese Aufgabe mit den bereits bekannten Lösungen der Wellengleichung bearbeiten?

b) Berechnen Sie die Eigenfrequenzen einer gedackten und einer ungedackten Orgelpfeife. Worin unterscheiden sie sich?

c) Warum werden sowohl gedackte als auch ungedackte Pfeifen im Orgelbau benutzt?

Aufgabe 4: Delta-Distribution **5 Punkte**

In der Physik wird die sogenannte Delta-'Funktion' verwendet. Mathematisch gesehen handelt es sich bei der Delta-'Funktion' um eine Distribution. Man kann die Delta-Distribution wie alle anderen Distributionen auch als Grenzwert einer Funktionenfolge darstellen. Die wichtigste Klasse von Funktionenfolgen, mit denen die Delta-Distribution dargestellt werden kann, ist die Menge der Dirac-Folgen. Die angegeben Folgen sind Beispiele für Dirac-Folgen

i) $\delta_k(x) = \sqrt{\frac{k}{2\pi}} e^{-\frac{x^2 k}{2}}$

ii) $\delta_k(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1/k}{1/k^2 + x^2}$

iii) $\delta_k(x) = \begin{cases} k & |x| \leq \frac{1}{2k} \\ 0 & sonst \end{cases}$

a) Skizzieren Sie die angegebenen Dirac-Folgen für unterschiedliche Werte k und machen Sie sich anschaulich klar, wie diese mit der bekannten Delta-'Funktion' zusammenhängen.

b) Eine wichtige Eigenschaft jeder Dirac-Folge ist folgende Identität.

$$\int_{\mathbb{R}^n} \delta_k(x) dx = 1 \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass die angegebenen Folgen diese Eigenschaft erfüllen.
(Hinweis: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$)

c) Die Delta-Distribution ordnet jeder beliebig oft differenzierbaren Funktion $f(x)$ eine Zahl zu, nämlich die Auswertung der Funktion an der Stelle 0.

$$\delta(f) = \int \delta(x) f(x) dx = f(0) \tag{2}$$

Diese definierende Eigenschaft der Delta-Distribution ist im Grunde eine Faltung der Delta-Funktion mit einer Funktion $f(x)$.
Zeigen Sie durch Grenzwertbildung, dass die angegebenen Folgen diese Eigenschaft korrekt erfüllen. Verwenden Sie hierzu als Beispiel die Funktion $f(x) = x^2$.

$$\lim_{k\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_k(x) f(x) dx = f(0) \tag{3}$$