11. Übung zur Physik III — WS 2015/2016

Ausgabe: 06.01.2016
Abgabe: 13.01.2016 bis 12:00

Prof. Dr. F. Anders
Prof. Dr. M. Bayer

Hausaufgabe 1: Der Weinkeller — 5 Punkte

Bei der Lagerung von Weinen muss darauf geachtet werden, dass die Flaschen möglichst keinen Temperaturschwankungen ausgesetzt sind. Die Tiefe eines Weinkellers im Boden kann solche Schwankungen dämpfen. Die Wärmeleitungsgleichung in einer Dimension lautet

$$\frac{\partial T}{\partial t} - k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0. \tag{1}$$

Die Temperatur auf der Erdoberfläche sei näherungsweise

$$T(x=0,t) = T_0 + T_1\cos(\omega t) \tag{2}$$

Lösen Sie die Wärmeleitungsgleichung unter Berücksichtigung der Randbedingung (Tipp: Separationsansatz, nur physikalisch sinnvolle Lösungen berücksichtigen).
Identifizieren Sie eine Eindringtiefe L und eine Eindringgeschwindigkeit v.
k hat üblicherweise einen Wert von $0,08\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{Tag}}$. Berechnen Sie L und v für tageszeitliche und jahreszeitliche Schwankungen. Nehmen sie jeweils typische Werte für T_1 an und berechnen die Mindesttiefe des Weinkellers damit die Temperatur im Verlauf eines Tages um weniger als $0,2\,\mathrm{K}$ und im Verlauf eines Jahres um weniger als $5\,\mathrm{K}$ schwankt.

Hausaufgabe 2: Diffusion in 3D — 5 Punkte

In dieser Aufgabe sollen Sie die Lösung der dreidimensionalen Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = D\Delta\rho \tag{3}$$

bestimmen. $\rho = \rho(\vec{r},t)$ ist eine Dichte, die die Bedingung $\int \rho \mathrm{d}^3 r = M$ erfüllen soll.

a) Zeigen Sie zunächst, dass ein Separationsansatz $\rho(\vec{r},\vec{t}) = \rho_1(\vec{r})\rho_2(t)$ keine dynamischen Lösungen liefert.

b) Führen Sie nun eine Koordinatentransformation $\rho(\vec{r},t) \to \rho(\vec{u},v)$ durch mit

$$\vec{u} = \frac{\vec{r}}{\sqrt{Dt}} \tag{4}$$

$$v = t \quad . \tag{5}$$

Transformieren Sie die Diffusionsgleichung in die neuen Koordinaten, verwenden Sie einen Separationsansatz $\rho(\vec{u},v) = F(\vec{u})G(v)$ und stellen Sie zwei unabhängige Differentialgleichungen für die separierten Funktionen auf.

c) Lösen Sie zuerst die DGL für den v-abhängigen Anteil $G(v)$. Zeigen mithilfe dieser Lösung und der Normierungsbedingung für ρ, dass die Separationskontante $\alpha = -\frac{3}{2}$ sein muss. Zeigen Sie nun, dass für dieses α die Lösung der zweiten DGL $F(\vec{u}) = C\exp\left(-\vec{u}^2/4\right)$ ist.

d) Sie sollten nun die Lösung

$$\rho_1 = \frac{C}{\sqrt{(Dt)^3}} \exp\left(-\frac{\vec{r}^2}{4Dt}\right) \tag{6}$$

erhalten haben. Warum ist es vernünftig, das D unter der Wurzel zu ergänzen? Die allgemeine Lösung erhält man wie üblich aus Überlagerung beliebiger spezieller Lösungen

$$\rho(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{(Dt)^3}} \int C(\vec{r'}) \exp\left(-\frac{(\vec{r} - \vec{r'})^2}{4Dt}\right) \mathrm{d}^3 r' \quad . \tag{7}$$

Bestimmen Sie $C(\vec{r})$ aus $\rho(\vec{r}, 0)$.

e) Bestimmen Sie $\rho(\vec{r}, t)$ für eine zum Zeitpunkt $t = 0$ punktförmige Massenverteilung.

Hausaufgabe 3: Kugelflächenfunktionen — 5 Punkte

Die Kugelflächenfunktionen sind durch

$$Y_{lm}(\Theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos\Theta) e^{im\phi}$$

mit den zugeordneten Legendre-Polynomen

$$P_l^m = (-1)^m (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m} P_l(x) = \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{\mathrm{d}^{l+m}}{\mathrm{d}x^{l+m}} (x^2 - 1)^l$$

definiert.

a) Es soll zunächst die Orthonormalität nachgewiesen werden. Hierzu wird das Problem auf die Orthogonalität der Legendre-Polynome zurückgeführt. Gehen Sie dabei wie folgt vor.

(i) Leiten Sie die definierende DGL der Legendre-Polynome

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((1 - x^2)\frac{\mathrm{d}P_l}{\mathrm{d}x}\right) + l(l+1)P_l = 0$$

1,2,3(...) mal ab und finden Sie einen allgemeinen Ausdruck für mehrfache Ableitungen der DGL der Form

$$0 = a(x)\frac{\mathrm{d}^{k+1}}{\mathrm{d}x^{k+1}} P_l + b(x)\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} P_l + c(x)\frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}x^{k-1}} P_l \ .$$

Verwenden Sie diesen, um zu zeigen, dass

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((1 - x^2)^m \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m} P_l\right) = -(l(l+1) - m(m-1))(1 - x^2)^{m-1} \frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}x^{m-1}} P_l \tag{8}$$

gilt.

(ii) Betrachten Sie die Größe

$$I_{ll'm} = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x P_l^m P_{l'}^m \ .$$

Verwenden Sie partielle Integration und die Gleichung (8), um eine Rekursionsformel für $I_{ll'm}$ in m zu finden und $I_{ll'm}$ mithilfe dieser durch $I_{ll'0}$ auszudrücken.

Hinweis: Die Umformung $l(l+1) - m(m-1) = (l+m)(l-m+1)$ könnte nützlich sein.

(iii) Berechnen Sie die Größe $I_{ll'0}$.

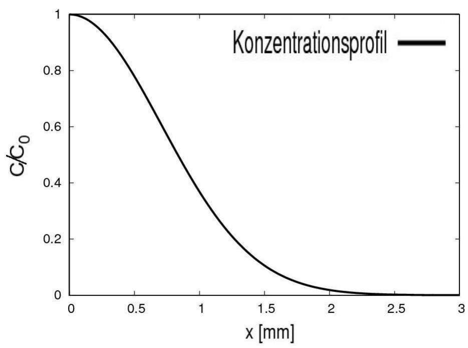
(iv) Zeigen Sie nun, dass die Kugelflächenfunktionen orthonormal sind, also dass

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^{\pi} \sin(\Theta)\mathrm{d}\Theta Y^*_{l'm'} Y_{lm} = \delta_{ll'}\delta_{mm'}$$

gilt.

b) Berechnen Sie alle Kugelflächenfunktionen für l=0,1 und drücken Sie die kartesischen Koordinaten auf der Einheitskugel durch Kugelflächenfunktionen aus.

Hausaufgabe 4: Diffusion von Kohlenstoff in Eisen 5 Punkte



Will man die Oberfläche eines Werkstücks aus Eisen härten und gleichzeitig dessen Biegsamkeit unter Last aufrechterhalten, so kann man es mit Kohlestaub bedecken und diesen bei hohen Temperaturen in das Material eindiffundieren lassen. Im Folgenden soll die Diffusion von Kohlenstoff in Eisen (Diffusionskoeffizient $D = 1.33 \cdot 10^{-5} \frac{\mathrm{mm}^2}{\mathrm{s}}$ bei $T = 1000\,°\mathrm{C}$) näherungsweise für eine unendlich ausgedehnte Eisenplatte betrachtet werden. Es handelt sich um ein effektives 1D-Problem, da nur die Eindringtiefe x eine Rolle spielt. Zum Anfangszeitpunkt unserer Betrachtung soll bereits etwas Kohlenstoff in das Eisenstück vorgedrungen sein, so dass das Konzentrationsprofil die Form

$$C(x \geq 0, t = 0) = C_0 \exp\left(-\frac{x^2}{l^2}\right)$$

mit der Breite $l = 1$ mm und $C(x = 0, t = 0) = C_0$ hat.

a) Schreiben Sie die eindimensionale Diffusionsgleichung. Benutzen Sie den Produktansatz $c(x,t)|_{t>0} = \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp(-\alpha t)\exp(ikx)$ und bestimmen Sie α mithilfe der Diffusionsgleichung. Dies ist die Lösung für einen einzelnen k-Wert. Integrieren Sie nun über alle k-Werte, um die allgemeine Lösung $C(x,t)$ zu erhalten (das Integral muss hier noch nicht explizit berechnet werden), und betrachten Sie zunächst die Formel für den Speziallfall $C(x, t = 0)$. Die Form des Integrals sollte Ihnen bekannt vorkommen. *Hinweis*: $A = A(k)$ ist nun keine Konstante, sondern von k abhängig.

b) Bestimmen Sie die Koeffizienten $A(k)$, indem Sie eine Rücktransformation durchführen und die Anfangsbedingung einsetzen. *Hinweis*: $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\alpha(u + iv)^2)du = \sqrt{\pi/\alpha} \qquad \alpha, v \in \mathbb{R}, \alpha > 0.$

c) Berechnen Sie die zeitabhängige Lösung $C(x,t)$ durch Einsetzen der Koeffizienten $A(k)$.

d) Wie lange dauert es, bis sich die Kohlenstoffkonzentration an der Oberfläche des Eisenstückes halbiert hat?