9. Übung zur Physik III — WS 2015/2016

Ausgabe: 9.12.2015 — Prof. Dr. F. Anders
Abgabe: 16.12.2015 bis 12 Uhr — Prof. Dr. M. Bayer

Aufgabe 1: Fourierreihen — 5 Punkte

Die folgenden Funktionen seien auf dem Intervall $[-\pi, \pi)$ wie folgt definiert:

a) $f_1(x) = \begin{cases} x + 2\pi, & -\pi \leq x < 0 \\ x, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$

b) $f_2(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \leq x < 0 \\ 1, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$

c) $f_3(x) = x^2$

Über dieses Intervall hinaus werden die Funktionen periodisch fortgesetzt:

$$f_i(x + 2m\pi) = f_i(x), \quad \forall m \in \mathbb{Z}.$$

Entwickeln Sie f_1 bis f_3 in Fourierreihen $S^n(x)$, definiert durch:

$$S^n(x) = \sum_{k=-n}^{n} A_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} = \sum_{k=-n}^{n} A_k(\cos kx + \mathrm{i} \sin kx)$$

mit den Fourierkoeffizienten

$$A_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} dx.$$

Aufgabe 2: Fouriertransformation der Gauß-Funktion — 5 Punkte

Die Fouriertransformierte einer Funktion $f(t)$ ist gegeben durch

$$F(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t f(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \; .$$

a) Berechnen Sie $F(\omega)$ für die Gauß-Funktion

$$f(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{a^2}\right) \quad , a \in \mathbb{R}.$$

b) Bestimmen Sie die Breite Δt der Funktion $f(t)$ und die Breite $\Delta\omega$ der Funkion $F(\omega)$ als den Abstand der Punkte, bei denen $f(t)$ bzw. $F(\omega)$ auf das $\frac{1}{\mathrm{e}}$-fache des Maximums abgefallen sind.

c) Bilden Sie das Produkt $\Delta t \cdot \Delta\omega$ und interpretieren Sie das Ergebnis.

Aufgabe 3: Klirrfaktor eines Verstärkers **5 Punkte**

Ein Verstärker erzeugt aus einem wechselstromförmigen Eingangssignal eine Dreieckspannung doppelter Amplitude. Liegt am Eingang also eine Spannung der Form

$$U(t) = 5V\cos(\omega t)$$

mit $\omega = 1\,\mathrm{s}^{-1}$ an, so ergibt sich das unten zu sehende Ausgangssignal. Der Klirrfaktor k des Verstärkers gibt an, wie stark das Ausgangssignal verzerrt ist. Er ist definiert als:

$$k^2 = \frac{U_2^2 + U_3^2 + U_4^2 + ...}{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + U_4^2 ...},$$

wobei U_i der Effektivwert der i-ten Oberschwingung ist. Zur Bestimmung des Klirrfaktors gehen Sie wie folgt vor:

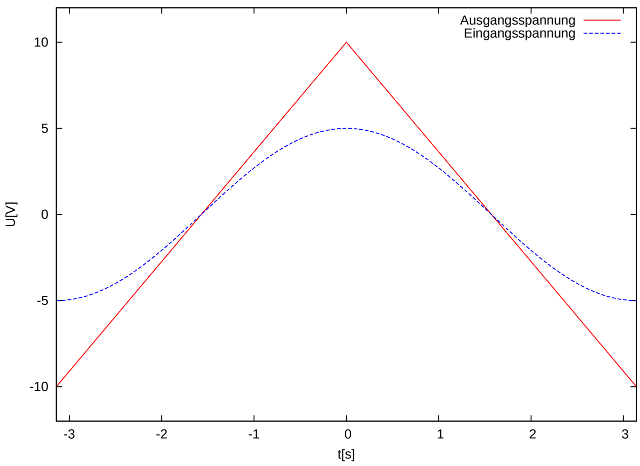
a) Zerlegen Sie das Ausgangssignal für die obige Eingangsspannung in seine Fourierreihe! Geben Sie das Ergebnis in Form der reellen Darstellung der Fourierreihe an.

b) Zeigen Sie, dass der Effektivwert U_i bis auf einen von i unabhängigen Faktor dem Fourierkoeffizienten entspricht.

c) Bestimmen Sie den Klirrfaktor des Verstärkers! Hinweis:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

d) Geben Sie den Klirrfaktor in Dezibel an!



Aufgabe 4: Membranschwingungen **5 Punkte**

Betrachten Sie eine Rechteckmembran mit den Kantenlängen a und b, die an drei Seiten fest eingespannt ist und deren vierte Seite frei schwingen kann. Für die freie Seite gilt die Randbedingung $\partial_y u(x, y = b, t) = 0$.

a) Geben Sie die Randbedingungen an und bestimmen Sie (bis auf Vorfaktoren) die Lösungen der Wellengleichung.

b) Bestimmen Sie die vollständige Lösung für das Problem unter den Anfangsbedingungen

$$u(x, y, t = 0) = 0$$
$$\dot{u}(x, y, t = 0) = v_0 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cdot \frac{y}{b}.$$

Verwenden Sie hierzu die Orthogonalitätsrelation

$$\frac{2}{L}\int_0^L \sin(k_n x)\sin(k_m x)\mathrm{d}x = \delta_{nm}.$$

c) Betrachten Sie nun eine an allen vier Seiten eingespannte Membran. Geben Sie $\omega_{n_x n_y}$ für diesen Fall an und finden Sie je eine Frequenz, die

i) nicht entartet,
ii) 2-fach entartet,
iii) 3-fach entartet ist.

Das Seitenverhältnis der Membran sei $b = 2a$.