

Versuch V23

Quantenanalogen

Christian Wischnewski* Leanna Splinter**

26.2.2014

*christian.wischnewski@tu-dortmund.de

**leanna.splinter@tu-dortmund.de

Inhaltsverzeichnis

1	Theorie	3
1.1	Stehende Schallwelle in einer Röhre: Analogon zum Quant in einer Box . .	3
1.2	Lebensdauer von Zuständen	4
1.3	Modellierung eines Wasserstoffatoms mittels eines sphärischen Resonators	5
1.4	Modellierung eines eindimensionalen Festkörpers	6
2	Versuchsaufbau und -durchführung	8
3	Auswertung	11
3.1	Einführungsmessung	11
3.2	Modellierung eines Wasserstoffatoms	12
3.2.1	Verschiedene Winkel	12
3.2.2	Doppelpeakuntersuchung	15
3.2.3	Bestimmung der Kugelflächenfunktionen	16
3.3	Modellierung eines eindimensionalen Festkörpers	20
3.3.1	Bestimmung der Schallgeschwindigkeit	20
3.3.2	Bestimmung der Wellenzahl	24
3.3.3	Analyse der Bandstruktur	27
3.3.4	Vergleich verschiedener Anzahlen von Röhren	33
3.3.5	Vergleich verschiedener Rohrlängen	34
3.4	Modellierung eines Festkörpers durch Vergrößerung eines Moleküls	36
3.4.1	Einzelne Röhre	36
3.4.2	Zwei Röhren	37
3.4.3	Mehrere Röhren	38
3.4.4	Alternierende Iriden	41
3.4.5	Einheitszellen	43
3.4.6	Einfügen von Defekten	45
4	Diskussion	47
5	Literaturverzeichnis	48

1 Theorie

Ziel dieses Versuches ist es Analogien zwischen dem Verhalten einer klassischen Schallwelle und einem quantenmechanischen Teilchen zu analysieren.

1.1 Stehende Schallwelle in einer Röhre: Analogon zum Quant in einer Box

Resonanzen entstehen, wenn eine stehende Welle in beispielsweise einer Röhre vorliegt. Dabei handelt es sich um eine Überlagerung von einer ein- und einer auslaufenden Welle, die sich in Phase befinden und somit konstruktiv miteinander interferieren. Dabei muss die Resonanzbedingung

$$2L = n\lambda \quad (1.1.1)$$

erfüllt sein. L steht für die Länge der Röhre, λ für die Wellenlänge der Welle und n für eine natürliche Zahl.

Der Druck p einer Schallwelle wird durch die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho\kappa} \Delta p \quad (1.1.2)$$

beschrieben. ρ beschreibt die Dichte des umgebenden Mediums und κ dessen Kompressibilität. Als Randbedingungen gelten die von Neumann Randbedingungen:

$$\begin{aligned} v(0) = v(L) &= 0 \\ \frac{\partial p(0)}{\partial x} = \frac{\partial p(L)}{\partial x} &= 0. \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung in einer Dimension lautet:

$$p(x, t) = p_0 \cos(kx + \alpha) \cos(\omega t). \quad (1.1.3)$$

p_0 definiert die Amplitude der Welle, k die Wellenzahl, α eine relative Phase und ω die Kreisfrequenz.

Mit Hilfe der von Neumann Randbedingungen ergibt sich: $\alpha = 0$ und $k = \frac{n\pi}{L}$.

Um die Analogien zum Elektron in einer Box herzustellen, wird dieses Modell kurz skizziert.

Es wird von einem Elektron in einem unendlichen hohen Potentialtopf ausgegangen, welches durch die freie Schrödingergleichung

$$i\hbar\partial_t\psi(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(x, t) \quad (1.1.4)$$

beschrieben wird, m steht für die Masse des Elektrons. Durch Abspaltung der Zeitabhängigkeit ergibt sich die stationäre Schrödingergleichung:

$$E\psi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(x). \quad (1.1.5)$$

Durch die Dirichlet Randbedingungen

$$\psi(0) = \psi(L) = 0$$

folgt für die allgemeine Lösung

$$\psi(x) = A \sin(kx + \alpha), \quad (1.1.6)$$

dass gilt: $\alpha=0$ und $k = \frac{n\pi}{L}$.

Aufgrund der Normierung gilt für die Amplitude: $A = \sqrt{\frac{2}{L}}$.
Insgesamt ergibt sich für die Wellenfunktion als Lösung:

$$\psi(x, t) = A \sin(kx) e^{i\omega t}. \quad (1.1.7)$$

Die Dispersionsrelation hat die folgende Form:

$$E(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2mL^2}. \quad (1.1.8)$$

Die Schrödingergleichung sowie die klassische Wellengleichung beschreiben jeweils delokalisierte Objekte. $p(x, t)$ beschreibt die Amplitude der Schallwelle, wogegen $|\psi(x, t)|^2$ für eine Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Elektrons steht.

Beide Gleichungen haben eine andere Ordnung der Zeitabhängigkeit. In der Klassik ist die Zeitableitung von zweiter Ordnung und führt so zu einer linearen Dispersion, $E(k) = \hbar k$. In der Quantenmechanik ist die zeitliche Ableitung nur von erster Ordnung, was in einer parabolischen Dispersionsrelation 1.1.8 resultiert.

In beiden Fällen handelt es sich um eine stehende Welle, jedoch mit unterschiedlichen Knotenpositionen auf Grund der verschiedenen Randbedingungen.

1.2 Lebensdauer von Zuständen

Eigenzustände leben in der Regel nicht ewig. In der klassischen Physik zerfallen Zustände durch Energieverlust, der beispielsweise durch Reibung entsteht. In der Quantenmechanik bleibt nur der Grundzustand für unendlich lange Zeit erhalten.

Allgemein wird eine Welle durch den Ausdruck

$$\psi(x, t) = f(x) e^{-(\lambda + i\omega_0)t}$$

beschrieben, wobei ω_0 für die Eigenfrequenz steht.

Mit Hilfe einer Fouriertransformation kann die Spektralfunktion $A(\omega)$ berechnet werden.

Deren Betragsquadrat

$$|A(\omega)|^2 = \frac{1}{2\pi \left((\omega_0 - \omega)^2 + \lambda^2 \right)}$$

wird auch als Lorentzpeak bezeichnet. λ ist die Zerfallsbreite, sie steht für die Breite des Peaks bei halber Höhe des Maximums. Die Breite eines Zustandes Γ ist wie folgt definiert:

$$\Gamma = \hbar\lambda = \frac{\hbar}{\tau}. \quad (1.2.9)$$

τ bezeichnet die Lebensdauer, sie beschreibt die Zeit, nachdem die Amplitude auf den Bruchteil $\frac{1}{e}$ ihres Maximums abgefallen ist. Das bedeutet also, dass eine größere Linienbreite λ für eine kürzere Lebensdauer τ steht.

Das klassische Analogon zur Zerfallsbreite setzt sich wie folgt zusammen:

$$\lambda = 2\gamma\omega. \quad (1.2.10)$$

Hierbei beschreibt γ die Dämpfung des Oszillators.

Die Resonanzbreite $\Delta\omega$ wird durch

$$\Delta\omega = 2\sqrt{3}\lambda \quad (1.2.11)$$

beschrieben. Wäre keine Dämpfung vorhanden, $\gamma = 0$, so wären die Resonanzen durch Deltapeaks vertreten, $\Delta\omega = 0$.

Höhere Resonanzen haben durch einen größeren Wert von λ eine größere Breite, vergleiche Formel 1.2.10 und 1.2.11. Dieser Effekt resultiert allein aus der nicht verschwindenden Dämpfung.

1.3 Modellierung eines Wasserstoffatoms mittels eines sphärischen Resonators

Ein Wasserstoffatom besteht aus einem einzelnen Elektron, welches sich im Coulombpotential eines Kerns befindet. Dieses Problem ist analytisch exakt lösbar.

Die sphärische Symmetrie des Modells sorgt dafür, dass die Schrödingergleichung in einen Radial- und einen Winkelanteil faktorisiert. Die Lösungen des Winkelanteils sind die Kugelflächenfunktionen. Die Eigenenergien sind

$$E_{n',l} = - \left(\frac{e^2}{\hbar c} \right)^2 \frac{mc^2}{2(l+1+n')^2}.$$

n' steht für die Radialquantenzahl und l für die Bahndrehimpulsquantenzahl.

Der Übersicht halber werden diese zusammengefasst zu:

$l+1+n' = n$, der Hauptquantenzahl.

Die magnetische Quantenzahl m durchläuft den Wertebereich: $-l \leq m \leq l$.

Alle Energieniveaus mit gleicher Quantenzahl n und l sind demnach $(2l + 1)$ -fach entartet. Diese Entartung wird aufgehoben, wenn die sphärische Symmetrie des Problems gebrochen wird.

Mit Hilfe von zwei sphärischen Resonatoren ist es sogar möglich das Verhalten eines Moleküls experimentell zu simulieren.

1.4 Modellierung eines eindimensionalen Festkörpers

Grundsätzlich gibt es zwei verschiedene Ansätze für die Entstehung der Bandstruktur in periodischen Potentialen in einem Festkörper.

1. Hierbei wird von einem frei beweglichen Elektron ausgegangen, welches sich in einem konstanten Potential mit parabolischer Dispersionsrelation $E(k)$ befindet. Durch das Einfügen von periodischen Streuzentren mit einer kleinen Reflektionswahrscheinlichkeit kommt es in der Dispersionsrelation zur Bandaufspaltung/Bandlücken.
2. In diesem Fall wird als Basis ein Atom mit diskreten Eigenzuständen angenommen. Es werden nun zwei Atome zu einem Molekül zusammengefügt. Dabei spalten sich die Eigenzustände in jeweils einen bindenden und einen antibindenden Eigenzustand. Durch Erstellen einer Kette mit mehreren Atomen kommt es zur weiteren Aufspaltung von Zuständen.

Beide Ansätze werden in diesem Versuch experimentell realisiert.

Zu 1. In diesem Fall wird eine Röhre verwendet, analog zu einem Quant in einer Box, siehe Kapitel 1.1. Für die n -te Resonanzfrequenz gilt der Zusammenhang:

$$f_n = \frac{nc}{2L} \quad (1.4.12)$$

in Abhängigkeit der Röhrenlänge L . Das bedeutet, dass die Resonanzfrequenzen umso dichter sind, je länger die Röhre ist. Liegt eine große Anzahl von Eigenfrequenzen vor, ist es nicht mehr sinnvoll diese zu nummerieren, sondern diese in Abhängigkeit der Wellenzahl k anzugeben.

Im Allgemeinen entstehen Bandlücken, wenn die Braggbedingung

$$n\lambda = 2a \quad (1.4.13)$$

erfüllt ist. Dabei beschreibt a den Netzebenenabstand, also den Abstand zwischen den Streuzentren und n eine natürliche Zahl.

Im Allgemeinen werden Streuphänomene häufig im reziproken Raum, der auch als Raum des Wellenvektors \vec{k} bezeichnet wird, diskutiert. In einer Dimension handelt es sich jedoch nur um die Wellenzahl k .

Bei einer Streuung an periodischen Strukturen und erfüllter Braggbedingung ändert sich der Wellenvektor \vec{k} der einlaufenden Welle so, dass der Wellenvektor \vec{k}' der gestreuten

Welle die Relation $\vec{k}' = \vec{G} + \vec{k}$ erfüllt. Dabei handelt es sich bei \vec{G} um einen reziproke Gittervektor.

In einer Dimension gilt bei einer Reflektion $\vec{k}' = -\vec{k}$. So folgt mit Hilfe von Gleichung 1.4.13 für den reziproken Gittervektor \vec{G} : $G = \frac{n2\pi}{a}$.

Das reziproke Gitter wird meist in Einheitszellen, die auch Brillouin-Zonen genannt werden, eingeteilt. Die n-te Brillouin-Zone erstreckt sich über das Intervall $\left[-\frac{(2n-1)\pi}{a}, \frac{(2n-1)\pi}{a}\right]$.

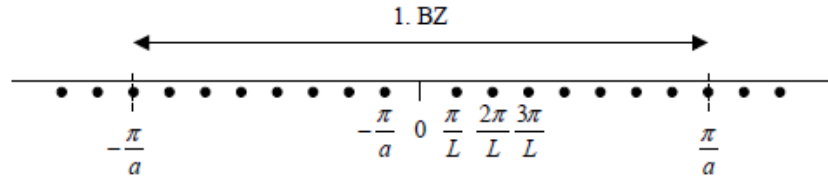


Abbildung 1: Veranschaulichung der Einteilung der Brillouin-Zonen [1]

Die Dispersionsrelationen werden meist nur in der ersten Brillouin-Zone dargestellt, da dort bereits das komplette physikalische Verhalten enthalten ist. Dies wird auch als reduziertes Zonenschema bezeichnet.

Periodische Störungen innerhalb eines periodischen Gitters werden Superstruktur genannt. Aus dieser resultiert eine neue Periodizität mit einem größeren Gittervektor und, kleinerer Brillouin-Zone.

Werden Gitterperiodizitäten lokal zerstört, wird von Defekten gesprochen. Ist die Dichte dieser Störungen klein, bleibt die Bandstruktur quasi erhalten. Es entstehen jedoch neue Zustände, die durch das Einbringen der Defekte verursacht sind. Diese Methode wird bei der Dotierung von Halbleitern verwendet.

2 Versuchsaufbau und -durchführung

Der konkrete Versuchsaufbau variiert bei jedem Versuchsteil. Generell liegt in diesem Versuch eine Schiene mit einem Mikrophon und einem Lautsprecher vor. Der Lautsprecher sendet Schallwellen verschiedener Frequenzen aus, die mit Hilfe eines Rechners gesteuert werden können. Das Mikrophon ist ebenfalls an den Rechner angeschlossen, um Frequenzspektren aufzunehmen, und zusätzlich noch an ein Oszilloskop, sodass überprüft werden kann, ob bei den Peaks auch wirklich eine Resonanz vorliegt.

Für die einzelnen Versuchsteile stehen die folgenden Utensilien zur Verfügung:

12,5 mm Röhren

50 mm Röhren

75 mm Röhren

Iriden mit den Durchmessern 10, 13, 16 mm

Kugelresonator

Es werden die folgenden Versuchsteile Schritt für Schritt durchgeführt und die jeweiligen Daten aufgenommen.

Einführungsmessung

Messung 1

Zuerst wird ein Übersichtsspektrum einer Röhre von 100 bis 10000 Hz aufgenommen. Die Röhre soll aus 8 Stücken je 75 mm Länge zusammengesetzt werden. Die Frequenz soll in 10 Hz-Schritten variiert werden. Jede Messung soll eine Dauer von 50 ms haben.

Messung 2

Es soll ein Spektrum einer 150 mm langen Röhre von 5000 bis 14000 Hz aufgenommen werden. Die Messschritte betragen 5 Hz. Pro Messung sollen wiederum 50 ms verwendet werden.

Modellierung eines Wasserstoffatoms

Verschiedene Winkel

Zuerst soll ein Übersichtsspektrum eines Kugelresonators bei einem Hemisphärenwinkel von $\alpha = 180^\circ$ von 100 bis 10000 Hz aufgezeichnet werden. Die Frequenz wird in 10 Hz-Schritten verändert. Pro Messschritt wird für 50 ms gemessen.

Danach wird der Winkel um jeweils 30° geändert bis letztendlich bei $\alpha = 0^\circ$ eine Messung durchgeführt wird. Die anderen Einstellungen bleiben erhalten.

Doppelpeakuntersuchung

Die Winkeleinstellung des Resonators wird auf $\alpha = 0^\circ$ gesetzt. Es wird nun ein Spektrum von 4500-5500 Hz in Schritten von 2 Hz und 50 ms pro Messung aufgenommen. Dasselbe geschieht für die Winkeleinstellungen $\alpha = 20^\circ$ und $\alpha = 40^\circ$.

Bestimmung der Kugelflächenfunktionen

Die Winkeleinstellung des Resonators wird auf $\alpha = 180^\circ$ festgelegt. Es wird zuerst ein Übersichtsspektrum von 2000 bis 7000 Hz in Schritten von 2 Hz und 50 ms pro Messung aufgezeichnet werden. Danach werden die einzelnen Resonanzen identifiziert und bei diesen Resonanzfrequenzen die Amplitude für verschiedene Winkel von $\alpha = 0^\circ$ bis $\alpha = 90^\circ$ in Schritten von 10° für jede Resonanz vermessen.

Modellierung eines eindimensionalen Festkörpers

Teilchen in einem periodischen Potential

Bestimmung der Schallgeschwindigkeit

Es werden verschiedene Spektren in Abhängigkeit der Röhrenlänge aufgenommen. Der Frequenzbereich variiert zwischen 5000 bis 10000 Hz und wird in 5 Hz-Schritt durchlaufen. Die Länge der Röhre soll mit Hilfe von 75 mm Röhren von 75 bis 600 mm verändert werden.

Bestimmung der Wellenzahl

Ein Übersichtsspektrum einer Röhre, bestehend aus zwölf 50 mm langen Röhren, soll von 100 bis 120000 Hz in Schritten von 5 Hz aufgezeichnet werden.

Analyse der Bandstruktur

In diesem Versuchsteil werden verschiedene Spektren von 100 bis 120000 Hz aufgenommen. Dabei soll eine Röhre aus acht 50 mm lange Röhren, unterteilt mit jeweils 10, 13 und 16 mm Iriden, verwendet werden. Es werden also insgesamt drei Spektren aufgezeichnet.

Vergleich verschiedener Anzahlen von Röhren

In diesem Teil werden mehrere Spektren von 100 bis 12000 Hz in 10 Hz-Schritten vermessen. Dazu werden zwei verschiedene Röhren aufgebaut: zum einen eine Röhre, bestehend aus zwölf 50 mm Röhren unterteilt durch 16 mm Iriden, zum anderen eine Röhre, bestehend aus zehn 50 mm Röhren unterteilt durch 16 mm Iriden.

Vergleich verschiedener Rohrlängen

Es wird eine Röhre aus acht 75 mm langen Röhren unterteilt mit 16 mm Iriden aufgebaut und dessen Spektrum von 100 bis 120000 Hz in 10 Hz-Schritten aufgenommen.

Modellierung eines Festkörpers durch Vergrößerung eines Moleküls

Einzelne Röhre

Ein Übersichtsspektrum von 100 bis 22000 Hz in Schritten von 10 Hz einer einzelnen 50 mm langen Röhre soll aufgezeichnet werden. Es wird dieselbe Messung wie bei der vorherigen mit einer einzelnen 75 mm Röhre durchgeführt.

Zwei Röhren

Das Spektrum zweier 50 mm Röhren unterteilt mit einer 10 mm Iris wird von 100 bis 120000 Hz in Schritten von 10 Hz aufgezeichnet.

Mehrere Röhren

In diesem Versuchsteil sollen die Spektren von Einheitszellen verschiedener Größe von 100 bis 12000 Hz in Schritten von 10 Hz aufgenommen werden. Dabei werden die 50 mm Röhren verwendet. Die Einheitszelle sollen zuerst drei, dann vier und schließlich sechs Röhren enthalten. Außerdem sollen sie jeweils von 10, 13, 16 mm Iriden unterteilt werden.

Alternierende Iriden

Es soll das Spektrum einer Röhre mit zwölf 50 mm Röhren abwechselnd unterteilt von 13 und 16 mm Iriden aufgezeichnet werden. Die Frequenz soll von 100 bis 12000 Hz in 10 Hz-Schritten variiert werden.

Einheitszellen

Das Spektrum von fünf Einheitszellen, bestehend aus einer 50 mm Röhre, einer 16 mm Iris, einer 75 mm Röhre und einer 16 mm Iris, soll von 0,4 bis 12 kHz in Schritten von 10 Hz aufgenommen werden.

Einfügen von Defekten

In diesem Versuchsteil wird eine Röhre aus zwölf 50 mm Röhren, unterteilt von 16 mm Iriden, aufgebaut. Eine der Röhren wird von einer 75 mm Röhre ersetzt. Diese simuliert einen Defekt. Die Position und die Länge des Defekts werden im Verlauf dieses Versuchsteils verändert. Es werden Defektlängen von 25, 37,5 , und 62,5 mm verwendet. Die Defekte werden an den Positionen 3, 6, 9 und 12 platziert und das jeweilige Spektrum vermessen.

3 Auswertung

3.1 Einführungsmessung

Mit einer 600 mm langen Röhre, bestehend aus acht 75 mm Röhren, wurde ein Übersichtsspektrum im Bereich von 100 Hz bis 10000 Hz aufgezeichnet. Dabei wurde in 10 Hz Schritten für jeweils 50 ms gemessen. Es ergab sich folgendes Spektrum:

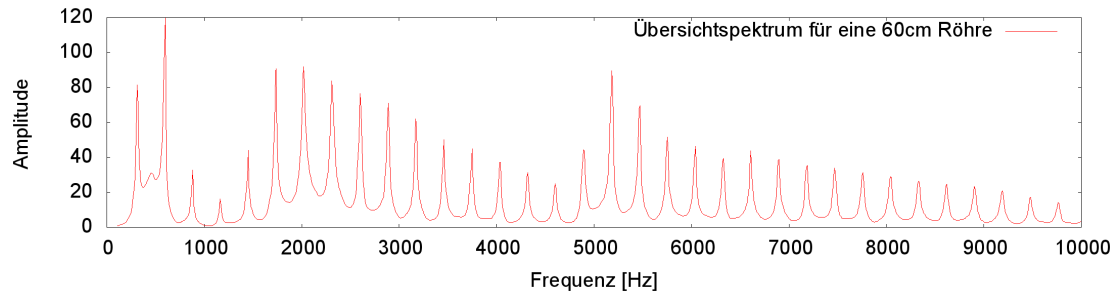


Abbildung 2: Übersichtsspektrum für eine 600 mm Röhre

Bei ca. 460 Hz befindet sich ein Peak, der keine Resonanz ist, sondern eine Störung, bedingt durch den Versuchsaufbau. Diese Störung findet sich in sämtlichen Spektren, bei denen mit den Röhrenstücken gearbeitet wurde.

Anschließend wurde für eine 150 mm lange Röhre der Bereich von 5000 Hz bis 14000 Hz in 5 Hz Schritten untersucht. Hierbei wurde das folgende Spektrum aufgenommen:

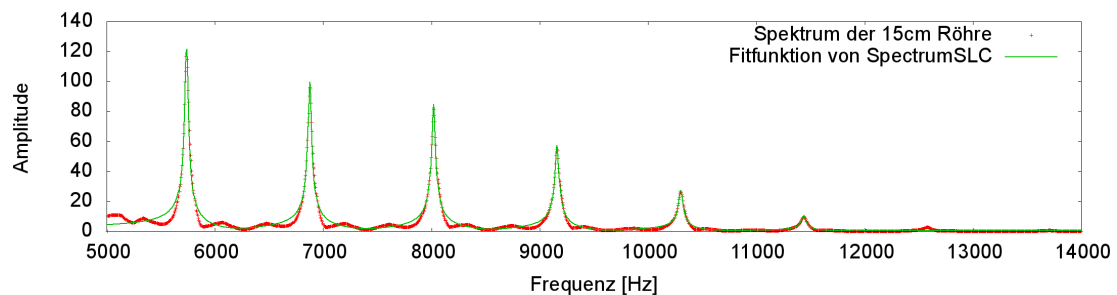


Abbildung 3: Spektrum für die 150 mm Röhre

Die Peaks dieses Spektrums wurden mit dem Programm SpektrumSLC [2] gefittet. Damit wurden die folgenden Resonanzstellen bestimmt:

Resonanznummer	Frequenz [Hz]	Breite [Hz]
1	5738,689	14,931
2	6876,638	14,789
3	8020,166	15,912
4	9159,867	17,022
5	10302,902	18,215
6	11438,074	19,587
7	12580 (abgelesen)	/

Tabelle 1: Resonanzstellen

Die Breite des letzten Peaks ist nicht bestimmbar, da dieser an sich schon nicht gefittet werden konnte.

In der oberen Tabelle ist deutlich erkennbar, dass die Breite der Resonanzen bei den höheren Resonanzen steigt. Dies stimmt mit den Erwartungen der Theorie, siehe Kapitel 1.2, überein.

3.2 Modellierung eines Wasserstoffatoms

3.2.1 Verschiedene Winkel

Für verschiedene Hemisphärenwinkel wurden Spektren im Bereich von 100 Hz bis 10000 Hz in 10 Hz Schritten aufgenommen:

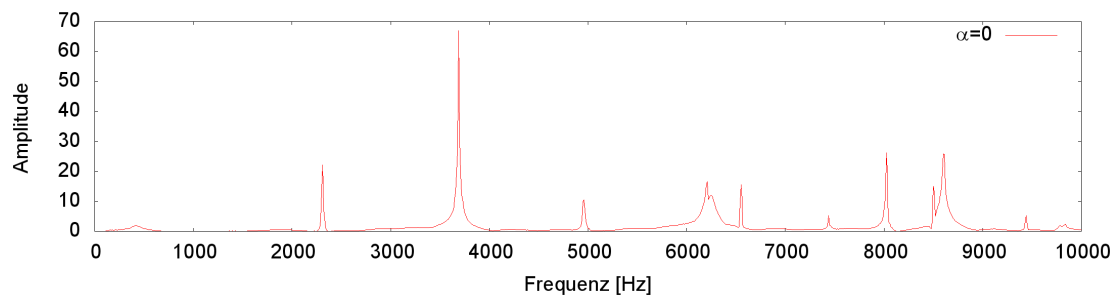


Abbildung 4: Winkel 0°

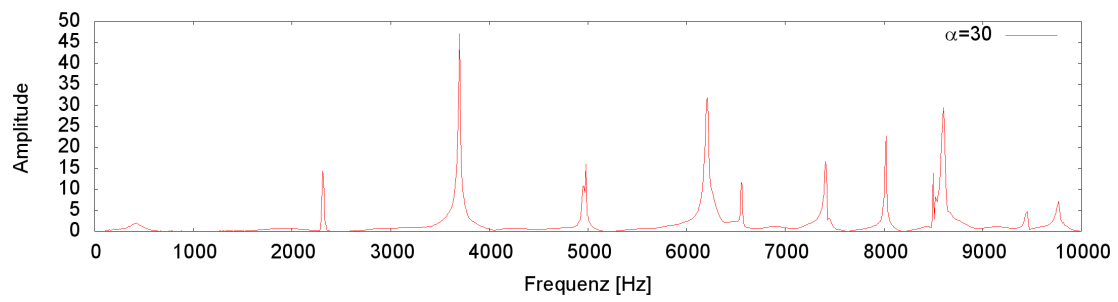


Abbildung 5: Winkel 30°

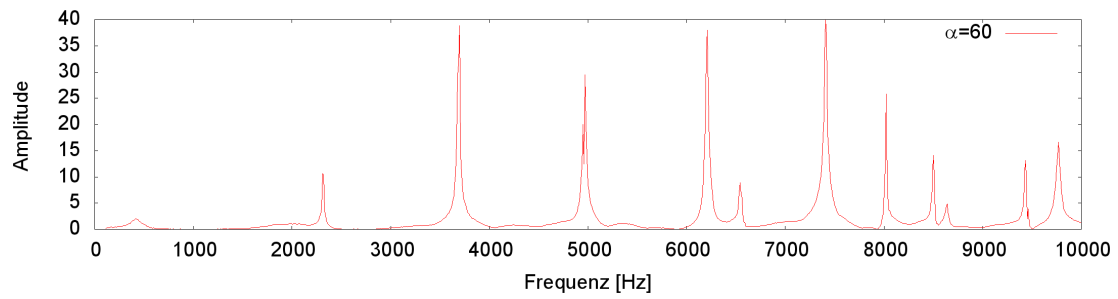


Abbildung 6: Winkel 60°

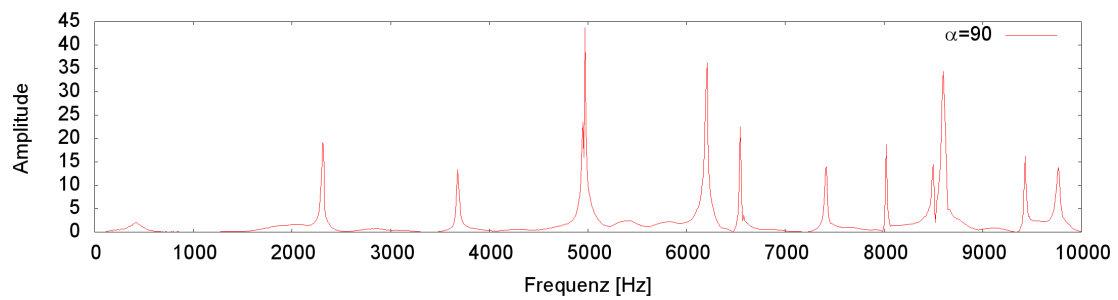


Abbildung 7: Winkel 90°

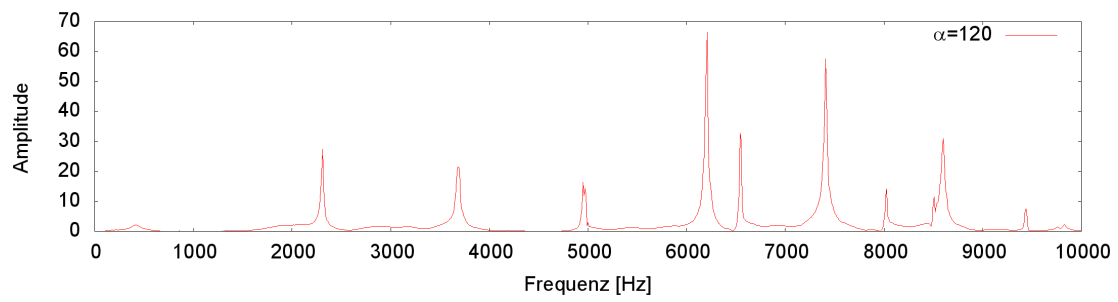


Abbildung 8: Winkel 120°

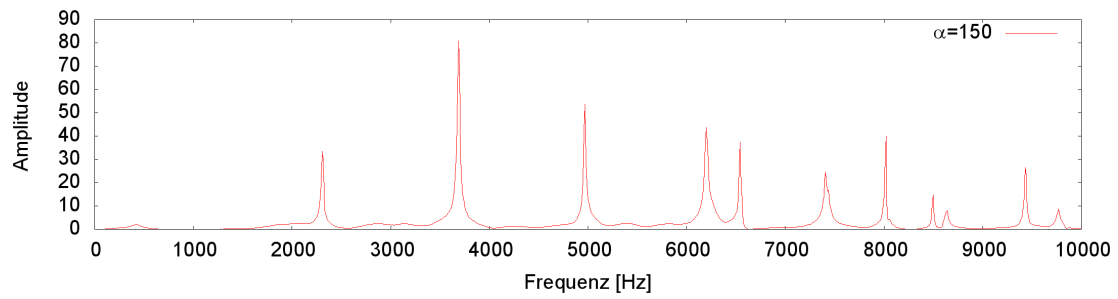


Abbildung 9: Winkel 150°

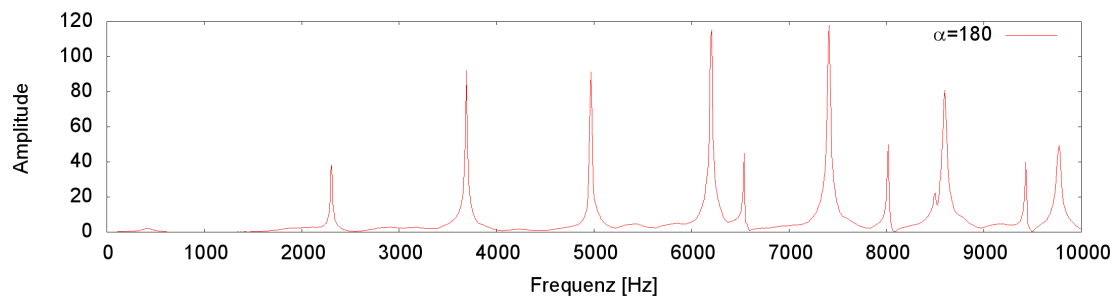


Abbildung 10: Winkel 180°

Hier ist zu beobachten, dass sich je nach Winkel die Amplituden der Resonanzen relativ zueinander verändern. Der Winkel der Hemisphären zueinander entscheidet also, bei welcher Frequenz die stärkste Resonanz auftritt.

3.2.2 Doppelpeakuntersuchung

Als nächstes wurde der Doppelpeak knapp unterhalb von 5000 Hz näher untersucht. Dazu wurde ein detailliertes Spektrum in 2 Hz Schritten im Bereich von 4500 Hz bis 5500 Hz aufgenommen. Um die Veränderungen des Doppelpeaks beobachten zu können, wurde dies für die Winkel $\alpha = 0^\circ$, $\alpha = 20^\circ$ und $\alpha = 40^\circ$ durchgeführt.

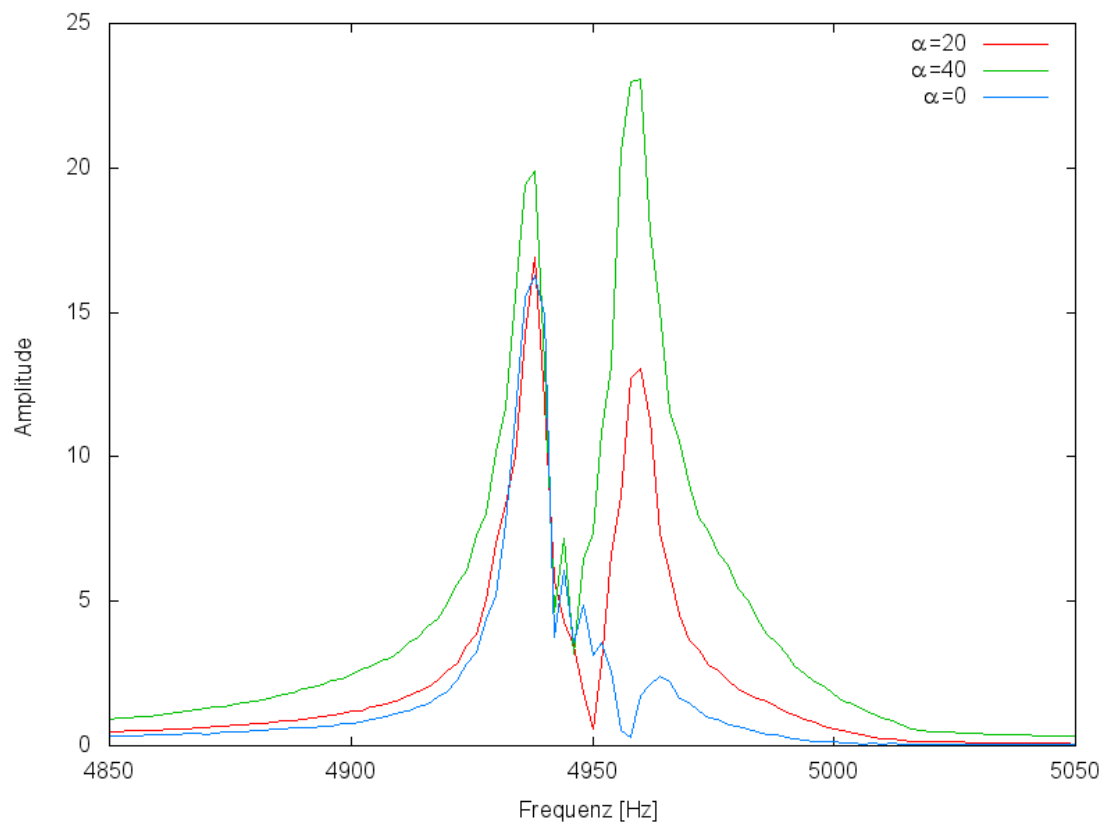


Abbildung 11: Bereich um 4950 Hz

Hier lässt sich die Entwicklung des Doppelpeaks bei steigendem Hemisphärenwinkel gut beobachten. Während bei $\alpha = 0^\circ$ der hintere Peak fast noch gar nicht vorhanden ist, wächst er mit steigendem Winkel stark an, bis er bei $\alpha = 40^\circ$ sogar größer ist, als der Vordere.

3.2.3 Bestimmung der Kugelflächenfunktionen

Um die Wellenfunktionen verschiedener Resonanzen zu visualisieren, wurde zuerst ein Übersichtsspektrum bei $\alpha = 180^\circ$ von 2000 Hz bis 7000 Hz in 5 Hz Schritten aufgenommen und die Resonanzen bestimmt.

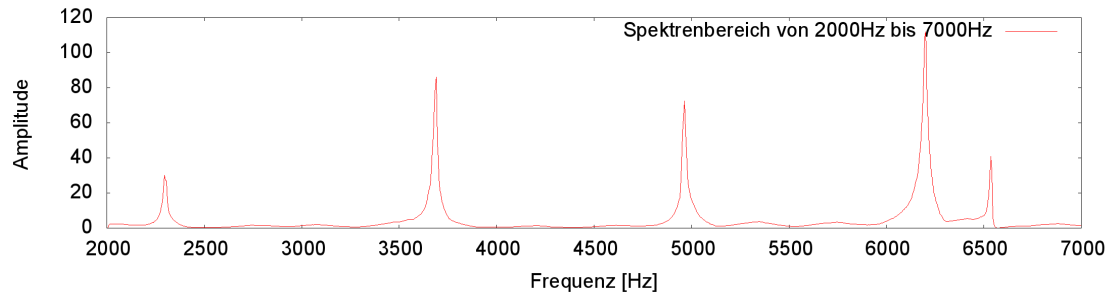


Abbildung 12: Übersichtsspektrum bei $\alpha = 180^\circ$

Mit SpectrumSLC wurden die Resonanzen vermessen:

Resonanznummer	Frequenz [Hz]
1	2298,592
2	3685,635
3	4963,135
4	6198,186
5	6536,162

Tabelle 2: Resonanzstellen

Für jede Resonanzstelle wurde nun die Wellenfunktion für verschiedene Winkel in 10° Schritten zwischen $\alpha = 0^\circ$ und $\alpha = 90^\circ$ vermessen. Anschließend wurde jeweils ein Polarplot erstellt und unter Ausnutzung der Symmetrie vervollständigt. Diese Polarplots zeigen die jeweilige Kugelflächenfunktion. Durch Vergleich mit Theorieplots lässt sich auf diese Weise den Resonanzen jeweils die Drehimpulsquantenzahl l zuweisen.

Für die Resonanz bei 2298,592 Hz ergab sich folgende Wellenfunktion:

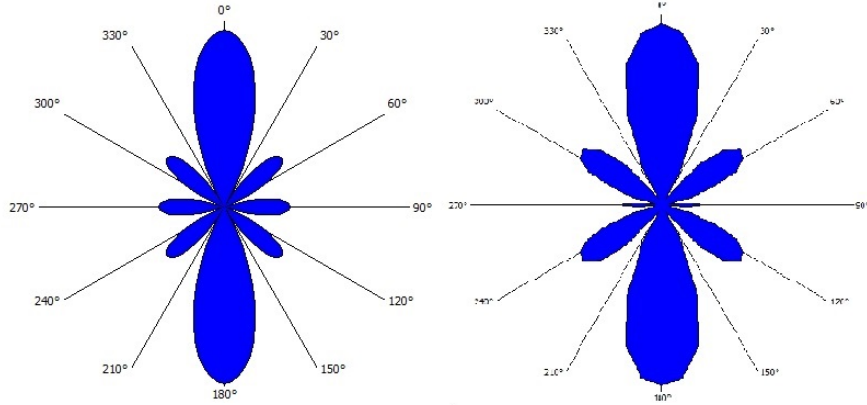


Abbildung 13: Rechts: Wellenfunktion für die Resonanz bei 2298,592 Hz. Links: Theoretische Wellenfunktion für $l = 4$ [3].

Bei 3685,635 Hz wurde folgende Wellenfunktion gemessen:

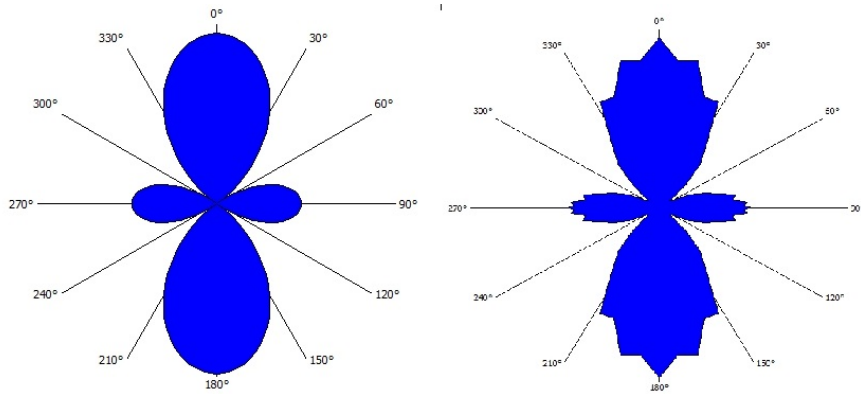


Abbildung 14: Rechts: Wellenfunktion für die Resonanz bei 3685,635 Hz. Links: Theoretische Wellenfunktion für $l = 2$ [3].

Diese Resonanz gehört zu $l = 2$.

Für die Resonanz bei 4963,135 Hz wurde die folgende Wellenfunktion gemessen. Hieraus folgt, dass die dazugehörige Drehimpulsquantenzahl $l = 3$ ist.

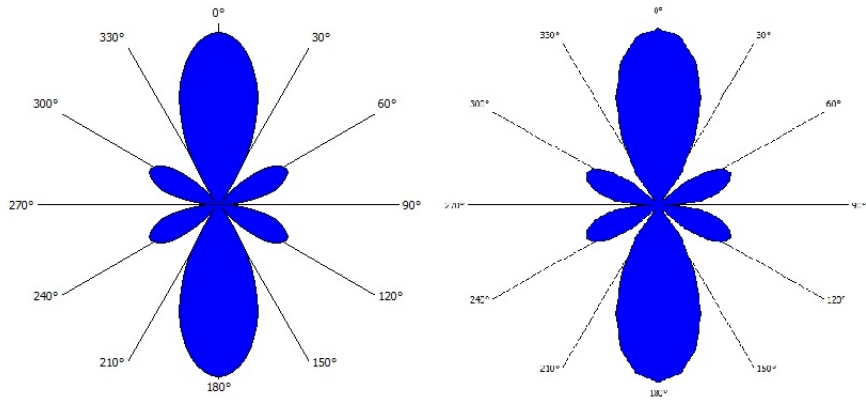


Abbildung 15: Rechts: Wellenfunktion für die Resonanz bei 4963,135 Hz. Links: Theoretische Wellenfunktion für $l = 3$ [3].

Für die Resonanz bei 6198,186 Hz ergab sich folgende Wellenfunktion:

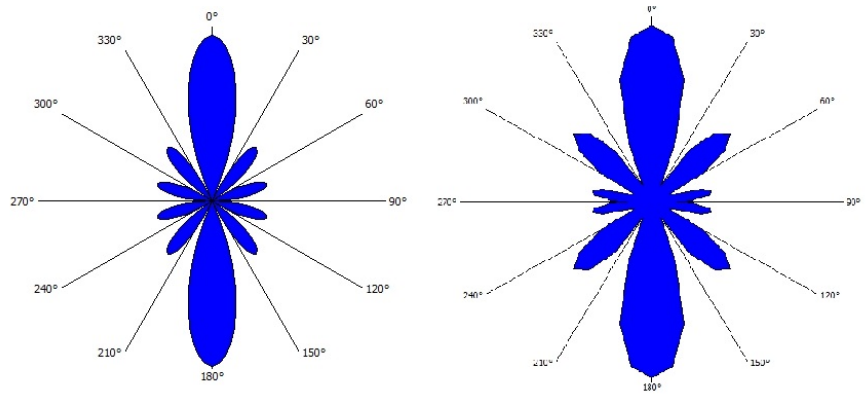


Abbildung 16: Rechts: Wellenfunktion für die Resonanz bei 6198,186 Hz. Links: Theoretische Wellenfunktion für $l = 5$ [3].

Bei 6536,162 Hz wurde folgende Wellenfunktion gemessen:

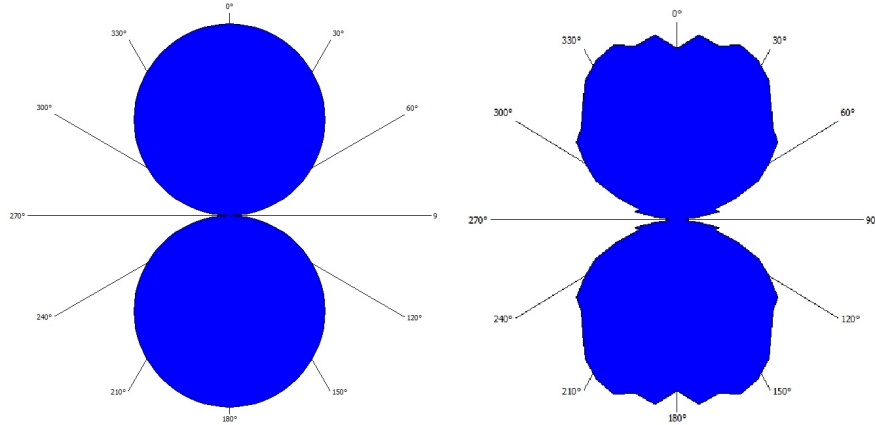


Abbildung 17: Rechts: Wellenfunktion für die Resonanz bei 6536,162 Hz. Links: Theoretische Wellenfunktion für $l = 1$ [3].

Bei dem Erstellen der Kugelflächenfunktionen, siehe Abbildung 13, 16 und 17, sind Unstimmigkeiten aufgetreten.

Es ist zu erwarten, dass die Kugelflächenfunktion, die zur niedrigsten Resonanz gehört, in diesem Fall 2298,592 Hz, die Drehimpulsquantenzahl $l = 0$ besitzt.

Die Resonanz bei 6198,186 Hz sollte die Kugelflächenfunktion $l = 4$ zugeordnet bekommen. Dies lässt sich sogar noch rechtfertigen, wenn die Messpunkte bei 90° als stark fehlerbehaftet angesehen werden und ihnen eine geringe Aussagekraft zugesprochen wird.

Die Resonanz bei 6536,162 Hz sollte als Kugelflächenfunktion eine Überlagerung aus $l = 1$ und $l = 5$ besitzen. Dies ist in Abbildung 17 nicht erkennen.

Diese Unstimmigkeiten lassen sich letztendlich nur auf falsch beschriftete Daten zurückführen.

3.3 Modellierung eines eindimensionalen Festkörpers

3.3.1 Bestimmung der Schallgeschwindigkeit

Um die Geschwindigkeit der Schallwelle bestimmen zu können, werden mehrere Spektren mit unterschiedliche Röhrenlänge analysiert. Die nachfolgenden Abbildungen zeigen die aufgezeichneten Spektren.

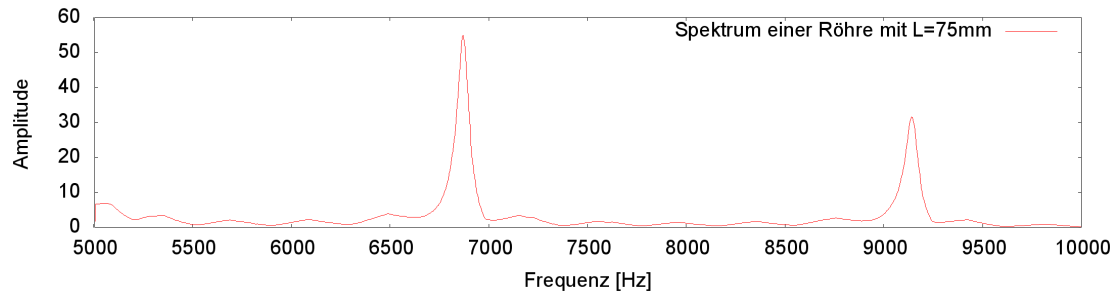


Abbildung 18: Spektrum einer 75 mm Röhre

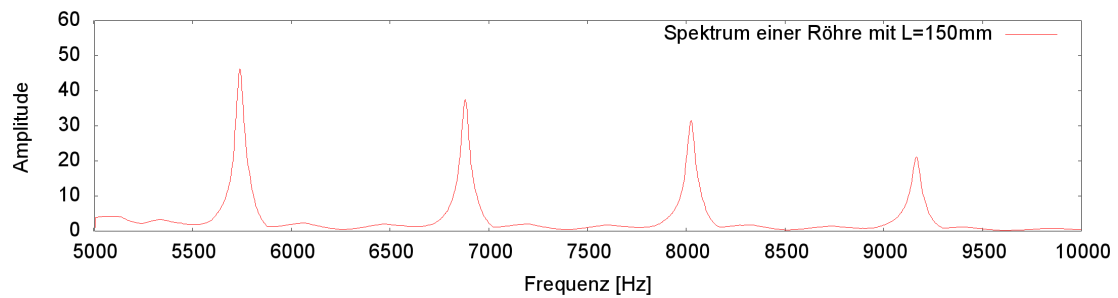


Abbildung 19: Spektrum einer 150 mm Röhre

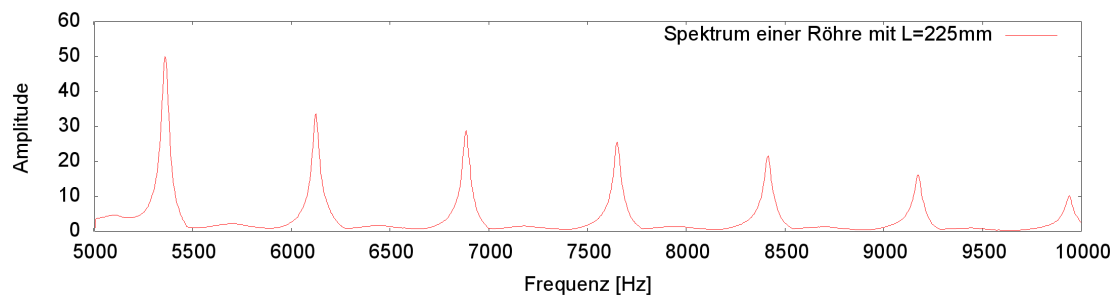


Abbildung 20: Spektrum einer 225 mm Röhre

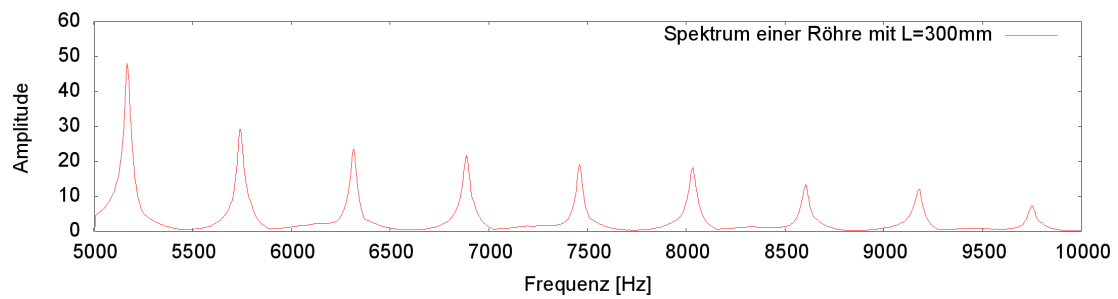


Abbildung 21: Spektrum einer 300 mm Röhre

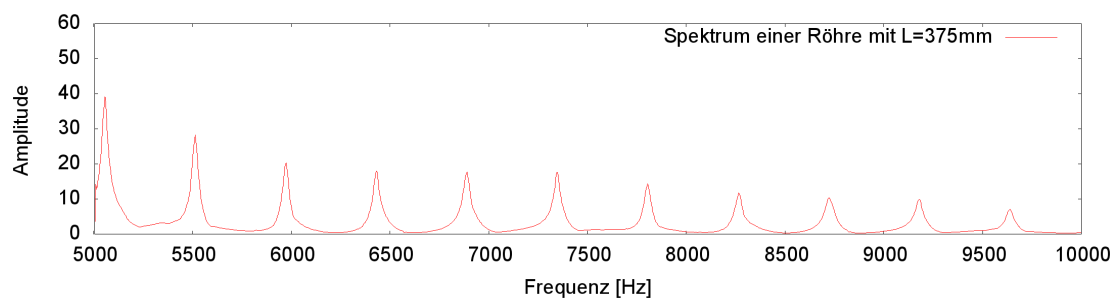


Abbildung 22: Spektrum einer 375 mm Röhre

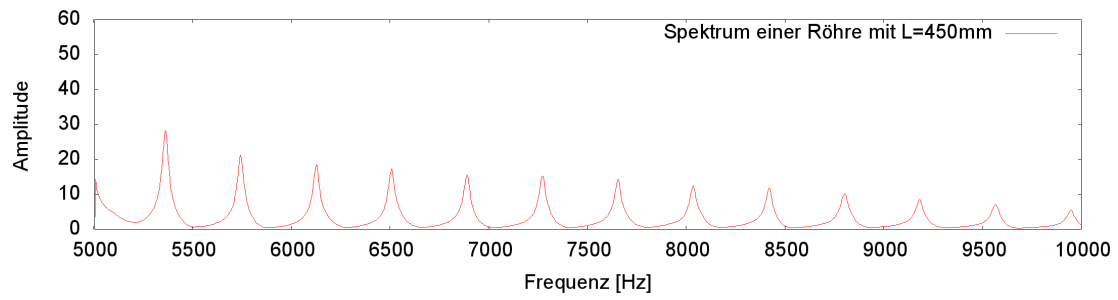


Abbildung 23: Spektrum einer 450 mm Röhre

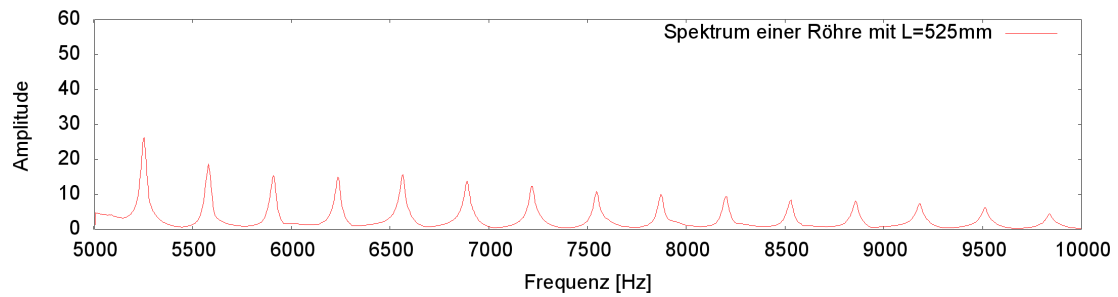


Abbildung 24: Spektrum einer 525 mm Röhre

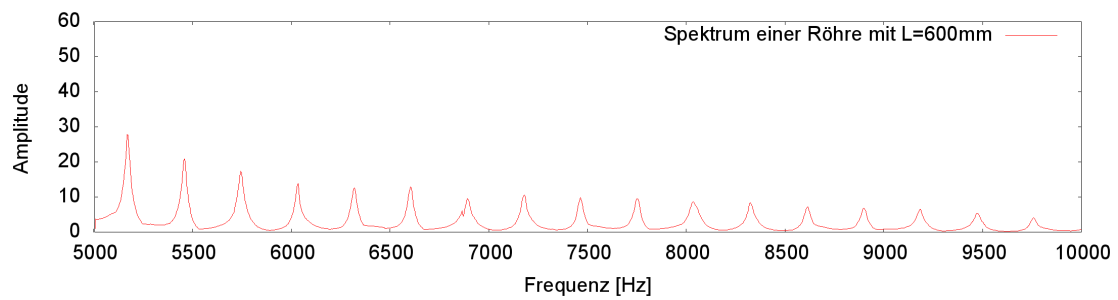


Abbildung 25: Spektrum einer 600 mm Röhre

Die Positionen der einzelnen Peaks werden für jedes Spektrum mit dem Programm ausgemessen. Anschließend werden alle Differenzfrequenzen Δf berechnet und für jedes Spektrum gemittelt. Die folgende Tabelle zeigt die verschiedenen Differenzfrequenzen in Abhängigkeit der Länge L der jeweiligen Röhre.

L [mm]	Δf [Hz]
75	2270
150	1140 ± 3
225	762 ± 2
300	572 ± 2
375	458 ± 2
450	381 ± 3
525	327 ± 2
600	286 ± 2

Tabelle 3: Differenzfrequenzen und deren Fehler in Abhängigkeit der Röhrenlänge

Bei dem ersten Spektrum kann bei der Frequenzdifferenz kein Fehler angegeben werden, da dort nur zwei Peaks vorhanden sind.

Die oberen Daten werden in der nachfolgenden Abbildung graphisch dargestellt.

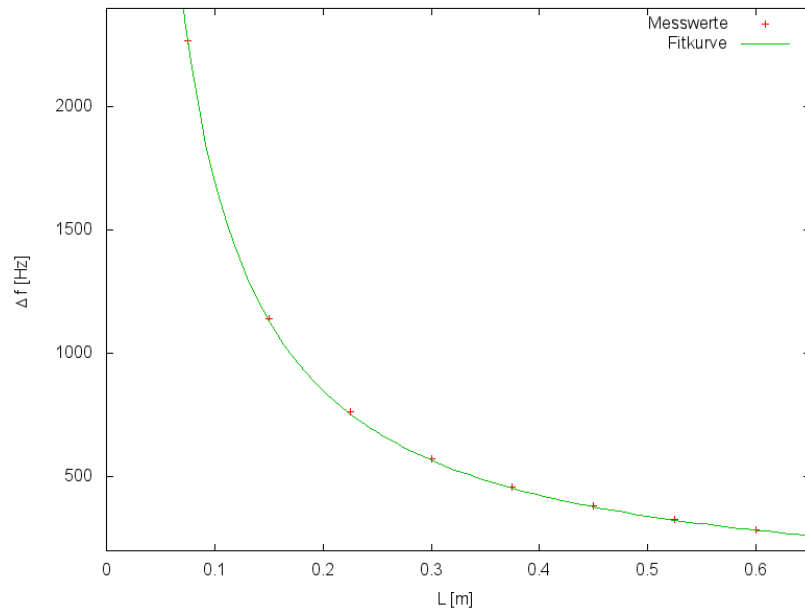


Abbildung 26: Graphischer Zusammenhang zwischen Δf und L

Der Zusammenhang zwischen Δf und L ist analog zu Formel 1.4.12:

$$\Delta f = a \cdot \frac{1}{L} + d.$$

d soll in der Theorie verschwinden, wird jedoch für den Fit mitverwendet. Der Zusammenhang zwischen dem Fitparameter a und der Geschwindigkeit der Welle c erfolgt durch Vergleich der oberen Formel mit Formel 1.4.12:

$$a = \frac{c}{2}.$$

Für die Fitparameter ergibt sich:

$$\begin{aligned} a &= (170,0 \pm 0,2) \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ d &= (4,5 \pm 0,9) \frac{1}{\text{s}}. \end{aligned}$$

So folgt für die Geschwindigkeit der Schallwelle:

$$c = (340,1 \pm 0,3) \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Die Abweichung zum Literaturwert, $c_{theo}=344 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ bei einer angenommenen Raumtemperatur von $T = 20^\circ\text{C}$, beträgt ca. -1 %.[3]

3.3.2 Bestimmung der Wellenzahl

Die nachfolgende Abbildung zeigt das aufgenommene Spektrum.

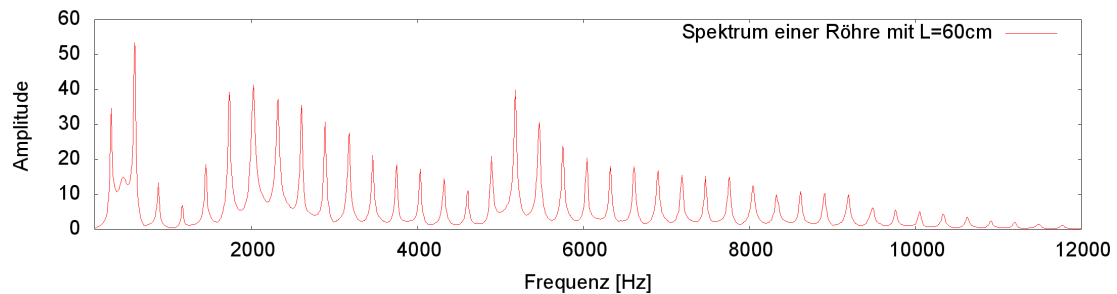


Abbildung 27: Spektrum einer 600 mm Röhre

Die Resonanzfrequenzen werden ausgemessen und nummeriert. Anschließend wird für jede Resonanz der jeweilige k -Wert mit Hilfe der Formel

$$k_n = \frac{n\pi}{L}$$

berechnet.

Die nachfolgende Tabelle zeigt alle ausgemessenen Resonanzfrequenzen f_n , deren Nummer n und k_n -Wert.

n	f_n [Hz]	k_n [$\frac{1}{m}$]
1	306,58	5,24
2	593,69	10,47
3	878,65	15,71
4	1172,86	20,94
5	1451,78	26,18
6	1732,90	31,42
7	2021,94	36,65
8	2316,26	41,89
9	2603,48	47,12
10	2886,43	52,36
11	3174,43	57,60
12	3459,36	62,83
13	3746,10	68,07
14	4032,63	73,30
15	4318,62	78,54
16	4604,90	83,78
17	4891,09	89,01
18	5178,95	94,25
19	5465,79	99,48
20	5752,29	104,72
21	6039,47	109,96
22	6324,26	115,19
23	6609,93	120,43
24	6897,94	125,66
25	7186,09	130,90
26	7470,57	136,14
27	7756,78	141,37
28	8042,67	146,61
29	8326,63	151,84
30	8615,99	157,08
31	8904,86	162,32
32	9193,26	167,55
33	9480,94	172,79
34	9758,81	178,02
35	10051,57	183,26
36	10336,26	188,50
37	10623,69	193,73
38	10907,90	198,97
39	11194,66	204,20

40	11483,77	209,44
41	11767,81	214,68

Tabelle 4: Resonanzfrequenzen und deren k -Werte

Graphische Darstellung:

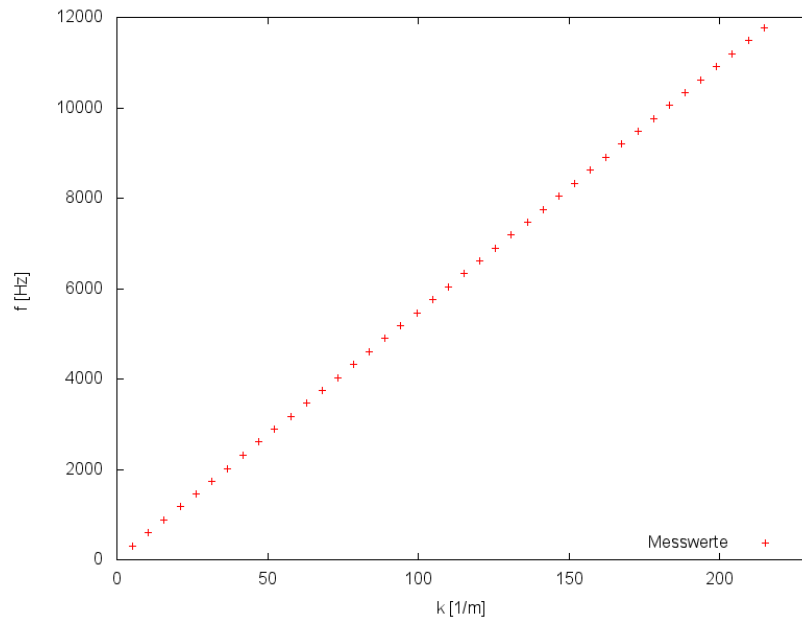


Abbildung 28: Zusammenhang zwischen den Resonanzfrequenzen und den jeweiligen k -Werten

Theoretisch ist der Zusammenhang zwischen Frequenz und k -Wert gegeben durch:

$$f = \frac{c}{2\pi} k.$$

Dies bestätigt auch der lineare Zusammenhang in der oberen Abbildung.

3.3.3 Analyse der Bandstruktur

Die nachfolgenden Graphiken stellen die aufgezeichneten Spektren dar.

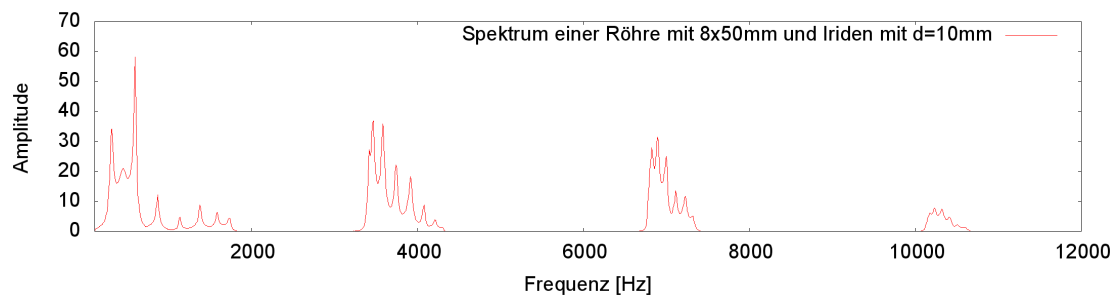


Abbildung 29: Spektrum einer 400 mm Röhre mit 10 mm Iriden

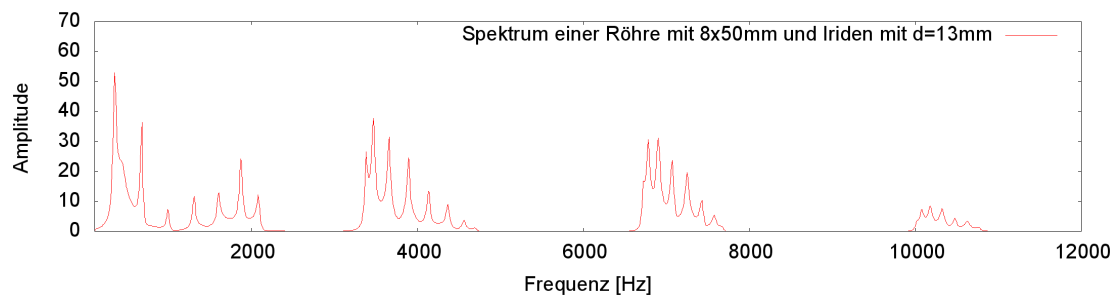


Abbildung 30: Spektrum einer 400 mm Röhre mit 13 mm Iriden

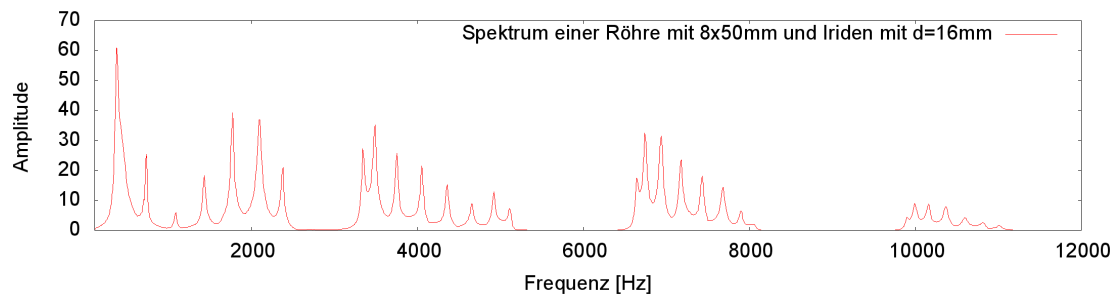


Abbildung 31: Spektrum einer 400 mm Röhre mit 16 mm Iriden

Nun werden, wie bereits in Kapitel 3.3.2 beschrieben, die Resonanzen von jedem Spektrum ausgemessen, durchnummeriert, dem jeweiligen k -Wert zugeordnet und letztendlich gegeneinander aufgetragen.

n	f_n v. 10er [Hz]	f_n v. 13er [Hz]	f_n v. 16er [Hz]	k_n [$\frac{1}{m}$]
1	594,54	675,66	373,56	7,22
2	869,90	994,60	731,98	14,44
3	1135,82	1307,48	1083,62	21,67
4	1380,17	1602,67	1430,78	28,89
5	1585,08	1871,70	1768,97	36,11
6	1748,00	2081,16	2095,45	43,33
7	1724,62	3458,50	2376,98	50,55
8	3449,81	3658,10	3341,17	57,78
9	3587,58	3893,72	3485,58	65,00
10	3743,93	4135,85	3749,79	72,22
11	3915,21	4365,16	4053,66	79,44
12	4077,57	4560,90	4357,18	86,66
13	4201,23	6769,06	4651,53	93,89
14	6811,22	6906,44	4918,22	101,11
15	6897,90	7071,57	5115,29	108,33
16	6996,61	7248,43	6654,40	115,55
17	7112,83	7423,01	6743,47	122,77
18	7223,31	7579,29	6935,74	130,00
19	10170,03	10073,91	7172,39	137,22
20	10319,19	10178,20	7431,80	144,44
21	10404,58	10320,61	7680,41	151,66
22	/	10469,94	7892,27	158,89
23	/	10612,81	9993,39	166,11
24	/	/	10156,21	173,33
25	/	/	10367,92	180,55

26	/	/	10588,22	187,77
27	/	/	10824,50	195,00
28	/	/	11018,36	202,22

Tabelle 5: Resonanzfrequenzen und deren k -Werte

Graphisch Darstellung:

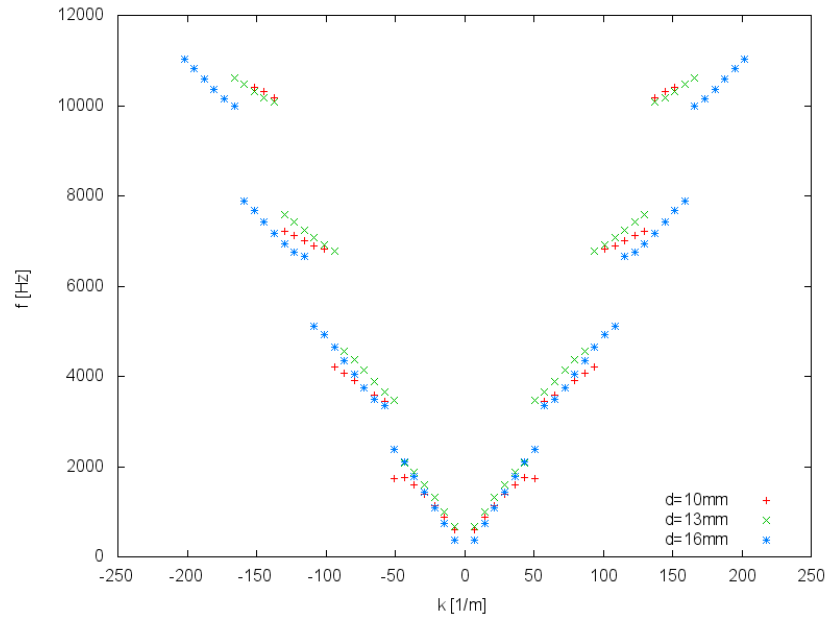


Abbildung 32: Darstellung der Bandstrukturen bei verschiedenen Irisdurchmessern im erweiterten Zonenschema

Die Werte für die negativen k -Werte sind symmetrisch vervollständigt worden. Mit Hilfe der Werte von Tabelle 5 werden die Breiten der Bänder und Bandlücken je verwendeten Irisdurchmesser berechnet. Diese werden in der folgenden Tabelle zusammengefasst.

n	F_n v. 10er [Hz]	F_n v. 13er [Hz]	F_n v. 16er [Hz]
1	1130,09	1405,50	1645,00
2	751,42	1102,40	1774,12
3	412,09	810,22	1237,87
4	234,55	538,90	1024,98

Tabelle 6: Zusammenstellung aller Bändern n und die Breite der Bänder F_n

Die Breite der Bandlücken G_n der einzelnen Irisdurchmesser stehen in der folgende Tabelle aufgelistet.

n	G_n v. 10er [Hz]	G_n v. 13er [Hz]	G_n v. 16er [Hz]
1	1725,19	1377,35	964,19
2	2609,99	2208,16	1539,1
3	2946,72	2494,62	2101,12

Tabelle 7: Zusammenstellung aller Bändern n und die Breite der Bandlücken G_n

In Tabelle 7 und aus Abbildung 32 wird ersichtlich, dass die Bandlücken mit steigendem k -Wert sich ebenfalls vergrößern. Diese Beobachtung trifft auf jeden Irisdurchmesser zu. Die Bandlücken sind jedoch nicht bei allen Irisdurchmessern gleich, sondern sind umso größer, je kleiner der Irisdurchmesser ist.

Die Größe der Bandbreite dagegen steigt mit größerem Irisdurchmesser. Außerdem nimmt sie bei steigendem k -Wert ab, auch dies ist bei allen Irisdurchmessern zu beobachten.

Die Beobachtung lässt sich wie folgt erklären:

Eine Röhre ohne Unterteilung von Iriden ist ein Analogon für ein freies Elektron. Durch das Einfügen von Iriden werden Störungen in Form eines periodischen Potentials eingefügt. Je kleiner der Durchmesser der Iris ist, desto größer ist die Störung und je mehr wird das freie Elektron behindert. Da entspricht also einem größeren Potential. Die Bandlücke wird demnach zunehmend größer.

Aus dem Spektrum mit den 16 mm Iriden soll nun noch die Zustandsdichte nach der Näherung

$$\rho(f_n) \approx \frac{1}{f_{n+1} - f_n} \quad (3.3.14)$$

graphisch dargestellt werden.

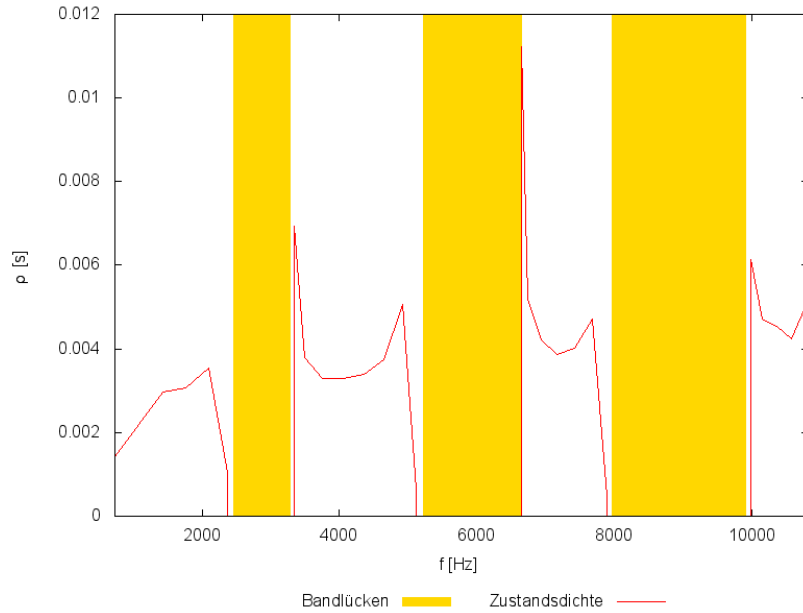


Abbildung 33: Zustandsdichte des Spektrums mit 16 mm Iriden

In den Bandlücken ist die Zustandsdichte selbstverständlich Null.

3.3.4 Vergleich verschiedener Anzahlen von Röhren

Die beiden aufgenommenen Spektren in diesem Versuchsteil sehen wie folgt aus.

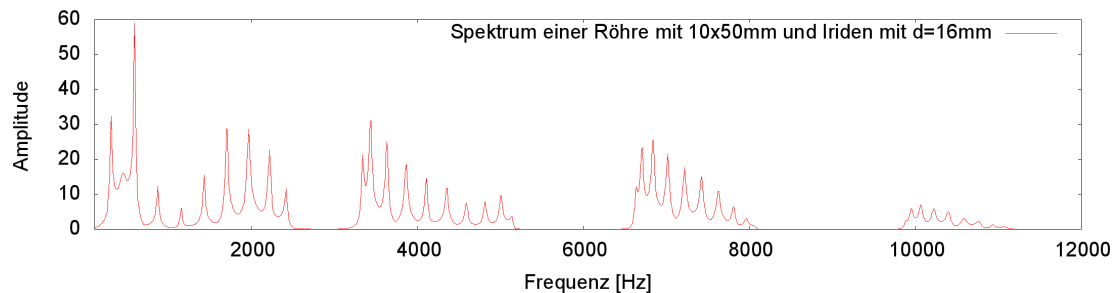


Abbildung 34: Spektrum einer 500 mm Röhre und 16 mm Iriden

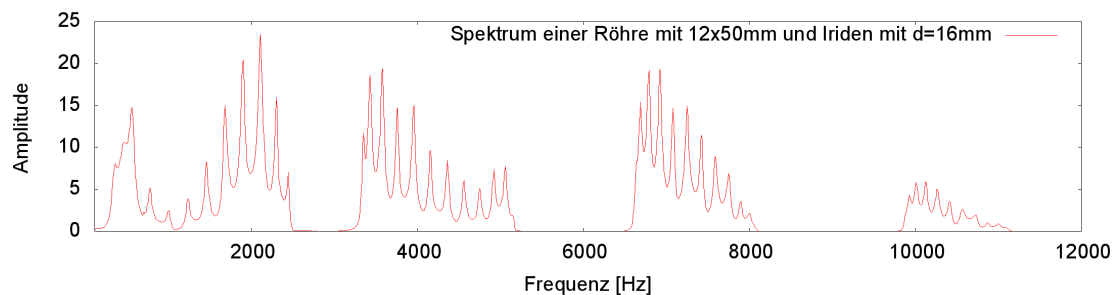


Abbildung 35: Spektrum einer 600 mm Röhre und 16 mm Iriden

Die beiden Spektren sollen mit dem Spektrum einer 400 mm Röhre und 16 mm Iriden, Abbildung 31, verglichen werden.

Vergleich zwischen den Abbildungen 31 und 34

Die Positionen der einzelnen Peakansammlungen haben sich abgesehen von kleinen Abweichungen nicht verändert. Auffällig ist, dass in jeder Peakansammlung in Abbildung 34 eine Resonanz mehr vorhanden ist. Dies hängt mit der Länge der Röhre zusammen. Bei einer längeren Röhre können mehr Resonanzfrequenzen auftreten als bei einer kürzeren Röhre. Die Amplituden in Abbildung 34 sind im Allgemeinen kleiner als die in Abbildung 31. Dies kann erklärt werden, indem beachtet wird, dass in der längeren Röhre mehr Störstellen in Form von Iriden platziert werden können und somit die Amplitude dämpfen.

Vergleich zwischen den Abbildung 31 und 35

Grundsätzlich liegen auch hier dieselben Unterschiede vor, die schon im vorherigen Vergleich erläutert wurden. Die Positionen der Resonanzansammlungen haben sich ebenfalls bis auf kleine Abweichungen nicht geändert. Es liegen pro Resonanzansammlung in Abbildung 35 nun zwei Resonanzen mehr vor als in Abbildung 31. Dies liegt in den zwei zusätzlichen 50 mm Röhrenstücken begründet. Die Amplitude aus Graphik 35 ist auch hier generell kleiner als die aus Abbildung 34 aufgrund derselben Begründung wie im vorherigen Vergleich.

3.3.5 Vergleich verschiedener Rohrlängen

Das aufgezeichnete Spektrum wird in der unteren Abbildung dargestellt.

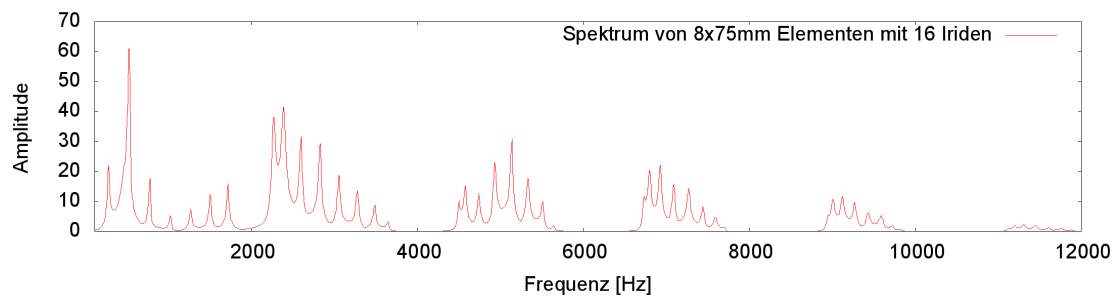


Abbildung 36: Spektrum einer 600 mm Röhre unterteilt mit 16 mm Iriden

Diese Abbildung soll ebenfalls mit Abbildung 31 verglichen werden.

Das Spektrum aus Abbildung 36 besitzt im Gegensatz zum Spektrum aus Abbildung 31 eine Peakansammlung mehr. Dies entsteht wiederum aus der Tatsache, dass die Röhre in diesem Versuchsteil deutlich länger ist und so mehr Resonanzen vorliegen. Die Anzahl an Peaks pro Peakansammlung ist unverändert und die Amplituden liegen in einer ähnlichen Größenordnung.

Anschließend folgt nun ein Vergleich der Dispersionskurven.

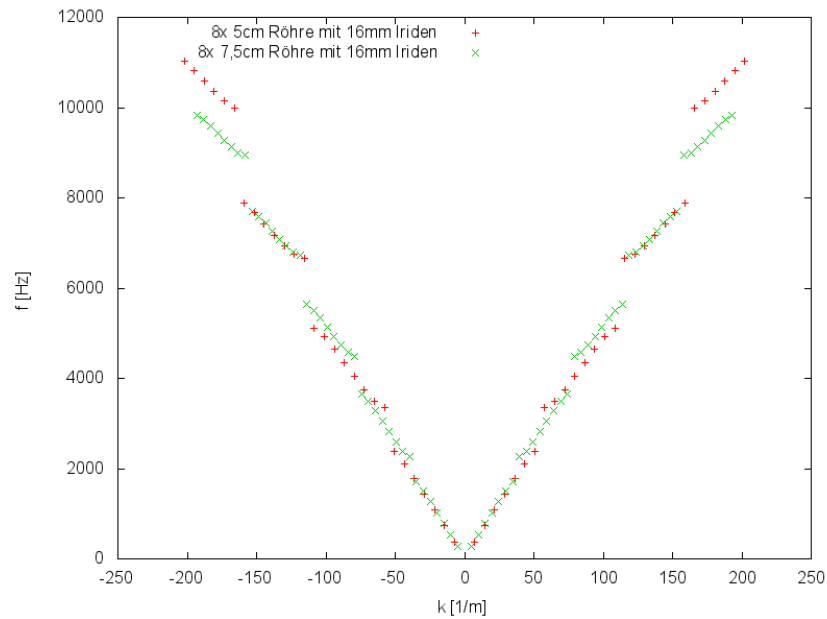


Abbildung 37: Darstellung der Bandstrukturen

Der Plot zeigt die Bandstrukturen für beide Versuchsaufbauten im Frequenzbereich in dem beide Röhren Bänder besitzen. Hier ist gut erkennbar, dass bei der 75 mm Röhre die Bänder schmäler werden und so auch die Brillouin-Zone kleiner wird. Dies hat zur Auswirkung, dass in etwa in dem Frequenzbereich, in dem bei den 50 mm Röhren vier Bänder Platz hatten, bei den 75 mm nun fünf Bänder Platz haben.

3.4 Modellierung eines Festkörpers durch Vergrößerung eines Moleküls

3.4.1 Einzelne Röhre

Mit einer 50 mm langen und einer 75 mm langen Röhre wurden folgende Übersichtsspektren aufgenommen:

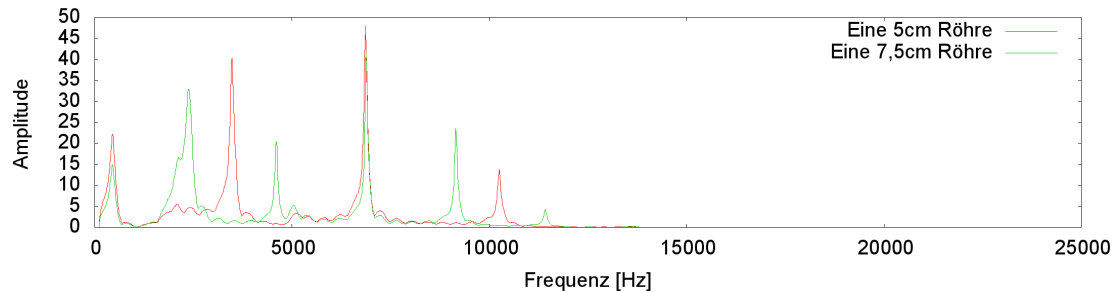


Abbildung 38: Übersichtsspektren einer 50 mm Röhre einer 75 mm Röhre

Die hier sichtbaren Resonanzen sind allesamt longitudinale Moden, da radiale Moden erst bei Frequenzen über 16 kHz auftreten. Hier ist gut zu sehen, wie sich die Resonanzen bei der kürzeren Röhre zu höheren Energien (Frequenzen) verschieben.

Die Resonanzen befinden sich bei folgenden Frequenzen:

Resonanznummer	50 mm Röhre Frequenz [Hz]	50 mm Röhre $k \left[\frac{1}{m}\right]$	75 mm Röhre Frequenz [Hz]	75 mm Röhre $k \left[\frac{1}{m}\right]$
1	3478,79	62,83	2368,84	41,88
2	6862,59	125,66	4603,64	83,78
3	10250,56	188,50	6881,58	125,66
4	13605 (abgelesen)	251,33	9153,64	167,55
5	/	/	11420,15	209,44

Tabelle 8: Resonanzstellen

Der Abstand der Resonanzen zueinander ist theoretisch die Frequenz der ersten Resonanz, da die höheren Resonanzen ganzzahlige Vielfache dieser sind. Berechnen lässt sich der Abstand daher über Formel 1.4.12. Für die beiden Röhren ergibt sich damit:

$$\Delta f_{50,theo} = 3440 \text{ Hz}$$

$$\Delta f_{75,theo} = 2293,33 \text{ Hz.}$$

Um mit Hilfe der gemessenen Resonanzen den Abstand zu bestimmen, werden die einzelnen Resonanzabstände gemittelt. Dabei ergibt sich:

$$\Delta f_{50,exp} = (3400 \pm 20) \text{ Hz}$$

$$\Delta f_{75,exp} = (2280 \pm 20) \text{ Hz.}$$

Die Abweichungen betragen damit $-1,1\%$ bzw. $-0,4\%$.

3.4.2 Zwei Röhren

Bei zwei 50 mm Röhren, die über eine Iris verbunden sind, wurde das folgende Spektrum im Bereich von 100 Hz bis 12000 Hz aufgenommen.

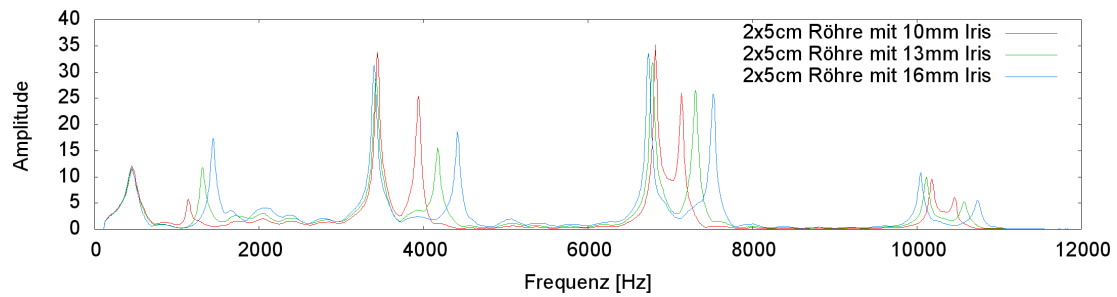


Abbildung 39: Spektrum zweier über eine Iris gekoppelter Röhren

Zum Vergleich folgt nun noch einmal das Spektrum einer einzelnen 50 mm Röhre im selben Frequenzbereich.

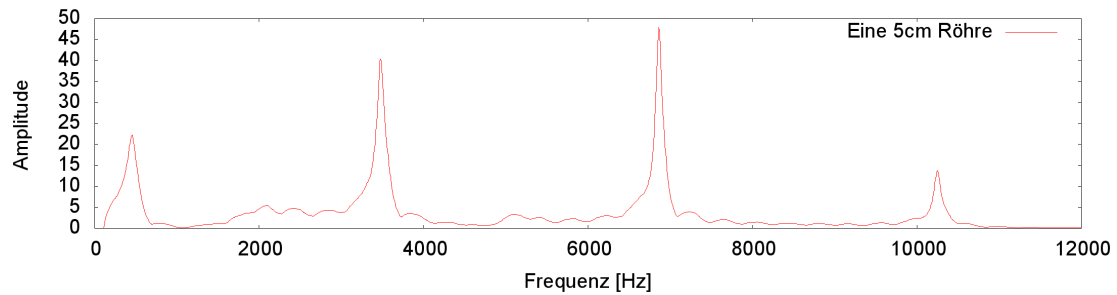


Abbildung 40: Spektrum einer einzelnen Röhre

Im Vergleich ist zu erkennen, dass die zugefügte Röhre mit der Iris für eine Aufspaltung der Resonanzen sorgt. Die Aufspaltung in einen bindenden und einen antibindenden Zustand ist umso größer, je größer die Iris ist, d.h. je stärker die Kopplung zwischen den

Röhren ist. Der Grenzfall dieses Verhaltens wäre eine 25 mm Iris, d.h. effektiv keine Iris. In diesem Fall würde einfach eine doppelt so lange Röhre vorliegen, bei der die Resonanzen äquidistant verteilt sind.

Zu beachten ist, dass die Peaks, die zwischen 1000 Hz und 2000 Hz liegen, die antibindenden Zustände sind, die zur Nullresonanz gehören. Der Peak bei 460 Hz ist die bereits erwähnte Störung, die sich nicht aufspaltet.

3.4.3 Mehrere Röhren

Um die Entwicklung von Bändern zu beobachten wurde nun das gleiche Experiment mit drei, vier und sechs Röhren durchgeführt, die wieder über Iriden mit den drei verschiedenen Größen gekoppelt waren. Bei Verwendung von drei 50 mm Röhren wurden die folgenden Spektren aufgenommen:

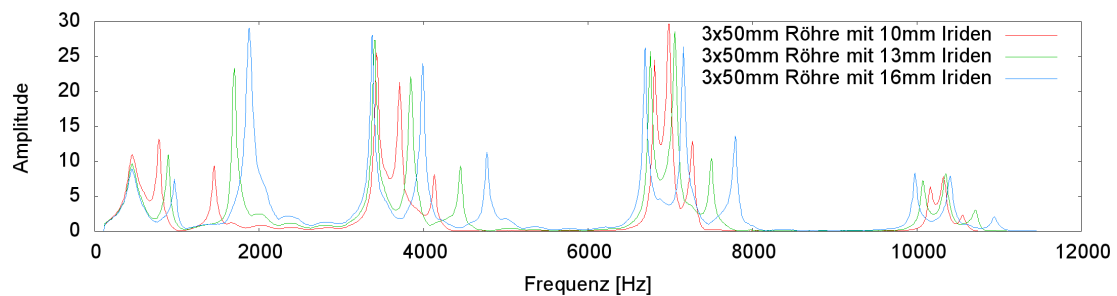


Abbildung 41: Spektrum dreier 50 mm Röhren

Hier sind dieselben Beobachtungen aus Abschnitt 3.4.2 gültig. Mit vier Röhren ergaben sich folgende Spektren:

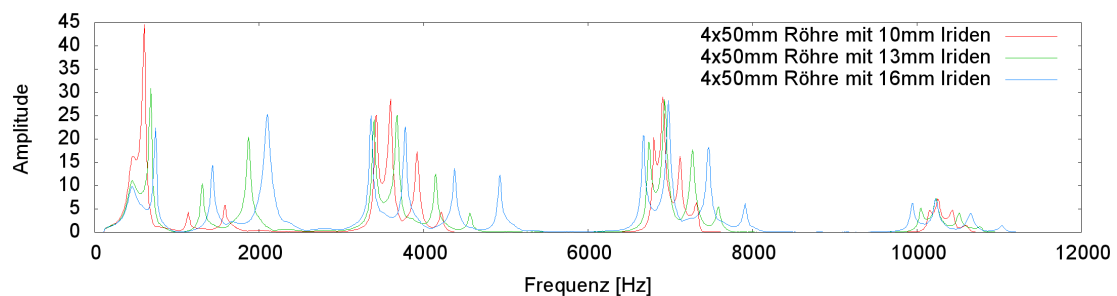


Abbildung 42: Spektrum, erzeugt durch vier 50 mm Röhren

Mit sechs Röhren ergab sich schließlich:

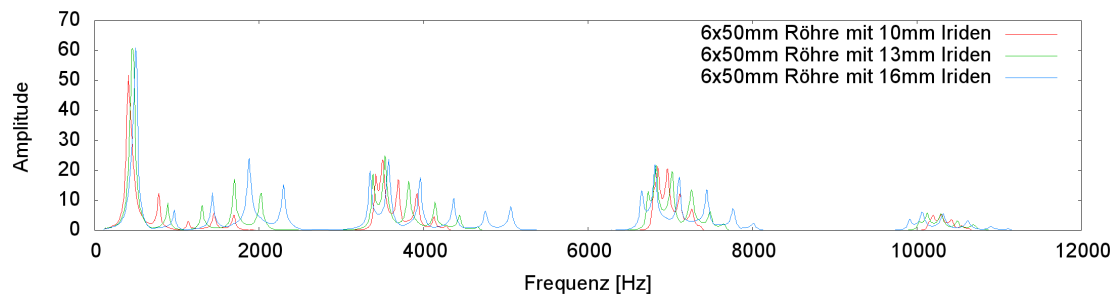


Abbildung 43: Spektrum, erzeugt durch sechs 50 mm Röhren

Bei diesem Spektrum ist anzumerken, dass die enorme Größe des ersten Peaks, im Vergleich zu den anderen Peaks, dadurch zustande kommt, dass er sich mit dem oben erwähnten Störpeak überlagert.

Bei diesen Spektren ist gut zu erkennen, dass jede weitere Einheitszelle für eine weitere Aufspaltung der Resonanzen sorgt. D.h. die Resonanzen spalten sich in so viele Peaks auf, wie Einheitszellen vorliegen. In Abb. 43 ist bereits gut die entstehende Bandstruktur zu erkennen. Bei unendlich vielen Einheitszellen würden nämlich kontinuierliche Bänder entstehen, mit Bandlücken an den Stellen, an denen sich auch hier bereits keine Peaks befinden.

Durch Zuordnung und Darstellung von k -Werten, siehe Kapitel 3.3.2, lassen sich die Bandstruktur und die Bandlücken im k -Raum im erweiterten Zonenschema gut erkennen:

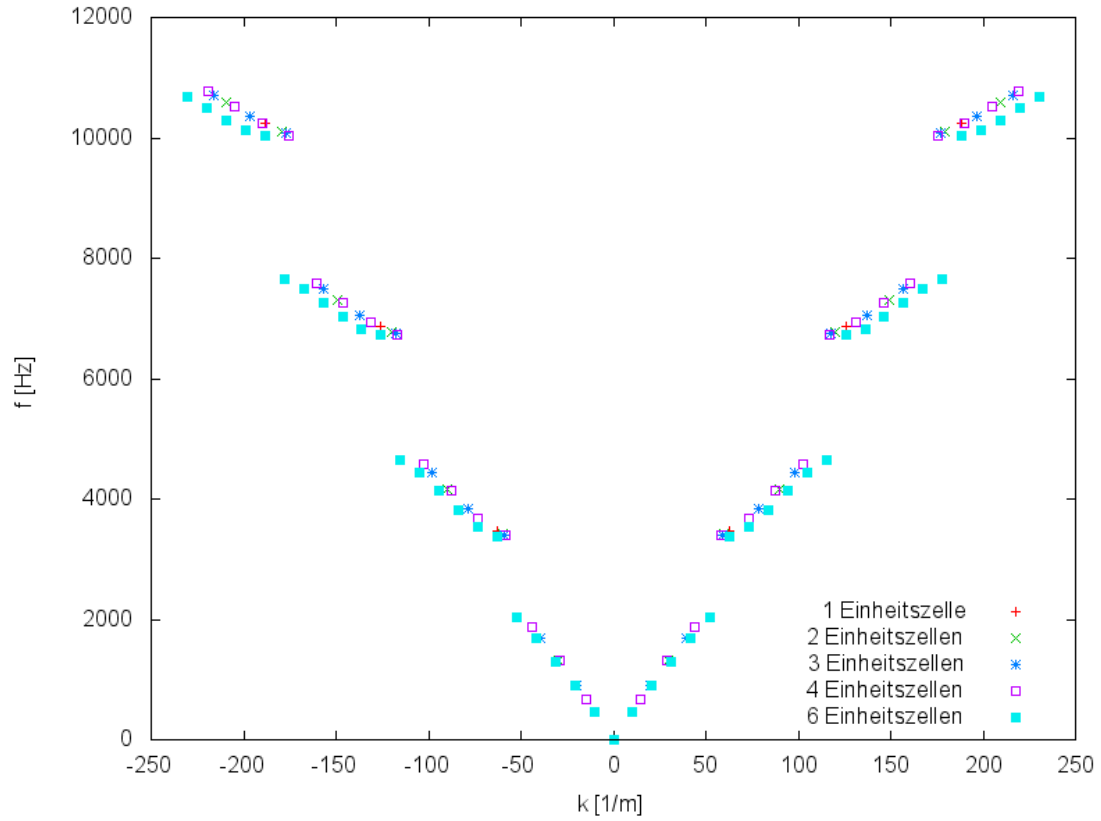


Abbildung 44: Erweitertes Zonenschema unter Verwendung der Spektren aus den Abschnitten 3.4.1, 3.4.2 und 3.4.3

Das oberste Band weist bei den sechs Einheitszellen nur fünf Zustände auf. Dies liegt daran, dass, aufgrund der geringen Intensität, der sechste Zustand nicht mehr sicher gefunden werden konnte.

Die höheren Bänder werden im Allgemeinen schmaler und dadurch die Bandlücken entsprechend größer. Dies bedeutet aber auch, dass die einzelnen Zustände näher beieinander liegen und der Unterschied zwischen bindenden und antibindenden Zuständen geringer wird.

3.4.4 Alternierende Iriden

Um den Einfluss komplizierterer Periodizitäten auf die Bandstruktur zu untersuchen, wurde zuerst ein Spektrum von zwölf 50 mm Röhren aufgenommen, die über 13 mm Iriden gekoppelt waren. Anschließend wurde jede zweite Iris durch eine 16 mm Iris ersetzt, sodass es insgesamt sechs 13 mm Iriden und fünf 16 mm Iriden waren. Das nachfolgende Spektrum wurde dabei aufgezeichnet:

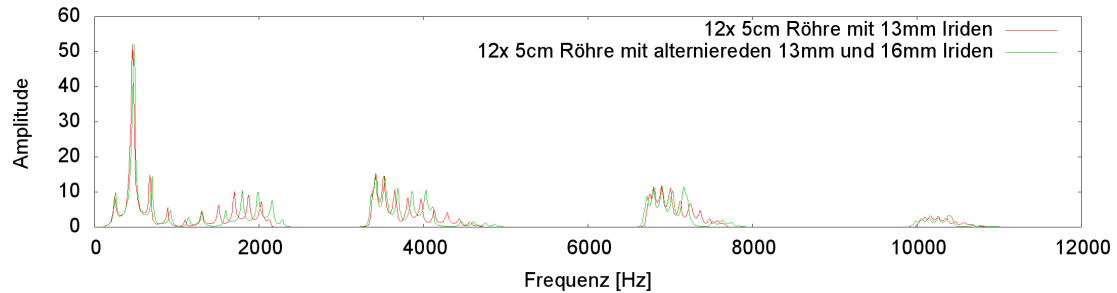


Abbildung 45: Spektrum von zwölf 50 mm Röhren mit einheitlichen und alterierenden Iriden

So wie die vorherigen Abschnitte bereits vermuten ließen, bildet sich durch die zwölf einheitlichen Iriden eine Bandstruktur mit jeweils zwölf Zuständen aus. Trotzdem sind aufgrund von Überlagerungen in dem abgebildeten Spektrum nicht immer zwölf Zustände zu erkennen.

Bei Verwendung alternierender Iriden entsteht darüber hinaus aber noch eine Unterstruktur. Zwischen dem siebten und dem achten Peak eines Bandes bildet sich nämlich eine zusätzliche Bandlücke, die das Band in zwei Teile teilt. Die asymmetrische Teilung kommt dabei dadurch zustande, dass mit einer unterschiedlichen Anzahl an Iriden gearbeitet wurde.

Gut zu erkennen ist die zusätzliche Bandlücke auch im erweiterten Zonenschema:

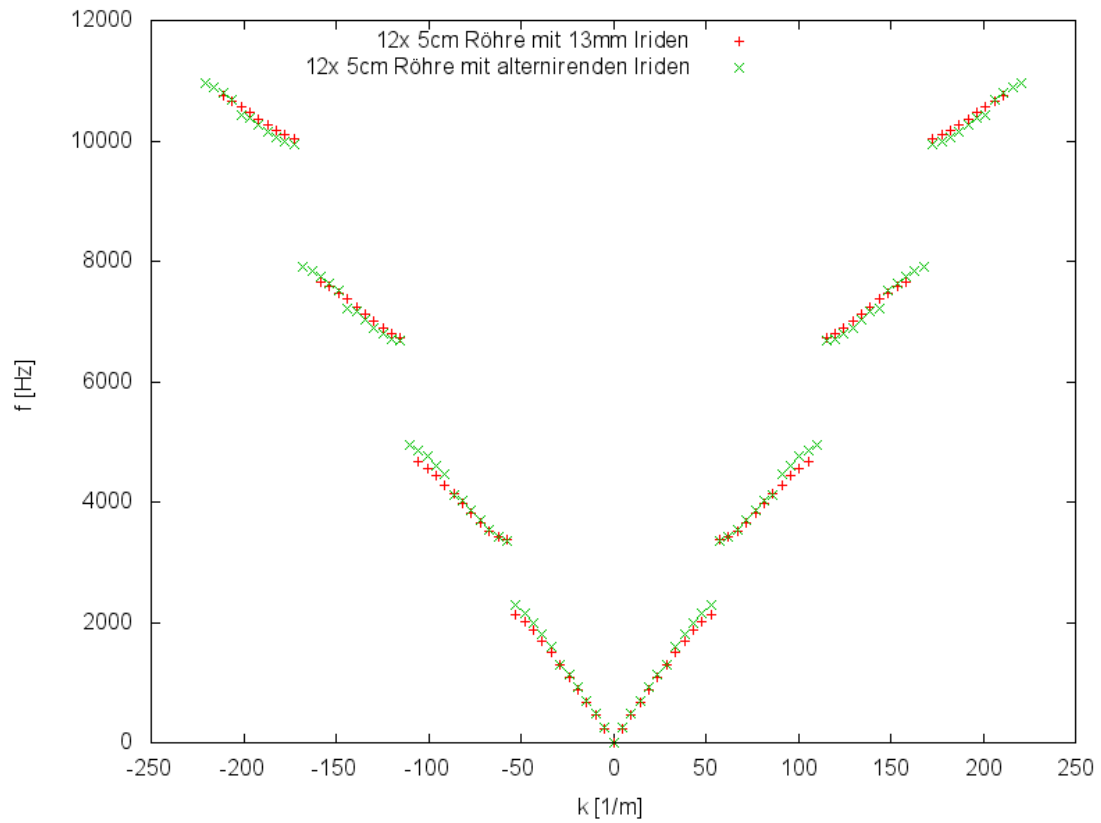


Abbildung 46: Erweitertes Zonenschema zu den aufgenommenen Spektren

Ebenso ist hier zu sehen, dass der obere Teil des Bandes im alternierenden Spektrum gegenüber dem entsprechenden Teil im Spektrum der 13 mm Iriden energetisch angehoben ist.

3.4.5 Einheitszellen

Das aufgenommene Spektrum zeigt die nachfolgende Abbildung.

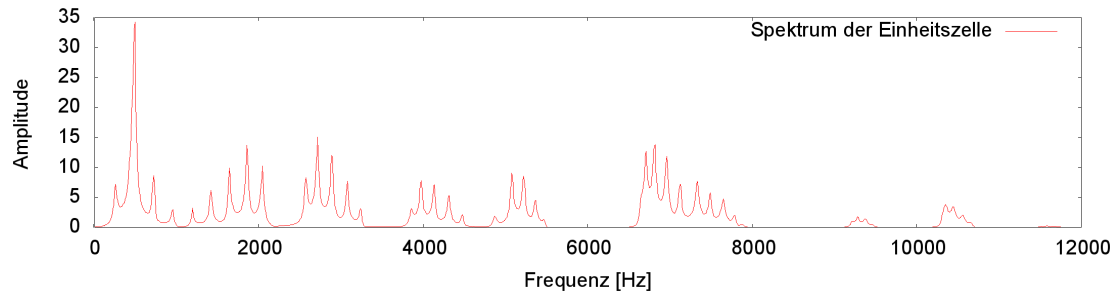


Abbildung 47: Spektrum der vermessenen Einheitszellen

Es soll die Bandstruktur der Einheitszellen graphisch dargestellt werden. Dazu wird, wie in Kapitel 3.3.2 beschrieben, vorgegangen. Die Resonanzfrequenzen und deren k -Wert befinden sich in der unteren Tabelle.

n	f_n [Hz]	k_n [$\frac{1}{m}$]
1	241,56	4,65
2	492,24	9,31
3	726,26	13,96
4	955,90	18,62
5	1199,16	23,27
6	1421,99	27,93
7	1646,42	32,58
8	1860,48	37,23
9	2044,98	41,89
10	2573,34	46,54
11	2717,14	51,20
12	2892,68	55,85
13	3080,49	60,50
14	3244,40	65,16
15	3863,71	69,81
16	3973,40	74,47
17	4134,74	79,12
18	4314,35	83,78
19	4480,27	88,43
20	4877,99	93,08
21	5078,81	97,74
22	5223,56	102,39
23	5368,36	107,05
24	6701,41	111,70

25	6815,38	116,36
26	6962,56	121,01
27	7124,35	125,66
28	7331,65	130,32
29	7488,32	134,97
30	7646,99	139,63
31	7791,38	144,28
32	9283,00	148,93
33	9371,40	153,59
34	10335,34	158,24
35	10452,82	162,90
36	10552,56	167,55

Tabelle 9: Resonanzfrequenzen f_n und deren k_n -Werte

Graphische Darstellung:

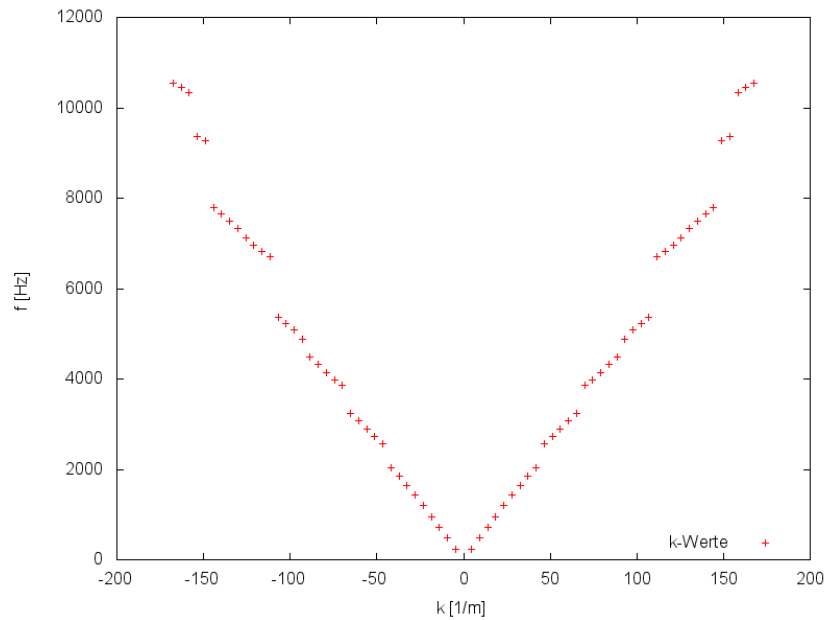


Abbildung 48: Bandstruktur der vermessenen Einheitszellen

Es sollen noch die Atomlevel mit den Messungen aus Kapitel 3.4.1 verglichen werden. Die einzelnen Bänder entstehen hier an den Stellen, an denen die einzelnen 50 mm und 75 mm Röhren ihre Resonanzen haben. Die auf den ersten Blick unregelmäßige Bandstruktur hier ist also eine Überlagerung der beiden einzelnen Strukturen.

3.4.6 Einfügen von Defekten

Die Spektren jeder verwendeten Defektlänge, inklusive jeder Defektposition, werden zuerst graphisch dargestellt.

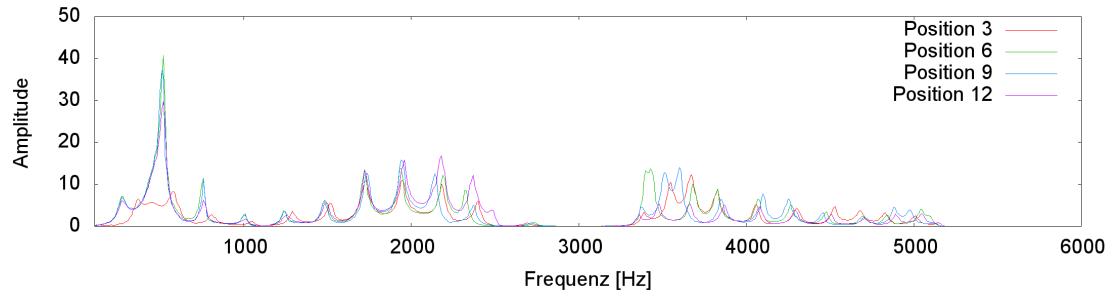


Abbildung 49: Spektrum mit verwendeter Defektlänge 25 mm

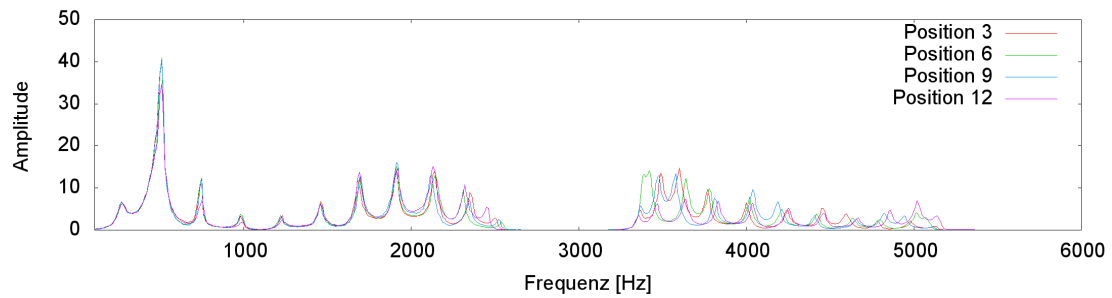


Abbildung 50: Spektrum mit verwendeter Defektlänge 37,5 mm

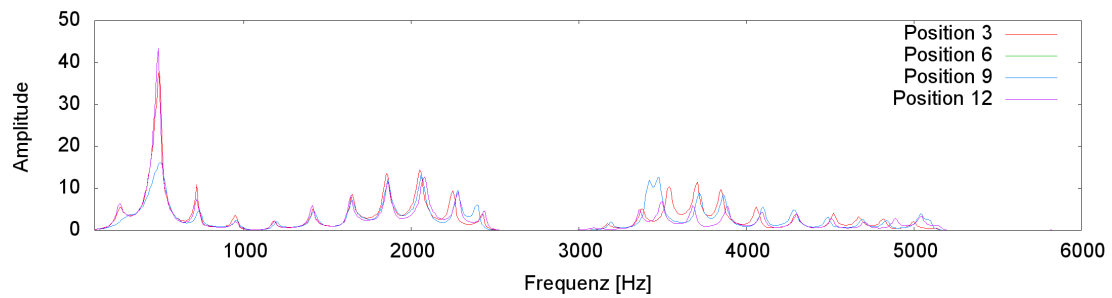


Abbildung 51: Spektrum mit verwendeter Defektlänge 62,5 mm

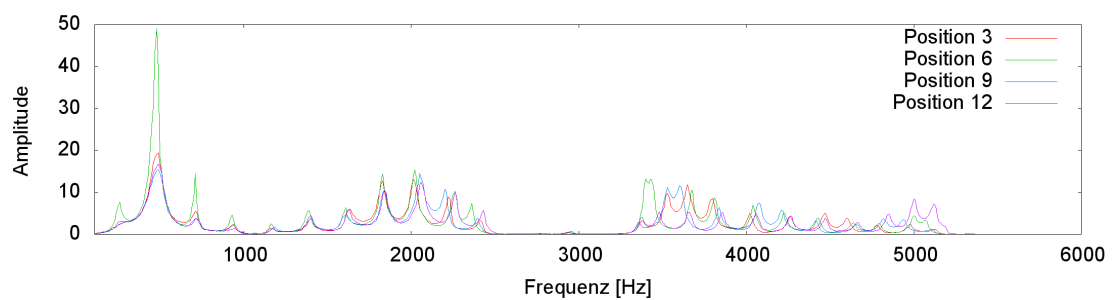


Abbildung 52: Spektrum mit verwendeter Defektlänge 75 mm

In den oberen drei Grafiken sind Peaks in der Bandlücke zwischen 2000 und 3000 Hz, die nur schwer zu identifizieren sind aufgrund der geringen Intensität des Spektrums. Diese entstehen durch Störstellen.

Es werden die Daten aus Abbildung 52 für Position 6 genutzt, um die Bandstruktur im erweiterten Zonenschema darzustellen. Dazu wird wiederum, wie in Kapitel 3.3.2 beschrieben, vorgegangen.

Um die Bandstruktur mit den Daten aus der Messung einer Röhre, bestehend aus zwölf 50 mm Röhrenstücken, unterteilt durch 16 mm Iriden, siehe Kapitel 3.3.4, zu vergleichen, werden beide Bandstrukturen in eine Graphik geplottet.

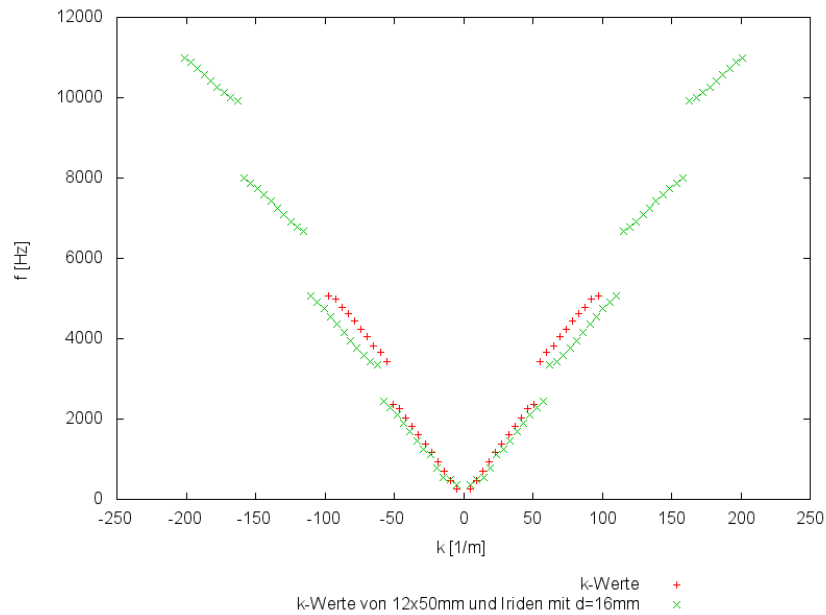


Abbildung 53: Bandstrukturen beider zu vergleichenden Messungen

Auffällig ist, dass sich die Bandlücken bei ähnlichen k -Werten befinden. Außerdem sind die Bandlücken vom Betrag ähnlich. Die Werte aus der Messung mit dem Defekt sind grundsätzlich höher als die Werte aus Kapitel 3.3.4. Dies zeigt also, dass die Frequenzen dort gegenüber dem Spektrum aus Kapitel 3.3.4 etwas verschoben sind. Außerdem war der Messbereich in Kapitel 3.3.4 deutlich größer, wodurch mehrere Resonanzen aufgenommen werden konnten.

4 Diskussion

Generell ist dieser Versuch recht simpel in der Durchführung. Es ist keine Justage erforderlich, sodass keine großen Fehler bzw. Überraschung in den Daten zu erwarten sind. Dies wurde im Prinzip auch in der Auswertung bestätigt.

Die einzigen wirklichen Probleme entstehen durch z.B. durch den von der Apparatur verursachten Störpeak bei ca. 460 Hz, sowie durch die Tatsache, dass einige Resonanzen aufgrund zu geringer Intensität nicht exakt bestimmt werden können. Die Abweichungen von Literaturwerten befinden sich in einem Bereich von ca. 2%, sodass von einer sehr guten Übereinstimmung gesprochen werden kann.

Bei der Bestimmung der Schallgeschwindigkeit ist auch ersichtlich, dass die Fitkurve sehr gut zu den Messdaten passt und die berechneten Parameter nur kleine Fehler besitzen. Ebenfalls ist der lineare Zusammenhang zwischen der Frequenz f und der Wellenzahl k sehr deutlich nachgewiesen worden.

In diesem Versuch konnte alle aufgetretenen Phänomene gut mit der Theorie vereint

werden.

Beim Erstellen der Polarplots in Kapitel 3.2.3 sind Verformungen bei den experimentell erstellten Graphen zu sehen. Dies entstand zum einen durch die Schwierigkeit, exakt die Resonanzfrequenzen im dazugehörigen Spektrum zu erzeugen, zum anderen sind die Messschritte mit 10° relativ grob. Bei deutlich kleineren Messschritten ist zu erwarten, dass die theoretischen Formen noch besser getroffen worden wären.

5 Literaturverzeichnis

1. Anleitung zum Versuch 23:
<http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/MASTER/SKRIPT/QAStudent4.pdf> (abgerufen am 24.02.2014)
2. SpectrumSLC, Programm erhältlich unter <http://www.uni-kassel.de/fb10/institute/physik/forschungsgruppen/oberflaechenphysik/quantum-analogs/spectrumslc.html> (heruntergeladen am 26.02.2014)
3. PlotYlm, Programm erhältlich unter <https://www.uni-kassel.de/fb10/institute/physik/forschungsgruppen/oberflaechenphysik/quantum-analogs/spherical-harmonics.html> (heruntergeladen am 26.02.2014)
4. <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/sound/souspe.html> (abgerufen am 26.02.2014)