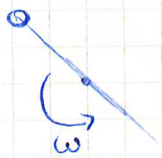
3. Übungszettel

Matthias Jaeger, Marius Holthues

18,5/20

Aufgabe 1

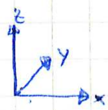
a) $x, y = 0$ ✓ ⇒ skleronom, holonom ✓

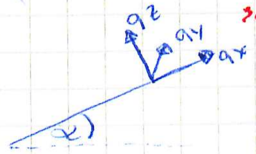
b) 

$\varphi = \omega t$ ✓

r beliebig

⇒ rheonom, holonom (φ und r sind unabh. voneinander) ✓

c) 



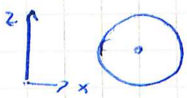
schön ⌣

Zwangsbed.

$q_z = 0$ ⇒ skleronom, holonom ✓

Transformationsregel $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{pmatrix}$ wäre noch nett

d) Wir betrachten den Radmittelpunkt und schließen Verkippung aus.



⇒ $z = \text{const}$ ⇒ skleronom nicht-holonom (siehe Aufgabe 4) ✓

$dx = -r\cos(\alpha)\,d\varphi$

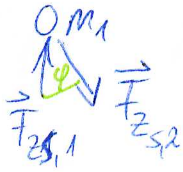
$dy = -r\sin(\alpha)\,d\varphi$

(steht ja in A.4)

5/5

Matthias Jonas, Marius Hötthues

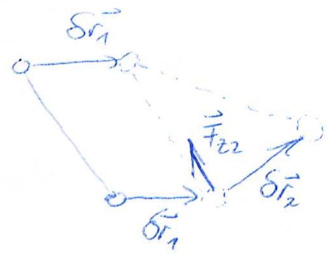
1 a)



$$\vec{F}_{Z1} = \begin{pmatrix} 0 \\ m_1 g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} +m_2 g \sin\varphi \cdot\cos\varphi \\ -m_2 g \cos\varphi \cdot\cos\varphi \end{pmatrix}$$ (✓)

$$\vec{F}_{Z2} = \begin{pmatrix} -m_2 g \sin\varphi \cdot\cos(\varphi) \\ m_2 g \cos\varphi \cdot\cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

b) Betrachte virtuelle Verrückungen $\delta\vec{r}_1$, $\delta\vec{r}_2$:



$$\delta\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ $\vec{F}_{Z1} \cdot \delta\vec{r}_1 = m_2 g \sin(\varphi) \cdot\cos(\varphi)\, \delta x_1 \neq 0$ (für $\varphi \neq 0$) ✓

$\cancel{\vec{F}_{Z2} \cdot \delta\vec{r}_1 = -m_2 g \sin(\varphi)\, \delta x_1 \neq 0}$

Masse m_2 bewegt sich um $\delta\vec{r}_1 + \delta\vec{r}_2$, da $\delta\vec{r}_2$ den Standort von Masse m_1 nicht beeinflusst. m_1 ist ja gerade der Drehpunkt.

$$\vec{F}_{Z2} \cdot (\delta\vec{r}_1 + \delta\vec{r}_2) \underset{\uparrow}{=} \vec{F}_{Z2} \cdot \delta\vec{r}_1 = -m_2 g \sin\varphi \cdot\cos(\varphi)\, \delta x_1 \neq 0 \quad (\text{für } \varphi \neq 0)$$ ✓

$\vec{F}_{Z2} \perp \delta\vec{r}_2$

c) $\vec{F}_{Z1}\, \delta\vec{r}_1 + \vec{F}_{Z2} (\delta\vec{r}_1 + \delta\vec{r}_2) = m_2 g \sin\varphi\, \delta x_1 - m_2 g \sin\varphi\, \delta x_1 = 0$ ✓

d) Energieerhaltung (Arbeit ist Energie) ✓

4,5/5

5|

a) $\sum_{i=1}^{N} \left[\left(\dot{\vec{p}}_i - \vec{F}_{i,EXT} \right) \cdot \delta \vec{r}_i \right] = 0$ $\qquad \vec{F}_{i,EXT} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix}$

$$\left[m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{pmatrix} = 0 \quad ✓$$

b)

$$\tan\alpha = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} \quad ✓$$

c) geeignete Koordinaten: r, φ

$x = r\cos\varphi$

$y = r \sin\varphi$

$z = r \cdot (\tan\alpha)^{-1}$

$\left(df = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \right)$

$\delta x = \cos\varphi \, \delta r + r(-\sin\varphi)\,\delta\varphi$

$\delta y = +\sin\varphi \, \delta r + r \cos\varphi \, \delta\varphi$

$\delta z = \underbrace{(\tan\alpha)^{-1}}_{\equiv a} \delta r$

$\ddot{x} = \frac{d}{dt}(\dot{r}\cos\varphi - r\sin\varphi\,\dot{\varphi})$

$= (\ddot{r}\cos\varphi - \dot{r}\sin\varphi\,\dot{\varphi} - \dot{r}\sin\varphi\,\dot{\varphi} - r\cos\varphi\,\dot{\varphi}^2 - r\sin\varphi\,\ddot{\varphi})$

$\ddot{y} = \frac{d}{dt}(\dot{r}\sin\varphi + r\cos\varphi\,\dot{\varphi})$

$= (\ddot{r}\sin\varphi + \dot{r}\cos\varphi\,\dot{\varphi} \cdot 2 - r\sin\varphi\,\dot{\varphi}^2 + r\cos\varphi\,\ddot{\varphi})$

$\ddot{z} = \ddot{r}\cot\alpha$

alles einsetzen in das d'Alembertsche Prinzip:

$$\begin{aligned} m\cdot[\, & \delta r\,(\ddot{r}\cos^2\varphi - 2\dot{r}\sin\varphi\cos\varphi\,\dot{\varphi} - r\sin\varphi\cos\varphi\,\ddot{\varphi} - r\cos^2\varphi\,\dot{\varphi}^2) \\ & + \delta\varphi\, r\,(-\ddot{r}\cos\varphi\sin\varphi + 2\dot{r}\sin^2\varphi\,\dot{\varphi} + 2r\sin^2\varphi\,\ddot{\varphi} + r\sin\varphi\cos\varphi\,\dot{\varphi}^2) \\ & + \delta r\,(\ddot{r}\sin^2\varphi + 2\dot{r}\sin\varphi\cos\varphi\,\dot{\varphi} + r\cos\varphi\sin\varphi\,\ddot{\varphi} - r\sin^2\varphi\,\dot{\varphi}^2) \\ & + \delta\varphi\, r\,(\ddot{r}\cos\varphi\sin\varphi + 2\dot{r}\cos^2\varphi\,\dot{\varphi} + r\cos^2\varphi\,\ddot{\varphi} - r\cos\varphi\sin\varphi\,\dot{\varphi}^2) \\ & + \delta r\, a\,(\ddot{r}a + g)\,] = 0 \end{aligned}$$

Hier fliegt einiges raus: außerdem sind δr und $\delta\varphi$ unabh. voneinander ($\rightarrow$ Freiheitsgrade $=2$), daher ergeben sich hieraus zwei Gleichungen

$$m\left[\delta r\left(\ddot{r}+a(\ddot{r}a+g)-r\dot{\varphi}^2\right)\right]=0$$
$$m\,\delta\varphi\, r\left(2\dot{r}\dot{\varphi}+r\ddot{\varphi}\right)=0$$

bzw. nach Kürzen

$$\ddot{r}+a(\ddot{r}a+g)-r\dot{\varphi}^2=0$$
$$2\dot{r}\dot{\varphi}+r\ddot{\varphi}=0$$

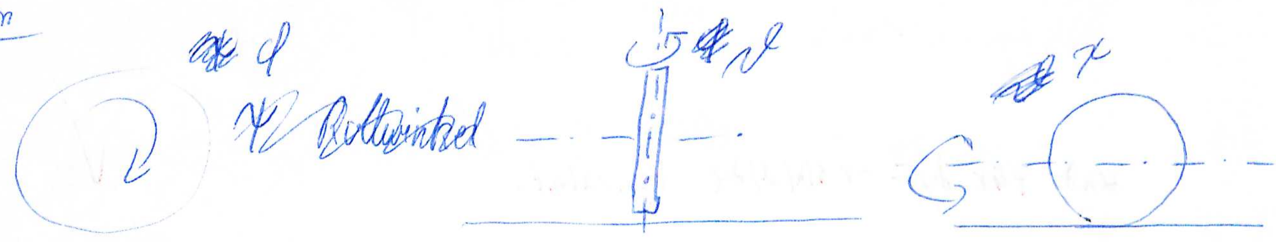
✓

5/5

a) Freiheitsgrade: ~~x y z φ θ χ~~

Ein starrer Körper im Raum hat sechs Freiheitsgrade. Dies ist die Zahl der voneinander unabhängigen Bewegungsmöglichkeiten des Körpers: 3 rotatorische und 3 translatorische. Zwangsbedingungen schränken diese Bewegungsmögl. ein!

Rotation



① lässt sich aus diesen drei ableiten → nicht frei

② ✓

Verkippung ③ → nicht möglich gem. Aufg.-stellung

Bewegung

①	②	③
$z = \text{konst.}$, $dz = 0$	x frei	y frei

schön :)

$\Rightarrow$ 2 Freiheitsgrade: φ, ϑ — im Kleinen (Differentiellen) ✓

[mit Schlupf ist auch Ψ frei, daher 4 Freiheitsgrade.] ↳ sprich x und y frei

im Großen: 4 Freiheitsgrade, weil aus den 2 differentiellen Zwangsbed. keine „globalen" Zwangsbed. folgen!

Zwangsbedingungen:

$dz = 0$, $dx = -r\cos\vartheta \, d\varphi$, $dy = -r\sin\vartheta \, d\varphi$ ✓

$d\Psi = 0$

✓ ϑ ist für diese infinitesimal kleine Änderung des Rollwinkels φ konstant.

b) $dz = 0 \Leftrightarrow z = z_0 = \text{konst.}$ → skleronom, holonom ✓

c) $dx = -r\cos(\vartheta)\, d\varphi \Leftrightarrow \dot{x} = -r\cos(\vartheta)\dot{\varphi}$ I

Annahme: holonome Zw.-bed. $\Leftrightarrow \exists\, f(x, \vartheta, \varphi) = 0$ ¿ Stetigkeit?

$\Leftrightarrow \exists\, x = g(\vartheta, \varphi)$ ↯ z.B. $f(x) = x - \tanh(\alpha x)$

Dann lässt sich $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ als totale Zeitableitung von g darstellen.

$$\Rightarrow \dot{x} = \frac{\partial g}{\partial \vartheta}\frac{d\vartheta}{dt} + \frac{\partial g}{\partial \varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial g}{\partial \vartheta}\dot{\vartheta} + \frac{\partial g}{\partial \varphi}\dot{\varphi} \quad \text{II}$$

Koeffizientenvergleich I $\Leftrightarrow$ II liefert

$$-r\cos(\vartheta) = \frac{\partial g}{\partial \varphi} \quad \text{und} \quad 0 = \frac{\partial g}{\partial \vartheta}$$

holonome Zw. bed. müssen aber der Integrabilitätsbedingung genügen:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j} \overset{!}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \quad \text{aber} \quad \frac{\partial^2 g}{\partial \varphi \partial \vartheta} \neq \frac{\partial^2 g}{\partial \vartheta \partial \varphi}$$

denn $r \sin \vartheta \neq 0$ ✓

und für $dy = -r\sin(\vartheta)\,d\varphi$ äquivalent...

d) Bedingung: $\varphi \neq \varphi(\psi)$ $\Rightarrow$ das Rad fährt geradeaus (✓)

vielmehr $\vartheta \equiv \vartheta_0 \equiv \text{const.}$

I $\Rightarrow$ $dx = -r\cos\vartheta \, d\varphi \quad | \int$

$$x - x_0 = -r\varphi\cos\vartheta$$

und $y - y_0 = -r\varphi\sin\vartheta$ ✓

äquivalentes System:
unbeschleunigt, geradlinig bewegtes Teilchen ✓

4/5

---

c) $dF_1(x,\varphi) = dx - a\cos(\vartheta)\,d\varphi = 0$

$dF_2(y,\varphi) = dy - a\sin(\vartheta)\,d\varphi = 0$

- $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F_1}{\partial \varphi}\right) = a\sin\vartheta \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \neq \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\right) = 0$

$\vartheta = \vartheta(x)$ entscheidend! $= 0$ falls $\vartheta = \text{const.}$!

- $\frac{\partial}{\partial y}(-a\sin\vartheta) = -a\cos\vartheta \frac{\partial \vartheta}{\partial y} \neq \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial F_2}{\partial y}\right) = 0$

$\vartheta = \vartheta(y)$