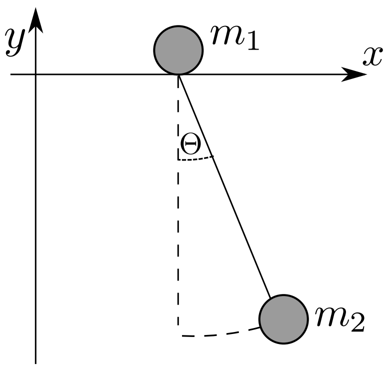
5. Übung zur Physik III WS 2015/2016

Ausgabe: 11.11.2015 Prof. Dr. F. Anders
Abgabe: 18.11.2015 bis 12 Uhr! Prof. Dr. M. Bayer

Aufgabe 1: Gleitpendel 5 Punkte

Der Aufhängepunkt eines ebenen Pendels der Länge l und der Pendelmasse m_2 besitzt die Masse m_1 und kann sich reibungsfrei entlang der x-Achse bewegen.



a) Schreiben Sie die Lagrangefunktion in Abhängigkeit von den Koordinaten x_1, y_1, x_2, y_2 und ihren Geschwindigkeiten auf.

b) Wie lauten die holonomen Zwangsbedingungen? Welche unabhängigen Koordinaten bieten sich an?

c) Bestimmen Sie die Lagrangefunktion als Funktion der in b) gewählten unabhängigen Koordinaten und stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf.

d) Welche Variablen sind in der Lagrangefunktion aus Teil c) zyklisch und wie lauten die zugehörigen Erhaltungsgrößen?

e) Die Anfangsbedingungen werden so gewählt, dass der Gesamtimpuls des Systems in x-Richtung verschwindet. Berechnen Sie die Koordinaten x_2 und y_2 als Funktion von Θ und zeigen Sie, dass sich die Masse m_2 auf einer Ellipse bewegt.

Aufgabe 2: Virialsatz 5 Punkte

Gegeben sei ein mechanisches System mit N Teilchen. Die zeitliche Mittelung einer Funktion $F(t)$ über das Zeitintervall $[0:T]$ ist definiert durch

$$\langle F \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \mathrm{d}t \, F(t).$$

Betrachten Sie nun die skalare Größe $G(t) = \sum_i \vec{p}_i(t)\vec{r}_i(t)$.

a) Leiten Sie die zeitliche Änderung von $G(t)$, d.h. dG/dt her. Hinweis: Newton ist von Nutzen!

b) Berechnen Sie damit die zeitliche Mittelung von dG/dt, d.h. $\langle dG/dt \rangle$.

c) Bei einer gebundenen Dynamik der Teilchen ist $G(t)$ beschränkt, d.h. es existiert ein M so dass: $|G(t)| < M$ für alle Zeiten t (warum?). Zeigen Sie, dass in diesem Fall gilt

$$\lim_{T\to\infty} \left\langle \frac{dG}{dt} \right\rangle = 0,$$

und leiten Sie daraus den Virialsatz ab, d.h. einen Zusammenhang zwischen gemittelter kinetischer Energie und der gemittelten Größe $\langle \sum_i \vec{F}_i \vec{r}_i \rangle$.

d) Betrachten Sie jetzt ein einzelnes gebundenes Teilchen im einem attraktiven Zentralkraftpotential $V(\vec{r}) = -\alpha|\vec{r}|^k$. Was ist damit der Zusammenhang zwischen der mittleren potentiellen Energie eines Teilchens und seiner mittleren kinetischen Energie, wenn es sich (i) im Gravitationspotential, $k = -1$, oder (ii) im Potential des harmonischen Oszillators, $k = 2$, bewegt?

Aufgabe 3: Symmetrietransformation und Erhaltungsgrößen 5 Punkte

a) Zeigen Sie, dass $x \to x' = x + \alpha \cos \omega t$ mit $\omega = \sqrt{D/m}$ eine Symmetrietransformation des harmonischen Oszillators ist und berechnen Sie die zugehörige Erhaltungsgröße J.

b) Zeigen Sie mit der allgemeinen Lösung des harmonischen Oszillators, dass J tatsächlich eine Erhaltungsgröße ist.

c) Zeigen Sie, dass für den freien Fall im homogenen Schwerkraftfeld die reine Galileitransformation $x \to x' = x + \alpha t$ eine Symmetrietransformation ist und berechnen Sie die zugehörige Erhaltungsgröße. Das Schwerefeld zeigt ebenfalls in x-Richtung.

Aufgabe 4: Ähnlichkeitstransformations des Zentralkraftproblems 5 Punkte

Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Skalierung von Längen und Zeiten beim Zentralkraftproblem (z. B. beim Keplerproblem)? Leiten Sie diesen Zusammenhang anhand der Lagrangefunktion des ebenen Zentralkraftproblems her.