A1)

a) $x(t) = \vec{A} e^{i\omega t} \rightarrow m\vec{A}(-\omega^2 + \alpha\omega i + \omega_0^2) = q\vec{E}_0$

$$\vec{A} = \frac{q\vec{E}_0}{m(-\omega^2 + \alpha i\omega + \omega_0^2)} e^{i\omega t}$$

b) $$\chi(\omega) = \frac{\vec{P}}{\varepsilon_0 |\vec{E}|} = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^{N} q\vec{x}(t) \frac{1}{\omega_0 |\vec{E}|}$$

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 (1 + \frac{1}{V} \frac{1}{\omega_0 |\vec{E}|} \sum_{i=1}^{N} q\vec{x}(t)$$

$$\vec{P} = \frac{1}{V} \sum \vec{p} = \frac{q^2}{Vm} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2 + \alpha i\omega)} \vec{E}(t) = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_0 \chi = \frac{q^2}{Vm} \frac{N}{(\omega_0^2 - \omega^2 + \alpha i\omega)}$$

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 \varepsilon_r = \varepsilon_0 (1 + \chi)$$

Stationär heißt, dass die Schwingung stationär ist, die Energien Zu/Abfuhr ändern sich aber weiterhin periodisch

---

Zusatzaufg.

a) Drücken Sie zunächst den Punkt $\vec{r}$ durch Zylinder- u. Kugelkoord. aus

b) Bestimmen Sie die totalen Differentiale der Potentiale U in den jew. Koord.syst.

c) Bilden Sie die Gradienten der Potentiale U, geben Sie die Kräfte F an!

d) Wie groß ist $\vec{\nabla}|\vec{r}|$

Tipp:

$U_1 = Ax^2z - By + Cyz = U_1(x, y, z)$

$\vec{\nabla} U(r, \varphi, z) = (\partial_r \vec{e}_r + \frac{1}{r}\partial_\varphi \vec{e}_\varphi + \partial_z \vec{e}_z) U$

$U_2(r, \varphi, z) = A\cos(rz) - Br\sin(\varphi)$

$\vec{\nabla} U(r, \varphi, \vartheta) = (\partial_r \vec{e}_r + \frac{1}{r}\partial_\vartheta \vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r\sin\vartheta}\partial_\varphi \vec{e}_\varphi) U$

$U_3(r, \varphi, \vartheta) = A\, r \cos\vartheta \sin\varphi$

a) $\vec r_{Zyl.} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$, $\vec r_{Kugel} = r\begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\vartheta \\ \sin\varphi\cos\vartheta \\ \sin\vartheta \end{pmatrix}$ für Rechtssystem $\vec r = r\begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\vartheta \\ \sin\varphi\sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}$

b) $dU_1 = (Az2x)dx + (-B+Cz)dy + (Ax^2+Cy)dz$

$dU_2 = (-Az\sin rz - B\sin\varphi)dr + (-Br\cos\varphi)d\varphi + (-Ar\sin rz)dz$

$dU_3 = (A\cos\vartheta\sin\varphi)dr + (Ar\cos\vartheta\cos\varphi)d\varphi + (-Ar\sin\vartheta\sin\varphi)d\vartheta$

c) $\vec\nabla U_1 = \begin{pmatrix} A2xz \\ -B+Cz \\ Ax^2+Cy \end{pmatrix}$, $\vec\nabla U_2 = \cancel{\begin{pmatrix} -Az\sin rz - B\sin\varphi \\ -B\cos\varphi \\ -Ar\sin rz \end{pmatrix}}$

$(-Az\sin rz - B\sin\varphi)\vec e_r + (-B\cos\varphi)\vec e_\varphi + (-Ar\sin rz)\vec e_z$

$\vec\nabla U_3 = \cancel{(A\cos\vartheta\sin\varphi)\vec e_r + (\frac{A\cos\vartheta}{r\sin\vartheta}\cos\varphi)\vec e_\varphi + (-\frac{A\sin\vartheta}{r\sin\vartheta}\sin\varphi)\vec e_\vartheta}$

$\vec F = -\vec\nabla U$

$= (A\cos\vartheta\sin\varphi)\vec e_r + (\frac{A\cancel{r}}{\cancel{r}}\cot\varphi\cos\vartheta)\vec e_\varphi$ $(-A\sin\varphi\sin\vartheta)\vec e_\vartheta$)

d) $|\vec r_{Zyl.}| = \sqrt{r^2+z^2}$ $|\vec r_{Kugel}| = r$

$\vec\nabla|\vec r_{Zyl}| = \frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}}\cdot(r\vec e_r + z\vec e_z) = \frac{\vec r}{|\vec r|}$

$\vec\nabla|\vec r_{Kugel}| = \vec e_r$

$\nabla|\vec r_{kart.}| = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{\vec r}{|\vec r|}$

A2)

a) $\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = -k^2 A$, $\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = \omega^2 A$

$\Rightarrow -k^2 A - \frac{\omega^2}{c^2} A = 0 \Rightarrow k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$

$\Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi f}{c}$

$\Rightarrow f = \frac{c}{\lambda}$

b) • $\frac{\partial A}{\partial x} = 3{,}75ikx^{2{,}75} \cancel{\exp(\ldots)} \cdot A$

• $\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = (3{,}75ikx^{2{,}75})^2 A + (3{,}75 \cdot 2{,}75)ikx^{1{,}75} A$

• $\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -k^2 v^2 A$

$\Rightarrow A(x,t) = \exp(ik(x^{3{,}75} - vt))$ löst die Wellengl. nicht.
(Koeffizientenvergleich)

• $\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = k^2 A$ • $\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = k^2 v^2 A$

$\Rightarrow k^2 A - \frac{v^2}{c^2} k^2 A = 0$ ~~gültig~~ für $v = \pm c$
löst der Ansatz die Wellengl.

c) $\frac{\partial A}{\partial x} = A'(x+vt) \cdot 1$, $\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = A''(x+vt)$

$\frac{\partial A}{\partial t} = A'(x+vt) \cdot v$, $\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = A''(x+vt) v^2$

$\Rightarrow A'' - \frac{v^2}{c^2} A'' = 0$ löst die Wellengleichung für ~~alle~~
$v = \pm c$.