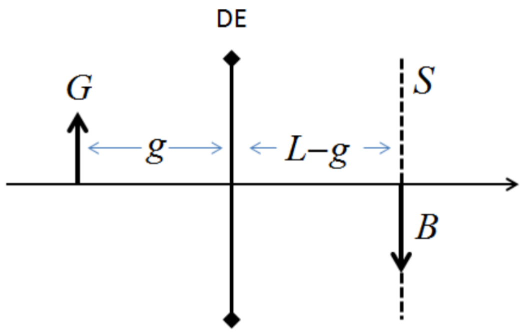
13. Übung zur Physik III — WS 2015/2016

Ausgabe: 20.01.2016 — Prof. Dr. F. Anders
Abgabe: 27.01.2016 bis 12:00 — Prof. Dr. M. Bayer

Hausaufgabe 1: Matrizenoptik — 5 Punkte

Betrachten Sie das folgende einfache optische System, das einen Gegenstand G auf einen Schirm S abbilden soll.



Der Abstand zwischen G und S sei L und fest vorgegeben, g bezeichnet die Gegenstandsweite und L-g die Bildweite. Dazwischen befinde sich ein optisches Element DE, von dem wir zunächst nur fordern, dass es optisch dünn ist, d.h. es hat keine Ausdehnung entlang der optischen Achse. Die Transformationsmatrix T unseres Elements lautet allgemein

$$T = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}. \tag{1}$$

a) Berechnen Sie die Matrix M, die den Abstand y und den Winkel α eines Lichtstrahls zur optischen Achse zwischen dem Gegenstand G und dem Schirm S transformiert.

Betrachten Sie achsennahe Strahlen, sodass $\tan(\alpha) \approx \alpha$ *gilt.*

b) Welche Voraussetzung muss die Matrix M erfüllen, damit der Gegenstand G scharf auf den Schirm S als Bild B abgebildet wird? Überlegen Sie dazu zunächst ganz allgemein, was Sie im Fall einer scharfen Abbildung für alle Strahlen, die von einem Gegenstandspunkt ausgehen, fordern müssen. Berechnen Sie aus dieser Bedingung die Gegenstandsweite g, für die der Gegenstand auf den Schirm scharf abgebildet wird.

Kontrollergebnis:

$$g_{1,2} = \frac{\alpha - \delta}{2\gamma} + \frac{L}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha - \delta}{2\gamma} + \frac{L}{2}\right)^2 + \frac{\beta + \delta L}{\gamma}} \tag{2}$$

c) Wählen Sie nun für Ihre weiteren Betrachtungen für DE eine fokussierende dünne Linse mit der Brennweite f. Geben Sie für diesen speziellen Fall die Gegenstandsweite g an. Wie groß darf die Brennweite f im Verhältnis zu L höchstens werden, damit das Bild scharf abgebildet wird?

Hausaufgabe 2: Kepler vs. Galileo — 5 Punkte

Galileo und Kepler sind beide vor allem durch ihre Beobachtungen auf dem Gebiet der Astronomie bekannt. Galileo benutzte dazu ein Galilei-Fernrohr (eine Sammel- und eine Zerstreuungslinse) und Kepler ein Kepler-Fernrohr (2 Sammellinsen). Wer von beiden war auf Grund seines Teleskops im Vorteil?

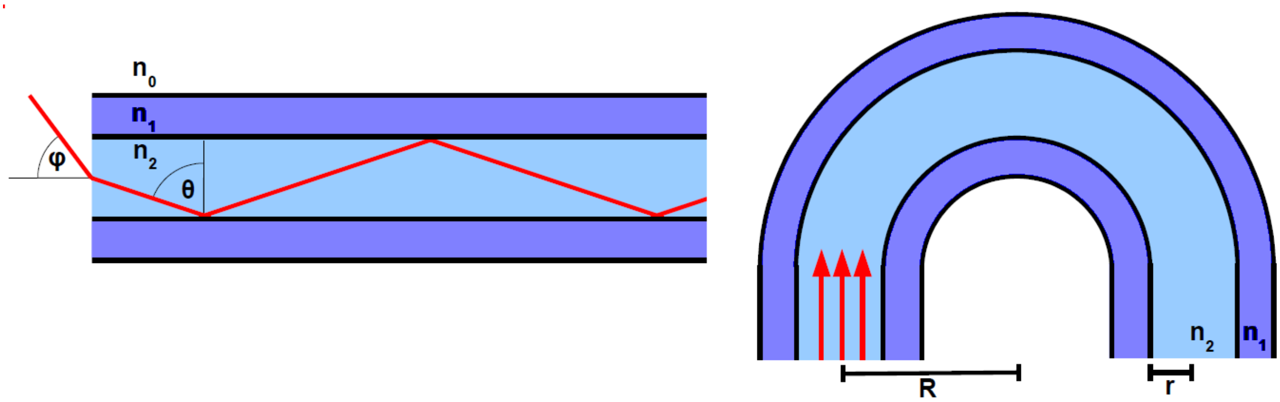
a) Stellen sie zunächst die allgemeine Abbildungsmatrix M für ein 2-Linsensystem (dünne Linse f_1 - Translation um d - dünne Linse f_2) auf und geben sie ganz allgemein die Brennweite $\tilde{f}$ des 2-Linsensystems an. Welche Bedingung muss das System erfüllen, damit man es als Fernrohr nutzen kann?

b) Zeichnen sie den Strahlengang eines Kepler- und eines Galilei-Fernrohrs.

c) Ein Lichtbündel paralleler Strahlen mit Breite Δr falle unter dem Winkel α auf das Objektiv eines Galilei- bzw. Kepler-Fernrohres. Wie groß sind der Austrittswinkel α' und die Breite $\Delta r'$ des aus dem Okular austretenden Lichtbündels? Wie ist demnach die Vergrößerung V, also das Verhältnis des Sehwinkels mit Sehhilfe zum Sehwinkel ohne Sehhilfe?

d) Welches sind, basierend auf den obigen Ergebnissen, die Vor- respektive Nachteile von Galilei- bzw. Kepler-Fernrohren?

Hausaufgabe 3: Glasfaser **5 Punkte**



Ein Glasfaserkabel, welches zur Übertragung von Licht genutzt wird, besteht aus einer dünnen zylindrischen Faser des Radius $r = 1\,\text{mm}$ und dem Brechungsindex $n_2 = 1{,}66$, welche von einem dünnen äußeren Mantel mit dem Brechungsindex $n_1 = 1{,}52$ umgeben ist. Die umliegende Luft besitze den Brechungsindex $n_0 = 1$. (linke Abbildung)

a) Glas weist eine anomale Dispersion auf, d.h. der Brechungsindex ist frequenzabhängig. Wie groß ist für eine Glasfaser der Länge $l = 6\,\text{km}$ und zwei zeitgleich gesendete Lichtpulse verschiedener Wellenlängen mit zugehörigen Brechungsindizes $n_2 = 1{,}66$ und $\tilde{n}_2 = 1{,}71$ die Zeitdifferenz, mit welcher die Signale am Ende der Leitung ankommen?

b) Welches Gesetz beschreibt die Abhängigkeit des Brechungswinkels vom Einfallswinkel? Ab welchem Winkel θ_c tritt an der Grenzfläche zwischen n_1 und n_2 Totalreflexion auf?

c) Welchen Einfallswinkel φ_{max} darf das einfallende Licht am Eingang maximal haben, damit es die Faser verlustfrei durchläuft? Absorptionseffekte und Reflexion am Eingang können vernachlässigt werden.

Nun wird angenommen, dass das Licht geradlinig ($\varphi = 0$) eingekoppelt wurde. Wird die Glasfaser nun an einer Stelle gebogen, so muss das Licht dort über Reflexion an der Grenzfläche der Biegung folgen. Bei zu starker Biegung kann jedoch der Auftreffwinkel zur Grenzfläche θ steiler als θ_c werden und damit Verluste auftreten. (rechte Abbildung)
Es wird der Einfachheit halber folgende Annahme getroffen: Wird der Lichtstrahl beim ersten Auftreffen an der Grenzfläche totalreflektiert, so wird er auch an den folgenden Auftreffpunkten totalreflektiert werden. (Es müssen also nur Auftreffpunkte der in der rechten Abbildung eingezeichneten Strahlen untersucht werden)

d) Überlegen Sie sich anhand einer Skizze, wie steil ein mit $\varphi = 0$ eingekoppelter Lichtstrahl im schlimmsten Fall auf die Grenze zwischen n_1 und n_2 in der Kurve treffen kann.

e) Wie groß ist damit der minimale Krümmungsradius R, mit dem man das Kabel biegen darf, ohne dass es zu Verlusten kommt?

Hausaufgabe 4: Fata Morgana - Wiederholung der Variationsrechnung 5 Punkte

In den warmen Jahreszeiten kommt es einem manchmal so vor, als wenn die Straßen mit einer schimmernden Flüssigkeit bedeckt sind. Dieses Phänomen lässt sich mit dem Fermatschen Prinzip erklären welches besagt, dass ein Lichtstrahl immer die Wege mit der geringsten Laufzeit $T = \int \mathrm{d}t$ nimmt:

a) Zeigen Sie, dass, wenn $F(y', y)$ die Euler-Lagrange-Gleichung erfüllt und nicht explizit von x abhängt, gilt:

$$F - y' \frac{\partial F}{\partial y'} = C = \text{const.} \qquad \text{mit} \qquad y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

b) Zeigen Sie, dass das zu diesem Problem passende $F(y', y)$ gegeben ist durch

$$F(y', y) = \frac{n(y)}{c_0} \sqrt{1 + y'^2}$$

mit der Vakuumlichtgeschwindigkeit c_0 und dem Brechungsindex $n(y)$, der von der Höhe y abhängt.

c) Zeigen Sie mithilfe von Aufgabenteil a), dass gilt:

$$\int dx = \int dy \frac{c_0 C}{\sqrt{n^2(y) - c_0^2 C^2}}$$

d) Nehmen Sie näherungsweise an, dass der Brechungsindex linear mit der Höhe zunimmt (warum?) und gegeben ist durch $n(y) = n_0(1 + \alpha y)$. Bestimmen Sie $y(x)$ und erklären Sie damit die oben genannte ominöse Flüssigkeit.

Hinweis: Die Substitutionen $u = y + \frac{1}{\alpha}$ und $u = \frac{c_0 C}{\alpha n_0} \cosh \theta$ können hilfreich sein.