

PRAKTIKUMSPROTOKOLL DES 19.04.2016

Dispersionsmessungen am Glasprisma

Thea SCHNEIDER
thea.schneider@udo.edu

Max PERNKLAU
max.pernklau@udo.edu

3. Mai 2016

1 Abstract

Mit Hilfe eines Prismenspektralapparates sollen die Brechungsindize sowie die Dispersionskurve einer genormten Glassorte ermittelt werden.

2 Theorie

Brechung tritt auf, wenn ein Lichtstrahl nichtsenkrecht von einem Medium auf ein anderes fällt. Die Änderung des Winkels, die beim Auftreffen auf die Grenzfläche erfolgt, wird Brechung genannt. Diese Richtungsänderung des Lichtstrahls wird durch die Wechselwirkung des elektrischen Feldes der Lichtwelle mit den Elektronen und Ionenrümpfen in der Materie verursacht. Dies erklärt auch, warum die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Licht in Materie (v) kleiner ist, als die im Vakuum (c), was im Verlauf des Kapitels noch ausführlicher erläutert wird. Licht weist in verschiedenen Materialien unterschiedliche Ausbreitungsgeschwindigkeiten auf und das Verhältnis zwischen zweier solcher Geschwindigkeiten definiert den Brechungsindex n

$$n := \frac{v_1}{v_2}, \quad (1)$$

welcher die Brechung als physikalische Größe beschreibt. Vergleicht man die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Licht in einem Medium mit der im Vakuum ($v_1 = c$), erhält man also den Faktor, um welchen die Phasengeschwindigkeit und die Wellenlänge des Lichts beim Übergang in das Medium kleiner geworden ist. Medien mit höherem Brechungsindex als das Vergleichsmedium werden daher *optisch dichter* genannt.

2.1 Snelliussches Brechungsgesetz

Der Brechungsindex eines Mediums wird in der Optik allerdings nicht über die Ausbreitungsgeschwindigkeiten bestimmt, sondern mit Hilfe des Eintritts- und Austrittswinkels (gemessen an der Normalen der Grenzfläche). Der Zusammenhang wird mit dem *Huygensschen Prinzip* erklärt. Das Prinzip besagt, dass jeder Punkt einer Wellenfront als Ursprung einer kugelförmigen *Elementarwelle* betrachtet werden kann und damit die Wellenfront für jeden späteren Zeitpunkt durch die Einhüllende von allen einzelnen Elementarwellen bestimmt ist. Dafür werden zwei parallele Lichtstrahlen betrachtet die mit einem Winkel α auf die Grenzfläche des Mediums auftreffen und daraufhin in einem Winkel β in das Medium eindringen (siehe Abbildung 1).

Wie in Abbildung 1 zu sehen ist, trifft die ebene Wellenfront (\overline{AB}) im Punkt A schneller auf die Grenzfläche, als im Punkt C. In dieser Zeit ($t_1 = \overline{BC}/v_1$) hat die Elementarwelle die im Punkt A entsteht, sich schon um $r = t_1 v_2$ ausgebreitet, während die im Punkt C erst entsteht. Durch geometrische Überlegungen lässt sich nun die Beziehung

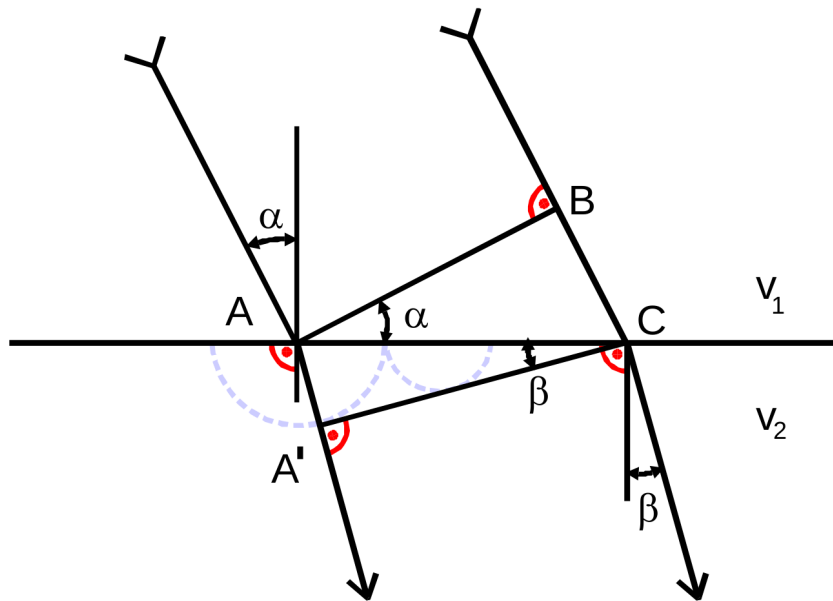


Abbildung 1: Veranschaulichung des Strahlengangs mit Hilfe des Huygensschen Prinzips. [Skript V402]

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2} = n \quad (2)$$

herleiten, die als *Snelliussches Brechungsgesetz* bekannt ist.

2.2 Ableitung der Dispersionsrelation

Dispersion ist ein Phänomen, welches die Frequenzabhängigkeit einer physikalischen Größe beschreibt, in der Optik handelt es sich dabei um die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Licht in einem Medium. Nach Gleichung (1) ist somit auch der Brechungsindex eine frequenzabhängige Größe bzw. abhängig von der Wellenlänge λ des Lichtes

$$n = f(\lambda) . \quad (3)$$

Dabei handelt es sich um die Dispersionsgleichung, die sich aus der Maxwell'schen Theorie elektromagnetischer Wellen ergibt. Dies lässt sich allerdings nur anwenden, wenn die Materie nicht mehr als Kontinuum betrachtet wird, sondern als Ansammlung elektrisch geladener Teilchen, wie Elektronen und Ionenrümpfe. Die Ionenrümpfe können aber für diese Betrachtung vernachlässigt werden, da sichtbares Licht betrachtet wird und diese Wechselwirkung erst bei größeren Wellenlängen eine signifikante Auswirkung hat.

Trifft Licht auf Materie werden die Elektronen durch das elektrische Feld der Lichtwelle aus ihrer Gleichgewichtslage ausgelenkt. Durch das Wechselfeld wirkt daher eine periodische Kraft auf die Ladungen und führt zu einer erzwungenen Schwingung. Dabei treten auch Resonanzerscheinungen auf, an denen die Materie

erkennbar Energie der Lichtwelle absorbiert. Diese klassische Betrachtungsweise reicht aber nicht vollkommen aus um die Wechselwirkung von Licht mit Materie zu beschreiben, dafür wird die Quantentheorie benötigt. Um das zu vermeiden werden in diesem Versuch nur Wellenlängen betrachtet, die genug von den Resonanzstellen entfernt sind, damit die Absorption vernachlässigbar klein wird. Das ist zum Beispiel bei sichtbarem Licht das auf Glas trifft gegeben.

Das Magnetfeld der Lichtwelle erzeugt eine Lorentzkraft, welche die geladenen Teilchen aus ihrer Gleichgewichtslage verschiebt und damit einen elektrischen Dipol erzeugt. Die Polarisierung des Mediums ist durch

$$\vec{P} = \sum_h \vec{P}_h = \sum_h N_h q_h \vec{x}_h \quad (4)$$

gegeben, mit den Ladungsträgern q_h , der Anzahl dieser Ladungsträger pro Volumeneinheit N_h , der Auslenkung aus der Gleichgewichtslage \vec{x}_h , während h die unterschiedlichen Teilchenarten bezeichnet.

Eine Auslenkung aus der Gleichgewichtslage erzeugt eine dazu proportionale rücktreibende Kraft. Hinzu kommt eine Dämpfung auf Grund der periodischen Bewegung im elektromagnetischen Feld, die als "*Reibungskraft*" proportional zur Geschwindigkeit der Teilchen sein soll.

Für die Bewegung der Teilchen ergibt sich daraus eine Differentialgleichung der Art

$$m_h \frac{d^2 \vec{x}_h}{dt^2} + f_h \frac{d\vec{x}_h}{dt} + a_h \vec{x}_h = q_h \vec{E}_0 e^{i\omega t} \quad (5)$$

mit den Ladungsträgern q_h und der Teilchenmasse m_h . Die Lösung einer solchen Differentialgleichung ist bekannt. Mit Hilfe der Polarisierung aus Gleichung (4) und der *Maxwellschen Relation*

$$n^2 = \epsilon \quad (6)$$

ergibt sich nach einigen Umformungsschritten der gesuchte Ausdruck für den Brechungsindex in Abhängigkeit der Frequenz des Lichts

$$\tilde{n}^2 = 1 + \sum_h \frac{1}{\omega_h^2 - \omega^2 + i\omega \frac{f_h}{m_h}} \frac{N_h q_h^2}{m_h \epsilon_0} . \quad (7)$$

Der Brechungsindex \tilde{n} ist komplex und kann folglich als

$$\tilde{n} = n(1 - ik) \quad (8)$$

mit dem in Gleichung (1) beschriebenen reellen Brechungsindex n und der Absorptionskonstanten k geschrieben werden. Für die Brechung ist vor allem der Realteil von \tilde{n} von Interesse. Da die Betrachtung ausreichend weit von den Resonanzstellen entfernt sein soll, wird die Absorption vernachlässigbar klein und damit ist

$$n^2 k \approx 0 . \quad (9)$$

Anschaulich ist die betrachtete Materie damit praktisch farblos und durchsichtig bei den beobachteten Wellenlängen. Da die Frequenz ω nicht gemessen werden kann, wird sie durch die Wellenlänge im Vakuum λ ersetzt. Daraus ergibt sich für den Brechungsindex

$$n^2(\lambda) = 1 + \sum_h \frac{N_h q_h^2}{4\pi^2 c^2 \epsilon_0 m_h} \frac{\lambda^2 \lambda_h^2}{\lambda^2 - \lambda_h^2} . \quad (10)$$

An dieser Stelle ist nun eine Fallunterscheidung notwendig: Es wird davon ausgegangen, dass das Medium nur eine Absorptionsstelle λ_1 besitzt. Dann muss zwischen Wellenlängen unterschieden werden, die entweder sehr viel größer oder sehr viel kleiner als λ_1 sind.

2.2.1 Wellenlänge $\lambda \gg \lambda_1$

Werden nur Wellenlängen $\lambda \gg \lambda_1$ betrachtet, kann eine Reihenentwicklung von Gleichung (10) nach Potenzen von λ_1/λ durchgeführt werden. Daraus ergibt sich für den Brechungsindex

$$n^2(\lambda) = 1 + \frac{N_1 q_1^2 \lambda_1^2}{4\pi^2 c^2 \epsilon_0 m_1} \left(1 + \left(\frac{\lambda_1}{\lambda} \right)^2 + \left(\frac{\lambda_1}{\lambda} \right)^4 + \dots \right) \quad (11)$$

bzw. die *Cauchysche Dispersionsformel*

$$n^2(\lambda) = A_0 + \frac{A_2}{\lambda^2} + \frac{A_4}{\lambda^4} + \dots \quad (12)$$

mit

$$A_0, A_2, A_4 > 0. \quad (13)$$

Der Kurvenverlauf von Gleichung (12) ist in Abbildung 2 dargestellt.

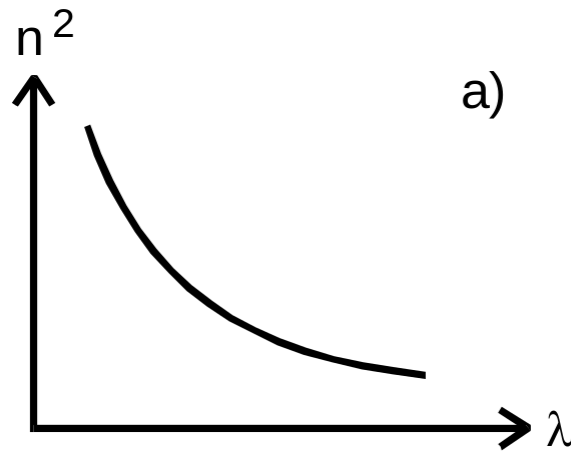


Abbildung 2: Dispersionskurve nach der Cauchyschen Dispersionsformel ($\lambda \gg \lambda_1$). [Skript V402]

2.2.2 Wellenlänge $\lambda \ll \lambda_1$

Jetzt werden Wellenlängen mit $\lambda \ll \lambda_1$ betrachtet, die Reihenentwicklung von Gleichung (10) ergibt

$$n^2(\lambda) = 1 - \frac{N_1 q_1^2}{4\pi^2 c^2 \epsilon_0 m_1} \left(\lambda^2 + \left(\frac{\lambda^4}{\lambda_1^2} \right) + \left(\frac{\lambda^6}{\lambda_1^4} \right) + \dots \right) \quad (14)$$

bzw.

$$n^2(\lambda) = A_0 - A'_2\lambda^2 - A'_4\lambda^4 - \dots \quad (15)$$

mit

$$A'_i > 0 \text{ für } i \geq 2. \quad (16)$$

Die grafische Darstellung des Kurvenverlaufs aus Gleichung (15) ist in Abbildung 3 dargestellt.

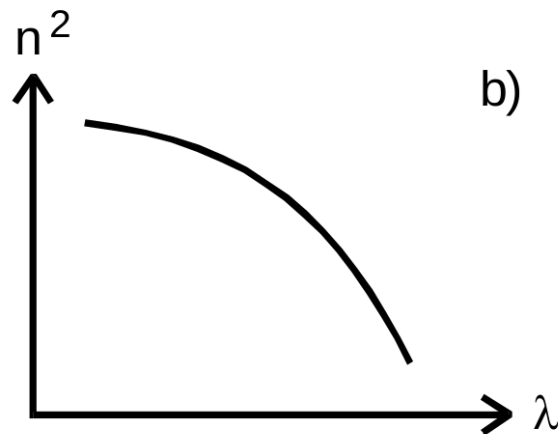


Abbildung 3: Dispersionskurve nach Gleichung (15) mit $\lambda \ll \lambda_1$. [Skript V402]

Für beide Fälle ergeben sich demnach unterschiedliche Kurvenverläufe (mit unterschiedlicher Krümmung – zu sehen in Abbildung 2 und 3), aber in beiden Kurven nimmt der Brechungsindex mit zunehmender Wellenlänge ab (*normale Dispersion*). Um herauszufinden, welche Dispersiongleichung das Material am besten beschreibt, werden einfach die Messdaten mit den Kurvenverläufen verglichen.

3 Gaußsche Fehlerrechnung

3.1 Berechnung der Standardabweichung

Alle Messwerte sind als empirische Mittelwerte mit ihrer geschätzten Standardabweichung des Mittelwertes angegeben. Diese unterschätzt die wahre Standardabweichung, da die Wurzel aus der geschätzten Varianz gezogen wird. Der arithmetische Mittelwert ist definiert als

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i . \quad (17)$$

Die geschätzte Standardabweichung ist gegeben durch

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (18)$$

mit der geschätzten Standardabweichung des Mittelwertes als

$$\Delta \bar{x} = \frac{s}{\sqrt{n}} \quad (19)$$

3.2 Gaußsche Fehlerfortpflanzung

Das Berechnen von Funktionen mit fehlerbehafteten Parametern erfolgt mittels der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung

$$\Delta f = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{df}{dy_i} \right)^2 (\Delta y_i)^2} \quad \text{mit } f(y_1, \dots, y_n) \quad (20)$$

4 Aufbau und Durchführung

Der Versuch wird an einem Spektroskop durchgeführt, das wie folgt aufgebaut ist: Eine Lampe wirft durch eine Spaltöffnung einen Lichtstrahl durch ein Linsensystem, sodass ein paralleler Strahl entsteht, der ein drehbar gelagertes Flintglasprisma trifft. Das Licht vom Prisma kann dann durch ein Fernrohr beobachtet werden, an dem eine Winkelskala angebracht ist.

Der Versuch gliedert sich in zwei Abschnitte. Als erstes wird der Winkel φ zwischen den brechenden Prismenoberflächen bestimmt. Dafür wird eine Kante des Prismas so ausgerichtet und fixiert, dass das Licht der HgCd-Lampe parallel auftrifft und an den beiden angrenzenden Oberflächen reflektiert wird. Der Aufbau ist in Abbildung 4 zu sehen.

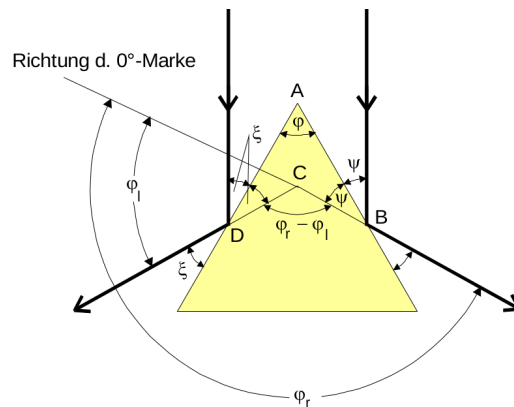


Abbildung 4: Schematische Darstellung zur Messung des Winkels φ an der brechenden Kante eines Prismas. [Skript V402]

Nun wird das bewegliche Fernrohr so lange gedreht, bis die Spektrallinien des einen reflektierten Strahls genau im Fadenkreuz erscheinen und der Winkel notiert. Genauso verfährt man mit dem zweiten Satz an Spektrallinien. Auf diese Weise erhält man die zwei Winkel φ_l und φ_r . Aus geometrischen Überlegungen erhält man für den Winkel φ der Kante

$$\varphi = \frac{1}{2} (\varphi_r - \varphi_l) . \quad (21)$$

Als zweites werden die Winkel η_i der einzelnen Spektrallinien vermessen, die die Richtungsänderung des einfallenden Strahles charakterisieren.

Dazu wird ein symmetrischer Strahlengang hergestellt (siehe Abbildung 5). Dazu wird das Prisma so in den Lichtstrahl rotiert, dass Spiegelbild und gebrochenes Bild des Spaltes im Fernrohr unter dem gleichen Winkel erscheinen. Dann wird der Winkel einer Spektrallinie gemessen (bezüglich einer beliebigen, festen Stelle) und das Prisma so um die eigene Achse gedreht, dass spiegelsymmetrisch bezüglich des einfallenden Strahls zum ersten Zustand zu liegen kommt (siehe Abbildung 6). Der Winkel, unter dem die gleichfarbige Spektrallinie erscheint

wird wieder gemessen und die Differenz zum ersten Winkel $\Delta\Omega$ gebildet. Dadurch ergibt sich der Winkel η , unter dem der Strahl gebrochen wird zu

$$\eta = \pi - \Delta\Omega . \quad (22)$$

Dieses Verfahren wird für alle Spektrallinien wiederholt.

Aus den so gemessenen Winkeln ergibt sich mit dem Snelliusschen Brechungsgesetz folgender Zusammenhang für den Brechungsindex:

$$n = \frac{\sin(\eta/2 + \varphi/2)}{\sin(\varphi/2)} . \quad (23)$$

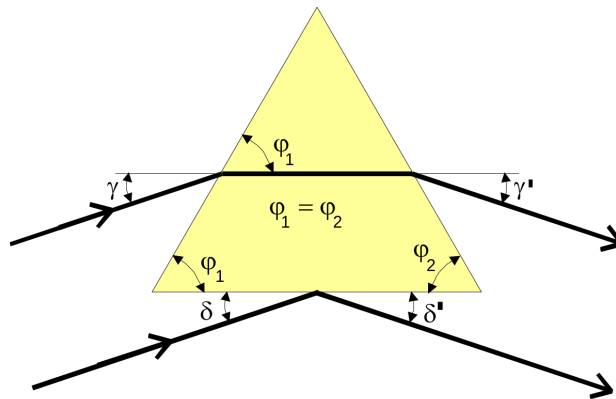


Abbildung 5: Symmetrischer Strahlengang durch ein Prisma. [Skript V402]

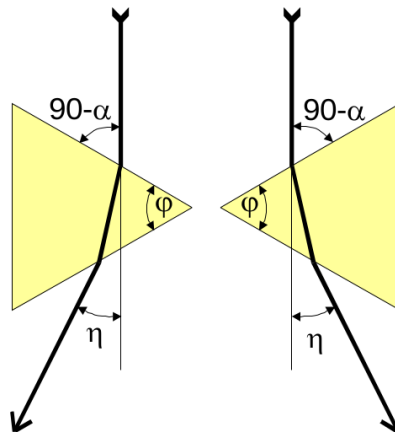


Abbildung 6: Prisma wird "gespiegelt". [Skript V402]

5 Auswertung

5.1 Anmerkungen zur Auswertung

Der von den Autoren genutzte Versuchsaufbau produzierte in Verbindung mit den Anweisungen, wie zu messen war, keine sinnvollen Daten. Deswegen stammen die Daten für die η -Messung von der parallel arbeitenden Gruppe¹.

5.2 Prismeninnenwinkel

Die Messergebnisse nach 21 sind in der Tabelle 1 zusammengefasst. Durchschnittlich ergibt sich ein Innenwinkel von 65.9 ± 1.9 Grad, was den erwarteten 60 Grad eines gleichseitigen Dreiecks nahekommt.

Tabelle 1: Messung des Prismeninnenwinkels.

ϕ_l in Grad	ϕ_r in Grad
262.3	131.0
266.5	128.0
259.0	133.3

Im weiteren werden 60 Grad als Innenwinkel benutzt, da die restlichen Daten von einem anderen Prisma stammen (s.o.) und nicht sichergestellt werden kann, dass das Prisma immer mit der gleichen Seite in den Strahlengang gestellt wurde.

5.3 Brechungsindices

Durch die Winkelmessung beim symmetrischen Strahlengang ergeben sich die Winkel aus Tabelle 2 für die einzelnen Spektrallinien der HgCd-Lampe. Daraus berechnen sich nach 23 die nebenstehenden Brechungsindices.

¹*Sonja Terpoorten, Saskia Müller*

Tabelle 2: Spektrum der HgCd-Lampe. Die Wellenlängen der hellsten Emissionslinien von Quecksilber und Cadmium sind Literaturwerte², die anhand ihrer Farbe und Helligkeit zugeordnet worden sind.

Ω_l in Grad	Ω_r in Grad	η in rad	n	λ in Å
122.0	160.4	3.81	1.31	6438 (rot)
122.7	159.5	3.78	1.33	5782 (gelb)
123.0	159.1	3.77	1.34	5461
123.7	158.1	3.74	1.36	5378
124.3	157.9	3.72	1.37	5337 (grün)
124.8	156.9	3.60	1.39	4416
126.0	156.9	3.68	1.41	4358
127.3	154.4	3.61	1.45	4047 (violett)

5.4 Dispersionskurve

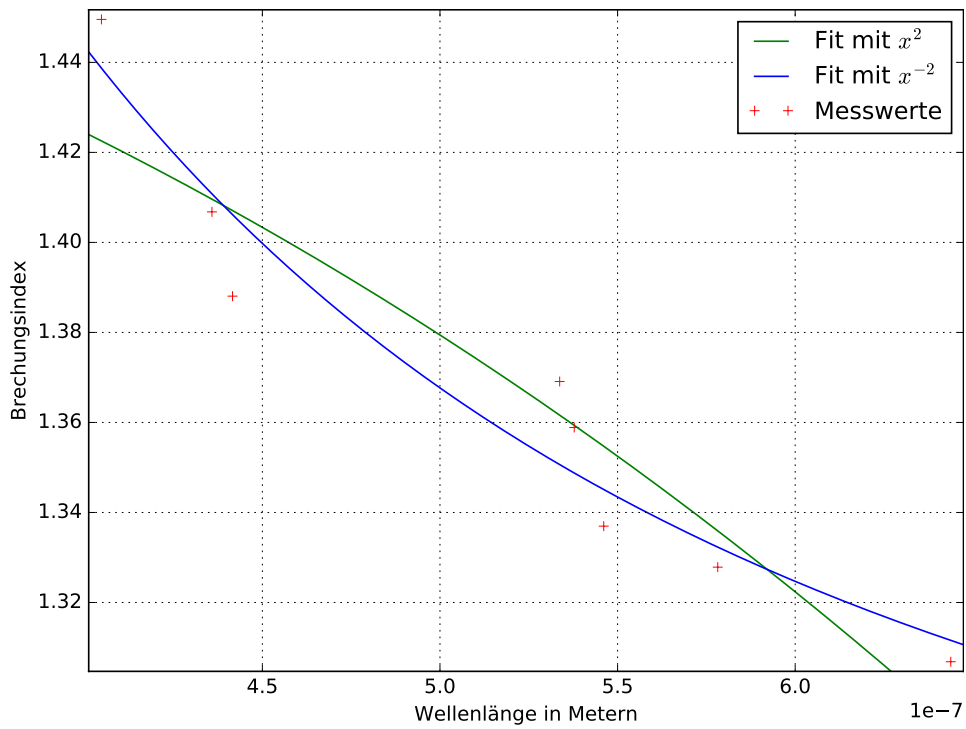


Abbildung 7: Abhängigkeit des Brechungsindexes von der Lichtfarbe.

Das graphische Auftragen der Lichfarbe gegen die berechneten Brechungsindices ergibt Abbildung 7. Es wurde zwei möglich Fits³ eingezeichnet:

$$n'^2 = a'_0 + a'_2 x^2 \quad (24)$$

$$n^2 = a_0 + a'_2 / x^2 \quad (25)$$

Die Fitparameter lauten

$$a'_0 = 2.25 \pm 0.06 \quad (26)$$

$$a'_2 = (-1.40 \pm 2.06) 10^{12} \text{m}^2 \quad (27)$$

$$a_0 = 1.49 \pm 0.04 \quad (28)$$

$$a_2 = (-9.47 \pm 1.05) 10^{-14} \text{m}^2. \quad (29)$$

Die Summe der Abweichungsquadrate ist

$$s_{n'}^2 = 2.86 \cdot 10^{-4} \quad (30)$$

$$s_n^2 = 1.68 \cdot 10^{-4}, \quad (31)$$

somit fittet die zweite, ungestrichene Gleichung besser. Es ist auffällig, dass die Daten stark streuen.

Numerisch findet sich eine Nullstelle von n und damit ein Absorptionsmaximum bei $3.71 \cdot 10^9 \text{m}$. Dieser Wert ist unrealistisch. Flintglas absorbiert im nahen Infrarot ($>680 \text{nm}$) und im UV-Bereich ($<300 \text{nm}$)⁴.

5.5 Weitere Prismenparameter

Die Abbesche Zahl⁵ ergibt sich mit

$$\frac{n(\lambda_D) - 1}{n(\lambda_F) - n(\lambda_C)} = 4.87. \quad (32)$$

Flintglas hat typischerweise eine Abbesche Zahl zwischen 20 und 55⁶. Klassische Gläser können keine negative Abbesche Zahl besitzen.

Das Auflösungsvermögen des Prismas (es wird angenommen, dass das Prisma eine Kantenlänge von $b = 3 \text{cm}$ hat) berechnet sich nach

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = b \frac{dn}{d\lambda}. \quad (33)$$

Für die C-Fraunhoferlinie beträgt es

$$A_C = 7661 \quad (34)$$

³Die Parameter wurden mithilfe des *Simplex*-Algorithmus, die Fehler derselben mit dem *Levenberg-Marquardt*-Algorithmus bestimmt.

⁴Schott, siehe Anhang.

⁵ Verwendete Fraunhoferlinien: $\lambda_F = 486 \text{nm}$, $\lambda_D = 589 \text{nm}$, $\lambda_C = 656 \text{nm}$

⁶Schott, siehe Anhang.

und für die F-Linie

$$A_F = 17\,652 \text{ .} \tag{35}$$

Diese Werte erscheinen zu hoch, das Spektroskop müsste zum Beispiel bei rotem Licht Wellenlängen separieren können, die sich um weniger als 1 \AA unterscheiden. In der Praxis kann eine solche Auflösung schon allein wegen geringen Laufzeitschwankungen des Lichtstrahls mit endlicher Dicke (etwa durch Temperaturfluktuationen in der Luft) nicht erreicht werden.

6 Diskussion

Die starke Abweichung des Prismeninnenwinkels ist der schlechten Justierbarkeit des Prismas geschuldet: Ein paralleler Lichteinfall ließ sich nicht sicherstellen, da die Spitze des Prisma nach Augenmaß in den Lichtstrahl rotiert werden musste.

Eine Diskussion der restlichen Messdaten erübrigt sich, da diese nicht von den Autoren stammen. Die Messdaten zu den Winkel scheinen fehlerbehaftet zu sein, was sich in der unrealistischen Abbeschen Zahl und der recht hohen Steigung der Dispersionskurve zeigt.

Es liegen keine Messdaten zu η von den Autoren vor, da in diesem Schritt des Versuches am Versuchsaufbau keine validen Winkel nach der Anleitung des Praktikumsassistenten gemessen werden konnten, weder von den Autoren noch vom Assistenten.

7 Literaturangabe

Bilder und Daten aus dem Skript zu *Prismadispersion*, Versuch 402, TU Dortmund, abrufbar auf:

<http://129.217.224.2/HOME PAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V402.pdf>

(Stand 19.04.16)

NIST-Daten zu den Spektrallinien

http://physics.nist.gov/PhysRefData/Handbook/Tables/cadmiumtable2_a.htm

<http://physics.nist.gov/PhysRefData/Handbook/Tables/mercurytable2.htm>

(Stand 19.04.16)

Schott-Daten zu Flintglas aus Peter Hartmann, Ralf Jedamzik, Steffen Reichel und Bianca Schreder, *Optical glass and glass ceramic historical aspects and recent developments: a Schott view* Appl. Opt. 49, D157-D176 (2010).