

VERSUCH 23

Quanten Analogien

Marius Hötting
Marius.Hoetting@udo.edu

Matthias Jaeger
Matthias.Jaeger@udo.edu

Durchführung: 8.5.2017

Abgabe: 15.5.2017

Inhaltsverzeichnis

1. Theorie	3
1.1. Analogie zwischen einer stehenden Welle und einem quantenmechanischen Teilchen im Rechteckpotential	3
1.1.1. Lebensdauer von Zuständen	4
1.2. Modellierung eines Wasserstoffatoms mit einem Kugelresonator	5
1.3. Modellierung eines eindimensionalen Festkörpers	6
1.3.1. Superstrukturen	7
1.3.2. Gitterfehler	7
2. Fehlerrechnung	8
3. Versuchsaufbau	9
4. Durchführung	10
4.1. Analogie zwischen einer stehenden Welle und einem quantenmechanischen Teilchen im Rechteckpotential	10
4.2. Modellierung eines Wasserstoffatoms mit einem Kugelresonator	10
4.3. Modellierung eines eindimensionalen Festkörpers	10
4.4. Modellierung eines Atoms und Moleküls	10
5. Auswertung	12
5.1. Stehende Schallwellen in einer Röhre	12
5.2. Stehende Schallwellen in einem Kugelresonator	14
5.2.1. Vergleich des Spektrums bei verschiedenen Winkeln	14
5.2.2. Untersuchung eines Doppelpeaks	16
5.2.3. Visualisierung der Kugelflächenfunktionen	16
5.3. Modellierung eines eindimensionalen Festkörpers	20
5.3.1. Bestimmung der Schallgeschwindigkeit	20
5.3.2. Bestimmung der Wellenzahl	22
5.3.3. Bandstruktur in einem periodischen Potential	24
5.3.4. Vergleich verschiedener Anzahlen von Einheitszellen	29
5.3.5. Vergleich verschiedener Einheitszellen	30
5.4. Modellierung eines Atoms und Moleküls	30
5.4.1. Einzelnes Atom	30
5.4.2. Molekül aus zwei Atomen	31
5.4.3. Molekül aus mehreren Atomen	31
5.4.4. Superstruktur, alternierende Iriden	33
5.4.5. Superstruktur, alternierende Teilstücklängen	33
5.4.6. Defekte	36
6. Zusammenfassung	39
Literatur	40
A. Messdaten	41

1. Theorie

Ziel dieses Versuches ist es Analogien zwischen dem Verhalten einer klassischen Welle und einem quantenmechanischen Teilchen im Potential zu analysieren.

1.1. Analogie zwischen einer stehenden Welle und einem quantenmechanischen Teilchen im Rechteckpotential

Resonanzen entstehen, wenn z.B. in einer Röhre eine ein- und eine auslaufende Wellen konstruktiv miteinander interferieren, auf Grund der gleichen Phase. Dabei muss die Resonanzbedingung

$$2L = n\lambda \quad (1)$$

erfüllt sein. Hierbei steht L für die Länge der Röhre, λ für die Wellenlänge der Welle und n für eine natürliche Zahl.

Die Euler-Gleichung kann mit der Kontinuitätsgleichung zu der Wellengleichung für den Druck

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho\kappa} \Delta p \quad (2)$$

kombiniert werden. Hierin beschreibt ρ die Dichte des umgebenden Mediums und κ dessen Kompressibilität. Für die Schallwelle gelten die von Neumann Randbedingungen:

$$v(0) = v(L) = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial p(0)}{\partial(x)} = \frac{\partial p(L)}{\partial(x)} = 0 \quad (4)$$

Weiter ist zu beachten, dass sich unter der Grenzfrequenz $f_{\text{Grenz}} = 16\text{kHz}$ keine stehenden Wellen senkrecht zur betrachteten x-Achse ausbilden. Grund dafür ist der kleinere Radius im Vergleich zur Länge der Röhren.

Somit genügt die eindimensionale Lösung der Wellengleichung

$$p(x, t) = p_0 \cos kx + \alpha \cos \omega t \quad (5)$$

zu betrachten.

In der obigen Gleichung bezeichnet p_0 die Amplitude der Welle, k die Wellenzahl, α eine relative Phase und ω die Kreisfrequenz. Unter Verwendung der angegebenen Randbedingungen ergibt sich: $\alpha = 0$ und $k = \frac{n\pi}{L}$.

In der Quantenmechanik wird ein Elektron in einem unendlichen Potentialtopf mit dem Potential $V = 0$ zwischen den Potentialwänden durch die Schrödingergleichung

$$i\hbar \partial_t \psi(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(x, t) \quad (6)$$

beschrieben. Nach Separation der Zeitabhängigkeit ergibt sich die stationäre Schrödingergleichung

$$E\psi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(x). \quad (7)$$

Mit den sogenannten Dirichlet Randbedingungen

$$\psi(0) = \psi(L) = 0 \quad (8)$$

ergibt sich die allgemeine Lösung zu

$$\psi(x) = A \sin(kx + \alpha), \quad (9)$$

wobei wieder gilt $\alpha = 0$ und $k = \frac{n\pi}{L}$.

Insgesamt gilt für die Wellenfunktion

$$\psi(x, t) = A \sin(kx) \exp(i\omega t). \quad (10)$$

Die beiden vorliegenden Fälle sind im Bereich der Potentialbarrieren analog, jedoch unterscheiden sie sich z.B. darin, dass $p(x, t)$ im klassischen Fall die Amplitude des Schalls und $|\psi(x)|^2$ die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Elektrons beschreibt. Beide unterscheiden sich zudem in der Ordnung der zeitlichen Ableitung, welches in der Klassik zu einer linearen und in der Quantenmechanik zu einer quadratischen Dispersion führt. Des weiteren handelt es sich zwar in beiden Fällen um eine stehende Welle jedoch sind deren Knotenpunkte an verschiedenen Positionen, was den unterschiedlichen Randbedingungen geschuldet ist.

1.1.1. Lebensdauer von Zuständen

In der klassischen Physik sind Zustände nur eine gewisse Zeit erhalten. Grund dafür ist Energieverlust, der z.B. durch Reibung entsteht. In der Quantenmechanik ist nur der Grundzustand unendlich lange erhalten. Mit dem allgemeinen Ansatz

$$\psi(x, t) = f(x) \exp(-(\lambda + i\omega_0)t) \quad (11)$$

und dessen Fouriertransformation ergibt sich die sogenannte Spektralfunktion

$$A(w) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}}{\lambda + i(w_0 - w)}. \quad (12)$$

Deren Betragsquadrat

$$|A(w)|^2 = \frac{1}{2\pi((w_0 - w)^2 + \lambda^2)} \quad (13)$$

wird als Lorentzpeak bezeichnet. In der Gleichung beschreibt λ die Zerfallsbreite, die die Breite des Peaks bei der Hälfte der Höhe des Maximums kennzeichnet. Die Breite des Zustandes Γ ist wie folgt definiert:

$$\Gamma = \hbar\lambda = \frac{\hbar}{\tau}. \quad (14)$$

Die Zerfallsbreite τ beschreibt die Zeit, nach dem die Amplitude auf den Bruchteil von $\frac{1}{e}$ abgefallen ist.

Das klassische Analogon ist der Dämpfungsterm in einem gedämpften harmonischen Oszillator, der gegeben ist durch

$$\lambda = 2\gamma\omega . \quad (15)$$

Des weiteren ergibt sich für die Resonanzbreite

$$\Delta\omega = 2\sqrt{3}\lambda . \quad (16)$$

Der Effekt, das sich aus höheren Resonanzen größere Zerfallsbreiten λ ergeben, resultiert aus der nicht verschwindenden Dämpfung.

1.2. Modellierung eines Wasserstoffatoms mit einem Kugelsonator

Für die Beschreibung des Wasserstoffatoms wird die stationäre Schrödingergleichung 6 und für den sphärischen Resonator die Helmholtzgleichung

$$\omega^2 p(\vec{r}) = -\frac{1}{\rho\kappa} \Delta p(\vec{r}) \quad (17)$$

verwendet. Beide Gleichungen erlauben die Separation des Winkelanteils vom Radialanteil durch einen Produktansatz der Form

$$p(r, \theta, \phi) = Y_l^m(\theta, \phi) f(r), \quad (18)$$

wobei sich die Radialanteile unterscheiden. In der obigen Gleichung beschreibt $Y_l^m(\theta, \phi)$ die Kugelflächenfunktion. Diese kann weiter geschrieben werden als

$$Y_l^m(\theta, \phi) \propto P_l^m(\cos(\theta)) \exp(im\phi) . \quad (19)$$

Auf Grund der Versuchsanordnung in dem sphärischen Resonator genügt die Betrachtung der Kugelflächenfunktion $Y_l^m(\theta, \phi)$ und somit auch des Legendre-Polynoms $P_l^m(\theta, \phi)$ bei $m = 0$. Weiter folgt aus dem oben genannten Grund, dass die Amplitude unabhängig von dem Azimutalwinkel ist. So ergibt sich

$$Y_l^m(\theta, \phi) \propto P_l^m(\cos(\theta)) . \quad (20)$$

Durch die graphische Darstellung der Legendre-Polynome wird ersichtlich, dass die Anzahl der Knoten der Funktion gleichbedeutend mit der Quantenzahl l ist.

Die unterschiedlichen Radialanteile haben zur Folge, dass sich die Eigenfrequenzen des sphärischen Resonators $\omega_{n,l}$ und die Energielevel des Wasserstoffatoms $E_{n,l}$ ebenfalls unterscheiden, wobei sich die Resonanzen durch die identischen Quantenzahlen n, l und m beschreiben lassen.

In dem nicht-relativistischen Fall kann die Energie wie folgt dargestellt werden.

$$E_{n,l} = - \left(\frac{e^2}{\hbar c} \right)^2 \frac{mc^2}{2(l+1+n)^2} \quad (21)$$

1.3. Modellierung eines eindimensionalen Festkörpers

Es gibt grundsätzlich zwei verschiedene Ansätze für die Entstehung einer Bandstruktur in einem Festkörper.

- Ausgangspunkt ist ein frei bewegliches Elektron, welches sich in einem Potential mit parabolischer Dispersion $E(k)$ befindet. Durch das Einfügen von periodischen Streuzentren mit einer kleinen Reflexionswahrscheinlichkeit kommt es in der Dispersionsrelation zu Bandlücken.
- Hierbei werden zunächst diskrete Eigenzustände bei einem einzelnen Atom angenommen. Bei der Superposition zweier Atome zu einem Molekül entstehen bindende und nicht bindende Zustände. Durch Erstellen einer Kette mit mehreren Atomen kommt es zu weiteren Aufspaltungen der Bandstruktur.

Für den ersten Fall wird erneut die Analogie zur stehenden Welle in einer Röhre bemüht. Für die n -te Resonanzfrequenz gilt

$$f_n = \frac{nc}{2L} . \quad (22)$$

Das hat zur Folge, dass die Resonanzfrequenzen umso dichter sind, je länger die Röhre ist. Die daraus resultierende Anzahl von Eigenfrequenzen wird nicht mehr nummeriert sondern in Abhängigkeit der Wellenzahl k angegeben. Der Abstand zwischen zwei benachbarten Resonanzen ist demnach

$$\Delta f = \frac{c}{2L} . \quad (23)$$

Für die Entstehung von Bandlücken muss immer die Braggbedingung

$$n\lambda = 2a \quad (24)$$

erfüllt sein. Dabei beschreibt a den Netzebenenabstand.

Im Allgemeinen werden Streupänomene im reziproken Raum diskutiert. Bei einer Streuung an periodischen Gitterstrukturen und erfüllter Braggbedingung ändert sich der einfallende Wellenvektor k der einlaufenden Welle so, dass die der Braggbedingung äquivalente Laue-Bedingung $\vec{k}' = \vec{G} + \vec{k}$ für die auslaufende Welle \vec{k}' erfüllt ist. Dabei ist \vec{G} der reziproke Gittervektor, für den weiter gilt

$$G = \frac{n2\pi}{a} . \quad (25)$$

Das reziproke Gitter wird meistens in Einheitszellen eingeteilt, die sogenannte Brillouin-Zonen. Es genügt die Betrachtung der ersten Brillouin-Zone, die in der folgenden Abbildung dargestellt ist, da in dieser aufgrund der Periodizität das gesamte physikalische Verhalten enthalten ist.

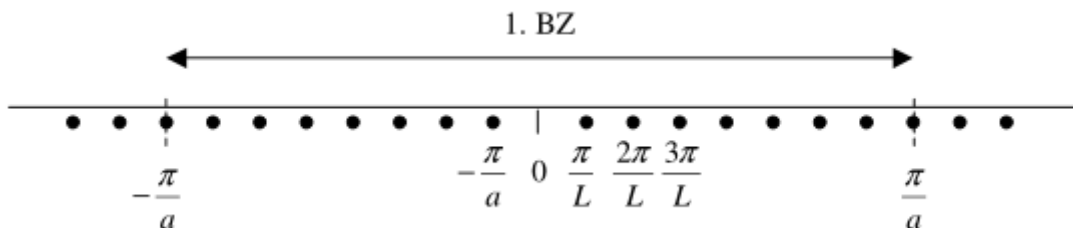


Abbildung 1: Darstellung der ersten Brillouin-Zone für eine Kette mit 8 Einheitszellen, [5].

In jeder dieser Zonen sind $2L/a$ k-Punkte mit

$$k = \frac{\pi}{L} \quad (26)$$

enthalten. Zu beachten ist, dass die Anzahl der Einheitszellen in der Brillouin-Zone der doppelten Anzahl der k-Punkte entspricht und bei $k = 0$ keine Resonanzfrequenz für ein System endlicher Länge entsteht.

1.3.1. Superstrukturen

Als Superstrukturen werden periodische Störungen innerhalb eines periodischen Gitters bezeichnet. Diese periodische Störung wird durch einen Translationsvektor beschrieben, der einem ganzzahligen Vielfache des ursprünglichen Gittervektors entspricht. Dies kann beispielsweise eine Modifikation jeder zweiten Einheitszelle sein. Die Folge sind größere Gittervektoren und kleinere Brillouin-Zonen. Solche Formen von Störungen spielen z.B. im Bereich der Kondensierten Materie eine wichtige Rolle.

1.3.2. Gitterfehler

Durch Störungen, die die Periodizität des Gitters lokal zerstören, entstehen auch bei nur kleinen Störungen neue Zustände in den Bandlücken. Diese Methode wird dazu verwendet in Halbleitern Donator- oder Akzeptor-Level einzubringen.

2. Fehlerrechnung

Dieses Kapitel listet kurz und bündig die benötigten und aus den Methoden der Statistik bekannten Formeln für die Fehlerrechnung auf. Die Schätzung der Standardabweichung ist

$$\Delta X = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} . \quad (27)$$

Der Mittelwert ist

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad (28)$$

Der Fehler des Mittelwertes ist

$$\Delta \bar{X} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} . \quad (29)$$

Für fehlerbehaftete Größen, die auch in folgenden Formeln verwendet werden, muss die Fehlerfortpflanzung nach Gauß berücksichtigt werden.

$$\Delta f = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial X_i} \right)^2 \cdot (\Delta X_i)^2} \quad (30)$$

Bei der linearen Regressionsrechnung sind die Parameter m und b der Ausgleichsgerade $y = mx + b$ wie folgt gegeben:

$$m = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} \quad b = \bar{y} - m\bar{x} . \quad (31)$$

Dabei sind x_i und y_i linear abhängige Messgrößen. Der Fehler dieser Parameter wiederum errechnet sich aus

$$\sigma_m^2 = \frac{\sigma^2}{n(\overline{x^2} - \bar{x}^2)} \quad \sigma_b^2 = \frac{\sigma^2 \bar{x}^2}{n(\overline{x^2} - \bar{x}^2)} \quad (32)$$

3. Versuchsaufbau

Der Versuchsaufbau verändert sich bei jedem Versuchsteil. Generell wird für die Versuche eine V-förmige Schiene verwendet, an deren Enden ein Mikrofon und ein Lautsprecher installiert sind. Das Mikrofon ist auf der Schiene freibeweglich, sodass dieses auf jeden neuen Aufbau angepasst werden kann. Sowohl das Mikrofon- als auch das Lautsprechersignal werden über ein T-Stück gesplittet und mit der Soundkarte des Laptops und einem Oszilloskop verbunden. Der Laptop wird zur Aufzeichnung der Daten verwendet und das Oszilloskop für die Überprüfung der Resonanzfrequenzen. Für die einzelnen Versuchsteile liegen noch die folgenden Utensilien vor:

- 12,5 mm, 50 mm, 75 mm Röhren mit einem Innendurchmesser von jeweils 25,4 mm
- Iriden mit einem Durchmesser von 10, 13 und 16 mm

Für die Versuche zu Kapitel 1.2 wird zusätzlich ein Kugelresonator verwendet. In der unteren Halbkugel ist ein Lautsprecher und in der oberen ein Mikrofon installiert, die wie zu zuvor mit dem Laptop und dem Oszilloskop verbunden werden. Die obere- und die untere Halbkugel sind relativ zueinander rotierbar, jedoch ist zu beachten, dass der außen angegebene Winkel α nicht dem Polarwinkel θ entspricht. Die Umrechnung geschieht über die Beziehung

$$\theta = \arccos(1/2 \cos(\alpha) - 1/2) . \quad (33)$$

4. Durchführung

4.1. Analogie zwischen einer stehenden Welle und einem quantenmechanischen Teilchen im Rechteckpotential

1. Zu Beginn wird ein Übersichtsspektrum von 100 – 10000Hz einer Röhre, bestehend aus 8x75 mm Röhren aufgenommen. Die Messung erfolgt in 10Hz Schritten und einer Zeit von 50ms pro Schritt.
2. Als nächstes wird das Spektrum von 5000 – 14000Hz, in 5Hz Schritten und 50ms pro Schritt, einer 2x75 mm Röhren gemessen.

4.2. Modellierung eines Wasserstoffatoms mit einem Kugelresonator

1. Das Programm "SpektrumSLC.exe" wird gestartet und der Winkel $\alpha = 90^\circ$ an dem Resonator eingestellt. In $\alpha = 30^\circ$ Schritten werden nun Spektren von 100 – 10000Hz aufgenommen.
2. Der Startwert beträgt diesmal $\alpha = 0^\circ$ und es soll ein Doppelpeak in der Nähe von 5000Hz in kleinen Schritten untersucht werden. Die Messung wird für $\alpha = 20^\circ$ und $\alpha = 40^\circ$ wiederholt.
3. Verschiedene Resonanzen werden gemessen und in einem Polarplot dargestellt, indem die Resonanzfrequenz eingestellt und die stehende Welle im sphärischen Resonator in $\alpha = 10^\circ$ Schritten vermessen wird.

4.3. Modellierung eines eindimensionalen Festkörpers

1. Die Bandlücken zwischen 6 – 9kHz werden für Röhren mit 1x75 mm bis zu 8x75 mm Teilstücken aufgezeichnet.
2. Aufnahme eines Übersichtsspektrums einer Röhre bestehend aus 12x50 mm Röhren.
3. In dem gleichen Frequenzbereich wie in der vorherigen Messung soll ein Spektrum aufgenommen werden von 8x50 mm Röhren die durch 10, 13 und 16 mm Iriden separiert werden.
4. Vermessung zweier Röhren, bestehend aus 12x und 10x50 mm Teilstücken, getrennt durch 16 mm Iriden.
5. Vermessung einer 8x50 mm Röhre getrennt durch 16 mm Iriden.

4.4. Modellierung eines Atoms und Moleküls

1. Aufnahme des Spektrums einer 50 mm und einer 75 mm Röhre von 100 – 22000Hz.
2. Vermessung einer 2x50 mm Röhren, getrennt durch 10, 13 und 16 mm Iriden.
3. Beobachtung der Veränderung der Bandstruktur durch Vermessung von 3x, 4x und 6x50 mm Röhren jeweils getrennt durch 10, 13 und 16 mm Iriden.
4. Aufzeichnung der Bandlücken bei der Messung einer 5x50 mm Röhre, abwechselnd getrennt durch 13 und 16 mm Iriden.

5. Vermessung einer Superstruktur. 5 Einheitszellen, bestehend aus einer 50 mm Röhre mit 16 mm Iris sowie einer 75 mm Röhre mit 16 mm Iris, werden aneinander gelegt.
6. Aufbau einer 12x50 mm Röhre, die jeweils durch 16 mm Iriden getrennt sind. Vermessung des Spektrums nach dem Hinzufügen einer Störstelle in Form einer 75Röhre an den Position 1,3 und 7. Ferner wird versuchsweise eine Störstelle in Form einer 12,5 mm Röhre verwendet.

Zu beachten ist, dass gelegentlich zwischen den Messungen die Dämpfung des Signals angepasst werden muss.

5. Auswertung

Sämtliche im Folgenden durchgeführten Ausgleichsrechnungen werden mit der *curve fit* Funktion aus dem für *Python* geschriebenen package *NumPy*[1] durchgeführt. Fehlerrechnungen werden mit dem für *Python* geschriebenen package *Uncertainties*[2] ausgeführt.

5.1. Stehende Schallwellen in einer Röhre

Zunächst wird ein Übersichtsspektrum einer 60 cm langen Röhre, bestehend aus acht je 75 mm langen Teilstücken, aufgenommen, siehe Abbildung 2. Nun wird das Spektrum einer 15 cm langen

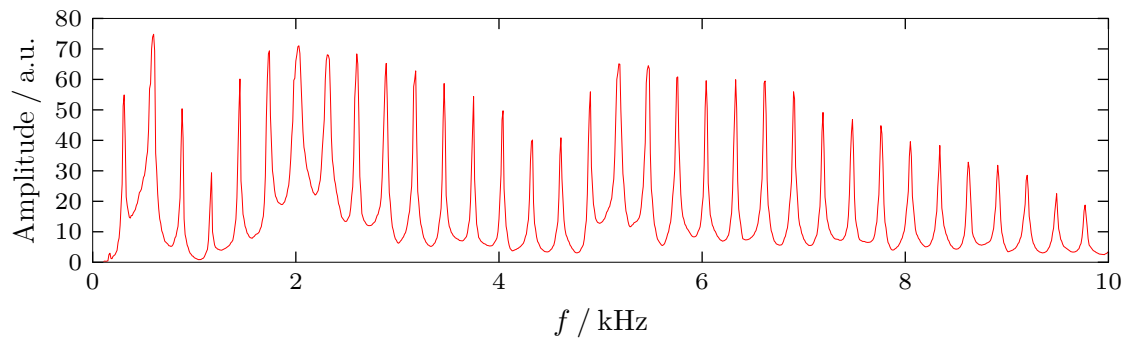


Abbildung 2: Übersichtsspektrum einer 8x75 mm Röhre.

Röhre, bestehend aus zwei je 75 mm langen Teilstücken, aufgenommen und näher untersucht. Hierzu muss die Dämpfung auf einen geeigneten Wert eingestellt werden. Dazu sind Spektren mit verschiedenen Dämpfungseinstellungen verglichen worden. Mit abnehmender Dämpfung macht sich dabei der Effekt bemerkbar, dass die größten Amplituden aus Spektren größerer Dämpfung immer weiter abgeschnitten werden. Dies ist ein Anzeichen für nicht-lineares Verhalten des Systems. Der Wert der Dämpfung wird so eingestellt, dass das System noch im linearen Bereich arbeitet und somit die aufgenommenen Amplituden tatsächlich proportional zu den Amplituden der untersuchten Schallwelle sind.

Für die Analyse des Spektrums wird die Fit-Funktion des Programms SpectrumSLC[5] verwendet. Der resultierende Fit ist zusammen mit den Messwerten in Abbildung 3 dargestellt. Die gefundenen Fitparameter sind für zwei durchgeführte Fits in den Tabellen 1 und 2 aufgeführt. Es ist zu

Tabelle 1: Fitparameter Fit 1.

f_0 / Hz	Amplitude / a.u.	Width / Hz
5743	64	15
6885	54	14
8031	43	15
9171	28	16
10314	13	17
11446	4	19
12499	0	77

erkennen, dass insbesondere der siebte Peak aufgrund der vergleichsweise geringen Amplitude

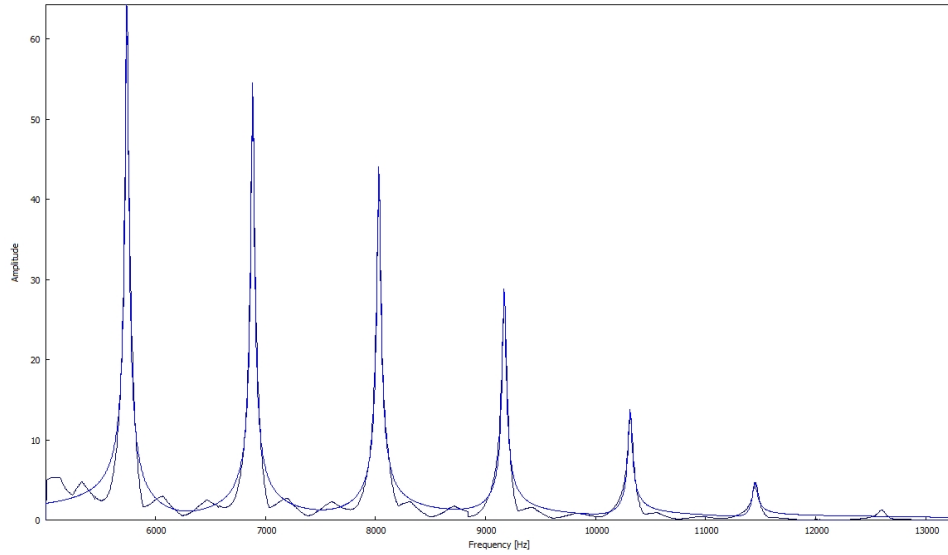


Abbildung 3: Messdaten einer 2x75 mm Röhre und Fit (in blau) des Programms SpectrumSLC.

Tabelle 2: Fitparameter Fit 2.

f_0 / Hz	Amplitude / a.u.	Width / Hz
5743	64	15
6885	54	14
8031	43	16
9173	29	17
10318	14	17
11456	5	19
9009	1	1090

durch beide Fits nicht korrekt wiedergegeben wird. Dies liegt an der Methode der Least-Squares. Ferner unterscheiden sich die restlichen Parameter aus den beiden Tabellen nur geringfügig. Generell sind die Peaks weiter rechts anfälliger für Ungenauigkeiten aufgrund des ungünstigeren Verhältnisses Amplitudenhöhe zu Peakbreite. Es ist wie erwartet (siehe Gleichungen (14) und (16)) eine Tendenz zu größeren Peakbreiten mit zunehmender Frequenz zu beobachten.

5.2. Stehende Schallwellen in einem Kugelresonator

5.2.1. Vergleich des Spektrums bei verschiedenen Winkeln

Es werden in 30° Abständen bezüglich des Winkels α der oberen Hemisphäre Spektren im Frequenzbereich 100 bis 10 000 kHz aufgenommen und in den folgenden Abbildungen 4 bis 10 dargestellt. Die Peaks variieren in ihrer Amplitude mit dem Winkel, nicht jedoch in

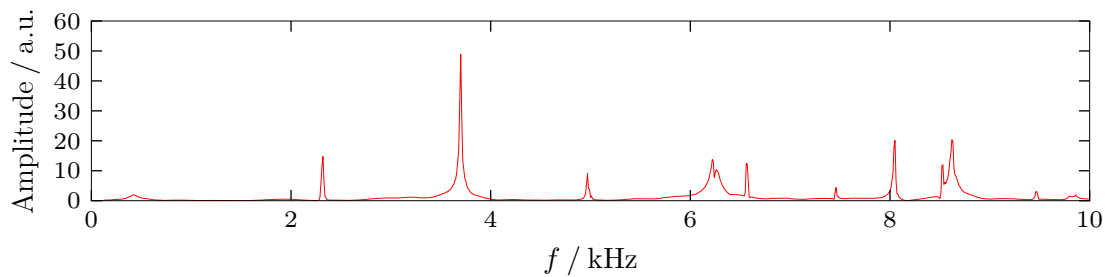


Abbildung 4: Spektrum bei $\alpha = 0^\circ$.

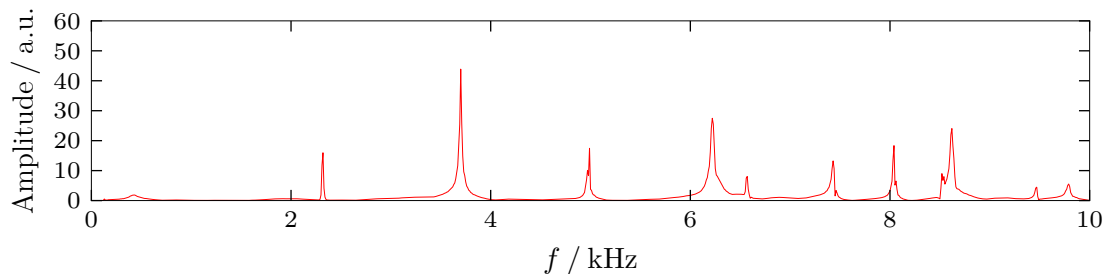


Abbildung 5: Spektrum bei $\alpha = 30^\circ$.

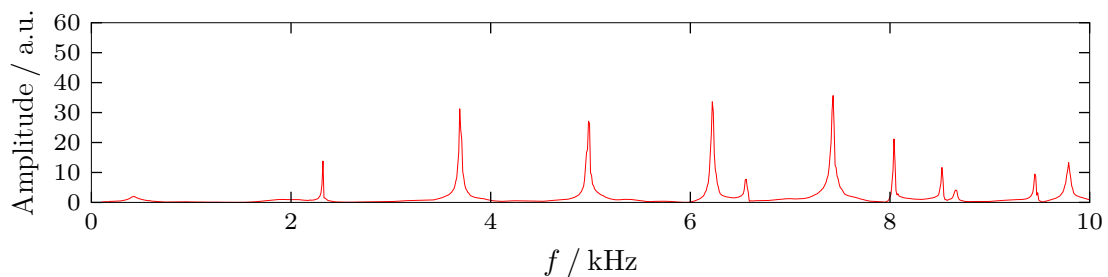


Abbildung 6: Spektrum bei $\alpha = 60^\circ$.

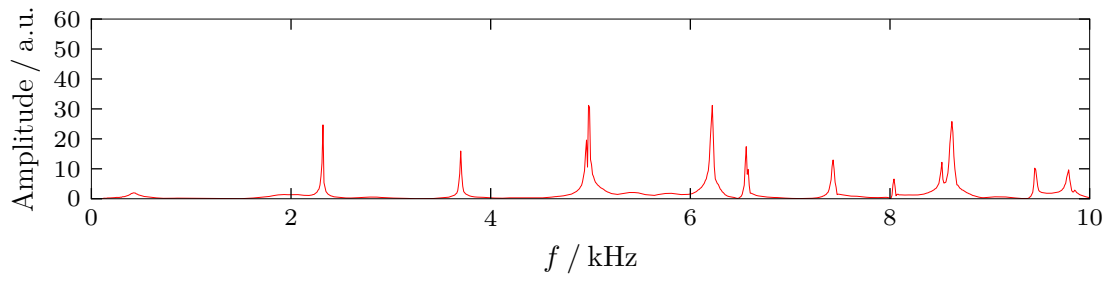


Abbildung 7: Spektrum bei $\alpha = 90^\circ$.

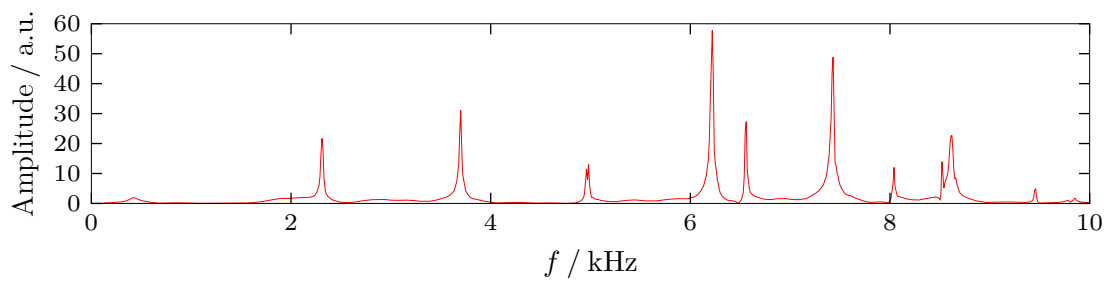


Abbildung 8: Spektrum bei $\alpha = 120^\circ$.

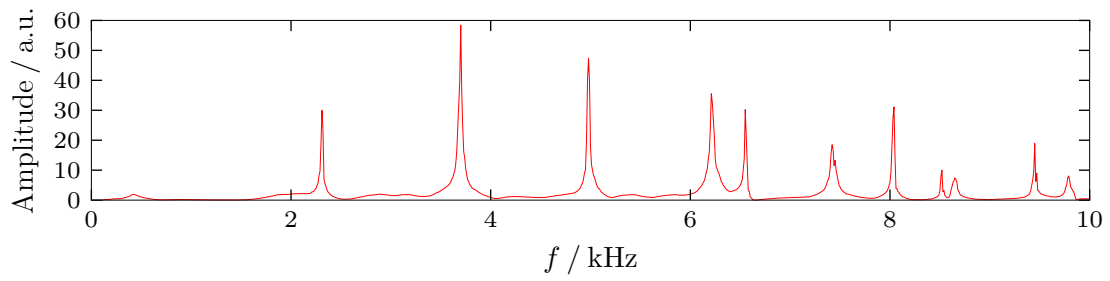


Abbildung 9: Spektrum bei $\alpha = 150^\circ$.

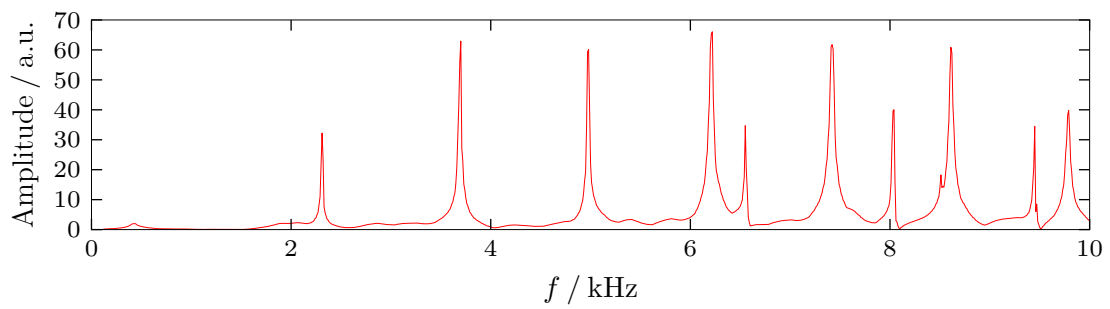


Abbildung 10: Spektrum bei $\alpha = 180^\circ$.

ihrer Frequenz. Dieses Verhalten ist zu erwarten, denn es zeigt die Winkelabhängigkeit der Kugelflächenfunktionen (vgl. die Werte für die Knoten des Legendrepolynoms in Abbildung 51). So nimmt zum Beispiel der Peak bei ca. 7400 Hz für 0° , 30° und 90° sehr geringe Amplitudenwerte an, während für 60° , 120° und 180° der Peak stark ausgeprägt ist. Eine bessere Auflösung der Winkelabhängigkeit erfolgt in Kapitel 5.2.3. An dieser Stelle ist noch festzuhalten, dass die Amplitude im Allgemeinen für $\alpha = 180^\circ$ die größten Werte annimmt. Hier ist der Polarwinkel $\Theta = 90^\circ$.

5.2.2. Untersuchung eines Doppelpeaks

Ein Frequenzbereich, der sich für die Untersuchung der Winkelabhängigkeit eignet, ist derjenige um 5000 Hz, denn hier liegt ein Doppelpeak vor. Dieser wird in einer feineren Auflösung von 1 Hz ausgemessen für drei verschiedene Winkel $\alpha = 0^\circ$, 20° , 40° . Eine zusammengeführte Darstellung findet sich in Abbildung 11 wieder. Es ist gut zu erkennen, dass der Peak bei 4960 Hz für $\alpha = 0^\circ$

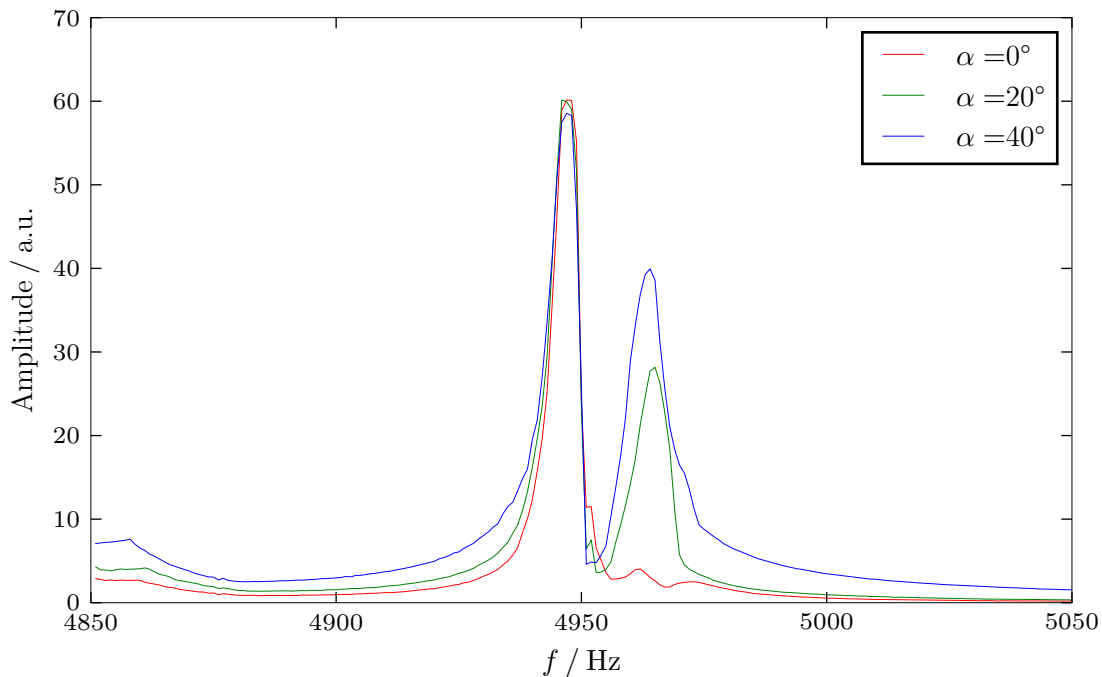


Abbildung 11: Doppelpeak bei verschiedenen Winkeln α .

nahezu verschwindet und erst mit größerem α sichtbar wird, während die Intensität des links davon liegenden Peaks unbeeinflusst bleibt.

5.2.3. Visualisierung der Kugelflächenfunktionen

In diesem Abschnitt wird die Winkelauflösung für insgesamt fünf markante Peaks auf 10° verfeinert. So lässt sich für jeden Peak ein Polarplot erstellen, mit dessen Hilfe auf die Drehimpulsquantenzahl l rückgeschlossen wird. Zunächst zeigt Abbildung 12 eine Übersicht bei $\alpha = 180^\circ$ und in einem Frequenzbereich von 100 bis 7000 Hz. Hieraus werden die fünf erkennbaren Peaks ausgesucht und näher untersucht. Die Umrechnung des Winkels α in den Polarwinkel Θ geschieht gemäß Gleichung (33). Während α zwar einen Bereich von 0° bis 180° abdeckt, kann Θ jedoch nur das Intervall 0° bis 90° durchlaufen. Die fehlenden Werte für 90° bis 180° werden durch eine

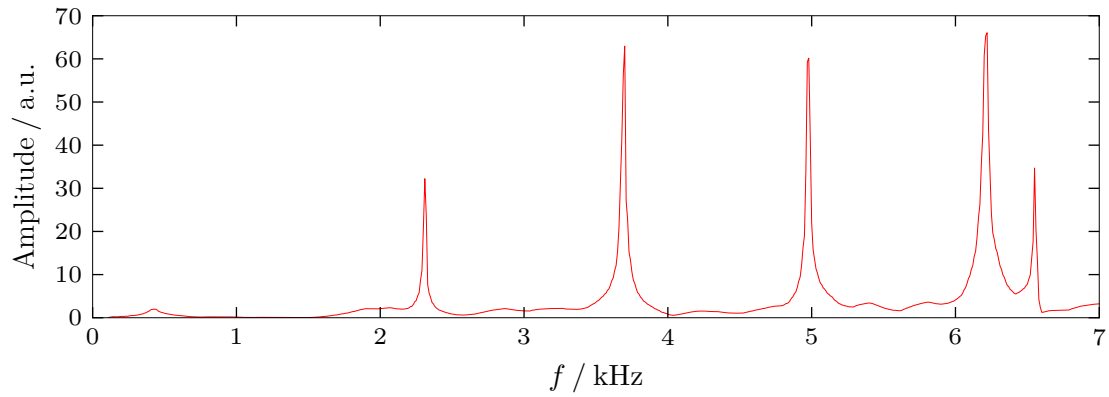
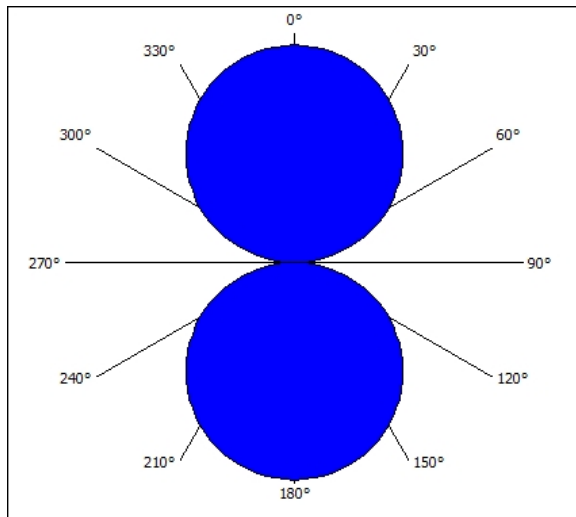
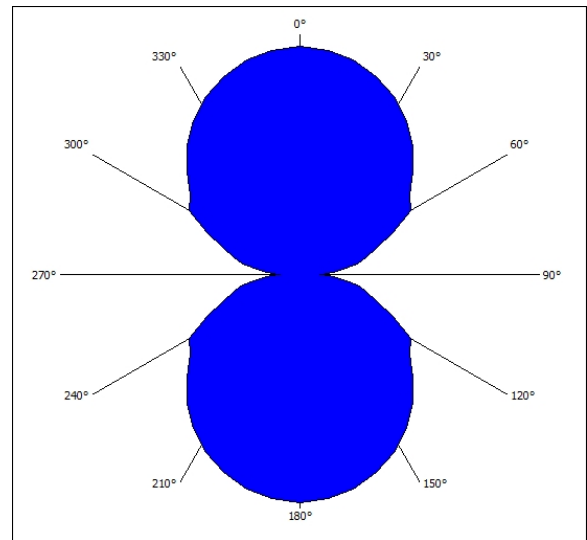


Abbildung 12: Übersichtsspektrum bei $\alpha = 180^\circ$.

Spiegelung symmetrisch aus den vorhandenen Daten erstellt. Somit ist also lediglich die Hälfte des sichtbaren Bereichs durch die Messung verifiziert. Schließlich wird durch eine erneute Spiegelung der Polarplot vervollständigt mit den – mathematisch redundanten – Werten 180° bis 360° . Die so entstehenden Polarplots sind in den Abbildungen 13 bis 17 dargestellt.



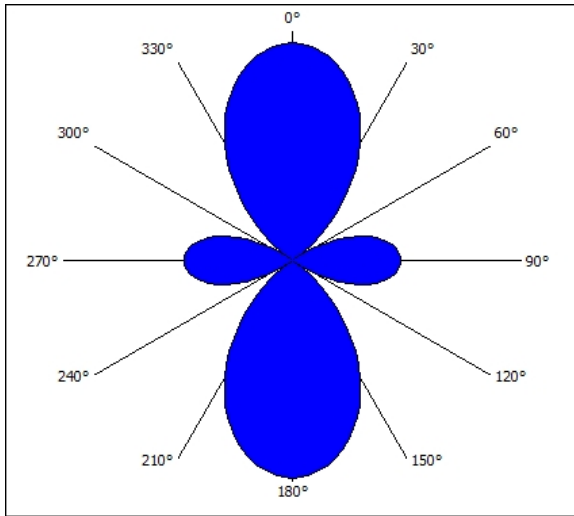
(a) Theorie für $l = 1$.



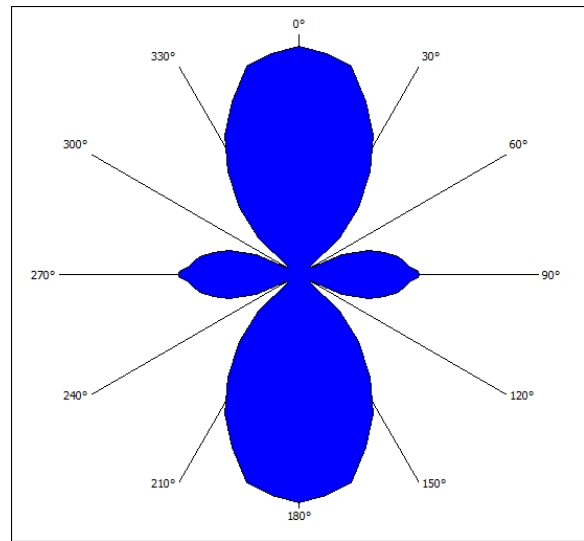
(b) Messung.

Abbildung 13: Polarplot für $f = 2310$ Hz.

Die Zuordnung der Quantenzahl l erfolgt anhand der Knotenzahl. Die Anzahl der Knoten in einer Hälfte des Polarplots ist gerade l , da die Quantenzahl m aufgrund des Versuchsaufbau zu 0 gesetzt werden kann. Lediglich für den Peak um $f = 6572$ Hz ist eine Zuordnung nicht möglich, denn der Polarplot weist keine Ähnlichkeit zu den Kugelflächenfunktionen auf. Somit wird die in Tabelle 3 angegebene Zuordnung getroffen. Es ist erkennbar, dass mit steigender Frequenz auch l zunimmt. Dies ist ein experimentelles Indiz dafür, dass die Eigenwerte der Frequenz in der Helmholtz-Gleichung (siehe Gleichung (17)) eine Proportionalität zu l aufweisen. Es wird im Übrigen darauf verzichtet, eine analytische Lösung von (17) anzugeben.

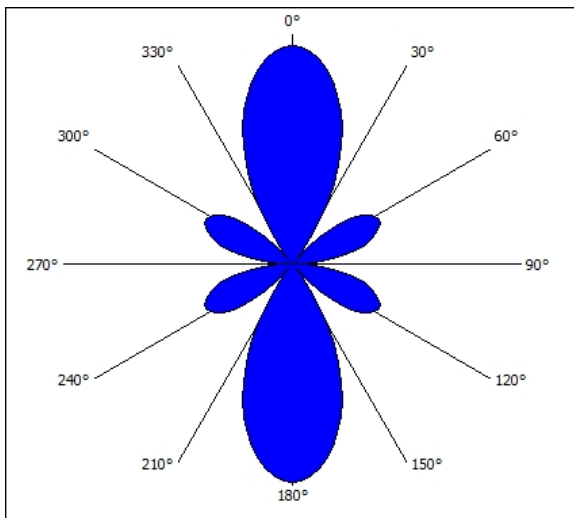


(a) Theorie für $l = 2$.

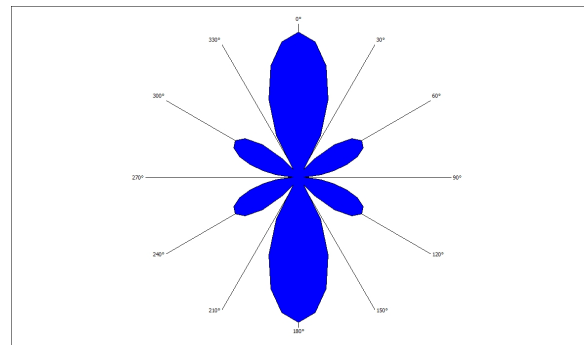


(b) Messung.

Abbildung 14: Polarplot für $f = 3711$ Hz.



(a) Theorie für $l = 3$.

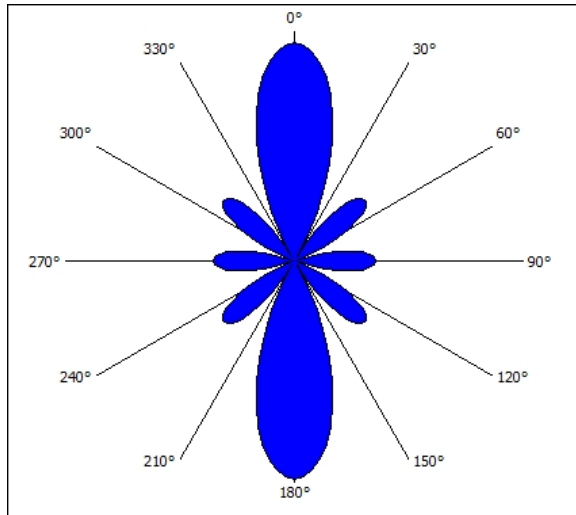


(b) Messung.

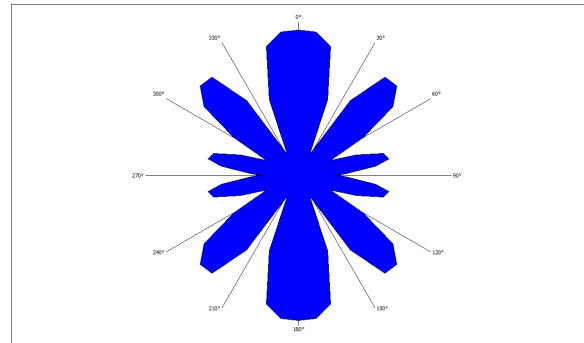
Abbildung 15: Polarplot für $f = 4994$ Hz.

Tabelle 3: Zuordnung der Quantenzahl l .

f / Hz	l
2310	1
3711	2
4994	3
6222	4



(a) Theorie für $l = 4$.



(b) Messung.

Abbildung 16: Polarplot für $f = 6222$ Hz.

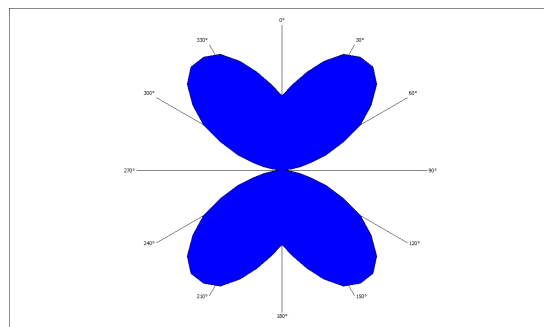


Abbildung 17: Polarplot für $f = 6572$ Hz. Eine Zuordnung für l ist nicht möglich.

5.3. Modellierung eines eindimensionalen Festkörpers

5.3.1. Bestimmung der Schallgeschwindigkeit

Um die Schallgeschwindigkeit zu messen, werden stehende Schallwellen wie bereits in Kapitel 5.1 für verschiedene Längen aufgenommen. Die Ergebnisse sind in den Abbildungen 18 bis 25 zu sehen. Von Interesse ist gemäß Gleichung (23) der Abstand zwischen zwei benachbarten Peaks.

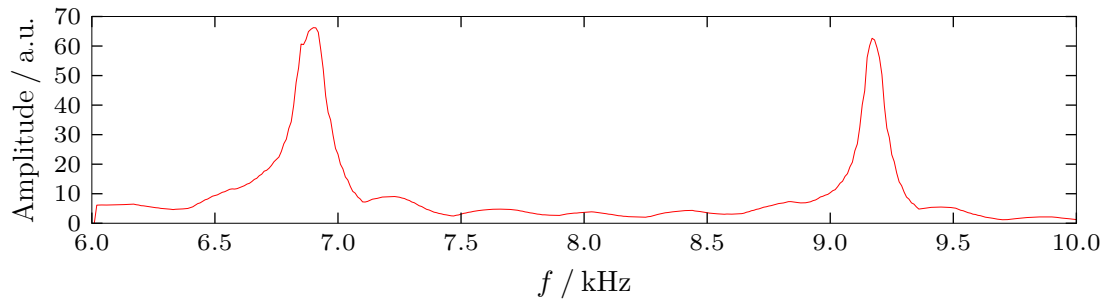


Abbildung 18: Messdaten einer 1x75 mm Röhre.

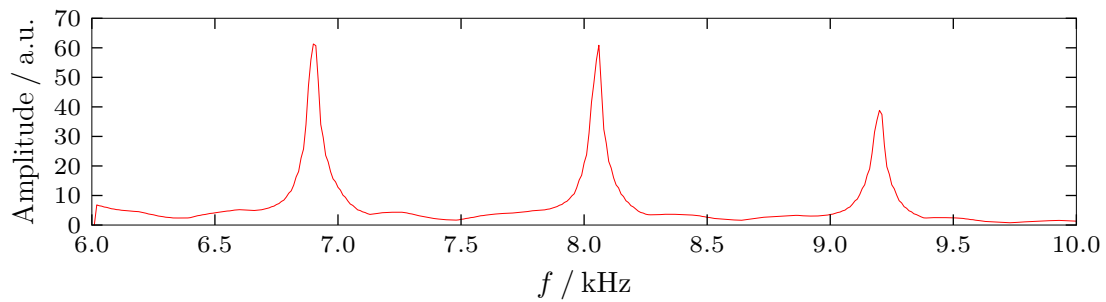


Abbildung 19: Messdaten einer 2x75 mm Röhre.

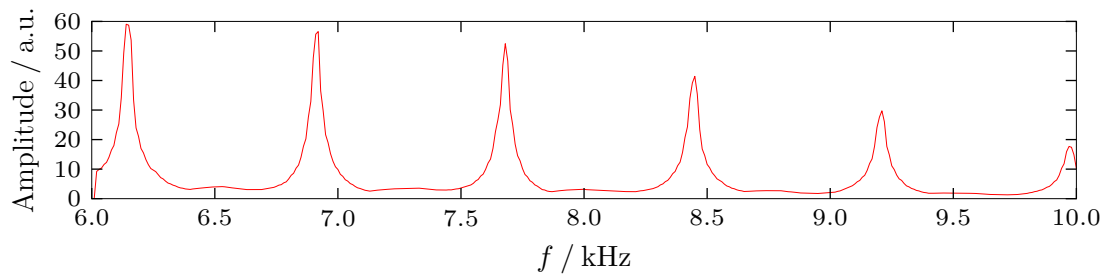


Abbildung 20: Messdaten einer 3x75 mm Röhre.

Um diese Abstände zu ermitteln, ist erneut das Herstellerprogramm SpectrumSLC verwendet worden. Die Spektren sind erneut mit der implementierten Fit-Funktion gefittet worden, um die Resonanzfrequenzen lokalisieren zu können. Die resultierenden Mittelwerte der Frequenz-Differenz zwischen zwei Peaks sind in Tabelle 4 zusammen mit ihren Fehlern angegeben. Für die Länge $L = 75$ mm kann kein Fehler angegeben werden, da nur ein Messwert vorliegt. Nun wird eine

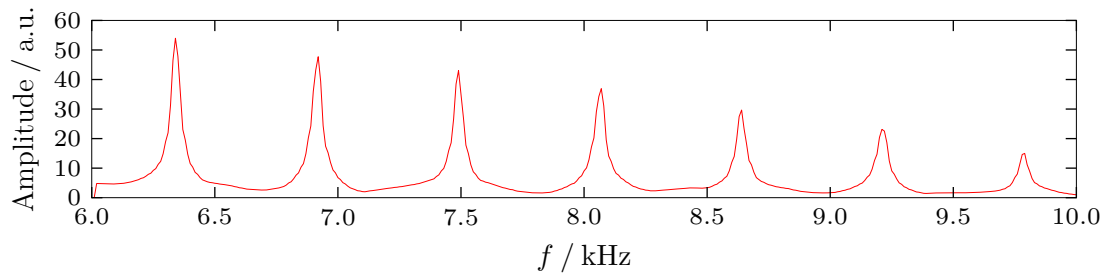


Abbildung 21: Messdaten einer 4x75 mm Röhre.

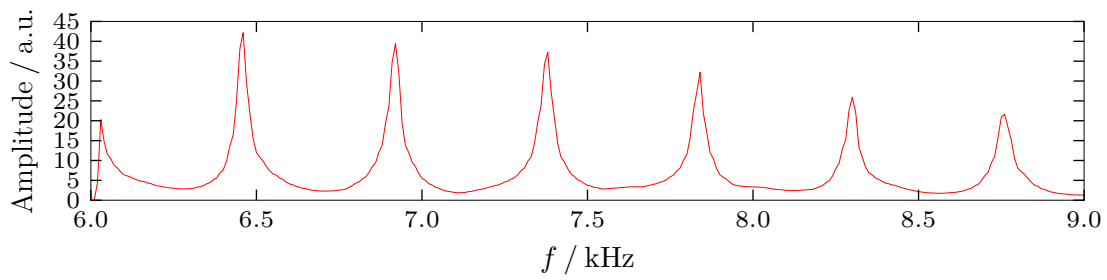


Abbildung 22: Messdaten einer 5x75 mm Röhre.

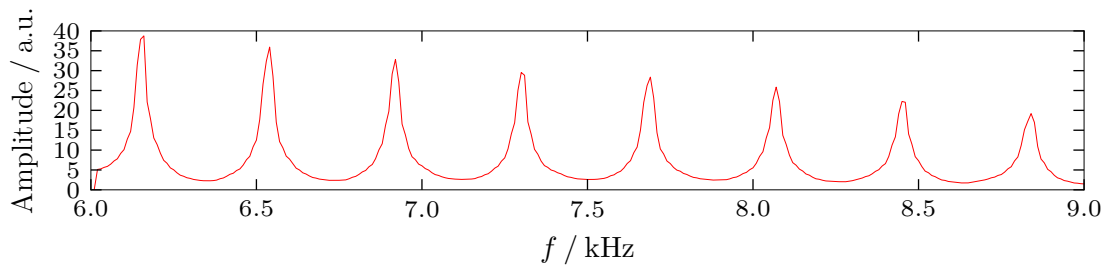


Abbildung 23: Messdaten einer 6x75 mm Röhre.

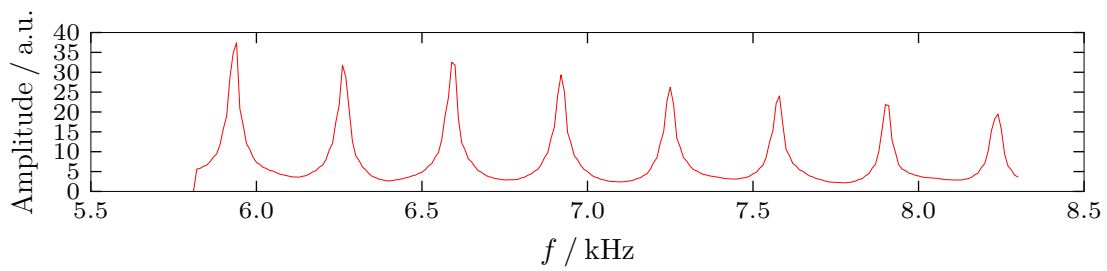


Abbildung 24: Messdaten einer 7x75 mm Röhre.

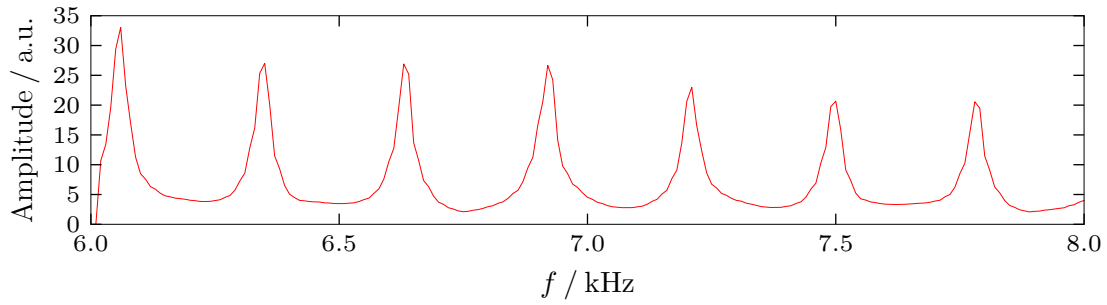


Abbildung 25: Messdaten einer 8x75 mm Röhre.

Tabelle 4: Δf in Abhängigkeit der Rohrlänge.

L / mm	$\Delta f / \text{Hz}$
75	$2286,7 \pm 0$
150	1148 ± 4
225	765 ± 1
300	$573,6 \pm 0,6$
375	454 ± 6
450	$383,0 \pm 0,4$
525	$328,7 \pm 0,7$
600	$287,5 \pm 0,5$

lineare Regressionsrechnung in $1/L$ ausgeführt.

$$\Delta f = a \frac{1}{L} + b \quad (34)$$

Die gefundenen Parameter sind

$$a = (171,5 \pm 0,2) \text{ m s}^{-1}$$

$$b = (1 \pm 1) \text{ s}^{-1}.$$

Die Messwerte sind zusammen mit dem Fit in Abbildung 26 dargestellt. Durch Vergleich mit Gleichung (23) ergibt sich die Schallgeschwindigkeit zu

$$c = 2a = (343,0 \pm 0,5) \text{ m s}^{-1}. \quad (35)$$

Im Vergleich mit dem Literaturwert bei 20°C [4]

$$c_{\text{lit}} = 343,6 \text{ m s}^{-1}$$

ergibt sich eine relative Abweichung von lediglich $(-0,2 \pm 0,1) \%$.

5.3.2. Bestimmung der Wellenzahl

Abbildung 27 zeigt das Übersichtsspektrum einer 60 cm langen Röhre. Außerdem eingezeichnet sind die mit einem open-source Paket für Python [3] ermittelten Maxima der Amplitude. Diese werden nun mit n durchnummeriert. Damit lässt sich die Wellenzahl gemäß

$$k_n = n \frac{\pi}{L} \quad (36)$$

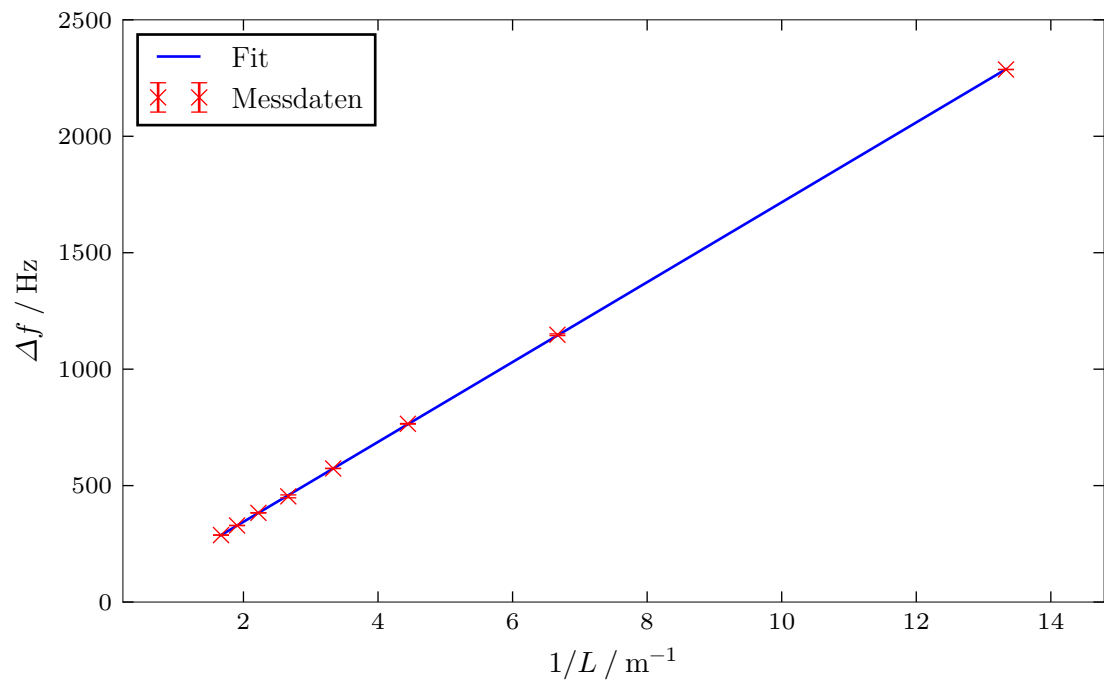


Abbildung 26: Gemittelte Frequenzdifferenzen und linearer Fit.

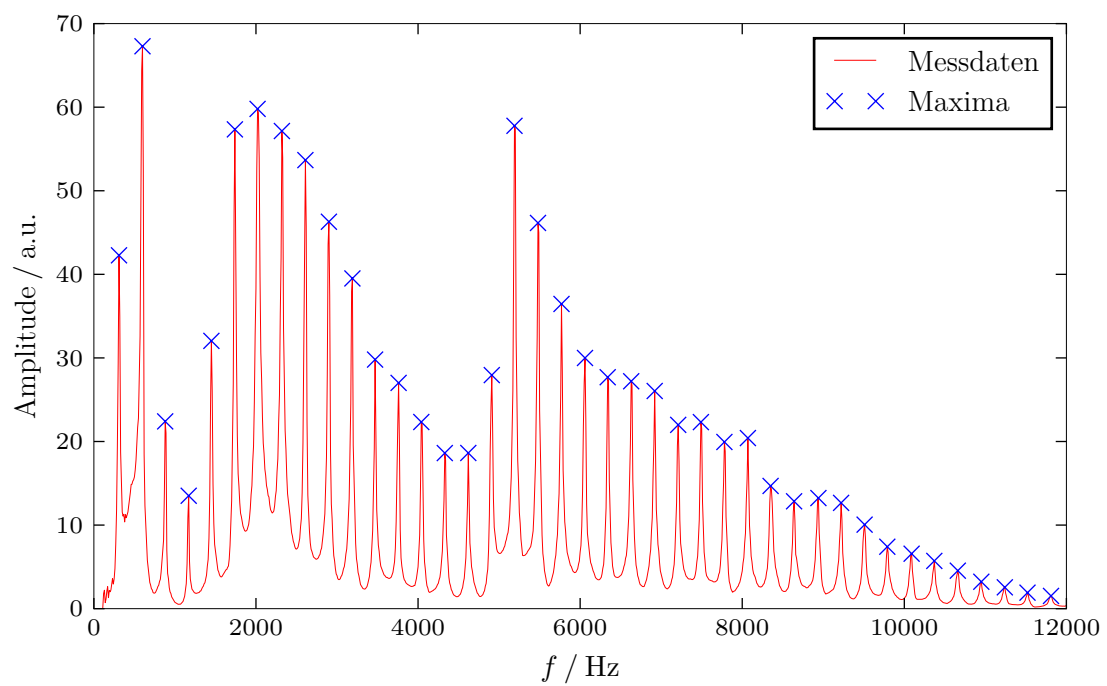


Abbildung 27: Spektrum einer 8x75 mm Röhre.

berechnen. Die somit gefundenen Frequenzen und zugehörigen k -Werte sind in Tabelle 5 zusammengestellt. Die hieraus abgeleitete Dispersionsrelation ist in Abbildung 28 zu sehen. Da sowohl

Tabelle 5: Δf in Abhängigkeit der Rohrlänge.

n	f_n / Hz	k_n / m^{-1}	n	f_n / Hz	k_n / m^{-1}
1	310	5,2	22	6340	115,2
2	600	10,5	23	6630	120,4
3	880	15,7	24	6920	125,7
4	1170	20,9	25	7210	130,9
5	1450	26,2	26	7490	136,1
6	1740	31,4	27	7780	141,4
7	2020	36,7	28	8070	146,6
8	2320	41,9	29	8350	151,8
9	2610	47,1	30	8640	157,1
10	2900	52,4	31	8940	162,3
11	3190	57,6	32	9220	167,6
12	3470	62,8	33	9510	172,8
13	3760	68,1	34	9790	178,0
14	4040	73,3	35	10090	183,3
15	4330	78,5	36	10370	188,5
16	4620	83,8	37	10660	193,7
17	4910	89,0	38	10950	199,0
18	5190	94,2	39	11240	204,2
19	5480	99,5	40	11520	209,4
20	5770	104,7	41	11810	214,7
21	6060	110,0			

f als auch k linear mit n gehen, gilt theoretisch der lineare Zusammenhang

$$f = \frac{c}{2\pi} k . \quad (37)$$

5.3.3. Bandstruktur in einem periodischen Potential

Nun wird der eindimensionale Festkörper modelliert. Das Gitter des Festkörpers wird hierzu mit Blenden modelliert, welche ca. im Abstand der halben Wellenlänge von Schall aufgestellt werden. Die Blenden bilden somit periodische Streuzentren. Die Ergebnisse des ersten Versuchsteils (siehe Kapitel 4.3) sind in den Abbildungen 29, 30 und 31 zu sehen. Auch hier sind die Detektionen des Algorithmus [3] eingezeichnet. Es ist zu beobachten, dass die Bänder mit zunehmender Frequenz schmaler werden. Ferner nimmt mit der Größe des Irisdurchmessers die Breite der Bänder zu und damit die Breite der Bandlücken ab. Dies ist klar, wenn zum Vergleich der Grenzfall einer nicht vorhandenen Iris herangezogen wird. Hierfür wird sich die periodische Struktur wie in Abbildung 27 einstellen. Dieser Grenzfall entspricht im Analogon einem freien Elektron.

Die gefundenen Frequenzen – mit Ausnahme des 1. aufbaubedingten Peaks in Abbildung 29 – werden in Tabelle 6 zusammengefasst. Dabei sind dem ersten Band sieben k -Werte zugeordnet, denn die Resonanz für $k = 0$ ist niemals sichtbar und es werden insgesamt pro Band genauso viele Peaks erwartet, wie Einheitszellen im Aufbau vorhanden sind, also acht. Die Frequenzen

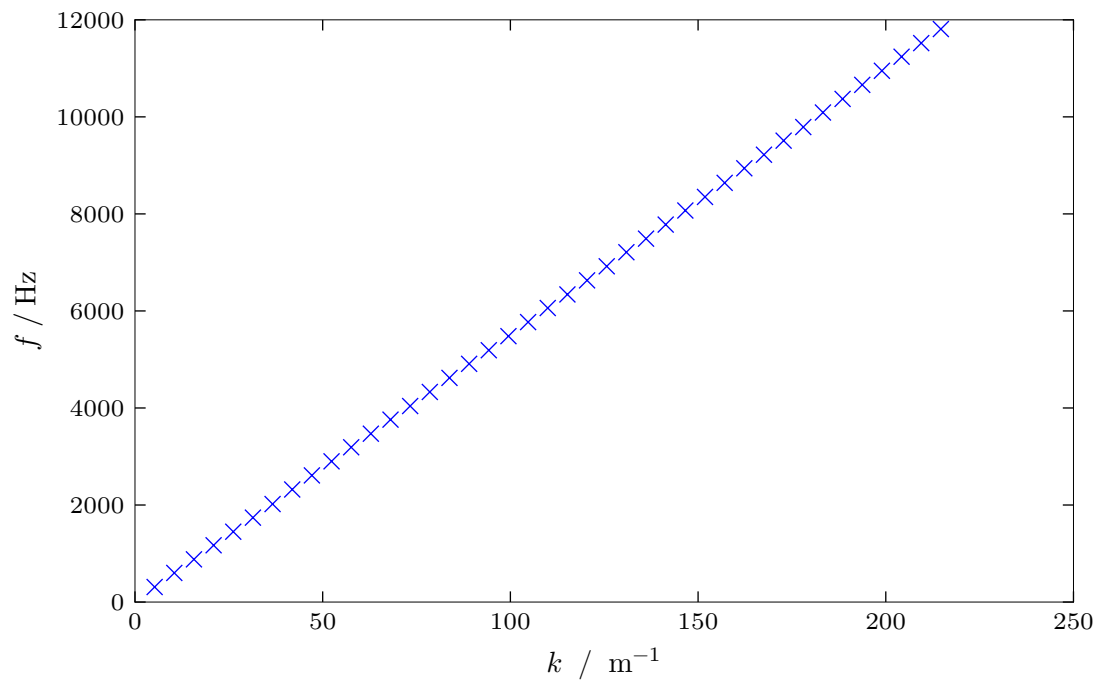


Abbildung 28: Dispersionsrelation der 8x75 mm Röhre.

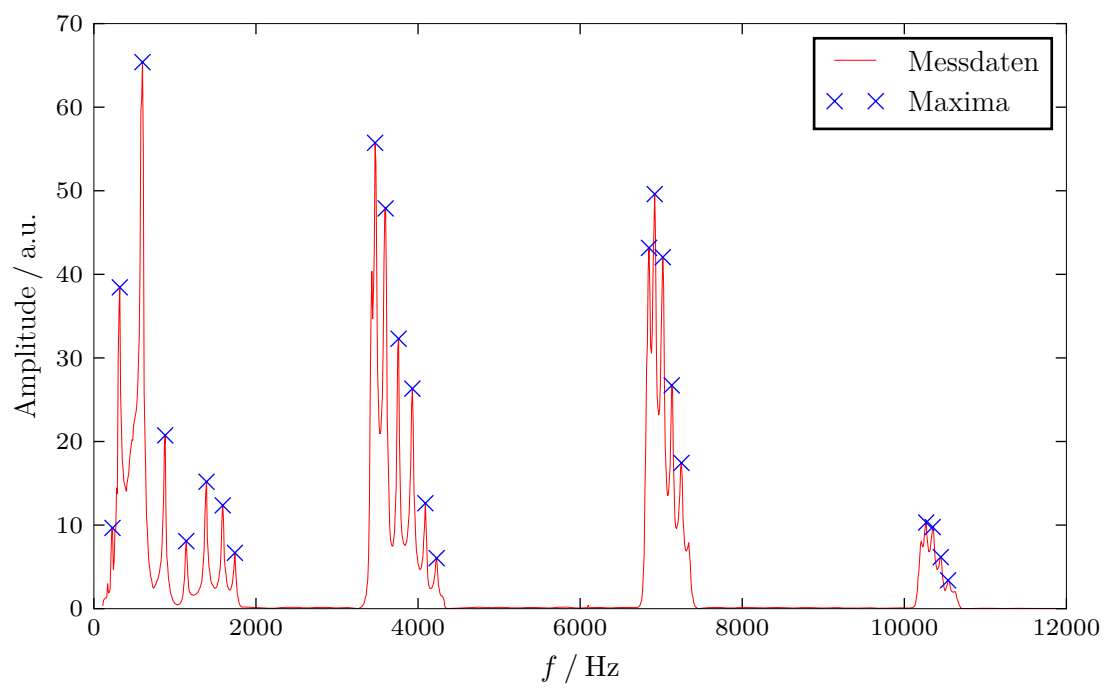


Abbildung 29: Spektrum einer 8x50 mm Röhre mit 10 mm Iris.

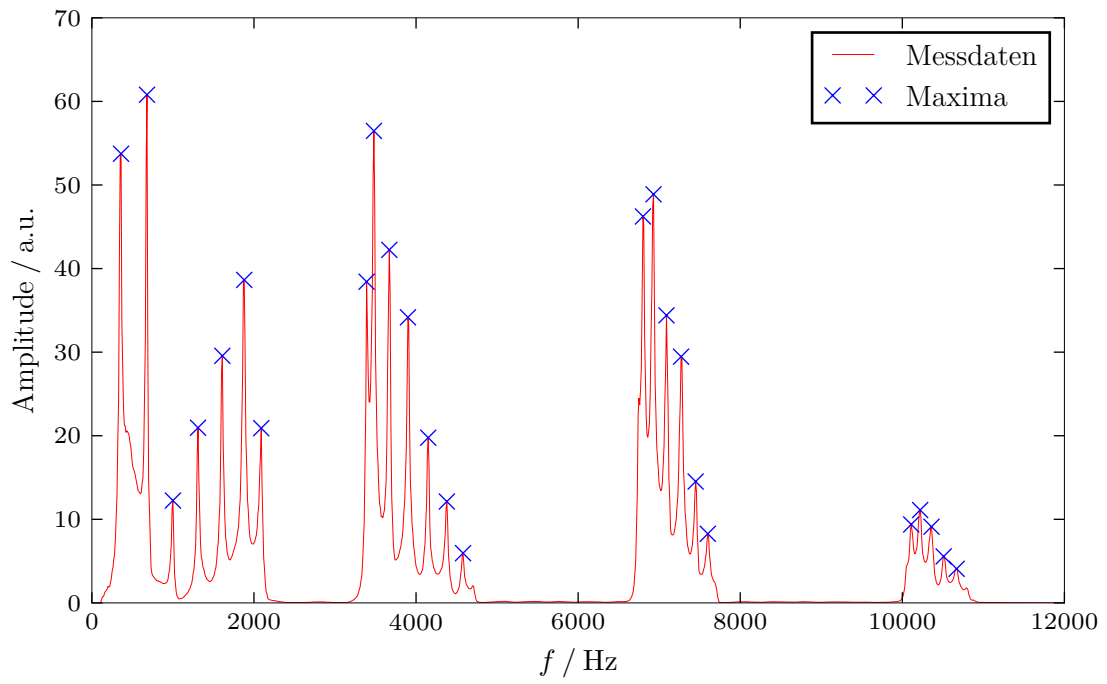


Abbildung 30: Spektrum einer 8x50 mm Röhre mit 13 mm Iris.

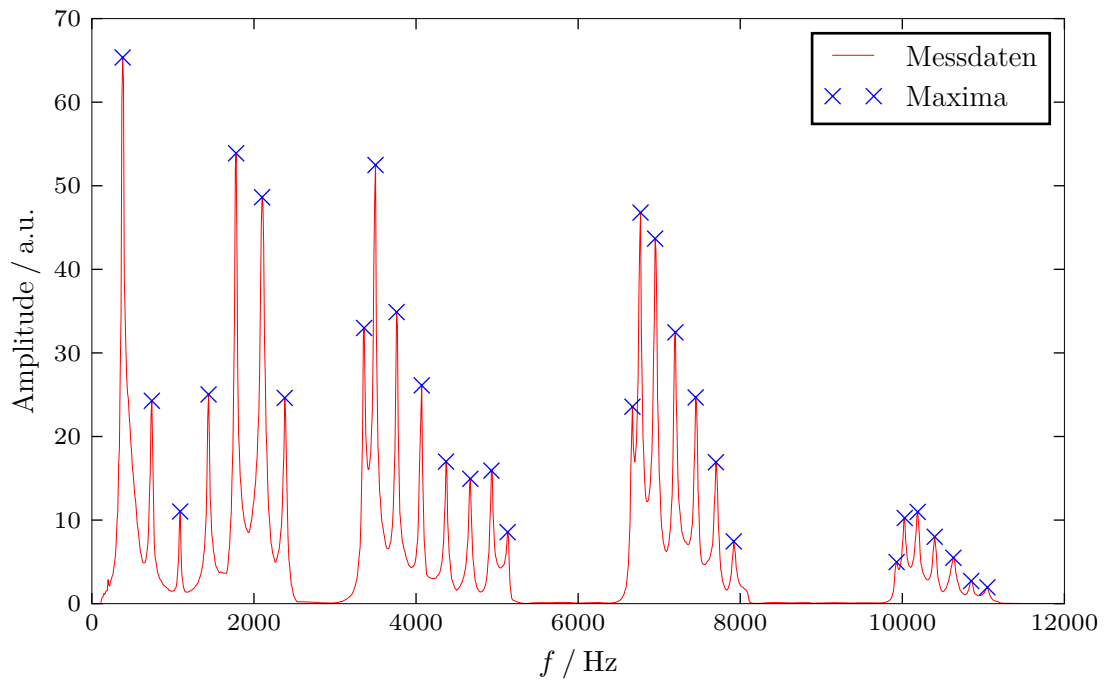


Abbildung 31: Spektrum einer 8x50 mm Röhre mit 16 mm Iris.

werden entsprechend in den nächsten achter-Block verschoben, falls sie sich im nächsten Band befinden. Die k -Werte werden erneut nach Gleichung (36) berechnet. Aus der Tatsache, dass die

Tabelle 6: Messdaten und zugeordnete n - bzw. k -Werte.

n	$f_n(10\text{mm}) / \text{Hz}$	$f_n(13\text{mm}) / \text{Hz}$	$f_n(16\text{mm}) / \text{Hz}$	k_n / m^{-1}
1	320	360	380	7,9
2	600	680	740	15,7
3	880	1000	1090	23,6
4	1140	1310	1440	31,4
5	1390	1610	1780	39,3
6	1590	1880	2100	47,1
7	1740	2090	2380	55,0
8	3470	3390	3360	62,8
9	3600	3480	3500	70,7
10	3760	3670	3760	78,5
11	3930	3900	4070	86,4
12	4090	4150	4370	94,2
13	4230	4380	4670	102,1
14		4580	4930	110,0
15			5130	117,8
16	6850	6800	6670	125,7
17	6920	6930	6770	133,5
18	7020	7090	6950	141,4
19	7130	7270	7200	149,2
20	7250	7450	7450	157,1
21		7600	7700	164,9
22			7920	172,8
23				180,6
24	10270	10110	9930	188,5
25	10350	10220	10030	196,3
26	10450	10360	10190	204,2
27	10540	10510	10400	212,1
28		10670	10630	219,9
29			10850	227,8
30			11050	235,6
31				243,5

Bänder breiter mit zunehmendem Irisdurchmesser werden ergibt sich auch, dass die Auflösung der Peaks für größere Irisdurchmesser besser ist, was anhand der fehlenden Werte in der Tabelle für die beiden kleineren Durchmesser zu beobachten ist. Die Daten in Tabelle 6 bilden die Dispersionsrelation für das mechanische Analogon zum Elektron in einem Festkörper. Zur Visualisierung dient Abbildung 32. Ferner erfolgt eine Abschätzung der Breite der Bänder B_m (Tabelle 7) und Bandlücken G_m (Tabelle 8). Die Werte werden in diesem Fall nicht durch eine Software, sondern "nach Augenmaß" anhand der Rohdaten bestimmt. Schließlich wird die Zustandsdichte gemäß der aus der Versuchsanleitung[5] entnommenen Gleichung

$$\rho(f) = \frac{1}{f_{i+1} - f_i} \quad (f_i: \text{Resonanzfrequenz}) \quad (38)$$

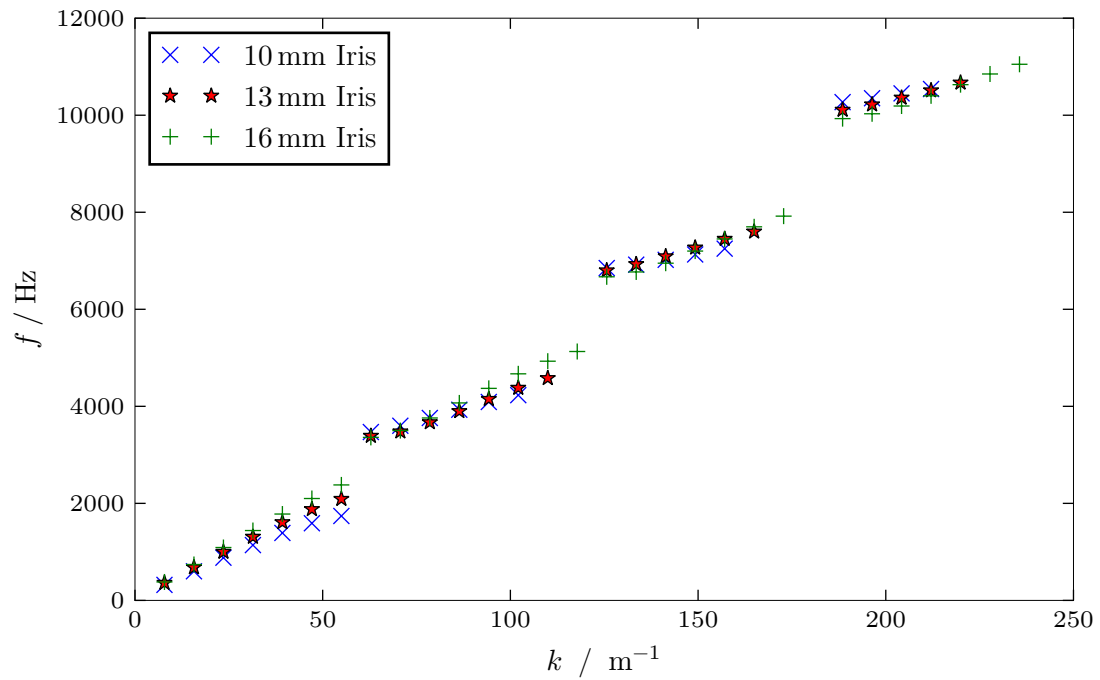


Abbildung 32: Dispersionsrelation einer 8x50 mm Röhre mit verschiedenen Iris-Durchmessern.

Tabelle 7: Händisch gemessene Bandbreiten für versch. Iris-Durchmesser.

m	$B_m(10\text{mm}) / \text{Hz}$	$B_m(13\text{mm}) / \text{Hz}$	$B_m(16\text{mm}) / \text{Hz}$
1	1720	2140	2430
2	1020	1600	2120
3	720	1130	1610
4	600	960	1380

Tabelle 8: Händisch gemessene Breiten der Bandlücken für versch. Iris-Durchmesser.

m	$G_m(10\text{mm}) / \text{Hz}$	$G_m(13\text{mm}) / \text{Hz}$	$G_m(16\text{mm}) / \text{Hz}$
1	1500	930	670
2	2380	1840	1290
3	2670	2220	1700

für den Aufbau mit einer 16 mm Iris berechnet und in Abbildung 33 wiedergegeben. Die diskreten Punkte werden für einen besseren Eindruck in diesem Fall miteinander verbunden. In den Bandlücken wird die Zustandsdichte ferner auf 0 gesetzt – hier sind Zustände per Definition nicht vorhanden. Gut zu erkennen sind die angedeuteten Van-Hove-Singularitäten an den Rändern der

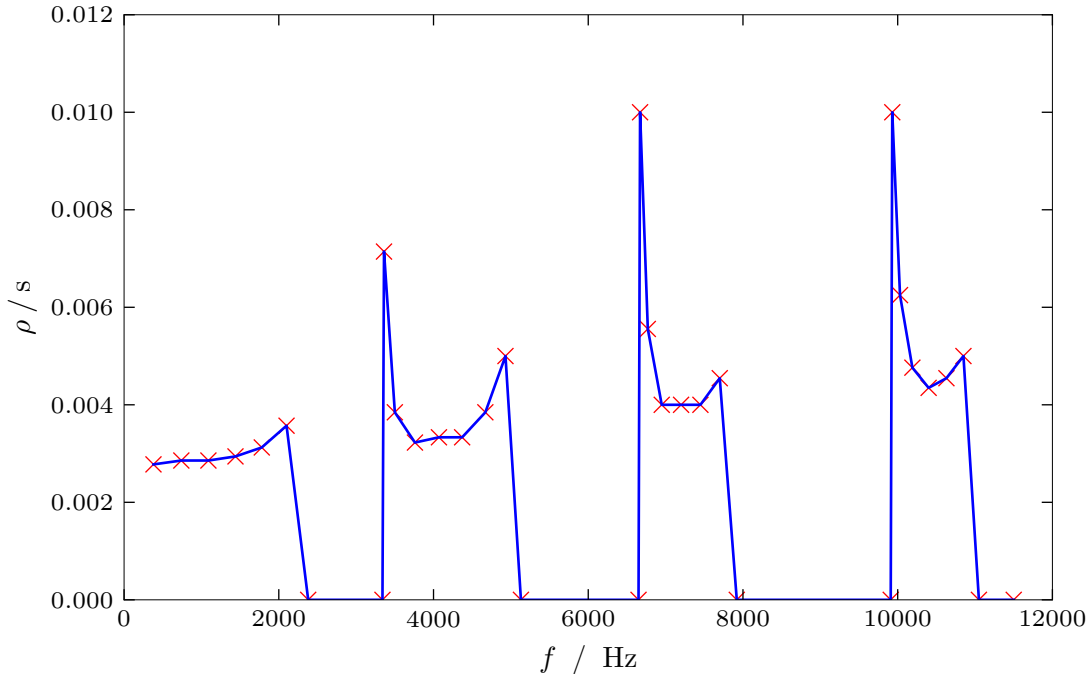


Abbildung 33: Zustandsdichte einer 8x50 mm Röhre mit verschiedenen Iris-Durchmessern.

Bänder.

5.3.4. Vergleich verschiedener Anzahlen von Einheitszellen

In diesem Teil werden drei Röhren, aufgebaut aus 8, 10 und 12 je 50 mm langen Röhren, miteinander verglichen. Es kommen Iriden mit 16 mm Durchmesser zum Einsatz. Die Spektren sind in den Abbildungen 31, 34 und 35 zu sehen. Wie zu erwarten nimmt die Anzahl der Maxima

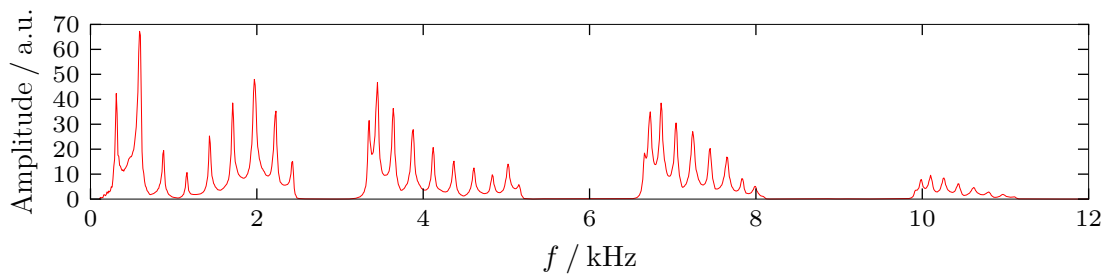


Abbildung 34: Spektrum einer 10x50 mm Röhre mit 16 mm Iris.

innerhalb eines Bandes erneut den Wert der Anzahl an Einheitszellen an, also jeweils 8, 10 und 12. Davon abgesehen sind die Spektren nahezu identisch, Bandbreiten und Breiten der Bandlücken sowie deren Position bleiben unverändert. Lediglich die Amplitudenwerte nehmen

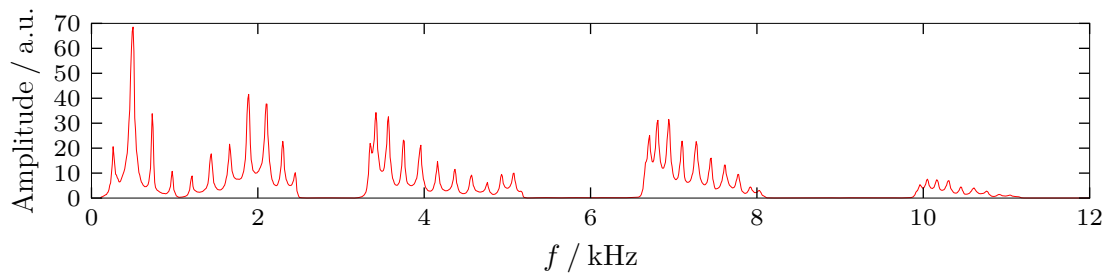


Abbildung 35: Spektrum einer 12x50 mm Röhre mit 16 mm Iris.

leicht ab mit steigender Röhrenlänge. Dies liegt an einer zunehmenden Dämpfung, bedingt durch die zusätzlichen Iriden.

5.3.5. Vergleich verschiedener Einheitszellen

Es verbleibt ein Vergleich zwischen Einheitszellen verschiedener Größe. Abbildung 36 zeigt hierzu das Spektrum einer Röhre mit acht je 75 mm langen Teilstücken und einer 16 mm Iris. Aufgrund

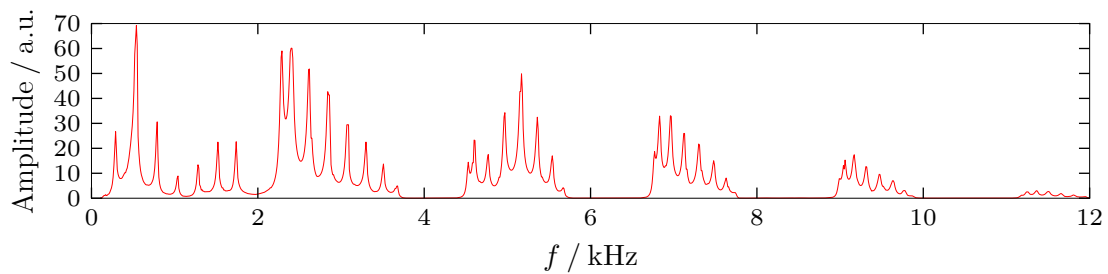


Abbildung 36: Spektrum einer 8x75 mm Röhre mit 16 mm Iris.

der größeren Länge wird die Brillouin-Zone kleiner, wodurch mehr Brillouin-Zonen im selben Frequenz-Bereich sichtbar werden (sechs statt vier). Aus demselben Grund verschmalern sich die Bandlücken und Bänder. Nach wie vor wird ein Frequenzband durch acht Peaks gebildet, was ebenfalls den Erwartungen entspricht (siehe Kapitel 5.3.3).

5.4. Modellierung eines Atoms und Moleküls

5.4.1. Einzelnes Atom

Das einzelne Atom wird durch eine einzelne Röhre simuliert. Abbildung 37 zeigt die Spektren einer 50 mm und einer 75 mm langen Röhre. Zusätzlich eingetragen sind die Peaks als Ergebnis des *peakdetect* Algorithmus [3]. Sichtbar sind lediglich longitudinale Moden. Radiale Moden sind aufgrund des Durchmessers der Röhre im Bereich von einem Zoll erst für höhere Frequenzen $f > 16$ kHz zu erwarten. Die Soundkarte ist jedoch nicht in der Lage, diese zu detektieren, daher verschwindet das Signal ab ca. 13 kHz. Die Abstände zwischen zwei Resonanzen errechnen sich

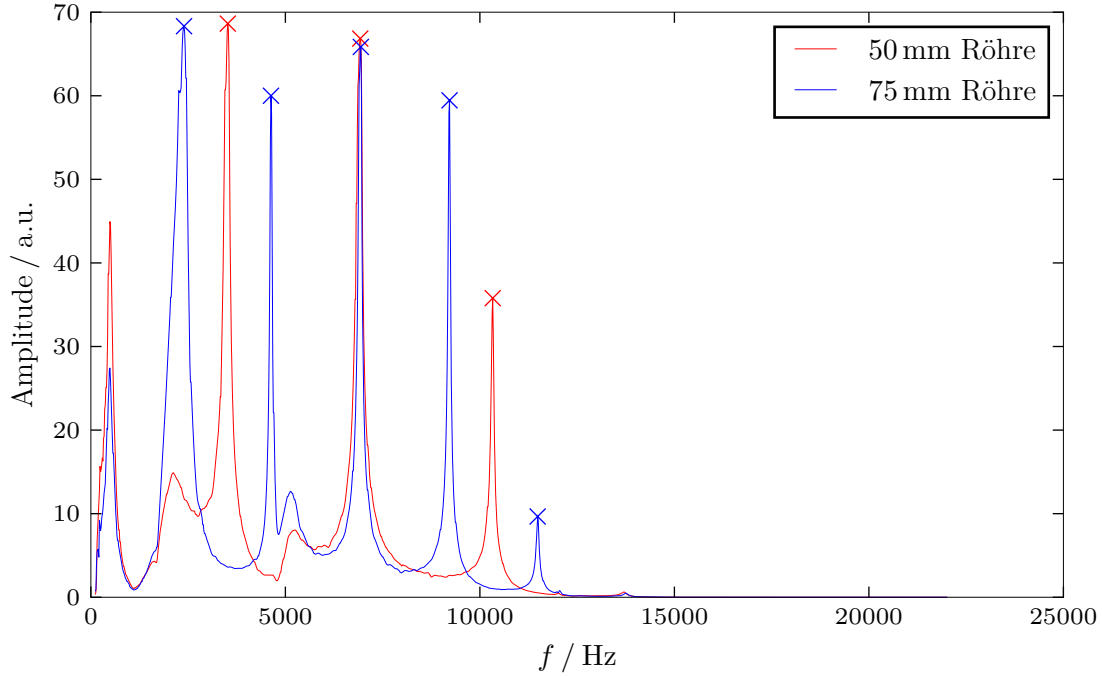


Abbildung 37: Spektrum einer 75 mm und einer 50 mm Röhre mit detektierten Peaks.

aus Gleichung (23) $f(n)$ mit der Schallgeschwindigkeit aus Gleichung (35). Dem gegenüber stehen die gemittelten Abstände aus der Messung.

$$\begin{aligned}\Delta f_{th,50mm} &= (3430 \pm 5) \text{ Hz} & \Delta f_{exp,50mm} &= (3405,0 \pm 0,3) \text{ Hz} \\ \Delta f_{th,75mm} &= (2287 \pm 3) \text{ Hz} & \Delta f_{exp,75mm} &= (2272 \pm 16) \text{ Hz}\end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich eine relative Abweichung von $(-0,7 \pm 0,1) \%$ für die 50 mm Röhre bzw. $(-0,6 \pm 0,7) \%$ für die 75 mm Röhre.

5.4.2. Molekül aus zwei Atomen

Nun werden zwei einzelne Atome zusammengebracht. Die Wechselwirkung zwischen ihnen wird durch eine Iris dargestellt. Der Durchmesser repräsentiert die Stärke der Wechselwirkung. Abbildung 38 zeigt die Spektren einer aus 2 je 50 mm langen Teilstücken aufgebauten Röhre mit verschiedenen Irisdurchmessern. Zum Vergleich dient das auf den Frequenzbereich bis 12 kHz zugeschnittene Spektrum einer einzelnen 50 mm langen Röhre in Abbildung 39. Es ist zu erkennen, dass die einzelnen Resonanzen zu zwei Zuständen aufspalten. Dieser Effekt skaliert mit der Größe der Irisdurchmesser, dh. für die 16 mm Iris ist die Aufspaltung am größten. Die Zustände können dem bindendem (links in einem Band) und dem antibindendem (rechts in einem Band) Zustand zugeschrieben werden.

5.4.3. Molekül aus mehreren Atomen

Nun wird die Anzahl an modellierten Atomen erhöht, das heißt es werden die Spektren mit 3, 4 und 6 Einheitszellen untersucht, siehe Abbildungen 40 bis 42. Die Beobachtungen sind analog zu denen aus Kapitel 5.3.4. Die Bänder spalten sich immer weiter auf. Im Grenzwert unendlich vieler

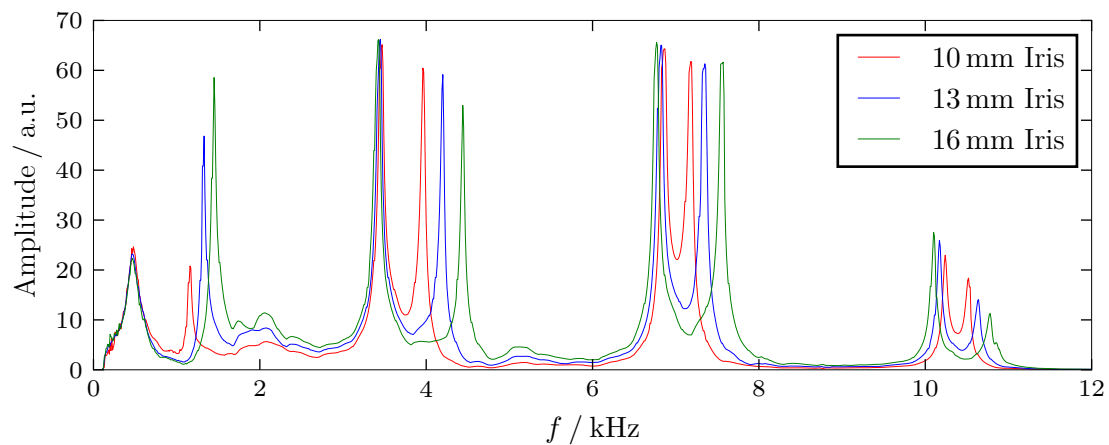


Abbildung 38: Spektrum einer 2x50 mm Röhre für drei verschiedene Irisdurchmesser.

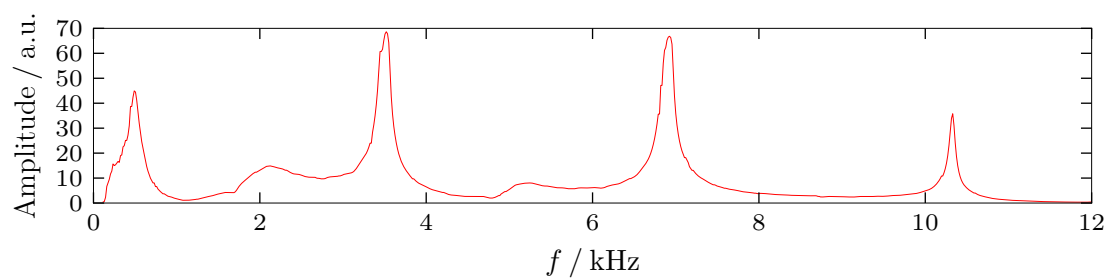


Abbildung 39: Spektrum einer 1x50 mm Röhre.

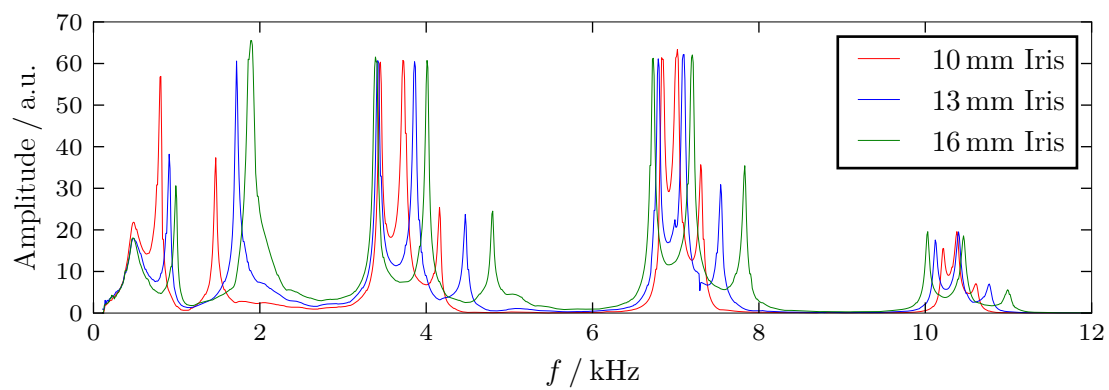


Abbildung 40: Spektrum einer 3x50 mm Röhre für drei verschiedene Irisdurchmesser.

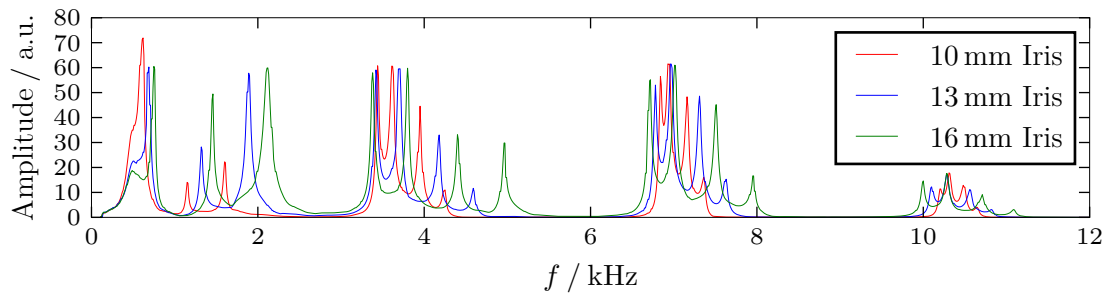


Abbildung 41: Spektrum einer 4x50 mm Röhre für drei verschiedene Irisdurchmesser.

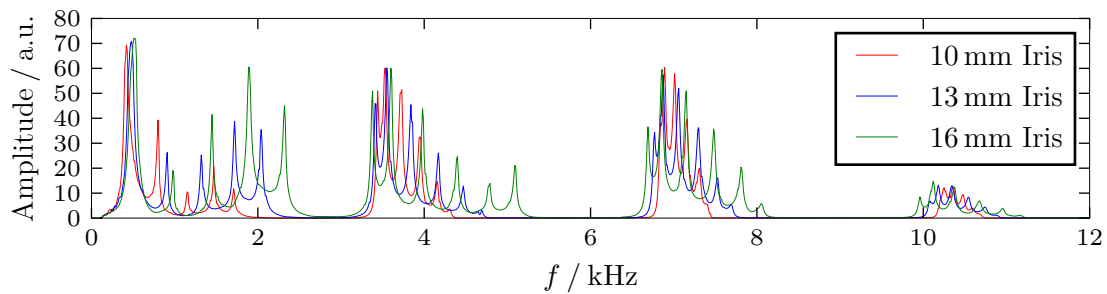


Abbildung 42: Spektrum einer 6x50 mm Röhre für drei verschiedene Irisdurchmesser.

Einheitszellen sind kontinuierliche Bänder zu erwarten mit den bereits gefundenen Bandlücken dazwischen.

5.4.4. Superstruktur, alternierende Iriden

In Abbildung 43 ist das Spektrum einer Superstruktur bestehend aus den zwei alternierend aufgestellten Einheitszellen. Die Einheitszellen werden aus einer 50 mm Röhre, gefolgt von einer 13 mm Iris (Einheitszelle 1) bzw. einer 16 mm Iris (Einheitszelle 2) aufgebaut. Insgesamt kommt jede Einheitszelle vier mal vor. Zum Vergleich ist auch das Spektrum aus Abbildung 35 eingezeichnet. Dabei handelt es sich um eine Anordnung aus 8x50 mm Stücken, getrennt durch 16 mm Iriden. Zu Beobachten ist, dass die Bänder im Fall der Superstruktur schmaler werden, aber innerhalb der Bänder der ungestörten Struktur liegen. Dies ist vermutlich auf die kleineren Irisdurchmesser der Einheitszelle 1 zurückzuführen, welche effektiv wie bereits in Kapitel 5.3.3 diskutiert zu einer Verschmälerung der Bänder führen. Ferner ist festzuhalten, dass ungefähr in der Mitte eines Bandes eine kleine Bandlücke entstanden ist. Dies ist eine Folge der verwendeten Superstruktur. In Abbildung 44 ist die Dispersionsrelation zu sehen. Sie ergibt sich nach dem Verfahren aus Kapitel 5.3.3, allerdings wird diesmal darauf verzichtet, die Anzahl der Peaks auf die eigentlich vorhandenen künstlich zu erweitern. Werden also in einem Band wenige Frequenzmaxima detektiert, so verschieben sich die weiteren Zuordnungen zu kleinere k -Werten. Trotzdem ist die Struktur, wie beispielsweise die Bandlücken, gut zu erkennen.

5.4.5. Superstruktur, alternierende Teilstücklängen

In diesem Versuchsteil werden zwei unterschiedliche Einheitszellen alternierend angeordnet. Eine Einheitszelle besteht aus einem 50 mm Stück mit einer 16 mm Iris, die andere aus einem 75 mm

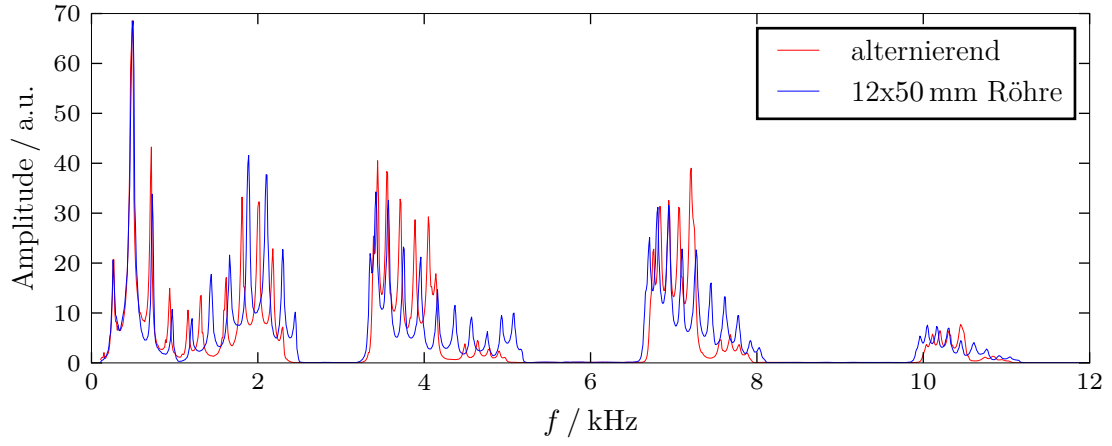


Abbildung 43: Spektrum der Superstruktur (siehe Text).

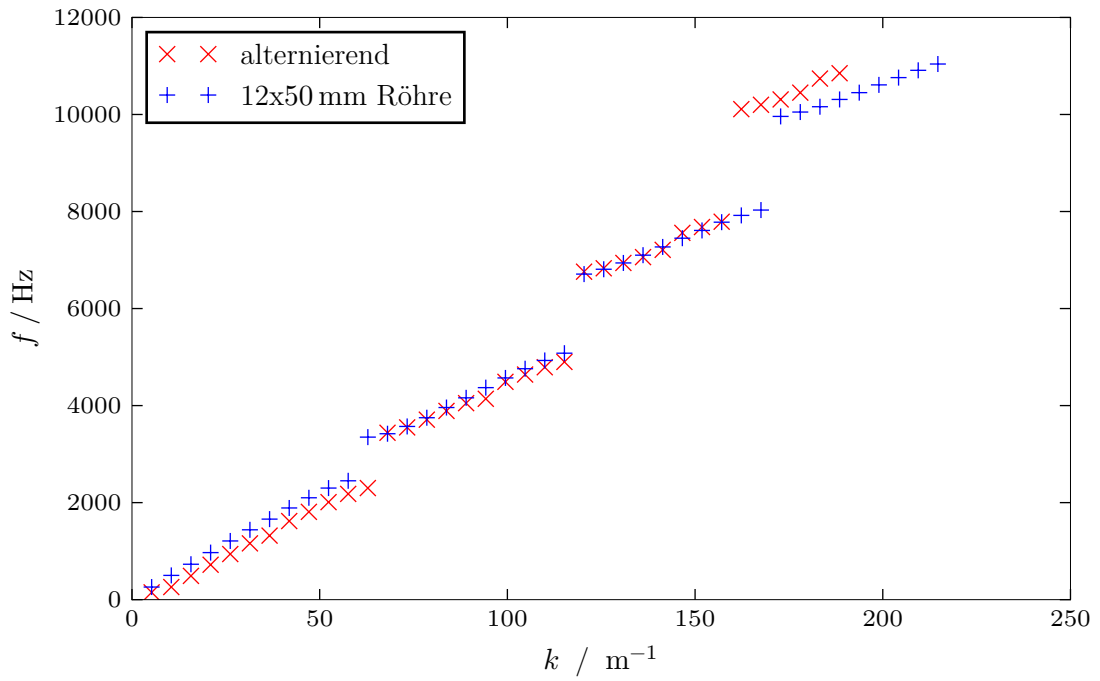


Abbildung 44: Dispersionsrelation der Superstruktur sowie der Referenz.

Stück ebenfalls mit einer 16 mm Iris. Das Spektrum ist in Abbildung 45 zu sehen. Zum Vergleich

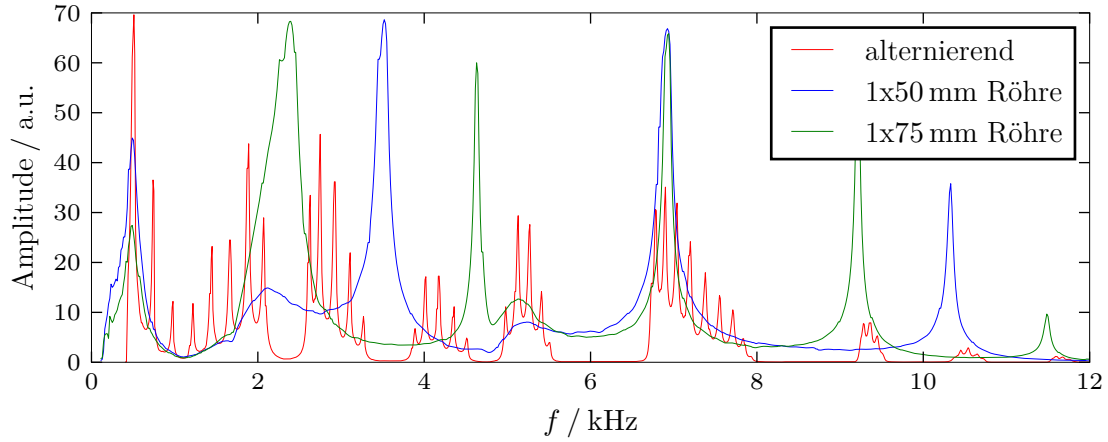


Abbildung 45: Spektrum der Superstruktur (siehe Text).

sind auch die Spektren einzelner Teilstücke aus Kapitel 5.4.1 eingezeichnet. In dem Spektrum Superstruktur ist zu erkennen, dass zwei einzelne Frequenzbänder periodisch wiederkehren, in ihrer Amplitude jedoch mit der Frequenz abnehmen. Es ist zu erwarten, dass diese Bänder jeweils die Aufsplittings der Resonanzen der beiden einzelnen Einheitszellen sind, jedoch ist diese Erwartung anhand der Grafik nur schwierig zu verifizieren, denn beispielsweise fällt der Peak des blau eingezeichneten Spektrums um 3,5 kHz im Superspektrum in eine Bandlücke. Andererseits ist aufgrund der geänderten Gesamtlänge des Aufbaus eine "Verdichtung" der Einzelspektren zu erwarten, das heißt dass die Resonanzen weiter zusammen rücken. Abbildung 46 zeigt die Dispersionsrelation der Superstruktur mit alternierenden Teilstücklängen. Dabei ist erneut wie im letzten Abschnitt vorgegangen worden.

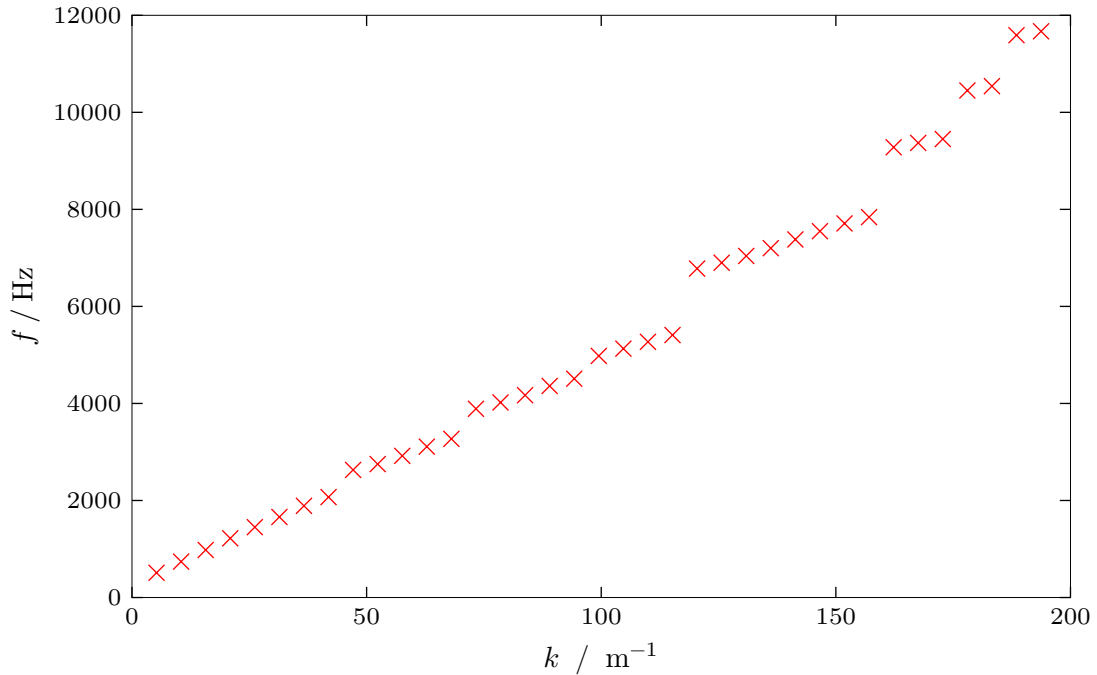


Abbildung 46: Dispersionsrelation der Superstruktur mit alternierenden Teilstücklängen.

5.4.6. Defekte

Im Folgenden wird der Einfluss eines Defektes in einer ansonsten regelmäßigen Struktur (ohne Superstruktur) untersucht. Abbildung 47 zeigt hierzu die Spektren einer 12x50 mm Röhre mit 16 mm Iriden und einer Konfiguration, wo an Position 3 in der Kette ein 50 mm Stück durch ein 75 mm Stück ersetzt ist. Hierfür wird gemäß dem Vorgehen aus den letzten beiden Abschnitten

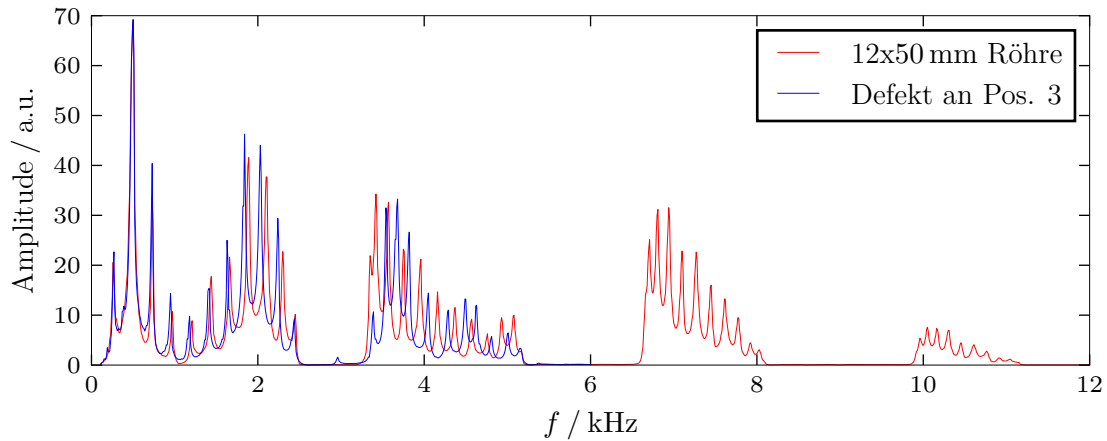


Abbildung 47: Einfluss eines eingebauten Defekts auf das Spektrum.

die Dispersionsrelation erstellt, siehe Abbildung 48. Erwartungsgemäß ist der Einfluss des Defektes

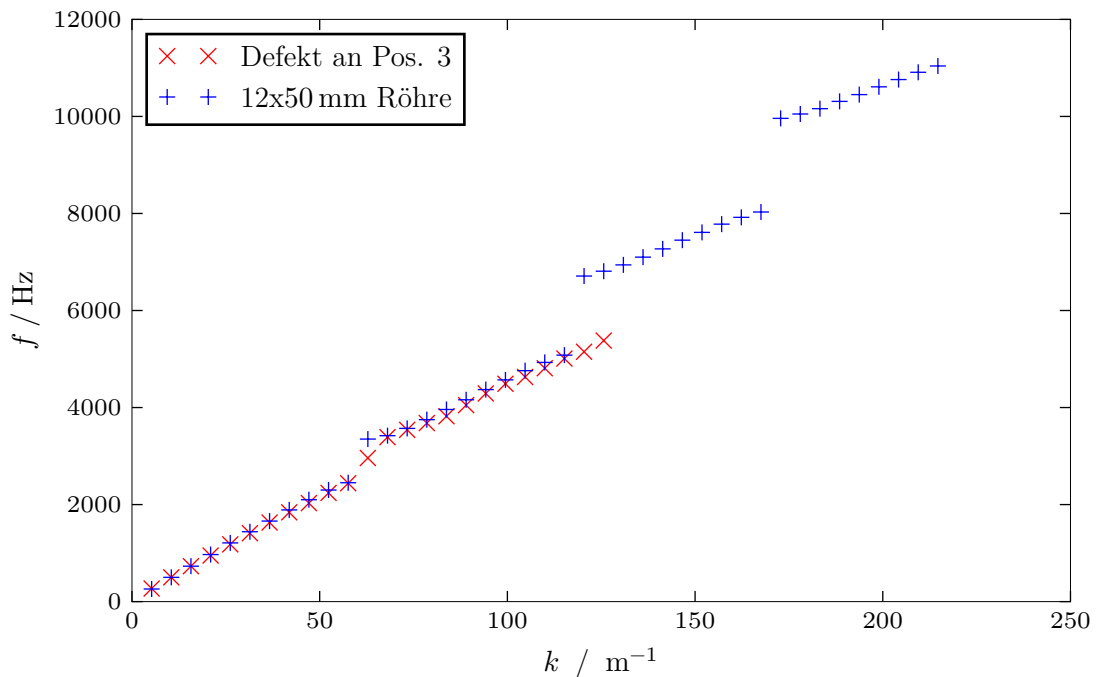


Abbildung 48: Einfluss eines eingebauten Defekts auf die Dispersionsrelation.

auf das Spektrum und somit die Dispersionsrelation nicht groß. Die ursprüngliche Bandstruktur wird weitestgehend beibehalten, jedoch wird ein Zustand innerhalb einer Bandlücke bei ca. 3 kHz beobachtet. Auch bei ca. 5,3 kHz gibt es einen kaum erkennbaren solchen Ausreißer. Damit ist die Anzahl Maxima tatsächlich erhalten, wobei ein Zustand in der Bandlücke liegt, und dafür

im Band selbst einer weniger zu finden ist. Es sind nach wie vor zwölf Peaks. Hier ist schön zu sehen, dass durch einen Defekt Zustände in der Bandlücke eingebaut werden, genauso wie es auch beim Dotieren von Halbleitern geschieht.

Abschließend wird der Einfluss der Position sowie der Größe des Defekts untersucht. Abbildung 49 zeigt hierzu das Spektrum für denselben Defekt an verschiedenen Positionen, während Abbildung 50 den Einfluss der Defektgröße zum Vorschein bringt. Auffällig ist in Abbildung 50, dass

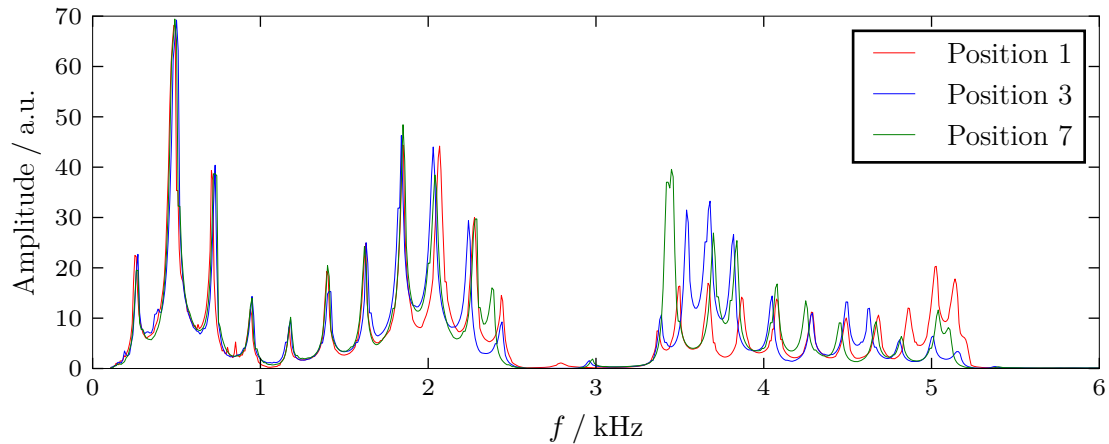


Abbildung 49: Einfluss der Position des eingebauten Defekts bei gleicher Größe $L_D = 75$ mm des Defekts.

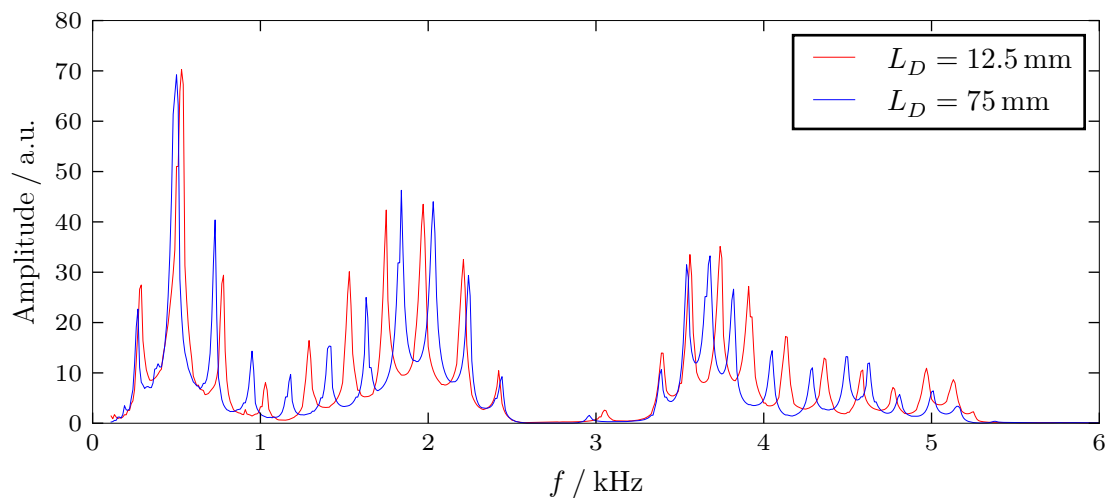


Abbildung 50: Einfluss der Größe des eingebauten Defekts bei gleichbleibender Position 3 des Defekts.

das erste Band für $L_D = 75$ mm lediglich 10 Peaks statt den erwarteten 11 enthält. In diesem Vergleich ist ferner eine Verschiebung der Maxima zu verzeichnen, nicht jedoch der Bänder oder Bandlücken an sich. Der Defektzustand bei ca. 3 kHz verschiebt sich ebenfalls. Da die Anzahl der Peaks gleich bleibt, diese jedoch untereinander verschoben sind, ist klar, dass die ursprüngliche Periodizität aufgehoben ist. Ein Mittelwert von Δf hätte nun eine deutlich größere Varianz. Die Wellenzahl kann daher auch nicht mehr als "gute Quantenzahl" angesehen werden.

Beim Vergleich verschiedener Positionen in Abbildung 49 ist zu sehen, dass das erste Band kaum betroffen ist, während das zweite Band sowohl Verschiebungen der Maxima als auch

starke Variationen in der Amplitudenhöhe aufweist. Der Defektzustand in der Energielücke ist insbesondere für Position 1 deutlich weiter links. Eine Begründung für diesen Sachverhalt verbleibt jedoch ausstehend.

6. Zusammenfassung

Die Diskussion ist aufgrund des Umfangs des Versuchs bereits größtenteils in den jeweiligen Kapiteln in der Auswertung erfolgt. Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass der Versuch die theoretischen Vorhersagen weitestgehend bestätigen kann. Fehler oder Abweichungen sind kaum aufgetreten, da das gesamte System gut abgestimmt ist. Beispielsweise wird der Wert der Schallgeschwindigkeit sehr genau getroffen mit einer geringen Abweichung von $(-0,2 \pm 0,1) \%$. Für die Justage ist es wichtig, die Dämpfung auf einen geeigneten Wert einzustellen, um eine Aussage über die wahren Amplituden treffen zu können.

Einige Messergebnisse verbleiben in ihrer Interpretation nicht klar. Zu nennen sind hier:

- Für den Polarplot in Abbildung 17 ist keine Zuordnung zu l möglich.
- Ein Peak wird vermisst in dem ersten Band in Abbildung 50.
- Wieso wandert in Abbildung 50 der Defektzustand zu kleineren Frequenzen aufgrund einer anderen Position des Defekts?
- Wie genau lässt sich für Abbildung 45 aus den Spektren einzelner Teilstücke die Überlagerung für eine alternierende Superstruktur ableiten?

Schwierigkeiten treten zudem bei der Auflösung der Peaks auf, insbesondere bei schmalen Bändern im Fall von kleineren Irisdurchmessern. Dies ist ein allgemeines Problem in der Spektroskopie, denn jeder Peak besitzt eine endliche Breite und so führt eine Überlagerung unter Umständen zu Informationsverlust. Hier ist prinzipiell ein numerischer Fit durchzuführen, statt des für die Auswertung verwendeten simplen *peakdetect*-Algorithmus.

Literatur

- [1] Eric Jones, Travis E. Oliphant, Pearu Peterson u. a. *SciPy: Open source scientific tools for Python*. Version 0.16.0. URL: <http://www.scipy.org/>.
- [2] Eric O. Lebigot. *Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties*. Version 2.4.6.1. URL: <http://pythonhosted.org/uncertainties/>.
- [3] *Peak detection in Python*. Mai 2017. URL: <https://gist.github.com/gcalmettes/1784428>.
- [4] *Speed of Sound in Air*. Mai 2017. URL: <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/Sound/souspe.html>.
- [5] *TU Dortmund - Fachbereich Physik : Fortgeschrittenenpraktikum Anleitung zu Versuch Nr. 23*. http://129.217.224.2/HOMEPAGE/Anleitung_FPBSc.html. Mai 2017.

A. Messdaten

P ₀								
P ₁	90°							
P ₂	54.74°	125.26°						
P ₃	39.23°	90°	140.77°					
P ₄	30.56°	70.12°	109.88°	149.44°				
P ₅	25.02°	57.42°	90°	122.58°	154.98°			
P ₆	21.18°	48.61°	76.19°	103.81°	131.39°	158.82°		
P ₇	18.36°	42.14°	66.06°	90°	113.94°	137.86°	161.64°	
P ₈	16.20°	37.19°	58.30°	79.43°	100.57°	121.70°	142.81°	163.80°

Abbildung 51: Der Winkel Θ an den Knoten des Legendrepolynoms $P_l^m(\cos(\theta)) = 0$, [5].