

## VERSUCH 605

# Die Spektren der Alkali-Atome

Marius Hötting  
Marius.Hoetting@udo.edu

Matthias Jaeger  
Matthias.Jaeger@udo.edu

Durchführung: 26.04.2016

Abgabe: 03.05.2016

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Zielsetzung</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Theorie</b>	<b>3</b>
2.1	Berechnung der Strahlungsenergie . . . . .	3
2.2	Auswahlregeln für Quantenübergänge . . . . .	4
2.3	Die Abschirmkonstanten . . . . .	5
2.4	Das Beugungsgitter . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Fehlerrechnung</b>	<b>8</b>
<b>4</b>	<b>Versuchsaufbau</b>	<b>9</b>
4.1	Aufbau des Gitterspektralapparates . . . . .	9
4.2	Winkelbeziehungen am Reflexionsgitter . . . . .	9
<b>5</b>	<b>Durchführung</b>	<b>11</b>
5.1	Spektrallinien des He-Spektrums . . . . .	11
5.2	Ausmessung der Dublettbreite bei Helium . . . . .	11
5.3	Spektrallinien weiterer Alkalispektren . . . . .	12
5.4	Abmessung der Spektrallinien weiterer Alkalispektren . . . . .	12
<b>6</b>	<b>Auswertung</b>	<b>13</b>
6.1	Bestimmung der Gitterkonstante . . . . .	13
6.2	Kalibrierungsgröße . . . . .	14
6.3	Abschirmungszahlen . . . . .	15
<b>7</b>	<b>Diskussion</b>	<b>17</b>
	<b>Literatur</b>	<b>18</b>

# 1 Zielsetzung

Ziel ist es, aus den Wellenlängen  $\lambda$  der Spektrallinien verschiedener Alkalimetalle auf die jeweilige Abschirmkonstante  $\sigma$  zu schließen.

## 2 Theorie

Der Vorteil der Verwendung von Alkali-Metallen besteht darin, dass eine Ein-Elektronen-Näherung durchgeführt werden kann. Diese Näherung ist möglich, da Alkali-Metalle ein oder mehrere abgeschlossene Elektronenschalen aufweisen mit einem einzelnen Elektron auf der äußersten Schale. Jedoch muss der Unterschied zum Wasserstoffatom mit der Abschirmzahl  $\sigma$ , die die Abschwächung des Coulombfeldes durch die abgeschlossenen Elektronenschalen beschreibt, korrigiert werden.

### 2.1 Berechnung der Strahlungsenergie

Ausgehend von der stationären Schrödingergleichung

$$H := \sum_i^N \frac{P_i^2}{2m_i + U}, \quad (1)$$

wird zuerst das Potential eines Wasserstoffatoms unter Berücksichtigung der Abschirmzahl  $\sigma$  ergänzt, somit ergibt sich

$$H = \frac{P_i^2}{2m_i} - \frac{(z - \sigma)e_0^2}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (2)$$

Aufgrund der Zentralsymmetrie bietet sich die Benutzung von Kugelkoordinaten an. Demzufolge wird der Laplace-Operator in einen Radial- und in einen Winkelanteil zerlegt. Mit Hilfe des quantenmechanischen Drehimpulses lässt sich der Ausdruck zusammenfassen zu

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{\hbar^2}{2m_0} l(l+1) \frac{1}{r^2} - \frac{(z - \sigma)e_0^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}. \quad (3)$$

Durch die erlaubte Vertauschung des Drehimpulses  $L$  mit dem Hamilton-Operator  $H$ , besitzt der Drehimpuls die gleichen Eigenfunktionen

$$L^2\psi = w^2\psi. \quad (4)$$

Die Eigenfunktion dieser Differenzialgleichung ist die Kugelflächenfunktion  $Y_l(\vartheta, \varphi)$ . Der Laufindex  $l$  bezeichnet die Bahndrehimpulsquantenzahl. Zu der Hauptquantenzahl  $n$  besteht der folgende Zusammenhang

$$l_{\max} = n - 1. \quad (5)$$

Diese  $l$ -Abhängigkeit zeigt sich auch in den Energieeigenwerten, wenn die Relativitätstheorie einbezogen wird. Dieser Einfluss der Relativitätstheorie wird nur als Störungsfaktor in dem Hamilton-Operator berücksichtigt. Zu diesem Zweck wird der Hamilton-Operator in erster Ordnung verwendet. Somit ergibt sich für die Energieeigenwerte

$$E_{\text{rel}} = -R_{\infty} \left\{ \frac{(z - \sigma)^2}{n^2} + \alpha^2 \frac{(z - \sigma)^4}{n^3} \left( \frac{2}{2l + 1} - \frac{3}{4n} \right) \right\} \quad \text{mit } \alpha := \frac{e_0^2}{2hc\epsilon_0}. \quad (6)$$

Durch die zweite Quantenzahl werden die  $n$  Energieniveaus in  $l$  Unterniveaus unterteilt. Für eine höhere Genauigkeit der Gleichung 3, muss der Spin des Elektrons einbezogen werden. Dieses führt zu der dritten Quantenzahl  $s$  die jedoch nur den Wert  $s = \pm \frac{1}{2}$  annimmt. Aufgrund des Spins treten magnetische Momenten auf, weshalb Wechselwirkungen auftreten, die als Spin-Bahn-Kopplung bezeichnet werden. Die Kopplung hat zufolge, dass sich der jeweilige Spin bzw. Drehimpuls des Elektrons vektoriell zu einem Gesamtdrehimpuls  $\vec{J}$  zusammensetzt. Aus den Eigenwertgleichungen des  $S$  und des  $L$  Operators ergibt sich der Hamiltonoperator

$$H_{\text{SpB}} = \frac{1}{2m_0^2c^2} \frac{1}{r} \frac{dU}{dr} S \cdot L - \frac{e_0\hbar^2}{8m_0^2c^2} \text{div} \frac{(z-\sigma)e_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}. \quad (7)$$

Aus der Eigenwertgleichung von  $S \cdot L$  und dem berechneten Coulomb-Potential ergibt sich die Gleichung für die Energieeigenwerte

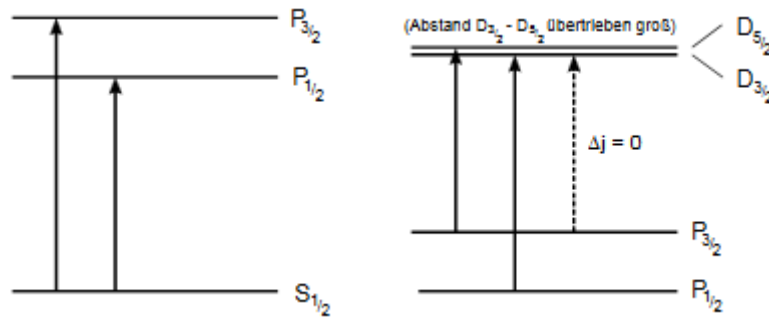
$$E_{n,j} = -R_\infty \left\{ \frac{(z-\sigma)^2}{n^2} + \alpha^2 \frac{(z-\sigma)^4}{n^3} \left( \frac{1}{j + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4n} \right) \right\} \quad (8)$$

unter Berücksichtigung, dass  $j$  nur die Werte  $l + \frac{1}{2}$  und  $l - \frac{1}{2}$  annehmen kann.

## 2.2 Auswahlregeln für Quantenübergänge

Für die Differenz der Hauptquantenzahl  $\Delta n$  von einem Energieniveau zum anderen, existieren keine Einschränkungen, wobei Übergänge mit einer großen Differenz zunehmend unwahrscheinlicher werden.

Da Energieniveaus mit gleichem  $n$  und  $l$ , aber unterschiedlichem  $j$ , diejenigen Energieniveaus sind, die am dichtesten zusammen liegen, werden sie als Dublett-Struktur bezeichnet. Die Dublett-Struktur ist in Abb. 1 dargestellt.



**Abbildung 1:** Darstellung verschiedener Energieniveaus [4].

Zudem gibt es eine Einschränkung der Differenz der Quantenzahl  $\Delta l$ . Energieniveauübergänge ohne Änderung des Bahndrehimpulses  $\Delta l = 0$  sind nicht möglich. Für die "erlaubten" Übergänge gilt  $\Delta l = \pm 1$ .

Übergänge, bei denen keine Änderung der Quantenzahl  $j$  auftritt, sind zum einen sehr unwahrscheinlich und zum anderen, wenn sie auftreten, schlecht zu beobachten, da beim Übergang kein Photon emittiert wird.

## 2.3 Die Abschirmkonstanten

Bei der Berechnung der Energieeigenwerte müssen die beiden Abschirmkonstanten  $\sigma_1, \sigma_2$  berücksichtigt werden. Die erste Abschirmkonstante  $\sigma_1$  beschreibt die Abschirmung des vom Kern verursachten Coulomb-Feldes von den Elektronen. Die Kern-nahen Elektronen, die sogenannten Rumpfelektronen, beeinflussen dieses Feld deutlich stärker als Elektronen auf äußeren Schichten. Bei der zweiten Abschirmkonstante  $\sigma_2$  wird die Spin-Bahn-Kopplung des beobachteten, äußeren Elektrons berücksichtigt. Dabei wird ermittelt wie groß die Abschirmung der Elektronen auf der Schale des Leuchtelektrons ist. Somit ist  $\sigma_1 \geq \sigma_2$ . Weiter ergibt sich die Gleichung für die Energieeigenwerte mit den Abschirmkonstanten zu

$$E_{n,j} = -R_\infty \left\{ \frac{(z - \sigma_1)^2}{n^2} + \alpha^2 \frac{(z - \sigma_2)^2}{n^3} \left( \frac{1}{j + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4n} \right) \right\}. \quad (9)$$

In diesem Experiment soll die Abschirmkonstante  $\sigma_2$  bestimmt werden. Da die Energiedifferenz  $\Delta E_D$  in einem Dublett bestimmt wird, ändert sich beim Übergang nur die Quantenzahl  $j$ . Aus diesem Grund ergibt sich die Energiedifferenz  $\Delta E_D$  durch

$$\Delta E_D = E_{n,j} - E_{n,j+1} \quad (10)$$

$$= \frac{R_\infty \alpha^2}{n^3} (z - \sigma_2)^4 \frac{1}{l(l+1)} \quad (11)$$

$$\Leftrightarrow \sigma_2 = z - \sqrt[4]{\frac{\Delta E_D (l(l+1)) n^3}{R_\infty \alpha^2}}. \quad (12)$$

Die in Gleichung 12 benötigte Energiedifferenz  $\Delta E_D$  wird durch die ermittelte Wellenlänge  $\lambda$  mit

$$\Delta E_D = hc \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'} \right) \approx hc \frac{\Delta \lambda}{\lambda^2} \quad (13)$$

berechnet.

## 2.4 Das Beugungsgitter

Das Beugungsgitter besteht aus einer großen Anzahl parallel ausgerichteter Spalten. Bestrahlt man dieses mit einem Lichtstrahl, wird dieser teilweise unter einem bestimmten Winkel reflektiert. Wie groß der Beugungswinkel ist, hängt von der Wellenlänge  $\lambda$  des einfallenden Lichtes ab. Somit kann durch den Reflexionswinkel  $\varphi$  auf die Wellenlänge  $\lambda$  geschlossen werden, wenn die Spaltenanzahl  $p$ , die Spaltenbreite  $b$  und die Gitterkonstante  $g$  bekannt sind. Um diese zu berechnen sei die Amplitude der Welle

$$E(z, t) = E_0 \exp i \left( \omega t - 2\pi \frac{z}{\lambda} \right). \quad (14)$$

Da der Teilchenstrahl zum einen nach dem Austritt eines Spaltes mit der Breite  $b$  mit sich "selbst" interferiert, ist die Intensität gegeben durch

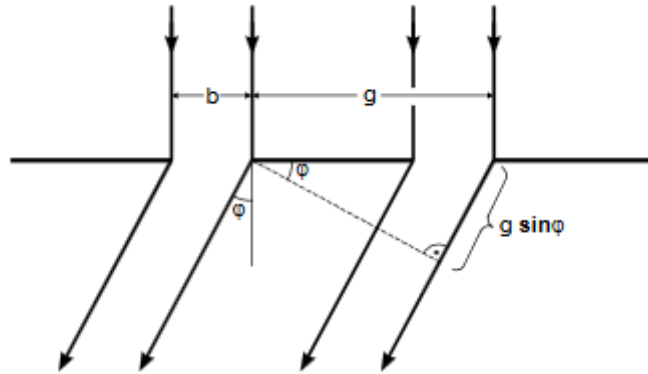
$$I_b(\varphi) = E_0^2 b^2 \left( \frac{\lambda}{\pi b \sin \varphi} \right) \sin \left( \frac{\pi b \sin \varphi}{\lambda} \right)^2 \quad (15)$$

und zum anderen mit den Lichtstrahlen aus den anderen Spalten interferiert ergibt, sich für die Gesamtintensität

$$I_g(\varphi) = |E_g(\varphi)|^2 I_b(\varphi) . \quad (16)$$

Um  $E_g(\varphi)$  zu bestimmen, wird der Phasenunterschied  $\delta$  einer Welle zwischen zwei Spaltausgängen betrachtet. Hier für ergibt sich nach Abb. 2

$$\delta = \frac{2\pi g \sin(\varphi)}{\lambda} . \quad (17)$$



**Abbildung 2:** Beugung einer ebenen Welle an regelmäßig angeordneten Spaltöffnungen der Breite  $b$  [4].

Für  $p$  Spalten setzt sich die Amplitude  $E_g(\varphi)$  aus  $p$  überlagerten Teilwellen zusammen. Somit gilt die folgende Beziehung zwischen der Amplitude und der Phasenverschiebung

$$|E_g(\varphi)|^2 = \frac{\sin(p \frac{\delta^2}{2})}{\sin(\frac{\delta^2}{2})} . \quad (18)$$

Weiter wird für jedes Gitter individuell der jeweilige Spaltenfaktor

$$s(x) := \frac{\sin(x)^2}{x^2} \quad \text{mit } x := \pi b \sin(\varphi/\lambda) \quad (19)$$

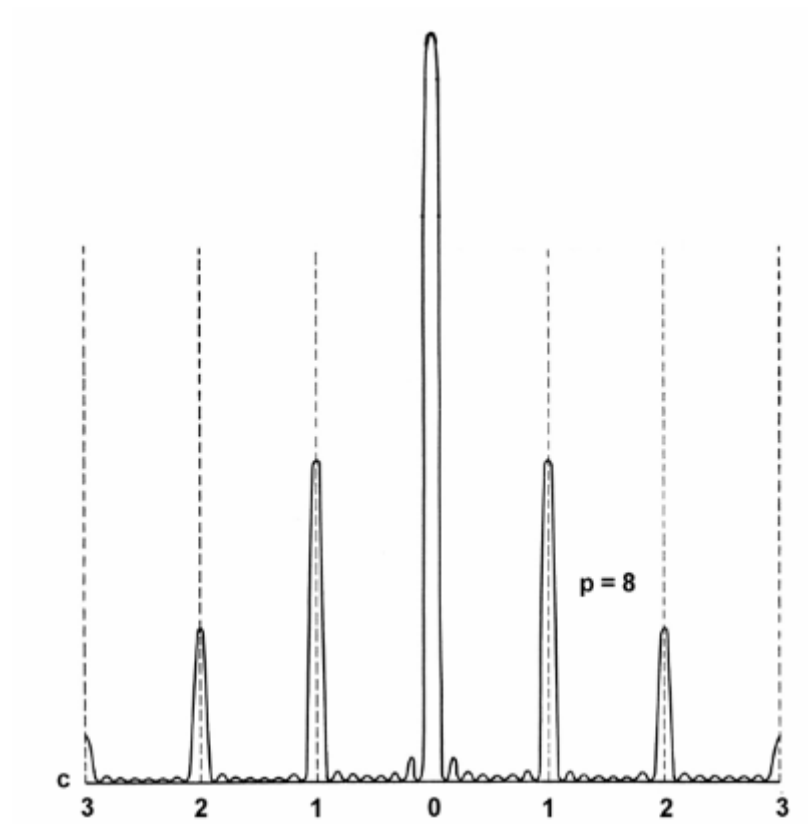
und der Gitterfaktor

$$g(y) := \frac{\sin(py^2)}{\sin(y^2)} \quad \text{mit } y := \pi g \sin(\varphi/\lambda) \quad (20)$$

definiert. Aus diesen Größen werden die Hauptmaxima an der Stelle

$$\sin(\varphi) = k \frac{\lambda}{g}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (21)$$

lokalisiert. Wird  $p$  entsprechend groß gewählt, wird der Abstand der Minima beliebig klein. Wie in Abb. 3 zu sehen werden dadurch die Maxima beliebig schmal, was zur Folge hat, dass im Experiment helle Linien zu erkennen sind.



**Abbildung 3:** Intensitätsverteilung (qualitativ) bei der Beugung durch 8 Spalte [4].

### 3 Fehlerrechnung

Dieses Kapitel listet kurz und bündig die benötigten und aus den Methoden der Statistik bekannten Formeln für die Fehlerrechnung auf. Die Schätzung der Standardabweichung ist

$$\Delta X = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} . \quad (22)$$

Der Mittelwert ist

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad (23)$$

Der Fehler des Mittelwertes ist

$$\Delta \bar{X} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} . \quad (24)$$

Für fehlerbehaftete Größen, die auch in folgenden Formeln verwendet werden, muss die Fehlerfortpflanzung nach Gauß berücksichtigt werden.

$$\Delta f = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial X_i} \right)^2 \cdot (\Delta X_i)^2} \quad (25)$$

Bei der linearen Regressionsrechnung sind die Parameter  $m$  und  $b$  der Ausgleichsgerade  $y = mx + b$  wie folgt gegeben:

$$m = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} \quad b = \bar{y} - m\bar{x} . \quad (26)$$

Dabei sind  $x_i$  und  $y_i$  linear abhängige Messgrößen. Der Fehler dieser Parameter wiederum errechnet sich aus

$$\sigma_m^2 = \frac{\sigma^2}{n(\overline{x^2} - \bar{x}^2)} \quad \sigma_b^2 = \frac{\sigma^2 \bar{x}^2}{n(\overline{x^2} - \bar{x}^2)} \quad (27)$$



## 4 Versuchsaufbau

### 4.1 Aufbau des Gitterspektralapparates

Um das Spektrum von Alkalimetallen zu beobachten, wird ein Gitterspektralapparat verwendet, wie er in Abb. 4 dargestellt ist. Das Licht kommt von der Alkali-Metall-Lampe, wird durch den Spalt 1.1 fokussiert und durch das Kollimatorrohr 1 auf das Gitter 2.1 gelenkt. Dieses steht auf dem Gittertisch 2, der wiederum auf der Teilkreisplatte 4 positioniert ist. Das Gitter ist in diesem Versuch als Reflexionsgitter ausgeführt, siehe hierzu das folgende Unterkapitel. Durch das schwenkbare Fernrohr kann die Beugung am Spalt beobachtet werden. Eine eingebaute Objektivlinse sammelt die gebeugten Strahlen an dem Ort ihrer Brennweite. Zur Vergrößerung des reellen Bildes dient eine Okularlinse. Zudem ist ein Fadenkreuz in diese eingebracht, welches durch eine Einstellschraube vertikal ausgerichtet werden kann. Die Positionen von verschiedenen Spektrallinien wird anhand der Winkelangaben auf der Teilkreisscheibe 4 festgehalten.

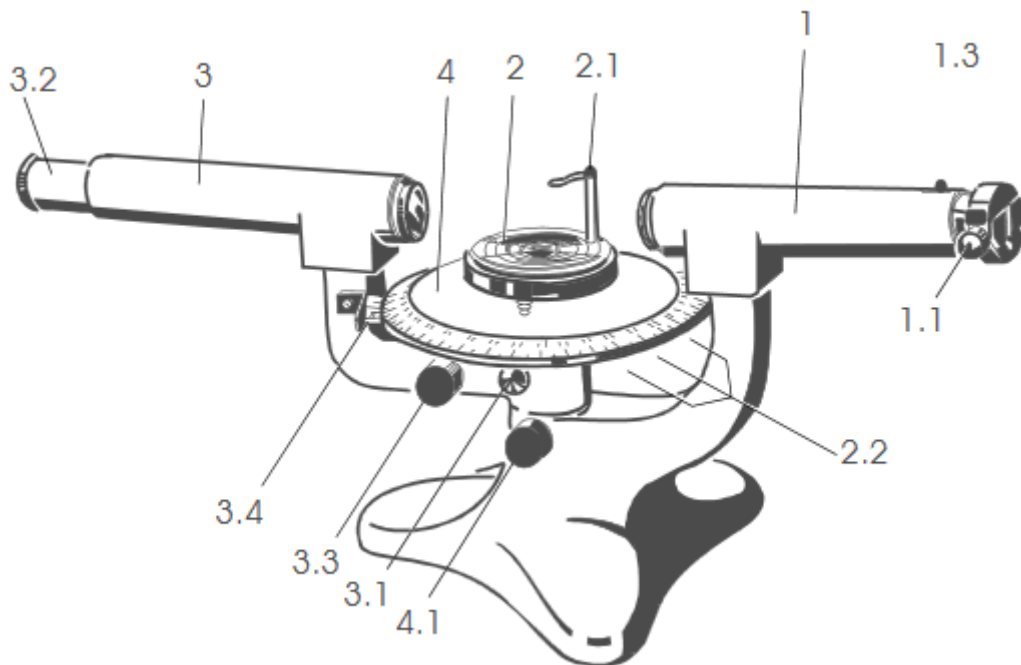


Abbildung 4: Aufbau des Okularmikrometers [4].

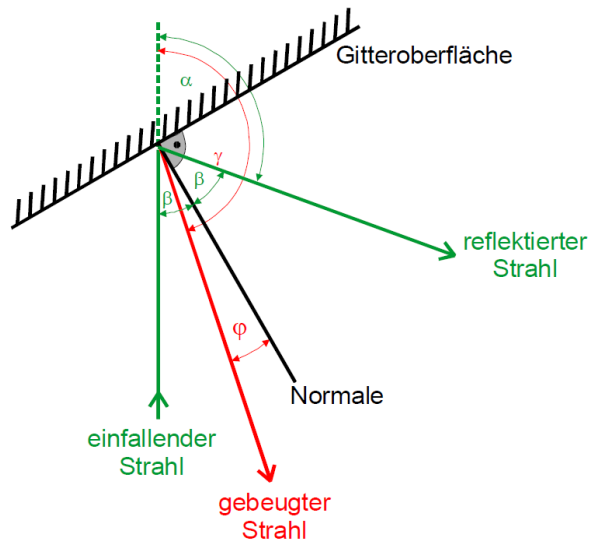
### 4.2 Winkelbeziehungen am Reflexionsgitter

In Abbildung 5 sind alle relevanten Winkelbeziehungen eingezeichnet. Es gilt für den Reflexionswinkel zum Lot

$$\beta = 90^\circ - \frac{400^\circ - \delta}{2} \quad (28)$$

und für den Beugungswinkel zum Lot

$$\varphi = 400^\circ - \delta' + \beta - 180^\circ . \quad (29)$$



**Abbildung 5:** Winkelbeziehungen beim Reflexionsgitter [4].

Hierin sind  $\delta$  und  $\delta'$  die an der Teilkreisscheibe abgelesenen Winkel. Für diese Zusammenhänge wird aus Gleichung (21) mit  $k = 1$  dann

$$\sin \varphi = k \frac{\lambda}{g} - \sin \beta . \quad (30)$$

## 5 Durchführung

### 5.1 Spektrallinien des He-Spektrums

Im ersten Teil des Messprogramms werden über das Goniometer die wichtigsten Spektrallinien des He-Spektrums lokalisiert. Hierzu wird eine Helium-Lampe vor dem Gitterspektralapparat positioniert. Zu Beginn wird der Reflexionswinkel mit dem Fernrohr eingestellt. Hier zeigt sich nahezu weißes Licht, denn es ist die Zusammensetzung aller Spektralfarben der Lampe. Der Winkel wird nun soweit verkleinert, bis durch das Okular eine schwach violette Spektrallinie zu erkennen ist. Der zu dieser Zeit eingestellte Winkel wird notiert. Der Winkel wird solange verkleinert, bis allen Spektrallinien aus Tabelle 6 auf diese Weise ein Winkel zugeordnet worden ist.

$\lambda$ [nm]	Farbe	Intensität	$\lambda$ [nm]	Farbe	Intensität
706,5	dunkelrot	schwach	492,2	blaugrün	mittel
667,8	rot	stark	471,3	blau	stark
587,6	gelb	stark	447,1	violett	stark
504,8	grün	schwach	438,8	violett	schwach
501,6	grün	stark			

Abbildung 6: Die wichtigsten sichtbaren Spektrallinien des Helium-Spektrums[4].

### 5.2 Ausmessung der Dublettbreite bei Helium

Um den Abstand zwischen zwei Dublettlinien, bzw. die Differenz der Wellenlänge  $\Delta\lambda$  zu ermitteln, reicht die Auflösung des Goniometers nicht aus. Für die Messung wird ein Okularmikrometer verwendet. Die Differenz  $\Delta s$  zwischen zwei Dublettlinien wird durch die vertikale Verschiebung des Fadenkreuzes im Okular vermessen. Zur Verschiebung wird die rechts am Fernrohr angebrachte Mikrometerschraube verwendet. Da auf der Skalentrommel der Schraube genau 100 Teilstriche angebracht sind, wird  $\Delta\lambda$  in Einheiten der Unterteilung des Okularmikrometers gemessen. Für die Umrechnung von  $\Delta s$  in  $\Delta\lambda$  in nm wird das Fernrohr auf zwei Spektrallinien der Helium-Lampe gerichtet, die sehr nah beieinander liegen, damit beide gleichzeitig auf dem Okular zu erkennen sind. Nun wird der Abstand  $\Delta t$  ausgemessen. Aus Abbildung 7 ergeben sich die folgenden Beziehungen

$$\Delta s = r \Delta \varphi \quad (31)$$

und

$$\Delta t = r(\varphi_1 - \varphi_2) . \quad (32)$$

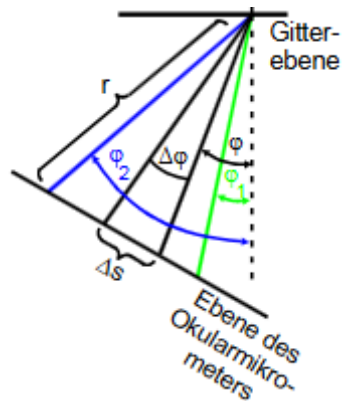
Nach weiterer Rechnung ergibt sich für die Wellenlängendifferenz

$$\lambda_1 - \lambda_2 = g \cos \bar{\varphi}_{1,2} \frac{\Delta s}{r} \quad \text{mit } \bar{\varphi}_{1,2} = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2) \quad (33)$$

In der obigen Gleichung beschreiben  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  Beugungswinkel mit den dazugehörigen Wellenlängen  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$ .

Schlussendlich ergibt sich die folgende Kalibrierungsgleichung.

$$\Delta \lambda = \frac{\cos \bar{\varphi}}{\cos \bar{\varphi}_{1,2}} \frac{\Delta s}{\Delta t} (\lambda_1 - \lambda_2) \quad (34)$$



**Abbildung 7:** Ausmessung kleiner Winkelunterschiede [4].

### 5.3 Spektrallinien weiterer Alkalispektren

In diesem Teil des Messprogramms werden weitere Spektrallinien verschiedener Alkali-Metalle mit dem Goniometer und dem in Kapitel 5.1 beschriebenen Verfahren, lokalisiert.

Die jeweiligen Dublettlinien werden für Natrium bei rot, gelb und grüngelb, für Kalium bei gelb und grün und für Rubidium bei rot gemessen.

### 5.4 Abmessung der Spektrallinien weiterer Alkalispektren

Die zuvor lokalisierten Dubletten werden mit dem in Kapitel 5.2 beschriebenen Verfahren präzise vermessen.

## 6 Auswertung

Für die folgenden Berechnungen ist es aufgrund der Verwendung eines Reflexionsgitters zunächst notwendig, aus den aufgenommenen Winkeln die tatsächlichen Beugungswinkel abzuleiten. Dazu dienen die Ausführungen in Kapitel 4.2. Das ungebeugte Maximum nullter Ordnung wird gerade unter dem Einfallswinkel festgestellt, denn für Reflexion gilt Ausfallwinkel gleich Einfallswinkel. Die Bezeichnungen der Winkel orientieren sich an denen aus Abb. 5. Der gemessene Reflexionswinkel beträgt

$$\delta = 338,2^\circ \Rightarrow \beta = 59,1^\circ \quad (35)$$

sodass sich für den zu ermittelnden Beugungswinkel  $\varphi$  mit dem an der Skala abgelesenen Winkel  $\delta'$

$$\varphi = 279,1^\circ - \delta' \quad (36)$$

ergibt. Die Messdaten zeigen, dass die gemessenen Beugungswinkel allesamt negativ sind. Im Folgenden werden die Winkel jedoch der Übersicht halber mit ihrem Betrag angegeben, während für die Rechnungen das Minuszeichen beibehalten wird. Ferner werden die Winkel in den folgenden Unterkapiteln ins Bogenmaß übersetzt. Tabelle 1 zeigt die gemessenen und mit Gleichung (36) umgerechneten Beugungswinkel für Natrium, Kalium und Rubidium. Sämtliche im Folgenden

**Tabelle 1:** Gemessene und umgerechnete Beugungswinkel von drei verschiedenen Alkali Metallen.

$ \varphi_{\text{Na}}  / ^\circ$	$ \varphi_{\text{K}}  / ^\circ$	$ \varphi_{\text{Rb}}  / ^\circ$
11,6	14,1	7,9
11,5	14,0	7,3
10,2	14,0	
10,1	13,9	
8,4	11,0	
8,3	10,8	
	10,7	
	10,6	

durchgeführten Ausgleichsrechnungen werden mit der *curve fit* Funktion aus dem für *Python* geschriebenen package *NumPy*[2] durchgeführt. Fehlerrechnungen werden mit dem für *Python* geschriebenen package *Uncertainties*[3] ausgeführt.

### 6.1 Bestimmung der Gitterkonstante

Aus den gemessenen Beugungswinkeln bekannter Spektrallinien des Heliums wird im Folgenden auf die Gitterkonstante geschlossen. Die Tabelle 2 listet die zu den jeweils gegebenen Wellenlängen die gemessenen Winkel sowie deren Sinus auf. Eine lineare Regressionsrechnung liefert für diesen Datensatz gemäß Gleichung (21) mit  $k = 1$  dem ersten Beugungsmaximum die Gitterkonstante als Proportionalität zwischen Wellenlänge und dem Sinus des Beugungswinkels. Mit der Geradengleichung

$$f(x) = mx + b$$

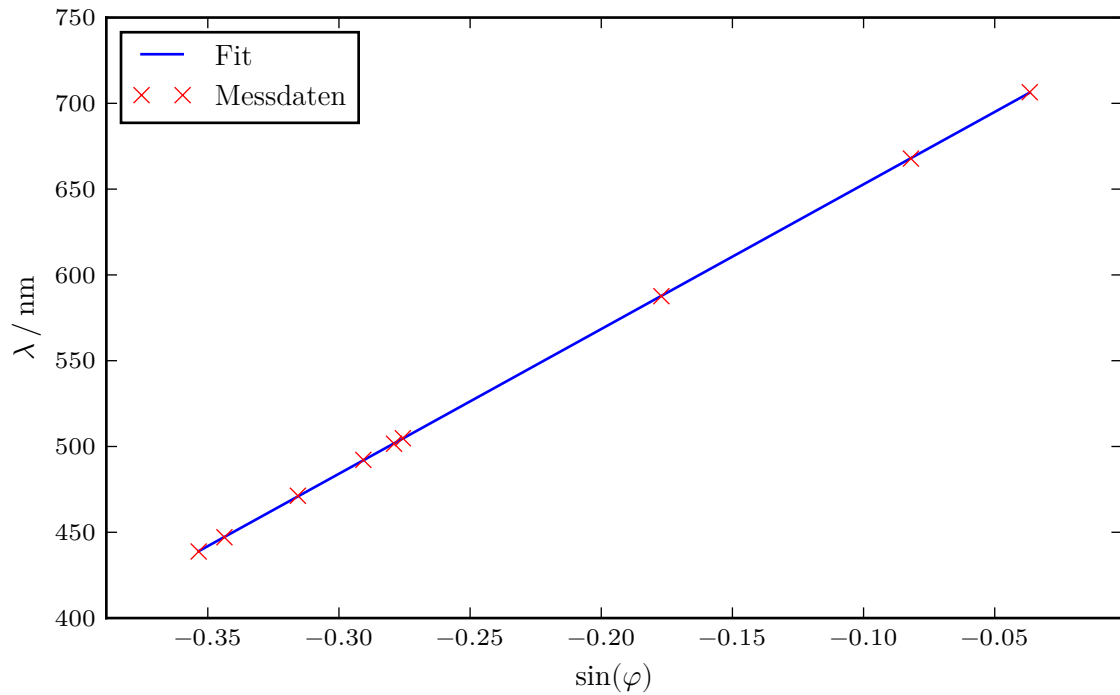
ergibt sich

$$\begin{aligned} m &= g = (843,5 \pm 0,8) \text{ nm} \\ b &= (737,2 \pm 0,2) \text{ nm} \end{aligned}$$

**Tabelle 2:** Messdaten zur Bestimmung der Gitterkonstante.

$\lambda / \text{nm}$	$ \varphi  / \text{rad}$	$ \sin(\varphi) $
438,8	0,361	0,353
447,1	0,351	0,344
471,3	0,321	0,316
492,2	0,295	0,291
501,6	0,283	0,279
504,8	0,279	0,276
587,6	0,178	0,177
667,8	0,082	0,082
706,5	0,037	0,037

Der Graph der auf diese Weise ermittelten Regressionsgeraden ist samt den aufgenommenen Messwerten in Abbildung 8 wiedergegeben.



**Abbildung 8:** Messdaten und Regressionsgerade zur Bestimmung der Gitterkonstanten  $g$ .

## 6.2 Kalibrierungsgröße

Für eine präzisere Messung der Wellenlängendifferenz  $\Delta\lambda$  zwischen zwei Dublettlinien ist die Okularlinse zum Einsatz gekommen. Die auf der Linse angebrachte Skala wird zusammen mit dem Okularmikrometer dazu verwendet, die Winkelauflösung zu erhöhen. Dazu wird jedoch zunächst eine Referenzmessung benötigt, die sich aus jeweils zwei im Spektrum des Heliums dicht beieinander liegender Wellenlängen ergibt. Für die Umrechnung der gemessenen Skalendifferenz  $\Delta s$  wird gemäß (34) der Kalibrierungsterm

$$\chi := \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{t_1 - t_2} \bar{\varphi}_{1,2}$$

benötigt. Die gegebenen Wellenlängen, zugehörigen Winkel und die mit dem Okularmikrometer gemessenen Skalenwerte  $t$  sind in Tabelle 3 wiedergegeben. Die Einheit Skt bezeichnet die im Okularmikrometer zu sehende Skala. Hieraus errechnen sich zwei Werte für  $\chi$ , aus denen sich der

**Tabelle 3:** Messdaten zur Bestimmung der Eichgröße.

$\lambda_1 / \text{nm}$	$ \varphi_1  / \text{rad}$	$t_1 / \text{Skt}^{-1}$	$\lambda_2 / \text{nm}$	$ \varphi_2  / \text{rad}$	$t_2 / \text{Skt}^{-1}$	$ \overline{\varphi_{1,2}}  / \text{rad}$
0,361	438,8	0,4	0,351	447,1	6,4	$0,356 \pm 0,005$
0,283	501,6	2,5	0,279	504,8	0,2	$0,281 \pm 0,002$

Mittelwert

$$\chi = (1,461 \pm 0,001) \text{ nm}$$

ergibt. Der angegebene Fehler ist jedoch mit Vorsicht zu genießen, denn es sind lediglich zwei Messwert-Paare aufgenommen worden.

### 6.3 Abschirmungszahlen

Von besonderem Interesse sind Dublettlinien von Alkali-Metallen, aus deren Vermessung sich die inneren Abschirmungszahlen  $\sigma_2$  ergeben, vgl. Gleichung (12). Hierzu wird die Übergangsenergie  $E_D$  benötigt. Sie ergibt sich aus Gleichung (13) unter Kenntnis der Wellenlängendifferenz  $\Delta\lambda$  der beiden beteiligten Dublettlinien sowie deren mittlerer Wellenlänge  $\bar{\lambda}$ . Die Differenz  $\Delta\lambda$  wird mit Hilfe des Okularmikrometers deutlich präziser bestimmt als durch die vergleichsweise grobe Messung mit Hilfe des Teilkreises. Es folgt unter Kenntnis der Kalibrierungsgröße  $\chi$  aus dem letzten Unterkapitel und Gleichung (34)

$$\Delta\lambda = \chi \cos(\overline{\varphi}) \Delta s .$$

Die gemessenen Skalendifferenzen  $\Delta s$  sind ebenso wie die restlichen benötigten Größen für die Elemente Natrium, Kalium und Rubidium in den Tabellen 4-6 angegeben. Die Wellenlängen berechnen sich aus der Regressionsgeraden aus Kapitel 6.1 und den einzusetzenden gemessenen Beugungswinkeln aus Tabelle 1. Die daraus resultierenden Mittelwerte sind ebenfalls in den unten stehenden Tabellen zu sehen.

Schließlich werden für jedes Dublett die Übergangsenergien  $E_D$  in Gleichung (12) eingesetzt, um die Abschirmungszahlen zu berechnen. Da Übergänge der äußeren Schale betrachtet werden, sind für die Hauptquantenzahl  $n$  die Perioden der jeweiligen Elemente einzusetzen. Die Ordnungszahlen können ebenso direkt dem Periodensystem der Elemente entnommen werden. Die Nebenquantenzahl  $l$  ist in [4] jeweils mit 1 angegeben. Die Abschirmungszahlen für Natrium und

**Tabelle 4:** Messdaten und abgeleitete Größen – Natrium ( $z = 11$   $n = 3$   $l = 1$ ).

$ \overline{\varphi}  / \text{rad}$	$\bar{\lambda} / \text{nm}$	$\Delta s / \text{Skt}$	$\Delta\lambda / \text{nm}$	$\Delta E_D / \text{meV}$	$\sigma_2$
$0,2016 \pm 0,0009$	$568,3 \pm 0,7$	0,45	$0,6444 \pm 0,0007$	$2,474 \pm 0,006$	$7,315 \pm 0,002$
$0,1772 \pm 0,0009$	$588,5 \pm 0,7$	0,37	$0,5323 \pm 0,0005$	$1,905 \pm 0,005$	$7,548 \pm 0,002$
$0,1457 \pm 0,0009$	$614,7 \pm 0,7$	0,39	$0,5639 \pm 0,0006$	$1,851 \pm 0,005$	$7,573 \pm 0,002$

Kalium werden aus den Resultaten der vermessenen Dublettlinien gemittelt und der statistische Fehler des Mittelwertes angegeben. Der systematische Fehler ist deutlich kleiner, vergleiche hierzu die Fehlerwerte für  $\sigma_2$  in den Tabellen. Daher ist es sinnvoll, die statistischen Fehler nicht mit

**Tabelle 5:** Messdaten und abgeleitete Größen – Kalium ( $z = 19$   $n = 4$   $l = 1$ ).

$ \bar{\varphi}  / \text{rad}$	$\bar{\lambda} / \text{nm}$	$\Delta s / \text{Skt}$	$\Delta \lambda / \text{nm}$	$\Delta E_D / \text{meV}$	$\sigma_2$
$0,2452 \pm 0,0009$	$532,4 \pm 0,7$	1,84	$2,609 \pm 0,003$	$11,41 \pm 0,03$	$12,299 \pm 0,004$
$0,2435 \pm 0,0009$	$533,8 \pm 0,7$	1,02	$1,447 \pm 0,001$	$6,29 \pm 0,02$	$13,225 \pm 0,004$
$0,190 \pm 0,002$	$578 \pm 1$	1,36	$1,952 \pm 0,002$	$7,25 \pm 0,03$	$13,017 \pm 0,007$
$0,1859 \pm 0,0009$	$581,3 \pm 0,7$	1,60	$2,298 \pm 0,002$	$8,43 \pm 0,02$	$12,787 \pm 0,004$

**Tabelle 6:** Messdaten und abgeleitete Größen – Rubidium ( $z = 37$   $n = 5$   $l = 1$ ).

$ \bar{\varphi}  / \text{rad}$	$\bar{\lambda} / \text{nm}$	$\Delta s / \text{Skt}$	$\Delta \lambda / \text{nm}$	$\Delta E_D / \text{meV}$	$\sigma_2$
$0,133 \pm 0,005$	$626 \pm 4$	6,33	$9,17 \pm 0,01$	$29,0 \pm 0,4$	$26,99 \pm 0,03$

anzugeben. Für Rubidium hingegen ergibt sich aus einer einzigen Messung kein Mittelwertfehler, sodass hier der systematische Fehler angegeben wird.

$$\sigma_{2,\text{Na}} = 7,5 \pm 0,1$$

$$\sigma_{2,\text{K}} = 12,8 \pm 0,3$$

$$\sigma_{2,\text{Rb}} = 26,99 \pm 0,03$$



## 7 Diskussion

In Ermangelung einer Herstellerangabe für den Wert der Gitterkonstante des verwendeten Reflexionsgitters, lässt sich hierzu nur sagen, dass die gemessene Konstante

$$g = (843,5 \pm 0,8) \text{ nm}$$

im Erwartungsbereich liegt, denn sie ist von der Größenordnung der Wellenlänge des sichtbaren Lichtes und daher zur Sichtbarmachung von Beugungseffekten geeignet. Die Abbildung 8 zeigt, dass die aufgenommenen Messwerte für Helium dem erwarteten linearen Zusammenhang folgen.

Bei der Berechnung der Abschirmungszahlen fällt zunächst auf, dass die Energiedifferenzen  $E_D$  von Kalium mitunter deutliche Unterschiede je nach betrachteter Dublettlinie zeigen. Nominell beträgt hier die größte Abweichung

$$((\Delta E_D)_{\max} - (\Delta E_D)_{\min}) / \overline{\Delta E_D} = (61,3 \pm 0,4) \% ,$$

während auch die Messwerte für Natrium eine Abweichung

$$((\Delta E_D)_{\max} - (\Delta E_D)_{\min}) / \overline{\Delta E_D} = (30,0 \pm 0,3) \%$$

beinhalten. Bereits eine Abschätzung nach Augenmaß hat während des Versuchs den unterschiedlichen Abstand der Dublettlinien vermuten lassen. Die Ursache hierfür bleibt unklar. Da die Energiedifferenz jedoch bloß mit der vierten Wurzel in die Berechnung der Abschirmungszahl einfließt, fällt der Effekt nicht allzu stark ins Gewicht und die vorgenommene Mittelung der Abschirmungszahlen zeigt eine sehr gute Übereinstimmung mit den Literaturwerten in [1].

$$\sigma_{2,\text{Na, mess}} = 7,5 \pm 0,1$$

$$\sigma_{2,\text{Na, lit}} = 7,46$$

$$\sigma_{2,\text{K, mess}} = 12,8 \pm 0,3$$

$$\sigma_{2,\text{K, lit}} = 13,06$$

$$\sigma_{2,\text{Rb, mess}} = 26,99 \pm 0,03$$

$$\sigma_{2,\text{Rb, lit}} = 26,95$$

Insbesondere für Rubidium liegt der Messwert von nur einer vermessenen Dublettlinie tatsächlich sehr nahe an dem Literaturwert. Die Ungenauigkeiten der Messapparatur, welche sich unter anderem in den erwähnten Abweichungen der Energiedifferenzen niederschlagen, rühren vermutlich von den Ableseungenauigkeiten. Insbesondere die Messung mit Hilfe des Okularmikrometers hat sich dabei als vergleichsweise schwierig gestaltet. Das Abzählen von Umdrehungen einer Mikrometerschraube bei gleichzeitiger Konzentration auf das im Okular Sichtbare birgt dabei ein Risiko.

## Literatur

- [1] Ludwig Bergmann und Clemens Schaefer. *Lehrbuch der Experimentalphysik, Bd. 4*. Hrsg. von Wilhelm Raith. Walter de Gruyter GmbH, 1992.
- [2] Eric Jones, Travis E. Oliphant, Pearu Peterson u. a. *SciPy: Open source scientific tools for Python*. Version 0.16.0. URL: <http://www.scipy.org/>.
- [3] Eric O. Lebigot. *Uncertainties: a Python package for calculations with uncertainties*. Version 2.4.6.1. URL: <http://pythonhosted.org/uncertainties/>.
- [4] *TU Dortmund - Fachbereich Physik : Anfängerpraktikum Anleitung zu Versuch Nr. 605*. [http://129.217.224.2/HOMEPAGE/Anleitung\\_AP.html](http://129.217.224.2/HOMEPAGE/Anleitung_AP.html). Nov. 2015.