|A1|

4,5/5

a) $\frac{1}{c}\frac{\partial\eta}{\partial t}+\frac{\partial\eta}{\partial x}$: 1. Ordnung, d.h. bei der 1. Ableitung z.B. von sin ωt ist es nicht egal, ob da sin(+|ω|t) oder sin(−|ω|t) steht. ✓
Hingegen fällt das Minus-Zeichen bei der 2. Ableitung raus.

b) $X = x - ct$, $T = t$

$\Rightarrow \frac{\partial\eta}{\partial x} = \frac{\partial\eta}{\partial X}$, $\frac{\partial\eta}{\partial t} = \frac{\partial\eta}{\partial T} - c\cdot\frac{\partial\eta}{\partial X}$

Transf. der part. Abl. mit $\boxed{\frac{\partial\eta}{\partial y_i} = \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial y_i}}$

in DGL
$\Rightarrow$

$$\frac{1}{c}\left(\frac{\partial\eta}{\partial T} - c\cdot\frac{\partial\eta}{\partial X}\right) + \frac{\partial\eta}{\partial X} + \frac{3}{2h}\eta\frac{\partial\eta}{\partial X} + \frac{h^3}{6}\frac{\partial^3\eta}{\partial X^3} = 0$$

Wähle:
$\Leftrightarrow$
$\phi = \frac{\eta}{h}$

$$\frac{6h}{c}\frac{\partial\phi}{\partial T} + 9\phi\cdot h\cdot\frac{\partial\phi}{\partial X} + h^3\frac{\partial^3\phi}{\partial X^3} = 0$$

Wähle:

$$\cancel{\tau = \frac{c}{h}T\cdot\frac{1}{6} \Rightarrow \frac{\partial\phi}{\partial\tau} = \frac{c}{6h}\frac{\partial\phi}{\partial T}}$$ → Zusatzblatt

$$\cancel{\xi = \frac{1}{h}X \Rightarrow \frac{\partial\phi}{\partial\xi} = \frac{1}{h}\frac{\partial\phi}{\partial\xi}} \quad \text{und} \quad \cancel{\frac{\partial^3\phi}{\partial\xi^3} = \frac{1}{h^3}\frac{\partial^3\phi}{\partial^3\xi}}$$

$$\cancel{\Rightarrow \frac{\partial\phi}{\partial\tau} + 9\phi\frac{\partial\phi}{\partial\xi} + \frac{\partial^3\phi}{\partial\xi^3} = 0}$$

c) $z = \xi - v\tau$; wir gehen aus von $\frac{\partial\phi}{\partial\tau} + 6\phi\frac{\partial\phi}{\partial\xi} + \frac{\partial^3\phi}{\partial\xi^3} = 0$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\tau} = \frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial\tau} = -v\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\xi} = \frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial\xi} = \frac{\partial\phi}{\partial z} \Rightarrow \frac{\partial^3\phi}{\partial\xi^3} = \frac{\partial^3\phi}{\partial z^3}$$

in DGL
$\Rightarrow$

$$-v\frac{\partial\phi}{\partial z} + 6\phi(z)\cdot\frac{\partial\phi}{\partial z} + \frac{\partial^3\phi}{\partial z^3} = 0 \qquad |\int dz$$

$$-v\cdot\phi + 6\cdot\frac{1}{2}\phi^2(z) + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} + c_1 = 0 \qquad |\cdot\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

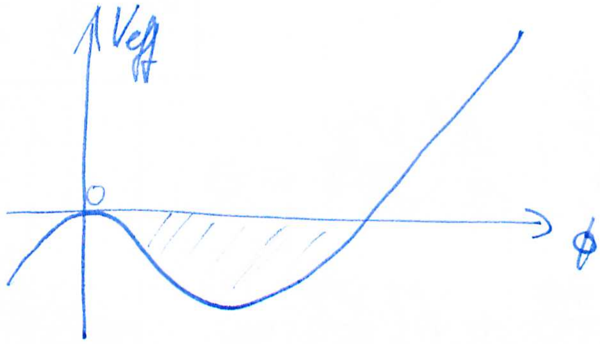
(*)

$$\underbrace{-v\cdot\phi\cdot\frac{\partial\phi}{\partial z}}+\underbrace{3\phi^2\frac{\partial\phi}{\partial z}}+\underbrace{\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\cdot\frac{\partial\phi}{\partial z}}+c_1\cdot\frac{\partial\phi}{\partial z}=0 \qquad \Big|\int dz$$

$$-\frac{v}{2}\phi^2(z)+\phi^3(z)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2+c_1\cdot\phi=c_2 \qquad (**)$$

Aus (*) muss dann folgen: $c_1=0$ da alle anderen Terme der Gl. verschwinden. Damit folgt dann auch aus Gl. (**) $c_2=0$ mit derselben Begründung und $c_1=0$. ✓

d)



Mit $\phi<0$ würde die Auslenkung der Wasseroberfläche dem Potential nach $-\infty$ folgen, es käme zu ∞ großen Geschwindigkeiten und somit wäre das System alles andere als gebunden, was wiederum der Voraussetzung widerspricht. ✓

$$\cosh^2(u)=\frac{v}{2\phi} \quad \to u=\operatorname{arcosh}\left(\sqrt{\frac{v}{2\phi}}\right)$$

$$\Uparrow$$

e) $$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2+\phi^3-\frac{v}{2}\phi^2=0$$

Subst. $\phi=\frac{v}{2}\frac{1}{\cosh^2(u)}$

$\frac{\partial\phi}{\partial z}=\frac{d\phi}{dz}$, da $\phi=\phi(z)$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{d\phi}{dz}\right)^2=v\phi^2-\phi^3\cdot 2$$

$$dz=\frac{1}{\sqrt{v\phi^2-\phi^3\cdot 2}}d\phi=\cancel{\frac{1}{\sqrt{v}}}\ \frac{1}{\phi}\frac{1}{\sqrt{v-\phi\cdot 2}}d\phi$$

$$\frac{d\phi}{du}=-v\cdot\tanh(u)\cdot\operatorname{sech}^2(u)$$

$$\int dz=\int\frac{2\cancel{\cosh^2(u)}}{\cancel{v}}\cdot\frac{-\cancel{v}\cdot\tanh(u)\cancel{\operatorname{sech}^2}}{\cancel{\ldots}\cdot\sqrt{v-\frac{v}{\cancel{2}}\frac{1\cdot 2}{\cosh^2(u)}}}du$$

$$\Leftrightarrow \cosh\left(\frac{z\sqrt{v}}{2}\right)=\sqrt{\frac{v}{2\phi}}$$

$$\Rightarrow \phi=\frac{v}{2\cosh^2\left(\frac{z\sqrt{v}}{2}\right)}$$

$$z=\int\frac{\cancel{4}\,2}{v^{1/2}}\cdot\frac{\sinh(u)}{\sqrt{\cosh^2-1}}du=\int\cancel{4}\,2\cdot v^{-1/2}du=\cancel{4}\,2u\cdot v^{-1/2}=\frac{\cancel{4}\,2}{\sqrt{v}}\operatorname{arcosh}\left(\sqrt{\frac{v}{2\phi}}\right)$$ (✓)

5/5

Hausaufgabe 2)

Geg.: $(\partial_t^2 - v^2 \Delta)\, G(\vec{r}-\vec{r}\,', t-t') = 4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\,\delta(t-t')$

durch Fouriertransformation folgt

linke Seite:

$$\frac{1}{(2\pi)^2}\int d^3k \int d\omega\, (\partial_t^2 - v^2\Delta)\, \tilde{G}(\cancel{\vec{r}-\vec{r}\,'}, \cancel{t-t'})\, e^{-i(\omega t-t') - \vec{k}(\vec{r}-\vec{r}\,'))}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int d^3k \int d\omega \left(\frac{1}{c^2}(-i\omega)^2 - (ik)^2\right) \tilde{G}(\cancel{\vec{r}-\vec{r}\,'}, \cancel{t-t'})\, e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}$$

Vorsicht

sry, schon okay

rechte Seite:

$$\frac{1}{(2\pi)^2}\cdot 4\pi \int d^3k \int d\omega\, \delta(\vec{r}-\vec{r}\,')\,\delta(t-t')\, e^{-i(\omega(t-t')) - \vec{k}(\vec{r}-\vec{r}\,'))}$$

$$= \frac{1}{\pi}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{\pi}\cdot\left(-\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 + k^2\right)^{-1} = \tilde{G}(\cancel{\vec{r}-\vec{r}\,'}, \cancel{t-t'})$$

nicht ganz

b)

Partialbruchzerlegung von $\tilde{G}(\vec{k},\omega)$

$$\frac{1}{\pi}\underbrace{\frac{1}{k^2-\frac{\omega^2}{c^2}}}_{(k-\frac{\omega}{c})(k+\frac{\omega}{c})} = \frac{1}{\pi}\cdot\left(\frac{A}{k-\frac{\omega}{c}} + \frac{B}{k+\frac{\omega}{c}}\right)$$

$$A(k+\omega/c) + B(k-\omega/c) \stackrel{!}{=} 1$$

Fall 1 $k = \frac{\omega}{c}$: $A = \frac{1}{2k} = \frac{c}{2\omega}$

Fall 2 $k = -\frac{\omega}{c}$: $B = -\frac{1}{2k} = -\frac{c}{2\omega}$

$$G(\vec{k},t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{-i\omega t}\, \tilde{G}(\vec{k},\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{-i\omega t}\, \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2k(k-\frac{\omega}{c})} + \frac{1}{2k(k+\frac{\omega}{c})}\right)$$

$$= \frac{c}{\sqrt{2\pi}\,2\pi k}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, e^{-i\omega t}\left(\frac{1}{ck-\omega} - \frac{1}{ck+\omega}\right)$$

Nullstellen: $\omega = ck \pm i\delta$

Wir substituieren $z = \omega - i\delta$; $dz = d\omega$

$$\Rightarrow G(\vec{r},t) = \frac{c}{(2\pi)^{3/2}k}\int_{-\infty}^{\infty} dz\, e^{-izt}\underbrace{\left(\frac{1}{z+ck} - \frac{1}{z-ck}\right)}_{f}$$

Nebenrechnung: (Residuensatz)

$$\mathrm{Res}(f, -ck) = e^{-izt}\Big|_{z=-ck} = e^{ickt}$$

$$\mathrm{Res}(f, ck) = e^{-izt}\Big|_{z=ck} = e^{-ickt}$$

$$\Rightarrow \frac{c}{k(2\pi)^{3/2}} \left(e^{ickt} - e^{-ickt}\right) 2\pi i$$

$$= \frac{ci}{k\sqrt{2\pi}} \left(e^{ickt} - e^{-ickt}\right)$$

$$= \frac{-2c}{2ki\sqrt{2\pi}} \cdot \left(e^{ickt} - e^{-ickt}\right)$$

$$= \frac{-2c}{k\sqrt{2\pi}} \sin(ckt)\, \Theta(t) \quad \checkmark$$

$|\cos n - 1$ 2 2 TV (V)

c)

$$G(\vec r,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3}\int d^3k \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{c}{k}\sin(ckt)\,\Theta(t)\, e^{i\vec k\vec r}$$

mit $dk\,k^2\,d\varphi\,d\Theta\,\sin\Theta = d^3k$ Transformation in Kugelkoordinaten

und $\vec k\vec r = kr\cos\Theta$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3}\int dk\,d\varphi\,d\Theta \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{c}{k}\sin(ckt)\,\Theta(t)\sin(\Theta)\,e^{ikr\cos(\Theta)}k^2$$

mit $-d\Theta\sin\Theta = d\cos\Theta$

$$= \frac{-1}{2\pi}c\,\Theta(t)\cdot 2\pi\int_0^\infty\int_0^\pi dk\,d\cos\Theta\; k\sin(ckt)e^{ikr\cos\Theta}$$

$$= \frac{-1}{\cancel{2}\pi^2}c\,\Theta(t)\cdot 2\pi\cdot\int_{-\infty}^{\infty}dk\,\frac{1}{i\cancel{k}r}\underbrace{\sin(ckt)}_{=\frac{1}{2i}(e^{ickt}-e^{-ickt})}e^{ikr\cos\Theta}$$

$$e^{ikr\cos\Theta}\Big|_0^\pi = e^{-ikr}-e^{ikr}$$

$$= \frac{c}{\pi r}\Theta(t)\,i\int dk\,\frac{1}{2i}\left(e^{ickt}-e^{-ickt}\right)\left(e^{ikr}-e^{ikr}\right)$$

NR $-e^{ickt-ikr}+e^{ickt+ikr}-e^{ickt-ikr}-e^{ickt+ikr}$

einsetzen

$$\Rightarrow \frac{c}{r\pi}\cancel{\Theta(t)}\int_0^\infty \cancel{\tfrac{1}{2}(-e^{-ik(tc+r)}}\;-\;\cancel{+i}\int_0^\infty \tfrac{1}{}$$

$$\frac{c}{r\pi}\Theta(t)\int_0^\infty\frac{1}{2}\Big(\underbrace{-e^{-ik(tc+r)}}\;+\underbrace{e^{-ik(ct-r)}}\Big)+\int_0^\infty\frac{1}{2}e^{ik(ct-r)}-e^{ik(ct+r)}$$

$k := -k$

$dk = -dk$

$$\underset{k\to -k}{=}\; -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0}e^{ik(ct+r)}+\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{2}e^{ik(ct-r)}$$

$$= \frac{c}{r}\Theta(t)\frac{1}{2\pi}\Big(\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}-e^{ik(ct+r)}dk}_{=-\delta(ct+r)2\pi}+\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}e^{ik(ct-r)}dk}_{=\delta(ct-r)2\pi}\Big)$$

$$= \frac{c}{r}\Theta(t)\left(-\delta(ct+r)+\delta(ct-r)\right)$$

$$\frac{1}{c}\int_{-\infty}^{\infty}dt\int_{\infty}^{\infty}d^3r\; j^\mu(rt,\vec r)\,\cancel{\Theta(t)}\,\frac{c}{r}\left[\delta(ct-\tfrac{r}{c}c)-\delta(\cancel{ct}+\tfrac{r}{c}c)\right]$$

$u = ct \quad du = dt\,c \Rightarrow dt = \frac{1}{c}du$

~~Benen~~ Benenne anschließend wieder $u \to t$ ✓

$r = |\vec r - \vec r'|$

$$\Rightarrow = \frac{1}{c}\int_{-\infty}^{\infty}d^3r'\int_0^\infty\frac{1}{c}du\; j^\mu\left(\vec r,\frac{u}{c}\right)\cdot\delta(u-r)\frac{c}{r} = \frac{1}{c}\int_{-\infty}^{\infty}d^3r'\;\frac{j^\mu\left(\vec r, t-\frac{|\vec r-\vec r'|}{c}\right)}{|\vec r-\vec r'|}$$

5)

a) $$A^\mu(x^\mu) = \frac{1}{c}\int dV' \, \frac{j^\mu(\vec r\,') \cdot e^{-i\omega\left(t - \frac{|\vec r - \vec r\,'|}{c}\right)}}{|\vec r - \vec r\,'|} = \underbrace{\frac{1}{c}\cdot e^{-i\omega t}}_{A^\mu(t)} \cdot \underbrace{\int dV' \, \frac{j^\mu(\vec r\,')\cdot e^{i\omega\frac{|\vec r - \vec r\,'|}{c}}}{|\vec r - \vec r\,'|}}_{A^\mu(\vec r)}$$ ✓

b) $$A^\mu(\vec r) = \frac{1}{c}\int dV' \, \frac{j^\mu(\vec r\,')}{|\vec r - \vec r\,'|} e^{i\omega\left|\frac{\vec r - \vec r\,'}{c}\right|}$$

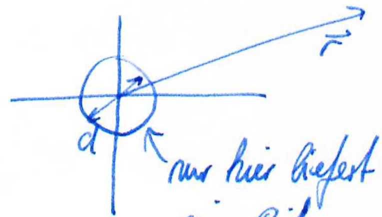
$k = \frac{\omega}{c}$

$$= \frac{1}{c}\cdot \int dV' \, \frac{j^\mu(\vec r\,')}{r - \vec n \vec r\,'} e^{i\omega\frac{r}{c}} e^{-i\omega\frac{\vec n \vec r\,'}{c}} \approx \frac{1}{c} e^{ikr} \int dV' \, \frac{j^\mu(\vec r\,') e^{-ik\vec n \vec r}}{r}$$

$|\vec r - \vec r\,'| = r - \vec n \vec r\,'$ im Fernfeld

im Fernfeld ist $r - \vec n \vec r\,'$ für $\vec r\,' \leq \frac{d}{2}$

$$= \frac{e^{ikr}}{cr}\int dV' \, j^\mu(\vec r\,') e^{-ik\vec n \vec r}$$ ✓



nur hier liefert das Integral einen Beitrag.

$$\Rightarrow A^\mu(\vec r) \sim \frac{1}{r}$$

(auslaufende Kugelwelle und so)

c) $j^0 = c\rho(\vec r\,')$

$$A^0(\vec r) = \frac{e^{ikr}}{cr}\int dV' c\rho(\vec r\,') \underbrace{e^{-ik\vec n \vec r\,'}}_{\approx 1 \text{ (Näherung in 0. Ordn. um 1)}} = \frac{e^{ikr}}{r}\int dV' \rho(\vec r\,') = \frac{e^{ikr}}{r} Q$$ ✓

d) $(19) \to (18)$: $\vec A(\vec r) = -ik\left(\int dV' \vec r\,' \rho(\vec r\,')\right) \cdot \frac{e^{ikr}}{r}$

(16): $A(\vec r) = \frac{e^{ikr}}{cr}\int dV' \vec j(\vec r\,') \cancel{e^{-ik\vec n \vec r\,'}}$

weiter Näherung $e^{-ik\vec n \vec r\,'} \approx 1$ verwenden

$$\Rightarrow -ik\int \vec r\,' \rho(\vec r\,') dV' = \frac{1}{c}\int \vec j(\vec r\,') \cancel{e^{-ik\vec n \vec r\,'}} dV'$$

ach, machst du ja auch !!

(20): $k = \frac{\omega}{c}$

$$\Rightarrow -\frac{1}{c}\int \vec r\,' \nabla \vec j(\vec r\,') dV' = \frac{1}{c}\int \vec j(\vec r\,') \cancel{e^{-ik\vec n \vec r\,'}} \approx \frac{1}{c}\int \underbrace{\vec j(\vec r\,')}_{v} \cdot \underbrace{1}_{u'} \, dV' = \frac{1}{c}\underbrace{\left[\left(\vec r\,' \vec j(\vec r\,')\right)\right]_{-d/2}^{d/2}}_{\text{klein, da } \sim \vec r\,'} - \int \vec r\,' \nabla \vec j$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{c}\int \vec r \rho(\vec r\,') \approx \frac{1}{c}\cdot\left(-\int \vec r\,' \nabla \vec j(\vec r\,')\right)$$ ✓

naja, etwas crazy...

✓

5/5

4

a) $\longmapsto \tilde{x}$ $\qquad \tilde{\vec{x}} := \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{pmatrix}$ $\quad \tilde{x}_i$: Koordinate

5/5

$\longmapsto \tilde{x}_1 \qquad \longmapsto \tilde{x}_2 \qquad \longmapsto \tilde{x}_3$

In der Gleichgewichtslage ist $\tilde{x}_2 - \tilde{x}_1 = y_0$ und $\tilde{x}_3 - \tilde{x}_2 = y_0$

$\Rightarrow \tilde{x}_2 - \tilde{x}_1 - y_0 = 0 \quad$ " $\quad \tilde{x}_3 - \tilde{x}_2 - y_0 = 0$

Dann muss das Federpotential verschwinden. Folglich ist

$$V = \frac{k}{2}(\tilde{x}_2 - \tilde{x}_1 - y_0)^2 + \frac{k}{2}(\tilde{x}_3 - \tilde{x}_2 - y_0)^2$$

Substituiere nun $x_1 = \tilde{x}_1 + y_0$ und $x_2 = \tilde{x}_2$, $x_3 = \tilde{x}_3 - y_0$

$\Rightarrow V = \frac{k}{2}(x_2 - x_1)^2 + \frac{k}{2}(x_3 - x_2)^2$. Es ist $\dot{x}_i = \dot{\tilde{x}}_i$

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_3^2) + \frac{M}{2}\dot{x}_2^2 \qquad \Rightarrow V = \frac{k}{2}(x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3)$$

In Matrizenschreibweise:

$$V = \vec{x}^T \underbrace{k \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{V}}} \vec{x} \cdot \frac{1}{2} \; ; \; T = \frac{1}{2}\dot{\vec{x}}^T \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} m & & 0 \\ & M & \\ 0 & & m \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{T}} =: \underline{\underline{D}}} \dot{\vec{x}}$$

✓

b) ① Diagonalisiere $\underline{\underline{T}}$ ✓

② Führe neue Koord. ein $\quad Q_i = \sqrt{d_i} \cdot x_i \quad$ mit $\vec{d} = \begin{pmatrix} m \\ M \\ m \end{pmatrix}$

$\underline{Q} = \sqrt{\underline{\underline{D}}}\,\underline{x}$, $\quad \underline{Q}^T = \cancel{\sqrt{\underline{\underline{D}}}}\,\underline{x}^T \sqrt{\underline{\underline{D}}}$

$\Leftrightarrow (\sqrt{\underline{\underline{D}}})^{-1}\underline{Q} = \underline{x} \qquad \Leftrightarrow \underline{Q}^T (\sqrt{\underline{\underline{D}}})^{-1} = \underline{x}^T$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\dot{\underline{x}}^T \underline{\underline{D}}\,\dot{\underline{x}} = \frac{1}{2}\dot{\underline{x}}^T \sqrt{\underline{\underline{D}}}\sqrt{\underline{\underline{D}}}\,\underline{x} = \frac{1}{2}\underline{Q}^T\underline{Q}$$

und

$$\frac{1}{2}\underline{x}^T \underline{\underline{V}}\,\underline{x} = \frac{1}{2}\underline{Q}^T \cdot \underbrace{(\sqrt{\underline{\underline{D}}})^{-1} \cdot \underline{\underline{V}} \cdot (\sqrt{\underline{\underline{D}}})^{-1}}_{=: \underline{\underline{\tilde{V}}}}\underline{Q} \qquad \text{mit } (\sqrt{\underline{\underline{D}}})^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{m}} & & \\ & \frac{1}{\sqrt{M}} & \\ & & \frac{1}{\sqrt{m}} \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\tilde{V}}} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{m} & & \\ & 1/\sqrt{M} & \\ & & 1/\sqrt{m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{m} & & \\ & 1/\sqrt{M} & \\ & & 1/\sqrt{m} \end{pmatrix} k = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{m} & -1/\sqrt{m} & 0 \\ -1/\sqrt{M} & 2/\sqrt{M} & -1/\sqrt{M} \\ 0 & -1/\sqrt{m} & 1/\sqrt{m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{m} & & \\ & 1/\sqrt{M} & \\ & & 1/\sqrt{m} \end{pmatrix} \cdot k$$

$$\underline{\underline{\tilde{V}}} = k \cdot \begin{pmatrix} 1/m & -1/\sqrt{Mm} & 0 \\ -1/\sqrt{Mm} & 2/M & -1/\sqrt{mM} \\ 0 & -1/\sqrt{mM} & 1/m \end{pmatrix} = \frac{k}{\sqrt{Mm}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{\frac{M}{m}} & -1 & 0 \\ -1 & 2\sqrt{\frac{m}{M}} & -1 \\ 0 & -1 & \sqrt{\frac{M}{m}} \end{pmatrix}}$$

nach wie vor symmetrisch
→ diag. bar

③ Diagonalisieren von $\tilde{V}$

Fehler bei Anders-Vorlesung!

$$\underline{\underline{O}}^T \underline{\underline{\tilde{V}}} \underline{\underline{O}} = \underline{\underline{\Omega}}_2 = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & & \\ & \omega_2^2 & \\ & & \omega_3^2 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \omega_i^2 = \lambda_i \text{ : Eigenwerte von } \underline{\underline{\Omega}}_2$$

Da $\underline{\underline{\tilde{V}}}$ symm. entsprechen die EW von $\underline{\underline{\Omega}}_2$ denen von $\underline{\underline{\tilde{V}}}$

$$\det(\underline{\underline{\tilde{V}}} - \lambda \underline{\underline{I}}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \det\left(\frac{k}{\sqrt{Mm}}\begin{pmatrix} \sqrt{\frac{M}{m}} & -1 & 0 \\ -1 & 2\sqrt{\frac{m}{M}} & -1 \\ 0 & -1 & \sqrt{\frac{M}{m}} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \lambda & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{k}{\sqrt{Mm}} \cdot \sqrt{\frac{M}{m}} - \lambda\right)^2 \cdot \left(\frac{2k}{M} - \lambda\right) - \left(\frac{k^3}{Mm} \cdot \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m}\right)\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{k^2}{m^2} - 2\frac{k}{m}\lambda + \lambda^2\right) \cdot \left(\frac{2k}{M} - \lambda\right) - \frac{2k^3}{Mm^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \cancel{\frac{2k^3}{Mm^2}} - 4\frac{k^2}{Mm}\lambda + 2\lambda^2\frac{k}{M} - \lambda\frac{k^2}{m^2} + 2\frac{k}{m}\lambda^2 - \lambda^3 \cancel{- \frac{2k^3}{Mm^2}} = 0$$

$$\lambda_1 = 0 \qquad \Rightarrow -\lambda \cdot \left(2k \cdot \left(\frac{1}{M} + \frac{1}{m}\right)\right) + \lambda^2 + k^2 \cdot \left(\frac{4}{Mm} + \frac{1}{m^2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{2/3} = k \cdot \left[\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{m}\right) \pm \sqrt{\underbrace{\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{m}\right)^2 - \left(\frac{4m + M}{Mm^2}\right)}_{=:C}}\right]$$

$$C = \frac{M^2 + 2mM + m^2}{M^2 m^2} - \left(\frac{4mM + M^2}{M^2 m^2}\right) = \frac{m^2 - 2mM}{M^2 m^2} > 0 \quad \text{da } m = m_O > M = m_C$$

$$\Rightarrow \lambda_{2/3} = k\frac{1}{Mm}\left(m + M \pm \sqrt{m^2 - Mm \cdot 2}\right)$$

Man kann sich das Leben auch schwer machen ...

$$\underline{\underline{\tilde{V}}} = \frac{k}{\sqrt{Mm}} \begin{pmatrix} a & -1 & 0 \\ -1 & 2/a & -1 \\ 0 & -1 & a \end{pmatrix} \quad \text{mit } a := \sqrt{\frac{M}{m}}$$

$$\det(\underline{\underline{\tilde{V}}} - \lambda \underline{\underline{I}}) = \begin{vmatrix} a-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & \frac{2}{a}-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & a-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)^2\left(\frac{2}{a}-\lambda\right) - 2\cdot(a-\lambda)$$

$$= (a^2-2a\lambda+\lambda^2)\left(\frac{2}{a}-\lambda\right) - 2(a-\lambda) = \cancel{2a} - \lambda a^2 - 4\lambda - \lambda^3 + 2a\lambda^2 + \frac{2}{a}\lambda^2 - \cancel{2(a}-\lambda) \doteq 0$$

$$\underline{\underline{\lambda_1 = 0}} \quad \Rightarrow \quad a^2 + 2 - \lambda\cdot\left(2a + \frac{2}{a}\right) + \lambda^2 = 0$$

$$\lambda_{2/3} = \frac{k}{\sqrt{Mm}} \cdot \left(a + \frac{1}{a} \pm \sqrt{a^2 + 2 + \frac{1}{a^2} - a^2 - 2}\right)$$

$$= \frac{k}{\sqrt{Mm}} \cdot \left(\frac{a^2+1}{a} \pm \sqrt{\frac{1}{a^2}}\right) \qquad \lambda_2 = \frac{k}{\sqrt{Mm}} \cdot a = \underline{\underline{\frac{k}{m}}}$$

$$\lambda_3 = \frac{k}{\sqrt{Mm}} \cdot \frac{a^2+2}{a} = \underline{\underline{\frac{k\cdot(2+M/m)}{M}}}$$

Algebraische u. geom. Vielfachheit der EW ~~ist~~ sind jeweils 1.

EV zu $\lambda_2 = \frac{k}{m}$ mit $b := \frac{1}{\sqrt{Mm}}$

$$k \cdot \begin{pmatrix} 0 & -b & 0 \\ -b & \frac{2}{a} - \frac{1}{m} & -b \\ 0 & -b & 0 \end{pmatrix} \cdot \underline{u_2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{u_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

EV zu $\lambda_3 = \frac{k}{M}\cdot\left(2+\frac{M}{m}\right)$ mit $e = \frac{1}{m} - \frac{1}{M}\cdot\left(2+\frac{M}{m}\right) = -\frac{2}{M}$

und $f = \frac{2}{M} - \frac{1}{M}\left(2+\frac{M}{m}\right) = -\frac{1}{m}$

$$k\begin{pmatrix} e & -b & 0 \\ -b & f & -b \\ 0 & -b & e \end{pmatrix} \underline{u_3} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} e & -b & 0 \\ 0 & f-\frac{b^2}{e} & -b \\ 0 & -b & e \end{pmatrix} \quad g := f - \frac{b^2}{e} = -\frac{1}{m} + \frac{M}{2Mm} = -\frac{1}{2m}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c|c} \begin{pmatrix} e & -b & 0 \\ 0 & g & -b \\ 0 & 0 & e-\frac{b^2}{g} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array} \end{array}$$

III: $e - \frac{b^2}{2g} = -\frac{2}{M} + \frac{2m}{Mm} = 0$ gut.

I: $\frac{b}{e} = -\frac{M}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{Mm}} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{M}{m}} \Rightarrow v_1 = -\frac{1}{2} a\, v_2$

II: $\frac{b}{g} = \frac{-2m}{\sqrt{Mm}} = -2\sqrt{\frac{m}{M}} \Rightarrow v_2 = -2\frac{1}{a} v_3$

$\Big\}\ v_1 = +\frac{1}{2} a \cdot 2 \frac{1}{a} v_3 = v_3$

ist okay

$$\rightarrow \underline{u_3} = \left(1, -2\sqrt{\frac{m}{M}}, 1\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2+4\frac{m}{M}}}$$

(✓)

Normierung

EV zu $\lambda_1 = 0$

$$\begin{pmatrix} a & -1 & 0 \\ -1 & 2/a & -1 \\ 0 & -1 & a \end{pmatrix} \underline{u}_1 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} a & -1 & 0 \\ 0 & 1/a & -1 \\ 0 & -1 & a \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & -1 & 0 \\ 0 & a & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2+a^2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{\frac{M}{m}} \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2+\frac{M}{m}}}$$

✓

Damit erhalten wir schließlich die Matrix $\underline{\underline{O}}^T = (\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3)$

$$\underline{\underline{O}}^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2+\frac{M}{m}}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2+4\frac{m}{M}}} \\ \sqrt{\frac{M}{2m+M}} & 0 & -2\sqrt{\frac{m}{2M+4m}} \\ \sqrt{\frac{1}{2+\frac{M}{m}}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2+4\frac{m}{M}}} \end{pmatrix}$$

④ Wieder neue Koordinaten, die sogenannten Normalkoordinaten

$\underline{y} = \underline{\underline{O}} \cdot \underline{Q}$ es folgt (und das wurde in der Vorlesung leider nicht erklärt!

$\underline{y}^T = \underline{Q}^T \underline{\underline{O}}$

$\Leftrightarrow \underline{y}^T \underline{\underline{O}}^T = \underline{Q}^T$

$$\dot{\underline{Q}}^T \dot{\underline{Q}} = \dot{\underline{y}}^T \underline{\underline{O}}\,\underline{\underline{O}}^T \dot{\underline{y}} = \dot{\underline{y}}^T \dot{\underline{y}}$$

Ist $\underline{\underline{O}}^T \underline{\underline{O}} = \underline{\underline{I}}$? d.h. $\underline{\underline{O}}^T = \underline{\underline{O}}^{-1}$ ja!

→ Das ist die Begründung!

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{\underline{y}}^T \dot{\underline{y}} - \frac{1}{2}\underline{Q}^T \underline{\underline{\tilde{V}}}\,\underline{Q} = \frac{1}{2}\dot{y}^T\dot{y} - \frac{1}{2}\underline{y}^T \underbrace{\underline{\underline{O}}^T \underline{\underline{\tilde{V}}}\,\underline{\underline{O}}}_{\underline{\underline{\Omega}}_2} \underline{y}$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{\underline{y}}^T \dot{\underline{y}} - \frac{1}{2}\underline{y}^T \underline{\underline{\Omega}}_2 \underline{y}$$

$$= \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{2}(\dot{y}_i)^2 - \frac{\omega_i^2}{2}(y_i)^2$$

c) Euler-Lagrange-Gl.:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_i} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \ddot{y}_i + \omega_i^2 y_i = 0$$

: 2 harmonische Oszillatoren in y (da $\omega_1 = 0$)

Mit den Lösungen für $\omega_2, \omega_3 \neq 0$

$$y_2(t) = A_2 \cos(\omega_2 t + B_2)$$
$$y_3(t) = A_3 \cos(\omega_3 t + B_3)$$

Lösung für y_1:

$$\ddot{y}_1 = 0 \quad | \int dt \int dt$$
$$y_1(t) = A_1 t + B_1$$

Schließlich müssen wir die Koordinatentrafo's wieder rückgängig machen.

- $\underline{y} = \underline{\underline{O}} \cdot \underline{Q} \Rightarrow \underline{Q} = \underline{\underline{O}}^{-1} \underline{y} = \underline{\underline{O}}^{T} \underline{y}$
- $\underline{Q} = \sqrt{\underline{\underline{D}}} \cdot \underline{x} \Rightarrow \underline{x} = (\sqrt{\underline{\underline{D}}})^{-1} \cdot \underline{\underline{O}}^{T} \cdot \underline{y}$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{m} & & 0 \\ & 1/\sqrt{M} & \\ 0 & & 1/\sqrt{m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2+\frac{M}{m}}} & -\sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{2+4\frac{m}{M}}} \\ \sqrt{\frac{1}{2m+M}} & 0 & -2\sqrt{\frac{m}{2M+4m}} \\ \frac{1}{\sqrt{2+\frac{M}{m}}} & \sqrt{\frac{1}{2}} & \frac{1}{\sqrt{2+4\frac{m}{M}}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2m+M}} & -\sqrt{\frac{1}{2m}} & \sqrt{\frac{1}{2m+4\frac{m^2}{M}}} \\ 1/\sqrt{2m+M} & 0 & -2\sqrt{\frac{m}{2M^2+4mM}} \\ \frac{1}{\sqrt{2m+M}} & \sqrt{\frac{1}{2m}} & \frac{1}{\sqrt{2m+4\frac{m^2}{M}}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_1 t + B_1 \\ A_2 \cos(\omega_2 t + B_2) \\ A_3 \cos(\omega_3 t + B_3) \end{pmatrix} = \underline{x} \quad \text{mit } \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \; \omega_3 = \sqrt{\frac{k}{M} \cdot (2 + M/m)}}$$

Interpretation:

Die translatorische Bewegung erfolgt für C und O-Atome mit gleicher Gewichtung (puh). Das sieht man an der ersten Spalte. Die zweite Spalte repräsentiert mit $\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ die Schwingung der O-Atome um das feste C-Atom:

Die dritte Spalte zeigt eine Schwingung, bei der C genau den O-Atomen entgegenschwingt.

Die komplette Diagonalisierung wäre in der Form nicht nötig gewesen, es reicht EW'e und EV'en zu finden & allg. Lösung hinzuschreiben zur b) Wir fordern einfach, dass die 3. Ableitung wie was zur 1. ~~Gl.~~ Ableit. liefert:

$$\frac{3}{2} a f = 6 \to f = \frac{4}{a}$$

$$\frac{1}{6} a^3 f = 1 \to \frac{1}{6} a^3 \cdot \frac{4}{a} = 1 \Rightarrow \frac{3}{2} = a^2 \to \boxed{a = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}}$$

$$\to \boxed{f = \frac{4}{a} = \pm\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot 4}$$

(verwerfe ⊖)

Werden f & a auch irgendwo definiert?

schwer nachvollziehbar aufgeschrieben

DGL:

$$\frac{h}{c}\phi_T + \frac{3}{2}\phi h \phi_x + \frac{1}{6}h^3 \phi_{xxx} = 0 \quad |\cdot f \qquad (*)$$

$$\phi_x = \frac{\partial \phi}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} \quad ;$$

$$\phi_\tau = \phi_T \frac{\partial T}{\partial \tau}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial T}{\partial \tau} \overset{!}{=} \frac{h}{c} \cdot f \Rightarrow T = \tau \cdot \frac{h}{c} \cdot f$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\tau = \frac{c}{hf} T} \checkmark$$

Marius Hotting und Matthias Jaeger

Nachtrag zu 1 b)

(Marius hat's verbaselt!)

$$\frac{\partial^3 \phi}{\partial \xi^3} = \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^3$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^3 \overset{!}{=} h^3 a^{-3}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = h a^{-1} \to x = h a^{-1} \xi$$

$$\boxed{\xi = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{h} x} \checkmark$$

$$(*): \quad f \cdot \frac{h}{c}\phi_T + \frac{3}{2} f h \phi \phi_x + \frac{1}{6} h^3 f \phi_{xxx} = 0$$

kotz würg brech

$$\overset{\text{Trafo}}{\Rightarrow} \quad f \cdot \frac{h}{c} \cdot \frac{c}{hf}\phi_\tau + \frac{3}{2} f h \phi \frac{4}{hf}\phi_\xi + \frac{1}{6} h^3 f \cdot \overbrace{\frac{4}{f h^3}\frac{3}{2}}^{=a^3} \phi_{\xi\xi\xi} = 0$$

passt!