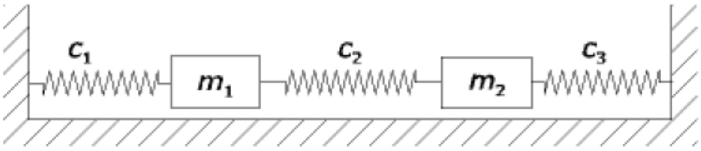
4. Übung zur Physik III — WS 2015/2016

Ausgabe: 4.11.2015 — Prof. Dr. F. Anders
Abgabe: 11.11.2015, 12 Uhr — Prof. Dr. M. Bayer

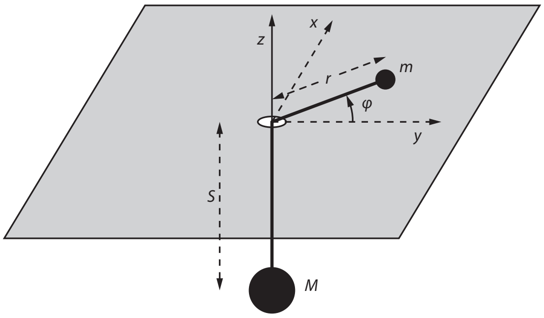
Aufgabe 1: Nochmal: Gekoppelte Massen — 5 Punkte

Zwei Massen m_1 und m_2 sind durch Federn mit den Federkonstanten c_1, c_2 und c_3 miteinander verbunden und bewegen sich nach einer Auslenkung reibungsfrei auf einer Ebene. Stellen Sie die Lagrangefunktion für das System auf und leiten Sie mithilfe der Lagrange'schen Gleichungen die Bewegungsgleichungen für die Massen m_1 und m_2 her.



Aufgabe 2: Rotierende Masse auf Tischplatte — 5 Punkte

Eine Masse m rotiere reibungslos auf einer Tischplatte. Über einen Faden der Länge l ($l = r + S$) sei die Masse m durch ein Loch in der Platte mit einer anderen Masse M verbunden. Wie bewegt sich M unter dem Einfluss der Schwerkraft?



a) Formulieren und klassifizieren Sie die Zwangsbedingungen.

b) Stellen sie die Lagrange-Funktion und ihre Bewegungsgleichungen auf. Bestimmen Sie die beiden Erhaltungsgrößen des Systems.

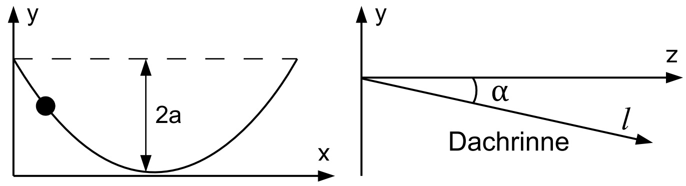
c) Unter welchen Bedingungen rutscht die Masse M nach oben, wann nach unten?

d) Diskutieren Sie den Spezialfall $\omega = 0$.

Aufgabe 3: Punktmasse in Dachrinne — 5 Punkte

Eine Punktmasse gleitet reibungsfrei in einer Dachrinne mit Gefälle unter dem Einfluss des Schwerefeldes. Die Dachrinne hat einen zykloidenförmigen Querschnitt mit der Parameterdarstellung

$$\begin{aligned} x &= a(\theta - \sin\theta) \\ y &= a(1+\cos\theta),\ 0 \le \theta \le 2\pi. \end{aligned} \tag{1}$$



Beachten Sie, dass die y'-Koordinate senkrecht auf der Dachrinnenachse l steht und damit nicht identisch zur y-Koordinate ist.

a) Bestimmen sie die Lagrange-Funktion und die Bewegungsgleichungen für θ und l.

b) Lösen sie die Bewegungsgleichungen für θ und l.

Hinweis: Verwenden Sie bei der Bewegungsgleichung für θ die Additionstheoreme

$$\cos\theta = \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} \qquad \text{und} \qquad \sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \tag{2}$$

Nutzen Sie dann die Substitution $u = \cos\frac{\theta}{2}$. Berechnen Sie $\ddot{u}$ und schreiben Sie Ihre Bewegungsgleichung in Abhängigkeit von u, um sie zu lösen.

Aufgabe 4: Punktmasse im elektromagnetischen Feld — 5 Punkte

Ein Teilchen mit Ladung Q bewege sich in einem elektromagnetischen Feld, beschrieben durch die Potentiale $\vec{A}(q_k, t)$ und $\varphi(q_k, t)$. Seine potentielle Energie ist dann gegeben durch

$$U = Q \cdot \varphi(q_k, t) - Q \sum_j \dot{q}_j \cdot A_j(q_k, t).$$

Benutzen Sie kartesische Koordinaten $(q_1, q_2, q_3) = (x, y, z)$.

a) Von welchen mechanischen Größen hängt das Potential U ab? Welche Abhängigkeit ist Ihnen neu?

b) Stellen Sie die Lagrangefunktion auf.

c) Die generalisierte Kraft Q_k lässt sich berechnen als

$$Q_k = -\frac{\partial U}{\partial q_k} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k}\right).$$

Berechnen Sie Q_k für das gegebene Potential.

d) Zeigen Sie, dass Q_k die aus Physik II bekannte Lorentzkraft ist:

$$\vec{F} = Q \cdot \left[\vec{E}(q_k, t) + \vec{q} \times \vec{B}(q_k, t)\right]$$