A1) a) $\boxed{\omega^2 > \omega_p^2}$: Licht breitet sich im Metall aus mit $e^{i(kz-\omega t)}$, Disp.rel. $\omega^2 = \omega_p^2 + c^2k^2$

$\boxed{\omega^2 < \omega_p^2}$: Licht breitet sich „kaum" aus im Metall, wird gedämpft gem. $e^{i(i\varkappa z-\omega t)}$, Disp.rel. $\omega^2 = \omega_p^2 - c^2\varkappa^2$

Leitungs- 1 Elektr. pro Atom

$\omega_p = \sqrt{\frac{N}{\varepsilon_0 m_e}}\, e$; $N = N_A \cdot \frac{1}{V_{m,Ag}} = N_A \cdot \frac{n}{V} = N_A \cdot \frac{1 \cdot 10^6}{10{,}27} \frac{mol}{m^3}$

$= 1{,}366 \cdot 10^{16}\,Hz$ $\qquad = 5{,}864 \cdot 10^{28} \frac{1}{m^3}$

$\simeq 10\,PHz$ (UV-Bereich)

$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi c}{\lambda}$, $\omega(\lambda = 450nm) \approx 4{,}189 \cdot 10^{+15}\,s^{-1}$

$\omega(\lambda = 650nm) \approx 2{,}9 \cdot 10^{15}\,s^{-1}$

$\omega(\lambda = 700nm) \approx 2{,}693 \cdot 10^{15}\,s^{-1}$

$n(\sqrt{\varepsilon_r}) = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$ $\Rightarrow$ $n_{blau} \approx 1{,}5i$, $n_{rot} \approx 2i$

Senkrechter Lichteinfall $\Rightarrow$ Polarisation des Lichtes spielt keine Rolle

$r_p(\alpha) = \cancel{\frac{n_2 \cos}{}} = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}$

$n_1 = 1$ (Luft) $\quad n_2 = in''$ $\Rightarrow$ $r_p = \frac{in''-1}{in''+1}$, $R = |r_p|^2$ ← Intensität! → Betrag

Amplitudenreflexion Betrag & Phase

$R = \left|\frac{z}{z^*}\right|^2 = 1$

b) $\delta = \frac{1}{\varkappa}$ $\quad \omega^2 = \omega_p^2 - c^2\varkappa^2$

$\Rightarrow \varkappa = \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_p^2}{-c^2}}$

$\Rightarrow \delta_{blau} = 23nm$ Lichter bläulich, da

$\delta_{rot} = 22{,}5nm$ $\quad \delta_{blau} > \delta_{rot}$

c) $I = \frac{1}{100} I_0$ $\quad I \sim (E)^2 \Rightarrow E = \frac{1}{10} E_0$

$E(z,t) = E_0 \cdot e^{-kz - i\omega t}$ $\quad \Leftrightarrow \frac{1}{10} E_0 = E_0 \cdot e^{-kz}$

$E(z, t=0) = E_0 \cdot e^{-kz}$

$\Rightarrow \ldots \; z = \ln(10) \cdot \delta \approx 50nm$

d) Betrachtung Grenzfall $\omega \to \omega_p$ $\quad k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$

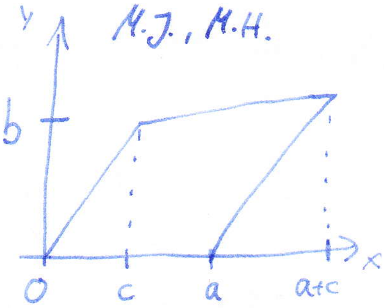
$E(z,t) = E_0 \, e^{i(kz - \omega t)} \underset{t=0}{\Rightarrow} E_0 \cdot e^{i\sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}}}$

$\underline{\omega < \omega_p}$: $e^{\cdots}$ reell, schwächt sich also um $e^{\cdots}$ ab

$\underline{\omega > \omega_p}$: $e^{\cdots}$ komplex, durchlässig

↳ mit $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} \Rightarrow \lambda < \frac{2\pi c}{\omega_p} = 138\,nm$ durchsichtig

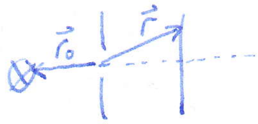
A2] a) **Blatt 14** M.J., M.H.



$$|\tilde{\Psi}(\vec r,\omega)|^2 = \left| c(\vec r,\omega) \int_{\partial V_2} dO\, B(\vec r\,',\omega)\, e^{-ik\vec e_r \vec r\,'} \right|^2$$

mit $c(\vec r,\omega) = ik \frac{A(\omega)}{r r_0} e^{ik(r+r_0)} (1+\cos\alpha')$ in der Fraunhofer-Näherung

$\vec r_0$: Ort der Quelle

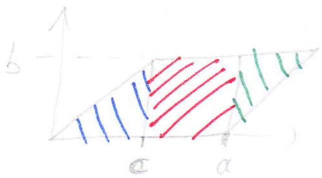


8,5/20

$\cos\alpha' = \frac{\vec r\,' - \vec r}{|\vec r\,' - \vec r|}$: Winkel zw. opt. Achse und $\vec r$

bezeichne $\vec e_r = \vec k = \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \end{pmatrix}$ (nicht der Wellenvektor...) und ignoriere für den Moment $c(\vec r,\omega)$

$$\rightarrow |\tilde\Psi|^2 \cong \left| \int_{\partial V_2} e^{-i\vec k \vec x\,'} B(\vec r\,',\omega)\, dO \right|^2;$$ Zerlege das Parallelogramm:



$B(\vec r\,',\omega) = B(\vec r\,') =$

$\mathbb{1}_{(0,c)} \cdot \mathbb{1}_{(0,x\cdot\frac{b}{c})}$
$+ \mathbb{1}_{(c,a)} \cdot \mathbb{1}_{(0,b)}$
$+ \mathbb{1}_{(a,a+c)} \cdot \mathbb{1}_{((x-a)\cdot\frac{b}{c},\, b)}$

$$|\tilde\Psi|^2 \cong \left| \int_0^c \int_0^{x\cdot\frac{b}{c}} e^{-i\vec k\vec x\,'} dy'dx' + \int_c^a \int_0^b e^{-i\vec k\vec x\,'} dy'dx' + \int_a^{a+c} \int_{(x-a)\frac{b}{c}}^{b} e^{-i\vec k\vec x\,'} dy'dx' \right|^2$$

$$= \left| \frac{-1}{ik_y} \left\{ \int_0^c \left(e^{-i(k_x x' + k_y x'\frac{b}{c})} - e^{-ik_x x'}\right) dx' + \int_c^a \left(e^{-i(k_x x' + k_y b)} - e^{-ik_x x'}\right) dx' + \int_a^{a+c} \left(e^{-i(k_x x' + k_y b)} - e^{-i(k_x x' + k_y (x'-a)\frac{b}{c})}\right) dx' \right\} \right|^2$$

$-\frac{1}{i}$ entfällt wegen $|\,|^2$

$$= \left| \frac{1}{k_y} \left\{ \underbrace{\int_0^a -e^{-ik_x x'} dx}_{A} + \underbrace{\int_c^{a+c} e^{-i(k_x x' + k_y b)} dx'}_{B} + \underbrace{\int_0^c e^{-ix'(k_x + k_y\frac{b}{c})} dx'}_{C} - \underbrace{e^{ik_y\frac{ab}{c}} \cdot \int_a^{a+c} e^{-ix'(k_x + k_y\frac{b}{c})} dx'}_{D} \right\} \right|^2$$

$$= \left| \frac{1}{k_y} \left\{ \left(1 - e^{-ik_x a}\right)\frac{-1}{ik_x} + \frac{-1}{ik_x} e^{-ik_y b} \cdot \left(e^{-ik_x(a+c)} - e^{-ik_x c}\right) + \frac{-1}{i(k_x + k_y\frac{b}{c})}\left(e^{-i(k_x c + k_y b)} - 1\right) + \frac{e^{ik_y\frac{ab}{c}}}{i(k_x + k_y\frac{b}{c})} \cdot \left(e^{-i(k_x(a+c) + k_y(\frac{ab}{c} + b))} - e^{-i(k_x a + k_y\frac{ab}{c})}\right) \right\} \right|^2$$

Wir gehen nochmal einen Schritt zurück und betrachten die Integrale $\int dx'$, wir wissen aus Aufg. 3:

$$\boxed{\int_{-a/2}^{a/2} e^{-ikx}\,dx = \frac{2}{k}\sin\left(k\frac{a}{2}\right)}$$

A: $$\int_0^a e^{-ik_xx'}dx' \underset{x=x'-\frac{a}{2}}{=} \int_{-a/2}^{a/2} e^{-ik_xx}dx \cdot e^{-ik_x\frac{a}{2}} = e^{-ik_x\frac{a}{2}}\frac{2}{k_x}\sin\left(k_x\frac{a}{2}\right)$$

B: $$\int_c^{a+c} e^{-i(k_xx'+k_yb)}dx' \underset{x=x'-c-\frac{a}{2}}{=} \int_{-a/2}^{a/2}\dots = \dots = e^{-i(k_yb+k_x(c+\frac{a}{2}))}\cdot\underbrace{\frac{2}{k_x}\sin\left(k_x\frac{a}{2}\right)}_{=\operatorname{sinc}\left(k_x\frac{a}{2}\right)\cdot a}$$

C: $$\int_0^c e^{-ix'(k_x+k_y\frac{b}{c})}dx' \underset{x=x'-\frac{c}{2}}{=} \int_{-c/2}^{c/2}\dots = e^{-i\frac{c}{2}(k_x+k_y\frac{b}{c})}\underbrace{\frac{2}{k_x+k_y\frac{b}{c}}\sin\left(\left(k_x+k_y\frac{b}{c}\right)\frac{c}{2}\right)}_{=\operatorname{sinc}\left(\frac{k_xc+k_yb}{2}\right)\cdot c}$$

D: $$\int_a^{a+c} e^{-ik_y\frac{ab}{c}}e^{-ix'(k_x+k_y\frac{b}{c})}dx' \underset{x=x'-a-\frac{c}{2}}{=} \int_{-c/2}^{c/2}\dots = \dots = e^{-i(a+\frac{c}{2})(k_x+k_y\frac{b}{c})}\frac{2}{k_x+k_y\frac{b}{c}}\sin\left(\left(k_x+k_y\frac{b}{c}\right)\frac{c}{2}\right)$$

(✓)

$$\Rightarrow |\Psi|^2 = \left|\frac{1}{k_y}\left\{a\operatorname{sinc}\left(k_x\frac{a}{2}\right)e^{-ik_x\frac{a}{2}}\left(e^{-i(k_yb+k_xc)}-1\right) + c\cdot\operatorname{sinc}\left(\frac{k_xc+k_yb}{2}\right)e^{-i\left(\frac{k_xc+k_yb}{2}\right)}\left(1-e^{-ia(k_x+k_y\frac{b}{c})}\right)\right\}\right|^2$$

Denselben Trick hätten wir evtl. schon für die erste Integration nutzen können... egal, Klausur >> Rechnen

b) Nach dem Babinet'schen Prinzip sind beide Intensitätsverteilungen identisch, denn das parallelförmige Hindernis ist das Komplement zu der Blende aus a). ✓

4,5/5

A3) $\tilde{\Psi}_{links}(\vec{r},\omega) = C \int_{-d/2}^{d/2} dx' \, e^{-ik\vec{e}_r \vec{r}'}$

$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} p \\ q \\ u \end{pmatrix}$ $\vec{r}' = \begin{pmatrix} x' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\boxed{p = \frac{x}{z_0}}$ $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$= C \int_{-d/2}^{d/2} dx' \, e^{-ikpx'}$

$= \frac{-C}{ikp}\left(e^{-ikp\frac{d}{2}} - e^{ikp\frac{d}{2}}\right) = \frac{2C}{kp} \cdot \frac{1}{2i}\left(e^{ikp\frac{d}{2}} - e^{-ikp\frac{d}{2}}\right)$

$= \frac{2C}{kp}\sin\left(kp\frac{d}{2}\right)$ ✓

Wir nehmen an, dass der Abstand a viel kleiner als der Abstand der Lichtquelle zum Spalt ist.

$\Rightarrow \tilde{\Psi}_{rechts} = \frac{2C}{k\tilde{p}}\sin\left(k\tilde{p}\frac{d}{2}\right)$ mit $\boxed{\tilde{p} = \frac{x+a}{z_0}}$ ✗

Phasenfaktor $e^{-ia\ldots}$ ändert VZ nicht ⇒ nicht im sin

Korrektur G

a) Da in der Konstellation die Polarisationen genau senkrecht aufeinander stehen, addieren sich die Intensitäten einfach

$$\|\tilde{\Psi}_{ges}\|^2 = \|\tilde{\Psi}_{links}\|^2 + \|\tilde{\Psi}_{rechts}\|^2 = \frac{4C^2}{k^2p^2}\sin^2\left(kp\frac{d}{2}\right) + \frac{4C^2}{k^2\tilde{p}^2}\sin^2\left(k\tilde{p}\frac{d}{2}\right)$$

b)

$$\|\Psi_{ges}\|^2 = \|\Psi_{links} + \Psi_{rechts}\|^2$$

$$= \left(\frac{2C}{kp}\sin\left(kp\frac{d}{2}\right) + \frac{2C}{k\tilde{p}}\sin\left(k\tilde{p}\frac{d}{2}\right)\right)^2$$ (✓) Folgefehler

Das Licht interferiert nun, da die Polarisationsrichtungen identisch sind. ✓

c) für a) : Ein Filter filtert dann alles raus, der andere (links) lässt Licht durch.

$$\|\tilde{\Psi}_{ges}\|^2 = \|\tilde{\Psi}_{links}\|^2 = \frac{4C^2}{k^2p^2}\sin^2\left(kp\frac{d}{2}\right)$$ ✓

für b) : Beide Filter lassen alles durch, d.h. die Gesamtintensität ist doppelt so groß wie in dem Aufgabenteil

b) . Es kommt wieder zu Interferenz.

$$\|\Psi_{ges}\| = 2 \cdot \|\Psi_{ges, b)}$$ ✓

4/5