A2'

11. Übungsblatt Matthias Jaeger, Marius Hölting

| A1 | A2 | A3 | A4 | Σ |
|---|---|---|---|---|
| 4,5 | 5 | 5 | 5 | 19,5/20 |

Super

Hausaufgabe 1: Der Weinkeller

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2}{\partial x^2} T \quad \text{mit } T(x,t) = f(x)g(t) \text{ folgt}$$

$$\frac{\dot g(t)}{g(t)} = k \frac{f''(x)}{f'(x)} = \beta$$

Lösung der 1. DGL.

$$\dot g(t) - \beta g(t) = 0 \Rightarrow g(t) = e^{\beta t} \text{ mit } \beta = i\omega$$

Lösung der 2. DGL

$$f''(x) - \frac{\beta}{k} f(x) = 0 \Rightarrow f(x) = \begin{cases} e^{+\sqrt{\frac{\beta}{k}}x} & \text{Ist unbrauchbar für unsere Zwecke} \\ e^{-\sqrt{\frac{\beta}{k}}x} \end{cases}$$

In die Gleichung $T(x,t) = T_0 + T_1 \cos(\omega t)$ eingesetzt folgt

$$T(x,t) = T_0 + A e^{i\omega t} e^{i\sqrt{\frac{\omega}{k}}x} \quad \text{mit } \sqrt{i} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$$

$$= T_0 + A e^{i\omega t} \underbrace{e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2k}}x}}_{e^{-\frac{x}{L}}} e^{-i\sqrt{\frac{\omega}{2k}}x}$$

k (Wellenzahl)

$$k = \sqrt{\frac{\omega}{2k}} \Rightarrow v = \frac{\omega}{k} = \sqrt{2\omega k}$$

Somit ist die Eindringtiefe $L = \sqrt{\frac{2k}{\omega}}$ und die Eindringgeschwindigkeit $V = \omega L = \sqrt{2\omega k}$

Berechnung des Real-teils:

$$T(x,t) = T_0 + A e^{-\frac{x}{L}} (\cos \omega t + i \sin(\omega t))(\cos(\tfrac{x}{L}) - i \sin(\tfrac{x}{L}))$$

$$T_{echt}(x,t) = Re(T(x,t)) = T_0 + A e^{-\frac{x}{L}} (\cos(\omega t)\cos(\tfrac{\omega}{L}) + \sin(\omega t)\sin(\tfrac{\omega}{L}))$$

mit $A_0 = T_1$ und Additionstheorem folgt

$$T_{echt}(x,t) = T_0 + T_1 e^{-\frac{x}{L}} \cos(\omega t - \tfrac{x}{L}).$$

Mit dieser Formel, $T_1 = 10°C$ und $k = 0{,}08 \frac{m^2}{Tag}$ ergibt sich

① $0{,}1 = T_1 e^{-\frac{x}{L}}$

$$\Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{0{,}1}{T_1}\right)(-L) = \ln\left(\frac{0{,}1}{T_1}\right)\left(-\sqrt{\frac{2k}{\omega}}\right)$$

$$= -0{,}73\,m$$

② $2{,}5 = T_1 e^{-\frac{x}{L}}$ 10°C ist ziemlich wenig im Jahr

$$x = \ln\left(\frac{2{,}5}{T_1}\right)\left(-\sqrt{\frac{+2k}{\omega}}\right) = -4{,}17\,m$$

L, v für Jahres-/Tagesschwankungen? ⇒ zumindest L muss richtig sein (V)

4,5/5

a) Sei $\rho(\vec{r},t) = \rho_1(\vec{r}) \cdot \rho_2(t)$

$$M = \int d^3r\, \rho(\vec{r},t) = \underbrace{\int d^3r\, \rho_1(\vec{r})}_{M} \cdot \rho_2(t) = \rho_2(t) \cdot \int d^3r\, \rho_1(\vec{r})$$

$$\Leftrightarrow \frac{M}{\rho_2(t)} = \int d^3r\, \rho_1(\vec{r}) \quad \Rightarrow \rho_2(t) \stackrel{!}{=} \text{konst.}$$

also keine Zeitabhängigkeit, ungünstig im Sinne der DGL ...

weil M konst. ist und wir $\rho_2(t)$ aufgr. der mangelnden r-Abhängigkeit vors Integral ziehen können.

b)

- $$\frac{\partial \rho(\vec{u},v)}{\partial t} = \frac{\partial \rho(\vec{u}(r,t), v(t))}{\partial t} = (\vec{\nabla}_{\vec{u}} \rho) \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial t}$$

$$= (\vec{\nabla}_{\vec{u}} \rho) \cdot \left(-\frac{1}{2} \frac{\vec{r}}{t\sqrt{Dt}}\right) + \frac{\partial \rho}{\partial v} \cdot 1$$

$$= (\vec{\nabla}_{\vec{u}} \rho) \cdot \left(\frac{-\vec{u}}{2v}\right) + \frac{\partial \rho}{\partial v} = \frac{\partial \rho(\vec{u},v)}{\partial t} \qquad \boxed{(1)}$$

- $$\Delta_{\vec{r}} \rho(\vec{u},v) = \Delta_{\vec{r}} \rho(\vec{u}(\vec{r}),v) = \vec{\nabla}_{\vec{r}}(\vec{\nabla}_r \rho(\vec{u}(\vec{r}),v)) \underset{\text{Kettenregel}}{=} \vec{\nabla}_{\vec{r}}(\vec{\nabla}_{\vec{u}} \rho(\vec{u}(\vec{r}),v) \cdot (\vec{\nabla}_{\vec{r}} \vec{u}))$$

$$= (\vec{\nabla}_{\vec{r}} \vec{\nabla}_{\vec{u}} \rho) \cdot (\vec{\nabla}_{\vec{r}} \vec{u}) + (\vec{\nabla}_{\vec{u}} \rho) \cdot (\Delta_{\vec{r}} \vec{u})$$

$$= (\vec{\nabla}_{\vec{u}} \vec{\nabla}_{\vec{u}} \rho) \cdot (\vec{\nabla}_{\vec{r}} \vec{u}) \cdot (\vec{\nabla}_{\vec{r}} \vec{u}) + (\vec{\nabla}_{\vec{u}} \rho) \cdot (\Delta_{\vec{r}} \vec{u})$$

$$\nabla_{\vec{r}} \vec{u} = \frac{1}{\sqrt{Dt}} = \frac{1}{\sqrt{Dv}} \; ; \quad \Delta_{\vec{r}} \vec{u} = 0$$

$$= (\Delta_{\vec{u}} \rho) \cdot \frac{1}{Dv} = \Delta_{\vec{r}} \rho(\vec{u},v) \qquad \boxed{(2)}$$

---

(1) und (2) einsetzen in Diffusionsgleichung:

$$\frac{-\vec{u}}{2v} \cdot (\vec{\nabla}_{\vec{u}} \rho) + \frac{\partial \rho}{\partial v} = \cancel{D} \cdot \frac{1}{\cancel{D}v} \cdot \Delta_{\vec{u}} \rho \qquad | \cdot v \quad | + \frac{\vec{u}}{2} \cdot (\vec{\nabla}_{\vec{u}} \rho)$$

$$\Longleftrightarrow \quad v \cdot \frac{\partial \rho}{\partial v} = \Delta_{\vec{u}} \rho + \frac{\vec{u}}{2} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{u}} \rho \qquad \boxed{(3)}$$

Aha! Links stehen nur v-Abhängigkeiten, rechts nur $\vec{u}$-Abhängigkeiten.
Auf in die Separation!

$\rho(\vec{u}, v) = F(\vec{u}) \cdot G(v)$ (Ansatz)

Einsetzen in (3) und wie üblich durch $\rho = F \cdot G$ teilen liefert:

$$\frac{1}{G(v)} \cdot \left( v \cdot \frac{\partial G(v)}{\partial v} \right) = \frac{1}{F(\vec{u})} \cdot \left( \Delta_{\vec{u}} F(\vec{u}) + \frac{\vec{u}}{2} \vec{\nabla}_{\vec{u}} F(\vec{u}) \right) =: \alpha$$

Links nur $v$-Abh., rechts nur $\vec{u}$-Abh. Das geht nur wenn beide Seiten konst. sind!

$$\frac{v}{G(v)} \cdot \frac{\partial G(v)}{\partial v} = \alpha \quad \boxed{(4)}$$

und

$$\Delta_{\vec{u}} F(\vec{u}) + \frac{\vec{u}}{2} \nabla_{\vec{u}} F(\vec{u}) - \alpha \cdot F(\vec{u}) = 0 \quad \boxed{(5)}$$

c)

(4) lässt sich durch Trennung der Variablen lösen. Es ist nämlich $\frac{dG(v)}{dv} = \frac{\partial G(v)}{\partial v}$

$$\frac{1}{G(v)} \, dG(v) = \alpha \cdot \frac{1}{v} dv \quad | \int$$

$$\ln(G(v)) = \alpha \cdot \ln(v) \quad (+ \text{ Integr. konst.})$$

$$\Leftrightarrow G(v) = \exp(\alpha \cdot \ln v) = \exp(\ln v^{\alpha}) = v^{\alpha}$$

$$G(v) = v^{\alpha} \quad \boxed{(6)}$$

Das setzen wir jetzt in die Normierungsbedingung ein.

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\vec{r}, t) \, d^3 r$$

Jetzt müssen wir das transformieren:

$$\frac{dr}{du} = \sqrt{Dv} \Rightarrow d^3 r = \sqrt{(Dv)^3} \, d^3 u$$

$$= \int_{\vec{u}(\vec{r} \to -\infty)}^{\vec{u}(\vec{r} \to \infty)} \rho(\vec{u}, v) \cdot (Dv)^{3/2} \, d^3 u$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} F(\vec{u}) \cdot G(v) \cdot (Dv)^{3/2} d^3 u \overset{(6)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} F(\vec{u}) \cdot v^{\alpha} \cdot (Dv)^{3/2} d^3 u = M \quad \boxed{(7)}$$

Mit derselben Argumentation wie der aus a) muss nun die $v$-Abhängigkeit konstant sein.
Das geht hier aber nur für $v^{\alpha} \cdot v^{3/2} \overset{!}{=} v^0 = 1 \Rightarrow \alpha = -\frac{3}{2}$

---

Löst $F(\vec{u}) = C \cdot \exp\left(-\frac{\vec{u}^2}{4}\right)$ die PDGL (5) ? $\to$ Einsetzen!

<u>NR</u>: $\vec{\nabla}_{\vec{u}} F(\vec{u}) = -\frac{\vec{u}}{2} \cdot F(\vec{u})$

$$\Delta_{\vec{u}} F(\vec{u}) = \vec{\nabla}_{\vec{u}} \left( -\frac{\vec{u}}{2} F(\vec{u}) \right) \overset{\text{Produktregel}}{=} F(\vec{u}) \cdot \underbrace{\left( \vec{\nabla}_{\vec{u}} \frac{-\vec{u}}{2} \right)}_{= -\frac{3}{2}} - \frac{\vec{u}}{2} \cdot \underbrace{\vec{\nabla}_{\vec{u}} F(\vec{u})}_{= -\frac{\vec{u}}{2} F(\vec{u})} = F(\vec{u}) \cdot \left( -\frac{3}{2} + \frac{\vec{u}^2}{4} \right)$$

$\cdot \frac{3}{2}$ Punkt (5) dann also:

$$F(\vec{u}) \cdot \left(\frac{\vec{u}^2}{4} - \frac{3}{2}\right) + \frac{\vec{u}}{2} \cdot \left(-\frac{\vec{u}}{2}\right) F(\vec{u}) + \frac{3}{2} F(\vec{u}) = 0$$

$\Rightarrow F(\vec{u}) = C \cdot \exp\left(-\frac{\vec{u}^2}{4}\right)$

$$\Leftrightarrow \quad F(\vec{u}) \cdot \left(\frac{\vec{u}^2}{4} - \frac{\vec{u}^2}{4}\right) + F(\vec{u}) \cdot \left(-\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\right) = 0 \quad ✓ \quad ✓$$

ist Lösung

D) Damit ist

$$\rho(\vec{u}, v) = F(\vec{u}) \cdot G(v) = \frac{C}{\sqrt{v^3}} \cdot \exp\left(-\frac{\vec{u}^2}{4}\right) ✓$$

d)
$$\Rightarrow \rho(\vec{r}, t) = \frac{C}{\sqrt{t^3}} \cdot \exp\left(-\frac{\vec{r}^2}{4Dt}\right) ✓$$

Die Ergänzung von $D^{-3/2}$ ist sinnvoll aufgrund der Normierungsbedingung (7).

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} F(\vec{u}) \cdot D^{3/2} d^3u = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}(\vec{u}) \cdot D^{-3/2} \cdot D^{3/2} d^3u = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}(\vec{u}) d^3u ✓$$

Subst. $\vec{u} = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{\sqrt{4Dt}}$ $\quad \frac{d\vec{u}}{d\vec{r}'} = \frac{-1}{\sqrt{4Dt}} \Rightarrow d^3\vec{r}' = \frac{-1}{8} d^3\vec{u} \left(-\left(\sqrt{4Dt}^3\right)\right)$

$$C(\vec{r}') = C(\vec{r} - \sqrt{4Dt}\,\vec{u}) ✓$$

$\Rightarrow$

$$\frac{1}{\sqrt{(Dt)^3}} \int_{-\infty}^{\infty} C(\vec{r}') \exp\left(-\frac{(\vec{r}-\vec{r}')^2}{4Dt}\right) d^3\vec{r}' = -\int_{\infty}^{-\infty} 8 \cdot C(\vec{r} - \sqrt{4Dt}\,\vec{u}) \cdot \exp(-\vec{u}^2)\, d^3\vec{u} = \rho(\vec{r}, t) ✓$$

$$\rho(\vec{r}, t=0) = 8 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} C(\vec{r} - 0) \cdot \exp(-\vec{u}^2)\, d^3\vec{u} = 8\, C(\vec{r}) \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\vec{u}^2)\, d^3\vec{u}}_{\sqrt{\pi}^3}$$

$$= 8\, C(\vec{r}) \left(\frac{1}{\sqrt{\pi^3}}\right)^{-1} = \rho(\vec{r}, t=0) \quad (✓)$$

e) Punktmasse $\quad \rho(\vec{r}, 0) = m \cdot \delta(\vec{r}) \quad \Rightarrow \quad C(\vec{r}) = \frac{m}{8} \sqrt{\pi^3}^{-1} \delta(\vec{r})$

Einsetzen in (7):

$$\rho(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{(Dt)^3}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{m}{8} \sqrt{\pi^3}^{-1} \delta(\vec{r}') \exp\left(-\frac{(\vec{r}-\vec{r}')^2}{4Dt}\right) d^3\vec{r}'$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(Dt)^3}} \frac{m}{8} \sqrt{\pi^3}^{-1} \exp\left(-\frac{(\vec{r})^2}{4Dt}\right) \quad (✓)$$

5/5

3) a) i) Für die Rechnungen in i) schreiben wir der Faulheit halber $P_\ell = P$ und $\frac{dP}{dx} = P'$

DGL: $$\frac{d}{dx}\left((1-x^2)\frac{dP}{dx}\right) + \ell(\ell+1)P = \underbrace{P''(1-x^2) - 2xP' + \ell(\ell+1)P}_{\circledast}$$

1. Ableitung: $\frac{d}{dx}\circledast$ $(k=2)$

$$= P'''(1-x^2) - 2xP'' - 2xP'' - 2P' + \ell(\ell+1)P'$$

Vorfaktor für $k+1$-Term: $(1-x^2)$

" " $k$ - Term: $-4x$

" " $k-1$ - Term: $-2+\ell(\ell+1)$

2. Ableitung: $\frac{d^2}{dx^2}\circledast$: $(k=3)$

$$= P''''(1-x^2) - 4xP''' - 2xP''' - 4P'' - 2P'' + \ell(\ell+1)P''$$

$(1-x^2)$

$-6x$

$-6+\ell(\ell+1)$

3. Ableitung: $\frac{d^3}{dx^3}\circledast$ $(k=4)$

$$= P'''''(1-x^2) - 2xP'''' - 6xP'''' - 6P''' - 6P''' + \ell(\ell+1)P'''$$

$(1-x^2)$

$-8x$

$-12+\ell(\ell+1)$

Es bildet sich ein Muster ab!

$$a(x,k) = (1-x^2) \checkmark \qquad b(x,k) = -2kx \checkmark$$

$$c(x,k) = \sum_{j=1}^{k-1} -2j + \ell\cdot(\ell+1) = -k\cdot(k-1) + \ell\cdot(\ell+1) \checkmark$$

Gauß-Formel (der kleine Gauß!)

Lediglich $c(x,k)$ ist nicht direkt klar. Aber eine Überprüfung der 4. Ableitung verifiziert, dass $c(x,k=5) = -20+\ell(\ell+1)$ ist.

Nun zeigen wir die Gl. (8) aus der Aufgabe:

$$\frac{d}{dx}\left((1-x^2)^m \frac{d^m}{dx^m}P\right) = -2mx(1-x^2)^{m-1}\frac{d^m}{dx^m}P + (1-x^2)^m\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}P$$

$$= \underbrace{-2mx}_{b(x,m)}(1-x^2)^{m-1}\frac{d^m}{dx^m}P + \underbrace{(1-x^2)}_{a(x)}\cdot(1-x^2)^{m-1}\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}P + (1-x^2)^{m-1}\cdot c(x)\cdot\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}P - (1-x^2)^{m-1}c(x)\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}P$$

Kluges Ergänzen einer Null

$$= (1-x^2)^{m-1}\cdot\underbrace{\left(a(x)\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}P + b(x)\frac{d^m}{dx^m}P + c(x)\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}P\right)}_{=0} - (1-x^2)^{m-1}c(x)\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}P$$

$$= -(1-x^2)^{m-1}\cdot\left(\ell(\ell+1) - m(m-1)\right)\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}P \checkmark$$

schön

ii) $$\int_{-1}^{1} dx\, P_l^m P_{l'}^m = \int_{-1}^{1} \cancel{(-1)^m (-1)^m} (1-x^2)^{\frac{m}{2}+\frac{m}{2}} \left(\frac{d^m}{dx^m} P_l\right)\left(\frac{d^m}{dx^m} P_{l'}\right) dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \underbrace{(1-x^2)^m \left(\frac{d^m}{dx^m} P_l\right)}_{u} \underbrace{\left(\frac{d^m}{dx^m} P_{l'}\right)}_{v'} dx = uv - \int u'v$$

$$u' \underset{\text{Gl. (8)}}{=} -c(m) \cdot (1-x^2)^{m-1} \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} P_l$$

$$= \left[\underbrace{(1-x^2)^m}_{=0 \text{ für } |x|=1} \frac{d^m}{dx^m} P_l \cdot \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} P_{l'}\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} -c(m) \cdot (1-x^2)^{m-1} \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} P_l \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} P_{l'}\, dx$$

$$= +c(m) \cdot \int_{-1}^{1} P_l^{m-1} P_{l'}^{m-1} dx = +c(m) \cdot I_{ll'm-1} = I_{ll'm}$$

$$= +c(m) \cdot \left(c(m-1) \cdot I_{ll'm-2}\right)$$

$$\overset{m \text{ mal}}{=} \prod_{j=1}^{m} c(m) \cdot I_{ll'0} \quad ✓$$

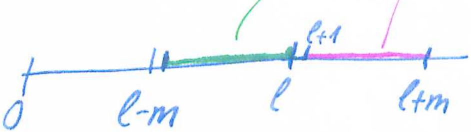
$$\prod_{j=1}^{m} c(m) = \prod_{j=1}^{m} (l+j) \cdot (l-j+1) \quad ✓$$

$$\frac{(l+m)!}{l!} \qquad \frac{l!}{(l-m)!}$$

Es ist folgender Sachverhalt:


$$(a+1) \cdot (a+2) \cdot \ldots \cdot (a+b) = \frac{b!}{a!}$$

Und hier konkret:




$$\Rightarrow \prod_{j=1}^{m} c(m) = \frac{(l+m)!}{l!} \cdot \frac{l!}{(l-m)!} = \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \quad ✓$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{I_{ll'm} = \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \cdot I_{ll'0}}} \quad ✓$$

$$I_{ll'0} = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l \cdot \frac{1}{2^{l'} l'!} \frac{d^{l'}}{dx^{l'}}(x^2-1)^{l'} dx$$

$$= \frac{1}{2^{l+l'} l! \, l'!} \cdot \underbrace{\int_{-1}^{1} \left( \frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l \cdot \frac{d^{l'}}{dx^{l'}}(x^2-1)^{l'} \right) dx}_{*}$$

$\boxed{\text{Fall 1}}$: $l \neq l'$ Wir führen $i$ partielle Integrationen durch mit $0 \leq i \leq l$

$$* = (-1)^i \int_{-1}^{1} \frac{d^{l-i}}{dx^{l-i}}\left((x^2-1)^l\right) \cdot \frac{d^{l'+i}}{dx^{l'+i}}\left((x^2-1)^{l'}\right) dx \qquad \text{(Satz I)}$$

Beweis: Induktion Es ist o.B.d.A. $l > l'$

① $i=0$: ja, passt. Beide Seiten der Gl. sind identisch.

② Induktionsschritt:

$$* = (-1)^i \int_{-1}^{1} \underbrace{\frac{d^{l-i}}{dx^{l-i}}\left((x^2-1)^l\right)}_{v'} \cdot \underbrace{\frac{d^{l'+i}}{dx^{l'+i}}\left((x^2-1)^{l'}\right)}_{u} dx \qquad \text{(Ind.-annahme)}$$

part. Int.

$$= (-1)^i \cdot \left[ \frac{d^{l-i-1}}{dx^{l-i-1}}\left((x^2-1)^l\right) \cdot \frac{d^{l'+i}}{dx^{l'+i}}\left((x^2-1)^{l'}\right) \right]_{-1}^{1}$$

NR

$$- (-1)^i \cdot \int_{-1}^{1} \frac{d^{l-i-1}}{dx^{l-i-1}}\left((x^2-1)^l\right) \cdot \frac{d^{l'+i+1}}{dx^{l'+i+1}}\left((x^2-1)^{l'}\right) dx$$

---

$\boxed{\text{NR}}$ Es gilt für $f(x) = \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$ : $f^{(i)}(x) = (x^2-1)^{n-i} \cdot \underbrace{P_i^*}_{\text{Polynom}}$ $\forall 0 \leq i \leq n-1$

Beweis: 1) Ind.anfang $i=0$ Aussage ist wahr. ($P_i^* = 1$ ist ein Polynom)

2) $\frac{d^{i+1}}{dx^{i+1}} f(x) = 2x(x^2-1)^{n-i-1} \cdot P_i^* + (x^2-1)^{n-i} \cdot \frac{d}{dx} P_i^*$

$$= (x^2-1)^{n-i-1} \cdot \underbrace{\left(2x P_i^* + (x^2-1) \cdot \frac{d}{dx} P_i^*\right)}_{=: P_{i+1}^* \text{ ist auch ein Polynom!}}$$

Dann gilt aber $f^{(i)}(|x|=1) = 0$

Nun ist $l-i-1 =: j$ : $0 \leq j \leq l-1$ (da nach Vorr. $0 \leq i \leq l$)

und daher $\left. \frac{d^{l-i-1}}{dx^{l-i-1}}\left((x^2-1)^l\right) \right|_{-1}^{1} = 0$ $\square$

Weiter im Beweis:

$$* = 0 + (-1)^{i+1} \left( \int_{-1}^{1} \frac{d^{l-i-1}}{dx^{l-i-1}}\left((x^2-1)^l\right) \cdot \underbrace{\frac{d^{l'+i+1}}{dx^{l'+i+1}}\left((x^2-1)^{l'}\right)}_{\text{hier wählen wir } i=l' < l \text{ (nach Vorr. gültig)}} dx \right)$$

$0 \leq i \leq$ und $l > l'$

Dann ist aber die $(2l'+1)$. Ableitung eines Polynoms $(x^2-1)^{l'}$ vom Grad $2l'$ gleich $0$. ✓

Somit ist $I_{ll'0} = 0 \quad \forall\, l \neq l'$ ✓

(Denn die Begründung für $l \leftrightarrow l'$ ist aufgr. der Symmetrie dieselbe.)

$\boxed{\text{Fall 2}}$ $l = l'$

Erneut verwenden wir Satz I:

$$* = (-1)^i \int_{-1}^{1} \frac{d^{l-i}}{dx^{l-i}}\left((x^2-1)^l\right) \cdot \frac{d^{l+i}}{dx^{l+i}}\left((x^2-1)^l\right) dx$$

Wir wählen $i = l$ (Anzahl der partiellen Integrationen)

$$* = (-1)^l \cdot \int_{-1}^{1} (x^2-1)^l \cdot \underbrace{\frac{d^{2l}}{dx^{2l}}\left((x^2-1)^l\right)}\, dx$$

$$= (-1)^l \cdot 2l! \cdot \int_{-1}^{1} (x^2-1)^l dx$$

Die $2l$. Ableitung eines Polynoms vom Grad $2l$ liefert gerade den Vorfaktor des Terms vom Grad $2l$, und zwar $2l$ mal abgeleitet: $\frac{d^{2l}}{dx^{2l}}\left((x^2-1)^l\right) = \frac{d^{2l}}{dx^{2l}} x^{2l} = (2l)!$ ✓

Hierfür führen wir erneut $l$ partielle Integrationen durch. ✓

$$= 2l! \cdot \int_{-1}^{1} (1-x^2)^l dx = 2l! \cdot \int_{-1}^{1} \underbrace{(1-x)^l}_{u} \cdot \underbrace{(1+x)^l}_{v'} dx$$

NR: $u \cdot v = (1-x)^l \cdot (1+x)^{l+1} \cdot \frac{1}{l+1} \Big|_{-1}^{1} = 0$ ✓

$$= 2l! \cdot \frac{l}{l+1} \int_{-1}^{1} (1-x)^{l-1} \cdot (1+x)^{l+1} dx$$

$$= 2l! \cdot \frac{l}{l+1} \cdot \frac{l-1}{l+2} \cdot \int_{-1}^{1} (1-x)^{l-2} (1+x)^{l+2} dx$$

$$= 2l! \cdot \underbrace{\frac{l!}{(l+1) \cdot \ldots \cdot (l+l)}}_{= \frac{l! \cdot l! \cdot (l+1) \cdot \ldots \cdot (l+l)}{(l+1) \cdot \ldots \cdot (l+l)} = l! \cdot l!} \cdot \int_{-1}^{1} (1+x)^{2l} dx = \frac{l! \cdot l!}{2l+1} \left[ (1+x)^{2l+1} \right]_{-1}^{1} = \frac{l! l! \cdot 2^{2l+1}}{2l+1}$$

✓ □

ist $I_{ll0} = \frac{1}{2^{2l} l! l!} \cdot * = \frac{1}{2^{2l} l! l!} \cdot \frac{l! l! \, 2^{2l+1}}{2l+1} = \underline{\underline{\frac{2}{2l+1}}}$ ✓ □

sehr gut

$$I_{ll'0} = \delta_{ll'} \cdot \frac{2}{2l+1}$$ ✓

iv) $$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \; Y^*_{l'm'} Y_{lm}$$

$$= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_{l'}^{m'}(\cos\theta) e^{-im'\phi} \sqrt{\frac{2l'+1}{4\pi} \frac{(l'-m')!}{(l'+m')!}} P_l^m(\cos\theta) e^{im\phi} \qquad (**)$$

- Der Einfachheit halber führen wir zunächst die $\phi$-Integr. durch:

$$\int_0^{2\pi} d\phi \, e^{-im\phi} e^{im'\phi} = \int_0^{2\pi} e^{i\phi(m'-m)} d\phi = \begin{cases} 2\pi &, m = m' \quad \left(\int_0^{2\pi} 1 \, d\phi = 2\pi\right) \\ 0 &, \text{sonst denn } (m-m') \in \mathbb{Z} \text{ und Integration über eine Periode} \end{cases}$$

$$= \delta_{mm'} \cdot 2\pi$$ ✓

- $\theta$-Integration mit $m = m'$ (sonst sowieso 0, wie gesagt)

$$\int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \; P_l^m(\cos\theta) \, P_{l'}^m(\cos\theta) \underset{\substack{x := \cos\theta \\ dx = -\sin\theta}}{=} \int_1^{-1} -dx \, P_l^m(x) \, P_{l'}^m(x) = \int_{-1}^{1} P_l^m(x) \, P_{l'}^m(x) \, dx$$

$x(\theta = \pi) = -1$, $x(\theta = 0) = 1$

$$= I_{ll'm}$$

Die Kronecker-Deltas haben wir damit schonmal. Ist das jetzt auch normiert?
Mit $l = l'$ und $m = m'$ sind die Vorfaktoren aus Gleichung (**)

$$\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} \cdot \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} = \frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}$$

$$\to \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \; \frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m P_l^m e^{i\phi(m-m')} = \delta_{mm'} \cdot 2\pi \cdot I_{ll'm} \cdot \frac{2l+1}{4\pi} \cdot \frac{(l-m)!}{(l+m)!}$$

$$= \delta_{mm'} \underbrace{\delta_{ll'} \frac{4\pi}{2l+1}}_{= I_{ll'0}} \cdot \frac{2l+1}{4\pi} \cdot \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \cdot \underbrace{\frac{(l+m)!}{(l-m)!}}_{\prod_{j=1}^{m} c(m)} = \delta_{mm'} \delta_{ll'}$$ ✓ ☒

b) • $Y_{00}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \cdot P_0^0(\cos\theta) \cdot e^0 = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}$ ✓

mit $P_0^0 = P_0(\cos\theta) = 1$

für $m>0$ ist $(l-m)!$ und damit $Y_{0m}$ nicht definiert.

• $Y_{10}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cdot P_1^0(\cos\theta) \cdot 1 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cdot \cos\Theta$ ✓

mit $P_1^0(\cos\theta) = \frac{d}{d\cos\Theta}(\cos^2\Theta - 1)\frac{1}{2} = 2\cos\Theta \cdot \frac{1}{2} = \cos\Theta$

• $Y_{11}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \cdot P_1^1(\cos\theta)\, e^{i\phi} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\Theta e^{i\phi}$

mit $P_1^1(\cos\theta) = \frac{-1}{2} \cdot \underbrace{(1-\cos^2\Theta)^{1/2}}_{=\sin\Theta} \cdot \underbrace{\frac{d^2}{d\cos\Theta^2}(\cos^2\Theta - 1)}_{=\frac{d}{d\cos\Theta}2\cos\Theta = 2}$

$= -\sin\Theta$

Es ist ferner (auch wenn hier nicht gezeigt) auch $Y_{l,-m}(\theta,\phi)$ definiert:

$$Y_{l,-m}(\theta,\phi) = (-1)^m \, Y^*_{l,m}(\theta,\phi)$$

$\Rightarrow$ • $Y_{1,-1}(\theta,\phi) = -1 \cdot \left(-\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\right) \sin\theta \, e^{-i\phi} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta \, e^{-i\phi}$ ✓

Kugeloberfläche:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \cos\phi \sin\Theta \\ \sin\phi \sin\Theta \\ \cos\Theta \end{pmatrix} = \vec{r}(\phi,\Theta)$$

Es ist $\sin\phi = \frac{1}{2i}(e^{i\phi} - e^{-i\phi})$ ✓

und $\cos\phi = \frac{1}{2}(e^{i\phi} + e^{-i\phi})$ ✓

$\Rightarrow \cos\phi \sin\Theta = \sin\Theta \, \frac{1}{2} e^{i\phi} + \sin\Theta \, \frac{1}{2} e^{-i\phi}$

$= -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{8\pi}{3}} Y_{1,1} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{8\pi}{3}} Y_{1,-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{4\pi}{3}} (Y_{1,1} + Y_{1,-1})$

$\sin\phi \sin\Theta = \sin\Theta \cdot \frac{1}{2i}(e^{i\phi} - e^{-i\phi})$

$= -\frac{1}{\sqrt{2} i} (Y_{1,1} + Y_{1,-1}) \cdot \sqrt{\frac{4\pi}{3}}$

$\cos\Theta = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \cdot Y_{10}$

$$\Rightarrow \vec{r} = R \cdot \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \cdot \begin{pmatrix} -Y_{1,1} + Y_{1,-1} \\ -Y_{1,1} - Y_{1,-1} \\ Y_{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2} i} \\ 1 \end{pmatrix}$$

(✓) 5|5

Hausaufgabe 4

$$C(x,t)|_{t>0} = \frac{A}{\sqrt{2\pi}} e^{-\alpha t} e^{ikx} \quad \text{mit} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = D \Delta \rho$$

$$\Rightarrow \quad -\alpha C(x,t) = -k^2 D\, c(x,t)$$

$$-\alpha = -k^2 D$$

$$C(x,t)|_{t>0} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-k^2 D t} e^{ikx} \, dk \quad (**)$$

$$C(x,0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A(k)}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} \, dk = A(x) \quad (*)$$

b)

$$A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} A(x) dx$$

nach (*) ist $C(x,0) = A(x) = C_0 e^{-\frac{x^2}{\ell^2}}$

$$A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} C_0 e^{-\frac{x^2}{\ell^2}} e^{-ikx} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} C_0 e^{-\frac{1}{\ell^2}(x^2 + ikx\ell^2)} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} C_0 e^{-\frac{1}{\ell^2}\left[\left(x + i\frac{k\ell^2}{2}\right)^2 + \frac{k^2\ell^4}{4}\right]} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{\ell^2}\frac{k^2\ell^4}{4}} C_0 \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{\ell^2}\left(x + i\frac{k\ell^2}{2}\right)^2}}_{\substack{\text{Nach Hinweis} \\ = \sqrt{\pi \ell^2}}}$$

$$= \frac{C_0}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{\ell^2}\frac{k^2\ell^4}{4}} \cdot \sqrt{\pi \ell^2} = \frac{C_0 \ell}{\sqrt{2}} e^{-\frac{k^2\ell^2}{4}}$$

c)

Einsetzen von $A(k)$ in (**)

$$C(x,t)|_{t>0} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{C_0 \ell}{\sqrt{2}} e^{-\frac{k^2\ell^2}{4}} e^{ikx} e^{-k^2 D t} dk$$

$$= \frac{C_0 \cdot \ell}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{k^2\ell^2}{4}} e^{ikx} e^{-k^2 D t} dk$$

$$= \frac{C_0 \cdot \ell}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{k^2\ell^2}{4} + ikx - k^2 D t} dk$$

NR:

$$k^2\left(-\frac{\ell^2}{4} - Dt\right) + ikx$$

$$\Leftrightarrow -\left(\frac{\ell^2}{4} + Dt\right)\left(k^2 - \frac{ikx}{\left(\frac{\ell^2}{4} + Dt\right)}\right)$$

$$\Leftrightarrow -\left(\frac{\ell^2}{4} + Dt\right)\left[\left(k - \frac{ix}{\left(\frac{\ell^2}{2} + 2Dt\right)}\right)^2 + \frac{x^2}{\left(\frac{\ell^2}{2} + 2Dt\right)^2}\right]$$

$$\Rightarrow c(x,t)|_{t>0} = \frac{c_0 \cdot \ell}{2\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{\ell^2}{4}+Dt\right)\left(\frac{x^2}{\left(\frac{\ell^2}{2}+2Dt\right)^2}\right)} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(k-\frac{ix}{\left(\frac{\ell^2}{2}+2Dt\right)}\right)^2 \cdot \left(\frac{\ell^2}{4}+Dt\right)} dk}_{\text{Nach Hinweis}}$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{\left(\frac{\ell^2}{4}+Dt\right)}}$$

$$\Leftrightarrow c(x,t)|_{t>0} = \frac{c_0 \cdot \ell}{2\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{\ell^2}{4}+Dt\right)\left(\frac{x^2}{\left(\frac{\ell^2}{2}+2Dt\right)^2}\right)} \sqrt{\frac{\pi}{\left(\frac{\ell^2}{4}+Dt\right.}}$$ ✓

geht noch einfacher

d) $\frac{c_0 \cdot \ell}{2\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{\left(\frac{\ell^2}{4}+Dt\right)}} = \frac{c_0}{2}$ mit $x=0$ ✓

$$\Leftrightarrow \frac{c_0^2 \cdot \ell^2}{4\pi} \cdot \frac{\pi}{\left(\frac{\ell^2}{4}+Dt\right)} = \frac{c_0^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{c_0^2 \cdot \ell^2}{4} = \frac{c_0^2}{4} \cdot \left(\frac{\ell^2}{4}+Dt\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{c_0^2 \cdot \ell^2}{4} = \frac{c_0^2 \cdot \ell^2}{8\ 16} + \frac{c_0^2 Dt}{2\ 4}$$ ∫

$$\Leftrightarrow t = \frac{3\ell^2}{4D}$$ (✓)

Mit den gegebenen Werten ergibt sich

$t = 18797\,s = 313{,}28\,min = 5{,}22\,Std.$ (✓)

5/5