

PRAKTIKUMSPROTOKOLL DES 26.04.2016

Beugung am Spalt

Thea SCHNEIDER
thea.schneider@udo.edu

Max PERNKLAU
max.pernklau@udo.edu

16. Mai 2016

1 Abstract

Durch Bestrahlung verschiedener Spaltöffnungen mit einem Laser wird die Fraunhoferbeugung untersucht.

2 Theorie

2.1 Licht als Welle

Licht hat sowohl die Eigenschaften eines klassischen Teilchens, als auch die einer klassischen Welle – es unterliegt also dem Prinzip des *Welle-Teilchen-Dualismus* der Quantenphysik. Das sich Licht wie eine Welle verhält, zeigt sich im Experiment besonders anschaulich an seinem Verhalten, wenn es auf eine Öffnung (in einem ansonsten lichtundurchlässigen Hindernissen) trifft, deren Durchmesser innerhalb einiger Größenordnungen der Wellenlänge liegt. Dort tritt Beugung auf und es kann ein für Wellenphänomene typisches Beugungsmuster der Intensität gemessen werden. Die Gesetze der geometrischen Optik erklären dieses Verhalten nicht, da sich Lichtstrahlen in diesem Modell nicht gegenseitig beeinflussen können. Damit wird sowohl Interferenz, als auch Beugung ausgeschlossen. Von Beugung wird daher gesprochen, wenn die Ausbreitung des Lichtes von diesen Gesetzen abweicht. Auch die Betrachtung von Licht als klassische Welle stellt nur eine Näherung dar, da es sich eigentlich nur mit der Quantenmechanik beschreiben lässt. Breitet sich Licht im Vakuum aus, ist es allerdings möglich den Mittelwert über eine große Anzahl von Lichtquanten zu bilden, wodurch die Näherung des Lichts als Welle anwendbar wird.

Betrachtet man Licht also als Welle, kann das *Huygenssche Prinzip* auf ihr Ausbreitungsverhalten angewendet und als Erklärung für das Auftreten von Beugung verwendet werden. Das Prinzip besagt, dass jeder Punkt einer Wellenfront als Ursprung einer neuen kugelförmigen *Elementarwelle* gleicher Phase interpretiert werden kann. Die Einhüllende aller dieser Elementarwellen bestimmt die Wellenfront für jeden späteren Zeitpunkt. Für die Beschreibung eines bestimmten Punktes der Wellenfront zu einem festgelegten Zeitpunkt müssen daher alle in diesem Zeitpunkt ankommenden Elementarwellen überlagert werden. Die weitere Betrachtung wird nun exemplarisch an einem parallelen Spalt als Öffnung durchgeführt, da mit einem geometrisch einfachem Objekt auch die mathematische Beschreibung vereinfacht wird.

2.2 Fresnelsche und Fraunhofersche Beugung

Grundsätzlich kommen zwei in Abbildung 1 skizzierte Versuchsanordnungen für den Einzelspalt in Frage: Die *Fresnelsche Anordnung*, bei der Lichtquelle und Beobachtungsschirm in endlicher Entfernung zum Spalt aufgebaut sind, zeigt, dass die Strahlenbündel divergieren und somit auch Strahlen (im selben Punkt) interferieren können, die vorher unterschiedlich stark gebeugt wurden (siehe Skizze 1 a).

Auf der anderen Seite gibt es die *Fraunhofersche Anordnung*: Hier liegen Lichtquelle und Beobachtungsschirm quasi im Unendlichen, mit der Folge, dass die Strahlen parallel auf den Spalt treffen und somit eine ebene Wellenfront bilden. Als Konsequenz können nur Strahlen im selben Punkt interferieren, die vorher auch unter dem selben Winkel gebeugt wurden (siehe Skizze 1 b). Die mathematische Beschreibung der Fraunhoferschen Beugung ist daher einfacher als die der Fresnelschen Beugung. Im Folgenden wird aus diesem Grund nur noch die Fraunhofersche Anordnung betrachtet.

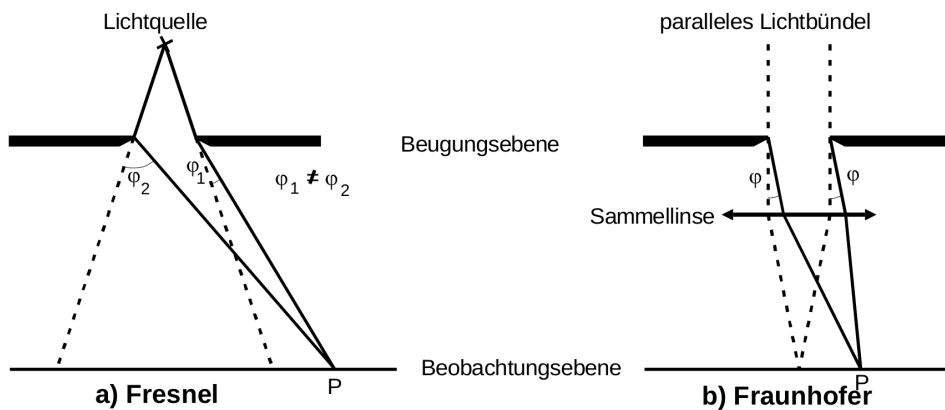


Abbildung 1: Skizze von Fresnelscher (a) und Fraunhoferscher (b) Beugung am Einzelspalt. [Skript V406]

2.3 Beugung am Einzelspalt

Es wird ein Spalt betrachtet, dessen Breite b sehr viel kleiner ist als seine Länge. Das parallel auftreffende Lichtbündel wird dadurch nur in der x -Richtung durch die Breite des Spalts begrenzt. Der Aufbau ist in Abbildung 2 skizziert.

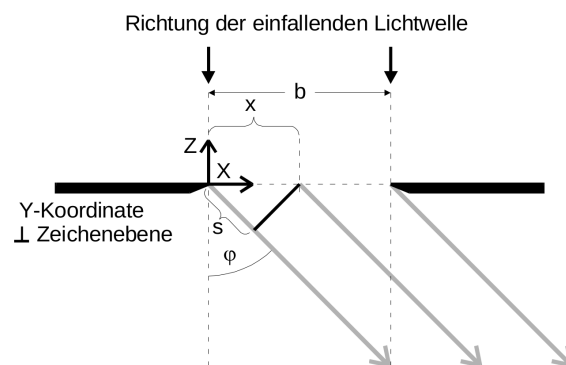


Abbildung 2: Skizze eines Einzelspaltes bei Fraunhoferscher Beugung. [Skript V406]

Auf diesen Spalt trifft eine ebene Welle, die durch die Gleichung

$$A(z, t) = A_0 \exp \left(i \left(\omega t - \frac{2\pi z}{\lambda} \right) \right) \quad (1)$$

beschrieben wird. Auf Grund des *Huygensschen Prinzips* ist klar, dass die Welle an diesem Spalt gebeugt wird. Um die Feldstärke an einem Punkt bestimmen zu können, muss nach Abschnitt 2.1 über alle Strahlenbündel summiert werden, die unter dem selben Winkel φ abgelenkt werden. Der Abstand dieser Strahlenbündel betrage x . Abbildung 2 verdeutlicht, dass der Phasenunterschied zwischen den Strahlenbündeln

$$\delta = \frac{2\pi s}{\lambda} = \frac{2\pi x \sin \varphi}{\lambda} \quad (2)$$

beträgt. Der Abstand der Strahlenbündel ist allerdings infinitesimal klein, daher muss die Summe in eine Integration über die gesamte Spaltbreite b übergehen. Die Feldstärke der in φ -Richtung abgelenkten Strahlenbündel kann also durch

$$B(z, t, \varphi) = A_0 \int_0^b \exp \left(i \left(\omega t - \frac{2\pi z}{\lambda} + \delta \right) \right) dx \quad (3)$$

beschrieben werden. Die Integration sowie einige Umformungsschritte führen für die Feldstärke B auf

$$B(z, t, \varphi) = A_0 \exp \left(i \left(\omega t - \frac{2\pi z}{\lambda} \right) \right) \exp \left(\frac{i\pi b \sin \varphi}{\lambda} \right) \frac{\lambda}{\pi \sin \varphi} \sin \left(\frac{\pi b \sin \varphi}{\lambda} \right). \quad (4)$$

Die Orts- und Zeitabhängigkeit der Feldstärke in Ausbreitungsrichtung wird in Gleichung (4) durch die erste Exponentialfunktion beschrieben. Die zweite Exponentialfunktion ist ein Phasenfaktor, der von der Richtung abhängig ist. Es handelt sich also lediglich um zwei Phasenfunktionen, die für die Intensitätsmessung keine Bedeutung haben. Die Feldstärke B lässt sich aufgrund der hohen Frequenz des Lichts nicht unmittelbar messen, für eine experimentelle Untersuchung ist daher nur die zeitlich gemittelte Intensität $I(\varphi)$ von Interesse. Sie ist proportional zum Betragsquadrat der Feldstärke

$$I(\varphi) \propto |B(\varphi)|^2. \quad (5)$$

Für die Intensität von Licht, das an einem parallelen Einzelspalt gebeugt wurde, folgt daher

$$I(\varphi) = A_0^2 b^2 \left(\frac{\lambda}{\pi b \sin \varphi} \right)^2 \sin^2 \left(\frac{\pi b \sin \varphi}{\lambda} \right). \quad (6)$$

Dabei handelt es sich um einen *Sinus Kardinalis*

$$I(\varphi) \propto \frac{\sin \chi(\varphi)}{\chi(\varphi)}, \quad (7)$$

der die für Beugung typische Intensitätsverteilung liefert (siehe Abbildung 4). Dabei ist $\chi(\varphi) \propto \varphi$.

2.4 Beugung am Doppelspalt

Analog zu der Vorgehensweise in Abschnitt 2.3 kann die Intensitätsverteilung für einen parallelen Doppelspalt berechnet werden. Dafür wird der Doppelspalt als Überlagerung zweier Einzelspalte der Breite b betrachtet, die sich im Abstand s zueinander befinden. Der Aufbau ist in Abbildung 3 skizziert.

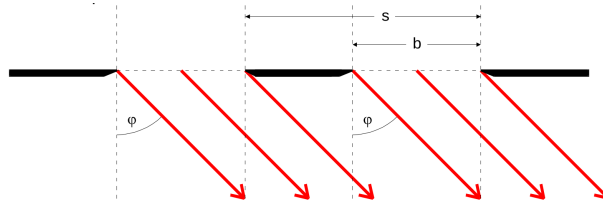


Abbildung 3: Skizze eines Doppelspalts bei Fraunhoferscher Beugung. [Skript V406]

Die Intensitätsverteilung $I(\varphi)$ ergibt sich damit zu

$$I(\varphi) \propto |B(\varphi)|^2 = 4 \cos^2 \frac{\pi s \sin \varphi}{\lambda} \left(\frac{\lambda}{\pi b \sin \varphi} \right)^2 \sin^2 \left(\frac{\pi b \sin \varphi}{\lambda} \right). \quad (8)$$

Sie unterscheidet sich von der Intensitätsverteilung des Einzelspaltes nur in dem \cos^2 -Term. Es entsteht also ein ähnliches Bild für die beiden Intensitätsverteilungen. Durch den \cos^2 -Term ergeben sich aber mehr Minima und Maxima als beim Einzelspalt, dessen Intensitätsverteilung als die Einhüllende der Doppelspaltintensitätsverteilung dargestellt werden kann (siehe Abbildung 4).

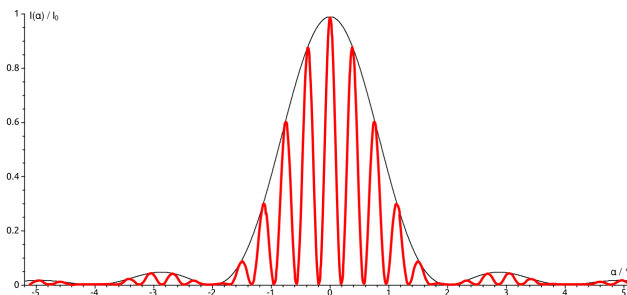


Abbildung 4: Intensitätsverteilung bei Beugung am Einzelspalt (schwarz) und Doppelspalt (rot). [By Klaus-Dieter Keller]

3 Gaußsche Fehlerrechnung

3.1 Berechnung der Standardabweichung

Alle Messwerte sind als empirische Mittelwerte mit ihrer geschätzten Standardabweichung des Mittelwertes angegeben. Diese unterschätzt die wahre Standardabweichung, da die Wurzel aus der geschätzten Varianz gezogen wird. Der arithmetische Mittelwert ist definiert als

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i . \quad (9)$$

Die geschätzte Standardabweichung ist gegeben durch

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \quad (10)$$

mit der geschätzten Standardabweichung des Mittelwertes als

$$\Delta \bar{x} = \frac{s}{\sqrt{n}} \quad (11)$$

3.2 Gaußsche Fehlerfortpflanzung

Das Berechnen von Funktionen mit fehlerbehafteten Parametern erfolgt mittels der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung

$$\Delta f = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{df}{dy_i} \right)^2 (\Delta y_i)^2} \quad \text{mit } f(y_1, \dots, y_n) \quad (12)$$

4 Aufbau und Durchführung

Im Experiment wird ein Dia mit einem Helium-Neon-Laser¹ bestrahlt, auf das ein weißer Spalt belichtet wurde, welcher den Laser beugt. Das Beugungsmuster wird in 93 cm Entfernung mithilfe einer Photodiode vermessen, die auf einem Reiter sitzt. Der Reiter lässt sich in 10 μm -Schritten verschieben. Die Diode ist an ein analoges Strommessgerät angeschlossen.

Auf dem Dia befinden sich drei verschieden breite Spalte und ein Doppelspalt, die alle nach obigen Verfahren vermessen wurden. Zusätzlich wurden mit einem digitalem Mikroskop die Spaltabstände nachgemessen².

¹ $\lambda = 635 \text{ nm}$

²Behelfsmäßig wurde ein fester Rahmen auf dem Bildschirm als “Skala” benutzt, der mit der beim Mikroskop mitgelieferten Eichkarte verglichen wurde. Die verschieden großen Zoomstufen wurden per Schlussrechnung umgerechnet.

5 Auswertung

5.1 Zum Messgerät

Am analogen Strommessgerät lassen sich Werte unterscheiden, bei denen die Nadel auf einen Skalenstrich oder zwischen zwei Skalenstriche zeigt. Entsprechend wurden alle Strommessdaten mit einem Fehler von 5% der Skala versehen.

5.2 Dunkelstrom

Zu Beginn wurde der Dunkelstrom der Diode als 0.1 nA gemessen. Dies liegt einige Größenordnungen unter dem durch den Laser erzeugten Strom und wird deswegen in der weiteren Auswertung nicht berücksichtigt.

5.3 Spaltausmessung mit dem Mikroskop

Im weiteren sind die Spalte nach ihrer Größe absteigend durchnummeriert, der Doppelspalt trägt die Nummer vier.

Es wurden folgende Spaltbreiten mikroskopisch bestimmt:

Tabelle 1: Spaltparameter nach Mikroskopmessung.

Spalt	Breite b in mm	Spaltabstand d in mm
1	0.4	n/a
2	0.16	n/a
3	0.08	n/a
4	0.12	0.48

5.4 Beugungsmuster

Tabelle 2: Fitparameter der Beugungsmuster.

Spalt	Breite b in m	Amplitude in $A^{0.5}$	Offset in rad	Abstand d in m	Sos in A^2
1	$3.57 \cdot 10^{-4}$	$2.07 \cdot 10^{-1}$	$1.43 \cdot 10^{-10}$	n/a	$1.5 \cdot 10^{-7}$
2	$1.23 \cdot 10^{-4}$	$3.51 \cdot 10^{-1}$	$1.32 \cdot 10^{-4}$	n/a	$5.3 \cdot 10^{-9}$
3	$5.60 \cdot 10^{-5}$	$2.96 \cdot 10^{-2}$	$-3.36 \cdot 10^{-4}$	n/a	$1.9 \cdot 10^{-14}$
4	$6.72 \cdot 10^{-5}$	$9.57 \cdot 10^{-4}$	$3.07 \cdot 10^{-10}$	$2.37 \cdot 10^{-4}$	$8.5 \cdot 10^{-8}$

Die Photodiode wurde pro Messung um jeweils 0.5 mm verschoben, vom Hauptmaximum ausgehend etwa 25 mal nach rechts und 25 mal nach links. Die Rohdaten mit den dazu berechneten Winkeln befinden sich im Anhang. Diese Daten wurden auf 6 bzw. 8 gefittet, um u.A. die Spaltbreite zu bestimmen (Tabelle 6); dabei wurde ein Offset auf den Messwinkel addiert, um den Fit

zentrieren zu können. Zudem wurde die Summer der Abweichungsquadrate von den Messwerten gebildet, die ein Maß für die Güte des Fits darstellen.

Zusätzlich wurden alle Fits mit auch geplottet:

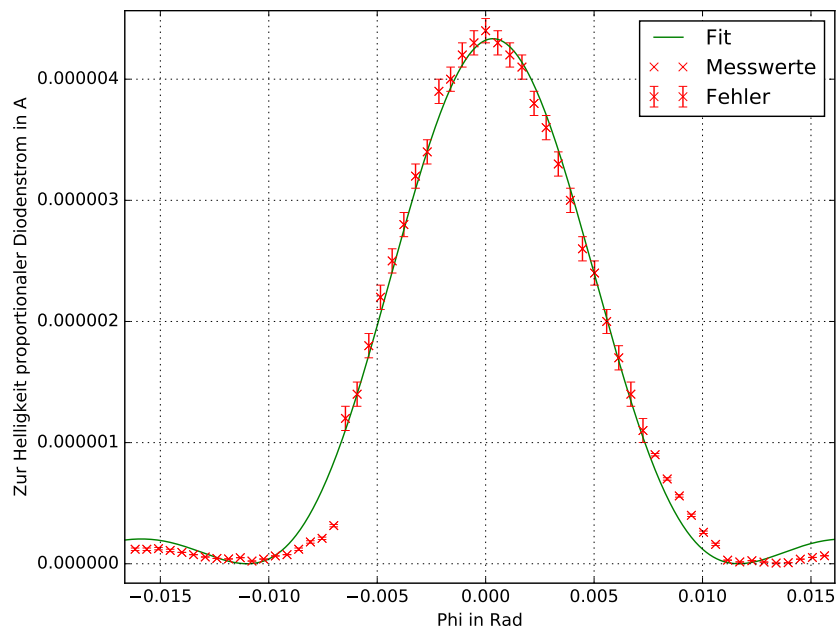


Abbildung 5: Großer Spalt 1

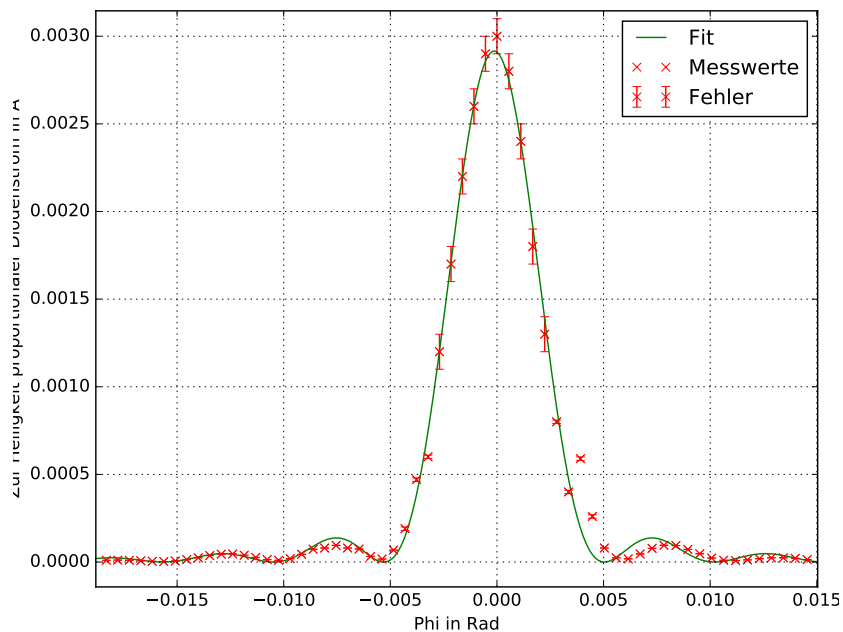


Abbildung 6: Mittelgroßer Spalt 2

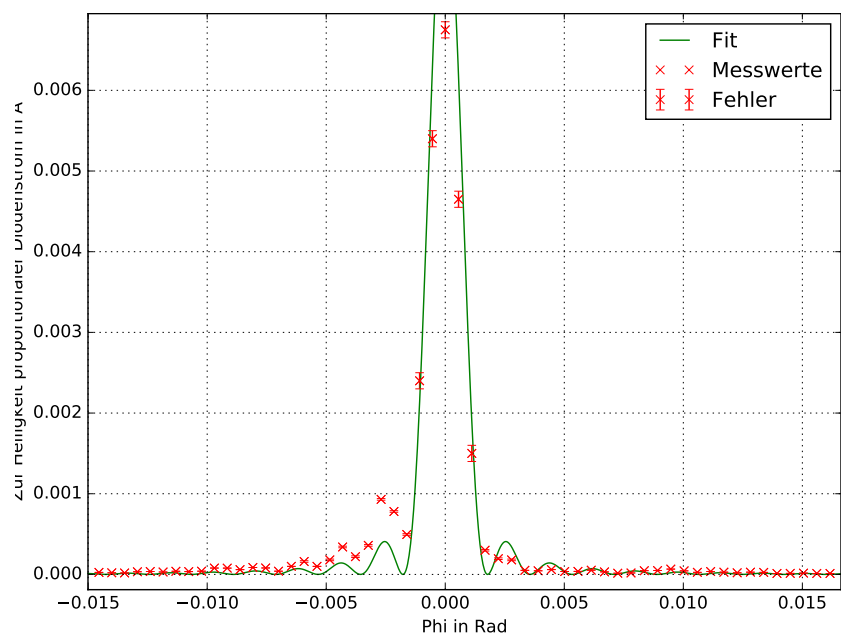


Abbildung 7: Kleiner Spalt 3

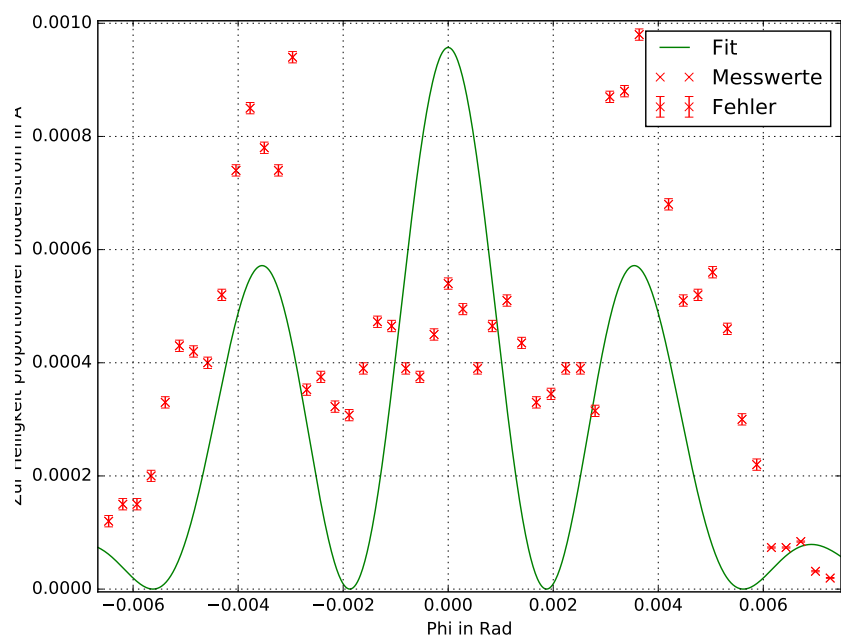


Abbildung 8: Doppelspalt 4

6 Diskussion

Die Mikroskopdaten sind entsprechend der Messmethode ungenau, aber eine notwendige Orientierung zum finden der Fitparameter. Der Rahmen auf dem Bildschirm war recht dick und ließ keine genaue Messung zu. Zudem ist der digitale Zoom des Mikroskops nur sehr grob einstellbar.

Das Fitten der Daten gestaltete sich äußerst aufwendig; der zu fittende Sinus Cardinalis stellt ein großes Problem dar, da die zu minimierende Funktion der Summe der Abweichungsquadrate stark oszilliert und auf kleinen Bereichen viele lokale Minima besitzt, was eine Verwendung von Gradient-orientierten Fitten beinahe ausschließt, da diese hier nicht robust genug sind. Die Autoren benutzten schlussendlich eine modifizierte Version des *Simplex*-Algorithmus in Tandem mit *Mathematicas NonlinearModelFit*, die in der Kürze der Zeit ein noch annehmbares Ergebnis lieferten. Dabei wurde insbesondere darauf geachtet, die Frequenz (des Sinus Cardinalis) der Messdaten möglichst gut zu fitten, da diese für die Spaltbreite bestimmend ist.

Die Messdaten zu den ersten drei Spalten sind gut genug, um die Spaltbreite zu bestimmen. Sie haben etwa 25 % Abweichung zu den mikroskopierte Werten. Es gibt keine Anhaltspunkte, welches der beiden Messverfahren genauer ist.

Die Messdaten des Doppelspalts weichen zu stark von dem nach der Theorie erwarteten Muster ab. Der hindurchgelegte Fit weicht zu stark ab, um aussagekräftig zu sein. Die Messdaten haben mehr den Charakter zwei weit voneinander entfernter Einzelspalte. Schlussendlich konnte nicht erklärt werden, warum der zu erwartende Peak in der Mitte des Diagramms ausbleibt.

6.1 Messdaten

Tabelle 3: Messdaten zu Spalt 1.

Winkel in mrad	Strom in μA	Strom σ in μA
-16.16	0.12	0.010
-15.62	0.12	0.010
-15.09	0.12	0.010
-14.55	0.11	0.010
-14.01	0.09	0.001
-13.47	0.07	0.001
-12.93	0.06	0.001
-12.39	0.04	0.001
-11.85	0.04	0.001
-11.31	0.05	0.001
-10.78	0.02	0.001
-10.24	0.04	0.001
-9.70	0.06	0.001
-9.16	0.07	0.001
-8.62	0.12	0.010
-8.08	0.18	0.010
-7.54	0.21	0.010
-7.00	0.31	0.010
-6.47	1.20	0.100
-5.93	1.40	0.100
-5.39	1.80	0.100
-4.85	2.20	0.100
-4.31	2.50	0.100
-3.77	2.80	0.100
-3.23	3.20	0.100
-2.69	3.40	0.100
-2.16	3.90	0.100
-1.62	4.00	0.100
-1.08	4.20	0.100
-0.54	4.30	0.100
0.00	4.40	0.100
0.56	4.30	0.100
1.12	4.20	0.100
1.67	4.10	0.100
2.23	3.80	0.100
2.79	3.60	0.100
3.35	3.30	0.100
3.91	3.00	0.100
4.46	2.60	0.100
5.02	2.40	0.100
5.58	2.00	0.100
6.14	1.70	0.100
6.70	1.40	0.100
7.25	1.10	0.100
7.81	0.90	0.010
8.37	0.70	0.010
8.93	0.56	0.010
9.49	0.40	0.010
10.04	0.26	0.010
10.60	0.16	0.010
11.16	0.03	0.001
11.72	0.01	0.001
12.28	0.02	0.001
12.83	0.01	0.001
13.39	0.01	0.000
13.95	0.01	0.000
14.51	0.04	0.001
15.07	0.05	0.001
15.62	0.07	0.001

Tabelle 4: Messdaten zu Spalt 2.

Winkel in mrad	Strom in μA	Strom σ in μA
-18.32	10.00	0.100
-17.78	11.00	1.000
-17.24	10.00	0.100
-16.70	7.00	0.100
-16.16	4.00	0.100
-15.62	3.00	0.100
-15.09	6.00	0.100
-14.55	14.00	1.000
-14.01	24.00	1.000
-13.47	37.00	1.000
-12.93	45.00	1.000
-12.39	46.00	1.000
-11.85	39.00	1.000
-11.31	26.00	1.000
-10.78	14.00	1.000
-10.24	10.00	0.100
-9.70	19.00	1.000
-9.16	44.00	1.000
-8.62	73.00	1.000
-8.08	80.00	1.000
-7.54	95.00	1.000
-7.00	80.00	1.000
-6.47	74.00	1.000
-5.93	32.00	1.000
-5.39	17.00	1.000
-4.85	68.00	1.000
-4.31	190.00	10.000
-3.77	470.00	10.000
-3.23	600.00	10.000
-2.69	1200.00	100.000
-2.16	1700.00	100.000
-1.62	2200.00	100.000
-1.08	2600.00	100.000
-0.54	2900.00	100.000
0.00	3000.00	100.000
0.56	2800.00	100.000
1.12	2400.00	100.000
1.68	1800.00	100.000
2.24	1300.00	100.000
2.80	800.00	10.000
3.36	400.00	10.000
3.92	590.00	10.000
4.48	260.00	10.000
5.04	80.00	1.000
5.60	24.00	1.000
6.15	18.00	1.000
6.71	46.00	1.000
7.27	78.00	1.000
7.83	96.00	1.000
8.39	94.00	1.000
8.95	72.00	1.000
9.51	47.00	1.000
10.07	23.00	1.000
10.63	10.00	0.100
11.19	8.00	0.100
11.75	12.00	1.000
12.31	19.00	1.000
12.87	24.00	1.000
13.43	24.00	1.000
13.99	21.00	1.000
14.55	14.00	1.000

Tabelle 5: Messdaten zu Spalt 3.

Winkel in mrad	Strom in μA	Strom σ in μA
-14.55	25.00	1.000
-14.01	20.00	1.000
-13.47	18.00	1.000
-12.93	33.00	1.000
-12.39	36.00	1.000
-11.85	30.00	1.000
-11.31	39.00	1.000
-10.78	35.00	1.000
-10.24	40.00	1.000
-9.70	79.00	1.000
-9.16	78.00	1.000
-8.62	59.00	1.000
-8.08	86.00	1.000
-7.54	80.00	1.000
-7.00	40.00	1.000
-6.47	100.00	1.000
-5.93	160.00	10.000
-5.39	100.00	1.000
-4.85	180.00	10.000
-4.31	340.00	10.000
-3.77	220.00	10.000
-3.23	360.00	10.000
-2.69	930.00	10.000
-2.16	780.00	10.000
-1.62	495.00	10.000
-1.08	2400.00	100.000
-0.54	5400.00	100.000
0.00	6750.00	100.000
0.56	4650.00	100.000
1.11	1500.00	100.000
1.67	300.00	10.000
2.23	195.00	10.000
2.79	180.00	10.000
3.34	51.00	1.000
3.90	45.00	1.000
4.46	60.00	1.000
5.02	36.00	1.000
5.57	37.50	1.000
6.13	52.50	1.000
6.69	31.50	1.000
7.25	15.00	1.000
7.80	18.00	1.000
8.36	46.00	1.000
8.92	48.00	1.000
9.48	66.00	1.000
10.03	44.00	1.000
10.59	26.00	1.000
11.15	36.00	1.000
11.70	28.00	1.000
12.26	20.00	1.000
12.82	28.00	1.000
13.38	25.00	1.000
13.93	12.00	1.000
14.49	13.00	1.000
15.05	16.00	1.000
15.61	12.00	1.000
16.16	12.00	1.000

Tabelle 6: Messdaten zu Spalt 4 (Doppelspalt).

Winkel in mrad	Strom in μA	Strom σ in μA
-6.47	120.00	10.000
-6.20	150.00	10.000
-5.93	150.00	10.000
-5.66	200.00	10.000
-5.39	330.00	10.000
-5.12	430.00	10.000
-4.85	420.00	10.000
-4.58	400.00	10.000
-4.31	520.00	10.000
-4.04	740.00	10.000
-3.77	850.00	10.000
-3.50	780.00	10.000
-3.23	740.00	10.000
-2.96	940.00	10.000
-2.69	352.50	10.000
-2.42	375.00	10.000
-2.16	322.50	10.000
-1.89	307.50	10.000
-1.62	390.00	10.000
-1.35	472.50	10.000
-1.08	465.00	10.000
-0.81	390.00	10.000
-0.54	375.00	10.000
-0.27	450.00	10.000
0.00	540.00	10.000
0.28	495.00	10.000
0.56	390.00	10.000
0.84	465.00	10.000
1.12	510.00	10.000
1.40	435.00	10.000
1.68	330.00	10.000
1.96	345.00	10.000
2.24	390.00	10.000
2.52	390.00	10.000
2.80	315.00	10.000
3.08	870.00	10.000
3.36	880.00	10.000
3.64	980.00	10.000
3.92	920.00	10.000
4.20	680.00	10.000
4.48	510.00	10.000
4.76	520.00	10.000
5.04	560.00	10.000
5.32	460.00	10.000
5.60	300.00	10.000
5.87	220.00	10.000
6.15	73.50	1.000
6.43	73.50	1.000
6.71	84.00	1.000
6.99	31.50	1.000
7.27	19.50	1.000

7 Literaturangabe

Bilder und Daten aus dem Skript zu *Beugung am Spalt*, Versuch 406, TU Dortmund, abrufbar auf:

<http://129.217.224.2/HOMEPrismadispersionPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V406.pdf>

(Stand 30.04.16)

Bild zu *Intensitätsverteilung am Doppelspalt*, By Klaus-Dieter Keller - Own work, created with SciDAVisThis vector image was created with Inkscape., CC BY 3.0, abrufbar auf:

<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=24952635>

(Stand 30.04.16)