8. Übung zur Physik III — WS 2015/2016

Ausgabe: 02.12.2015 Prof. Dr. F. Anders
Abgabe: 09.12.2015 bis 12:00 Prof. Dr. M. Bayer

Hausaufgabe 1: Fouriertransformation — 5 Punkte

Die Fouriertransformation einer Funktion $h(x)$ ist gegeben durch

$$\tilde{h}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x h(x) \exp(-ikx). \tag{1}$$

a) Berechnen Sie $\tilde{h}(k)$ für folgende Funktionen:

   i) $h(x) = \exp(-a|x|)$
   ii) $h(x) = \delta(x - x_0)$

   Tipp: $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \exp(-ax^2) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$

b) Die Faltung $(f * g)(x)$ zweier Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ ist gegeben als

$$(f * g)(x) = \int \mathrm{d}y f(y) g(x - y) \tag{2}$$

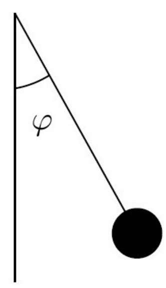
Zeigen Sie, dass sich die Fouriertransformierte der Faltung als Produkt der Fouriertransformierten von $f(x)$ und $g(x)$ schreiben lässt:

$$\widetilde{(f * g)}(k) = \sqrt{2\pi} \tilde{f}(k) \tilde{g}(k) \tag{3}$$

Nutzen Sie dazu an geeigneter Stelle eine Darstellung der δ-Funktion, die sich aus der Rücktransformation der Funktion $F(k) = (2\pi)^{-1/2}$ ergibt.

Hausaufgabe 2: Stabilität und Phasenraum — 5 Punkte

Eine Masse m sei an einer festen Stange der Länge l aufgehängt und schwinge unter Einfluss des homogenen Schwerefeldes der Erde.
Die Bewegung wird beschrieben durch die Gleichungen



$$\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{ml^2}$$
$$\dot{p}_\varphi = -mgl \sin(\varphi) - \alpha p_\varphi$$

mit Reibungskoeffizienten α. Im Folgenden wird unterschieden zwischen dem

- reibungsfreien Fall $\alpha = 0$
- Fall mit Reibung $\alpha \neq 0$

und die Bewegung des Systems analysiert.

a) Finden Sie die Fixpunkte des Systems und klassifizieren Sie diese bezüglich (asymptotischer) (In-)Stabilität mithilfe der Ljapunov-Exponenten.
Hinweis: Bestimmen Sie zuerst die Fixpunkte über $(\dot{\varphi}, \dot{p}_\varphi) = (0, 0)$ *und linearisieren Sie daraufhin die Bewegungsgleichungen um die Fixpunkte herum, sodass Sie diese in der Form* $\dot{\vec{x}} = \underline{\underline{M}}\vec{x}$ *mit* $\vec{x} := (\delta\varphi, \delta p_\varphi)^T$ *schreiben können. Die Eigenwerte von* $\underline{\underline{M}}$ *sind die Ljapunov-Exponenten.*

b) Zeichnen Sie das Phasenraumporträt und machen Sie darin die unterschiedlichen Fixpunkte kenntlich.

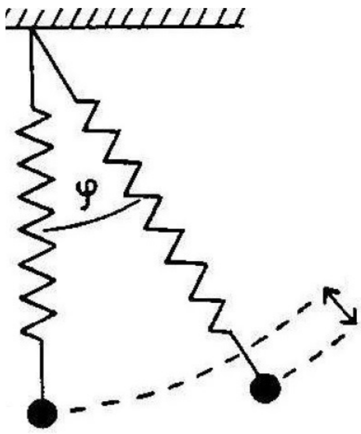
c) Welche Bewegungstypen beschreiben die Phasenraumbahnen? An welcher Stelle des Phasenraumporträts „entsteht“ Chaos?

Beschränken Sie sich jetzt auf den reibungsfreien Fall $\alpha = 0$.

d) Trajektorien dürfen sich nicht schneiden, da die Bewegungsgleichungen deterministisch sind und Schnittpunkte der Trajektorien nicht eindeutige Bahnen liefern würden.
Im Phasenraumporträt scheint es jedoch Schnittpunkte zu geben. An welchen Punkten? Lösen Sie den Widerspruch auf.

e) Besitzt das System eine Erhaltungsgröße $I(\underline{q}, \underline{p})$, so ist diese entlang jeder Phasenraumbahn erhalten und diese Trajektorien können als Höhenlinien der Funktion $I(\underline{q}, \underline{p})$ aufgefasst werden. Die Höhenlinien welcher Funktion $I(\varphi, p_\varphi)$ sind in dem Phasenraumporträt dieses Systems zu sehen?

Hausaufgabe 3: Das schwingende Federpendel — 5 Punkte



Gegeben sei eine masselose Feder mit Federkonstante k und Ruhelänge l_0, die mit ihrem oberen Ende an dem festen Punkt $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ befestigt ist. Wird eine Masse an die Feder gehängt, erreicht die Feder bei $\varphi = 0$ eine Länge $l(x = 0, y = 0, z = 0) = z_0$. Dabei bezeichnet φ den Winkel zwischen z-Achse und Feder, welche auch um den Aufhängepunkt rotieren kann. Die Gravitation wirke in negativer z-Richtung und die Bewegung der Masse sei auf die $y - z$-Ebene beschränkt.

a) Bestimmen Sie die Ruhelage z_0.

b) Bestimmen Sie allgemein die Kräfte F_y und F_z, die an der Masse wirken. Drücken Sie alle Terme durch z, z_0, y und l_0/l aus.

c) Drücken Sie l durch z, z_0 und y aus. Entwickeln Sie l_0/l für

$$\frac{-2zz_0 + y^2 + z^2}{z_0^2} \ll 1 \tag{4}$$

bis zur zweiten Ordnung.

d) Setzen Sie die Entwicklung aus c) in die Kräfte aus b) ein. Vereinfachen Sie soweit wie möglich und vernachlässigen Sie Terme der Form a/z_0^k für $k \geq 3$.

Bringen Sie die Kräfte mit Hilfe von a) auf die Form

$$F_y \approx -\frac{mg}{z_0}y + \frac{kl_0}{z_0^2}yz \tag{5}$$

$$F_z \approx -kz + \frac{kl_0}{2z_0^2}y^2 \tag{6}$$

e) Wie lauten in der Näherung von d) die Bewegungsgleichungen? Führen Sie Abkürzungen für die konstanten Faktoren ein, z.B. $\Omega^2 = g/z_0$. Was passiert für $y \equiv 0$?

f) Die Bewegungsgleichungen aus e) sind analytisch nicht lösbar. Welchen Schluss können Sie dennoch ziehen, wenn Sie in die Bewegungsgleichung von z den Ansatz $\tilde{y} = A\cos(\Omega t)$ einsetzen? Überlegen Sie sich insbesondere, wann das System instabil wird (Stichwort: Resonanzkatastrophe).

Hausaufgabe 4: Instabile Rotationen — 5 Punkte

Kräftefreie Rotationen unsymmetrischer Kreisel sind nur um die Hauptträgheitsachsen des größten oder kleinsten Trägheitsmomentes stabil. Experimentell lässt sich diese Aussage einfach und überzeugend mit Hilfe eines handelsüblichen Taschenbuchs nebst Klebestreifen beweisen. Im Folgenden soll der Beweis mit Hilfe der Eulerschen Gleichungen geführt werden.

a) Stellen Sie die Eulerschen Gleichungen im Fall verschwindender Drehmomente auf. Zeigen Sie, dass die so gewonnenen Gleichungen bei Drehungen mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um eine beliebige Hauptträgheitsachse stabile Rotationen beschreiben.

b) Gehen Sie nun von einer anfänglich reinen Rotation um die erste Hauptträgheitsachse mit Winkelgeschwindigkeit ω_0 aus. Infolge einer äußeren Störung werde den Winkelgeschwindigkeiten ω_i $(i = 1, 2, 3)$ kleine Störgrößen $\delta\omega_i(t)$ überlagert. Setzen Sie die gestörten Größen in die Eulerschen Gleichungen ein.

   Da kleine Störungen betrachtet werden, können Produkte der Störgrößen vernachlässigt werden. Die Zeitentwicklung $\delta\omega_i(t)$ lässt sich mit Hilfe der resultierenden Differentialgleichungen bestimmen. Finden Sie einen geeigneten Ansatz und lösen Sie die Differentialgleichungen!

c) Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse aus b): Wie müssen die Hauptträgheitsachsen gewählt werden, um stabile Rotationen um die betrachtete Hauptträgheitsachse zu erhalten? Welche Wahl führt zu instabilen Rotationen?