12. Übung zur Physik III — WS 2015/2016

Ausgabe: 13.01.2016 — Prof. Dr. F. Anders
Abgabe: 20.01.2016 bis 12:00 — Prof. Dr. M. Bayer

Hausaufgabe 1: Solitonen — 5 Punkte

Die Korteweg-de Vries-Gleichung

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{3}{2h}\eta\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{h^2}{6}\frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0 \tag{1}$$

beschreibt das Verhalten einer Wasserwelle in einem flachen Kanal. c beschreibt die Geschwindigkeit linearer Wellen im Grenzfall großer Wellenlänge, η die Auslenkung der Wasseroberfläche aus der Gleichgewichtslage und h die Wassertiefe im Gleichgewicht.

a) Die herkömmliche Wellengleichung

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0 \tag{2}$$

beschreibt sowohl links- als auch rechtslaufende Wellen $k = \pm\omega/c$. Rechtfertigen Sie (ohne lange Rechnung), warum ersten beiden Terme der KdV-Gleichung nur Lösungen in eine Richtung ergeben.

b) Bringen Sie die Gleichung (1) auf die dimensionslose Form

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + 6\Phi\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \xi^3} = 0, \tag{3}$$

in der die KdV-Gleichung üblicherweise dargestellt wird. Dabei gilt die Definition $\Phi := \frac{\eta}{h}$. Tipp: Führen Sie erst die Transformation $X = x - ct$ und $T = t$ durch!

c) Für Lösungen der KdV-Gleichung, bei denen sich eine Welle mit konstanter Geschwindigkeit v bewegt, ohne dabei ihre Form zu ändern, gilt $\Phi(\xi, \tau) = \Phi(z)$ mit $z = \xi - v\tau$. Schreiben Sie (3) in Abhängigkeit von z auf.
Leiten Sie aus der z-abhängigen Form der Gleichung (3) die Differentialgleichung

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2 + \Phi^3 - \frac{v}{2}\Phi^2 + c_1\Phi = c_2 \tag{4}$$

her. Gehen Sie dabei folgendermaßen vor:

- Integrieren Sie die z-abhängige Form der Gleichung (3) zunächst einmal
- Multiplizieren Sie danach die Gleichung mit $\frac{\partial \Phi}{\partial z}$
- Integrieren Sie noch mal

Bei räumlich lokalisierten Lösungen gehen Φ, $\frac{\partial \Phi}{\partial z}$ und $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$ betragsmäßig große z gegen Null. Wieso vereinfacht sich (4) dann zu

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2 + \Phi^3 - \frac{v}{2}\Phi^2 = 0\ ? \tag{5}$$

d) Gleichung (5) lässt sich als Pseudoenergiegleichung $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2 + V_{\text{eff}}(\Phi) = \text{const.}$ mit dem Pseudopotential V_{eff} auflassen. Zeichnen Sie V_{eff} in Abhängigkeit von Φ (für $v > 0$) und erläutern Sie kurz mithilfe dieses Graphen (ausgehend vom Gleichgewicht $\Phi = 0$), warum es keine solitären Wellen (d.h. gebundene Lösungen) mit negativ Φ gibt! Welche Form können solitäre Wellen also nicht haben?

e) Lösen Sie (5) mit $\Phi = \frac{v}{2}\text{sech}^2(u)$ als Substitution! Zur Vereinfachung wird bei der Rechnung die Relation $\cosh^2(u) - \sinh^2(u) = 1$ benötigt.

Hausaufgabe 2: Greensche Funktionen der Wellengleichung 5 Punkte

Es soll die inhomogene Wellengleichung

$$\left(\partial_t^2 - v^2\Delta\right) A^\nu = \frac{4\pi}{c} j^\nu(\vec{r}, t) \tag{6}$$

mittels Greensfunktionen gelöst werden. Hier handelt es sich um ein Beispiel aus der Elektrodynamik. A^ν ist das Viererpotential $A^\nu = (\Phi/c, \vec{A})^T$ mit dem skalaren Potential Φ und j^ν ist der Viererstrom $j^\nu = (c\rho, \vec{j})^T$ mit der Ladungsdichte ρ.

a) Diese Gleichung kann mit einer Greensfunktion vom Typ $G(\vec{r}, \vec{r}') = (|\vec{r} - \vec{r}'|)^{-1}$ gelöst werden. Für die Greensfunktion gilt

$$\left(\partial_t^2 - v^2\Delta\right) G(\vec{r} - \vec{r}', t - t') = 4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}')\delta(t - t'). \tag{7}$$

Leiten Sie daraus die Greensche Funktion $G(\vec{k}, \omega)$ her.
Benutzen Sie dazu die Zerlegung der Greenschen Funktion in Fouriermoden auf der linken Seite und die Darstellung der Delta Funktion über das Integral einer e-Funktion auf der rechten.
Kontrollergebnis:

$$G(\vec{k}, \omega) = \frac{1}{\pi}\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)^{-1} \tag{8}$$

b) Berechnen Sie die retardierte Greensche Funktion $G^{(+)}(\vec{k}, t)$.
Die Greensfunktion aus Glg. (8) wird zunächst in den Zeitraum zurücktransformiert. Es ist ratsam, vor der Fouriertransformation auf die Greensfunktion zunächst eine Partialbruchzerlegung anzuwenden. Bei der Fouriertransformation selbst muss darauf geachtet werden, dass es sich hierbei um ein divergentes Integral handelt, das wir aber leicht durch Verschiebung der Pole ins Komplexe $\omega \to z = \omega \pm \mathrm{i}\delta$ mit $\delta \to 0$ regularisieren können.
Das Integral

$$G(\vec{k}, t) = \frac{c}{k\sqrt{(2\pi)^3}} \int \mathrm{d}z \mathrm{e}^{-\mathrm{i}zt}\left(\frac{1}{z + ck} - \frac{1}{z - ck}\right) \tag{9}$$

kann in ein geschlossenes Konturintegral umgewandelt werden und mit dem Residuensatz gelöst werden.
Hier soll nur die retardierte Lösung $G^{(+)}(\vec{k}, t)$ betrachtet werden. Bei retardierte Lösung kann die Inhomogenität als ein Sendeprozess der Wellen aufgefasst werden. Die retardierte Greensche Funktion ergibt sich durch Integration über die untere komplexe Halbebene. Deswegen wird $z = \omega - \mathrm{i}\delta$ gewählt. Es ergibt sich nur ein Beitrag für $t > 0$; für $t < 0$ wird die Kontur in der oberen Halbebene geschlossen. Da sie dort keine Pole umfasst, verschwindet die Greensche Funktion.
Kontrollergebnis:

$$G^{(+)}(\vec{k}, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{c}{k}\sin(ckt)\Theta(t). \tag{10}$$

c) Zum Schluss sollen Sie das Vektorpotential über die Greensche Funktion ausdrücken.
Dazu muss zunächst $G^{(+)}(\vec{k}, t)$ durch eine Fouriertransformation aus dem Impulsraum in den Ortsraum überführt werden.
Kontrollergebnis:

$$G^{(+)}(\vec{r}, t) = \Theta(t)\frac{c}{r}\left[\delta\left(t - \frac{r}{c}\right) - \delta\left(t + \frac{r}{c}\right)\right] \tag{11}$$

Um die Lösung für das Vektorpotential zu erhalten, addiert die homogene Lösung und die Faltung der Greenschen Funktion mit der Inhomogenität

$$A^\mu(x^\nu) = A^\mu_{\text{hom}}(x^\nu) + \frac{1}{c}\int \mathrm{d}^4x^\nu j^\mu(x'^\nu)G(x^\nu - x'^\nu). \tag{12}$$

x^ν ist der Vierervektor $x^\nu = (ct, \vec{x})^T$.

Hausaufgabe 3: Der Hertzsche Dipol im Fernfeld 5 Punkte

Für eine Stromdichte mit harmonischer Zeitabhängigkeit

$$j^\mu(\vec{r}, t) = j^\mu(\vec{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \tag{13}$$

$j^\mu = (c\rho, \vec{j})^{\mathrm{T}}$ soll mit dem Ergebnis aus Aufgabe 3

$$A^\mu(x^\mu) = \frac{1}{c}\int \mathrm{d}V' \frac{j^\mu(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + A^\mu_{\text{hom}}(x^\mu) \tag{14}$$

das Vektorpotential $A^\mu = (\phi/c, \vec{A})^{\mathrm{T}}$ unter der Annahme $A^\mu_{\text{hom}}(x^\mu) = 0$ im Fernfeld berechnet werden.

a) Zeigen Sie, dass für eine Stromdichte mit harmonischer Zeitabhängigkeit das Vektorpotential in einen zeitabhängigen und einen ortsabhängigen Teil zerfällt.

$$A^\mu(x^\mu) = A^\mu(\vec{r})A^\mu(t) \tag{15}$$

Bestimmen Sie $A^\mu(\vec{r})$ und $A^\mu(t)$.

b) Wir nehmen an, dass die Stromverteilung auf ein endliches Gebiet mit dem Durchmesser d beschränkt ist. Im Fernfeld gilt $kd \ll 1 \ll kr$ und es kann $|\vec{r} - \vec{r}'| = r - \vec{n}\vec{r}'$ genähert werden.. Zeigen Sie, dass sie $A^\mu(\vec{r})$ hier wie eine auslaufende Kugelwelle mit einem zusätzlichen richtungsabhängigen Term verhält.

$$A^\mu(\vec{r}) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{cr}\int \mathrm{d}V' j^\mu(\vec{r}')\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\vec{n}\vec{r}'} \tag{16}$$

c) Entwickeln Sie die Exponentialterm $\exp(-\mathrm{i}k\vec{n}\vec{r}')$ für $kd \ll 1$ in nullter Ordnung. Zeigen Sie, dass unter dieser Näherung für das Skalarpotential

$$A^0(\vec{r}) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r}Q \tag{17}$$

mit der Gesamtladung Q gilt.

d) Zeigen Sie, dass

$$\vec{A}(\vec{r}) = -\mathrm{i}k\vec{P}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr}}{r} \tag{18}$$

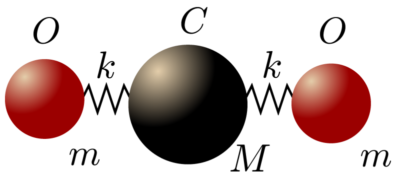
mit dem Dipolmoment

$$\vec{P} = \int \mathrm{d}V'\vec{r}'\rho(\vec{r}') \tag{19}$$

gilt. Wenden Sie dazu partielle Integration and und erinnern Sie sich an die Kontinuitätsgleichung

$$\mathrm{i}\omega\rho = \vec{\nabla}\vec{j}. \tag{20}$$

Hausaufgabe 4: Das CO_2 Molekül **5 Punkte**



Es wird ein CO_2 Molekül als Verbindung von 3 Atomen dargestellt. Die beiden Sauerstoffatome haben die Masse m und das Kohlenstoffatom hat die Masse M. Zwischen den Massen befindet sich eine Feder mit Federkonstante k. Die Ruhelänge der Feder sei y_0. Schwingungen sind nur in Richtung der Molekülachse möglich.

a) Stellen Sie die Lagrangefunktion in der Form

$$\mathbf{L} = \frac{1}{2}\dot{\vec{x}}^T \mathbf{T} \dot{\vec{x}} - \frac{1}{2}\vec{x}^T \mathbf{V} \vec{x} \tag{21}$$

dar.

b) Bestimmen Sie das Eigenwertspektrum des Systems.

c) Bestimmen Sie seine Schwingungsmoden und beschreiben Sie diese. Wie lautet die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichungen.