

MICROELECTRONIC CIRCUIT DESIGN

Solutions

Dimitri Haas

28. Mai 2019

13 Small-Signal Modeling and Linear Amplification

13.8 Small-Signal Models for Field-Effect Transistors

13.80

Folgende Werte sind bereits anhand der Aufgabe gegeben:

$$\begin{aligned}K_n &= 300 \mu\text{A V}^{-2} \\V_{TN} &= 1 \text{ V} \\ \lambda &= 0.02 \text{ V}^{-1}\end{aligned}$$

Ab welchem Drainstrom I_D ist keine Spannungsverstärkung mehr vorhanden, also $\mu_f \leq 1$?

Dazu suchen wir in Tabelle 13.3 nach der Formel für μ_f . Diese lautet

$$\mu_f = \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{2K_n}{I_D}}.$$

Wenn wir nun die Forderung einsetzen und die Gleichung nach I_D umstellen, erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{2K_n}{I_D}} &\leq 1 \\ \Leftrightarrow \frac{2K_n}{\lambda^2} &\leq I_D \\ \Leftrightarrow \frac{2(300 \mu\text{A V}^{-2})}{(0.02 \text{ V}^{-1})^2} &\leq I_D \\ \Leftrightarrow 1.5 \text{ A} &\leq I_D\end{aligned}$$

Damit liegt ab einem Drainstrom von $I_D = 1.5 \text{ A}$ keine Spannungsverstärkung mehr vor.

13.81

In dieser Aufgabe soll überprüft werden, ob die Ausdruck

$$\frac{2v_{gs}}{V_{GS} - V_{TN}}$$

eine geeignete lineare Approximation für Ausdruck

$$\left(1 + \frac{v_{gs}}{V_{GS} - V_{TN}}\right)^2 - 1$$

darstellt, wenn $v_{gs} = 0.2(V_{GS} - V_{TN})$ gilt.

Dazu setzen wir im ersten Schritt in die Ausgangsgleichung das vorgegebene v_{gs} ein und erhalten

$$\left(1 + \frac{0.2(V_{GS} - V_{TN})}{V_{GS} - V_{TN}}\right)^2 - 1 = (1 + 0.2)^2 - 1 = 0.44$$

Das gleiche wiederholen wir nun für angenäherten Ausdruck:

$$\frac{(2)(0.2)(V_{GS} - V_{TN})}{V_{GS} - V_{TN}} = 0.4$$

Betrachten wir nun den relativen Fehler

$$f = \frac{0.4 - 0.44}{0.44} 100\% = -9.1\% \approx -10\%$$

sehen wir, dass der Fehler bei etwa 10 % liegt und damit eine gute Näherung darstellt.

Führen wir die gleichen Berechnungen für $v_{gs} = 0.4(V_{GS} - V_{TN})$ durch, ergibt sich ein Fehler von

$$f = \frac{0.8 - 0.96}{0.96} 100\% = -16.7\% \approx -20\%.$$

Man sieht also, dass das Signal wirklich sehr klein sein muss, um mithilfe der obigen Annäherung ein gutes Ergebnis zu erzielen.

13.84

Gegeben ist ein Common-Source-Amplifier mit folgenden Spezifikationen:

$$R_{\text{out}}^{CS} = 100 \text{ k}\Omega$$

$$\lambda = 0.02 \text{ V}^{-1}$$

$$V_{DD} = 15 \text{ V}$$

Da ein CS-Amplifier so gestaltet wird, dass etwa 50 % der Versorgungsspannung über dem Drain-Widerstand abfallen und die Ausgangsspannung weitestgehend der Spannung über dem Drain-Widerstand entspricht, können wir einen Teil des Arbeitspunktes bereits vorzeitig angeben:

$$V_{DS} = \frac{V_{DD}}{2} = \frac{15 \text{ V}}{2} = 7.5 \text{ V}$$

Nun gilt es noch einen fehlenden Transistor-Parameter zu bestimmen, welcher vollkommen unabhängig von der äußeren CS-Beschaltung ist:

$$r_0 = \frac{\frac{1}{\lambda} + V_{DS}}{I_D} \quad (13.1)$$

Allerdings enthält Gleichung (13.1) noch zwei Unbekannte. Wir müssen deshalb noch einen weiteren Zusammenhang ausfindig machen. Findig wird man, wenn man sich klarmacht, dass der Ausgangswiderstand eine Parallelanordnung der Widerstände r_0 und

R_D darstellt. Da wir in der Aufgabenstellung seinen Wert übermittelt bekommen haben, können wir schreiben:

$$R_{\text{out}} = R_{\text{out}}^{CS} = \frac{r_0 R_D}{r_0 + R_D} \quad (13.2)$$

Setzt man nun Gleichung (13.1) in (13.2) ein und verwendet die Beziehung $R_D = \frac{V_{DS}}{I_D}$, erhält man:

$$\begin{aligned} R_{\text{out}}^{CS} &= \frac{\frac{\frac{1}{\lambda} + V_{DS}}{I_D} \frac{V_{DS}}{I_D}}{\frac{\frac{1}{\lambda} + V_{DS}}{I_D} + \frac{V_{DS}}{I_D}} \\ &= \frac{1}{I_D} \frac{\frac{1}{\lambda} + V_{DS}}{\frac{1}{\lambda V_{DS}} + 2} \\ &\approx \frac{6.63}{I_D} \end{aligned} \quad (13.3)$$

Da uns R_{out}^{CS} bereits in der Aufgabenstellung gegeben wurde, können wir mithilfe von Gleichung (13.3) den fehlenden Arbeitspunkt-Parameter bestimmen:

$$I_D = \frac{6.63}{R_{\text{out}}^{CS}} = \frac{6.63}{100 \text{ k}\Omega} = 66.3 \mu\text{A} \quad (13.4)$$

Der Arbeitspunkt lautet somit abschließend (7.5 V, 66.3 μA). Diese Aufgabe kann man sich mithilfe von Figure 13.18 im Buch auf Seite 793 veranschaulichen. Hier müssen lediglich die BJT- durch MOSFET-Bauteile ersetzt werden.

13.85

In einem CS-Verstärker, ist der Arbeitspunkt gesucht, bei dem wir einen Eingangswiderstand von $R_{\text{in}}^{CS} = 2 \text{ M}\Omega$ erhalten. Der darin verbaute Transistor besitzt folgende Parameter:

$$\begin{aligned} K_n &= 500 \mu\text{A V}^{-2} \\ V_{TN} &= 1 \text{ V} \\ \lambda &= 0.02 \text{ V}^{-1} \end{aligned}$$

Gearbeitet wird mit einer Versorgungsspannung von 12 V.

Die obige Aufgabe kann auch ohne Studium des Abschnitts 13.10.5 im Buch gelöst werden: Da der Transistor selbst einen unendlichen hohen Eingangswiderstand hat, bleibt nur noch R_G als Widerstand übrig. Somit ist der Eingangswiderstand nur von den beiden Gate-Widerständen nicht aber vom Arbeitspunkt abhängig. Jeder Arbeitspunkt ermöglicht damit den oben vorgegeben Eingangswiderstand.

13.9 Summary and Comparison of the Small-Signal Models of the BJT and FET

13.87

Nur mit einem FET kann ein solch großer Eingangswiderstand realisiert werden. Ein BJT kann bei so einem Arbeitsstrom nur etwa $500\ \Omega$ liefern:

$$r_{\pi} = \frac{\beta_0 V_T}{I_C} = \frac{(100)(0.025\text{ V})}{5\text{ mA}} = 500\ \Omega$$

13.88

Wieder stellt sich die Frage, welcher Transistortyp am besten geeignet ist, um die gegebene Aufgabe erfüllen zu können. Gewünscht ist eine Transkonduktanz von 0.5 S . Schauen wir uns dann einfach die Transkonduktanz von beiden Transistoren für die gegebenen Werte an:

1. **BJT:** Um eine Transkonduktanz von 0.5 S zu erreichen, wird ein Kollektorstrom in Höhe von $I_C = (0.5\text{ S})(0.025\text{ V}) = 12.5\text{ mA}$ benötigt.
2. **MOSFET:** Nach gleichem Verfahren ermitteln wir nun Drainstrom I_D . Formel umformen ergibt $I_D = \frac{(0.5\text{ S})^2}{(2)(25\text{ mA V}^{-2})} = 5\text{ A}$.

Hier wählt man natürlich den Bipolartransistor, weil dieser einen deutlich geringeren Anspruch an die Stromversorgung stellt.

13.89

Berechnen wir zunächst die intrinsische Verstärkung μ_f des Bipolartransistoren:

$$\mu_f = \frac{V_A + V_{CE}}{V_T} = \frac{60\text{ V} + 10\text{ V}}{0.025\text{ V}} = 2800$$

Um die oben berechnete Verstärkung zu erreichen, können wir nun die benötigte Spannung ($V_{GS} - V_{TN}$) berechnen und anschließend mit dieser den Arbeitsstrom bestimmen:

$$V_{GS} - V_{TN} = \frac{2\left(\frac{1}{0.017\text{ V}^{-1}} + 10\text{ V}\right)}{2800} \approx 0.049\text{ V}$$

Das nun in die Stromgleichung des MOSFET eingesetzt erhalten wir:

$$I_D = \frac{K_n}{2} (V_{GS} - V_{TN})^2 (1 + \lambda V_{DS}) = \frac{25\text{ mA V}^{-2}}{2} (0.049\text{ V})^2 (1 + 0.017\text{ V}^{-1} 10\text{ V}) = 35.1\ \mu\text{A}$$

13.90

Wie gehabt, berechnen wir zunächst die intrinsischen Verstärkungen:

1. **BJT:** $\mu_f \cong \frac{V_A}{V_T} = \frac{50\text{V}}{0.025\text{V}} = 2000$
2. **MOSFET:** $\mu_f = g_m r_0 \cong \frac{2}{\lambda(V_{GS} - V_{TN})} = \frac{2}{0.02\text{V}^{-1} \cdot 0.5\text{V}} = 200$

Nun soll für einen Arbeitsstrom von $200\text{ }\mu\text{A}$ für beide Geräte die Transkonduktanz berechnet werden:

1. **BJT:** $g_m = \frac{I_C}{V_T} = \frac{200\text{ }\mu\text{A}}{0.025\text{V}} = 8\text{ mS}$
2. **MOSFET:** $g_m = \frac{2I_D}{V_{GS} - V_{TN}} = \frac{(2)(200\text{ }\mu\text{A})}{0.5\text{V}} = 0.8\text{ mS}$

13.91

Gesucht ist eine Verstärker-Schaltung mit einer Eingangsimpedanz von $50\text{ }\Omega$. Solche kleinen Eingangswiderstände lassen sich sowohl mit einem BJT als auch mit einem MOSFET realisieren. Siehe dazu Tabelle 3.6 in Kapitel 13.11. Durch die Wahl geeigneter Beschaltung kann die geforderte Eingangsimpedanz erfüllt werden:

1. **BJT:** $R_{in} \approx r_\pi \rightarrow$ Dieser Eingangswiderstand kann bei einem Arbeitsstrom von $I_C = \frac{\beta_0 V_T}{r_\pi} = \frac{(100)(0.025\text{V})}{50\text{ }\Omega} = 50\text{ mA}$ gewährleistet werden. Zu beachten ist, dass das einem relativ hohen Strom entspricht!
2. **MOSFET:** $R_{in} = R_G \rightarrow$ Hier kann man einfach einen entsprechenden Widerstand wählen.

Wenn also ein energiesparender Betrieb gewünscht ist, kann in diesem Fall am besten auf den MOSFET zurückgegriffen werden.

13.92

(a) Wir möchten in dieser Aufgabe ein Signal von 0.25 V um $26\text{ dB} = 19.95$ verstärken. Entscheidend ist hierbei die Kleinsignalbedingung. Diese gilt bei einem BJT nur bis 0.005 V . Da hier allerdings ein deutlich stärkeres Signal verstärkt werden soll, bietet sich für diese Aufgabe ein MOSFET besser an.

(b) Auch hier aus gleichem Grund bietet sich ein MOSFET besser an, da wir Eingangssignale größer 0.005 V sehen.

13.10 The Common-Source Amplifier

13.93

Ein CS-Verstärker mit $(V_{GS} - V_{TN} = 1\text{ V})$ arbeitet mit einer Versorgungsspannung von 15 V . Wie groß ist die geschätzte Verstärkung?

Mithilfe von Gleichung (13.91), welche aus einigen Vereinfachungen hervorgeht, können wir die Verstärkung sehr leicht bestimmen:

$$A_v^{CS} = -\frac{V_{DD}}{V_{GS} - V_{TN}} = -V_{DD} = -15 \text{ V}$$

13.94

Ein CS-Verstärker hat eine Verstärkung von $16 \text{ dB} = 6.3$ und entwickelt an seinem Ausgang ein Signal von $V_{PP} = 15 \text{ V}$. Arbeitet dieser Verstärker in seiner Kleinsignal-Region? Wie groß das ursprüngliche Signal war, können wir durch Rückrechnung bestimmen:

$$v_{in} = \frac{7.5 \text{ V}}{6.3} = 1.19 \text{ V}$$

Mit der Kleinsignalbedingung $v_i \leq 0.2(V_{GS} - V_{TN})$ muss gelten $V_{GS} - V_{TN} \geq 5.95 \text{ V}$.

13.95

Ein CS-Verstärker ($K_n = 1 \text{ mA V}^{-2}$) wird mit einer Versorgungsspannung von 18 V betrieben. Welcher Arbeitsstrom I_D wird für eine Verstärkung von 30 benötigt?

$$A_v^{CS} = 30 = -\frac{V_{DD}}{V_{GS} - V_{TN}} \Leftrightarrow V_{GS} - V_{TN} = -\frac{18 \text{ V}}{30} = -0.6 \text{ V}$$

Aus der Beziehung (siehe Tabelle 13.3)

$$\frac{2I_D}{V_{GS} - V_{TN}} = \sqrt{2K_n I_D}$$

kann schnell folgender Zusammenhang gebildet werden:

$$V_{GS} - V_{TN} = \frac{2I_D}{\sqrt{2K_n I_D}} = \sqrt{\frac{2I_D}{K_n}} = -0.6 \text{ V}$$

Löst man letzte Gleichung nach I_D auf, erhalten wir:

$$I_D = \frac{(-0.6 \text{ V})^2 K_n}{2} = 180 \mu\text{A}$$

13.96

Ein CS-Verstärker arbeitet mit einer Versorgungsspannung von 9 V . Was ist der maximale Wert für $V_{GS} - V_{TN}$, wenn eine Verstärkung von 25 erreicht werden soll? Zunächst stellen wir die allgemeine Gleichung für die Verstärkung auf:

$$A_v^{CS} = 25 = -\frac{V_{DD}}{V_{GS} - V_{TN}} \Leftrightarrow V_{GS} - V_{TN} = -\frac{V_{DD}}{25} = -\frac{9 \text{ V}}{25} = -0.36 \text{ V}$$

Damit wurde gezeigt, dass $V_{GS} - V_{TN}$ maximal 0.36 V betragen werden darf.

13.97

Ein CS-Verstärker soll ein Wechselsignal v_{gs} der Höhe 0.2 V verstärken. Welchen Wert soll $V_{GS} - V_{TN}$ minimal haben, um die Kleinsignalbedingung nicht zu verletzen?

Für MOSFETs gilt folgende Kleinsignalbedingung:

$$v_{gs} \leq 0.2(V_{GS} - V_{TN}) \Leftrightarrow V_{GS} - V_{TN} \geq 1 \text{ V}$$

Wenn eine Verstärkung von 33 dB erreicht werden soll, muss folgende Gleichung gelten:

$$A_v^{CS} = 10^{\frac{33}{20}} = 44.67 \approx \frac{V_{DD}}{V_{GS} - V_{TN}} \Leftrightarrow V_{DD} = 44.67(V_{GS} - V_{TN}) = 44.67 \text{ V}$$

13.98

Ein CS-Verstärker soll ein Wechselsignal v_{gs} der Höhe 0.4 V verstärken. Welchen Wert soll $V_{GS} - V_{TN}$ minimal haben, um die Kleinsignalbedingung nicht zu verletzen?

Für MOSFETs gilt folgende Kleinsignalbedingung:

$$v_{gs} \leq 0.2(V_{GS} - V_{TN}) \Leftrightarrow V_{GS} - V_{TN} \geq 2 \text{ V}$$

Wenn eine Verstärkung von 26 dB erreicht werden soll, muss folgende Gleichung gelten:

$$A_v^{CS} = 10^{\frac{26}{20}} = 19.95 \approx \frac{V_{DD}}{V_{GS} - V_{TN}} \Leftrightarrow V_{DD} = 19.95(V_{GS} - V_{TN}) = 39.9 \text{ V}$$

13.99

Es ist ein Verstärker mit der Verstärkung von 1000 gesucht. Er soll mit einer Kaskade von CS-Verstärkern gestaltet werden, welche mit einer Versorgungsspannung von 12 V betrieben werden. Wie viele CS-Bausteine benötigt man? Schätzt man die Verstärkung eines einzelnen Bausteins mit

$$A_v^{CS} = -V_{DD}$$

ab, kann die Anzahl x folgendermaßen bestimmt werden:

$$V_{DD}^x \geq 1000 \Leftrightarrow x \geq \log_{V_{DD}}(1000) = 2.78$$

Es werden also minimal drei CS-Verstärker benötigt, um eine Verstärkung von 1000 zu erreichen.

13.100

Um den Text hier klein zu halten, führe ich die vorgegebenen Werte hier nicht explizit auf, sondern verarbeite sie direkt in den Rechnungen.

1. **DC Arbeitspunkt:** Um die Transkonduktanz für die Verstärkung bestimmen zu können, benötigt man den Arbeitspunkt im dc-Betrieb. Diesen erhält man, in dem alle Kondensatoren aufgeschnitten und ac-Quellen kurzgeschlossen werden. Anschließend kann die Ersatzquelle und der Ersatzwiderstand bestimmt werden:

$$\begin{aligned} V_{th} &= V_{DD} \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 10 \text{ V} \frac{430 \text{ k}\Omega}{430 \text{ k}\Omega + 560 \text{ k}\Omega} = 4.34 \text{ V} \\ R_{th} &= R_1 || R_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{(430 \text{ k}\Omega)(560 \text{ k}\Omega)}{430 \text{ k}\Omega + 560 \text{ k}\Omega} = 243.32 \text{ k}\Omega \end{aligned} \quad (13.5)$$

Nun können wir ein Gleichungssystem aufstellen, um I_D zu bestimmen. Dabei nehmen wir an, dass der Transistor in der aktiven Region arbeitet:

$$\begin{aligned} V_{GS} &= V_{th} - I_D R_4 \\ I_D &= \frac{K_n}{2} (V_{GS} - V_{TN})^2 (1 + \lambda V_{DS}) \\ &= \frac{K_n}{2} (V_{GS} - V_{TN})^2 (1 + \lambda (V_{DD} - R_D I_D - R_4 I_D)) \end{aligned} \quad (13.6)$$

Setzt man nun die erste Gleichung in die zweite ein, erhält man:

$$\begin{aligned} I_D &= \frac{K_n}{2} (V_{th} - I_D R_4 - V_{TN})^2 (1 + \lambda (V_{DD} - R_D I_D - R_4 I_D)) \\ I_{D1} &= 1.34 \text{ mA} \\ I_{D2} &= 129.5 \mu\text{A} \end{aligned} \quad (13.7)$$

Schaut man sich beide Lösungen an, kommt man schnell auf den Schluss, dass lediglich I_{D2} die korrekte Lösung sein kann.

2. **AC-Analyse:** Mit dem Arbeitsstrom I_D kann nun die Transkonduktanz bestimmt werden.

$$g_m = \sqrt{2K_n I_D} = \sqrt{2(0.45 \text{ mA V}^{-2})(129.5 \mu\text{A})} = 0.34 \text{ mS}$$

Nun kann der Last- und Eingangswiderstand berechnet werden:

$$\begin{aligned} R_G &= R_1 || R_2 = 243.32 \text{ k}\Omega \\ R_L &= r_o || R_D || R_3 = \frac{1}{\lambda I_D} || 43 \text{ k}\Omega || 100 \text{ k}\Omega \approx 28.6 \text{ k}\Omega \end{aligned} \quad (13.8)$$

Nun kann zu guter Letzt die Verstärkergleichung benutzt werden:

$$A_v^{CS} = -g_m R_L \frac{R_G}{R_G + R_I} = -(0.34 \text{ mS})(28.6 \text{ k}\Omega) \frac{243.32 \text{ k}\Omega}{243.32 \text{ k}\Omega + 1 \text{ k}\Omega} = -9.68$$

13.101

Das Gleiche wie in der vorherigen Aufgabe, nur dass uns dieses Mal die DC-Analyse erspart bleibt! Wir können also die Transkonduktanz direkt mit

$$g_m = \sqrt{2K_n I_D} = \sqrt{(2)(450 \mu\text{A V}^{-2})(100 \mu\text{A})} = 0.3 \text{ mS}$$