ΜΕΘΟΔΟΙ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ ΣΤΗ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ (ΜΕ.ΒΕ.Δ.Ε)

Emmanouil Zachariadis, Assistant Professor
Department of Management Science and Technology,
Athens University of Economics and Business
E: ezach@aueb.gr
A: Evelpidon 47A and Lefkados 33 street, 8th floor, Room 811, 11362, Athens, Greece
T: +30-210-8203 467

ΧΡΟΝΟΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

- Η διοίκηση του ΟΠΑ είναι υπεύθυνη για τον καταρτισμό του προγράμματος των εξετάσεων του Τμήματος ΔΕΤ. Θεωρώντας ότι το πρόβλημα χωρητικότητας έχει επιλυθεί, ένας από τους κύριους περιορισμούς κατά το σχεδιασμό του προγράμματος είναι να μην πραγματοποιηθούν ταυτόχρονα μαθήματα του ίδιου έτους, μαθήματα που «χρωστούν» οι φοιτητές και μαθήματα που εξετάζονται από τον ίδιο Καθηγητή.
- Δεδομένου επίσης ότι οι εξετάσεις πραγματοποιούνται εντός δεδομένων χρονικών διαστημάτων (8-10, 10-12, 12-2, 2-4, κτλ), **στόχος είναι να ελαχιστοποιηθεί ο συνολικός χρόνος που θα πραγματοποιηθούν οι εξετάσεις των μαθημάτων** (αυτό αντιμετωπίζει ως ένα βαθμό και το πρόβλημα χωρητικότητας). Να σχεδιαστεί μία ΠΣΕ για την επίλυση του προβλήματος.
- Στην επόμενη διαφάνεια περιγράφονται **ποιες εξετάσεις μαθημάτων δεν είναι δυνατό να πραγματοποιηθούν παράλληλα την ίδια ώρα**. Συγκεκριμένα, η εξέταση 1 δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί την ίδια ώρα με τις εξετάσεις 5 και 6, η εξέταση 2 δεν μπορεί να γίνει την ίδια ώρα με τις εξετάσεις 3 και 5 κτλ

ΧΡΟΝΟΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

- Εξέταση 1 → 5,6
- Εξέταση 2 → 3,5
- Εξέταση 3 → 2,6,7
- Εξέταση 4 → 7
- Εξέταση 5 → 1,2,6,8,9
- Εξέταση 6 → 1,3,5,9,10
- Εξέταση 7 → 3,4,10,11,12
- Εξέταση 8 → 5
- Εξέταση 9 → 5,6,10
- Εξέταση 10 → 6,7,9
- Εξέταση 11 → 7
- Εξέταση 12 → 7,14
- Εξέταση 13 → 14,15
- Εξέταση 14 → 12,13,15
- Εξέταση 15 → 13,14

ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΠΣΕ - ΧΡΟΝΟΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

Μορφή Λύσης: 15 διαφορετικές αντιστοιχίσεις μιας εξέτασης μαθήματος σε ένα χρονικό διάστημα.

Στοιχείο της Λύσης: Μια αντιστοίχιση εξέτασης σε χρονικό διάστημα

ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΠΣΕ - ΧΡΟΝΟΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

Κριτήριο Επιλογής:

Η λογική του κριτηρίου επιλογής αυτής της εφαρμογής της ΠΣΕ είναι η ακόλουθη: Θα επιχειρηθεί να πραγματοποιηθούν (δηλαδή να αντιστοιχηθούν) όσες το δυνατόν **περισσότερες εξετάσεις μαθημάτων** σε όσα το δυνατόν **λιγότερα χρονικά διαστήματα,** σκοπεύοντας όταν έχουν πραγματοποιηθεί όλες οι εξετάσεις να έχει **ελαχιστοποιηθεί και ο συνολικός χρόνος που θα έχει καταναλωθεί** για να πραγματοποιηθούν.

ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΠΣΕ - ΧΡΟΝΟΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

Κριτήριο Επιλογής:

- Κατά την αντιμετώπιση του bin-packing προβλήματος, είχαμε επιλέξει να κατατάξουμε τα αντικείμενα σε φθίνουσα σειρά μεγέθους
- Η λογική μας ήταν να τοποθετήσουμε πρώτα τα ογκώδη αντικείμενα, έτσι ώστε στη συνέχεια να εκμεταλλευτούμε τα κενά που παρουσιάζονταν για να φιλοξενήσουμε τα μικρότερα αντικείμενα
- Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να σκεφτούμε και στην περίπτωση αυτή
- Ποιες είναι οι πιο «δύσκολες» για τοποθέτηση εξετάσεις?

  (Τα πιο δύσκολα αντικείμενα)
- Οι εξετάσεις με τις περισσότερες απαγορεύσεις

  (Τα πιο μεγάλα αντικείμενα)

ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΠΣΕ - ΧΡΟΝΟΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

Κριτήριο Επιλογής:

- Κατάταξε τις εξετάσεις σε φθίνουσα σειρά απαγορεύσεων
- Σε κάθε επανάληψη διάλεξε την εξέταση που βρίσκεται στην υψηλότερη θέση της κατάταξης
- Τοποθέτησε την εξέταση στην ***πρώτη διαθέσιμη*** ώρα που μπορεί να τη φιλοξενήσει, χωρίς προφανώς να παραβιάζεται καμία από τις απαγορεύσεις

ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΠΣΕ - ΧΡΟΝΟΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

- Κατάταξη των εξετάσεων σε φθίνουσα σειρά απαγορεύσεων

	Μάθημα	Απαγορεύσεις			Μάθημα	Απαγορεύσεις
1.	Εξέταση 5	1,2,6,8,9		9.	Εξέταση 2	3,5
2.	Εξέταση 6	1,3,5,9,10		10.	Εξέταση 12	7,14
3.	Εξέταση 7	3,4,10,11,12		11.	Εξέταση 13	14,15
4.	Εξέταση 3	2,6,7		12.	Εξέταση 15	13,14
5.	Εξέταση 9	5,6,10		13.	Εξέταση 4	7
6.	Εξέταση 14	12,13,15		14.	Εξέταση 8	5
7.	Εξέταση 10	6,7,9		15.	Εξέταση 11	7
8.	Εξέταση 1	5,6				

ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΠΣΕ - ΧΡΟΝΟΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

<u>Επανάληψη 1</u>

Επιλέγουμε την εξέταση του μαθήματος 5.

Αντιστοιχίζεται στο πρώτο διαθέσιμο διάστημα X1

Μερική Λύση **S:(5X1)**

<u>Επανάληψη 2</u>

Επιλέγουμε την εξέταση του μαθήματος 6.

Αντιστοιχίζεται στο πρώτο διαθέσιμο διάστημα X2

(Στο X1 δε θα μπορούσε να πραγματοποιηθεί καθώς συγκρούεται με το μάθημα 5)

Μερική Λύση **S:(5X1, 6X2)**

ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΠΣΕ - ΧΡΟΝΟΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

Επανάληψη 3

Επιλέγουμε την εξέταση του μαθήματος 7.

Αντιστοιχίζεται στο πρώτο διαθέσιμο διάστημα X1 (δεν παραβιάζεται κάποια απαγόρευση)

Μερική Λύση **S:(5X1, 6X2, 7X1)**

Επανάληψη 4

Επιλέγουμε την εξέταση του μαθήματος 3.

Αντιστοιχίζεται στο πρώτο διαθέσιμο διάστημα X3

(Στο X1 δε θα μπορούσε να πραγματοποιηθεί καθώς συγκρούεται με το μάθημα 7, Στο X2 δε θα μπορούσε να πραγματοποιηθεί καθώς συγκρούεται με το 6)

Μερική Λύση **S:(5X1, 6X2, 7X1, 3X3)**

ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΠΣΕ - ΧΡΟΝΟΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

Επανάληψη 5

Επιλέγουμε την εξέταση του μαθήματος 9.

Αντιστοιχίζεται στο πρώτο διαθέσιμο διάστημα Χ3

(Στο Χ1 δε θα μπορούσε να πραγματοποιηθεί καθώς συγκρούεται με το μάθημα 5, Στο Χ2 δε θα μπορούσε να πραγματοποιηθεί καθώς συγκρούεται με το 6)

Μερική Λύση **S:(5X1, 6X2, 7X1, 3X3, 9X3)**

Επανάληψη 6

Επιλέγουμε την εξέταση του μαθήματος 14

Αντιστοιχίζεται στο πρώτο διαθέσιμο διάστημα Χ1

Μερική Λύση **S:(5X1, 6X2, 7X1, 3X3, 9X3, 14X1)**

ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΠΣΕ - ΧΡΟΝΟΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

Επανάληψη 7

Επιλέγουμε την εξέταση του μαθήματος 10.

Αντιστοιχίζεται στο πρώτο διαθέσιμο διάστημα X4

(Όχι X1: Σύγκρουση με 7, Όχι X2: Σύγκρουση με 6, Όχι X3: Σύγκρουση με 9)

Μερική Λύση **S:(5X1, 6X2, 7X1, 3X3, 9X3, 14X1 ,10X4)**

Επανάληψη 8

Επιλέγουμε την εξέταση του μαθήματος 1

Αντιστοιχίζεται στο πρώτο διαθέσιμο διάστημα X3

(Όχι X1: Σύγκρουση με 5, Όχι X2: Σύγκρουση με 6)

Μερική Λύση **S:(5X1, 6X2, 7X1, 3X3, 9X3, 14X1, 10X4, 1X3)**

ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΠΣΕ - ΧΡΟΝΟΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

Επανάληψη 9

Επιλέγουμε την εξέταση του μαθήματος 2

Αντιστοιχίζεται στο πρώτο διαθέσιμο διάστημα X2

(Όχι X1: Σύγκρουση με 5)

Μερική Λύση **S:(5X1, 6X2, 7X1, 3X3, 9X3, 14X1, 10X4, 1X3, 2X2)**

Επανάληψη 10

Επιλέγουμε την εξέταση του μαθήματος 12

Αντιστοιχίζεται στο πρώτο διαθέσιμο διάστημα X2

(Όχι X1: Σύγκρουση με 7)

Μερική Λύση **S:(5X1, 6X2, 7X1, 3X3, 9X3, 14X1, 10X4, 1X3, 2X2, 12 X2)**

ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΠΣΕ - ΧΡΟΝΟΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

Επανάληψη 11

Επιλέγουμε την εξέταση του μαθήματος 13

Αντιστοιχίζεται στο πρώτο διαθέσιμο διάστημα X2

(Όχι X1: Σύγκρουση με 14)

Μερική Λύση:

S:(5X1, 6X2, 7X1, 3X3, 9X3, 14X1, 10X4, 1X3, 2X2, 12 X2, 13X2)

Επανάληψη 12

Επιλέγουμε την εξέταση του μαθήματος 15

Αντιστοιχίζεται στο πρώτο διαθέσιμο διάστημα X3

(Όχι X1: Σύγκρουση με 14, Όχι X2: Σύγκρουση με 13)

Μερική Λύση:

S:(5X1, 6X2, 7X1, 3X3, 9X3, 14X1, 10X4, 1X3, 2X2, 12 X2, 13X2, 15X3)

ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΠΣΕ - ΧΡΟΝΟΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

<u>Επανάληψη 13</u>

Επιλέγουμε την εξέταση του μαθήματος 4

Αντιστοιχίζεται στο πρώτο διαθέσιμο διάστημα X2

(Όχι X1: Σύγκρουση με 7)

Μερική Λύση:

S:(5X1, 6X2, 7X1, 3X3, 9X3, 14X1, 10X4, 1X3, 2X2, 12 X2, 13X2, 15X3, 4X2)

<u>Επανάληψη 14</u>

Επιλέγουμε την εξέταση του μαθήματος 8

Αντιστοιχίζεται στο πρώτο διαθέσιμο διάστημα X2

(Όχι X1: Σύγκρουση με 5)

Μερική Λύση:

S:(5X1, 6X2, 7X1, 3X3, 9X3, 14X1, 10X4, 1X3, 2X2, 12 X2, 13X2, 15X3, 4X2, 8X2)

ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΠΣΕ - ΧΡΟΝΟΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

Επανάληψη 15

Επιλέγουμε την εξέταση του μαθήματος 11

Αντιστοιχίζεται στο πρώτο διαθέσιμο διάστημα Χ2

(Όχι Χ1: Σύγκρουση με 7)

Τελική Λύση:

S:(5X1, 6X2, 7X1, 3X3, 9X3, 14X1, 10X4, 1X3, 2X2, 12 X2, 13X2, 15X3, 4X2, 8X2, 11X2)

ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΠΣΕ - ΧΡΟΝΟΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

Συνεπώς, η λύση μας διαμορφώνεται ως

S:(5X1, 6X2, 7X1, 3X3, 9X3, 14X1, 10X4, 1X3, 2X2, 12 X2, 13X2, 15X3, 4X2, 8X2, 11X2)

Δηλαδή

- το πρώτο δίωρο (8-10) θα γίνουν οι εξετάσεις 5 ,7, 14
- το δεύτερο δίωρο (10-12) θα γίνουν οι εξετάσεις 2, 4, 6, 8,11, 12, 13
- το τρίτο δίωρο (12-2) θα γίνουν οι εξετάσεις 1, 3, 9, 15
- το τέταρτο δίωρο (2-4) θα γίνει οι εξετάσεις 10

Συνεπώς απαιτούνται 8 ώρες για να γίνουν όλα τα διαγωνίσματα ή αλλιώς 4 δίωρα για να πραγματοποιηθούν οι εξετάσεις του ΔΕΤ.

Graph Coloring Problem

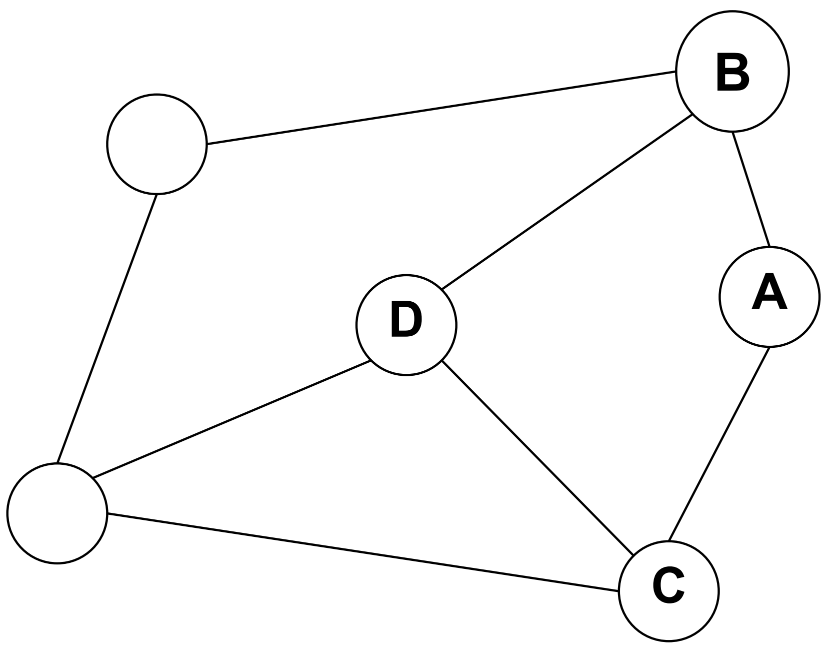
- Θεώρησε ένα Γράφο $G = \{V, E\}$
  - Σύνολο V: Οι κόμβοι του δικτύου
  - Σύνολο E: Οι συνδέσεις (ακμές) μεταξύ των κόμβων του δικτύου
- Χρωματισμός ενός γράφου:
  - Η αντιστοίχιση κάθε κόμβου ενός γράφου με ένα χρώμα
  - Περιορισμός: Δύο γειτονικοί (που ενώνονται με μία ακμή) κόμβοι δε μπορούν να έχουν το ίδιο χρώμα
- Graph Coloring Problem:
  - *Decision Problem*: Είναι δυνατό ο γράφος να χρωματισθεί με χρήση k χρωμάτων;
  - *Optimization Problem*: Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός χρωμάτων τα οποία πρέπει να χρησιμοποιηθούν ώστε να χρωματισθεί ο γράφος;
- Το Πρόβλημα Απόφασης είναι στενά συνδεδεμένο με το πρόβλημα Βελτιστοποίησης
  - Αν είμαστε σε θέση να απαντήσουμε στο πρόβλημα απόφασης για κάθε k, είμαστε προφανώς σε θέση να απαντήσουμε και στο πρόβλημα Βελτιστοποίησης

Graph Coloring Problem

- Στόχος του προβλήματος Βελτιστοποίησης: Χρωματικός αριθμός
- Αντικειμενική Συνάρτηση μίας λύσης: Πλήθος των χρωμάτων τα οποία χρησιμοποιήθηκαν για το χρωματισμό του γράφου
- Ελαχιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης = Προσδιορισμός Χρωματικού αριθμού

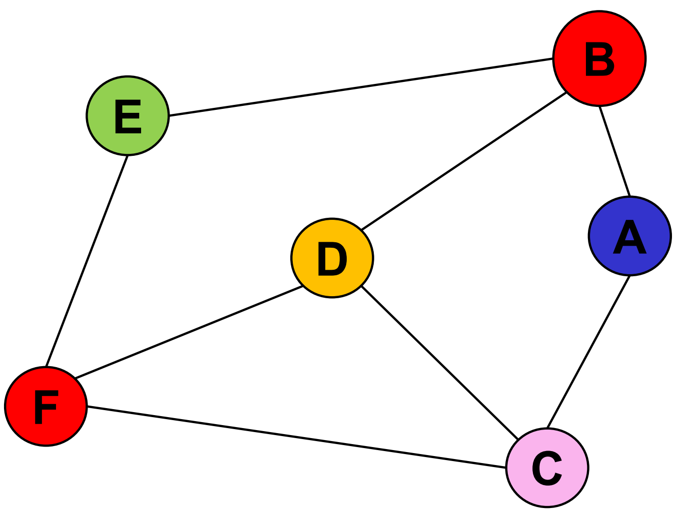
Graph Coloring Problem

- Βαθμός ενός κόμβου: Ο αριθμός των συνδέσεων που ξεκινούν (καταλήγουν) στον κόμβο αυτό
  - Βαθμός A = 2
  - Βαθμός D = 3

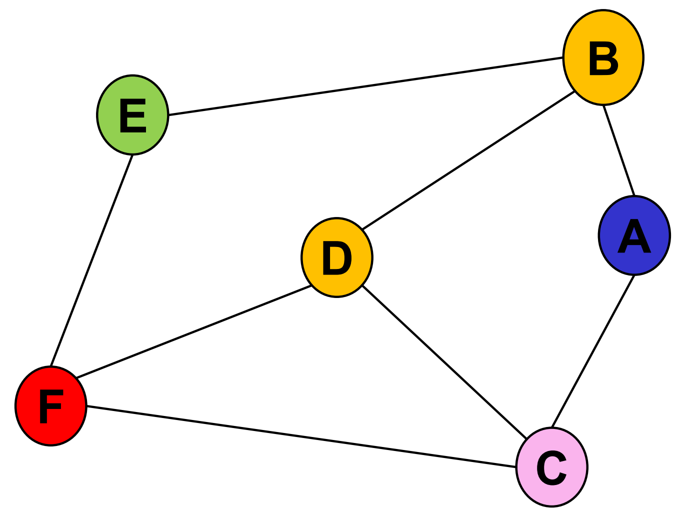


Graph Coloring Problem - Περιορισμός Χρωματισμού

Εφικτός Χρωματισμός



Ανέφικτος Χρωματισμός:
Γειτονικοί κόμβοι B και D
χρησιμοποιούν το ίδιο χρώμα



Graph Coloring Problem

- Πως συνδέεται το Graph Coloring πρόβλημα με το πρόβλημα των εξετάσεων του Οικονομικού Πανεπιστημίου Αθηνών;

Graph Coloring Problem – Greedy Algorithms

- Το βασικό Σχήμα των ΠΣΕ για το Graph Coloring Problem
  - Με δεδομένη μία σειρά των χρωμάτων, επαναληπτικά αντιστοίχησε ένα χρώμα σε ένα κόμβο
  - Επιλογή χρώματος:
    - Το πρώτο από τα χρώματα που ήδη χρησιμοποιούνται το οποίο οδηγεί σε εφικτό χρωματισμό
    - Το χρώμα εκείνο το οποίο ελαχιστοποιεί τις επιπρόσθετες απαγορεύσεις για τα ήδη χρησιμοποιούμενα χρώματα
    - Προφανώς, Εφόσον δεν υπάρχει κανένα χρώμα, επιλογή ενός νέου χρώματος
  - Επιλογή Σειράς
    - Βασικό σχήμα (αρχική σειρά κόμβων)
    - Welsh Powell algorithm (Φθίνουσα σειρά βαθμού κόμβων)

THE QUADRATIC ASSIGNMENT PROBLEM - QAP

- Πώς θα γίνει η εγκατάσταση κλινικών σε νοσοκομεία;
- Ποια πρέπει να είναι η τοποθέτηση αποθηκών σε ένα εμπορευματικό κέντρο ώστε να πετύχουμε ελαχιστοποίηση του κόστους ροών εμπορευμάτων;
- Ποιος είναι ο βέλτιστος τρόπος να συνδέσουμε τα διάφορα συστατικά μέρη μιας μητρικής κάρτας ηλεκτρονικού υπολογιστή μεταξύ τους;
- Ποιος είναι ο βέλτιστος τρόπος να αντιστοιχήσουμε γράμματα σε ένα πληκτρολόγιο;
- Τα προβλήματα αυτά έχουν διαφορετική περιγραφή, όμως είναι εφαρμογές του Προβλήματος Τετραγωνικής Αντιστοίχισης (Quadratic Assignment Problem).

THE QUADRATIC ASSIGNMENT PROBLEM - QAP

- Το Πρόβλημα Τετραγωνικής Αντιστοίχισης (QAP) είναι ένα από τα πιο ενδιαφέροντα και ταυτόχρονα ένα από τα υπολογιστικά πολυπλοκότερα προβλήματα της συνδυαστικής βελτιστοποίησης.

- Αρχικά παρουσιάστηκε το 1957 από τους Tjalling C. Koopmans και Martin Beckman, που προσπαθούσαν να μοντελοποιήσουν ένα πρόβλημα χωροθέτησης εγκαταστάσεων.

- Πολλοί επιστήμονες, μεταξύ αυτών μαθηματικοί, επιστήμονες ηλεκτρονικών υπολογιστών, αναλυτές επιχειρησιακής έρευνας και οικονομολόγοι έχουν χρησιμοποιήσει το QAP για να μοντελοποιήσουν διάφορα προβλήματα βελτιστοποίησης.

THE QUADRATIC ASSIGNMENT PROBLEM - QAP

- Ουσιαστικά, τα προβλήματα αυτά αφορούν στον τρόπο με τον οποίο θα αντιστοιχίσουμε ανθρώπους, μηχανές κτλ. σε συγκεκριμένες εργασίες, τοποθεσίες κτλ. λαμβάνοντας υπόψη τις μεταξύ τους ροές
- Αν το μέγεθος του προβλήματος είναι n, όλοι οι δυνατοί συνδυασμοί λύσεων (αντιστοιχίσεων) που προκύπτουν είναι $n!$
- Για παράδειγμα αν έχουμε 10 αποθήκες που πρέπει να τις τοποθετήσουμε σε 10 αυστηρά σημεία μία γεωγραφικής περιοχής, υπάρχουν $10! = 3.6 \cdot 10^6$ τρόποι να γίνει η αντιστοίχιση. Με άλλα λόγια, υπάρχουν $10!$ δυνατές λύσεις του προβλήματος
- Λόγω της πολυπλοκότητας του προβλήματος, εφαρμόζονται αποδοτικοί προσεγγιστικοί αλγόριθμοι που δίνουν αποδεκτές λύσεις σε περιορισμένο υπολογιστικό χρόνο.

THE QUADRATIC ASSIGNMENT PROBLEM - QAP

- Αναλύοντας, λοιπόν, το πρόβλημα, παρατηρούμε πως το QAP συνιστά πρόβλημα αντιστοίχισης στοιχείων ενός συνόλου A με στοιχεία ενός συνόλου B.
- Στη βασική του μορφή, τα δύο αυτά σύνολα περιλαμβάνουν τον ίδιο αριθμό στοιχείων, ενώ ακριβώς ένα στοιχείο του A αντιστοιχίζεται με ακριβώς ένα στοιχείο του B, για κάθε στοιχείο των A,B.
- Στο σημείο αυτό οφείλουμε να τονίσουμε πως υπάρχει συσχέτιση μεταξύ του κάθε στοιχείου του A (αντίστοιχα του B) με όλα τα υπόλοιπα στοιχεία του A (αντίστοιχα του B).
- Αυτή η συσχέτιση εκφράζεται συνήθως με τη μορφή ροής μεταξύ των στοιχείων του συνόλου A καθώς και μεταξύ των στοιχείων του συνόλου B.
- Η ροή μπορεί να αποτελεί τόσο φυσική ροή (π.χ. ροή προϊόντων από ένα χώρο αποθήκευσης σε έναν άλλο) όσο και ροή πληροφοριών (π.χ. βαρύτητα και συχνότητα συνεργασίας μεταξύ δυο υπαλλήλων).

THE QUADRATIC ASSIGNMENT PROBLEM - QAP

- Παράδειγμα προβλήματος χωροθέτησης
  - Τα στοιχεία του συνόλου Α παριστάνουν τις αποθήκες ή κέντρα διανομής και
  - Τα στοιχεία του συνόλου Β τις τοποθεσίες εγκατάστασης των αποθηκών
  - Ροές μεταξύ των στοιχείων του Α (αποθήκες): Συχνότητα Εκτέλεσης Διαδρομών, Όγκος προϊόντων που μεταφέρονται μεταξύ δύο αποθηκών
  - Ροές μεταξύ των στοιχείων του Β (τοποθεσίες): Αποστάσεις, Μοναδιαίο κόστος μεταφοράς προϊόντων ανάμεσα σε δύο τοποθεσίες
- Η αντικειμενική συνάρτηση μία λύσης του QAP ορίζεται ως το άθροισμα του γινομένου των ροών του συνόλου Α και του συνόλου Β, βάσει της αντιστοίχισης που ορίζει η λύση αυτή, π.χ.

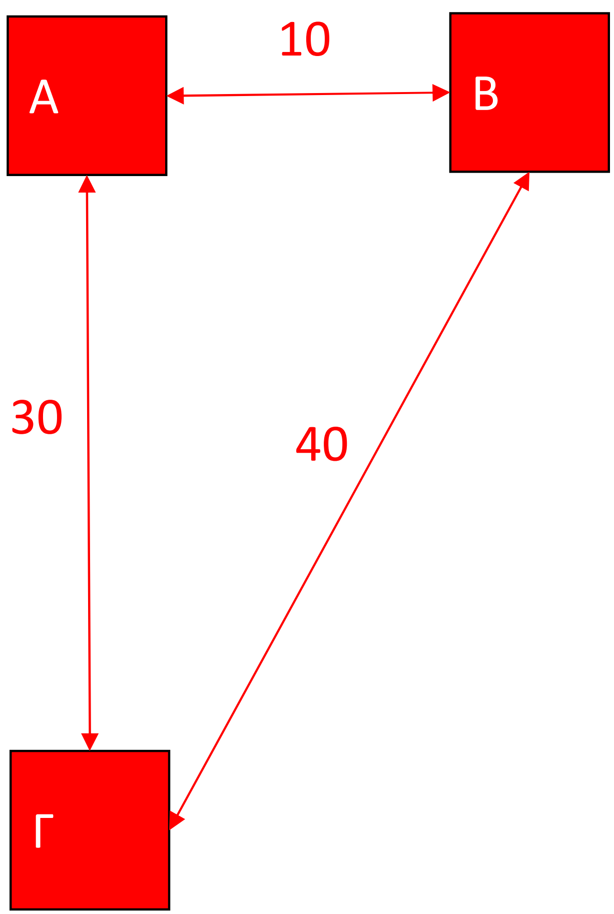
Κόστος = Συχνότητα Δρομολογίων (Ροή Α) * Απόσταση (Ροή Β)

Απόσταση/Μέρα = (Αριθμός Δρομολογίων/Μέρα) * (Απόσταση/Δρομολόγιο)

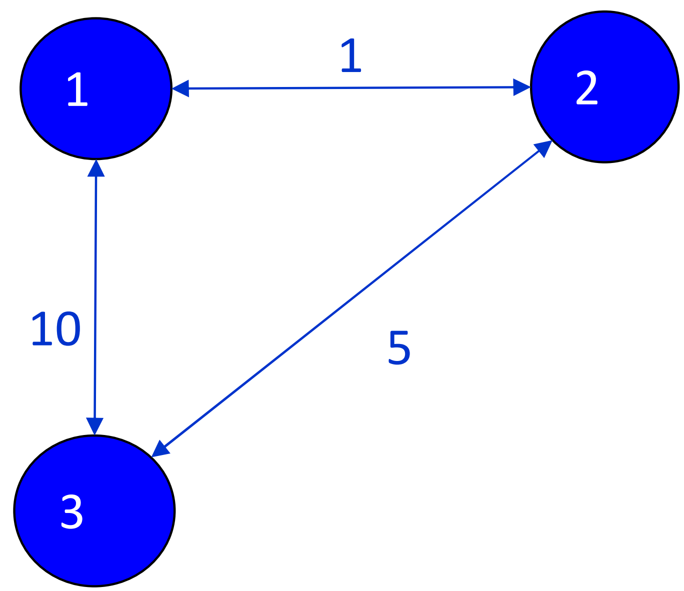
- <u>Στόχος</u>, λοιπόν, του προβλήματος είναι να αντιστοιχηθούν τα στοιχεία του συνόλου Α (αποθήκες) με αυτά του Β (τοποθεσίες) με τέτοιον τρόπο ώστε να ελαχιστοποιηθεί το κόστος που προκύπτει από τις υπό εξέταση ροές.

THE QUADRATIC ASSIGNMENT PROBLEM - QAP

Έστω μια εφαρμογή του QAP με τα συμμετρικά δεδομένα όπως περιγράφονται στα δύο σχήματα:

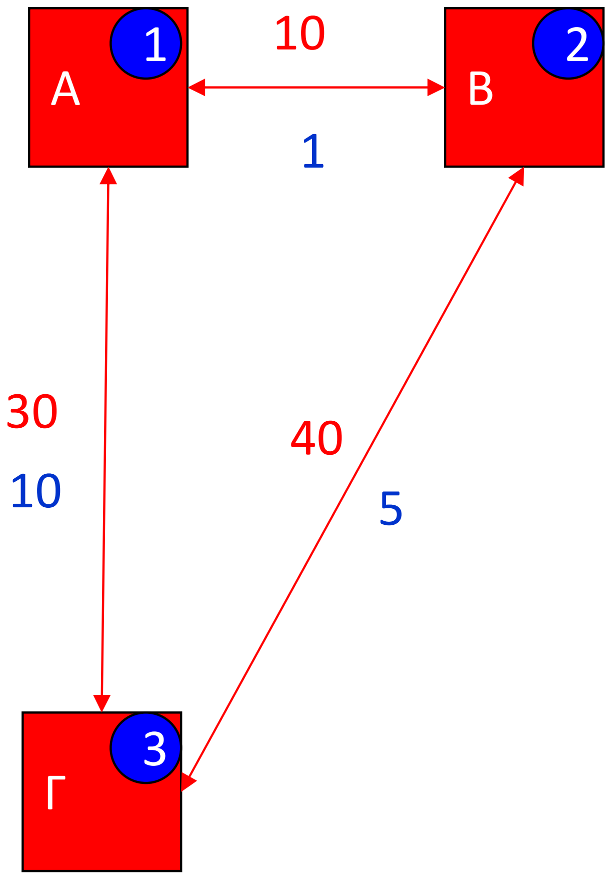


Τοποθεσίες και αποστάσεις



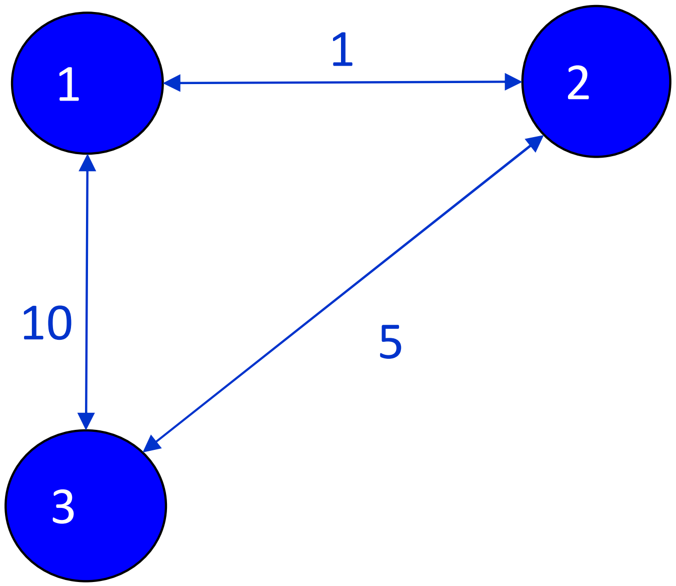
Εγκαταστάσεις και ροές

THE QUADRATIC ASSIGNMENT PROBLEM - QAP



Έστω μια λύση (1A,2B,3Γ) του QAP με κόστος

$$
\begin{aligned}
&z(s) = \\
&= (d_{AB} \cdot f_{12}) + (d_{AC} \cdot f_{13}) + (d_{BA} \cdot f_{21}) \\
&+ (d_{BC} \cdot f_{23}) + \ (d_{CA} \cdot f_{31}) + \ (d_{CB} \cdot f_{32}) = \\
&= (10 \cdot 1) + \ (30 \cdot 10) \ + \ (10 \cdot 1) + \ (40 \cdot 5) \\
&+ \ (30 \cdot 10) \ + \ (40 \cdot 5) = \ 1020
\end{aligned}
$$



Εγκαταστάσεις και ροές

ΕΦΑΡΜΟΓΗ QAP :
ΧΩΡΟΘΕΤΗΣΗ ΑΠΟΘΗΚΕΥΤΙΚΩΝ ΧΩΡΩΝ

- Η εταιρεία «Κέντρα Εφοδιαστικής Α.Ε.» έχει ως δραστηριότητα την ανάπτυξη μεγάλων κέντρων Logistics εντός της Ελληνικής Επικράτειας. Το 1ο από τα κέντρα Logistics θα κατασκευαστεί στην περιοχή του «Θριασίου Πεδίου» και θα αποτελείται από 4 αποθηκευτικές μονάδες (έστω οι αποθηκευτικές μονάδες 1, 2, 3, 4).

- Λόγω των διαστάσεων του οικοπέδου, κάθε μία από τις αποθηκευτικές μονάδες μπορεί να τοποθετηθεί σε ακριβώς μία περιοχή Α, Β, Γ, Δ του προαναφερθέντος οικοπέδου.

- Η κάθε αποθηκευτική μονάδα συσχετίζεται άμεσα με τις υπόλοιπες. Ο βαθμός συσχέτισης εξαρτάται από τη συχνότητα των συναλλαγών που εκτελούνται μεταξύ των αποθηκευτικών μονάδων.

- Για κάθε ζεύγος περιοχών είναι δεδομένη η απόσταση που τις χωρίζει.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ QAP :
ΧΩΡΟΘΕΤΗΣΗ ΑΠΟΘΗΚΕΥΤΙΚΩΝ ΧΩΡΩΝ

- Ροές Μεταξύ Περιοχών (Αποστάσεις)
- Θεωρώντας ότι οι αποστάσεις μεταξύ των περιοχών είναι συμμετρικές, δηλαδή ότι ισχύει η σχέση: $d_{AB} = d_{BA}$, όπου d η απόσταση μεταξύ δύο τοποθεσιών, ο πίνακας των αποστάσεων (κόστος) μεταξύ των περιοχών διαμορφώνεται ως εξής:

	Α	Β	Γ	Δ
Α	0	20,62	56,57	11,18
Β	20,62	0	40,31	25,50
Γ	56,57	40,31	0	54,08
Δ	11,18	25,50	54,08	0

Αποστάσεις μεταξύ των περιοχών Α,Β,Γ,Δ

ΕΦΑΡΜΟΓΗ QAP :
ΧΩΡΟΘΕΤΗΣΗ ΑΠΟΘΗΚΕΥΤΙΚΩΝ ΧΩΡΩΝ

- Ροές Μεταξύ Περιοχών (Αποστάσεις)
- Θεωρώντας ότι οι αποστάσεις μεταξύ των περιοχών είναι συμμετρικές, δηλαδή ότι ισχύει η σχέση: $d_{AB} = d_{BA}$, όπου d η απόσταση μεταξύ δύο τοποθεσιών, ο πίνακας των αποστάσεων (κόστος) μεταξύ των περιοχών διαμορφώνεται ως εξής:

	Α	Β	Γ	Δ
Α	0	20,62	56,57	11,18
Β	20,62	0	40,31	25,50
Γ	56,57	40,31	0	54,08
Δ	11,18	25,50	54,08	0

Αποστάσεις μεταξύ των περιοχών Α,Β,Γ,Δ

ΕΦΑΡΜΟΓΗ QAP :
ΧΩΡΟΘΕΤΗΣΗ ΑΠΟΘΗΚΕΥΤΙΚΩΝ ΧΩΡΩΝ

- Ροές μεταξύ αποθηκών (Κόστος / Μονάδα απόστασης)
- Παρακάτω παρουσιάζουμε τον πίνακα κόστους /μονάδα απόστασης μεταξύ των αποθηκευτικών μονάδων που διαμορφώνεται ανάλογα με τις ροές των εμπορευμάτων από την μια αποθηκευτική μονάδα στην άλλη

	1	2	3	4
1	0	8,5	1,5	5
2	8,5	0	0,5	0,5
3	1,5	0,5	0	2
4	5	0,5	2	0

Κόστος / Μονάδα απόστασης μεταξύ των αποθηκών 1, 2, 3, 4

ΕΦΑΡΜΟΓΗ QAP :
ΧΩΡΟΘΕΤΗΣΗ ΑΠΟΘΗΚΕΥΤΙΚΩΝ ΧΩΡΩΝ

Μορφή Λύσης

- Ένα σύνολο 4 αντιστοιχίσεων μεταξύ Αποθηκών και τοποθεσιών
- Π.χ. {A2, B1, C3, D4}

Στοιχείο Λύσης

- Μια αντιστοίχιση μεταξύ Μίας Αποθήκης και μίας Τοποθεσίας

ΠΣΕ για την εφαρμογή QAP

- Ένας λογικός σχεδιασμός ενός κατασκευαστικού αλγορίθμου για το QAP
  - Επαναληπτική διαδικασία
  - <u>Στοιχείο Λύσης</u>: Σε κάθε επανάληψη επιλογή μίας αντιστοίχισης Τοποθεσίας-Αποθήκης
  - <u>Κριτήριο Επιλογής</u>: Ελαχιστοποίηση της αύξησης του κόστους της τρέχουσας λύσης

ΠΣΕ για την εφαρμογή QAP

- Ιδιαιτερότητα του προβλήματος: Το κόστος προέρχεται από τις αλληλεπιδράσεις των αποθηκών (από τις ροές μεταξύ των εγκαταστάσεων)
- Πρώτη Επανάληψη: Μία αντιστοίχιση, π.χ. (A1)
- Η λύση αυτή δεν ορίζει κάποιο κόστος, καθώς δεν υπάρχει ακόμα αλληλεπίδραση των αποθηκών
- Επομένως, για την πρώτη επανάληψη, μπορούμε να αρχίσουμε με την τυχαία τοποθέτηση μία αποθήκης σε μία τοποθεσία
- Κατόπιν, σε κάθε επανάληψη ελέγχουμε την αύξηση του κόστους που επιφέρει κάθε πιθανή αντιστοίχιση τοποθεσίας-αποθήκης και εφαρμόζουμε αυτήν με την ελάχιστη αύξηση

ΠΣΕ για την εφαρμογή QAP

- Set of Locations L = {A, B, C, D}
- Set of Warehouses W = {1, 2, 3, 4}

Greedy Algorithm

- Randomly select $l^* \in L, w^* \in W$
- Assign w^* to l^*, $L \leftarrow L - l^*, W \leftarrow W - w^*$
- While $|L| > 0$

  $w = \emptyset, l = \emptyset, bestSoFar \leftarrow +\infty$

  for l in L

  for w in W

  Δz = Additional Cost for placing w at l

  if $\Delta z < bestSoFar$

  $bestSoFar = \Delta z,\ l^* = l,\ w^* = w$

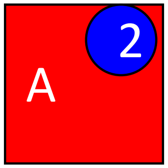
  Assign w^* to l^*, $L \leftarrow L - l^*, W \leftarrow W - w^*$

ΠΣΕ για την εφαρμογή QAP

Τυχαία Αρχικοποίηση Λύσης

- Τυχαία Επιλογή Αποθήκης: 2
- Τυχαία Επιλογή Τοποθεσίας: A

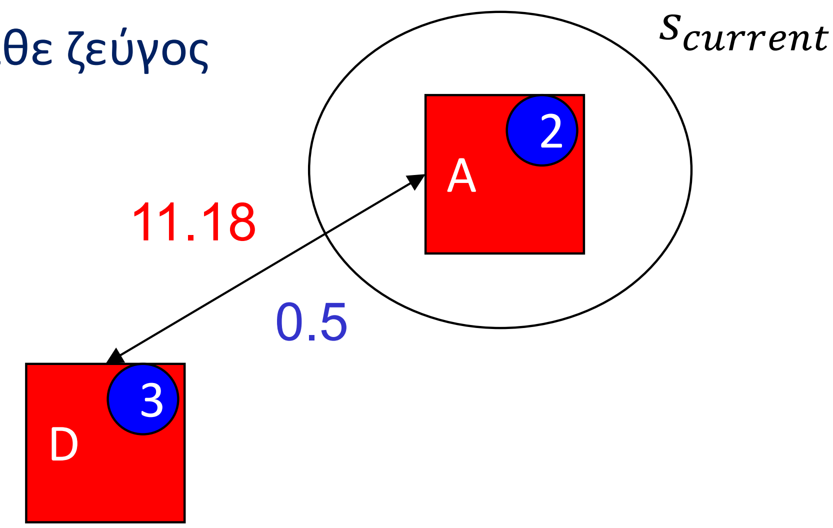
- Λύση $s = \{(A, 2)\}$



ΠΣΕ για την εφαρμογή QAP

1η Επανάληψη

- Υπολογισμός Επιπρόσθετου Κόστους για κάθε ζεύγος
- Dz(B , 1) = 350.54
- Dz(B , 3) = 20.62
- Dz(B , 4) = 20.62
- Dz(C , 1) = 961.69
- Dz(C , 3) = 56.57
- Dz(C , 4) = 56.57
- Dz(D , 1) = 190.06
- **Dz(D , 3) = 11.18**
- Dz(D , 4) = 11.18



Νέα Λύση: $s = \{(A, 2), (D, 3)\}$

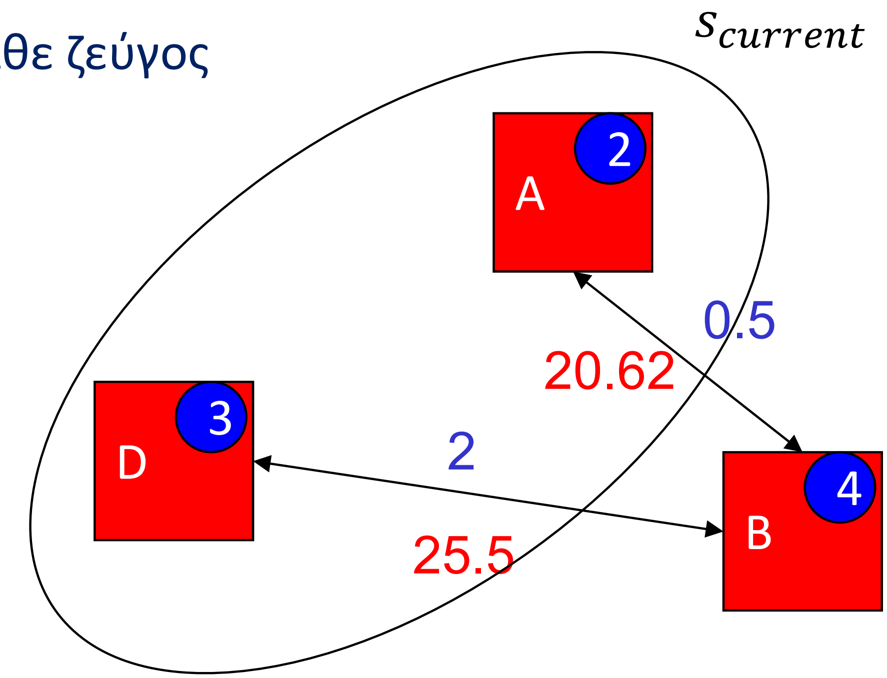
με κόστος: $z(s) = 11.18$

ΠΣΕ για την εφαρμογή QAP

2η Επανάληψη

- Υπολογισμός Επιπρόσθετου Κόστους για κάθε ζεύγος
- Dz(B , 1) = 427.04
- **Dz(B , 4) = 122.62**
- Dz(C , 1) = 1123.93
- Dz(C , 4) = 272.89

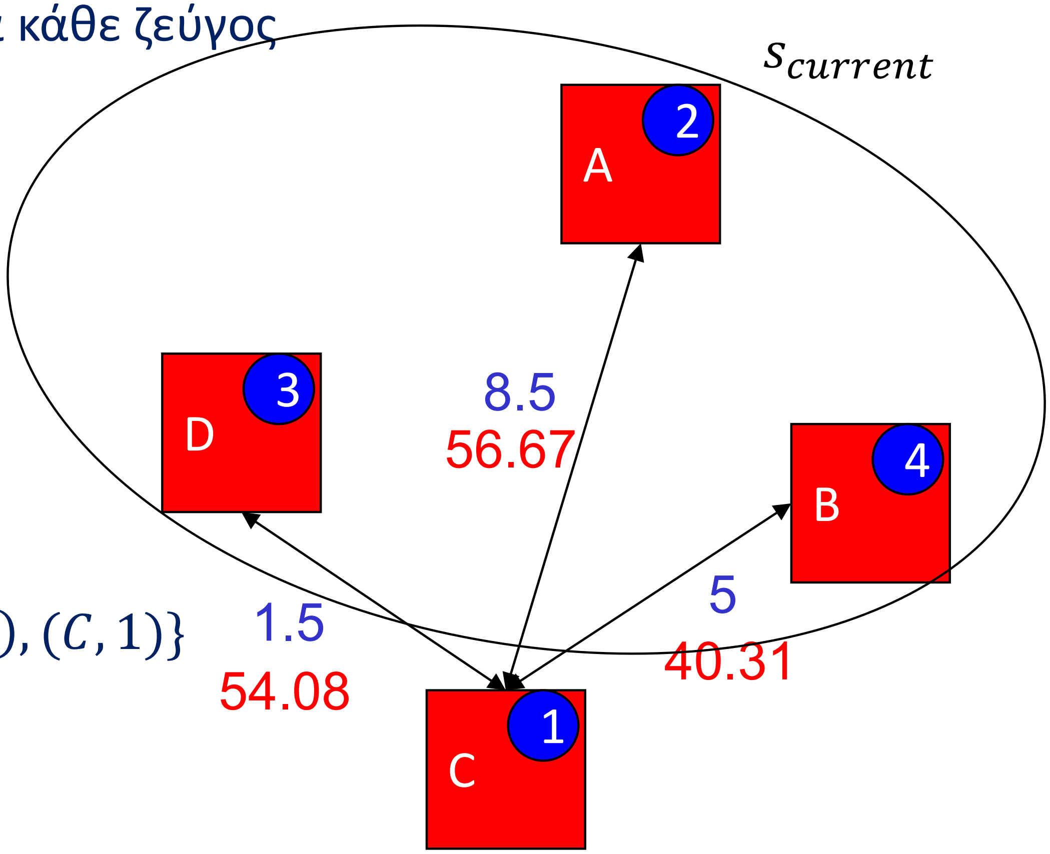
Νέα Λύση : $s = \{(A, 2), (D, 3), (B, 4)\}$
με κόστος: $z(s) = 122.62$



ΠΣΕ για την εφαρμογή QAP

$3^η$ Επανάληψη

- Υπολογισμός Επιπρόσθετου Κόστους για κάθε ζεύγος
- **Dz(C , 1) = 1527.03**



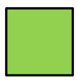
Νέα (Τελική) Λύση: $s = \{(A, 2), (D, 3), (B, 4), (C, 1)\}$
με κόστος: $z(s) = 1660.83$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΧΩΡΟΘΕΤΗΣΗΣ

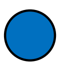
- Μία εταιρία ελαστικών θα επενδύσει σε μία νέα χώρα
- Θα αγοράσει αποθήκες ώστε να προμηθεύει ελαστικά διάφορες περιοχές (πελάτες)
- Κάθε πελάτης:
  - Έχει ένα ύψος παραγγελιών από την αποθήκη που εξυπηρετείται
- Έχει καταλήξει σε διάφορες υποψήφιες αποθήκες:
  - Κάθε αποθήκη έχει ένα κόστος αγοράς
  - Κάθε αποθήκη έχει μία χωρητικότητα προϊόντων
- Ανάλογα με την τοποθεσία ενός πελάτη και την τοποθεσία της αποθήκης που τον εξυπηρετεί, υπάρχει ένα κόστος μεταφοράς προϊόντων

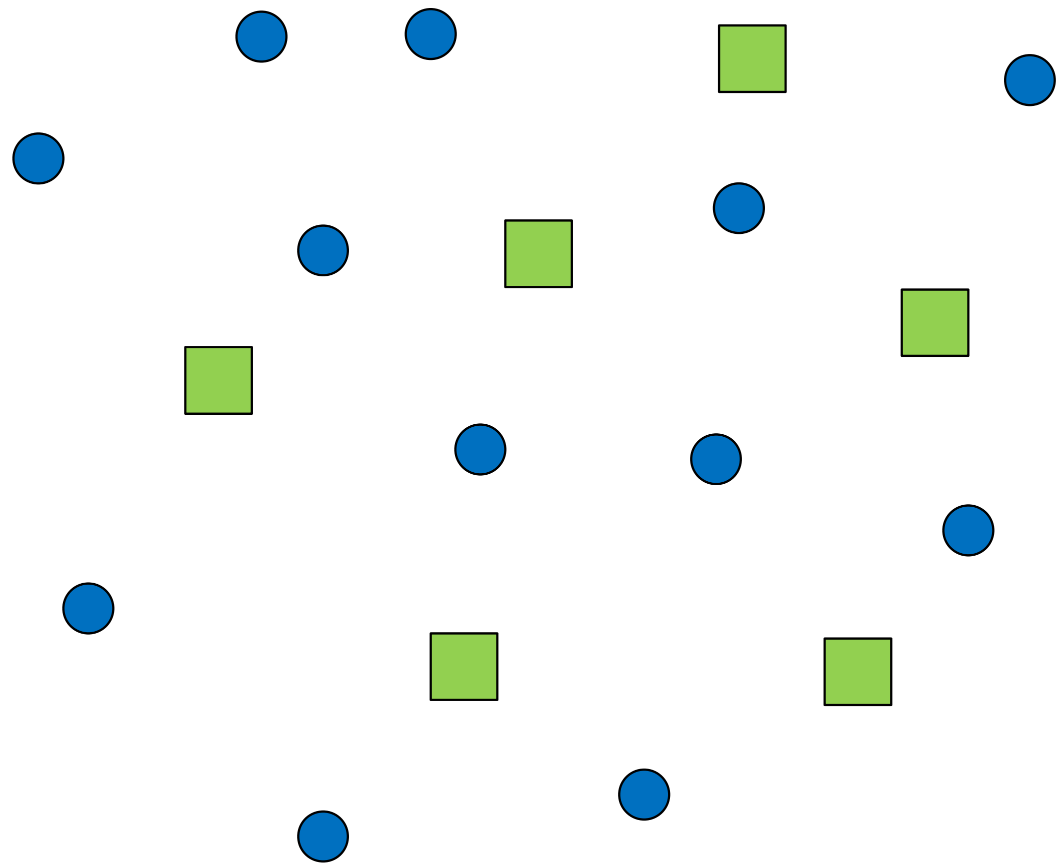
ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΧΩΡΟΘΕΤΗΣΗΣ

- Υποψήφια Αποθήκη



- Πελάτες





ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΧΩΡΟΘΕΤΗΣΗΣ

- Σύνολο Αποθηκών:

$$F = \{1,2,3, \dots, k\}$$

- Κάθε Αποθήκη $i \in F$,
  - Fixed Κόστος Αγοράς: f_i
  - Χωρητικότητα: Q_i

- Σύνολο Πελατών:

$$V = \{1,2,3, \dots, n\}$$

- Κάθε Πελάτης $i \in V$,
  - Ζήτηση Προϊόντος: d_i

- Κόστος Μεταφοράς
  - Για κάθε ζεύγος $i \in F, j \in V,\ c_{ij}$
  - Κόστος μεταφοράς προϊόντων από την αποθήκη i στον πελάτη j

ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΧΩΡΟΘΕΤΗΣΗΣ

Λύση:

- Για κάθε πελάτη: Αντιστοίχιση σε μία από τις υποψήφιες αποθήκες

Περιορισμοί:

- Η συνολική ζήτηση προϊόντων των πελατών που έχουν αντιστοιχηθεί σε μία αποθήκη δεν ξεπερνά τη χωρητικότητα της αποθήκης

Αντικειμενική Συνάρτηση:

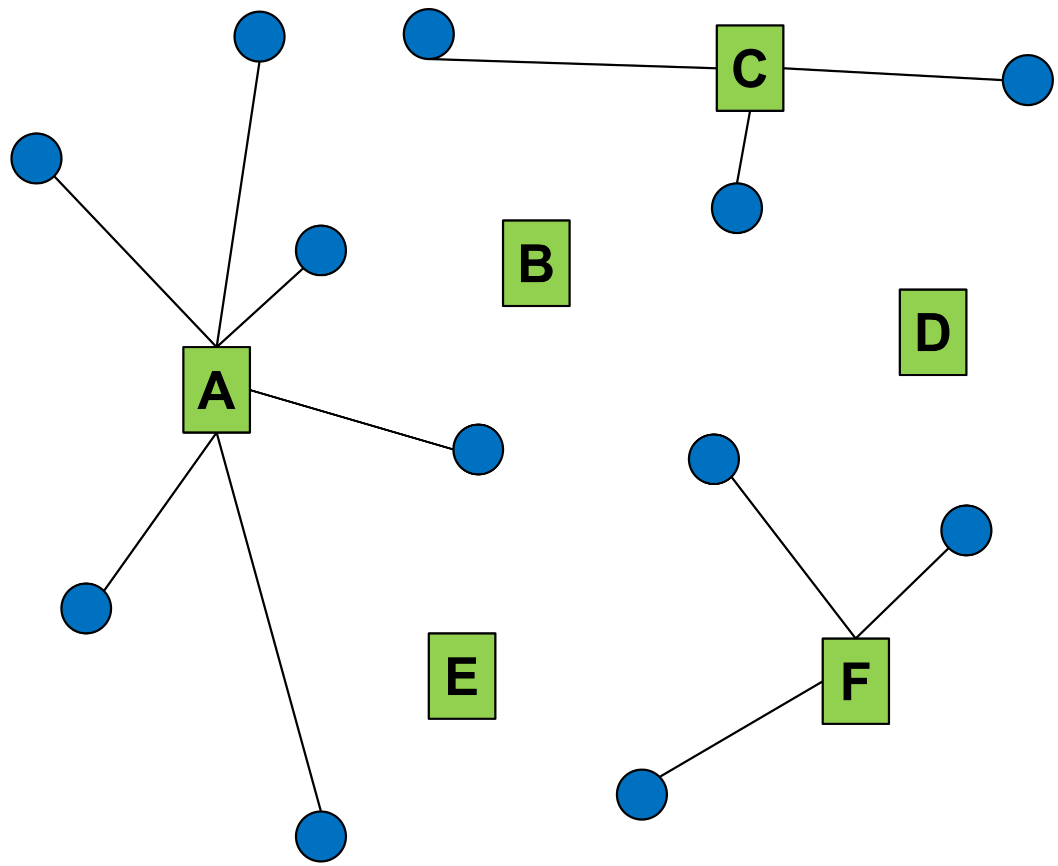
- Το συνολικό κόστος είναι ελάχιστο
  - Fixed Κόστος: Άθροισμα του κόστους των αποθηκών στις οποίες έχουν ανατεθεί πελάτες

    (Αγορά Αποθηκών)
  - Operating Κόστος: Άθροισμα κόστους αντιστοιχίσεων πελατών αποθηκών

    (Μεταφορά προϊόντων)

ΜΟΡΦΗ ΛΥΣΗΣ

- Κάθε Πελάτης αντιστοιχίζεται σε μία αποθήκη
- Κάποιες Αποθήκες δεν έχουν αντιστοιχηθεί σε κανέναν πελάτη: (B,D,E)



ΚΟΣΤΟΣ ΛΥΣΗΣ

<u>Fixed Κόστος</u>

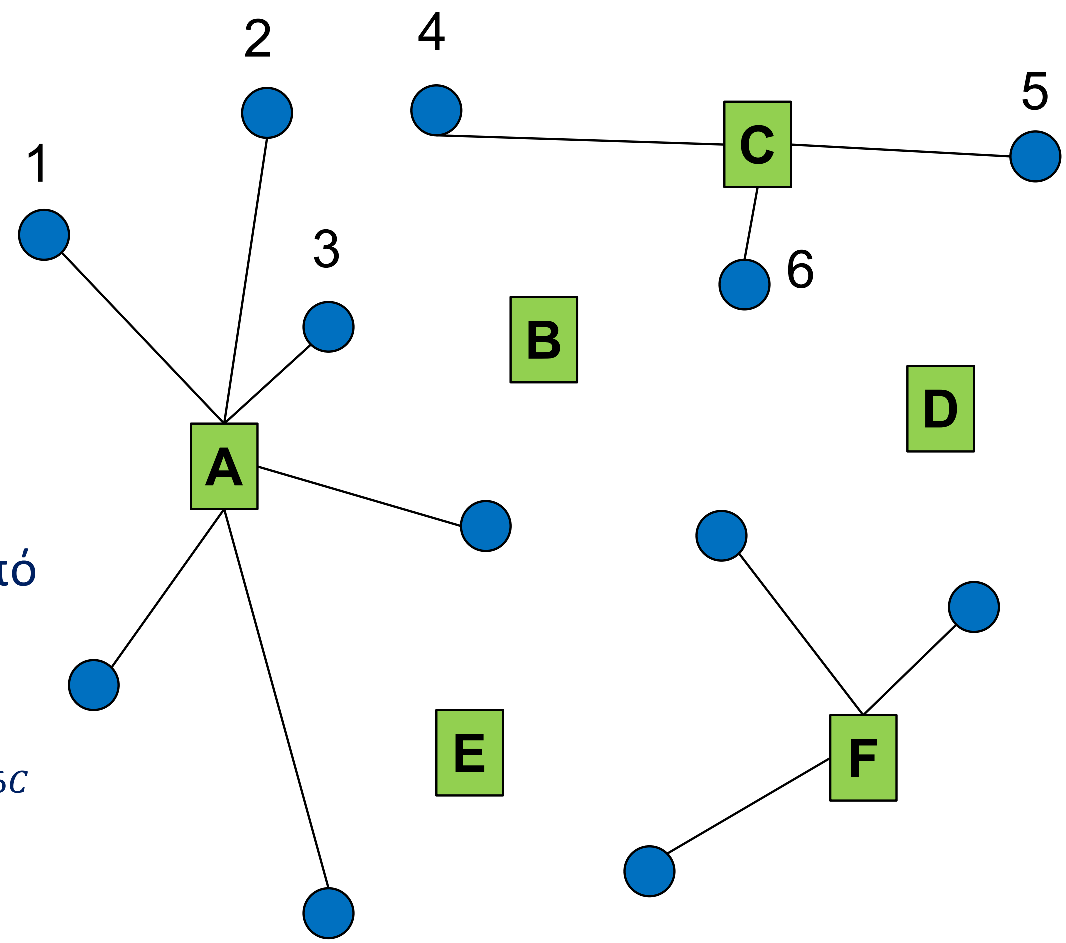
– Κόστος ανοικτών αποθηκών:

$$f_A + f_C + f_F$$

<u>Variable Κόστος</u>

– Κόστος Μεταφοράς προϊόντων από τις αποθήκες στους πελάτες:

$$c_{1A} + c_{2A} + c_{3A} + \cdots + c_{4C} + c_{5C} + c_{6C}$$



ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

- Μία πλεονεκτική στρατηγική επίλυσης θα έχει ως στόχο την παραγωγή n αντιστοιχίσεων (κάθε πελάτης σε μία αποθήκη)
- Ο σχεδιασμός της πλεονεκτικής στρατηγικής δεν είναι τόσο απλός στην περίπτωση αυτή
  - Δύο παράγοντες κόστους
  - <u>Στόχος</u>: Καλή ισορροπία ανάμεσα στους δύο παράγοντες κόστους
  - Ο σχεδιασμός εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από τα δεδομένα

ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

- ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ Α:
  Μεγάλα fixed κόστη για την αγορά των αποθηκών σε σχέση με τα κόστη αντιστοίχισης πελατών σε αποθήκες
- Το πρόβλημα μπορεί να γίνει αντιληπτό και να αντιμετωπιστεί σαν *πρόβλημα επιλογής* των αποθηκών με το ελάχιστο fixed κόστος οι οποίες προσφέρουν χωρητικότητα ικανή για την εξυπηρέτηση όλων των πελατών
- Πλεονεκτική Στρατηγική Επίλυσης
  - Προτεραιότητα: Αποθήκες Μικρού κόστους, Μεγάλης Χωρητικότητας
  - Αποδοτικό Κριτήριο Επιλογής: Αποθήκες Μικρού λόγου (f_i/Q_i)

Σχόλιο:

Στην ειδική περίπτωση που όλες οι αποθήκες έχουν το ίσο κόστος αγοράς και ίση χωρητικότητα: Bin Packing Problem

ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

- ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ Β:
  Μεγάλα κόστη αντιστοίχισης πελατών σε αποθήκες σε σχέση με τα κόστη αγοράς των αποθηκών
- Το πρόβλημα μπορεί να γίνει αντιληπτό και να αντιμετωπιστεί σαν πρόβλημα αντιστοίχισης πελατών σε αποθήκες
- Πλεονεκτική Στρατηγική Επίλυσης
  - Προτεραιότητα: Μικρά κόστη αντιστοίχισης
- Η δυσκολία επίλυσης συνδέεται με το γεγονός πως λόγω των περιορισμών χωρητικότητας οι πελάτες μπορεί να μην είναι δυνατό να αντιστοιχηθούν στην πιο οικονομική για αυτούς αποθήκη

<u>Σχόλιο</u>:

Αν οι χωρητικότητες των αποθηκών είναι πολύ μεγάλες, το πρόβλημα είναι εύκολο να λυθεί: Κάθε πελάτης στην οικονομικότερη (“κοντινότερη του”) αποθήκη

ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

- Αντιμετωπίζουμε την πιο απαιτητική περίπτωση: Συγκρίσιμα Fixed και Operating costs (Πάγια και κόστη αντιστοίχισης)
- Παρουσιάζουμε και αναλύουμε τα χαρακτηριστικά τριών πλεονεκτικών στρατηγικών επίλυσης
- Πρόβλημα
  - 1000 πελάτες
  - 30 υποψήφιες τοποθεσίες

ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

- Αλγόριθμος Α
  - Όσο υπάρχουν πελάτες χωρίς αντιστοιχίσεις
    - Βρες την πιο οικονομική αντιστοίχιση πελάτη-αποθήκης
    - Το κόστος μία αντιστοίχισης αποτελείται από το κόστος που συνδέει έναν πελάτη με μία αποθήκη και το fixed κόστος της αποθήκης εφόσον αυτήν είναι άδεια

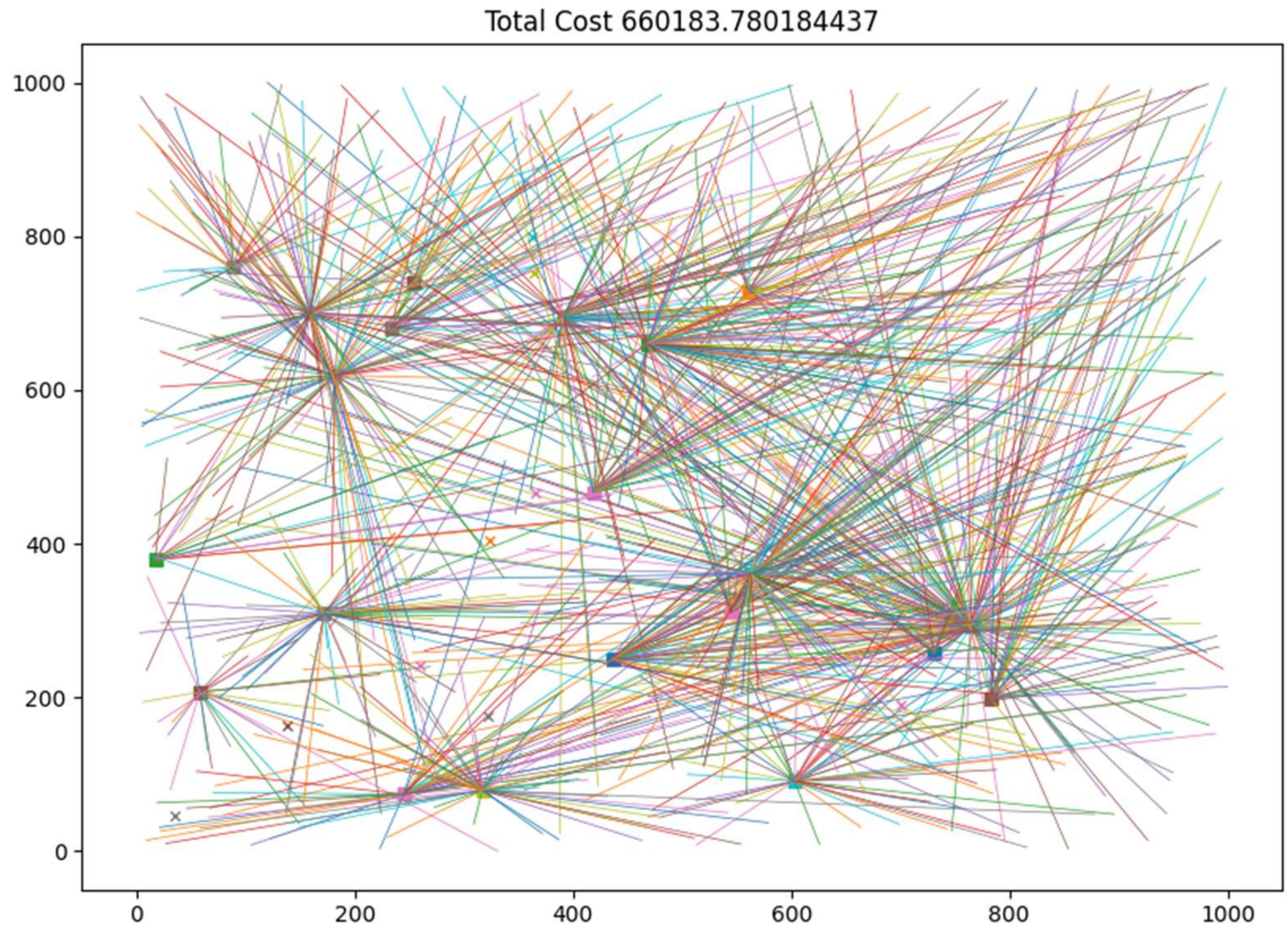
ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

- Αλγόριθμος Α
  - Όσο υπάρχουν πελάτες χωρίς αντιστοιχίσεις
    - Βρες την πιο οικονομική αντιστοίχιση πελάτη-αποθήκης
    - Το κόστος μία αντιστοίχισης αποτελείται από το κόστος που συνδέει έναν πελάτη με μία αποθήκη και το fixed κόστος της αποθήκης εφόσον αυτήν είναι άδεια
- Πολύ κακή επιλογή:
  - Ο αλγόριθμος θα ξεκινήσει επιλέγοντας την πιο φθηνή αποθήκη (αδιαφορώντας για την χωρητικότητα της)
  - Κατόπιν θα εισάγει πελάτες στην επιλεγμένη αποθήκη μέχρι να καλυφθεί η χωρητικότητα της, αδιαφορώντας για το πόσο αυξημένα είναι τα κόστη

Total cost:
660183.78

Fixed cost:
340000

Operating cost:
320183.78



ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

- Αλγόριθμος Β
  - Όσο υπάρχουν πελάτες χωρίς αντιστοιχίσεις
    - Επιλογή καλύτερης αποθήκης (Διάφορα κριτήρια)
    - Εισαγωγή των οικονομικότερων πελατών βάσει κόστους στην επιλεγμένη αποθήκη μέχρι εξάντλησης της χωρητικότητας

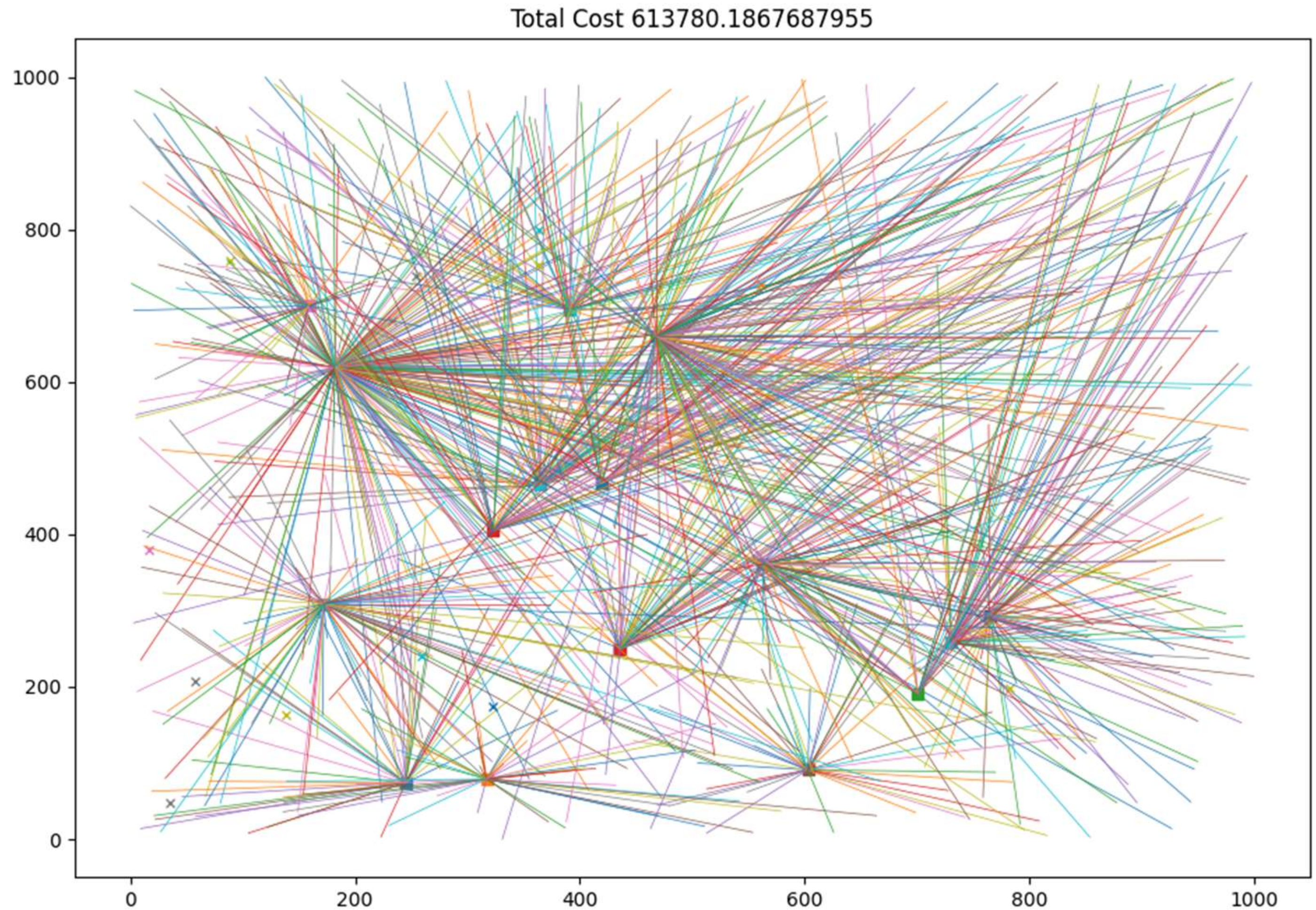
ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

- Αλγόριθμος Β
  - Όσο υπάρχουν πελάτες χωρίς αντιστοιχίσεις
    - Επιλογή καλύτερης αποθήκης (Διάφορα κριτήρια)
    - Εισαγωγή των οικονομικότερων πελατών βάσει κόστους στην επιλεγμένη αποθήκη μέχρι εξάντλησης της χωρητικότητας
- Αδύναμο σημείο:
  - Μπορούν να γίνονται ιδιαίτερα κακές αντιστοιχίσεις πελατών σε αποθήκες
  - Όταν ανοίγει μία αποθήκη, ένας μακρινός πελάτης μπορεί να εισαχθεί σε αυτήν απλά επειδή καλύπτεται από την χωρητικότητα της

Total cost:
613780.19

Fixed cost:
283000

Operating cost:
330780.19



ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

- Αλγόριθμος Γ
  - Προσπάθεια να ξεπεραστεί το πρόβλημα με τις κακές αντιστοιχίσεις πελατών σε αποθήκες
  - Μεγαλύτερη ελευθερία επιλογής αντιστοιχίσεων πελατών αποθηκών
  - Όσο υπάρχουν πελάτες χωρίς αντιστοιχίσεις
    - Επιλογή του ελάχιστου αριθμού των καλύτερων αποθηκών (Διάφορα κριτήρια), βάσει του πληθυσμού των πελάτων που δεν έχουν αντιστοιχηθεί
    - Σημείωση: Οι επιλεγμένες αποθήκες ενδέχεται να μην καταφέρουν να καλύψουν όλους τους πελάτες
    - Επιλογή των οικονομικότερων αντιστοιχίσεων μεταξύ των πελατών και των επιλεγμένων αποθηκών, μέχρι την εξάντληση της χωρητικότητας τους

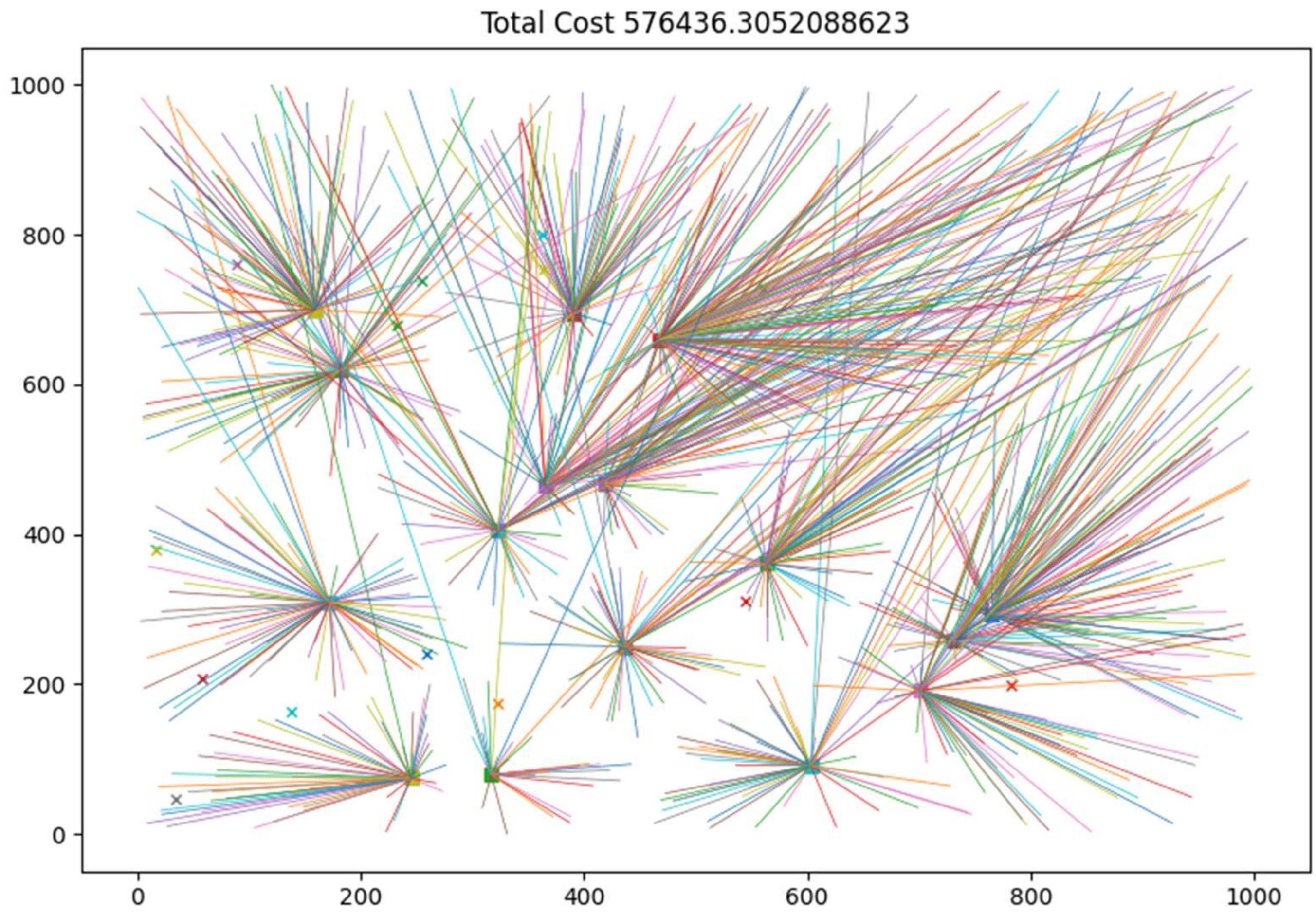
ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

- Αλγόριθμος Γ
  - Προσπάθεια να ξεπεραστεί το πρόβλημα με τις κακές αντιστοιχίσεις πελατών σε αποθήκες
  - Μεγαλύτερη ελευθερία επιλογής αντιστοιχίσεων πελατών αποθηκών
  - Όσο υπάρχουν πελάτες χωρίς αντιστοιχίσεις
    - Επιλογή του ελάχιστου αριθμού των καλύτερων αποθηκών (Διάφορα κριτήρια), βάσει του πληθυσμού των πελάτων που δεν έχουν αντιστοιχηθεί
    - Σημείωση: Οι επιλεγμένες αποθήκες ενδέχεται να μην καταφέρουν να καλύψουν όλους τους πελάτες
    - Επιλογή των οικονομικότερων αντιστοιχίσεων μεταξύ των πελατών και των επιλεγμένων αποθηκών, μέχρι την εξάντληση της χωρητικότητας τους
- Ισορροπημένη Συμπεριφορά:
  - Ισορροπία μεταξύ της επιλογής καλών αποθηκών και καλών αντιστοιχίσεων
  - Το λειτουργικό κόστος περιορίζεται δραστικά (με πιθανή μία περιορισμένη επιβάρυνση του fixed κόστους)

Total cost:
576436.30

Fixed cost:
283000

Operating cost:
293436.30



ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΟΥ ΧΡΟΝΙΚΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ ΕΡΓΟΥ

PROJECT SCHEDULING PROBLEM

PROJECT SCHEDULING PROBLEM (PSP)

- Ένα έργο αποτελείται από **δραστηριότητες,** οι οποίες πρέπει να εκτελεστούν βάσει ενός συνόλου από **περιορισμούς προτεραιότητας** (precedence constraints).

- Κάθε δραστηριότητα:
  - Έχει **προκαθορισμένη χρονική διάρκεια** και
  - **Απαιτεί ένα σύνολο πόρων για να πραγματοποιηθεί**. Χρηματοοικονομικοί πόροι, ανθρώπινο δυναμικό, μηχανές, εξοπλισμός, ενέργεια, υλικά, χώροι αποθήκευσης, είναι μερικά από τα είδη πόρων που χρησιμοποιούνται για την υλοποίηση ενός έργου.

ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ ΤΟΥ PSP

- Περιορισμοί που αφορούν τις δραστηριότητες:
  - Περιορισμοί προτεραιότητας δραστηριοτήτων
  - Χρονική διάρκεια μεταξύ δύο δραστηριοτήτων

- Περιορισμοί διαθέσιμων πόρων

- Στόχος: Ελαχιστοποίηση του χρόνου ολοκλήρωσης του έργου

RCPSP

- Έστω ένα σύνολο $A = 1, \dots, n$ από δραστηριότητες οι οποίες πρέπει να εκτελεστούν για την ολοκλήρωση του έργου

- Κάθε δραστηριότητα i έχει μία δεδομένη χρονική διάρκεια εκτέλεσης d_i

- Περιορισμοί προτεραιότητας:

  Για να ξεκινήσει μία δραστηριότητα $i \in A$, *πρέπει να έχει ολοκληρωθεί ένα σύνολο δραστηριοτήτων* P_i

  π.χ. $P_8 = \{7,10,12\}$: Για να ξεκινήσει η εργασία 8 πρέπει να έχουν ολοκληρωθεί οι διεργασίες $7, 10$ και 12

RCPSP

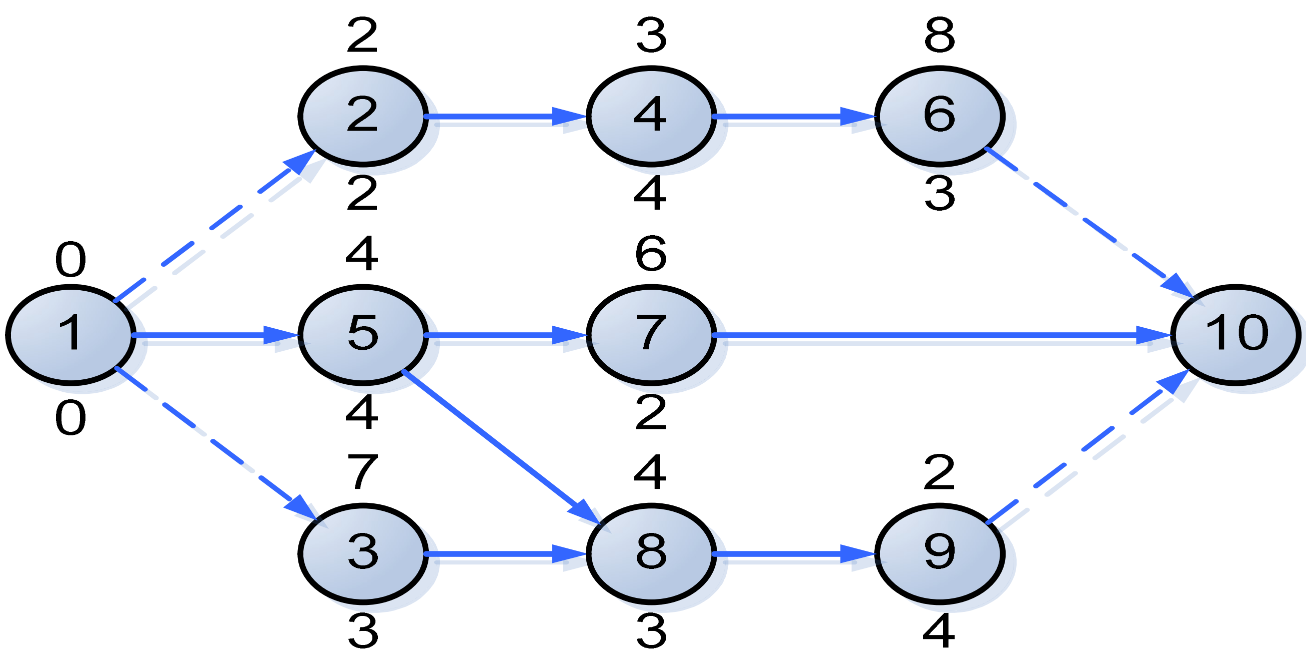
- Κάθε δραστηριότητα έχει συγκεκριμένες απαιτήσεις από διαθέσιμους πόρους έτσι ώστε να είναι δυνατό να ολοκληρωθεί επιτυχώς.
- Έστω ένα σύνολο από διαθέσιμους πόρους $K = \{1, \ldots, m\}$
- Κάθε πόρος $k \in K$ έχει μια δυναμικότητα c_k, η οποία μπορεί να είναι διαθέσιμη κάθε χρονική περίοδο.
- Αντικειμενικός στόχος: ελαχιστοποίηση του χρόνου υλοποίησης του έργου δεδομένου ότι
  - οι περιορισμοί προτεραιότητας δεν παραβιάζονται
  - η δυναμικότητα κάθε διαθέσιμου πόρου δεν παραβιάζεται σε καμία χρονική στιγμή του ορίζοντα προγραμματισμού

ΕΚΦΩΝΗΣΗ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΟΣ

- Θεωρήστε μια συγκεκριμένη υπηρεσία/έργο, η ολοκλήρωση της οποίας απαιτεί την εκτέλεση 8 δραστηριοτήτων.
- Υπάρχει μόνο ένας πόρος (ανθρώπινο δυναμικό), με συνολική δυναμικότητα 8
- Με άλλα λόγια, καμία χρονική στιγμή δε μπορούν να εκτελούνται εργασίες οι οποίες απαιτούν πάνω από 8 εργαζόμενους

ΕΚΦΩΝΗΣΗ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΟΣ

- Η διάρκεια (σε χρονικές μονάδες) κάθε δραστηριότητας αναφέρεται επάνω από το αντίστοιχο κόμβο ενώ οι απαιτήσεις των πόρων, κάθε χρονική μονάδα, στο κάτω μέρος.
- Να σχεδιαστεί μία ΠΣΕ για να υπολογιστεί ο ελάχιστος συνολικός χρόνος ολοκλήρωσης της υπηρεσίας (makespan minimization)



ΕΠΙΛΥΣΗ ΜΕ ΠΣΕ

- Μορφή της Λύσης:
  10 αντιστοιχίσεις, 10 δραστηριοτήτων σε 10 χρονικά διαστήματα (ΧΔ), όπου κάθε ΧΔ παριστάνεται ως [ΒΤ , ΕΤ]. ΒΤ είναι ο χρόνος έναρξης μιας δραστηριότητας, ενώ ΕΤ είναι ο χρόνος κατά τον οποίο ολοκληρώνεται μια δραστηριότητα
- Στοιχείο της Λύσης:
  Μια αντιστοίχιση μιας δραστηριότητας σε ένα ΧΔ
- Κριτήριο Επιλογής:
  Σε κάθε επανάληψη, επιλέγουμε τη δραστηριότητα με τον μεγαλύτερο αριθμό πόρων. Ακολούθως αντιστοιχίζουμε τη δραστηριότητα που επιλέξαμε στο ΧΔ [ΒΤ , ΕΤ] όπως τα ΒΤ (χρόνος έναρξης) και ΕΤ (χρόνος ολοκλήρωσης) περιγράφονται στη μορφή της λύσης. Προφανώς, θα πρέπει να ελέγχουμε αφενός την τήρηση των προτεραιοτήτων μεταξύ των δραστηριοτήτων και αφετέρου τη διαθεσιμότητα των πόρων κάθε χρονική στιγμή.
- Κριτήριο Αξιολόγησης:
  Η συνολική διάρκεια του project ισούται με το χρονικά τελευταίο ΕΤ.

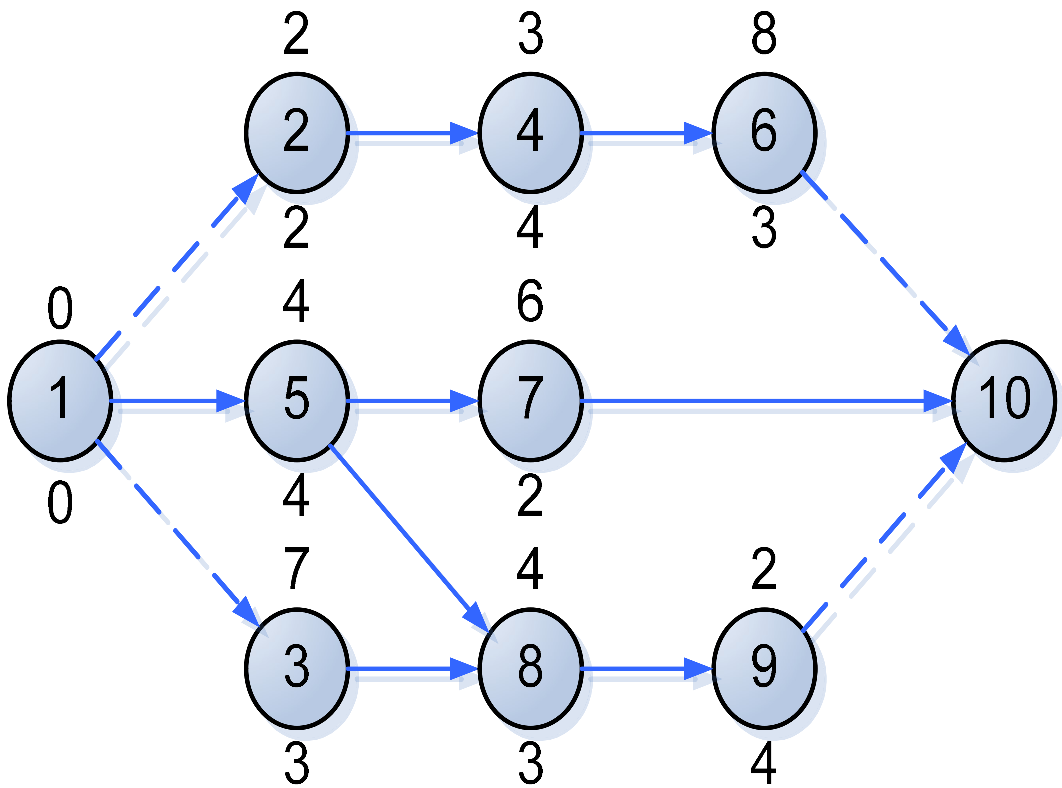
ΕΠΙΛΥΣΗ ΜΕ ΠΣΕ

Η ΠΣΕ περιγράφεται ως εξής:

<u>Επανάληψη 1.</u>

Καθώς η δραστηριότητα 1 είναι η μοναδική εφικτή δραστηριότητα, αντιστοιχίζεται στο ΧΔ

T1: [0,0].



ΕΠΙΛΥΣΗ ΜΕ ΠΣΕ

- **<u>Επανάληψη 2</u>**.
  Αφού η δραστηριότητα 5 απαιτεί τον μεγαλύτερο αριθμό πόρων μεταξύ των εφικτών δραστηριοτήτων, αντιστοιχίζεται στο ΧΔ T5:[0,4].

f(5)=4

f(2)=2

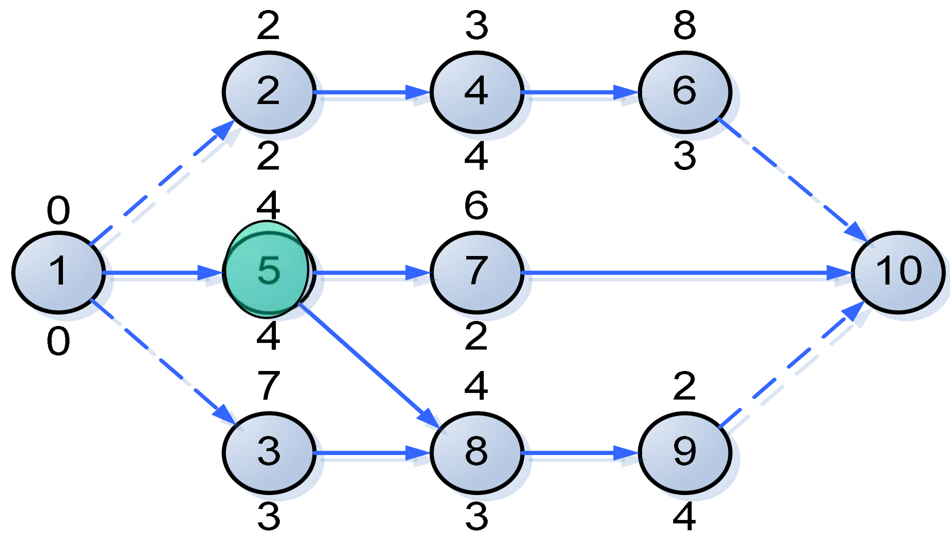
f(3)=3

Max {f(i)}=4,

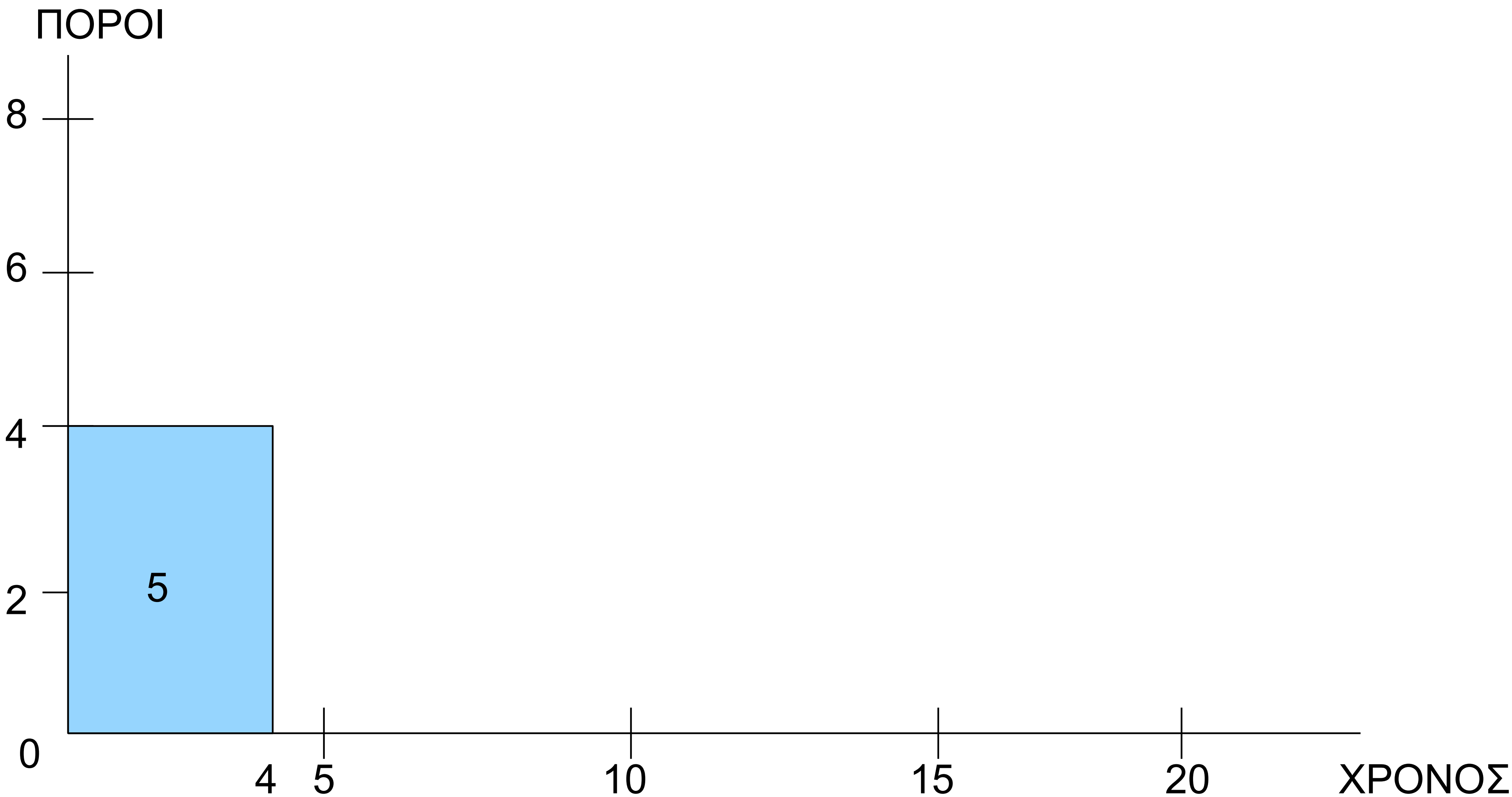
i=5

Makespan = 4

S = (1T1, 5T5)



Επανάληψη 2 – Gantt Chart απεικόνιση



ΕΠΙΛΥΣΗ ΜΕ ΠΣΕ

- **<u>Επανάληψη 3</u>**.
  Αφού η δραστηριότητα 3 απαιτεί τον μεγαλύτερο αριθμό πόρων μεταξύ των εφικτών δραστηριοτήτων, αντιστοιχίζεται στο ΧΔ T3:[0,7].

f(2)=2

f(3)=3

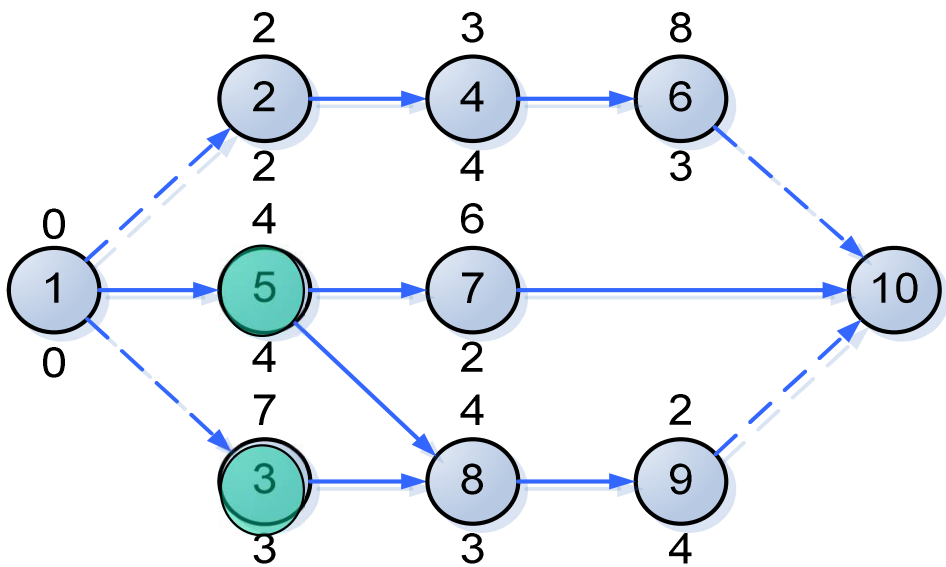
f(7)=2

Max {f(i)}=3,

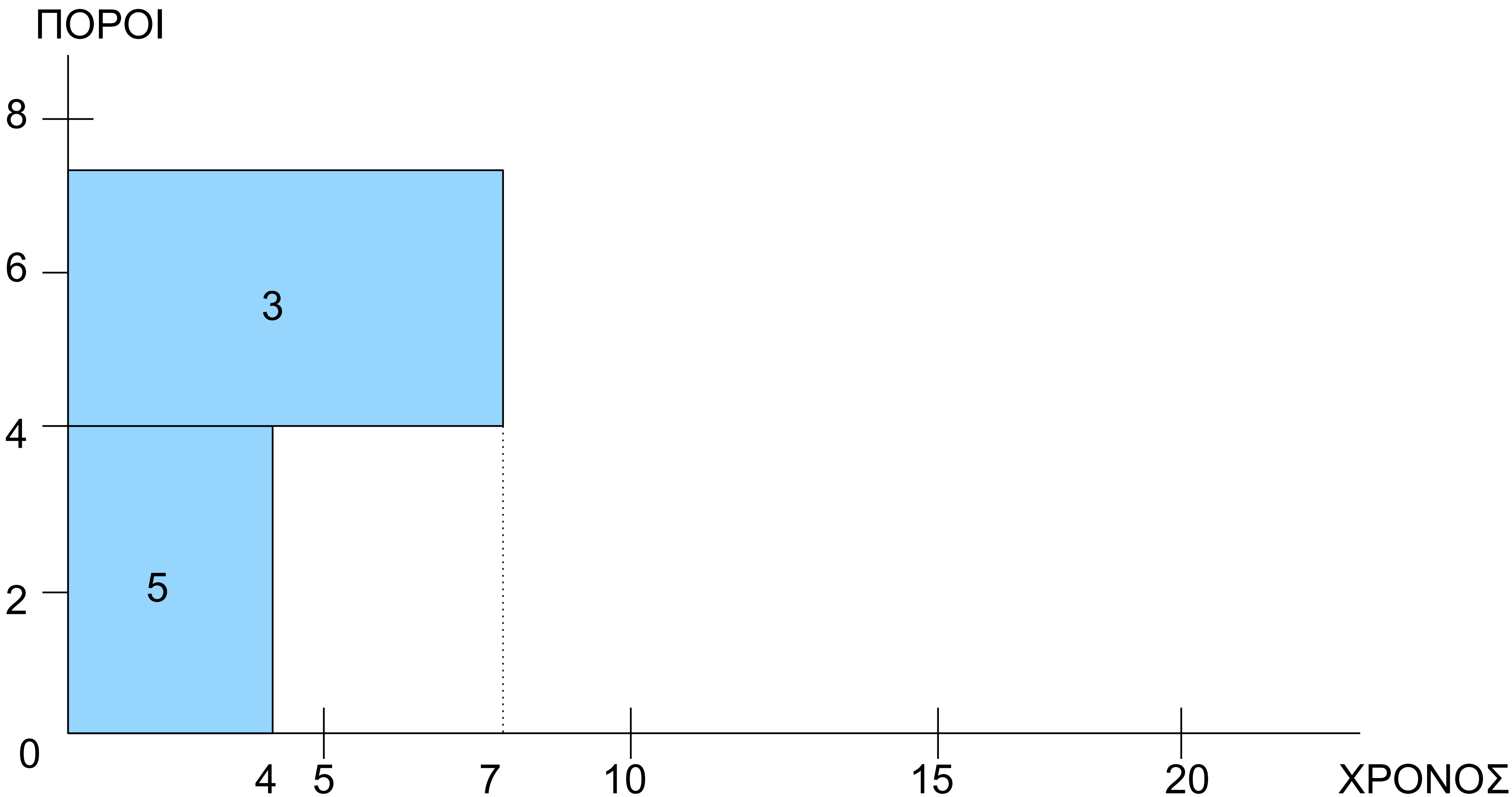
i=3

Makespan = 7

S = (1T1,5T5, 3T3)



Επανάληψη 3 – Gantt Chart απεικόνιση



ΕΠΙΛΥΣΗ ΜΕ ΠΣΕ

- **<u>Επανάληψη 4</u>**.
  Αφού η δραστηριότητα 8 απαιτεί τον μεγαλύτερο αριθμό πόρων μεταξύ των εφικτών δραστηριοτήτων, αντιστοιχίζεται στο ΧΔ Τ8:[7,11].

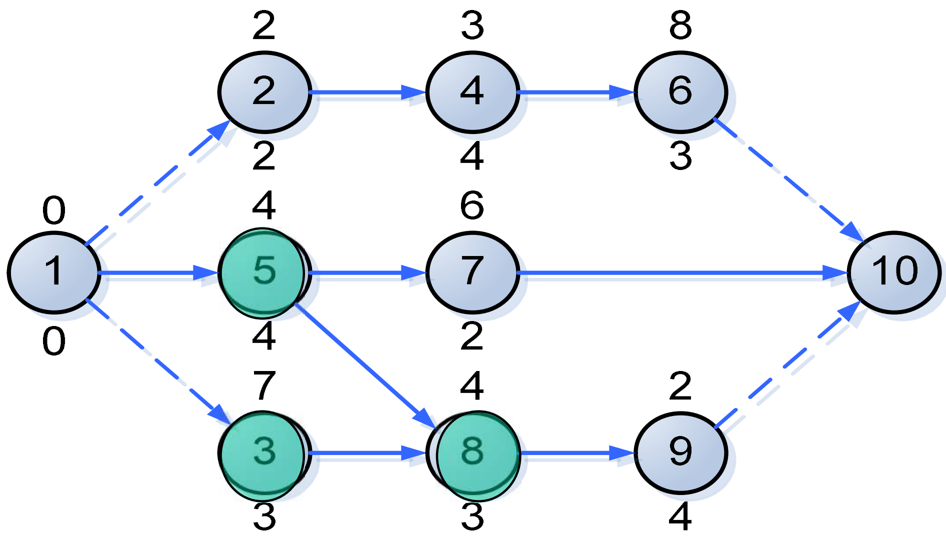
f(2)=2

f(7)=2

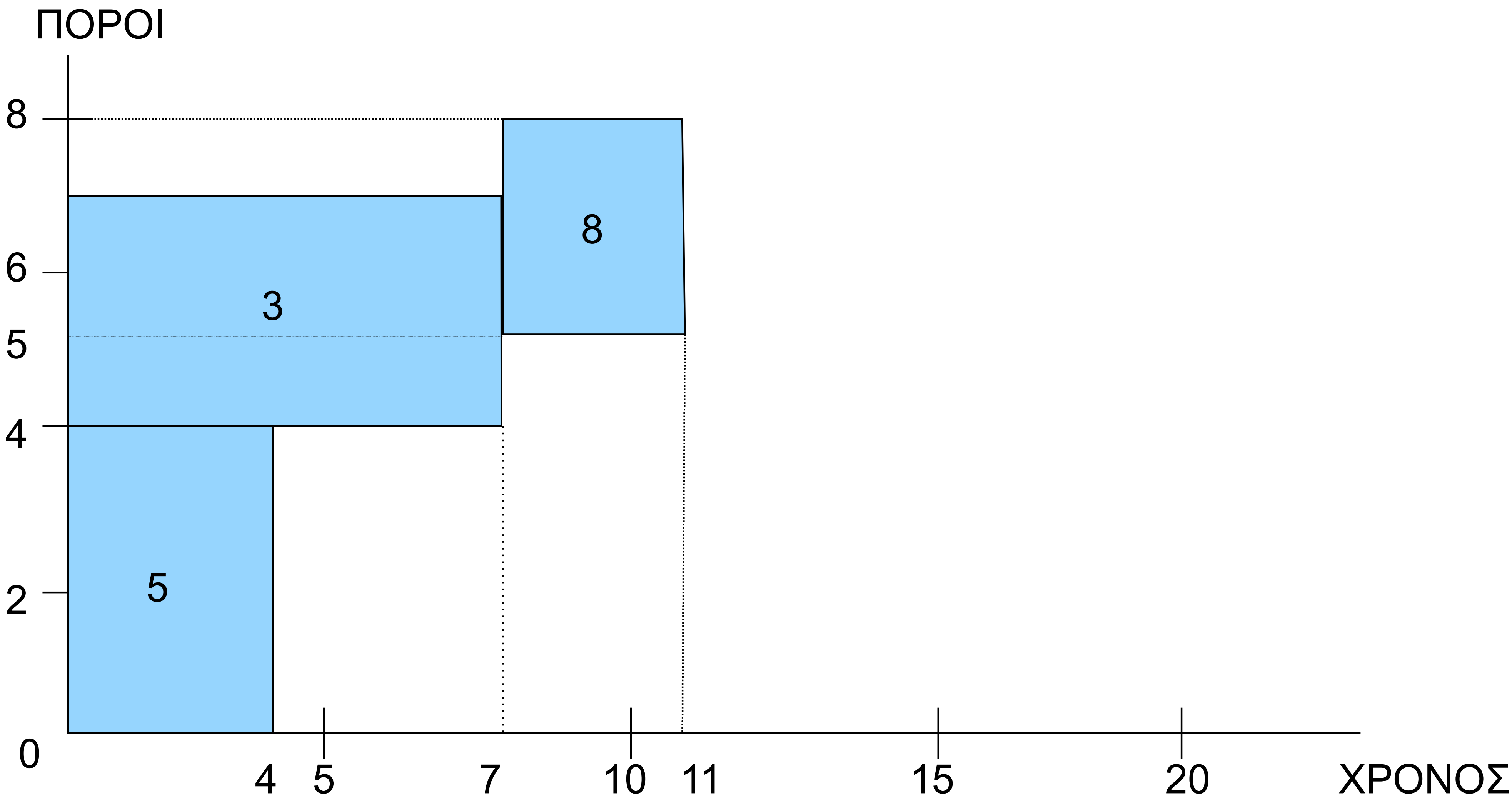
f(8)=3

→ Max {f(i)}=3, i=8 → Makespan = 11

S = (1T1,5T5,3T3,8T8)



Επανάληψη 4 – Gantt Chart απεικόνιση



ΕΠΙΛΥΣΗ ΜΕ ΠΣΕ

- **<u>Επανάληψη 5</u>**.
  Αφού η δραστηριότητα 9 απαιτεί τον μεγαλύτερο αριθμό πόρων μεταξύ των εφικτών δραστηριοτήτων, αντιστοιχίζεται στο ΧΔ T9:[11,13].

f(2)=2

f(7)=2

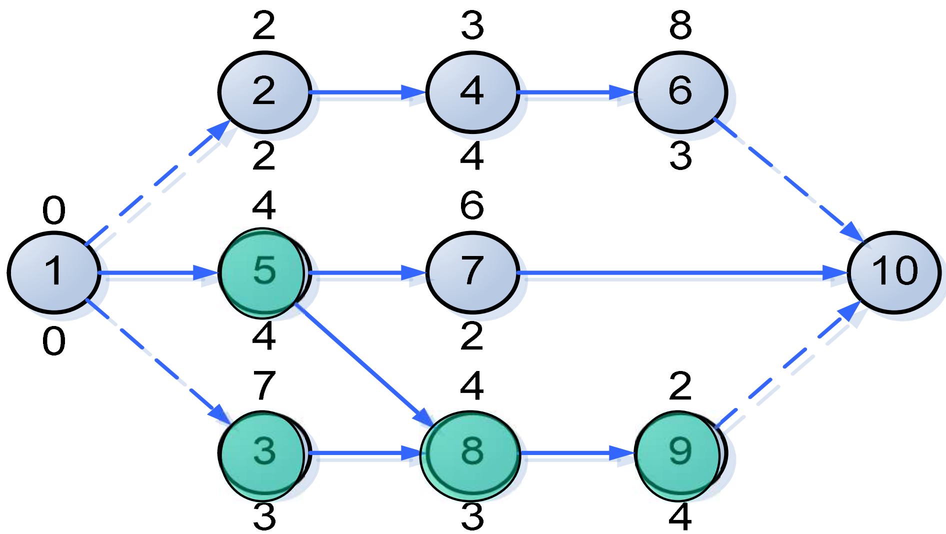
f(9)=4

Max {f(i)}=3,

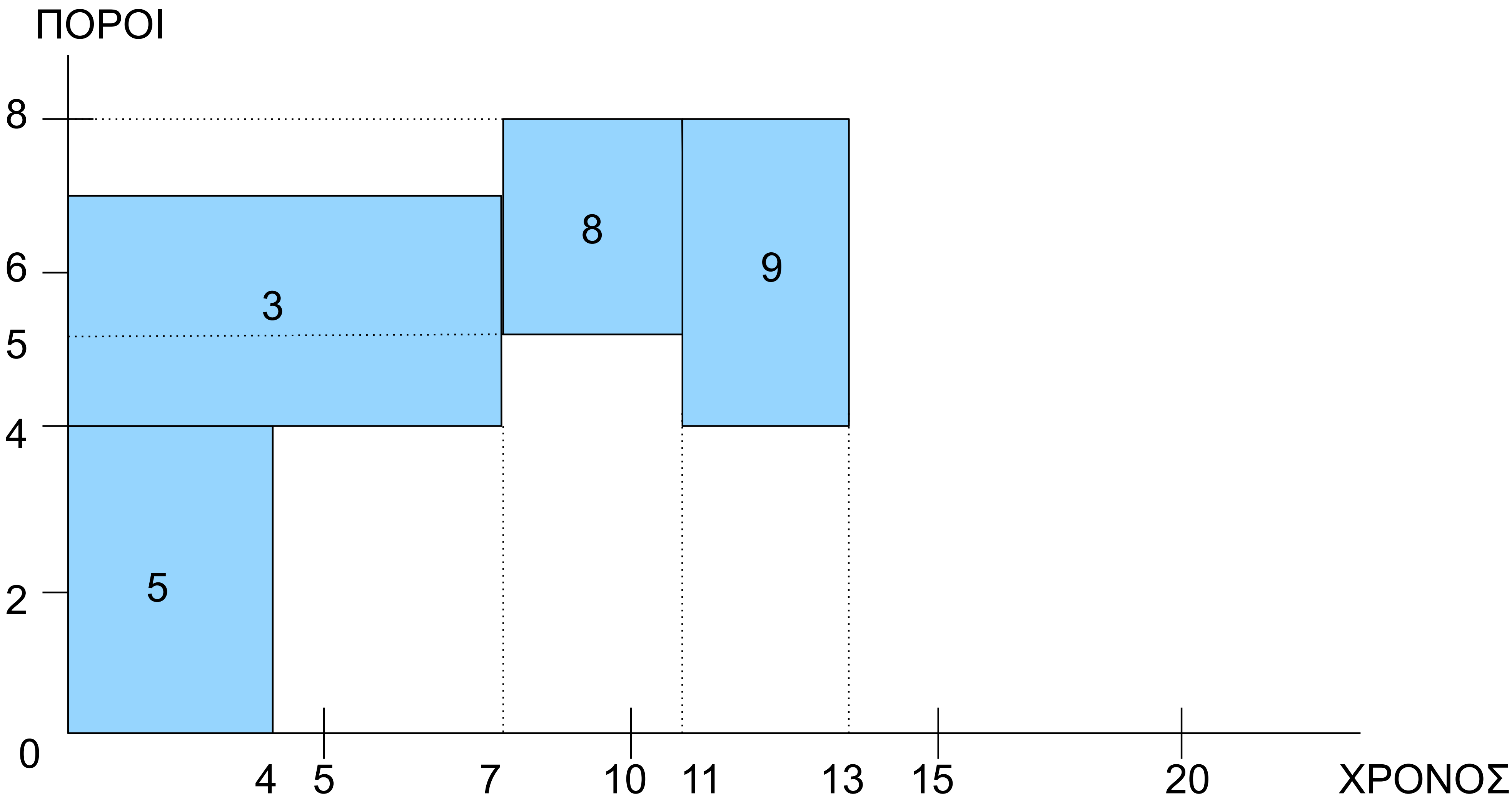
i=9

Makespan = 13

S = (1T1,5T5,3T3,8T8,9T9)



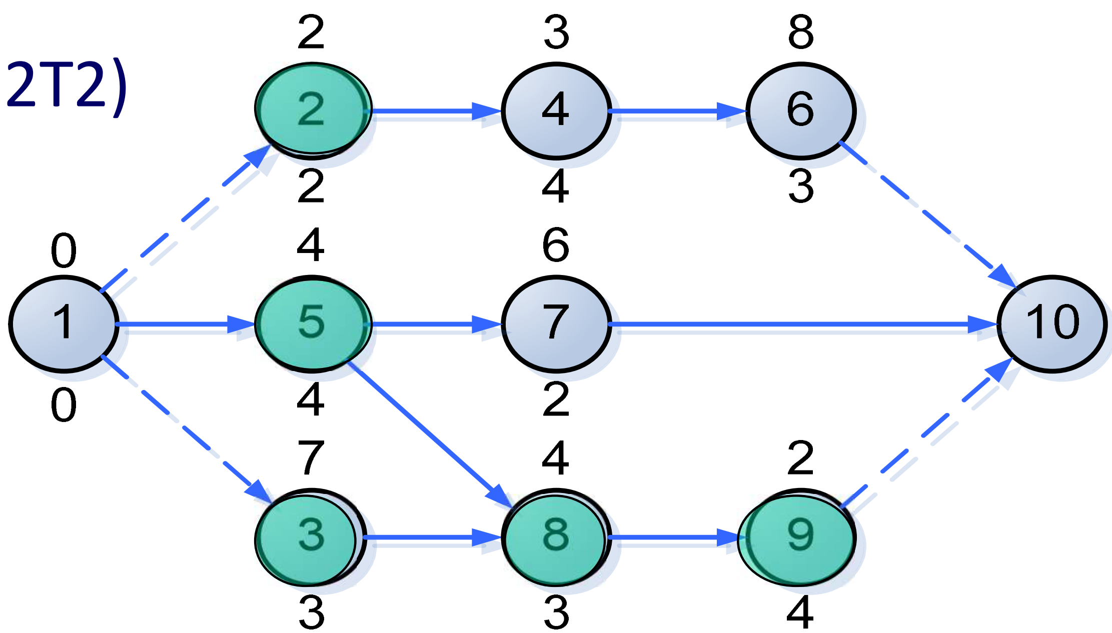
Επανάληψη 5 – Gantt Chart απεικόνιση



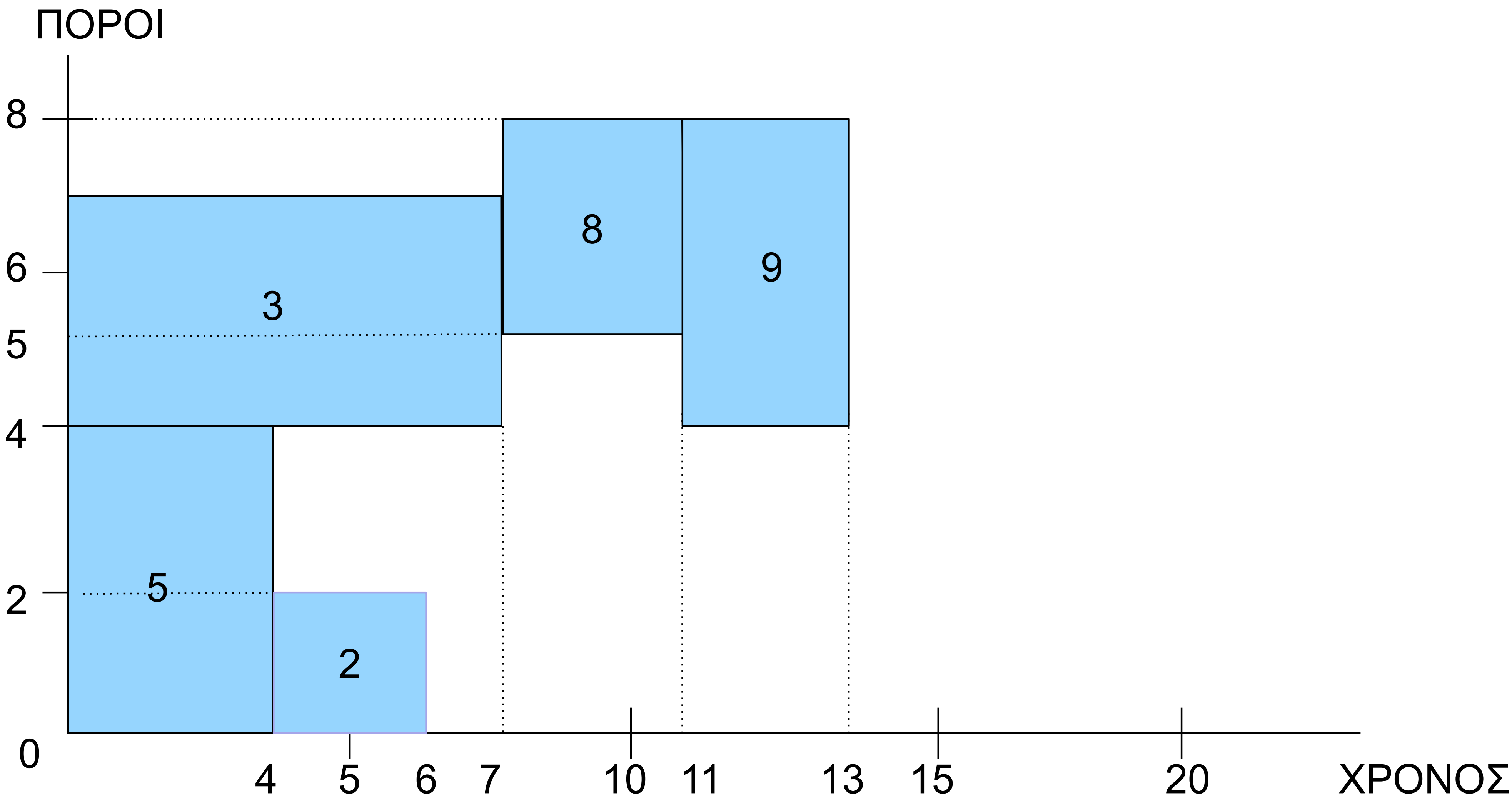
ΕΠΙΛΥΣΗ ΜΕ ΠΣΕ

- **<u>Επανάληψη 6</u>**.
  Αφού οι δραστηριότητες 2 και 7 απαιτούν τον ίδιο αριθμό πόρων, αντιστοιχίζουμε στοχαστικά τη δραστηριότητα 2 στο ΧΔ T2:[4,6] (καθώς ο χρόνος 4 είναι ο νωρίτερος εφικτός χρόνος για τη δραστηριότητα 4) και το makespan παραμένει13.

S = (1T1,5T5,3T3,8T8,9T9,2T2)



Επανάληψη 6 – Gantt Chart απεικόνιση



ΕΠΙΛΥΣΗ ΜΕ ΠΣΕ

- **<u>Επανάληψη 7</u>**.

  Αφού η δραστηριότητα 4 απαιτεί τον μεγαλύτερο αριθμό πόρων μεταξύ των εφικτών δραστηριοτήτων, αντιστοιχίζεται στο ΧΔ T4:[6,9].

f(4)=4

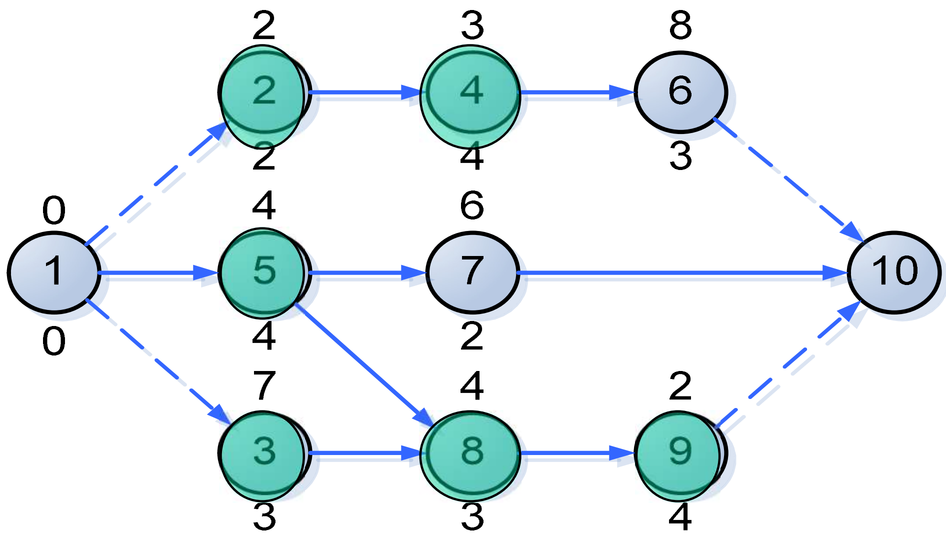
f(7)=2

Max {f(i)}=4,

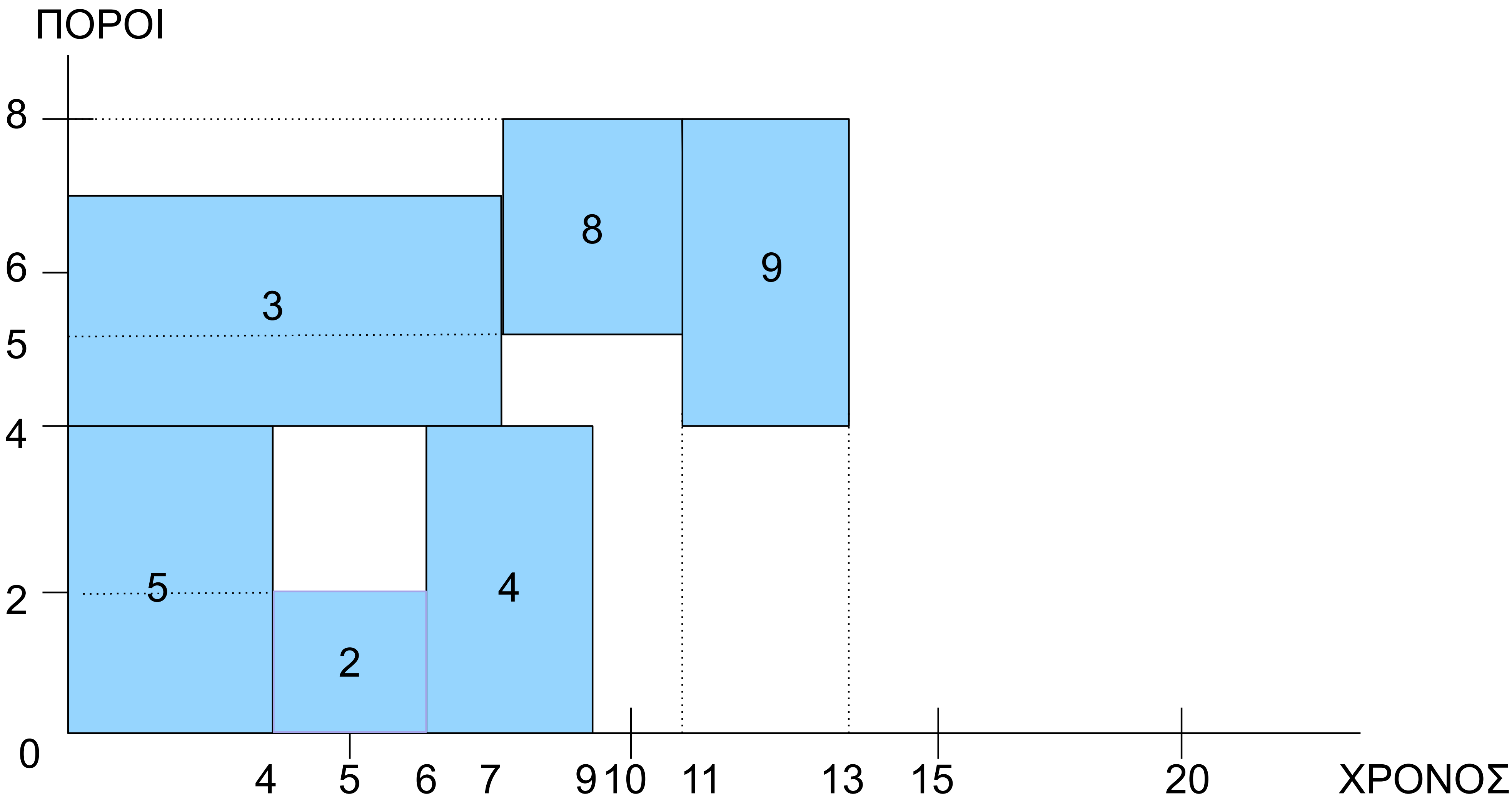
i=4

Makespan = 13

S = (1T1,5T5,3T3,8T8,9T9,2T2,4T4)



Επανάληψη 7 – Gantt Chart απεικόνιση



ΕΠΙΛΥΣΗ ΜΕ ΠΣΕ

- **<u>Επανάληψη 8</u>**.
  Αφού η δραστηριότητα 6 απαιτεί τον μεγαλύτερο αριθμό πόρων μεταξύ των εφικτών δραστηριοτήτων, αντιστοιχίζεται στο ΧΔ T6:[9,17].

f(6)=3

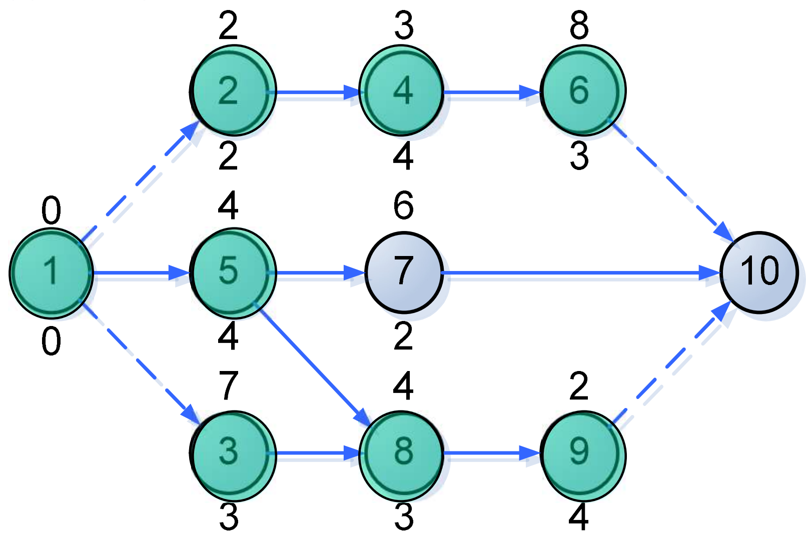
f(7)=2

Max {f(i)}=3,

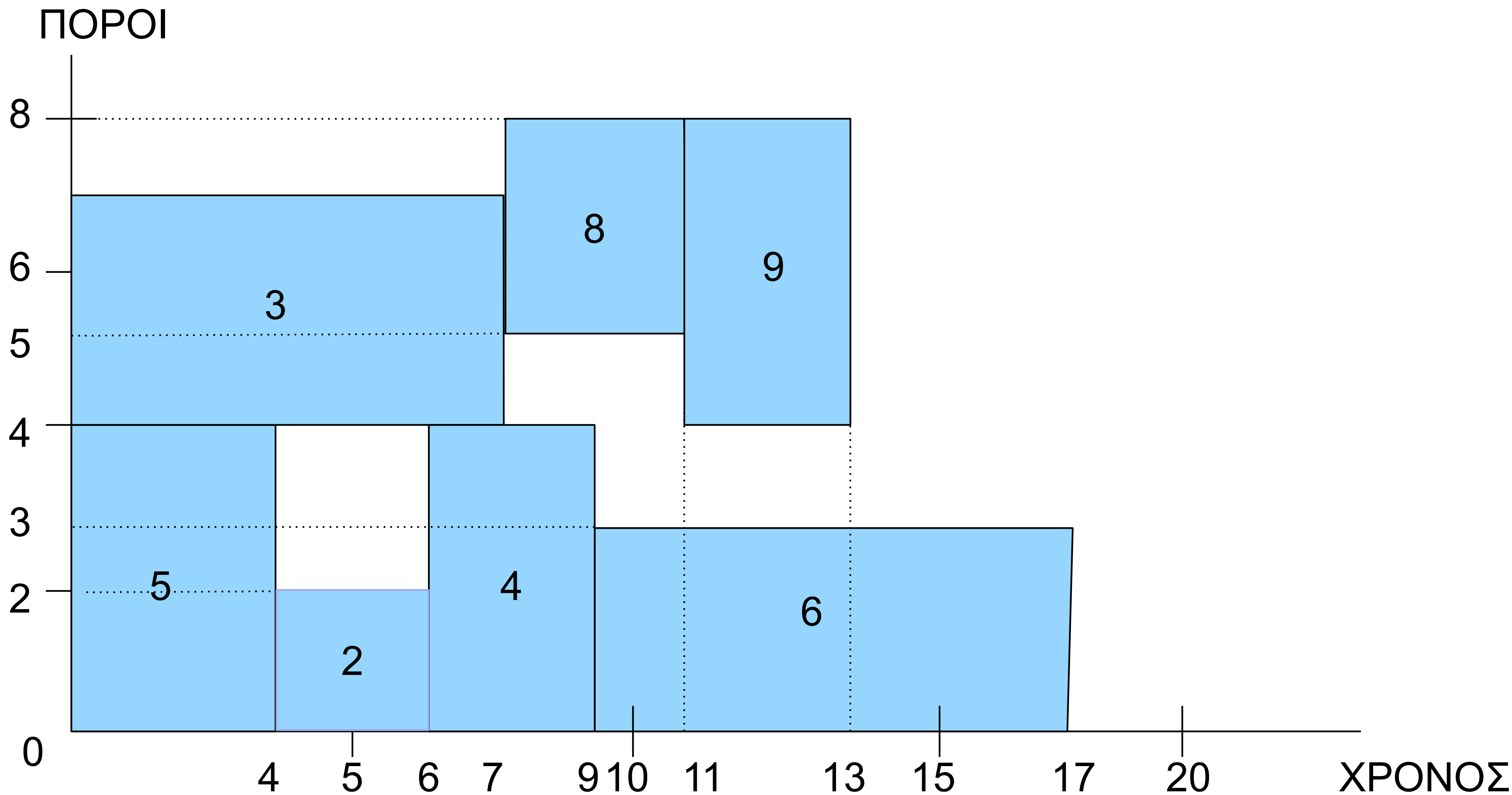
i=6

Makespan = 17

S = (1T1,5T5,3T3,8T8,9T9,2T2,4T4,6T6)



Επανάληψη 8 – Gantt Chart απεικόνιση

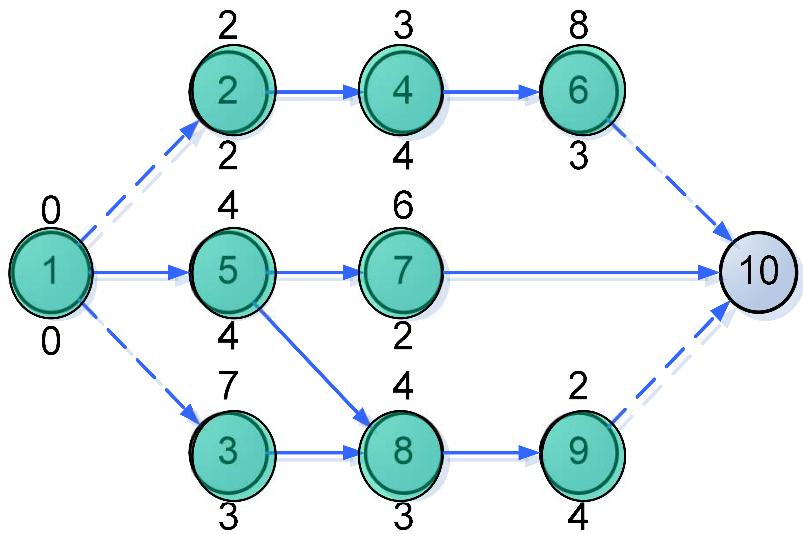


ΕΠΙΛΥΣΗ ΜΕ ΠΣΕ

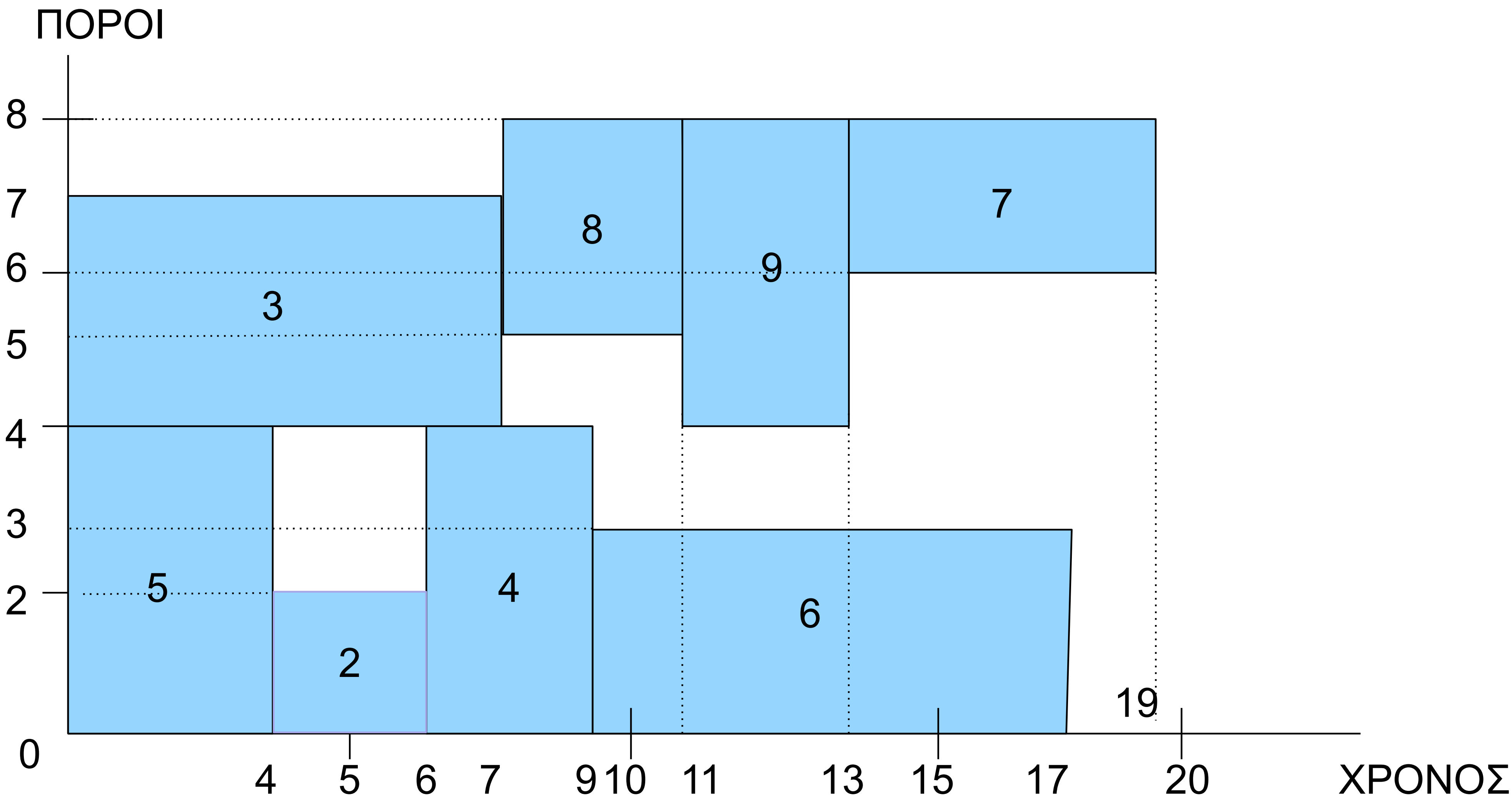
- **Επανάληψη 9**.
  Αφού η δραστηριότητα 7 είναι η μόνη εφικτή δραστηριότητα, αντιστοιχίζεται στο ΧΔ Τ7:[13,19].

f(7)=2 ⇨ Max {f(i)}=2, i=7 ⇨ Makespan = 19

S = (1T1,5T5,3T3,8T8,9T9,2T2,4T4,6T6,7T7)



Επανάληψη 9 – Gantt Chart απεικόνιση



ΕΠΙΛΥΣΗ ΜΕ ΠΣΕ

- **Επανάληψη 10**.

  Η δραστηριότητα 10 αντιστοίζεται στο ΧΔ Τ10:[19,19],

  Άρα, το Makespan = 19

  S = (1T1,5T5,3T3,8T8,9T9,2T2,4T4,6T6,7T7,10T10)