Χαρακτηριστικά (ροπές) πολυδιάστατων τυχαίων μεταβλητών

μέση τιμή , συνδιακύμανση

συσχέτιση, συντελεστής συσχέτισης

Μέση τιμή πολυδιάστατων τυχαίων μεταβλητών

- Έστω **δισδιάστατη** μεταβλητή ***(X,Y)***

- Η **μέση τιμή** της είναι ένα **δισδιάστατο διάνυσμα** με συνιστώσες τις μέσες τιμές των δύο μεταβλητών:

$$\mu_{XY} = E(X,Y) = \begin{pmatrix} E(X) \\ E(Y) \end{pmatrix}$$

- **Μέση τιμή** $$\mu_{XY} = E(X,Y) = \begin{pmatrix} E(X) \\ E(Y) \end{pmatrix}$$

- Κάθε μία από τις μέσες τιμές υπολογίζεται με βάση τις **περιθώριες κατανομές**:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx \qquad E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y)\,dy$$ συνεχείς τ.μ.)

ή

$$E(X) = \sum_x x f_X(x) \qquad E(Y) = \sum_y y f_Y(y)$$ διακριτές τ.μ.)

Επέκταση σε ***n*** **διαστάσεις**

- Έστω n-διάστατη μεταβλητή ***X=(X₁, X₂, …, Xₙ)***
- Η μέση τιμή της είναι ένα **n-διάστατο διάνυσμα** από ***n*** **μέσες τιμές**

$$\mu_{\mathrm{X}} = E(\mathrm{X}) = \begin{pmatrix} E(X_1) \\ E(X_2) \\ \vdots \\ E(X_n) \end{pmatrix}$$

όπου:

- $E(X_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X_i}(x) dx$ η **μέση τιμή** της μεταβλητής X_i , και
- $f_{X_i}(x)$ η **σ.π.π.** της περιθώριας κατανομής της

- **Μέση (ή αναμενόμενη) τιμή συνάρτησης *g(X,Y)*** δύο τυχαίων μεταβλητών

$$E\left(g(X,Y)\right)$$

για συνεχείς τυχαίες μεταβλητές

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)\, f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$$

για διακριτές τυχαίες μεταβλητές

$$\sum_{x}\sum_{y} g(x,y)\, f_{X,Y}(x,y)$$

(I): **Γινόμενο δύο μεταβλητών, *g(X,Y) = X Y***

- Η **μέση τιμή του γινομένου** δύο τυχαίων μεταβλητών

$$E(XY)$$

ονομάζεται **συσχέτιση** (***correlation***) των δύο μεταβλητών

(II): **Άθροισμα δύο μεταβλητών, *g(X,Y) = X+Y***

- Η **μέση τιμή του αθροίσματος** δύο τυχαίων μεταβλητών ισούται με το **άθροισμα** των (περιθώριων) μέσων τιμών

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$$

- **Μέση τιμή αθροίσματος δύο μεταβλητών**

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$$

Απόδειξη

$$E(X+Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x+y)\,f_{X,Y}(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf_{X,Y}(x,y)dxdy+\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}yf_{X,Y}(x,y)dxdy=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}x\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f_{X,Y}(x,y)dy\right)dx+\int_{-\infty}^{+\infty}y\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f_{X,Y}(x,y)dx\right)dy=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)dx+\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)dy=$$

$$=E(X)+E(Y)$$

άθροισμα περιθώριων μέσων τιμών

- Επέκταση σε ***n*-διαστάσεις**.

- **Μέση τιμή αθροίσματος *n* τυχαίων μεταβλητών**

$$E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) =$$

$$= E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$$

(III): Περίπτωση **ανεξάρτητων μεταβλητών**

- Υπολογισμός **μέσης τιμής συνάρτησης** ***g(X)h(Y)*** όταν οι δύο μεταβλητές X, Y είναι **ανεξάρτητες**

$$E(g(X)h(Y))$$

<u>Πρόταση</u>: Αν δύο μεταβλητές X, Y είναι **ανεξάρτητες** τότε ισχύει:

$$E\big(g(X)h(Y)\big) = E(g(X))E(h(Y))$$

<u>Απόδειξη</u>

Λόγω ανεξαρτησίας ισχύει ότι: $f_{XY}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$

Έτσι:

$$E\big(g(X)h(Y)\big) = \int\int \big(g(x)h(y)\big) f_{X,Y}(x,y)dxdy =$$

$$= \int g(x) f_X(x)dx \int h(y) f_Y(y)dy = E\big(g(X)\big)E\big(h(Y)\big)$$

Εφαρμογή της σχέσης

$$E(g(X)h(Y)) = E(g(X))E(h(Y))$$

- Αν *X*, *Y* είναι **ανεξάρτητες μεταβλητές** τότε:

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

δηλ. η **συσχέτιση *E(XY)*** ισούται με το **γινόμενο των (περιθώριων) μέσων** τιμών τους.

Συνδιακύμανση (*Covariance*)

- **Συνδιακύμανση** δύο τυχαίων μεταβλητών *X*, *Y* ονομάζεται το (συνολικό) **ποσό μεταβολής** των δύο μεταβλητών.
- **Συμβολίζεται** ως $\sigma_{XY} = COV(X,Y)$
- **Υπολογίζεται** ως

$$COV(X,Y) = E\left[\left(X - E(X)\right)\left(Y - E(Y)\right)\right]$$
$$= E\left[\left(X - \mu_X\right)\left(Y - \mu_Y\right)\right]$$

- Η **συνδιακύμανση** είναι η **συσχέτιση της διαφοράς** των περιθώριων μεταβλητών από τα μέσα τους

$$COV(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = E[(\boldsymbol{X}-\mu_X)(\boldsymbol{Y}-\mu_Y)]$$

- **Υπολογισμός** ανάλογα με τον τύπο των μεταβλητών:

$$COV(X,Y)=\sum_{x\in\Omega_x}\sum_{y\in\Omega_y}(x-\mu_x)(y-\mu_y)f_{X,Y}(x,y)$$

για διακριτές τυχαίες μεταβλητές

$$COV(X,Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu_x)(y-\mu_y)f_{X,Y}(x,y)dxdy$$

για συνεχείς τυχαίες μεταβλητές

Συνδιακύμανση (*συν.*)

$$COV\left(X,Y\right)=\sigma_{XY}=E\left[\left(X-\mu_X\right)\left(Y-\mu_Y\right)\right]$$

- **Ισχύει**:

$$COV\left(X,Y\right)=COV\left(Y,X\right)$$

συμμετρική

$$COV\left(X,X\right)=V\left(X\right)=E\left(\left(X-\mu_X\right)^2\right)$$

Η (ταυτότητα) συνδιακύμανση μιας μεταβλητής με τον εαυτό της είναι η διακύμανση

Υπολογισμός της συνδιακύμανσης

$$COV(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Απόδειξη

$$COV(X,Y) = E\left(\left(X - E(X)\right)\left(Y - E(Y)\right)\right) =$$

$$= E\left(\boldsymbol{XY} - \boldsymbol{X}E(Y) - E(X)\boldsymbol{Y} + E(X)E(Y)\right) =$$

$$= E(XY) - E(X)E(Y) - E(X)E(Y) + E(X)E(Y) =$$

$$= E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$\boxed{COV(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)}$$

- Η ***συνδιακύμανση*** δύο μεταβλητών ισούται με την ***διαφορά της συσχέτισης*** από το **γινόμενο των περιθώριων μέσων** τιμών τους

➢ *αν E(X)=0* ή *E(Y)=0* **=>** *COV(X,Y)=E(XY)*

➢ αν *X,Y* **ανεξάρτητες => *COV(X,Y)=0***
καθώς *E(XY)=E(X)E(Y)*

$$COV(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Προσοχή

- **ΔΕΝ** ισχύει **πάντα** το **αντίστροφο**, δηλ.

  αν *COV(X,Y)=0* τότε

  δεν είναι βέβαιο ότι οι μεταβλητές X, Y είναι **ανεξάρτητες,** καθώς αυτό *μπορεί να συμβεί εξαιτίας αριθμητικών πράξεων*

$COV(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$

Χρήσιμες σχέσεις

$$COV(X+Y,Z)=COV(X,Z)+COV(Y,Z)$$

Απόδειξη

$$COV(X+Y,Z)=E((X+Y)Z)-E(X+Y)E(Z)=$$
$$=E(XZ+YZ)-(E(X)+E(Y))E(Z)=$$
$$=E(XZ)+E(YZ)-E(X)E(Z)-E(Y)E(Z)=$$
$$=\boxed{E(XZ)-E(X)E(Z)}+\boxed{E(YZ)-E(Y)E(Z)}=$$
$$=COV(X,Z)+COV(Y,Z)$$

$$COV\left(\alpha X+\beta Y,\gamma X+\delta Y\right)=$$
$$=\alpha\gamma V\left(X\right)+\beta\delta V\left(Y\right)+\left(\alpha\delta+\beta\gamma\right)COV\left(X,Y\right)$$

Απόδειξη

$$COV\left(\alpha X+\beta Y,\gamma X+\delta Y\right)=$$
$$=E\left(\left(\alpha X+\beta Y\right)\left(\gamma X+\delta Y\right)\right)-E\left(\alpha X+\beta Y\right)E\left(\gamma X+\delta Y\right)=$$
$$=E\left(\alpha\gamma X^{2}+\beta\delta Y^{2}+\left(\alpha\delta+\beta\gamma\right)XY\right)-\left(\alpha E\left(X\right)+\beta E\left(Y\right)\right)\left(\gamma E\left(X\right)+\delta E\left(Y\right)\right)=$$
$$=\alpha\gamma E\left(X^{2}\right)+\beta\delta E\left(Y^{2}\right)+\left(\alpha\delta+\beta\gamma\right)E\left(XY\right)-\alpha\gamma\left(E\left(X\right)\right)^{2}-\beta\delta\left(E\left(Y\right)\right)^{2}-\left(\alpha\delta+\beta\gamma\right)E\left(X\right)E\left(Y\right)=$$
$$=\alpha\gamma\left(E\left(X^{2}\right)-\left(E\left(X\right)\right)^{2}\right)+\beta\delta\left(E\left(Y^{2}\right)-\left(E\left(Y\right)\right)^{2}\right)+\left(\alpha\delta+\beta\gamma\right)\left(E\left(XY\right)-E\left(X\right)E\left(Y\right)\right)=$$
$$=\alpha\gamma V\left(X\right)+\beta\delta V\left(Y\right)+\left(\alpha\delta+\beta\gamma\right)COV\left(X,Y\right)$$

$$COV\left(\alpha X+\beta Y,\gamma X+\delta Y\right)=$$
$$=\alpha\gamma V\left(X\right)+\beta\delta V\left(Y\right)+\left(\alpha\delta+\beta\gamma\right)COV\left(X,Y\right)$$

- **Στην** **ειδική περίπτωση** **όπου** *α = β = γ = 1, δ = - 1* παίρνουμε

$$COV\left(X+Y,X-Y\right)=V\left(X\right)-V\left(Y\right)$$

Χρήσιμες σχέσεις

$$COV(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$COV(X+Y,Z) = COV(X,Z) + COV(Y,Z)$$

$$COV(\alpha X + \beta Y, \gamma X + \delta Y) =$$
$$= \alpha\gamma V(X) + \beta\delta V(Y) + (\alpha\delta + \beta\gamma) COV(X,Y)$$

$$COV(X+Y, X-Y) = V(X) - V(Y)$$

Διακύμανση πολυδιάστατων τυχαίων μεταβλητών

- Έστω δισδιάστατη τυχαία μεταβλητή (X,Y)

- Η **διακύμανση** είναι ένας **τετραγωνικός πίνακας (2x2) με στοιχεία τις** διακυμάνσεις και τις συνδιακυμάνσεις μεταξύ των δύο μεταβλητών:

$$VAR(X,Y) = \begin{bmatrix} VAR(X) & COV(X,Y) \\ COV(Y,X) & VAR(Y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_{X,Y} \\ \sigma_{X,Y} & \sigma_Y^2 \end{bmatrix}$$

$$COV(X,Y) = COV(Y,X) = \sigma_{X,Y}$$

Διακύμανση πολυδιάστατων τυχαίων μεταβλητών

- Πίνακας διακυμάνσεων – συνδιακυμάνσεων:

$$VAR(X,Y) = \begin{bmatrix} VAR(X) & COV(X,Y) \\ COV(Y,X) & VAR(Y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_{X,Y} \\ \sigma_{X,Y} & \sigma_Y^2 \end{bmatrix}$$

- οι **διακυμάνσεις** *VAR(X), VAR(Y)* είναι υπολογισμένες με βάση τις **περιθώριες** κατανομές των X και Y,

- οι **συνδιακυμάνσεις** *COV(X,Y)* από την **από-κοινού** κατανομή τους

Συντελεστής συσχέτισης (*correlation coefficient*)

- Αποτελεί ένα **μέτρο συσχέτισης** δύο μεταβλητών
- **Ορισμός:** Ο συντελεστής συσχέτισης ορίζεται ως το **πηλίκο** της συνδιακύμανσης προς το γινόμενο των τυπικών αποκλίσεων των δύο μεταβλητών.

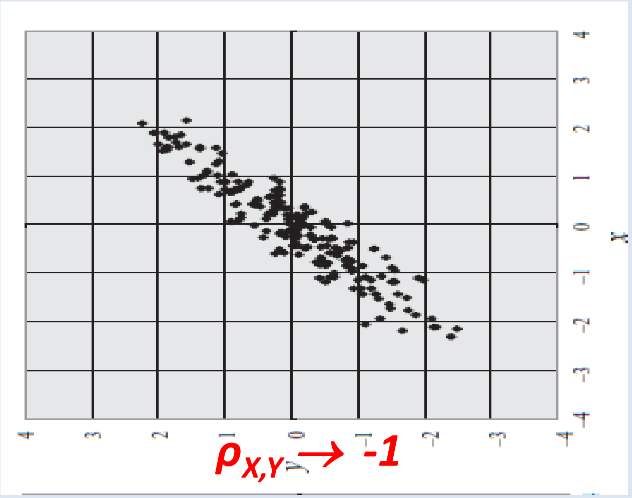
$$\rho_{X,Y} = \frac{COV(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{E(XY) - \mu_X \mu_Y}{\sigma_X \sigma_Y}$$

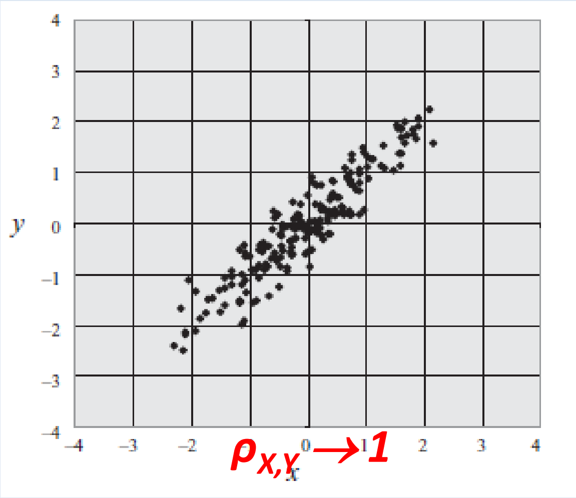
- Ισχύει ότι $-1 \le \rho_{X,Y} \le 1$ ή $\left|\rho_{X,Y}\right| \le 1$

Πρόταση

- Ο συντελεστής συσχέτισης $\rho_{X,Y}$ αποτελεί ένα **δείκτη γραμμικότητας** δύο μεταβλητών**.** Συγκεκριμένα:

$$Av\ \left|\rho_{X,Y}\right| = 1 \Rightarrow \exists\, a,b,c:\ aX + bY + c = 0$$





- Ισχύει και το **αντίθετο**:

$$Av\ \exists\, a,b,c:\ aX + bY + c = 0 \Rightarrow \left|\rho_{X,Y}\right| = 1$$

Παραδείγματα

(1) Οι τυχαίες μεταβλητές X, Y, Z είναι ανεξάρτητες και ισόνομες με μέση τιμή 0 και διακύμανση 1. Να βρεθεί η μέση τιμή, η διακύμανση, η συνδιακύμανση και ο συντελεστής συσχέτισης των παρακάτω μεταβλητών:

$$\boldsymbol{W} = 3X + 4Y \,,\; \boldsymbol{V} = X - 2Y + 2Z$$

(2) Να βρεθεί ο **συντελεστής συσχέτισης** των ***X*** και ***Y=2X+3***

Κατανομή συνάρτησης πολλών μεταβλητών

Προβλήματα με συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

- **Δίνεται** η **από-κοινού κατανομή** δύο τυχαίων μεταβλητών.

- **Πρόβλημα 1:** Να βρεθεί η **από-κοινού** κατανομή **δύο συναρτήσεων** των δύο μεταβλητών.

- **Πρόβλημα 2:** Να βρεθεί η κατανομή **μιας συνάρτησης** των δύο μεταβλητών.

Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

Πρόβλημα 1

- Έστω 2 τ.μ. ***X***, ***Y*** με από-κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_{X,Y}(x,y)$
- Δίνονται 2 **συναρτήσεις** των δύο μεταβλητών $V=g_1(X,Y)$ και $W=g_2(X,Y)$

➢ Να βρεθεί η **κατανομή** των ***V, W*** δηλ. η από-κοινού συνάρτηση πυκνότητας $f_{V,W}(u,w)$

Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

Πρόβλημα 1

Δίνονται

$$f_{X,Y}(x,y)$$

$$V = g_1(X,Y)$$

$$W = g_2(X,Y)$$

Ζητείται

$$\boxed{f_{V,W}(u,w)}\ ?$$

Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

2 περιπτώσεις

- Η περίπτωση **γραμμικών συναρτήσεων**

- Η περίπτωση **μη-γραμμικών συναρτήσεων**

1η περίπτωση: **Γραμμικές συναρτήσεις**

$$V = g_1(X,Y) = aX + bY$$

$$W = g_2(X,Y) = cX + eY$$

ή

$$\begin{bmatrix} V \\ W \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a & b \\ c & e \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

όπου ***A*** ο **πίνακας των γραμμικών συντελεστών**

$$\begin{bmatrix} V \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

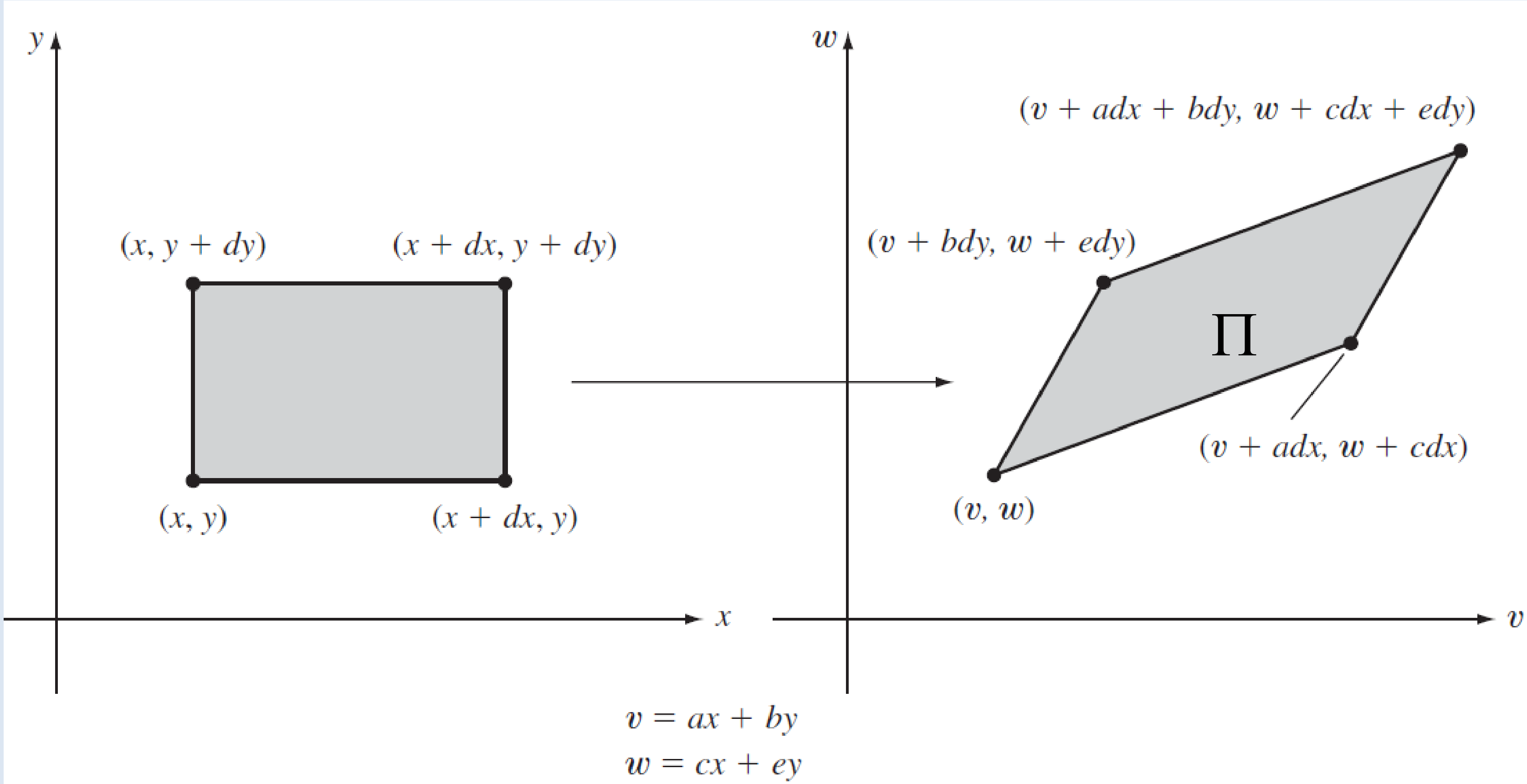
- **<u>Υπόθεση</u>**: υπάρχει **αντίστροφος** $\boldsymbol{A^{-1}}$ δηλ. $|A| = |ae - bc| \neq 0$

- Ορίζεται ο **μετασχηματισμός**: κάθε σημείο **(*u*,*w*)** έχει ένα **<u>μοναδικό</u>** αντίστοιχο σημείο **(*x*,*y*)** με βάση την σχέση:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix}$$

όπου

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} e & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$



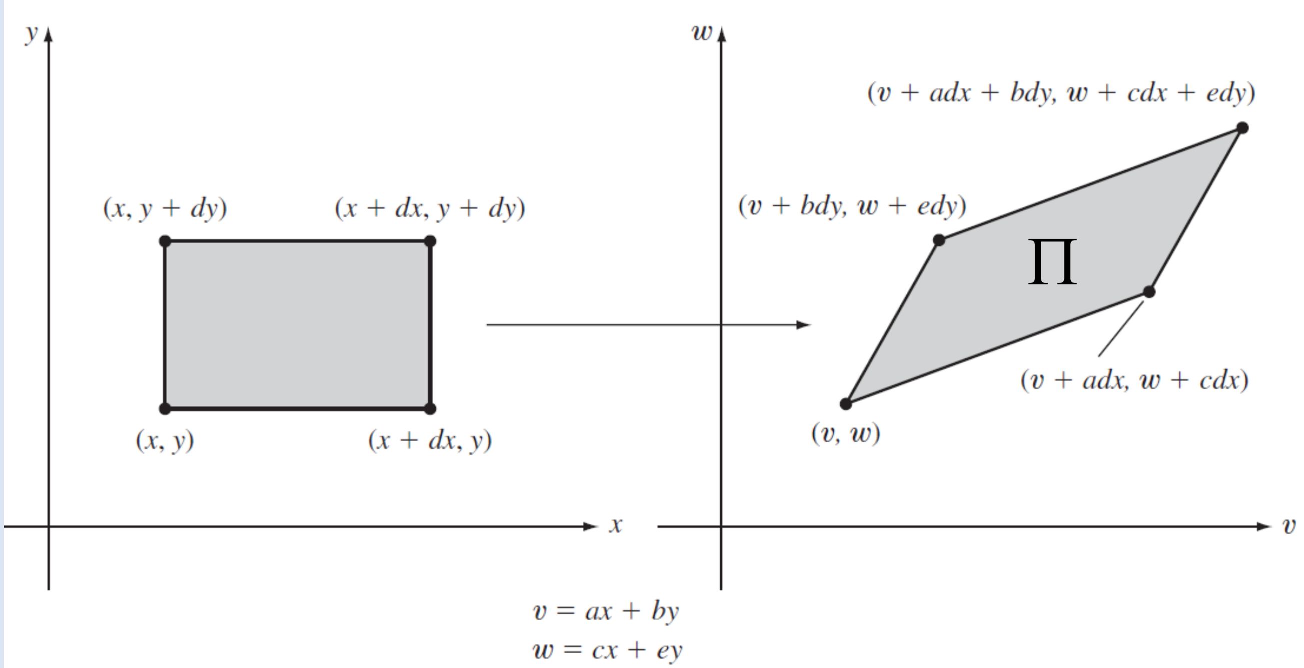
$$P('\sigma\tau o\iota\chi\varepsilon\iota\acute{\omega}\delta\varepsilon\varsigma\ \ \sigma\tau o\ (x,y)') = P('\sigma\tau o\iota\chi\varepsilon\iota\acute{\omega}\delta\varepsilon\varsigma\ \ \sigma\tau o\ (u,w)') \Rightarrow$$

$$f_{X,Y}(x,y)E_{o\rho\theta}^{(x,y)} = f_{V,W}(u,w)E_{\pi\alpha\rho\alpha\lambda.}^{(u,w)} \Rightarrow$$

$$f_{X,Y}(x,y)dxdy = f_{V,W}(u,w)d\Pi$$

- Το ***dΠ*** εκφράζει το **ποσό μεταβολής** του ορθογωνίου στοιχειώδες ενδεχόμενου, ή το μέγεθος της **μεταβολής κλίμακας** εξαιτίας του μετασχηματισμού στο χώρο (*u*, *v*).

$$\begin{bmatrix} V \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$



- Η **ορίζουσα** **του πίνακα** μετασχηματισμού φανερώνει το **ποσό (ή μέτρο)** **μεταβολής**

$$\boxed{d\Pi = |A|\,dxdy = |ae - bc|\,dxdy}$$

|*A*| : ορίζουσα του πίνακα μετασχηματισμού

$$\begin{bmatrix} V \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

- Καθώς: $$d\Pi = \left|A\right| dxdy = \left|ae - bc\right| dxdy$$

- Αντικαθιστώντας στη σχέση:

$$f_{X,Y}\left(x,y\right)dxdy = f_{V,W}\left(u,w\right)d\Pi$$

- παίρνουμε:

$$\boxed{f_{V,W}\left(u,w\right) = \frac{1}{\left|A\right|} f_{x,y}\left(x,y\right)\Bigg|_{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1}\begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix}}}$$

Κατανομή γραμμικής συνάρτησης 2 τυχαίων μεταβλητών

$$f_{V,W}(u,w) = \frac{1}{|A|} f_{x,y}(x,y)\Big|_{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1}\begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix}}$$

$$\left|A^{-1}\right| = \frac{1}{|A|}$$

ή

$$f_{V,W}(u,w) = |A^{-1}| f_{x,y}\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1}\begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix}\right)$$

2^η **περίπτωση**: Μη-γραμμικές συναρτήσεις

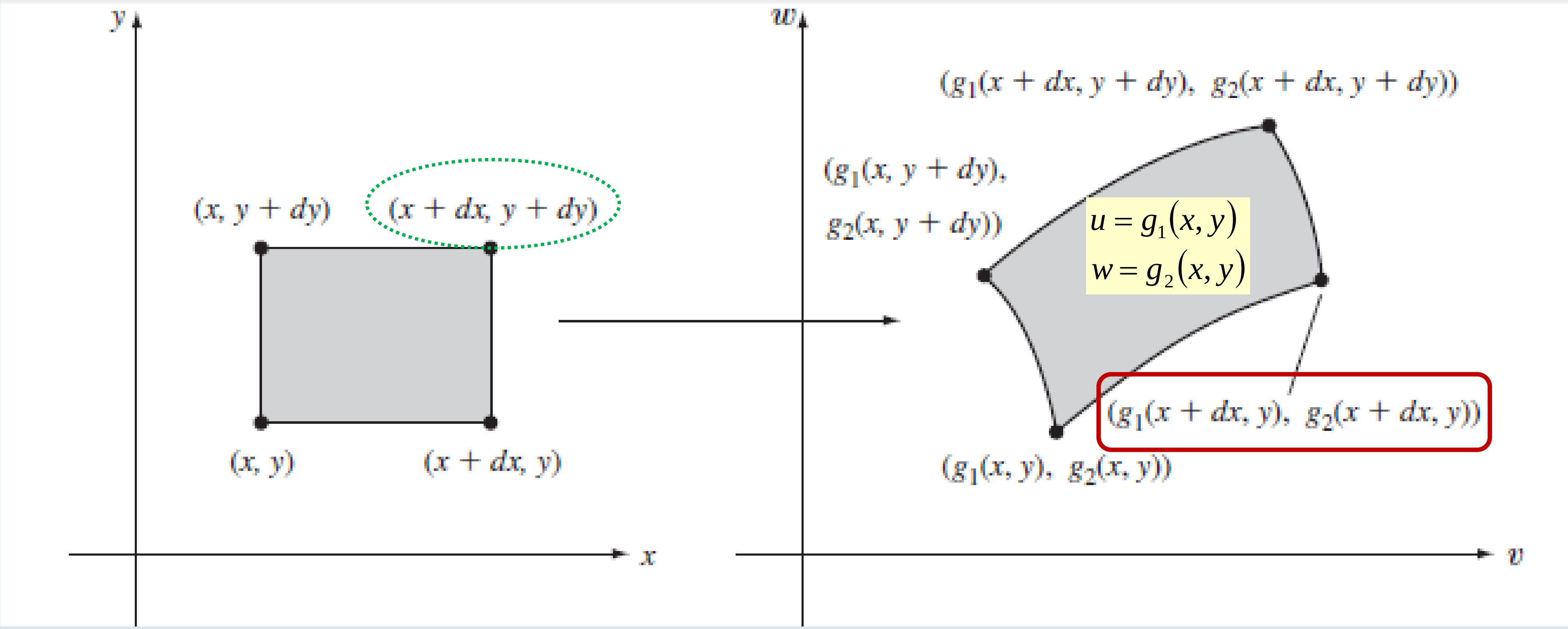
(**Η γενική περίπτωση**)

$$V = g_1(X, Y) \quad , \quad W = g_2(X, Y)$$

- **Υπόθεση:** υπάρχουν οι αντίστροφες σχέσεις, δηλ.

$$x = h_1(u, w) \quad , \quad y = h_2(u, w)$$

- Ορίζεται **ο αντίστροφος μετασχηματισμός** «κάθε σημείο **(*u,w*)** στον νέο χώρο έχει **μοναδικό** αντίστοιχο σημείο **(*x,y*)** στον κανονικό χώρο».

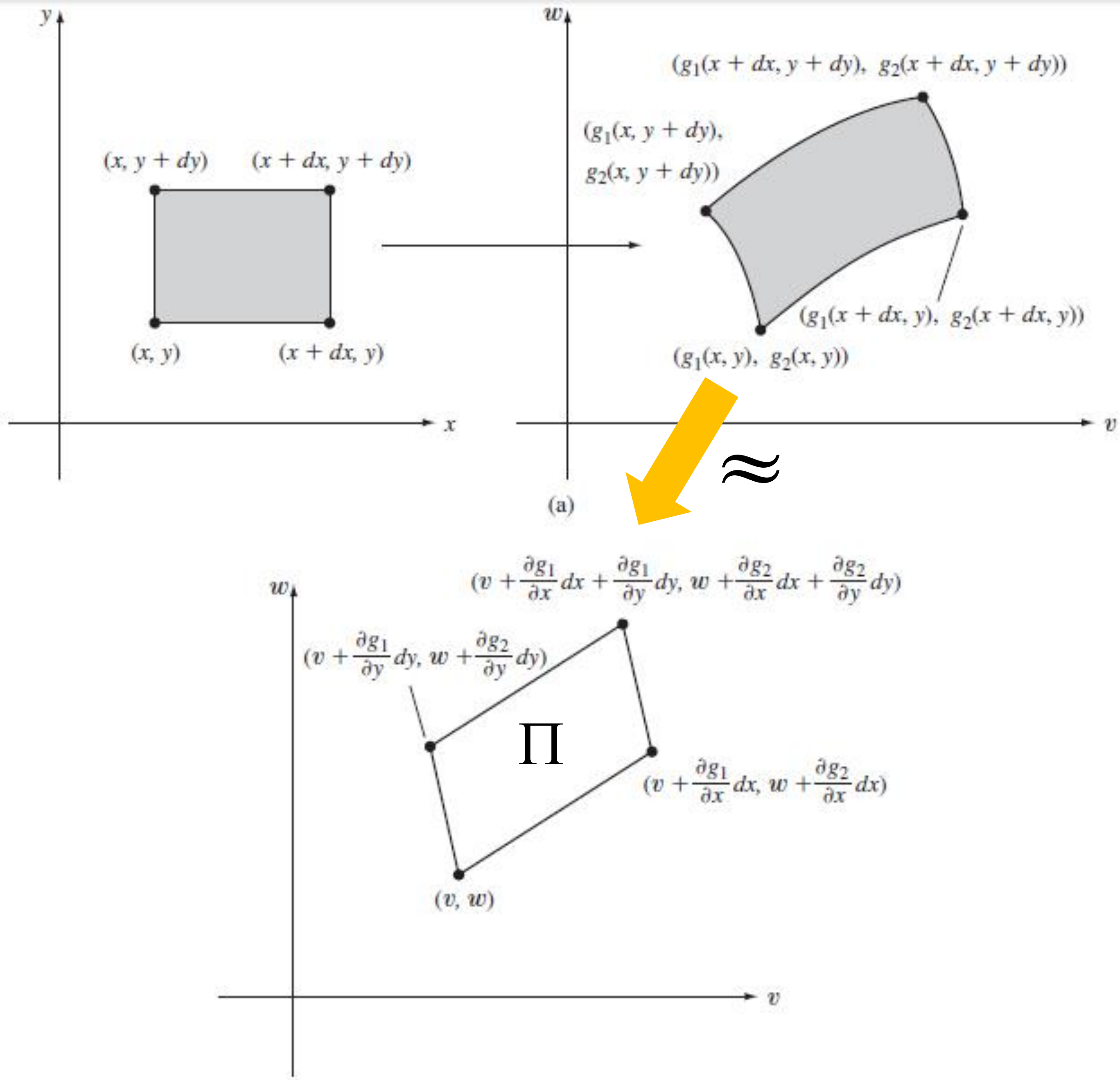


Ισχύει ότι $$g_k(x+dx, y) \approx g_k(x,y) + \frac{\partial g_k(x,y)}{\partial x} dx \qquad k = 1,2$$

ορισμός μερικής παραγώγου

$$f'_x = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} \right] \Rightarrow$$

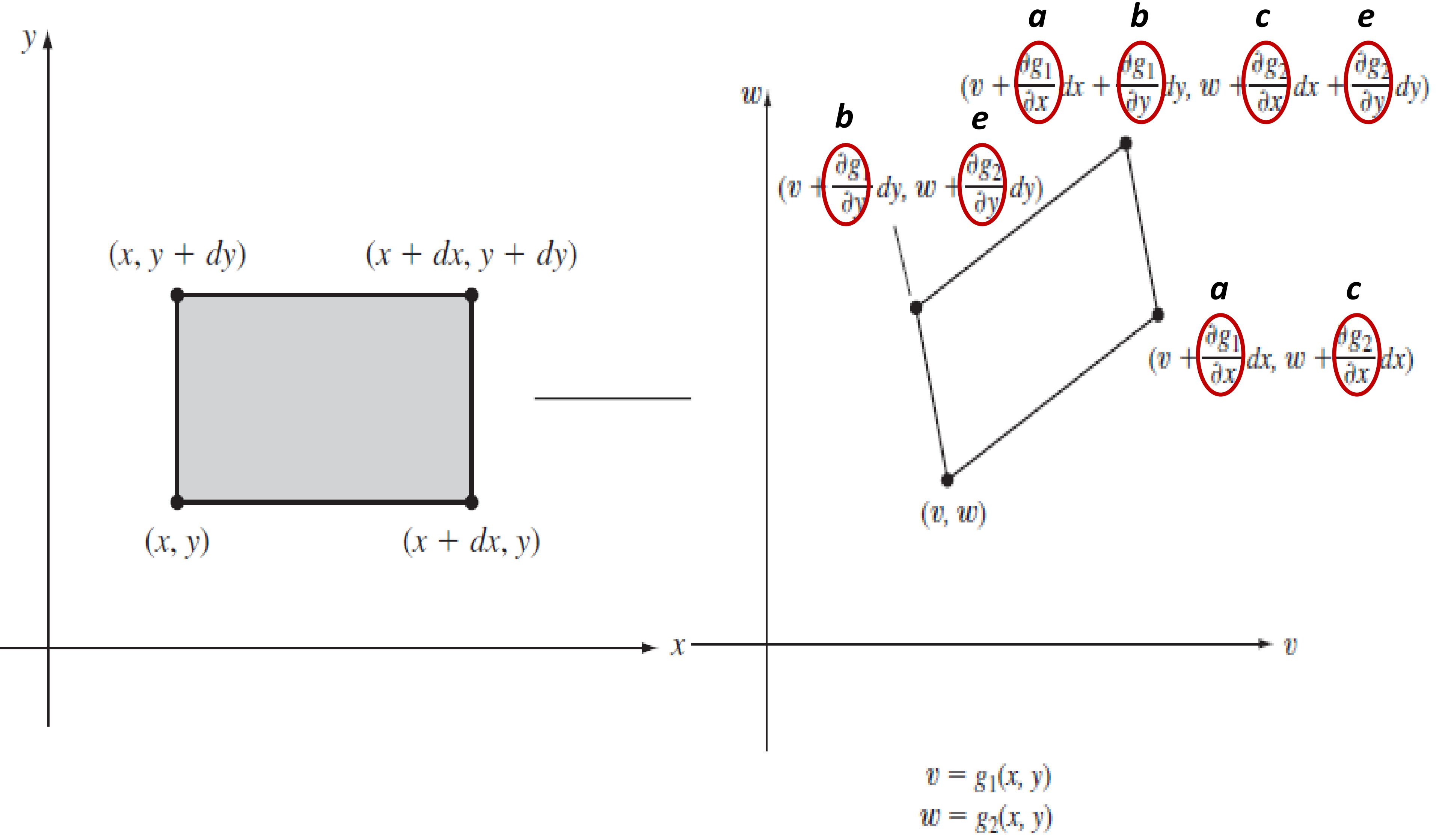
$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\Delta x}, \boldsymbol{y}) \approx f(x,y) + \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \Delta x$$



y
$(x, y + dy)$
$(x + dx, y + dy)$
(x, y)
$(x + dx, y)$
x
w
$(g_1(x + dx, y + dy),\ g_2(x + dx, y + dy))$
$(g_1(x, y + dy),$
$g_2(x, y + dy))$
$(g_1(x + dx, y),\ g_2(x + dx, y))$
$(g_1(x, y),\ g_2(x, y))$
v
$\approx$
(a)
$(v + \frac{\partial g_1}{\partial x}dx + \frac{\partial g_1}{\partial y}dy,\ w + \frac{\partial g_2}{\partial x}dx + \frac{\partial g_2}{\partial y}dy)$
w
$(v + \frac{\partial g_1}{\partial y}dy,\ w + \frac{\partial g_2}{\partial y}dy)$
Π
$(v + \frac{\partial g_1}{\partial x}dx,\ w + \frac{\partial g_2}{\partial x}dx)$
(v, w)
v

$v = g_1(x, y)$
$w = g_2(x, y)$

- Αντιστοιχία: $\begin{bmatrix} V \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$



- Αντιστοιχία: $\begin{bmatrix} V \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$
- Έτσι ορίζεται **προσεγγιστικά** ένας «**γραμμικός**» μετασχηματισμός με πίνακα μετασχηματισμού**:**

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x} & \dfrac{\partial g_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x} & \dfrac{\partial g_2}{\partial y} \end{bmatrix} = J(x, y)$$

- είναι ο **Ιακωβιανός πίνακας** (***Jacobian matrix***) με τις μερικές παραγώγους των δύο συναρτήσεων του μετασχηματισμού.

$$u = g_1(x,y)$$
$$w = g_2(x,y)$$

- Έτσι καταλήγουμε:

$$f_{V,W}(u,w) = \frac{1}{\left|J(x,y)\right|} f_{X,Y}(x,y)$$

$$x = h_1(u,w)$$
$$y = h_2(u,w)$$

όπου

$$\left|J(x,y)\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} g_1(x,y) & \frac{\partial}{\partial y} g_1(x,y) \\ \frac{\partial}{\partial x} g_2(x,y) & \frac{\partial}{\partial y} g_2(x,y) \end{vmatrix}$$

Γενικός τύπος κατανομής συναρτήσεων

- Η **από-κοινού** συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας **δύο συναρτήσεων** δύο τυχαίων μεταβλητών

$$\boxed{f_{V,W}(u,w) = |J(u,w)|\, f_{x,y}\left(x = h_1(u,w),\, y = h_2(u,w)\right)}$$

ορίζουσα του ***Ιακωβιανού*** πίνακα του **αντίστροφου μετασχηματισμού**

$$|J(u,w)| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial u} h_1(u,w) & \dfrac{\partial}{\partial w} h_1(u,w) \\ \dfrac{\partial}{\partial u} h_2(u,w) & \dfrac{\partial}{\partial w} h_2(u,w) \end{vmatrix}$$

Πρόβλημα 2: Κατανομή συνάρτησης πολλών μεταβλητών

Εύρεση κατανομής μιας συνάρτησης *Z=g(X,Y)*

Βήματα :

1. Ορίζουμε **βοηθητική** μεταβλητή , π.χ. *W=X*

2. Δουλεύουμε όπως πριν σαν να έχουμε **2 συναρτήσεις** *Z, W*

3. Βρίσκουμε την **από-κοινού σ.π.π.** $f_{Z,W}(z,w)$

4. Παίρνουμε την **περιθώρια του Z** :

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{Z,W}(z,w)\,dw$$

Παραδείγματα

1) Έστω 2 ανεξάρτητες εκθετικές τυχαίες μεταβλητές X, Y με κοινή παράμετρο $\lambda>0$. Να βρεθεί

α) η από-κοινού κατανομή των $V=X+Y$ και $W=X/Y$,
β) οι περιθώριες κατανομές των V, W και στη συνέχεια η μέση τιμή και η διακύμανσή τους.