Χαρακτηριστικά τυχαίων μεταβλητών

μέση τιμή (μ) & διακύμανση (σ^2)

Χαρακτηριστικά τυχαίων μεταβλητών

- Τα βασικότερα χαρακτηριστικά μιας τυχαίας μεταβλητής ***X*** είναι:

$$\mu = E(X)$$

- η **μέση τιμή** (***mean value***) ή **αναμενόμενη τιμή** (***expectation value***)

$$\sigma^2 = V(X)$$

- η **διακύμανση** (***variance***) ή **διασπορά** τιμών

Η **Μέση** ή **αναμενόμενη τιμή** (***μ***) (***Mean*** *or* ***Expectation value***)

Έστω τυχαία μεταβλητή ***X***.

- Ορίζεται ως **μέση ή αναμενόμενη τιμή** μιας τυχαίας μεταβλητής η ποσότητα:

$$\mu = E(X)$$

- Εκφράζει το **κέντρο μάζας** (ή πυκνότητας) της μεταβλητής και την **πιθανότερη τιμή** της

Υπολογισμός της μέσης τιμής

- Η διαδικασία υπολογισμού της μέσης τιμής εξαρτάται από τον **τύπο της μεταβλητής** (*συνεχής* ή *διακριτή*).

- Η **μέση τιμή** δεν πρέπει να **συγχέεται** με τον **μέσο όρο**. Υπάρχει όμως **μία περίπτωση** όπου οι δύο αυτές ποσότητες συμπίπτουν.

Υπολογισμός της μέσης τιμής για διακριτές τυχαίες μεταβλητές

- Έστω **διακριτή τ.μ. *X*** στο $\Omega_X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

- Η **μέση τιμή** υπολογίζεται ως εξής:

$$\mu = E(X) = \sum_{x \in \Omega_X} x f(x) = \sum_{x \in \Omega_X} x P(X = x) =$$
$$= x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + \ldots + x_n f(x_n) =$$
$$= x_1 P(X = x_1) + x_2 P(X = x_2) + \ldots + x_n P(X = x_n)$$

δηλ. ο $\boxed{\textbf{σταθμισμένος μέσος όρος}}$

Υπολογισμός της μέσης τιμής για **συνεχείς τυχαίες** μεταβλητές

- Έστω **συνεχή τ.μ. *X*** με συνάρτηση πυκνότητας *f(x)*

- Η **μέση τιμή** υπολογίζεται ως εξής:

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

δηλ. περιοχές με **μεγαλύτερη πυκνότητα** πιθανότητας έχουν **μεγαλύτερη βαρύτητα** (*συνεισφορά*) στον υπολογισμό του μέσου

Η διακύμανση ή διασπορά (σ^2) (*Variance*)

- Έστω τυχαία μεταβλητή, ***X***, με μέση τιμή $\mu = E(X)$
- Η **διακύμανση** ορίζεται ως : $\sigma^2 = V(X)$

$$\sigma^2 = V(X) = E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right) = E\left(\left(X - \mu\right)^2\right)$$

- Εκφράζει την **αναμενόμενη τιμή** **του τετραγώνου της διαφοράς** των τιμών της μεταβλητής από το μέσον της

$$\sigma^2 = V(X) = E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right) = E\left(\left(X - \mu\right)^2\right)$$

Η **διακύμανση ή διασπορά** :

- ✓ είναι **θετικός** αριθμός (**>*0***),
- ✓ είναι ένα **μέτρο μεταβλητότητας** της τυχαίας μεταβλητής,
- ✓ προσδιορίζει την **έκταση ή** το **πλάτος τιμών** της μεταβλητής.

Υπολογισμός Διακύμανσης

- Αν η τ.μ. ***X*** είναι **διακριτή** με **σ.π.π.** *f(x$_i$)=P(X=x$_i$)*

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = 1 \qquad \forall x_i \in \Omega_X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

$$\sigma^2 = V(X) = \sum_{x \in \Omega_X} (x-\mu)^2 f(x) = \sum_{x \in \Omega_X} (x-\mu)^2 P(X = x) =$$

$$= (x_1-\mu)^2 f(x_1) + (x_2-\mu)^2 f(x_2) + \ldots + (x_n-\mu)^2 f(x_n)$$

- δηλ. ο **σταθμισμένος μέσος όρος** του τετραγώνου της διαφοράς των τιμών της μεταβλητής από το μέσον της

Υπολογισμός Διακύμανσης

- Αν η τ.μ. ***X*** είναι **συνεχής** με **σ.π.π.** *f(x)* :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

$$\sigma^2 = V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx$$

- όπου $\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$

Τυπική απόκλιση (*standard deviation*)

- Ορίζουμε ως **τυπική απόκλιση** (***std***) τη **ρίζα της διακύμανσης**:

$$\sigma = STD(X) = \sqrt{V(X)} \qquad (>0)$$

Ο τελεστής της αναμενόμενης τιμής (*expectation*)

- ***g(X):*** **συνάρτηση** ή **παράσταση** τυχαίας μεταβλητής ***X***

- Ο τελεστής της **αναμενόμενης τιμής** πάνω στην ***g(X)***, υπολογίζει τη **μέση τιμή** των τιμών της συνάρτησης με βάση την **τυχαιότητα** των τιμών της **τ,μ, *X.***
- Ορίζεται ως :

$$E\big(g(X)\big) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{x \in \Omega_X} g(x)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) & , \text{ αν X διακριτή} \\ \text{ή} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})dx & , \text{ αν X συνεχής} \end{cases}$$

<u>Χρήσιμες σχέσεις</u>

- Μέση τιμή και διακύμανση **σταθεράς**

$$E(c) = \int_{-\infty}^{+\infty} c f(x) dx = c \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = c \times 1 = c$$

$$V(c) = E\left(\left(c - E(c)\right)^2\right) = E\left((c - c)^2\right) = E(0) = 0$$

- Μέση τιμή και διακύμανση **γραμμικής σχέσης** $aX+b$

$$E(aX+b)=\int_{-\infty}^{+\infty}(ax+b)f(x)dx=$$

$$=a\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx+b\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=aE(X)+b$$

$$V(aX+b)=E\left([aX+b-E(aX+b)]^2\right)=$$
$$=E\left([aX+b-aE(X)-b]^2\right)=$$
$$=E\left([aX-aE(X)]^2\right)=E\left(a^2[X-E(X)]^2\right)=$$
$$a^2E\left([X-E(X)]^2\right)=a^2V(X)$$

Μία χρήσιμη σχέση της διακύμανσης

$$V(X) = E\left(X^2\right) - E^2(X)$$

Απόδειξη

$$V(X) = E\left((X - E(X))^2\right) =$$

$$= E\left(X^2 + E^2(X) - 2E(X)X\right) =$$

$$= E\left(X^2\right) + E\left(E^2(X)\right) - E\left(2E(X)X\right) =$$

$$= E\left(X^2\right) + E^2(X) - 2E(X)E(X) =$$

$$= E\left(X^2\right) - E^2(X)$$

Χρήσιμες σχέσεις

$$E\left(X^2\right) = E\left(X^2 + X - X\right) = E\left(X\left(X-1\right) + X\right) =$$
$$= E\left(X\left(X-1\right)\right) + E\left(X\right)$$

$$V\left(X\right) = E\left(X^2\right) - \left(E\left(X\right)\right)^2 =$$
$$= E\left(X\left(X-1\right)\right) + E\left(X\right) - \left(E\left(X\right)\right)^2$$