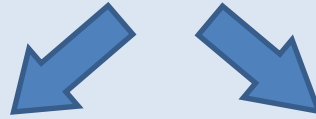


# Μέρος Ι. Εισαγωγή στις Πιθανότητες

## 3 βασικές έννοιες

- τυχαία πειράματα (*random trials*)
- δειγματικός χώρος (*sample space*)
- ενδεχόμενα (*events*)

# Είδη πειράματος



## Αιτιοκρατικό - Ντετερμινιστικό

Οι συνθήκες κάτω από τις οποίες εκτελείται το πείραμα καθορίζουν και το αποτέλεσμα (σύμφωνα με την αρχή της αιτιότητας).

## Τυχαίο (*random*) – Στοχαστικό

Οι συνθήκες **ΔΕΝ** καθορίζουν (πλήρως) το αποτέλεσμα, καθώς αυτό αποδίδεται στην «**τύχη**» και στην **περιορισμένη** γνώση των αιτιών που προκαλούν το αποτέλεσμα. Δηλ. υπάρχει «**έλλειμμα**» **αιτιότητας**.

# (1) Τυχαίο πείραμα – πείραμα τύχης (*Random trial*)

**Ορισμός:** ένα πείραμα που όταν εκτελείται κάτω από τις ίδιες ακριβώς συνθήκες το αποτέλεσμα του μπορεί να διαφέρει.

Ένα τυχαίο πείραμα καθορίζεται από

- την πειραματική **διαδικασία**, και
- ένα σύνολο από μία ή περισσότερες **παρατηρούμενες ποσότητες**.

## Παραδείγματα τυχαίων πειραμάτων

- **Π1:** Επιλογή σφαίρας από κουτί που περιέχει 50 αριθμημένες σφαίρες. Σημειώνουμε τον αριθμό της σφαίρας.
- **Π2:** Επιλογή σφαίρας από κουτί που περιλαμβάνει 4 αριθμημένες σφαίρες (1-4), εκ των οποίων οι 1, 2 είναι μαύρες και οι 3, 4 λευκές. Σημειώνουμε τον αριθμό και το χρώμα της σφαίρας που επιλέγεται.
- **Π3:** Στρίβουμε νόμισμα 3 φορές και παρατηρούμε την ακολουθία  $K, \Gamma$
- **Π4:** Στρίβουμε νόμισμα 3 φορές και παρατηρούμε τις φορές που έρχεται  $K$
- **Π5:** Ένα πακέτο πληροφορίας μεταδίδεται σε κανάλι με θόρυβο. Μετράμε τον αριθμό προσπαθειών που απαιτείται.
- **Π6:** Μετράμε τον χρόνο προσπέλασης μεταξύ δύο διαδοχικών σελίδων σε έναν *web server*
- **Π7:** Μετράμε τον χρόνο ζωής ενός συστήματος σε ένα υπολογιστικό περιβάλλον
- **Π8:** Μετράμε την τιμή ενός σήματος σε δύο χρονικές στιγμές  $t_1$  και  $t_2$
- **Π9:** Επιλέγουμε τυχαία έναν αριθμό στο συνεχές διάστημα  $[0,1]$
- **Π10:** Επιλέγουμε τυχαία έναν αριθμό  $x$  στο  $[0, 1]$  και στην συνέχεια έναν αριθμό  $y$  στο  $[0, x]$

## Παραδείγματα τυχαίων πειραμάτων

- **Π1:** Επιλογή σφαίρας από κουτί που περιέχει 50 αριθμημένες σφαίρες. Σημειώνουμε τον αριθμό της σφαίρας.
- **Π2:** Επιλογή σφαίρας από κουτί που περιλαμβάνει 4 αριθμημένες σφαίρες (1-4), εκ των οποίων οι 1, 2 είναι μαύρες και οι 3, 4 λευκές. Σημειώνουμε τον αριθμό και το χρώμα της σφαίρας που επιλέγεται.
- **Π3:** Στρίβουμε νόμισμα 3 φορές και παρατηρούμε την ακολουθία  $K, Γ$
- **Π4:** Στρίβουμε νόμισμα 3 φορές και παρατηρούμε τις φορές που έρχεται  $K$
- **Π5:** Ένα πακέτο πληροφορίας μεταδίδεται σε κανάλι με θόρυβο. Μετράμε τον αριθμό προσπαθειών που απαιτείται.
- **Π6:** Μετράμε τον χρόνο προσπέλασης μεταξύ δύο διαδοχικών σελίδων σε έναν *web server*
- **Π7:** Μετράμε τον χρόνο ζωής ενός συστήματος σε ένα υπολογιστικό περιβάλλον
- **Π8:** Μετράμε την τιμή ενός σήματος σε δύο χρονικές στιγμές  $t_1$  και  $t_2$
- **Π9:** Επιλέγουμε τυχαία έναν αριθμό στο  $[0,1]$
- **Π10:** Επιλέγουμε τυχαία έναν αριθμό  $x$  στο  $[0, 1]$  και στην συνέχεια έναν αριθμό  $y$  στο  $[0, x]$

### Παρατηρήσεις

- Πειράματα με την ίδια διαδικασία διαφέρουν στις παρατηρήσεις (Π3, Π4)
- Πειράματα με περισσότερες από 1 παρατηρούμενες ποσότητες (Π2, Π3, Π10)
- Πειράματα με ακολουθία παρατηρήσεων (Π3, Π5, Π10)
- Πειράματα χρονικά εξαρτώμενα (Π10)

## (2) Δειγματικός χώρος (δ.χ.) $\Omega$ (*Sample space*)

- **Ορισμός:** το σύνολο των αποτελεσμάτων ενός τυχαίου πειράματος.
- Συμβολίζεται με το σύμβολο  $\Omega$  – κάποιες φορές με το σύμβολο  $S$ .
- Κάθε στοιχείο  $\omega$  του δ.χ.  $\Omega$  ονομάζεται **δειγματικό σημείο**.

## (2) Δειγματικός χώρος (**δ.χ.**) $\Omega$ (*Sample space*)

Ορισμός: Το σύνολο των αποτελεσμάτων ενός τυχαίου πειράματος

### Παραδείγματα

- **Π1**: Επιλογή σφαίρας από κουτί που περιέχει 50 αριθμημένες σφαίρες. Σημειώνουμε τον αριθμό της σφαίρας.

$$\Omega_1 = \{1, 2, \dots, 50\},$$

- **Π2**: Επιλογή σφαίρας από κουτί που περιλαμβάνει 5 αριθμημένες σφαίρες (1-4), εκ των οποίων οι 1, 2 είναι μαύρες και οι 3, 4, 5 λευκές. Σημειώνουμε τον αριθμό και το χρώμα της σφαίρας που επιλέγεται.

$$\Omega_2 = \{ (1,M), (2,M), (3,L), (4,L), (5,L) \},$$

- **Π3**: Στρίβουμε νόμισμα 3 φορές και παρατηρούμε την ακολουθία  $K, \Gamma$

$$\Omega_3 = \{KKK, KK\Gamma, K\Gamma K, \Gamma KK, K\Gamma\Gamma, \Gamma K\Gamma, \Gamma\Gamma K, \Gamma\Gamma\Gamma\},$$

- **Π4**: Στρίβουμε νόμισμα 3 φορές και παρατηρούμε τις φορές που έρχεται  $K$

$$\Omega_4 = \{0, 1, 2, 3\},$$

- **Π5**: Ένα πακέτο πληροφορίας μεταδίδεται σε κανάλι με θόρυβο. Μετράμε τον αριθμό προσπαθειών που απαιτείται για την μετάδοσή του.

$$\Omega_5 = \{1, 2, \dots\}$$

## Παραδείγματα (συν.)

- **Π6:** Μετράμε τον χρόνο προσπέλασης μεταξύ δύο διαδοχικών σελίδων σε ένα *web server*

$$\Omega_6 = \{t : t \geq 0\} = [0, \infty),$$

- **Π7:** Μετράμε χρόνο ζωής ενός *chip* μνήμης σε ένα υπολογιστικό περιβάλλον

$$\Omega_7 = \{t : t \geq 0\} = [0, \infty),$$

- **Π8:** Μετράμε την τιμή ενός σήματος σε δύο χρονικές στιγμές  $t_1$  και  $t_2$

$$\Omega_8 = \{ (v_1, v_2) : -\infty < v_1 < \infty, -\infty < v_2 < \infty \},$$

- **Π9:** Επιλέγουμε τυχαία έναν αριθμό στο συνεχές διάστημα  $[0,1]$

$$\Omega_9 = \{x : 0 \leq x \leq 1\},$$

- **Π10:** Επιλέγουμε τυχαία έναν αριθμό  $x$  στο  $[0, 1]$  και στην συνέχεια έναν αριθμό  $y$  στο  $[0, x]$

$$\Omega_{10} = \{ (x, y) : 0 \leq y \leq x \leq 1 \}$$



## Παρατηρήσεις

- ✓ Τα αποτελέσματα είναι **μοναδικά**, δηλ. δεν μπορούν να διασπαστούν (ανάλογα με το τι ακριβώς μετράμε στο πείραμα). Τότε λέμε ότι είναι **ασυμβίβαστα** (ξένα μεταξύ τους), δηλ. το ένα αποκλείει το άλλο.
- ✓ Ένας **δ.χ.** μπορεί να είναι:
  - **διακριτός** (αριθμήσιμο πλήθος αποτελεσμάτων) π.χ.  $\Omega_1 - \Omega_5$  , ή
  - **συνεχής** (άπειρος αριθμός αποτελεσμάτων) , π.χ.  $\Omega_6 - \Omega_{10}$
- ✓ Πειράματα με την ίδια διαδικασία μπορεί να έχουν διαφορετικό **δ.χ.** καθώς μετράμε διαφορετικές ποσότητες, π.χ.  $\Omega_3$  ,  $\Omega_4$  .

### (3) Ενδεχόμενα (events)

Ορισμός: κάθε **υποσύνολο αποτελεσμάτων** ενός δ.χ.  $\Omega$

#### Παραδείγματα

- $A_1$  = “επιλογή σφαίρας με ζυγό αριθμό” =  $\{2, 4, \dots, 48, 50\}$ ,
- $A_2$  = “επιλογή σφαίρας λευκή με ζυγό αριθμό” =  $\{(4, \Lambda)\}$ ,
- $A_3$  = “και οι 3 ρίψεις έχουν το ίδιο αποτέλεσμα” =  $\{KKK, ΓΓΓ\}$ ,
- $A_4$  = “ο αριθμός των φορών  $K$  ίσος με τις φορές  $\Gamma$ ” =  $\emptyset$
- $A_5$  = “Απαιτούνται λιγότερες από 10 προσπάθειες” =  $\{1, 2, \dots, 9\}$ ,
- $A_6$  = “Χρόνος προσπέλασης το πολύ μέχρι 5 sec” =  $\{t : 0 \leq t \leq 5\} = [0, 5]$ ,
- $A_7$  = “χρόνος ζωής chip τουλαχ. 1000 h και λιγότερο από 1500h” =  $[1000, 1500)$ ,
- $A_8$  = “οι 2 τιμές διαφορετικά πρόσημα” =  $\{(v_1, v_2) : (v_1 < 0 \ \& \ v_2 > 0) \ \acute{\eta} \ (v_1 > 0 \ \& \ v_2 < 0)\}$ ,
- $A_9$  = “αριθμός μεταξύ 0.3 και 0.5” =  $\{x : 0.3 \leq x \leq 0.5\} = [0.3, 0.5]$ ,
- $A_{10}$  = “οι 2 τιμές διαφέρουν το πολύ κατά 0.1” =  $\{(x, y) : 0 \leq y \leq x \leq 1 \ \& \ |x-y| \leq 0.1\}$

# Τύποι ενδεχομένων

## Ενδεχόμενα ειδικού τύπου

- Βέβαιο (**certain**) ενδεχόμενο :  $A = \Omega$  (πάντα συμβαίνει)
- Μηδενικό (**null**) ενδεχόμενο :  $A = \emptyset$  (ποτέ δεν συμβαίνει)
- Στοιχειώδες (**elementary**) ενδεχόμενο : ένα αποτέλεσμα του δ.χ.

## Σύνθετα ενδεχόμενα

- Ομάδες απλών ενδεχομένων με κάποιο κοινό χαρακτηριστικό
- Εφαρμογή της **θεωρίας συνόλων**
- Χρήση **διαγραμμάτων Venn** για οπτικοποίηση των ενδεχομένων και για την καλύτερη αντίληψή τους (διαισθητικά).

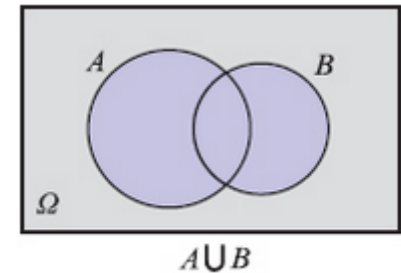
# Σύνθετα ενδεχόμενα (από πράξεις συνόλων)

- ένωση 2 ενδεχομένων  $A \cup B$  (**OR**)

1<sup>η</sup> Ερμηνεία: Σύνολο αποτελεσμάτων που ανήκουν είτε στο A, είτε στο B, είτε και στα 2 μαζί

2<sup>η</sup> Ερμηνεία: ενδεχόμενο που ισχύει όταν ισχύει **τουλάχιστον ένα** από τα A, B.

union

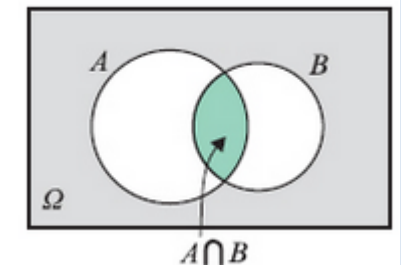


- τομή 2 ενδεχομένων  $A \cap B$  (**AND**)

1<sup>η</sup> Ερμηνεία: Σύνολο αποτελεσμάτων που ανήκουν και στο A και στο B.

2<sup>η</sup> Ερμηνεία: ενδεχόμενο που ισχύει όταν ισχύουν **ταυτόχρονα** και τα 2 ενδεχόμενα A, B.

intersection

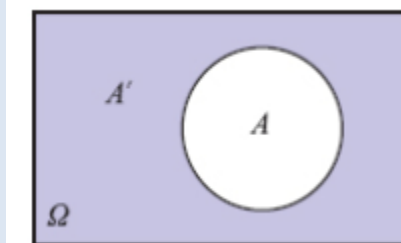


- Συμπλήρωμα ενδεχομένου  $A'$  (**NOT**)

1<sup>η</sup> Ερμηνεία: Σύνολο αποτελεσμάτων που δεν ανήκουν στο A

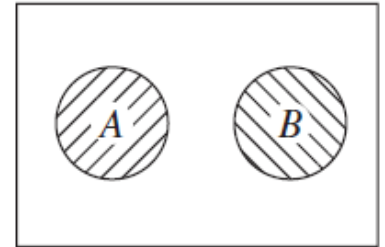
2<sup>η</sup> Ερμηνεία: ενδεχόμενο που ισχύει όταν **δεν** ισχύει το A

complement



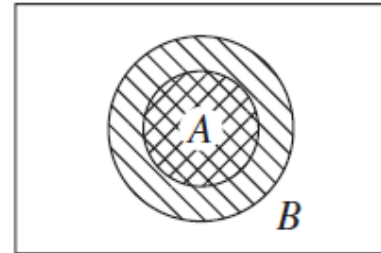
## Σύνθετα ενδεχόμενα (2)

➤ Αν  $A \cap B = \emptyset$  τότε A, **B ασυμβίβαστα** ενδεχόμενα, δηλ. η εμφάνιση του A αποκλείει την εμφάνιση του B



$$A \cap B = \emptyset$$

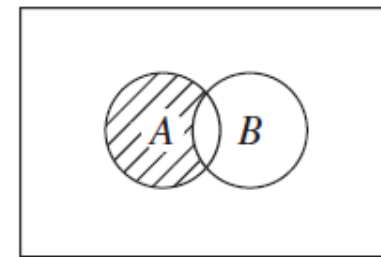
➤  $A \subset B$  σημαίνει ότι αν ισχύει το A τότε ισχύει και το B



$$A \subset B$$

➤  $A - B = \{x : x \in A \text{ \& } x \notin B\}$  (**διαφορά**)

$$A - B = A \cap B'$$



$$A - B$$

## Ιδιότητες ενδεχομένων

$$\Omega' = \emptyset, \quad \emptyset' = \Omega, \quad (A')' = A$$

$$\Omega \cup A = \Omega, \quad \emptyset \cup A = A, \quad A \cup A = A, \quad A \cup A' = \Omega$$

$$\Omega \cap A = A, \quad \emptyset \cap A = \emptyset, \quad A \cap A = A, \quad A \cap A' = \emptyset$$

## Ιδιότητες ενδεχομένων (2)

✓ **αντιμεταθετική ιδιότητα**

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

✓ **προσεταιριστική ιδιότητα**

$$A \cup (B \cup \Gamma) = (A \cup B) \cup \Gamma$$

$$A \cap (B \cap \Gamma) = (A \cap B) \cap \Gamma$$

✓ **επιμεριστική ιδιότητα**

$$A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$$

$$A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$$

✓ **Νόμοι *De Morgan***

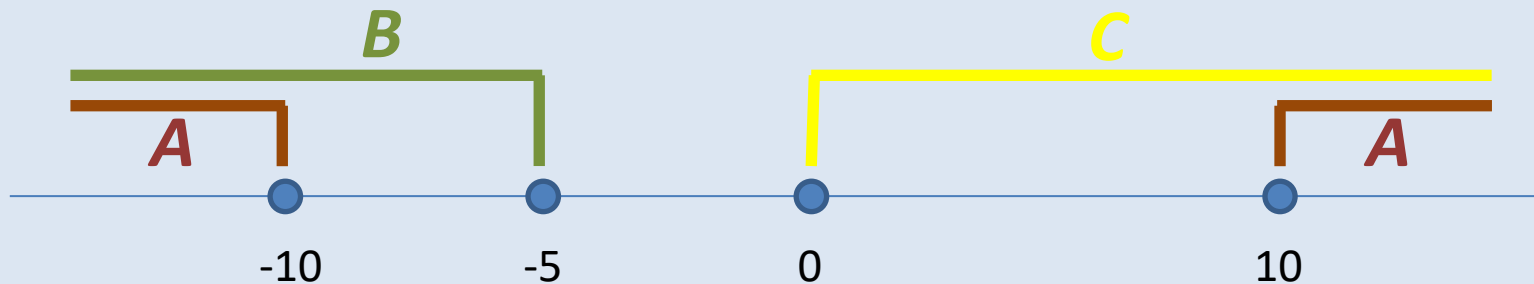
$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

## Παραδείγματα

1. Έστω  $A=\{|x|>10\}$ ,  $B=\{x<-5\}$ ,  $C=\{x>0\}$  τότε να βρεθούν τα ενδεχόμενα  $A \cup B$ ,  $(A \cup B) \cap C$ ,  $A \cap B$ ,  $C'$ ,  $A \cap B \cap C$ .

### Λύση





# Παραδείγματα

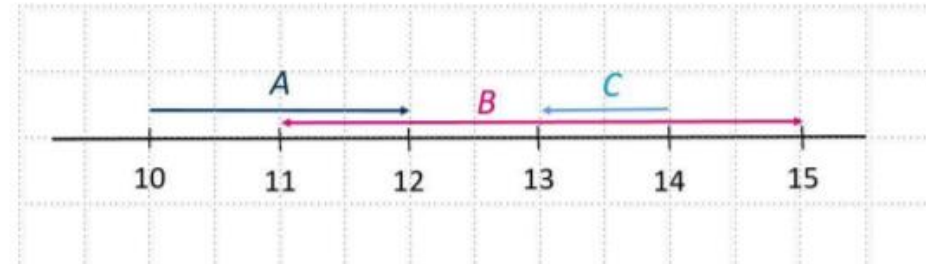
2)

➤ Ορίζονται τα ενδεχόμενα:

➤  $A = \{x: 10 \leq x < 12\}.$

➤  $B = \{x: 11 < x < 15\}.$

➤  $C = \{x: 13 < x \leq 14\}.$



Τότε

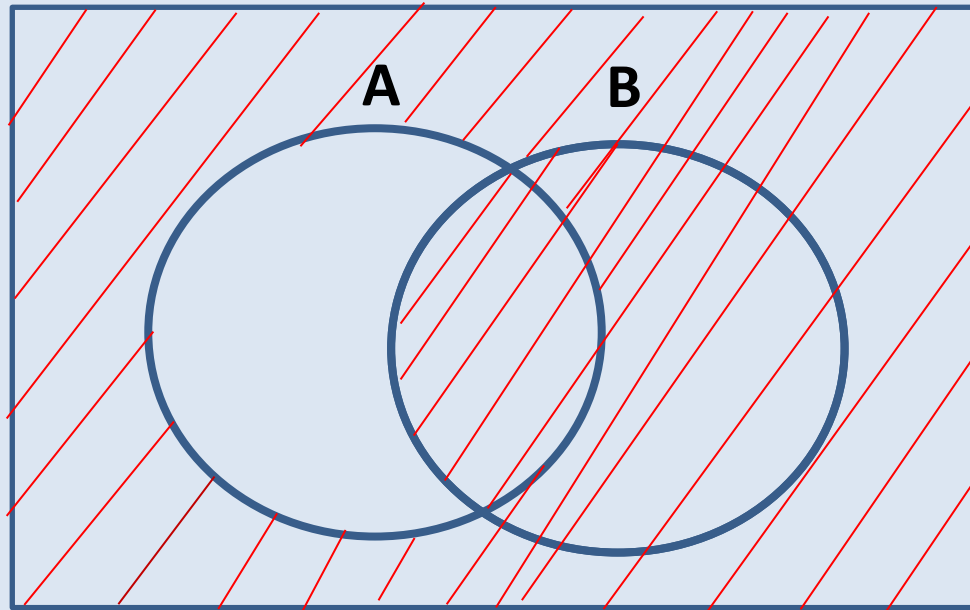
- $A \cup B = \{x: 10 \leq x < 15\}$
- $A \cap B = \{x: 11 \leq x < 12\}$
- $A' = \{x < 10 \text{ ή } x \geq 12\}$
- A και C ξένα **(ασυμβίβαστα)**

3. Να γίνει ο έλεγχος ορθότητας (με χρήση **διαγραμμάτων Venn**) των προτάσεων:

- $(A - B)' = A' \cup B$
- $A \cup (A \cap B) = A$
- $A \cap (A \cup B) = A$
- $(A \cap B \cap \Gamma)' = (A \cap B)' \cup \Gamma'$
- $A - (B - \Gamma) = (A - B) \cup (A \cap \Gamma)$

3. Να γίνει ο έλεγχος ορθότητας (με χρήση **διαγραμμάτων Venn**) των προτάσεων:

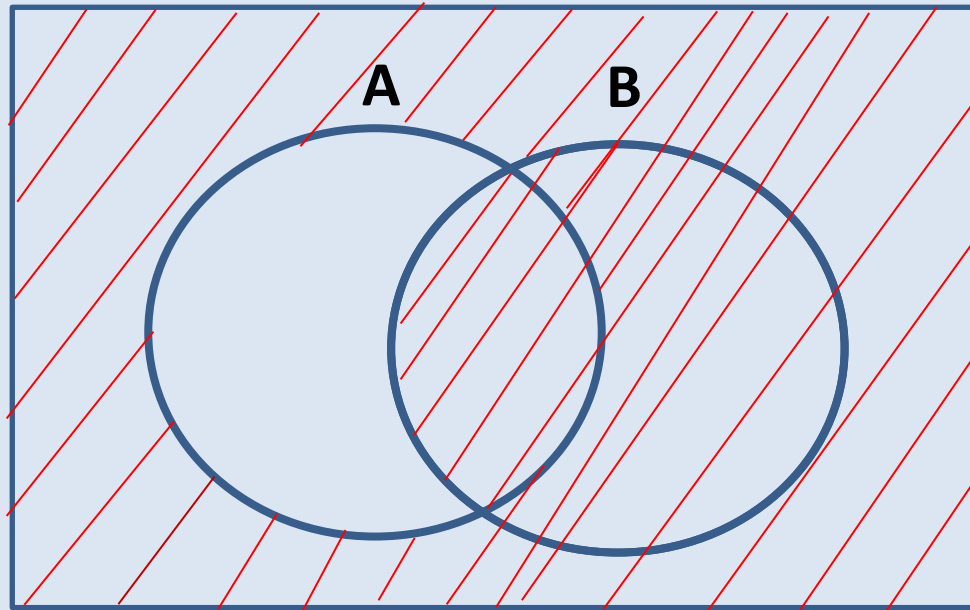
–  $(A - B)' = A' \cup B$



$(A - B)'$

3. Να γίνει ο έλεγχος ορθότητας (με χρήση **διαγραμμάτων Venn**) των προτάσεων:

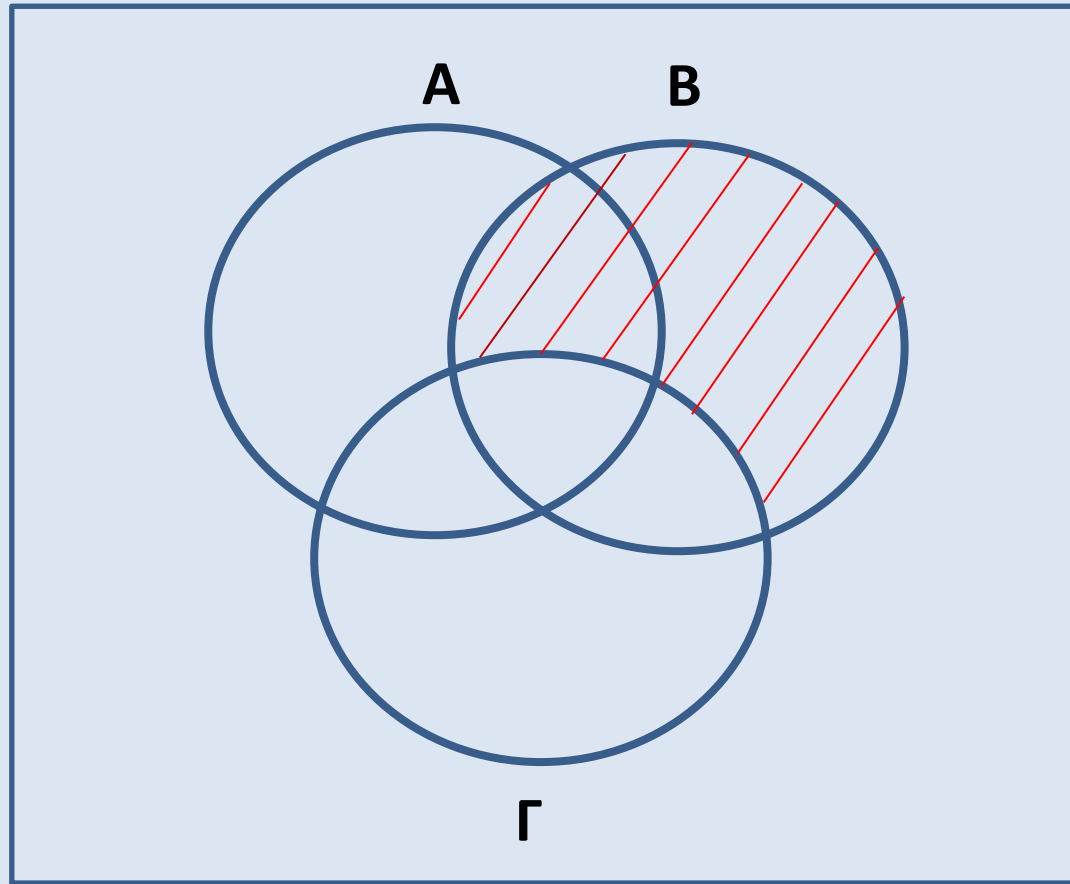
–  $(A - B)' = A' \cup B$



$A' \cup B$

3. Να γίνει ο έλεγχος ορθότητας (με χρήση **διαγραμμάτων Venn**) των προτάσεων:

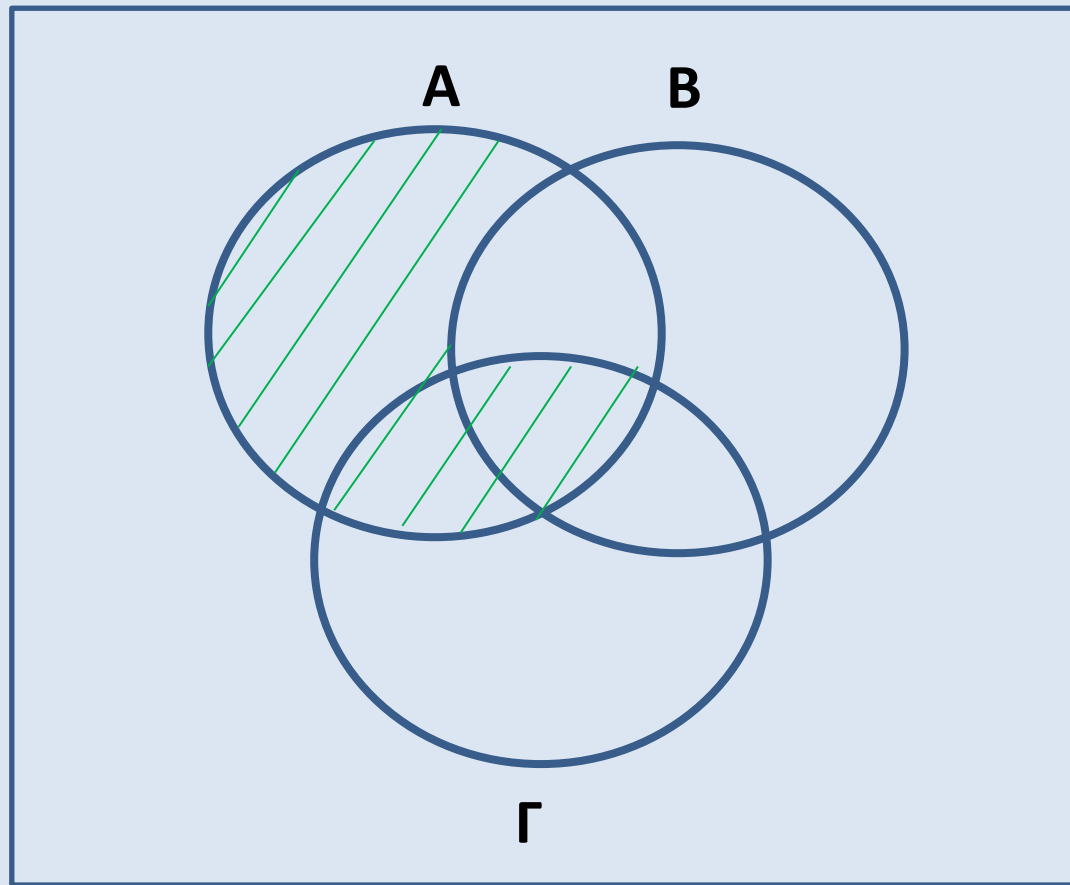
–  $A - (B - \Gamma) = (A - B) \cup (A \cap \Gamma)$



$B - \Gamma$

3. Να γίνει ο έλεγχος ορθότητας (με χρήση **διαγραμμάτων Venn**) των προτάσεων:

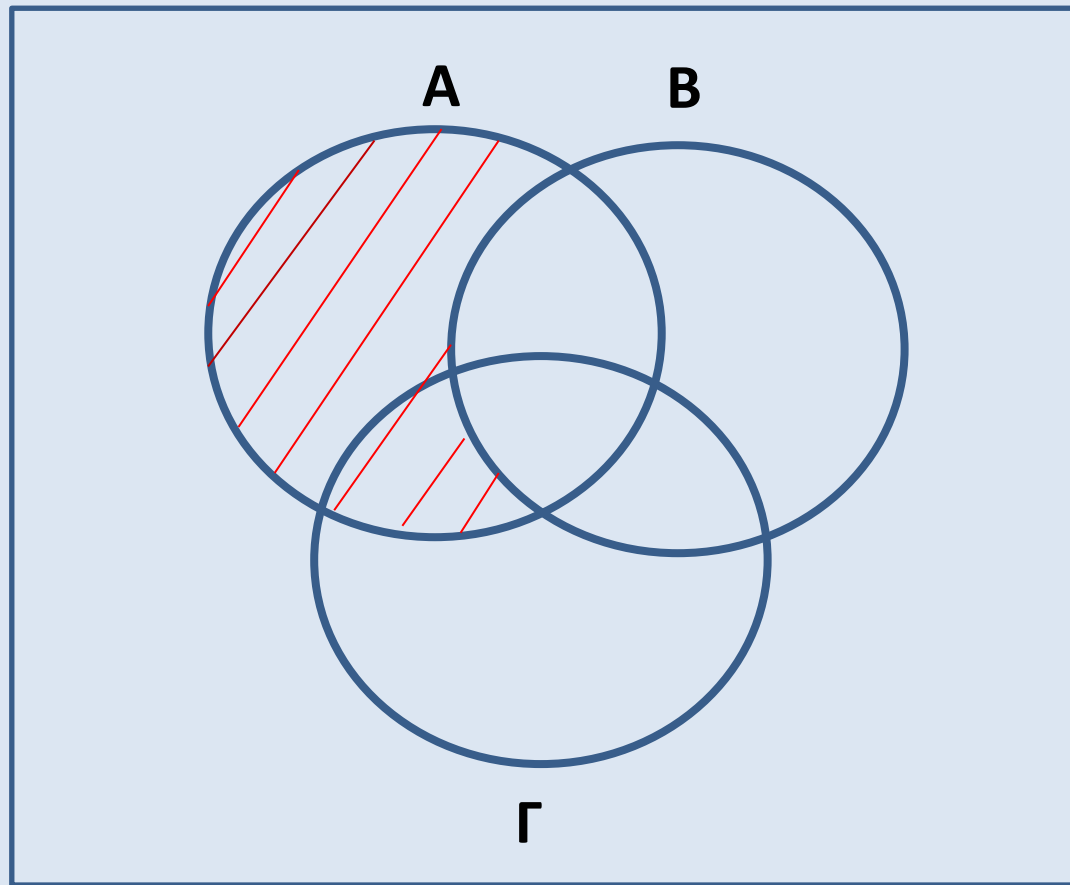
–  $A - (B - \Gamma) = (A - B) \cup (A \cap \Gamma)$



$A - (B - \Gamma)$

3. Να γίνει ο έλεγχος ορθότητας (με χρήση **διαγραμμάτων Venn**) των προτάσεων:

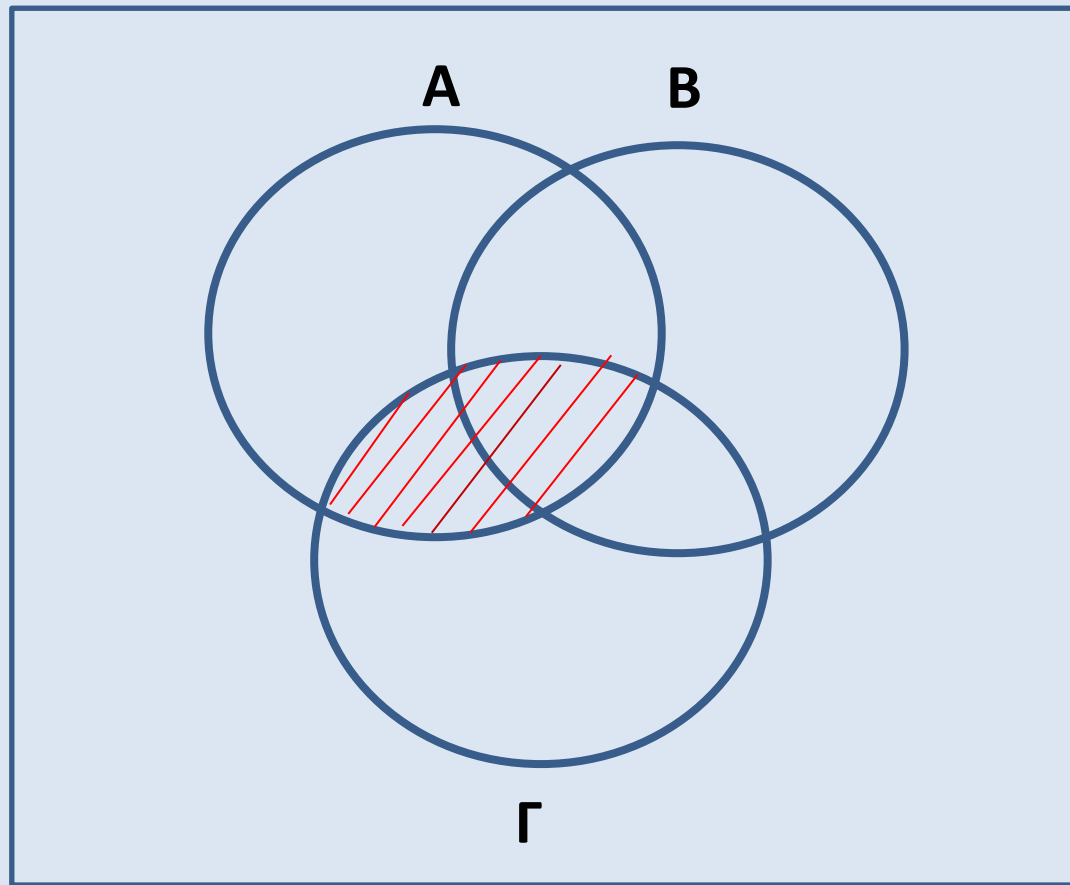
–  $A - (B - \Gamma) = (A - B) \cup (A \cap \Gamma)$



$A - B$

3. Να γίνει ο έλεγχος ορθότητας (με χρήση **διαγραμμάτων Venn**) των προτάσεων:

–  $A - (B - \Gamma) = (A - B) \cup (A \cap \Gamma)$

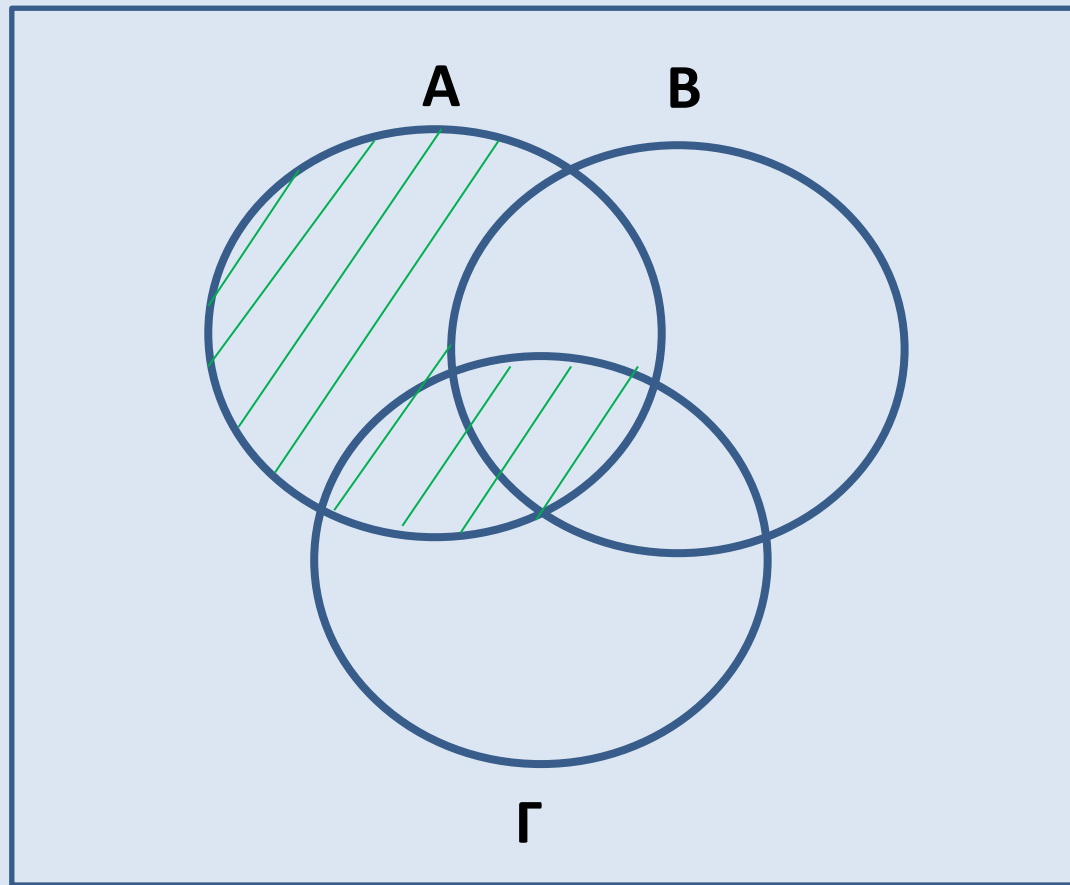


$A \cap \Gamma$



3. Να γίνει ο έλεγχος ορθότητας (με χρήση **διαγραμμάτων Venn**) των προτάσεων:

–  $A - (B - \Gamma) = (A - B) \cup (A \cap \Gamma)$



$(A - B) \cup (A \cap \Gamma)$

4. Να βρεθούν τα ενδεχόμενα και τα διαγράμματα Venn

α) Συμβαίνει **τουλάχιστον ένα** από τα  $A, B, \Gamma$

β) Συμβαίνουν **ταυτόχρονα όλα** τα  $A, B, \Gamma$

γ) Δεν συμβαίνει **κανένα από** τα  $A, B, \Gamma$

$$(A \cup B \cup \Gamma)' = A' \cap B' \cap \Gamma'$$

4. Να βρεθούν τα ενδεχόμενα και τα διαγράμματα Venn (συν.)

δ) Συμβαίνει **ακριβώς ένα** από τα  $A, B, \Gamma$

ε) Συμβαίνει **το πολύ ένα** από τα  $A, B, \Gamma$

στ) Συμβαίνουν **τουλάχιστον δύο** από τα  $A, B, \Gamma$

ζ) Συμβαίνουν **ακριβώς δύο** από τα  $A, B, \Gamma$

η) Συμβαίνουν **το πολύ δύο** από τα  $A, B, \Gamma$

$$(A \cap B \cap \Gamma)' = A' \cup B' \cup \Gamma'$$

4. Να βρεθούν τα ενδεχόμενα και τα διαγράμματα Venn (συν.)

θ) Συμβαίνει το **A** και ένα τουλάχιστον από τα B, Γ

ι) Συμβαίνει **ένα τουλάχιστον από τα A, B** και **ένα τουλάχιστον από τα B, Γ**.

$$(A \cup B) \cap (B \cup \Gamma) = B \cup (A \cap \Gamma)$$

**5.** Έστω δ.χ.  $\Omega$  το σύνολο των φοιτητών (αγόρια και κορίτσια) του τμήματος Μηχ. Η/Υ & Πληροφορικής, και **E1, E2, E3, E4, E5** τα σύνολα των φοιτητών του πρώτου, δευτέρου, τρίτου, τετάρτου και πέμπτου έτους, αντίστοιχα **Γ** είναι το σύνολο των **φοιτητριών** του τμήματος και **Δ** το σύνολο των φοιτητών που έχουν περάσει το μάθημα της **Άλγεβρας**. Να ορισθούν (**λεκτικά**) τα παρακάτω:

$$A_1 = (E_1 \cup E_2)' \cap \Gamma \cap \Delta$$

$$A_2 = \Gamma \cap \Delta'$$

$$A_3 = E_5 \cap \Gamma' \cap \Delta$$

$$A_4 = E_5 \cap \Gamma \cap \Delta'$$

$$A_5 = (E_1 \cup E_2) \cap \Gamma \cap \Delta$$

**5.** Έστω δ.χ.  $\Omega$  το σύνολο των φοιτητών (αγόρια και κορίτσια) του τμήματος Μηχ. Η/Υ & Πληροφορικής, και  $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5$  τα σύνολα των φοιτητών του πρώτου, δευτέρου, τρίτου, τετάρτου και πέμπτου έτους, αντίστοιχα  $\Gamma$  είναι το σύνολο των φοιτητριών του τμήματος και  $\Delta$  το σύνολο των φοιτητών που έχουν περάσει το μάθημα της Άλγεβρας. Να ορισθούν (λεκτικά) τα παρακάτω:

$$A_1 = (E_1 \cup E_2)' \cap \Gamma \cap \Delta$$

- Τριτοετείς φοιτήτριες και άνω που έχουν περάσει το μάθημα της Άλγεβρας
- ....