Ανεξαρτησία ενδεχομένων (independent events)

Δύο ενδεχόμενα Α, Β λέγονται **ανεξάρτητα** όταν:

- **Ορισμός 1:** η γνώση του ενός (Β) δεν επηρεάζει την πιθανότητα του άλλου (Α):

$$P(A|B)=P(A)$$

Σημείωση: φυσικά **ισχύει αυτομάτως** ότι : ***P(B|A)=P(B)*** καθώς:

$$P(B|A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}=\frac{\cancel{P(A)}P(B)}{\cancel{P(A)}}=P(B)$$

Ανεξαρτησία ενδεχομένων (independent events)

Δύο ενδεχόμενα A, B λέγονται **ανεξάρτητα** όταν:

- **Ορισμός 1:** η γνώση του ενός (B) δεν επηρεάζει την πιθανότητα του άλλου (A):

$$P(A|B)=P(A)$$

ισοδύναμα (χρησιμοποιώντας τον ***πολλαπλασιαστικό τύπο***)

- **Ορισμός 2:** η από-κοινού πιθανότητα $P(A \cap B)$ ισούται με το γινόμενο πιθανοτήτων των δύο ενδεχομένων

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(A)\,P(B)$$

Δύο ενδεχόμενα Α, Β λέγονται **ανεξάρτητα** όταν:

η γνώση του ενός δεν επηρεάζει την πιθανότητα του άλλου:

$$P(A|B)=P(A)$$

ισοδύναμα

η από-κοινού πιθανότητα ισούται με το γινόμενο πιθανοτήτων των δύο ενδεχομένων

$$P(A \cap B) = P(A)*P(B)$$

*«Αποτελούν **ικανές και αναγκαίες** συνθήκες ανεξαρτησίας»*

Παράδειγμα

Έστω ρίψη ζαριού 2 διαδοχικές φορές. Έστω τα ενδεχόμενα:
Α="1ο ζάρι=1 ", Β="άθροισμα 2 ζαριών=5", Γ="άθροισμα 2 ζαριών=7 ".
Να εξεταστούν ως προς την ανεξαρτησία τα Α,Β και τα Α,Γ.

Λύση

Ω={ (1,1), (1,2, … , (1,6), (2,1), …, (2,6), …, (5,6), (6,1), …, (6,5), (6,6) }
Α={ (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6) }
Β={ (1,4), (4,1), (2,3), (3,2) }
Γ={ (1,6), (6,1), (5,2), (2,5), (4,3), (3,4) }

- P(***Α***) = 6/36 = 1/6 , P(B) = 4/36 = 1/9 , P(***Γ***) = 6/36=1/6
- $P(A \cap B) = 1/36 \neq P(A)P(B)$ άρα τα Α, Β **δεν είναι ανεξάρτητα**
- ***$P(A \cap \Gamma) = 1/36 = P(A)P(\Gamma) = 1/36$*** άρα τα Α και Γ **είναι ανεξάρτητα**

Ανεξαρτησία ενδεχομένων (συν.)

Παρατηρήσεις

- Αν τα A, B είναι ανεξάρτητα τότε επίσης είναι ανεξάρτητα τα
  A’ , B , A , B’ , A’ , B’

Απόδειξη

P(A’|B) =1-P(A|B)=1-P(A)=P(A’) άρα **A’ , B** είναι **ανεξάρτητα**

Ανεξαρτησία ενδεχομένων (συν.)

Παρατηρήσεις

- Αν τα A, B είναι ανεξάρτητα τότε επίσης είναι ανεξάρτητα τα
  A' , B , **A , B'** , A' , B'

<u>Απόδειξη</u>

P(B'|A) =1-P(B|A)=1-P(B)=P(B') άρα **A , B'** είναι **ανεξάρτητα**

(με παρόμοιο τρόπο)

Ανεξαρτησία ενδεχομένων (συν.)

Παρατηρήσεις

- Αν τα A, B είναι ανεξάρτητα τότε επίσης είναι ανεξάρτητα τα

  A' , B , A , B' , **A' , B'**

<u>Απόδειξη</u>

P(A'|B) =1-P(A|B)=1-P(A)=P(A') άρα A' ,B είναι ανεξάρτητα

$\mathbf{P(A' \cap B') =}$ $1- P(A \cup B) = 1- (P(A)+P(B) - P(A \cap B)) =$

$= 1-(P(A)+P(B) - P(A)P(B)) = 1-P(A) - P(B) (1-(P(A)) =$

$= (1-P(A))(1-P(B))$ $\mathbf{= P(A')P(B')}$, άρα ***A', B'*** *είναι* ***ανεξάρτητα***

Ανεξαρτησία ενδεχομένων (συν.)

- 2 ***ασυμβίβαστα*** ενδεχόμενα **ΔΕΝ** είναι ***ανεξάρτητα***

Απόδειξη

Εφόσον A, B ασυμβίβαστα $A \cap B = \varnothing$

Επομένως $P(A \cap B) = P(\varnothing) = 0 \neq P(A)\,P(B)$

Ανεξαρτησία ενδεχομένων (συν.)

- Για να είναι 3 ενδεχόμενα A, B, Γ ανεξάρτητα θα πρέπει να ισχύουν:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$
$$P(A \cap \Gamma) = P(A)P(\Gamma)$$
$$P(B \cap \Gamma) = P(B)P(\Gamma)$$

$$P(A \cap B \cap \Gamma) = P(A)P(B)P(\Gamma)$$

- **Γενίκευση**: συνθήκες ανεξαρτησίας για n ενδεχόμενα $A_1, A_2, \ldots, A_n$:

$$\forall k = 2,3,\ldots,n$$

$$\underset{1 \le i_1 \le i_2 \le \cdots \le i_k \le n}{P\left(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}\right)} = P\left(A_{i_1}\right)P\left(A_{i_2}\right)\cdots P\left(A_{i_k}\right)$$

Ανεξάρτητα / Εξαρτημένα πειράματα

- Η έννοια της ανεξαρτησίας επεκτείνεται σε περιπτώσεις **ακολουθιακών πειραμάτων** ή **ακολουθιακών γεγονότων**.
- Έστω ακολουθία ***n*** γεγονότων $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ που προκύπτουν από τα ***n*** πειράματα.
- Ζητείται η πιθανότητα να «**παρατηρήσουμε**» μία τέτοια ακολουθία γεγονότων

$$P\left(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n\right)$$

*(**από κοινού** πιθανότητα παρατηρήσεων)*

Ανεξάρτητα / Εξαρτημένα πειράματα

$$P\left(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n\right)$$

- **2 περιπτώσεις:**
  - Τα πειράματα ή διαδοχικά ενδεχόμενα είναι **ανεξάρτητα**
  - Τα πειράματα ή διαδοχικά ενδεχόμενα είναι **εξαρτημένα**

(Α). Ανεξάρτητα πειράματα ή ενδεχόμενα

Στην περίπτωση ανεξαρτησίας των πειραμάτων έχουμε:

$$P\left(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n\right) = P\left(A_1\right)P\left(A_2\right)P(A_3)\cdots P\left(A_n\right)$$

π.χ. στρίβουμε ένα νόμισμα 10 φορές και παρατηρούμε το αποτέλεσμα. Υπολογισμός πιθανοτήτων:

- P(“10 συνεχόμενες Κορώνα”)=*P(**ΚΚΚΚΚΚΚΚΚΚ**)=*
=P(K)P(K)…P(K)=2^{-10}
- P(“5 πρώτες Κορώνα και 5 επόμενες Γράμματα”) =
*=P(**ΚΚΚΚΚΓΓΓΓΓ**)=P(K)P(K)P(K)P(K)P(Γ)P(Γ)P(Γ)P(Γ)=*2^{-10}
- P(“εναλλαγή Κορώνας Γράμματα”)=*P(**ΚΓΚΓΚΓΚΓΚΓ**)=*2^{-10}

Παράδειγμα 1

- Μία άσκηση ενός μαθήματος δίνεται σε τρεις φοιτητές Α, Β, Γ οι οποίοι έχουν πιθανότητα να την λύσουν 1/2, 1/3 και 1/4 αντίστοιχα. Αν οι τρεις φοιτητές δουλεύουν ανεξάρτητα, ποια είναι η πιθανότητα η άσκηση να μη λυθεί;

Παράδειγμα 2

- Δύο παίκτες, Α και Β, μιας ομάδας μπάσκετ έχουν σημειώσει 20 πόντους ο καθένας στα τρία πρώτα δεκάλεπτα ενός αγώνα. Στο τέλος του αγώνα, η πιθανότητα ο παίκτης Α να πετύχει 30 πόντους συνολικά είναι 85%, ενώ η πιθανότητα του Β είναι 95%. Ποια είναι η πιθανότητα οι δύο παίκτες να καταφέρουν να φτάσουν τους 30 πόντους

  α) και οι δύο μαζί;

  β) τουλάχιστον ένας από τους δύο;

  γ) μόνο ένας από τους δύο;

  δ) κανείς από τους δύο;

(B). Εξαρτημένα πειράματα

Το αποτέλεσμα ενός πειράματος εξαρτάται από τα αποτελέσματα προηγούμενων πειραμάτων.

- Πλήρης εξάρτηση: εξάρτηση από **όλα** τα πειράματα που προηγήθηκαν (*εξάρτηση n – τάξης*)

$$P\left(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n\right) =$$
$$= P\left(A_1\right)P\left(A_2 \mid A_1\right)P(A_3 \mid A_1 \cap A_2)\cdots P\left(A_n \mid A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}\right)$$

- **Εξάρτηση 1ης τάξης**: εξάρτηση **μόνο** από το προηγούμενο

$$P\left(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n\right) = P\left(A_1\right)P\left(A_2 \mid A_1\right)P(A_3 \mid A_2)\cdots P\left(A_n \mid A_{n-1}\right)$$

(**Αλυσίδες Markov**)

Αλυσίδες Markov (*Markov Chains*)

- Είδος **στοχαστικής διαδικασίας** (*stochastic process*)

$$S = \{S_0, S_1, S_2, \ldots, S_n\}$$

ακολουθία παρατηρήσεων

- Έστω πεπερασμένο σύνολο διακριτών καταστάσεων (**αλφάβητο**)

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_K\}$$

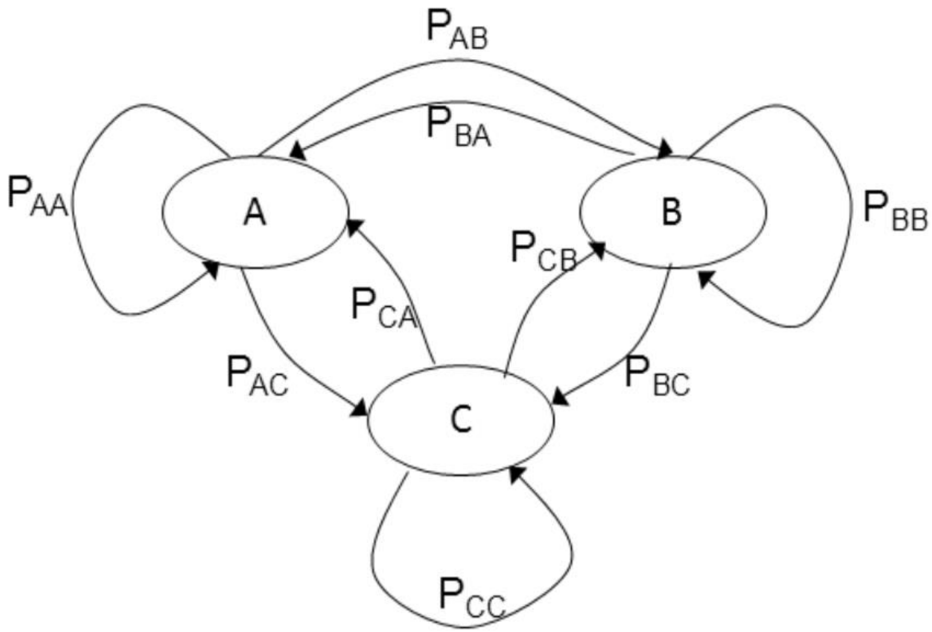
- Κάθε κατάσταση έχει μία **πιθανότητα έναρξης** της διαδικασίας.

$$\pi_i = P(S_0 = a_i) \qquad \left(\sum_{i=1}^{K} \pi_i = 1\right)$$

- Μεταξύ των καταστάσεων υπάρχουν **πιθανότητες μετάβασης**:

$$p_{ij} = P(S_{t+1} = a_j \mid S_t = a_i) \qquad \left(\sum_{j=1}^{K} p_{ij} = 1\right) \ \forall i = 1, \ldots, K$$

Αλυσίδες Markov (*Markov Chains*)



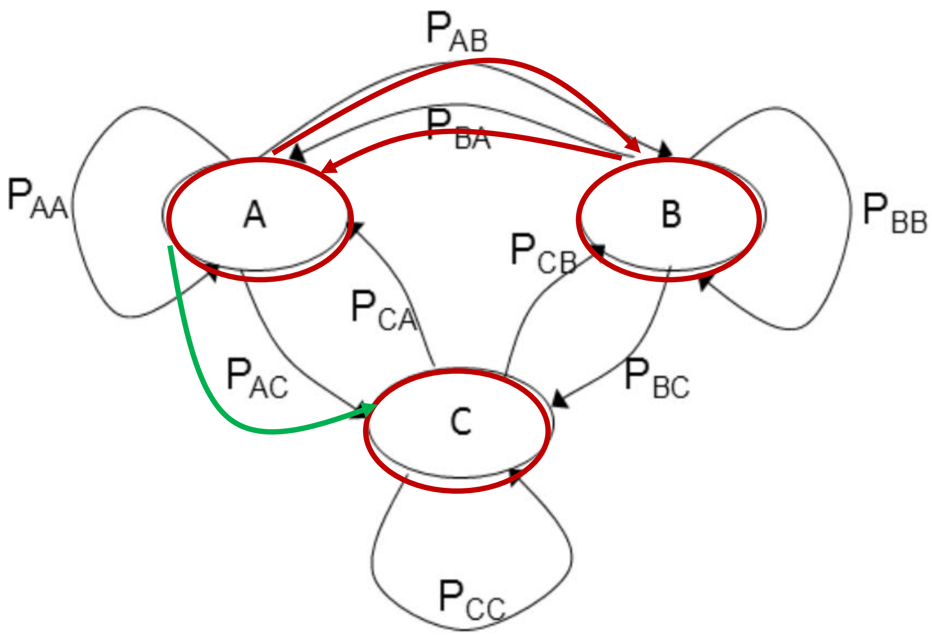
$$\mathrm{A} = \{A, B, C\}$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{AA} & p_{AB} & p_{AC} \\ p_{BA} & p_{BB} & p_{BC} \\ p_{CA} & p_{CB} & p_{CC} \end{bmatrix}$$

- Η διαδικασία μπορεί να αναπαρασταθεί με έναν κατευθυνόμενο γράφο με κορυφές τις διακριτές καταστάσεις.

- Τα **βάρη στις ακμές** του γράφου είναι οι **πιθανότητες μετάβασης**

Αλυσίδες Markov (*Markov Chains*)



$$\mathrm{A} = \{A, B, C\}$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{AA} & p_{AB} & p_{AC} \\ p_{BA} & p_{BB} & p_{BC} \\ p_{CA} & p_{CB} & p_{CC} \end{bmatrix}$$

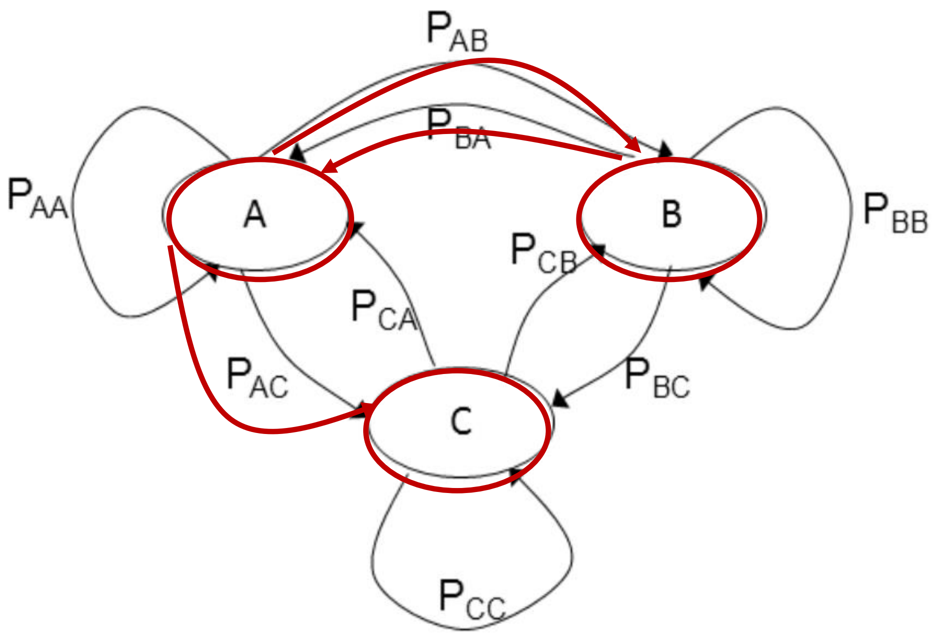
- Κάθε ακολουθία παρατηρήσεων εκφράζεται ως ένα μονοπάτι μέσα στον κατευθυνόμενο γράφο

- Π.χ. S={**ABAC**}

$$\pi_A \, p_{AB} \, p_{BA} \, p_{AC}$$

μονοπάτι παρατηρήσεων της ακολουθίας

Αλυσίδες Markov (*Markov Chains*)



$$\mathcal{A} = \{A, B, C\}$$

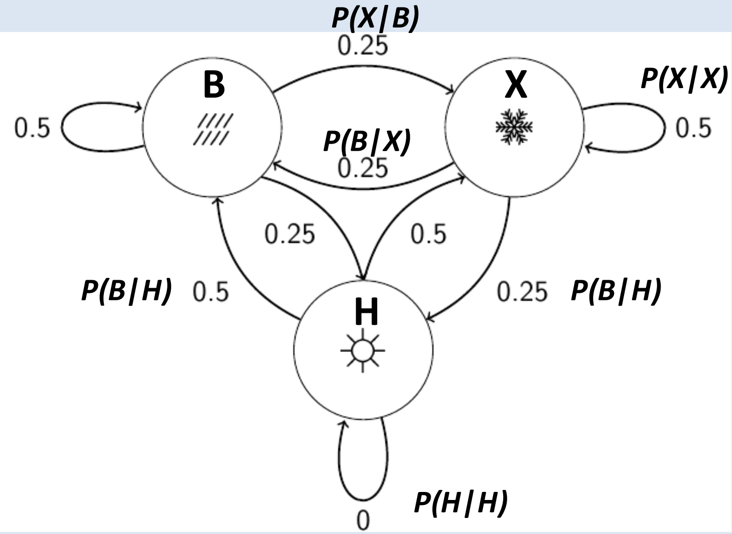
$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{AA} & p_{AB} & p_{AC} \\ p_{BA} & p_{BB} & p_{BC} \\ p_{CA} & p_{CB} & p_{CC} \end{bmatrix}$$

- **Υπολογισμός πιθανότητας** της ακολουθίας S={ABAC}

  $P(S) = P(S_0{=}A)P(S_1{=}B|S_0{=}A)\, P(S_2{=}A|S_1{=}B)\, P(S_3{=}C|S_2{=}A) =$

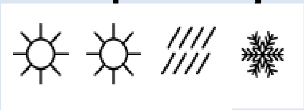
  $= \pi_A\, p_{AB}\, p_{BA}\, p_{AC}$

(1) Παράδειγμα μοντέλο καιρού ως Αλυσίδας Markov



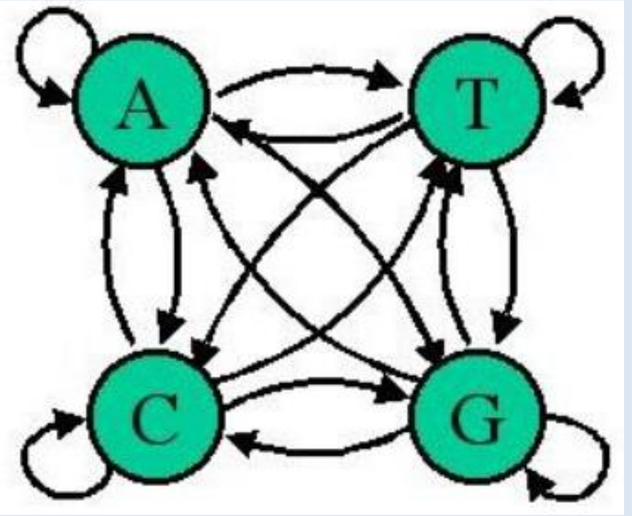
- Αλφάβητο **3 καταστάσεων**:
  Ηλιος, Βροχή, Χιόνι ***A={H,B,X}***

- Πιθανότητες έναρξης & μεταβάσεων μεταξύ καιρικών συνθηκών

- Πιθανότητα να παρατηρήσουμε τις επόμενες 4 ημέρες την ακολουθία καιρού: ***S={H, H, B, X}***: 

P(S) = P(HHBX) = P(H)P(H|H)P(B|H)P(X|B) = $\pi_H \, p_{HH} \, p_{HB} \, p_{BX}$

(2) Παράδειγμα μοντέλου DNA ως αλυσίδας Markov



- Αλφάβητο **4 δυνατών καταστάσεων**:
  4 αζωτούχες βάσεις {***A, C, G, T***}

- Πιθανότητες έναρξης & μεταβάσεων μεταξύ των βάσεων,
  π.χ. P(A|C), P(A|C), P(T|G), P(C|C)

- Πιθανότητα εμφάνισης μιας DNA αλληλουχίας, π.χ. *S={ACCGTA}*

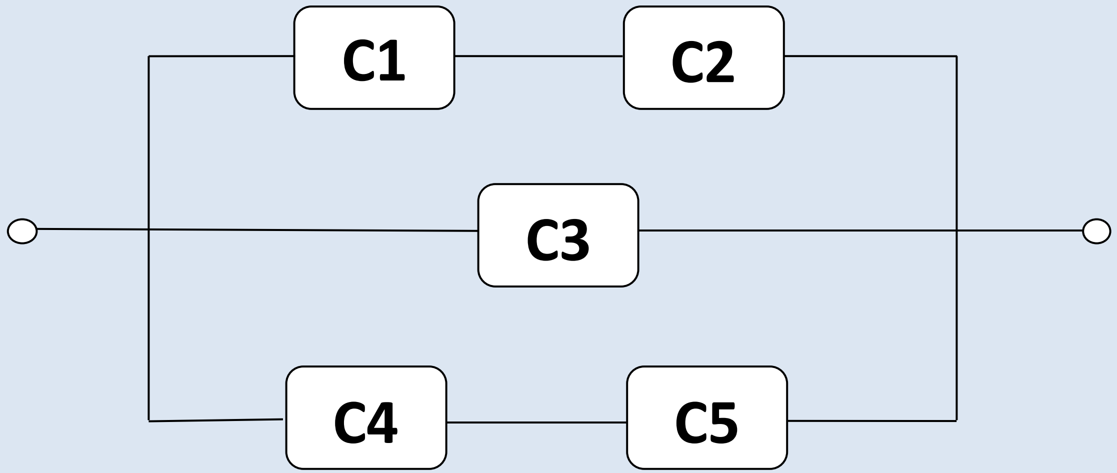
  $P(S) = P(ACCGTA) = P(A)P(C|A)P(C|C)P(G|C)P(T|G)P(A|T)$

  $= \pi_A \, p_{AC} \, p_{CC} \, p_{CG} \, p_{GT} \, p_{TA}$

Αξιοπιστία (*Reliability*) Συστημάτων

Έστω **σύνθετο σύστημα** αποτελούμενο από ***n*** **ανεξάρτητες** μονάδες C_1, C_2, …, C_n τοποθετημένες με ορισμένη διάταξη.

(π.χ.)



Για κάθε μονάδα C_i ορίζουμε το ενδεχόμενο «λειτουργίας»:
A_i = "η μονάδα C_i βρίσκεται **σε κατάσταση λειτουργίας**"
με πιθανότητα $P(A_i)=\rho_i$

Αξιοπιστία (*Reliability*) Συστημάτων

Έστω **σύνθετο σύστημα** αποτελούμενο από ***n*** **ανεξάρτητες** μονάδες C_1, C_2, …, C_n τοποθετημένες με ορισμένη διάταξη.

Για κάθε μονάδα C_i ορίζουμε το ενδεχόμενο «λειτουργίας»:

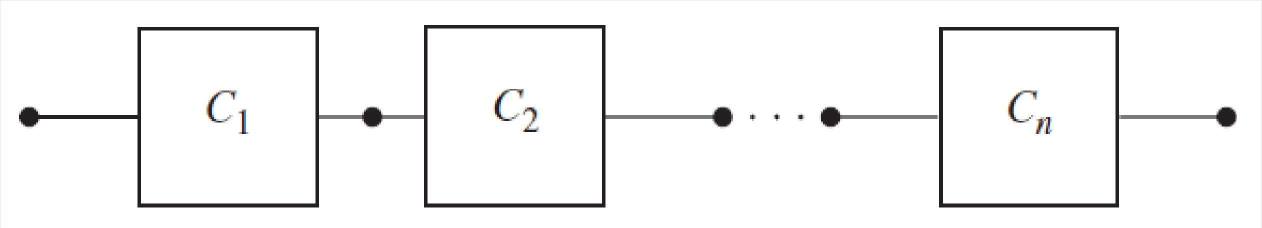
$\boldsymbol{A_i}$ = **“**η μονάδα C_i βρίσκεται **σε κατάσταση λειτουργίας”**

με πιθανότητα $\boldsymbol{P(A_i)=\rho_i}$

Αξιοπιστία *R* : η συνολική **πιθανότητα λειτουργίας** του συστήματος

- Διακρίνουμε **περιπτώσεις ανάλογα με την διάταξή** τους (**συνδεσμολογία**)

- **Περίπτωση 1**: *n* μονάδες συνδεδεμένες σε **σειρά**



Ταυτόχρονη λειτουργία όλων των *n* μονάδων

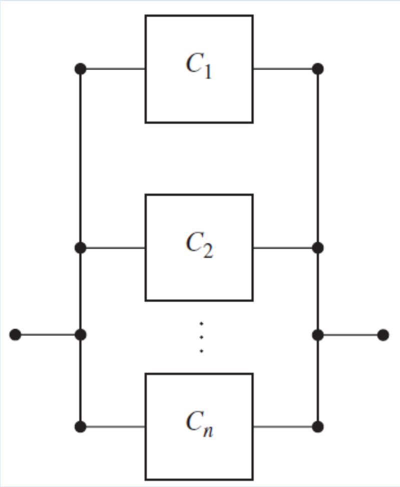
Υπολογισμός αξιοπιστίας:

$$R = P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)\cdots P(A_n) = \prod_{i=1}^{n} p_i$$

Στην ***ειδική περίπτωση*** όπου κάθε μονάδα έχει τον ίδιο βαθμό αξιοπιστίας, δηλ. $\boldsymbol{p_i = p}$, τότε

$$R = p^n$$

- **Περίπτωση 2:** *n* μονάδες συνδεδεμένες **παράλληλα**



Θα πρέπει **τουλάχιστον μία** από τις *n* μονάδες σε κατάσταση λειτουργίας

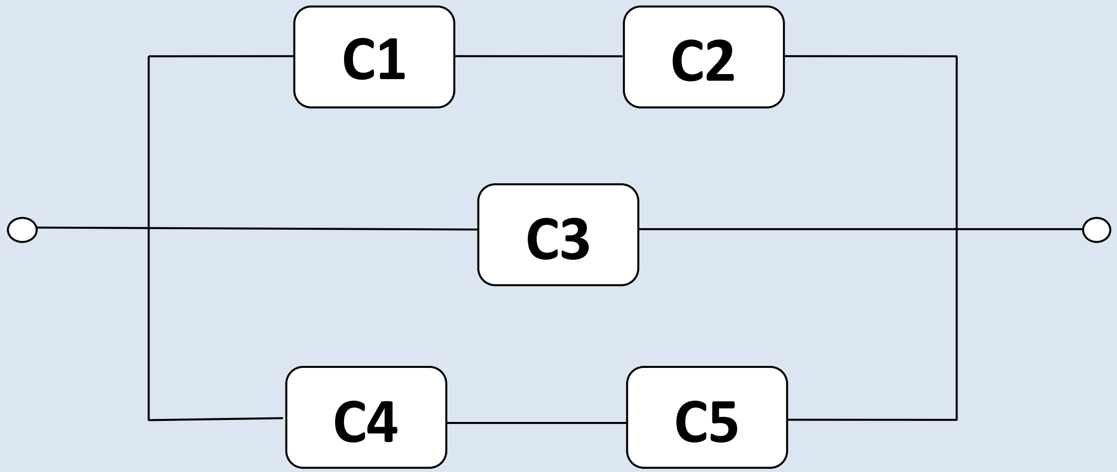
Υπολογισμός της αξιοπιστίας

$$R = P\left(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n\right) = 1 - P\left(A_1^{'} \cap A_2^{'} \cap \ldots \cap A_n^{'}\right) =$$

$$= 1 - \left(1 - P\left(A_1\right)\right)\left(1 - P\left(A_2\right)\right)\cdots\left(1 - P\left(A_n\right)\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n}\left(1 - p_i\right)$$

Στην ***ειδική περίπτωση*** όπου $p_i = p$, τότε $R = 1 - \left(1 - p\right)^n$

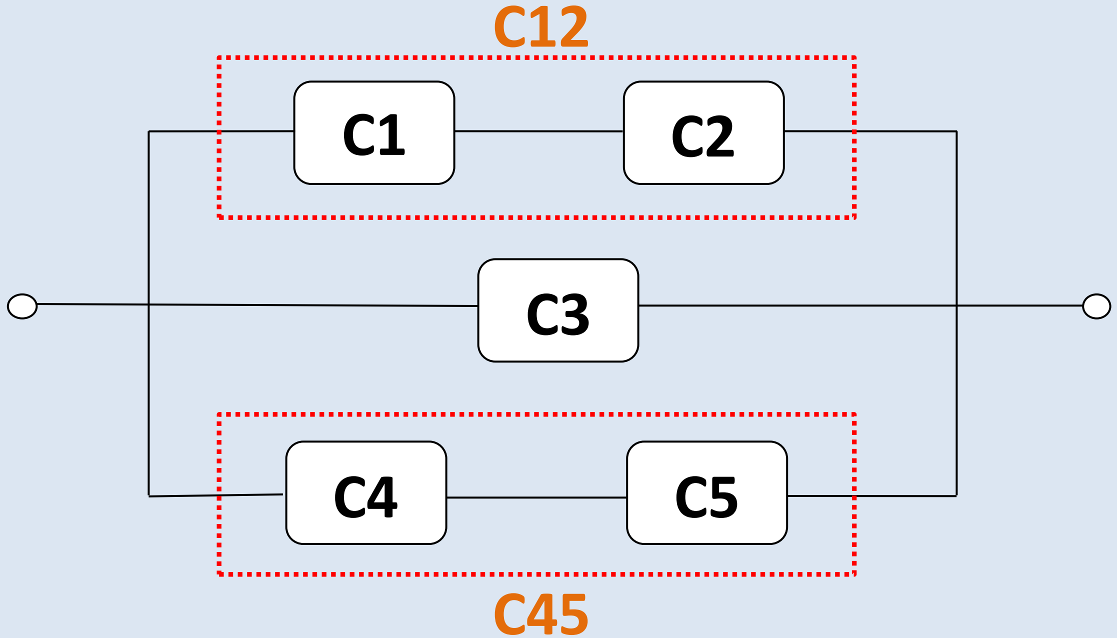
- **Περίπτωση 3: σύνθετες** συνδεσμολογίες



n μονάδες μικτά συνδεδεμένες σε σειρά και παράλληλα.

Υπολογισμός αξιοπιστίας *R* αναδρομικά:

- εντοπισμός *υπο-μονάδων* και
- *εκμετάλλευση* των σχέσεων «σε σειρά» και «παράλληλα».



π.χ.

- Εντοπισμός 3 *υπο-μονάδων: {C_{12} , C_3 , C_{45}}* που είναι διασυνδεδεμένες **παράλληλα**
- *Εκμετάλλευση* των σχέσεων «σε σειρά» και «παράλληλα»

$$R = P(A_{12} \cup A_3 \cup A_{45}) = 1 - \big(1 - P(A_{12})\big)\big(1 - P(A_3)\big)\big(1 - P(A_{45})\big)$$
$$= 1 - (1 - p_{12})(1 - p_3)(1 - p_{45})$$

$$p_{12} = P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2) = p_1 p_2$$

$$p_{45} = P(A_4 \cap A_5) = P(A_4)P(A_5) = p_4 p_5$$

Παραδείγματα

1) Σε ένα διαγωνισμό λαμβάνουν μέρος φοιτητές 2 τμημάτων Μηχανικών. Οι φοιτητές του **Τμήματος Α** είναι 30 και έχει παρατηρηθεί ότι σε ποσοστό 55% μπορούν να λύνουν άγνωστα προβλήματα. Το αντίστοιχο ποσοστό των 40 φοιτητών του **Τμήματος Β** είναι 50%. Σύμφωνα με τον διαγωνισμό, επιλέγεται τυχαία ένας φοιτητής από τους συνολικά 70 ο οποίος προσπαθεί να λύσει το πρόβλημα που του δίνεται.

α) Να υπολογιστεί η πιθανότητα ένας φοιτητής να βρει την λύση ενός προβλήματος.

β) Αν ο φοιτητής βρήκε την σωστή λύση, ποια είναι η πιθανότητα να προέρχεται από το Τμήμα Α;

γ) Ποια η πιθανότητα να χρειαστούν συνεχόμενα 3 φοιτητές για να λύσουν ένα πρόβλημα;

2) Έστω πληθυσμός όπου ο λόγος αντρών προς γυναικών είναι θ. Η πιθανότητα να παρουσιάσει αχρωματοψία ένας άντρας είναι q, ενώ μία γυναίκα είναι q^2. Έστω ότι ένα άτομο επιλέγεται τυχαία από τον πληθυσμό. Να υπολογιστούν οι παρακάτω πιθανότητες:

(α) να είναι γυναίκα με αχρωματοψία και

(β) να παρουσιάζει αχρωματοψία.

(γ) να είναι γυναίκα αν παρουσιάσει αχρωματοψία

(3) Μία συγκεκριμένη διαδρομή αποτελείται από πολλούς φωτεινούς σηματοδότες στη σειρά. Η πιθανότητα ένας φωτεινός σηματοδότης να είναι του ιδίου χρώματος με τον προηγούμενο είναι 4/5. Αν ο πρώτος σηματοδότης της διαδρομής είναι πράσινος με πιθανότητα 3/5 (και κόκκινος με πιθανότητα 2/5), να υπολογιστεί η πιθανότητα ο τρίτος σηματοδότης στη σειρά να έχει πράσινο χρώμα.