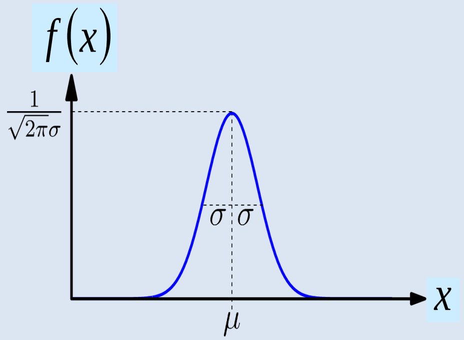
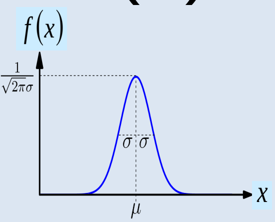


Carl Friedrich Gauss
(1777–1855)

Η **Κανονική** ή **Γκαουσιανή** κατανομή
(***Normal*** *or* ***Gaussian*** *distribution*)

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

(Γ). Η **Κανονική** ή **Γκαουσιανή** κατανομή (***Normal*** *or* ***Gaussian*** *distribution*)



Carl Friedrich Gauss
(1777–1855)

- Η **σπουδαιότερη κατανομή** που χρησιμοποιείται σε **πολλές εφαρμογές.**

- Πολλά **χαρακτηριστικά στη φύση περιγράφονται ικανοποιητικά** από την Κανονική κατανομή.

- Τα **τυχαία σφάλματα** (***θόρυβος***) στις μετρήσεις ακολουθούν ικανοποιητικά την Κανονική κατανομή.

- Ενισχύεται από το ***Κεντρικό Οριακό Θεώρημα*** (Κ.Ο.Θ.), σύμφωνα με το οποίο όλες οι μεταβλητές **μακροσκοπικά** προσεγγίζονται από την Κανονική κατανομή.

Κανονική ή Γκαουσιανή κατανομή (συν.)

- Συμβολισμός:

$$X \sim \boldsymbol{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}^2) \quad , \quad -\infty < x < \infty$$

- Τα ***μ***, ***σ*** είναι **παράμετροι της κατανομής**

✓ ***μ :*** παράμετρος **θέσης** (***μέσο***)

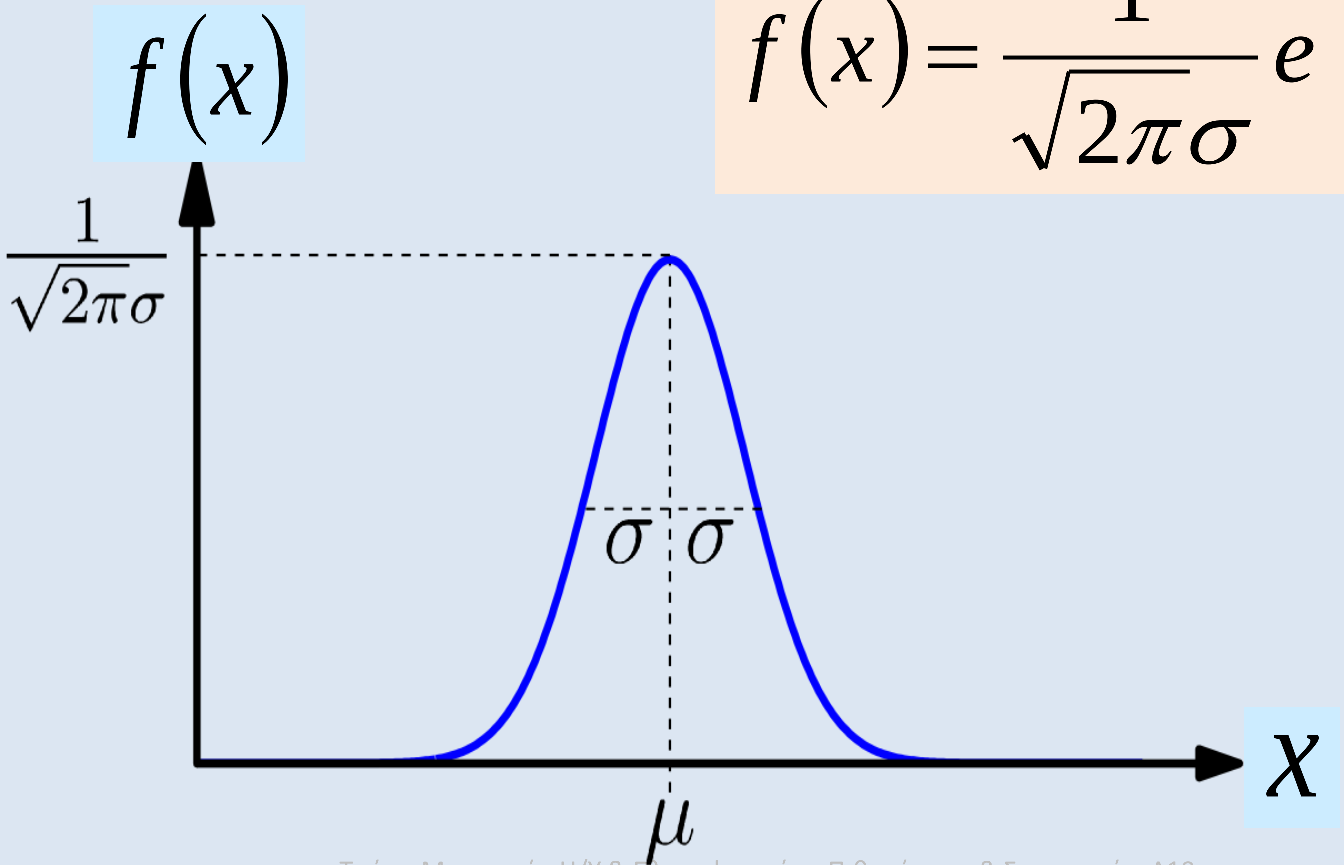
✓ ***σ > 0 :*** παράμετρος ***μεταβλητότητας*** (***τυπική απόκλιση***)
(*πλάτος ή έκταση των τιμών της μεταβλητής*)

Κανονική ή Γκαουσιανή κατανομή (συν.)

$$X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right) \ , \ -\infty < x < \infty$$

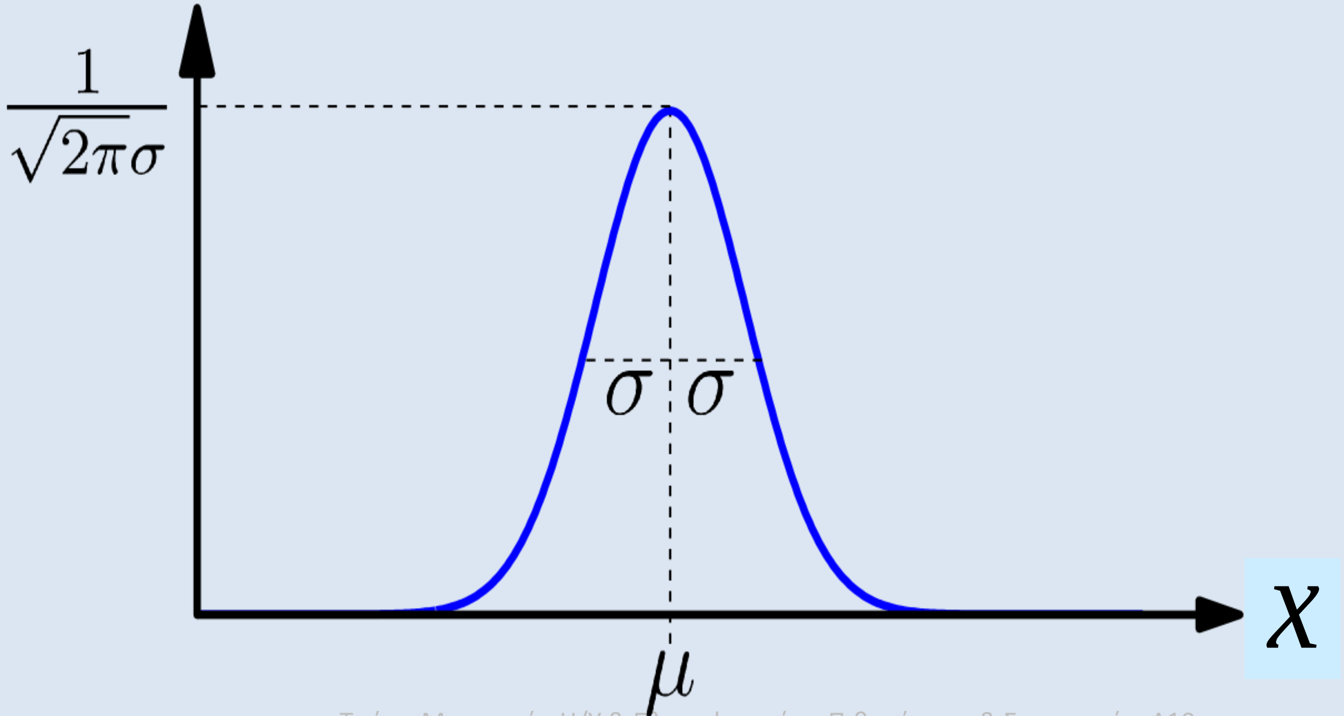
- Η συνάρτηση **πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.)**

$$f\left(x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\left(x-\mu\right)^2}{2\sigma^2}}$$



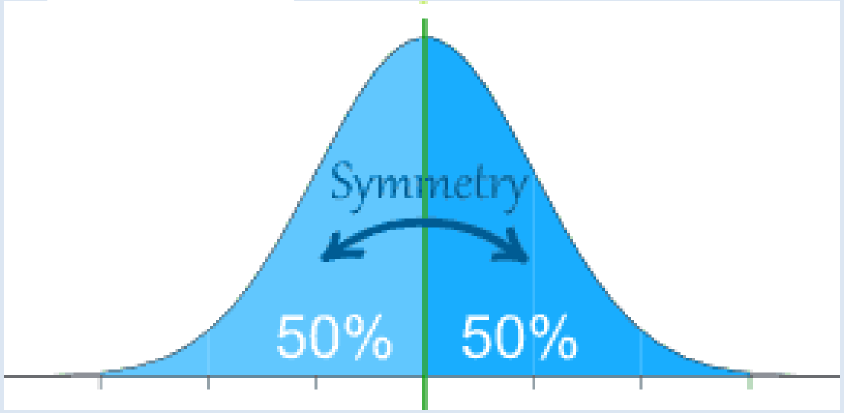
- Ισχύει ότι $$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \sqrt{2\pi}\sigma$$ ολοκλήρωμα ***Gauss***

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



Κανονική κατανομή $N\left(\mu,\sigma^2\right)$

$$f\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

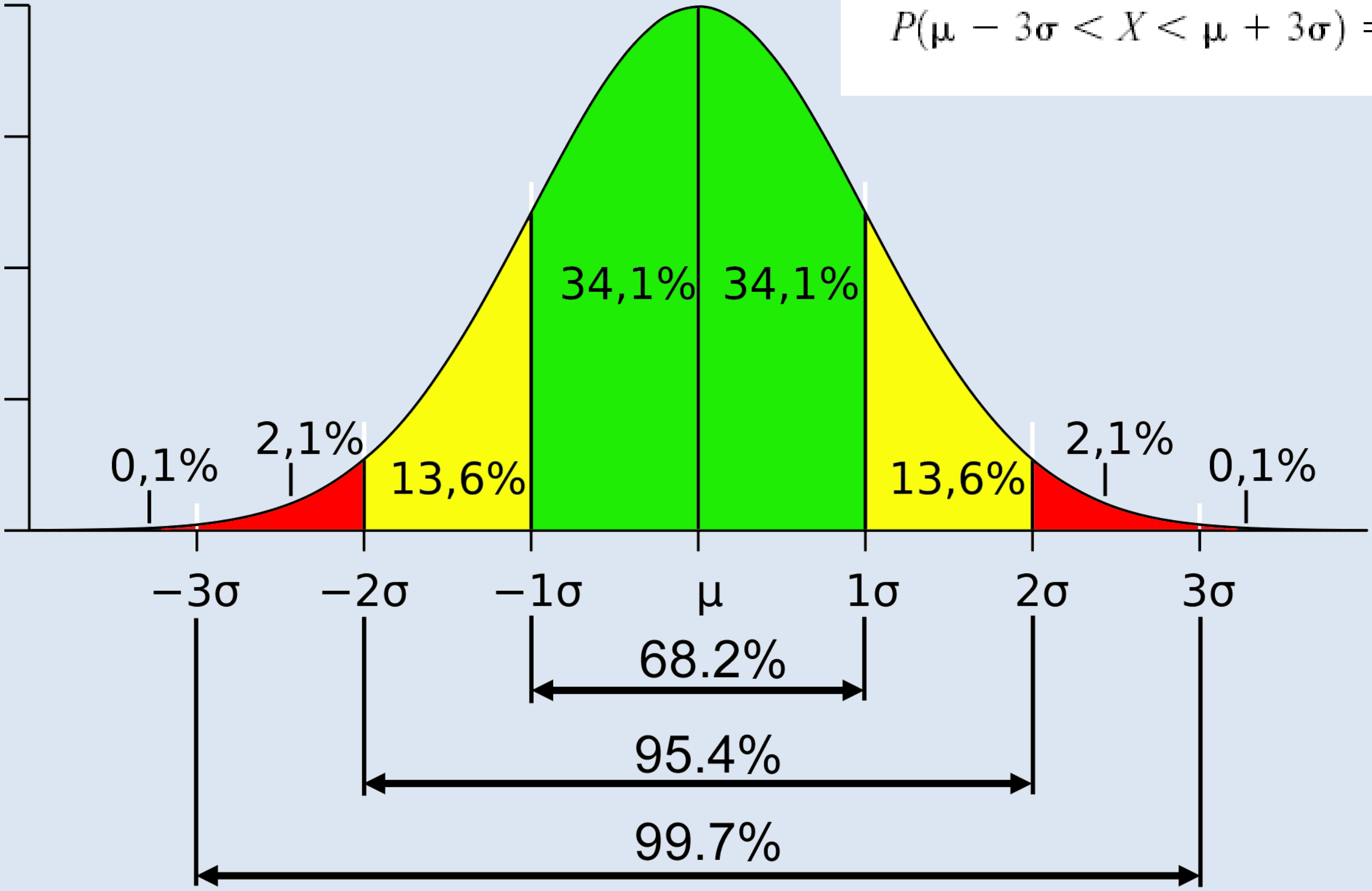


- Η σ.π.π. είναι **συμμετρική γύρω από το *μ***

$$f\left(\mu-a\right)=f\left(\mu+a\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}}$$

$$P\left(X\leq\mu\right)=P\left(X>\mu\right)=\frac{1}{2}$$

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 0.6827$$
$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = 0.9545$$
$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) = 0.9973$$



Υπολογισμός της **αθροιστικής** συνάρτησης **κατανομής πιθανότητας (σ.κ.π.)**

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$$

- ***z-μετασχηματισμός τυποποίησης*** $z = \frac{(t-\mu)}{\sigma}$
- Τότε:

$$\boxed{F(x) = \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}$$

όπου $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ **Ολοκλήρωμα τυποποίησης**

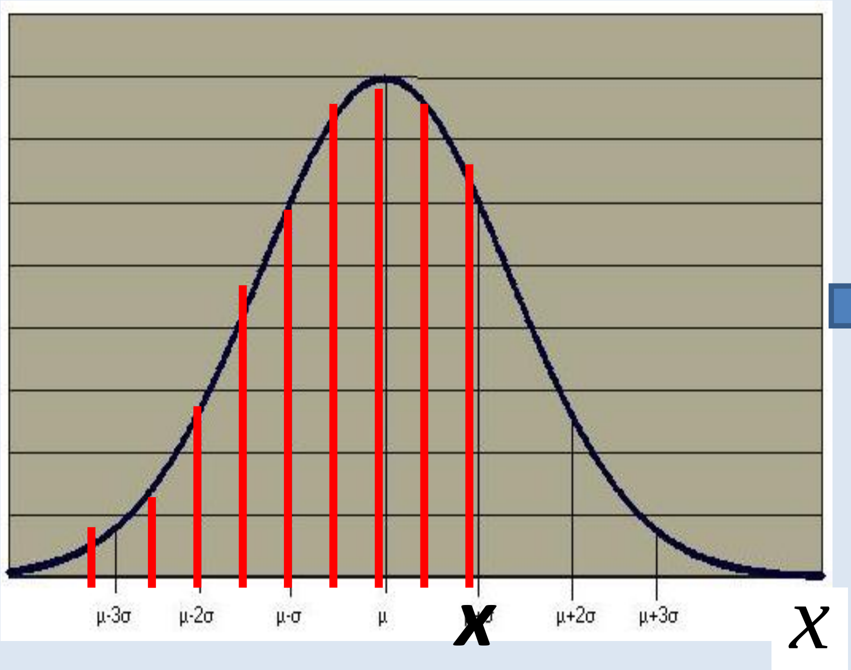
- Έτσι έχουμε: $F(x) = \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \partial z = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$

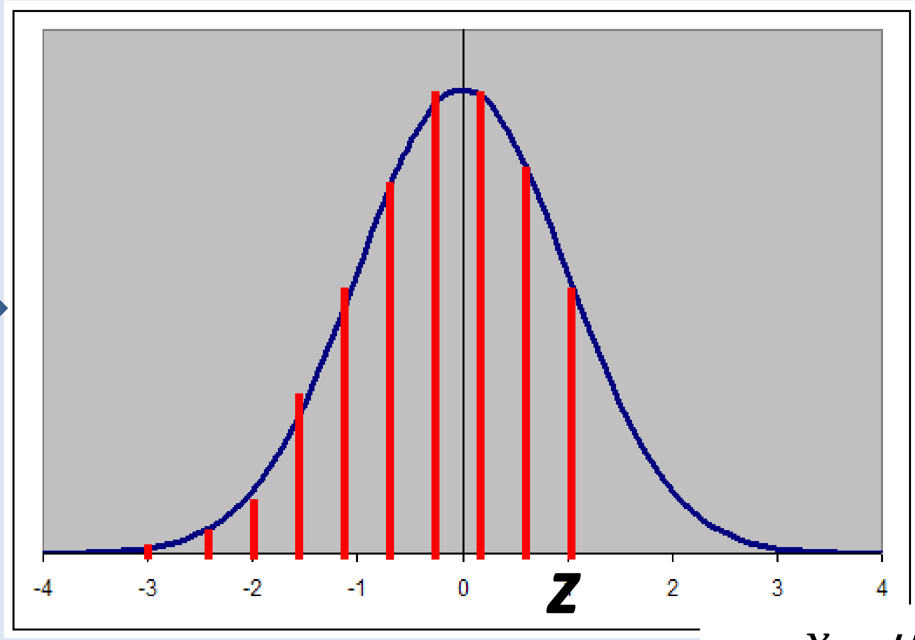
- Το ολοκλήρωμα $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ εκφράζει την αθροιστική συνάρτηση κατανομής πιθανότητας της **τυπικής κανονικής κατανομής**, δηλ. της ***N(μ=0, σ²=1)***

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \xrightarrow{\mu = 0\ ,\sigma^2 = 1} f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$$

μετασχηματισμός τυποποίησης $z = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$



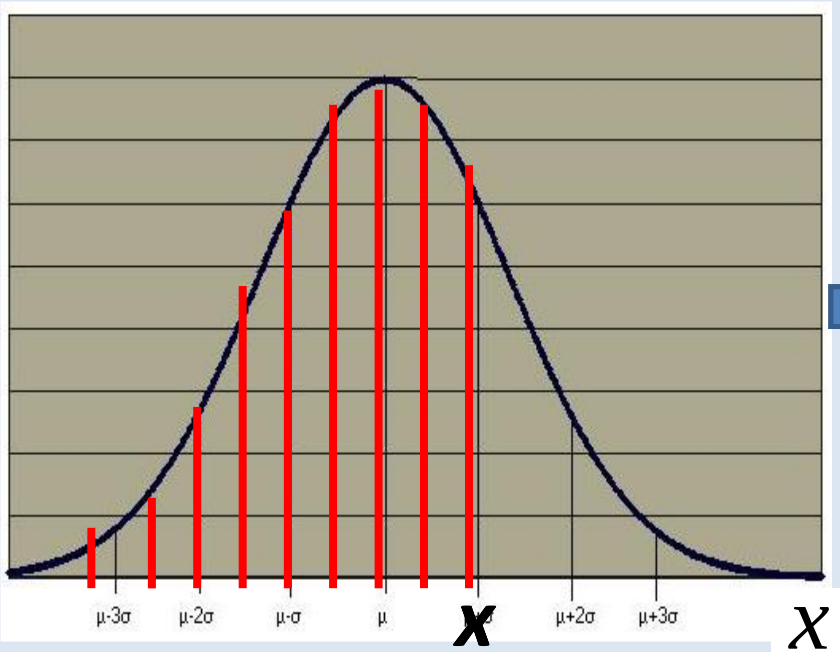


$$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

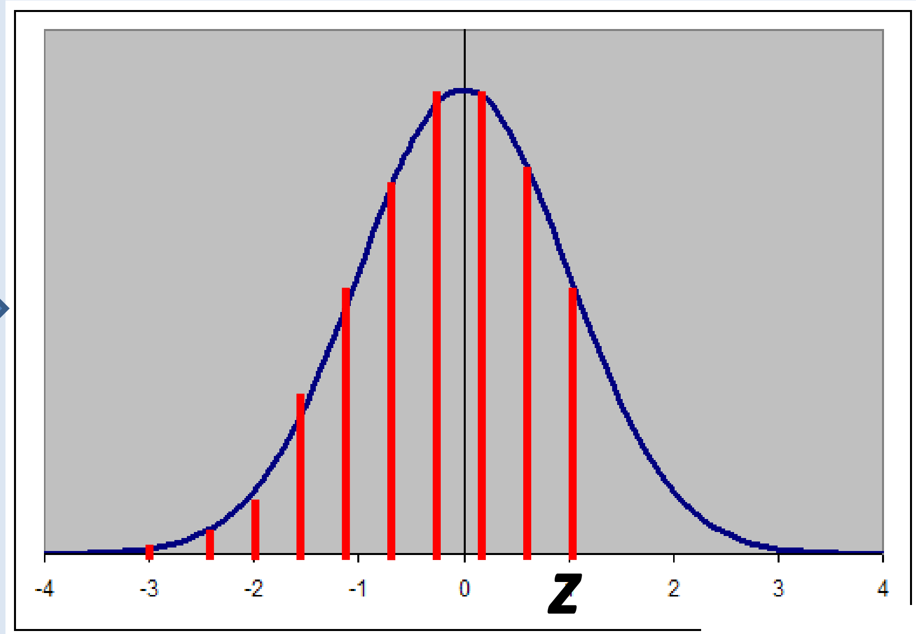
$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

μετασχηματισμός τυποποίησης

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$



X



$$z = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

- Έτσι έχουμε: $F(x) = \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \partial z = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$

- Το ολοκλήρωμα $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ εκφράζει την

 αθροιστική συνάρτηση κατανομής πιθανότητας της **τυπικής κανονικής κατανομής**, δηλ. της ***N(μ=0, σ²=1)***

- Για τη συνάρτηση **Φ(x)** υπάρχει διαθέσιμος πίνακας με **προσεγγιστικές τιμές** τον οποίο συμβουλευόμαστε για τους υπολογισμούς των πιθανοτήτων σε διαστήματα τιμών:

$$\mathrm{P}(a < X < b) = F(b) - F(a) = \Phi\left(\frac{\boldsymbol{b-\mu}}{\boldsymbol{\sigma}}\right) - \Phi\left(\frac{\boldsymbol{\alpha-\mu}}{\boldsymbol{\sigma}}\right)$$

Πίνακας υπολογισμού της $\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

Παρατηρήσεις:

- Τιμές μόνο για ***x > 0***
- Λόγω **συμμετρίας** ισχύει ότι:

$$\Phi(-x)=1-\Phi(x)$$

$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}\,dt$:

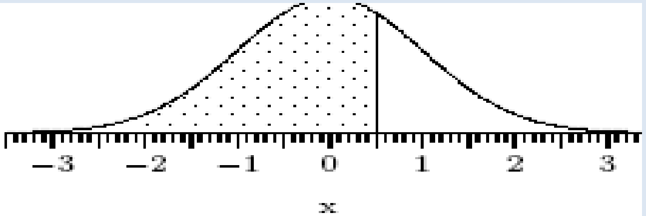
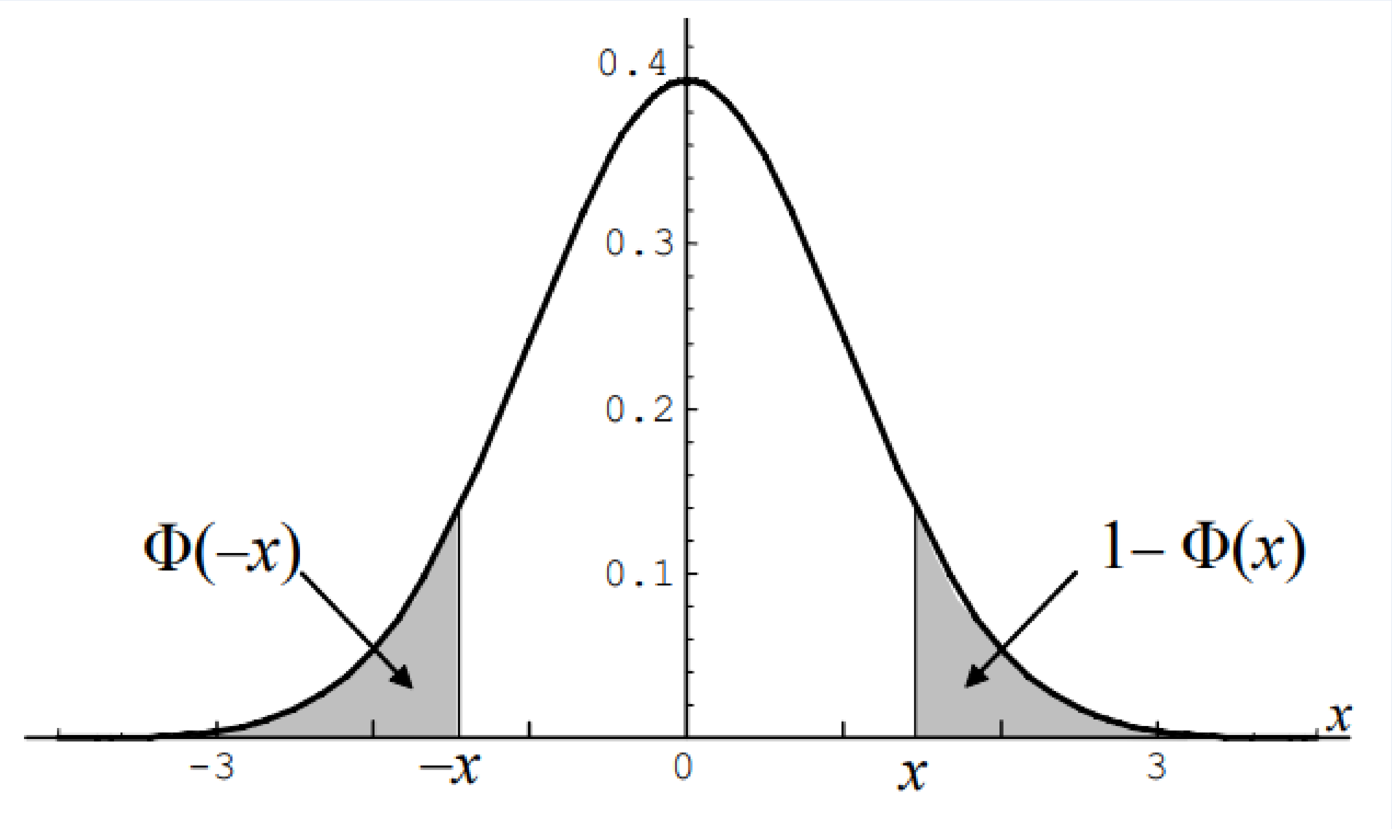


Table 5.1 Area $\Phi(x)$ under the Standard Normal Curve to the left of x.

x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

Λόγω συμμετρίας ισχύει ότι $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$



Παράδειγμα

Έστω τ.μ. $X \sim N(\mu=10,\sigma^2=4)$. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες:
P(X<13) , *P(X>9), P(6<X<14), P(2<X<4).*

Λύση

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} < 13) = \mathrm{F}(13) = \Phi\left(\frac{13-\mu}{\sigma}\right) = \Phi(1.5) \approx 0.93$$

Διαδικασία εύρεσης της τιμής του Φ(1.5)

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\, dt:$$

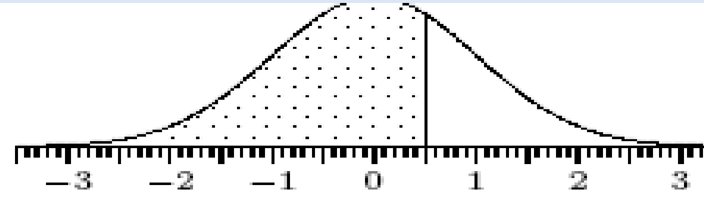


Table 5.1 Area $\Phi(x)$ under the Standard Normal Curve to the left of x.

x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	[illegible]	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	[illegible]	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

Παράδειγμα

Έστω τ.μ. *X ~ N(μ=10,σ²=4).* Να υπολογίσετε τις πιθανότητες:
P(X<13) , ***P(X>9)***, *P(6<X<14)*, *P(2<X<4).*

Λύση

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} < 13) = \Phi\left(\frac{13-\mu}{\sigma}\right) = \Phi(1.5) \approx 0.93$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} > 9) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{X} \leq 9) = 1 - \Phi\left(\frac{9-\mu}{\sigma}\right) = 1 - \Phi(-0.5) = \Phi(0.5) \approx 0.69$$

Διαδικασία εύρεσης της τιμής του Φ(0.5)

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\, dt:$$

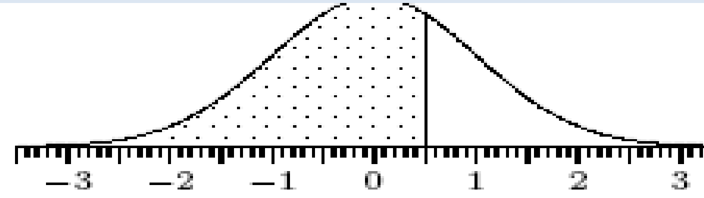


Table 5.1 Area $\Phi(x)$ under the Standard Normal Curve to the left of x.

x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	[illegible]	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	[illegible]	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

Παράδειγμα

Έστω τ.μ. $X \sim N(\mu=10,\sigma^2=4)$. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες:
$P(X<13)$, $P(X>9)$, **$P(6<X<14)$**, $P(2<X<4)$.

Λύση

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} < 13) = \Phi\left(\frac{13-\mu}{\sigma}\right) = \Phi(1.5) \approx 0.93$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} > 9) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{X} \leq 9) = 1 - \Phi\left(\frac{9-\mu}{\sigma}\right) = 1 - \Phi(-0.5) = \Phi(0.5) \approx 0.69$$

$$\mathrm{P}(6 < \mathrm{X} < 14) = \mathrm{F}(14) - \mathrm{F}(6) = \Phi\left(\frac{14-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{6-\mu}{\sigma}\right) = \Phi(2) - \Phi(-2)$$
$$= \Phi(2) - \big(1 - \Phi(2)\big) = 2\Phi(2) - 1 \approx 2 * 0.98 - 1 = 0.96$$

Διαδικασία εύρεσης της τιμής του Φ(2)

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\, dt:$$

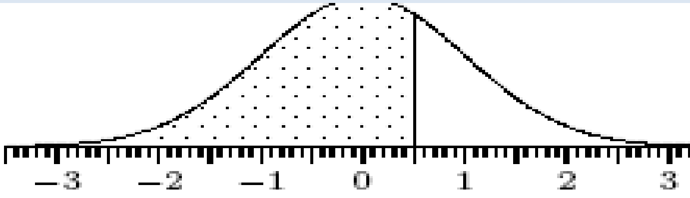


Table 5.1 Area $\Phi(x)$ under the Standard Normal Curve to the left of x.

x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	[illegible]	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

Παράδειγμα

Έστω τ.μ. *X ~ N(μ=10,σ²=4)*. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες:

P(X<13) , P(X>9), P(6<X<14), ***P(2<X<4)****, P(-2<X<8).*

Λύση

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} < 13) = \Phi\left(\frac{13-\mu}{\sigma}\right) = \Phi(1.5) \approx 0.93$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} > 9) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{X} \leq 9) = 1 - \Phi\left(\frac{9-\mu}{\sigma}\right) = 1 - \Phi(-0.5) = \Phi(0.5) \approx 0.69$$

$$\mathrm{P}(6 < \mathrm{X} < 14) = \mathrm{F}(14) - \mathrm{F}(6) = \Phi\left(\frac{14-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{6-\mu}{\sigma}\right) = \Phi(2) - \Phi(-2)$$

$$= \Phi(2) - \big(1 - \Phi(2)\big) = 2\Phi(2) - 1 \approx 2 * 0.98 - 1 = 0.96$$

$$\mathrm{P}(2 < \mathrm{X} < 4) = \mathrm{F}(4) - \mathrm{F}(2) = \Phi\left(\frac{4-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{2-\mu}{\sigma}\right) = \Phi(-3) - \Phi(-4)$$

$$= 1 - \Phi(3) - \big(1 - \Phi(4)\big) = \Phi(4) - \Phi(3) \approx 0.001$$

Διαδικασία εύρεσης της τιμής του Φ(3) και Φ(4)

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\, dt:$$

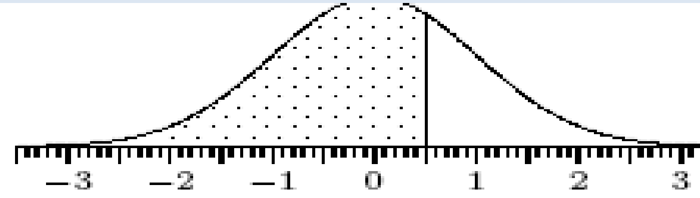


Table 5.1 Area $\Phi(x)$ under the Standard Normal Curve to the left of x.

x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	[illegible]	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

Φ(3)

Φ(4)

προσεγγιστικά ≈ 1

Παράδειγμα

Έστω τ.μ. *X ~ N(μ=10,σ²=4)* . Να βρεθεί η τιμή ***α*** για την οποία η πιθανότητα η μεταβλητή να έχει τιμή μικρότερη της ***α*** να είναι 0.98.

<u>Λύση</u>

1. Θέλουμε $P\left(X < a\right) = F\left(a\right) = \Phi\left(\dfrac{a-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\dfrac{a-10}{2}\right) = 0.98$

2. Από τον πίνακα βρίσκουμε το ***α*** : $\Phi\left(a\right) \approx 0.98$

.

Βήμα 2:

Εύρεση του σημείου α που αντιστοιχεί σε **Φ(α)= 0.98**

$$\Phi(2.05) \approx 0.98$$

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\, dt:$$

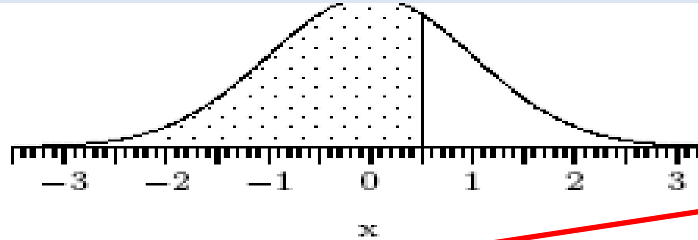


Table 5.1 Area $\Phi(x)$ under the Standard Normal Curve to the left of x.

x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

Παράδειγμα (συν.)

Έστω τ.μ. $X \sim N(\mu=10,\sigma^2=4)$. Να βρεθεί η τιμή ***α*** για την οποία η πιθανότητα η μεταβλητή να έχει τιμή μικρότερη της ***α*** να είναι 0.98.

<u>*Λύση*</u>

1. Θέλουμε $P(X < a) = F(a) = \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{a-10}{2}\right) = 0.98$
2. Από τον πίνακα βρίσκουμε ότι $\Phi(2.05) \approx 0.98$
3. **<u>Εξισώνοντας τα ορίσματα</u>** παίρνουμε:

$$\Phi\left(\frac{a-10}{2}\right) = 0.98 = \Phi(2.05) \Rightarrow \frac{a-10}{2} = 2.05 \Rightarrow a = 14.1$$

Η **Γάμμα κατανομή** $X \sim G(\alpha,\lambda)$

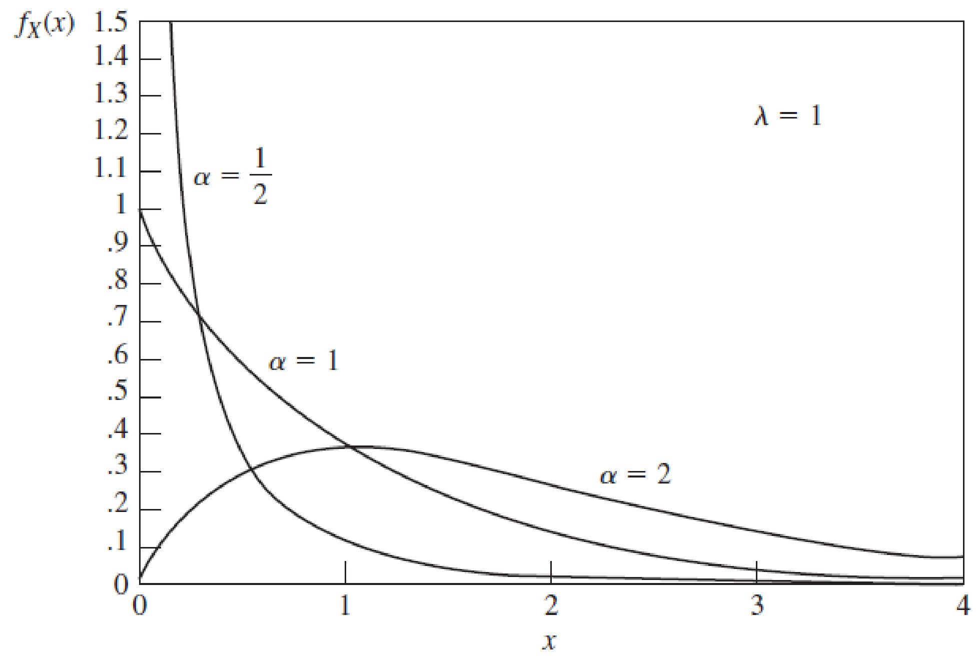
- **Σημαντική** κατανομή με εφαρμογές στην στατιστική
- Καλύπτει μια **οικογένεια** κατανομών
- Θεωρείται ως **γενίκευση** της **Εκθετικής** κατανομής

Η **Γάμμα** κατανομή ***X ~ G(α,λ)***

- **παράμετροι** κατανομής (***α, λ***), *α > 0 και λ >0*

- **συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.)**

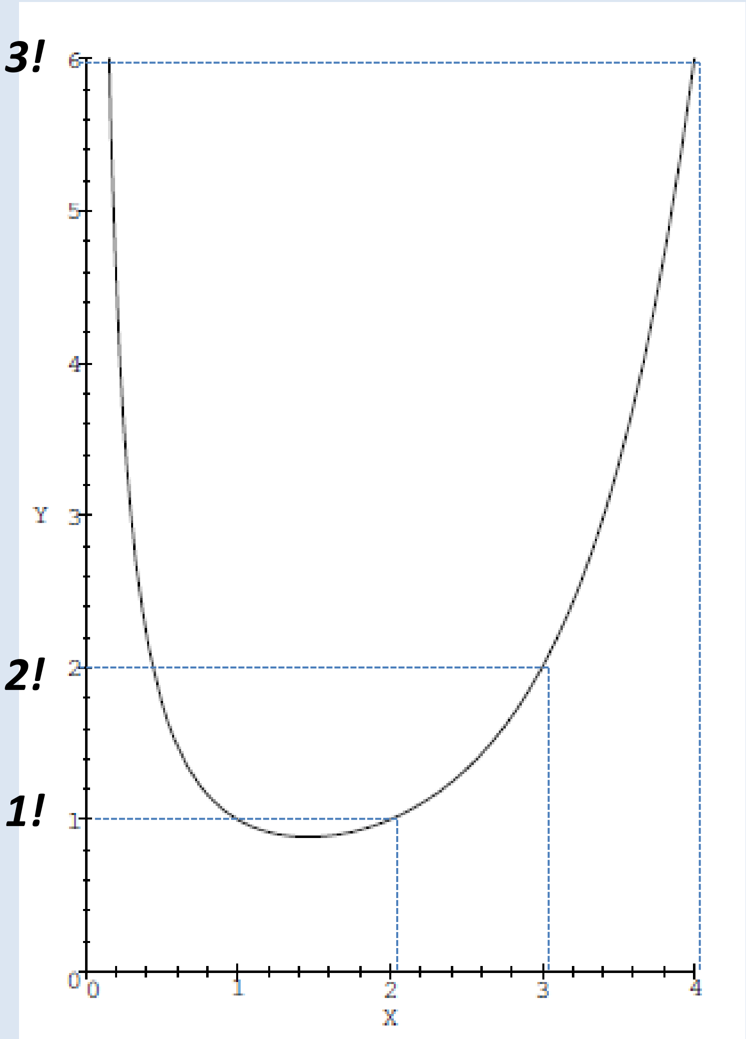
$$f(x)=\frac{\lambda^{a}}{\Gamma(a)}x^{a-1}e^{-\lambda x} \quad , \; x>0$$



Γ(α): συνάρτηση **Γάμμα**

Γραφική αναπαράσταση της <u>συνάρτησης **Γάμμα**</u>

$$\Gamma(a) = \int_{o}^{\infty} x^{a-1} e^{-x} dx$$



Συνάρτηση **Γάμμα**

(α > 0)

$$\Gamma(a) = \int_{o}^{\infty} x^{a-1} e^{-x} dx$$

- **Ιδιότητες**

  - $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$ **αναδρομική συνάρτηση**
  - $\Gamma(a+1) = a!$ αν ***α*** **είναι ακέραιος**
  - $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$
  - $\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right) = \frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2x-1)}{2^{x}}\sqrt{\pi},\ x = 1,2,3,\ldots$
  - $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$ $\quad 0 < x < 1$

– $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$ **αναδρομική συνάρτηση**

Απόδειξη

$$\Gamma(a+1) = \int_o^\infty x^a e^{-x}\, dx = -\int_o^\infty x^a\, d(e^{-x})$$

$$= [-x^a e^{-x}]_0^\infty + \int_o^\infty e^{-x}\, d(x^a) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}(-x^a e^{-x}) - (0e^{-0}) + \int_o^\infty a x^{a-1} e^{-x}\, dx =$$

$$= 0 - 0 + a\int_o^\infty x^{a-1} e^{-x}\, dx = a\Gamma(a)$$

$$\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)=\frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2x-1)}{2^{x}}\sqrt{\pi},\ \ x=1,2,3,\ldots$$

$$\Gamma(a+1)=a\Gamma(a)$$

Απόδειξη

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)=\Gamma\left(x-\frac{1}{2}+1\right)=\Gamma\left(\frac{2x-1}{2}+1\right)=\frac{2x-1}{2}\Gamma\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{2x-1}{2}\Gamma\left(x-\frac{3}{2}+1\right)=\frac{2x-1}{2}\Gamma\left(\frac{2x-3}{2}+1\right)$$

$$=\frac{2x-1}{2}\frac{2x-3}{2}\Gamma\left(\frac{2x-3}{2}\right)=\cdots=\frac{(2x-1)(2x-3)\cdots 3*1}{2^{x}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{(2x-1)(2x-3)\cdots 3*1}{2^{x}}\sqrt{\pi}$$

Χρήση της συνάρτησης **Γάμμα** $\Gamma(a)=\int_{o}^{\infty} x^{a-1}e^{-x}dx$

στον υπολογισμό σύνθετων ολοκληρωμάτων

- Υπολογισμός ολοκληρώματος της μορφής $\int_{o}^{\infty} x^{a}e^{-\lambda x}dx$

$$\int_{0}^{\infty} x^{\alpha}e^{-\lambda x}dx \overset{y=\lambda x}{=} \frac{1}{\lambda}\int_{0}^{\infty}\left(\frac{y}{\lambda}\right)^{\alpha} e^{-y}dy =$$

$$= \frac{1}{\lambda^{\alpha+1}}\int_{0}^{\infty} y^{\alpha}e^{-y}dy = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\lambda^{\alpha+1}} = \frac{\alpha!}{\lambda^{\alpha+1}}$$

αν το α είναι ακέραιος

Η **Γάμμα** κατανομή , ***X ~ G(α,λ)***

- **συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας**

$$f(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x} \quad , \quad x > 0$$

- Έτσι, καθώς (από γενικό τύπο) $\int_o^{\infty} x^{a-1} e^{-\lambda x} dx = \frac{\Gamma(a)}{\lambda^a}$

- **Ισχύει** $\int_o^{\infty} f(x) dx = 1$

Γάμμα κατανομή , *X ~ G(α,λ)*

$$f(x)=\frac{\lambda^a}{\Gamma(a)}x^{a-1}e^{-\lambda x} \quad , \quad x>0$$

- **Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής** :

$$F(x)=P(X\le x)=\int_0^x f(t)dt=\frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^x \lambda^a t^{a-1}e^{-\lambda t}dt=$$

$(y=\lambda t)$

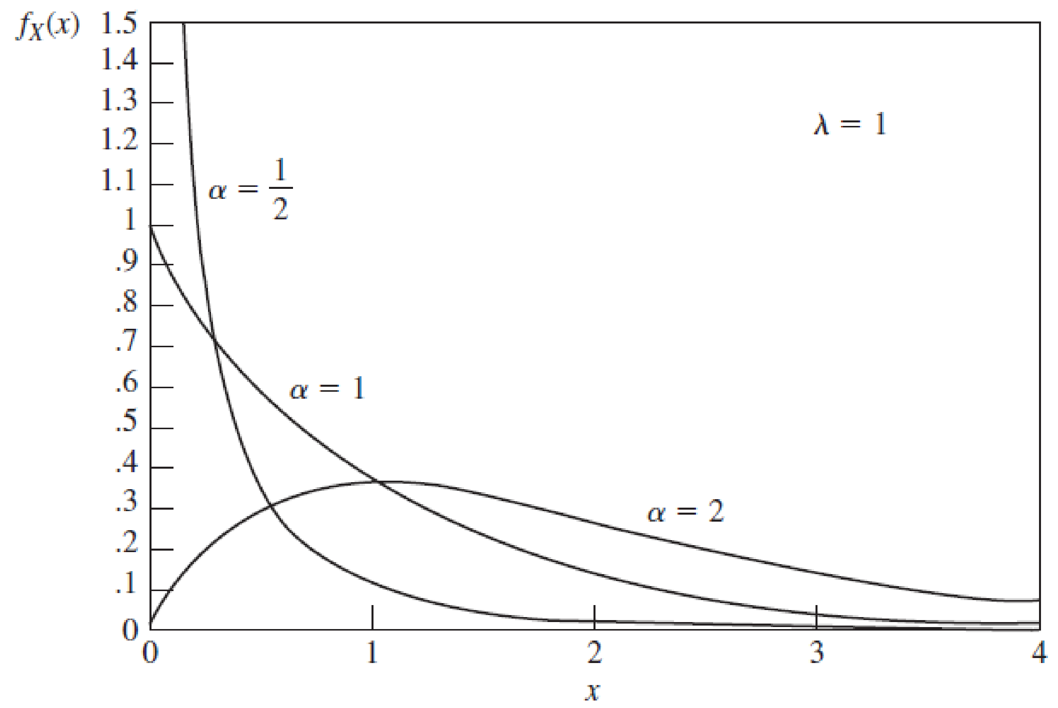
$$=\frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^{\lambda x} y^{a-1}e^{-y}dy$$

Υπολογισμός του ολοκληρώματος με **αριθμητικές μεθόδους** (όχι αναλυτική μορφή)

Οικογένεια Γάμμα κατανομών , ***X ~ G(α,λ)***

$$f(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x}$$

- **Κατανομή Γάμμα**: μια **οικογένεια κατανομών**.
- Η μορφή της ποικίλλει ανάλογα την τιμή των ***α, λ***



Εκθετική: ειδική περίπτωση της Γάμμα

$$f(x)=\frac{\lambda^{a}}{\Gamma(a)}x^{a-1}e^{-\lambda x}$$

- Αν ***α=1*** τότε

$$f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$$

δηλ. η **Εκθετική** κατανομή :

G(1,λ) ≡ Exp(λ)

Erlang: ειδική περίπτωση της Γάμμα

$$f(x)=\frac{\lambda^a}{\Gamma(a)}x^{a-1}e^{-\lambda x}$$

- Αν ***α=n*** τότε $$f(x)=\frac{\lambda^n}{(n-1)!}x^{n-1}e^{-\lambda x}$$

  που ονομάζεται **κατανομή Erlang**

- Περιγράφει το **άθροισμα *n* εκθετικών μεταβλητών**, δηλ. τον **συνολικό χρόνος ζωής *n*** ανεξάρτητων συστημάτων με **εκθετικό χρόνο** λειτουργίας.

Χι-τετράγωνο: ειδική περίπτωση της Γάμμα

$$f(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x}$$

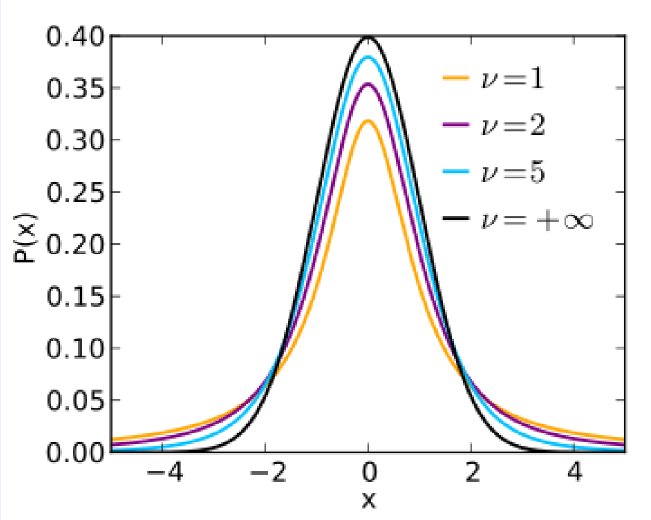
- Αν ***α=ν/2*** και ***λ=1/2*** τότε

$$f(x) = \frac{1}{2^{\nu/2}\Gamma(\nu/2)} x^{\nu/2-1} e^{-x/2}$$

κατανομή X_{ν}^{2} **(χι-τετράγωνο – *chi-squared*) με *ν* βαθμούς ελευθερίας**

- **Εφαρμογές** στην **Στατιστική** για εκτίμηση **διαστημάτων εμπιστοσύνης** και στον **έλεγχο υποθέσεων.**

Η κατανομή t-Student *(Gosset 1908)*

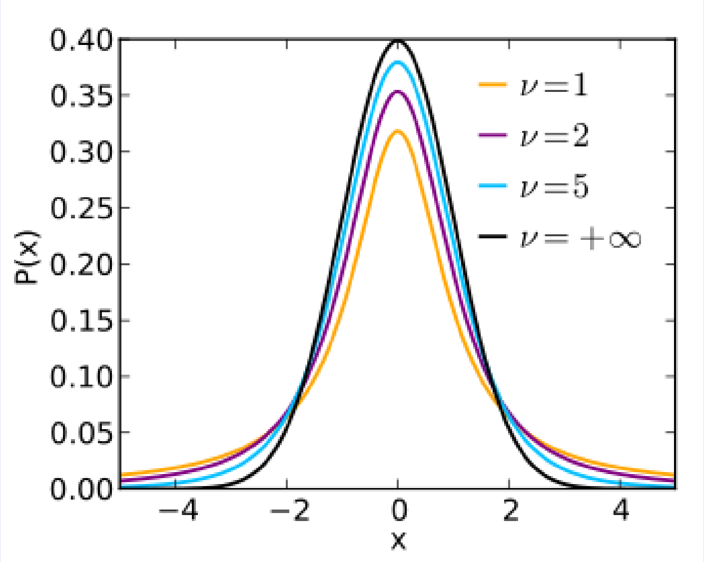


Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_n(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

n: βαθμοί ελευθερίας

Ιδιότητες της **t-Student** κατανομής



- **Είναι συμμετρική**
  μοιάζει με τη Κανονική κατανομή, αλλά έχει πιο πολύ πιθανότητα στις άκρες

- Για **μεγάλη τιμή του '*n*' συγκλίνει** στην **τυπική Κανονική**

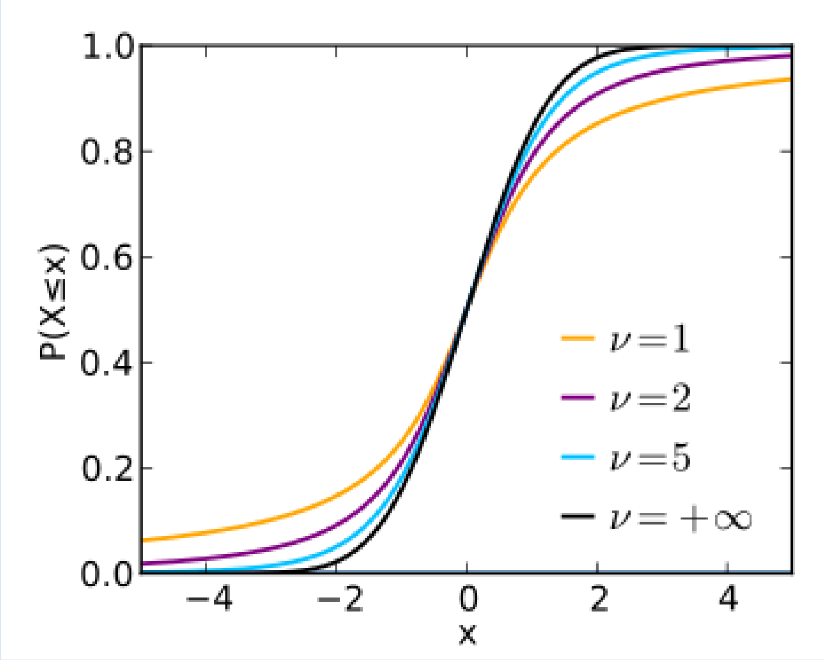
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad N(0,1)$$

- **Εφαρμογές** στη **Στατιστική** στον **έλεγχο υποθέσεων** και στα **διαστήματα εμπιστοσύνης.**

- Η **αθροιστική συνάρτηση κατανομής**, *F(x)*, της **t-Student**

$$F_n(x) = P(X \le x) = \int_0^x f(t)\,dt =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^x \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} dt$$



- Η τιμή του ολοκληρώματος υπολογίζεται **αριθμητικά**

Άλλες κατανομές συνεχών τ.μ.

- **Κατανομή Βήτα** (χρησιμοποιείται για **ποσοστά**)

$$f(x) = \frac{1}{\mathrm{B}(a,b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1} \quad , \quad 0 \le x \le 1$$

συνάρτηση Βήτα:

$$\mathrm{B}(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

Άλλες κατανομές συνεχών τ.μ.

- **Κατανομή Weibull** (για χρόνο ζωής **σύνθετων συστημάτων**)

$$f(x) = \alpha\beta x^{\beta-1} e^{-\alpha x^{\beta}}, \quad x > 0$$

$$h(x) = \alpha\beta x^{\beta-1}$$

συνάρτηση διακινδύνευσης (ρυθμός διακοπής)

- αν ***β=1*** -> *h(x)=**β*** σταθερός (**εκθετική**)
- *αν **β>1** -> h(x)* ↑ αυξάνει ο ρυθμός διακοπής
- αν ***β<1*** -> *h(x)* ↓ φθίνει ο ρυθμός διακοπής

Άλλες κατανομές συνεχών τ.μ.

- **Κατανομή Cauchy** $$f(x) = \frac{a}{\pi\left(\left(x-\mu\right)^2 + a^2\right)}, \quad x \in R, \; a > 0$$
- **Κατανομή Laplace** $$f(x) = \frac{a}{2} e^{-a|x|}, \quad x \in R, \; a > 0$$
- **Κατανομή Maxwell** $$f(x) = \frac{4}{a^3\sqrt{\pi}} x^2 e^{-\frac{x^2}{a^2}}, \quad x \geq 0, \; a > 0$$

Κυριότερες κατανομές συνεχών τ.μ.

Κατανομή	Συνάρτηση πυκνότητας *f(x)*	Αθροιστική συνάρτηση κατανομής *F(x)*
Ομοιόμορφη $x \in [a, b]$	$f(x)=1/(b-a)$	$F(x)=\dfrac{x-a}{b-a}$
Εκθετική $x \geq 0$	$f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$	$F(x)=1-e^{-\lambda x}$
Κανονική $-\infty \leq x \leq +\infty$	$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$F(x)=\Phi\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)$
Γάμμα $x \geq 0$	$f(x)=\dfrac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x}$	**(μέσω πίνακα)**

Παραδείγματα

(**1**) Να υπολογιστούν οι ακόλουθες τιμές της συνάρτησης ***Γάμμα***: Γ(6), Γ(5/2), Γ(9/2)

Λύση

Γ(6) = 5! = 120

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \Gamma\left(2 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1 \times 3}{2^2}\sqrt{\pi} = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(\frac{9}{2}\right) = \Gamma\left(4 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1 \times 3 \times 5 \times 7}{2^4}\sqrt{\pi} = \frac{105}{16}\sqrt{\pi}$$

(2) Η διάρκεια ζωής μιας μπαταρίας είναι μια τ.μ. *X~N(μ=3 έτη, σ^2=0.25*). Ποια είναι η πιθανότητα η μπαταρία να λειτουργήσει μέσα στο 4^o έτος?

(3) Το βάρος μιας φιάλης είναι μία κανονική τ.μ. $X \sim N(\mu=1000\ gr,\ \sigma^2 = 64)$. Αν η φιάλη είναι μικρότερη από *990 gr* τότε απορρίπτεται.

α) Τι ποσοστό των φιαλών πρόκειται να απορριφθεί?

β) Ποια θα πρέπει να είναι η τιμή της παραμέτρου σ έτσι ώστε να μην απορριφθεί περισσότερο από *1%?*

(4) Η διάρκεια ζωής ενός εξαρτήματος είναι κανονική τυχαία μεταβλητή με παράμετρο *μ=200* (ώρες). Αν ένας αγοραστής απαιτεί τουλάχιστον το **90%** των εξαρτημάτων του να έχουν διάρκεια ζωής πάνω από **150** ώρες, ποια θα πρέπει να είναι η **μέγιστη δυνατή τιμή** της παραμέτρου ***σ*** ώστε να ικανοποιείται αυτή η απαίτηση?

(5) Ανταλλακτικό κινητήρα έχει διάρκεια ζωής που ακολουθεί την κανονική κατανομή $N(\mu_A = 50, \sigma_A^2 = 25)$ αν είναι τύπου ***A*** και την $N(\mu_B = 30, \sigma_B^2 = 25)$ αν είναι τύπου ***B***. Είναι γνωστό ότι το **75%** των ανταλλακτικών είναι τύπου *A*

α) Ποια είναι η πιθανότητα η διάρκεια ζωής ενός (οποιουδήποτε τύπου) ανταλλακτικού να είναι μικρότερη των *40* ετών;

β) Ποια είναι η πιθανότητα ένα ανταλλακτικό να είναι τύπου *B*, αν γνωρίζετε ότι η διάρκεια ζωής του είναι μικρότερη των *40* ετών?

(**6**) Η αντοχή συμπίεσης τσιμέντου ακολουθεί την κανονική κατανομή με μ=60 (N/mm^2) και σ^2 = 16. Ποια είναι η πιθανότητα σε ένα έλεγχο 8 δοκιμών αντοχής συμπίεσης τσιμέντου η πλειοψηφία των δοκιμών να βρεθεί στο διάστημα από 56 έως 64 N/mm^2 ;