Μέση τιμή και **Διακύμανση** για **συνεχείς τυχαίες μεταβλητές** γνωστών κατανομών

Υπολογισμοί (για συνεχείς τ.μ.)

- **Μέση Τιμή:** $$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

- **Διακύμανση:** $$\sigma^2 = V(X) = E\left((X-\mu)^2\right) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x) dx$$

ή εναλλακτικά $$\sigma^2 = V(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2 = E(X^2) - \mu^2$$

όπου $$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx$$

(A). Μέσος και διακύμανση Ομοιόμορφης κατανομής

- Ομοιόμορφη συνεχής τυχαία μεταβλητή

$$f(x)=\frac{1}{b-a} \quad , \quad a \le x \le b$$

Υπολογισμός μέσης τιμής

$$\mu = E(X) = \int_a^b x f(x) dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x dx =$$

$$= \frac{1}{b-a}\left.\frac{x^2}{2}\right|_a^b = \frac{a+b}{2}$$

μέσον του διαστήματος τιμών της μεταβλητής

(Α). Μέσος και διακύμανση Ομοιόμορφης κατανομής

- **Ομοιόμορφη συνεχής τυχαία μεταβλητή**

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \quad , \quad a \le x \le b$$

Υπολογισμός διακύμανσης

$$E(X^2) = \int_a^b x^2 f(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2 dx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{b^2+ab+a^2}{3}$$

$$\sigma^2 = V(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

(B). Μέσος και διακύμανσης **Εκθετικής** κατανομής

- **Εκθετική τυχαία μεταβλητή**

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad , \quad x \geq 0$$

Υπολογισμός μέσης τιμής

$$\mu = E(X) = \int_0^\infty x f(x) dx = \int_0^\infty x \lambda e^{-\lambda x} dx =$$

2 τρόποι υπολογισμού του ολοκληρώματος

(Β). Μέσος και διακύμανσης Εκθετικής κατανομής

- **Εκθετική τυχαία μεταβλητή**

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad , \quad x \geq 0$$

Υπολογισμός μέσης τιμής

$$\mu = E(X) = \int_0^\infty x f(x) dx = \int_0^\infty x \lambda e^{-\lambda x} dx =$$

$$= -\int_0^\infty x d e^{-\lambda x} = -x e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\lambda x} dx = 0 + \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty e^{-y} dy = \boxed{\frac{1}{\lambda}}$$

1ος τρόπος

(ολοκλήρωση κατά παράγοντες)

$$\int_a^b f(x) dg(x) = f(x) g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x) df(x)$$

(Β). Μέσος και διακύμανσης **Εκθετικής** κατανομής

- **Εκθετική τυχαία μεταβλητή**

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad , \quad x \geq 0$$

Υπολογισμός μέσης τιμής

$$\mu = E(X) = \int_0^\infty x f(x) dx = \int_0^\infty x \lambda e^{-\lambda x} dx =$$

$$\overset{y=\lambda x}{=} \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty y e^{-y} dy = \frac{\Gamma(2)}{\lambda} =$$

$$\Gamma(a) = \int_o^\infty x^{a-1} e^{-x} dx$$

$$\Gamma(a+1) = \alpha\Gamma(a+1)$$

$$\Gamma(a+1) = \alpha!$$

α ακέραιος

2^{ος} τρόπος

(με χρήση της συνάρτησης Γάμμα)

(Β). Μέσος και διακύμανσης **Εκθετικής** κατανομής

- **Εκθετική τυχαία μεταβλητή**

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad , \quad x \geq 0$$

Υπολογισμός μέσης τιμής

$$\mu = E(X) = \int_0^{\infty} x f(x) dx = \int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx =$$

$$\overset{y=\lambda x}{=} \frac{1}{\lambda}\int_0^{\infty} y e^{-y} dy = \frac{\Gamma(2)}{\lambda} = \boxed{\frac{1}{\lambda}}$$

2^{ος} τρόπος

(με χρήση της συνάρτησης Γάμμα)

$$\Gamma(a) = \int_o^{\infty} x^{a-1} e^{-x} dx$$

$\Gamma(a+1) = \alpha!$ *αν α είναι ακέραιος*

(B). Μέσος και διακύμανσης Εκθετικής κατανομής

- **Εκθετική τυχαία μεταβλητή**

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad , \quad x \geq 0$$

Υπολογισμός διακύμανσης

$$E(X^2) = \int_0^\infty x^2 f(x) dx = \int_0^\infty x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx \overset{y=\lambda x}{=} \frac{1}{\lambda^2} \int_0^\infty y^2 e^{-y} dy = \frac{1}{\lambda^2} \boxed{\Gamma(3)} = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$\Gamma(a+1) = \alpha!$$

(Β). Μέσος και διακύμανσης Εκθετικής κατανομής

- **Εκθετική τυχαία μεταβλητή**

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad , \quad x \geq 0$$

Υπολογισμός διακύμανσης

$$E(X^2) = \frac{2}{\lambda^2} \qquad E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

$$\sigma^2 = V(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \boxed{\frac{1}{\lambda^2}}$$

(Γ). Μέσος και διακύμανση Κανονικής κατανομής

- **Κανονική τυχαία μεταβλητή *X~N(μ, σ²)***

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad , \quad -\infty < x < \infty$$

Πρόταση:

«Οι παράμετροι ***μ***, ***σ²*** είναι το **μέσο** και η **διακύμανση** της κανονικής κατανομής»

Υπολογισμός μέσης τιμής

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} (x + \mu - \mu) f(x) dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu) f(x) dx + \mu \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu) f(x) dx + \mu =$$

f(x): συμμετρική

$$= \boxed{\overbrace{\int_{-\infty}^{\mu} (x - \mu) f(x) dx}^{<0} + \overbrace{\int_{\mu}^{\infty} (x - \mu) f(x) dx}^{>0}} + \mu =$$

$$= 0 + \mu = \mu$$

Υπολογισμός διακύμανσης

Χρησιμοποιώντας τη σχέση: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \sqrt{2\pi}\sigma$

και **παραγωγίζοντας στη συνέχεια ως προς σ** παίρνουμε:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^3} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \sqrt{2\pi} \Rightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \boxed{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx} = \sigma^2 \Rightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x) dx = V(X) = \sigma^2$$

εξ ορισμού

(Δ). Μέσος και διακύμανση Γάμμα κατανομής

- **Γάμμα τυχαία μεταβλητή**

$$f(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x} \quad , \quad x \geq 0$$

Υπολογισμός μέσης τιμής

$$\mu = E(X) = \int_0^\infty x f(x) dx = \int_0^\infty x \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x} dx \overset{y=\lambda x}{=}$$

$$= \frac{1}{\lambda \Gamma(a)} \boxed{\int_0^\infty y^a e^{-y} dy} = \frac{\Gamma(a+1)}{\lambda \Gamma(a)} = \frac{a}{\lambda}$$

$$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$$

(Δ). Μέσος και διακύμανση Γάμμα κατανομής

- **Γάμμα τυχαία μεταβλητή**

$$f(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x} \quad , \quad x \geq 0$$

Υπολογισμός διακύμανσης (1)

$$E(X^2) = \int_0^\infty x^2 f(x) dx = \int_0^\infty x^2 \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x} dx \overset{y=\lambda x}{=}$$

$$= \frac{1}{\lambda^2 \Gamma(a)} \int_0^\infty y^{a+1} e^{-y} dy = \frac{1}{\lambda^2 \Gamma(a)} \Gamma(a+2) = \frac{a(a+1)}{\lambda^2}$$

$$\Gamma(a+2) = (a+1)\Gamma(a+1) = (a+1)\alpha\Gamma(a)$$

(Δ). Μέσος και διακύμανση Γάμμα κατανομής

- **Γάμμα τυχαία μεταβλητή**

$$f(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x} \quad , \quad x \geq 0$$

Υπολογισμός διακύμανσης (2)

$$\sigma^2 = V(X) = E\left(X^2\right) - E^2(X) =$$

$$= \frac{a(a+1)}{\lambda^2} - \left(\frac{a}{\lambda}\right)^2 = \frac{a}{\lambda^2}$$

Μέση Τιμή και Διακύμανση Γνωστών κατανομών

	Κατανομή	σ.π.π. f(x)	μέση τιμή (μ)	διακύμανση (σ²)
Διακριτές	**Ομοιόμορφη**	$\frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
	Διωνυμική	$\binom{n}{x}\rho^x(1-\rho)^{n-x}$	$n\rho$	$n\rho(1-\rho)$
	Γεωμετρική	$\rho(1-\rho)^{x-1}$	$\frac{1}{\rho}$	$\frac{1-\rho}{\rho^2}$
	Poisson	$\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}$	λ	λ
Συνεχείς	**Ομοιόμορφη**	$1/(b-a)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
	Εκθετική	$\lambda e^{-\lambda x}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
	Κανονική	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ	σ^2
	Γάμμα	$\frac{\lambda^a}{\Gamma(a)}x^{a-1}e^{-\lambda x}$	$\frac{a}{\lambda}$	$\frac{a}{\lambda^2}$

Παραδείγματα μέσης τιμής τυχαίων μεταβλητών

1) Να βρεθεί η **μέση τιμή** και **διακύμανση** τυχαίων μεταβλητών για τις επόμενες περιπτώσεις συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας:

(α) $f(x) = 3\, e^{-3x}$, $x > 0$

(β) $f(x) = 9x\, e^{-3x}$, $x > 0$

(γ) $f(x) = 3/(1+x)^{4}$, $x > 0$

(δ) $f(x)=6(x-1)(2-x)$, $1 < x < 2$

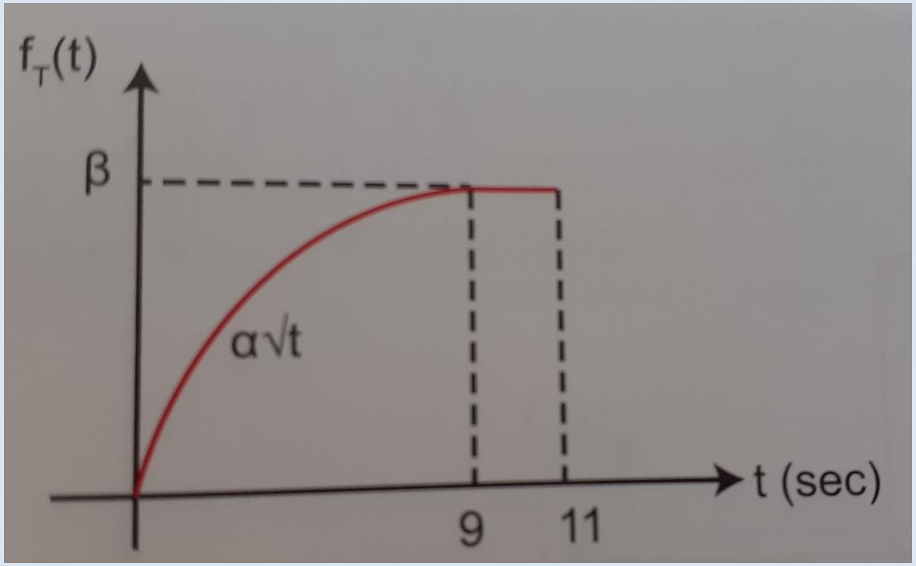
2) Έστω μία τυχαία μεταβλητή ***X*** με συνάρτηση πυκνότητας:

$$f(x)=ax^2 + bx + c, \text{ όπου } |x|<1.$$

(α) Να δειχθεί ότι $2a/3+2c=1$

(β) Να βρεθεί η μέση τιμή και η διακύμανση.

3)



Η διάρκεια της επίδρασης T μίας δύναμης που ασκεί μια μηχανή είναι τυχαία μεταβλητή με πυκνότητα πιθανότητας του σχήματος. Να υπολογιστούν

α) η μέση τιμή,

β) η διακύμανση,

γ) η πιθανότητα $P(8<T<10)$ και

δ) η διάμεσος**

** **διάμεσος (mode)** είναι η τιμή **δ** όπου **$P(T<\delta) = P(T>\delta) = 0.5$**

4) Κατά την διάρκεια ενός γραπτού διαγωνισμού, ένας εξεταζόμενος απαντά σε τεστ πολλαπλής επιλογής. Κάθε ερώτηση έχει **4 δυνατές απαντήσεις**. Η πιθανότητα να γνωρίζει την σωστή απάντηση είναι **60%**, ενώ σε περίπτωση όπου δεν γνωρίζει την σωστή απάντηση, τότε ο εξεταζόμενος απαντά τυχαία.

α) Αν ο γραπτός διαγωνισμός αποτελείται από **12 ερωτήματα**, να βρεθεί ο **μέσος αριθμός** σωστών απαντήσεων καθώς επίσης η **τυπική του απόκλιση.**

β) Να υπολογιστεί **ο μέσος αριθμός** των **συνεχόμενων** σωστών απαντήσεων, καθώς επίσης η **τυπική του απόκλιση**.