Πιθανότητες & Στατιστική
2022-23

Επανάληψη

Μέρος 1ο Εισαγωγή στις Πιθανότητες

- **Εισαγωγικές έννοιες**: δειγματικός χώρος, ενδεχόμενα, ασυμβίβαστα ενδεχόμενα
- **Αξιωματικός ορισμός** και χρήσιμα **πορίσματα**
- **Δεσμευμένη** πιθανότητα, **ολική** πιθανότητα, **κανόνας του Bayes**
- **Ανεξαρτησία** ενδεχομένων
- **Συνδυαστική**: επιλογή με ή χωρίς επανάθεση ή διάταξη, μεταθέσεις, συνδυασμοί *n* ανά *k*

Μέρος 2ο Τυχαίες μεταβλητές

- Η **αθροιστική συνάρτηση** κατανομής πιθανότητας και η **συνάρτηση πυκνότητας** πιθανότητας
- **Γνωστές** κατανομές
  - **διακριτές** τυχαίες μεταβλητές
    - **Bernoulli – Διωνυμική** - Α**ρνητική διωνυμική - Γεωμετρική - Poisson**
  - **συνεχείς** τυχαίες μεταβλητές
    - **Ομοιόμορφη** - **Εκθετική** - **Κανονική** (συνάρτηση Φ(α), τυπική κανονική, z-μετασχηματισμός) - **Γάμμα** (συνάρτηση Γάμμα)

- **Κατανομή συνάρτησης** τυχαίας μεταβλητής
- **Μέση τιμή**, **διακύμανση** και **τυπική απόκλιση**
- **Ροπές**, ροπογεννήτρια, χαρακτηριστική συνάρτηση

Μέρος 3ο Πολυδιάστατες Τυχαίες μεταβλητές & Οριακά θεωρήματα

- **Από-κοινού** και **περιθώρια** κατανομή - **ανεξαρτησία** τυχαίων μεταβλητών
- **Συνδιακύμανση**, **συσχέτιση** και **συντελεστής συσχέτισης**
- **Κατανομή συναρτήσεων** **πολλών μεταβλητών**. Ειδικές περιπτώσεις (άθροισμα δύο ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών)

- **Άθροισμα** - **μέσος όρος** πολλών μεταβλητών
- **Ανισότητες Markov** & **Chebyshev.** Νόμοι των μεγάλων αριθμών
- **Κεντρικό Οριακό Θεώρημα**. Προσέγγιση Διωνυμικής από την Κανονική

Μέρος 4ο Στατιστική

- Εισαγωγή - στοιχεία στατιστικής
  - πληθυσμός, δείγμα, παράμετρος και στατιστικό στοιχείο
- **Περιγραφική στατιστική**
  - Τρόποι οργάνωσης / οπτικοποίησης δεδομένων, ιστογράμματα
  - Αριθμητικά περιγραφικά μέτρα θέσης και κεντρικής τάσης
  - Ποσοστημόρια, θηκογράμματα (*box plots*)

- Κατανομές δειγματοληψίας.
  - Εύρεση των σημείων z_α , $t_n(\alpha)$, $\chi^2_n(\alpha)$
- **Διαστήματα εμπιστοσύνης**
- **Στατιστικός έλεγχος υποθέσεων**
  - μορφές ελέγχου, είδη σφαλμάτων (**τύπου I** και **τύπου II**), ***P-value***
  - ***z-test*** και ***t-test***

Παραδείγματα μιας τυχαίας μεταβλητής

- Το βάρος ενός αντικειμένου είναι μια τυχαία κανονική μεταβλητή με μέση τιμή 160 γρ. και τυπική απόκλιση 6 γρ.

  (α) Ποια η πιθανότητα ένα αντικείμενο να ζυγίζει περισσότερο από 170 γρ.;

  (β) Κατά πόσο θα πρέπει να βελτιωθεί η διακύμανση του βάρους προκειμένου το 95% των αντικειμένων να έχουν βάρος λιγότερο από 165 γρ.;

  (γ) Εάν η τυπική απόκλιση παραμείνει στα 6 γρ., πόσο πρέπει να κατέβει η μέση τιμή του βάρους προκειμένου το 95% των αντικειμένων να έχουν βάρος λιγότερο από 165 γρ.;

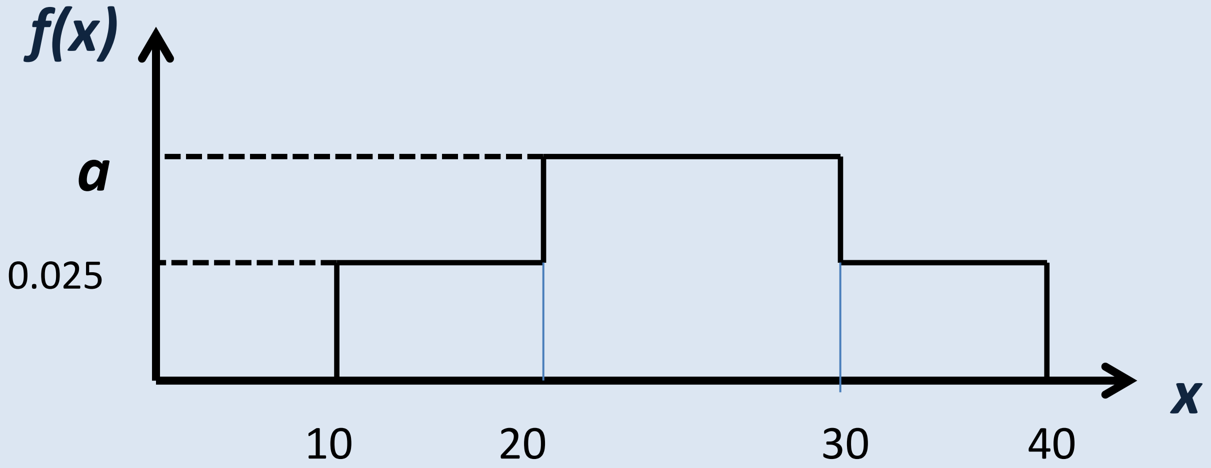
- Το ετήσιο ύψος βροχόπτωσης σε ίντσες σε μια συγκεκριμένη περιοχή ακολουθεί την κανονική κατανομή με $\mu=40$ και $\sigma=4$.

  α) Ποια η πιθανότητα το ύψος βροχόπτωσης να ξεπεράσει τις *50* ίντσες;

  β) Ποια η πιθανότητα, την επόμενη δεκαετία να υπάρξουν το πολύ *2* έτη με ύψος βροχής που ξεπερνά τις *50* ίντσες;

  γ) Ποια η πιθανότητα να χρειαστεί περισσότερο από μία δεκαετία έως ότου εμφανιστεί μια χρονιά με ύψος βροχόπτωσης που να ξεπερνά τις *50* ίντσες;

- Ο χρόνος συμμετοχής (λεπτά) ενός παίκτη σε αγώνες είναι μια τυχαία μεταβλητή με την ακόλουθη σ.π.π.



Να βρείτε τις πιθανότητες να παίξει ο παίκτης

α) για διάστημα περισσότερο από *15 '*

β) για διάστημα λιγότερο από *30 '*

γ) για διάστημα μεταξύ *20 '* και *35 '*

δ) για διάστημα περισσότερο από *36 '*

- Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μιας τυχαίας μεταβλητής Χ είναι:

$$f(x) = \frac{x^3}{4} \ , \ 0 < x < 2$$

Να βρεθεί η κατανομή των συναρτήσεων:

(i) *Y=3X-4* και

(ii) *Y=(2-X)(2+X)*

και στη συνέχεια η μέση τιμή τους.

- Η απόσταση *X* (σε χιλιάδες *km*) που διανύει με το αυτοκίνητο κάποιος στο διάστημα ενός έτους είναι μια τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}(x-10) & 10 \le x \le 12 \\ \frac{2}{15}(15-x) & 12 \le x \le 15 \end{cases}$$

Να βρεθεί η κατανομή των ετήσιων εξόδων αυτοκινήτου για το άτομο αυτό αν είναι γνωστό ότι η κατανάλωσή του είναι 0.05 ευρώ/km ενώ παράλληλα υπάρχουν επιπλέον 500 ευρώ έξοδα συντήρησης αυτοκινήτου. Επίσης να βρεθεί η μέση τιμή των εξόδων του.

Παραδείγματα ΚΟΘ

- Η κατανάλωση βενζίνης σε λίτρα ανά χιλιόμετρο είναι ομοιόμορφη τυχαία μεταβλητή στο διάστημα [0.07, 0.12]. Να υπολογιστεί η πιθανότητα ότι 48 λίτρα βενζίνης είναι αρκετά για μια διαδρομή 500 χιλιομέτρων;

- Η καταγραφή της ηλικίας μιας ομάδας ενός πληθυσμού γίνεται με στρογγυλοποίηση στην πλησιέστερη πεντάδα. Υποθέτουμε ότι το σφάλμα εξαιτίας της στρογγυλοποίησης, δηλ. η διαφορά που προκύπτει ανάμεσα στην πραγματική και στην στρογγυλοποιημένη ηλικία, είναι ομοιόμορφο στο διάστημα [-2.5, 2.5]. Εάν η ομάδα αποτελείται από 48 άτομα να υπολογιστεί η πιθανότητα η διαφορά του μέσου όρου των στρογγυλοποιημένων ηλικιών από αυτό των πραγματικών να είναι το πολύ 0.25 έτη.

Σύμφωνα με την Εθνική Στατιστική Υπηρεσία, το 26 % των αντρών και το 24% των γυναικών δεν τρώνε ποτέ πρωϊνό. Υποθέστε ότι επιλέγονται δύο τυχαία δείγματα 200 αντρών και 200 γυναικών. Βρείτε τις πιθανότητες ότι:

(α) τουλάχιστον 110 από τα συνολικά 400 άτομα δεν τρώνε ποτέ πρωϊνό, και

(β) ο αριθμός των γυναικών που δεν τρώνε ποτέ πρωϊνό είναι μεγαλύτερος ή ίσος από τον αντίστοιχο αριθμό των αντρών.

Σε ένα τυχερό παιχνίδι ο παίκτης ποντάρει ένα πόσο και σε περίπτωση που κερδίσει παίρνει το διπλάσιο αυτού του ποσού. Η πιθανότητα να κερδίσει κάποιος είναι 0.4.

α) Εάν το ποσό που ποντάρει ο παίκτης είναι 5 ευρώ, να υπολογιστεί:

α1) η πιθανότητα να κερδίσει το πολύ 200 ευρώ μετά από την συμμετοχή του σε 100 παιχνίδια

α2) η πιθανότητα να κερδίσει ένα ποσό μεταξύ 100 και 200

ευρώ μετά από την συμμετοχή του σε 100 παιχνίδια

β) Πόσο πρέπει να είναι το ποσό που ποντάρει κάθε φορά ο παίκτης, ώστε με πιθανότητα 0.9 μετά από 100 παιχνίδια να κερδίσει το πολύ 1000 ευρώ?

Παραδείγματα - πολυδιάστατες

Η από-κοινού σ.π.π δύο τ.μ. X, Y δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases} e^{-(x+y)} & x>0, y>0 \\ 0 & \alpha\lambda\lambda o\upsilon \end{cases}$$

α) Να υπολογιστεί η σ.π.π. της τυχαίας μεταβλητής Z=X/Y .

β) Να εξεταστεί εάν οι τυχαίες μεταβλητές X και Y είναι ανεξάρτητες

- Η από-κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας δύο τυχαίων μεταβλητών *X, Y* δίνεται από τον τύπο:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} Cxy & 0 \leq x \leq 1, \qquad 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & \alpha\lambda\lambda\iota\omega\varsigma \end{cases}$$

α) Να βρεθεί η σταθερά *C*

β) Να βρεθεί η περιθώρια κατανομή και η μέση τιμή του *X*

γ) Να βρεθεί η δεσμευμένη κατανομή $f_{Y|X}(y|x)$

δ) Να μελετηθεί αν οι μεταβλητές *X, Y* ανεξάρτητες.

Παραδείγματα (διάφορα)

- Οι πιθανότητες επιτυχίας των φοιτητών ενός Τμήματος σε τέσσερις θεματικές ενότητες είναι 1/2, 1/3, 1/4 και 1/5, αντίστοιχα. Υποθέτοντας ότι οι επιδόσεις των φοιτητών στις θεματικές ενότητες είναι ανεξάρτητες, να υπολογιστούν οι παρακάτω πιθανότητες για έναν φοιτητή:

  α) να επιτύχει σε όλες τις ενότητες,

  β) να αποτύχει σε όλες τις ενότητες,

  γ) να επιτύχει ακριβώς σε μία ενότητα,

  δ) να επιτύχει ακριβώς σε δύο ενότητες,

  ε) να επιτύχει σε τουλάχιστον μία ενότητα.

- Συνήθως αγοράζετε μία συσκευασία που περιέχει 10 τσίχλες. Γνωρίζεται ότι οι 4 από αυτές έχουν γεύση φρούτων. Αν επιλέξετε τυχαία 5 τσίχλες από μια τέτοια συσκευασία, ποια είναι η πιθανότητα να υπάρχουν:

  (α) ακριβώς 2 τσίχλες με φρούτα, και

  (β) τουλάχιστον 1 τσίχλα με φρούτα.

- Από ένα μεγάλο δείγμα καταναλωτών βρέθηκε ότι το 22% αγοράζουν και τα δύο προϊόντα Π1 και Π2, ενώ το 12% κανένα από τα δύο. Εάν είναι γνωστό ότι η πιθανότητα να αγοράσει κάποιος το προϊόν Π2 είναι κατά 0.14 μονάδες μεγαλύτερη από την πιθανότητα να αγοράσει το προϊόν Π1, τότε να υπολογιστεί η πιθανότητα ένας καταναλωτής να αγοράσει το Π1.