Συνδυαστική Ανάλυση

Χρησιμότητα:

κατασκευή εργαλείων για τον υπολογισμό του **πλήθους αποτελεσμάτων** και **της πιθανότητας** σε **διακριτούς** χώρους με **ισοπίθανα** αποτελέσματα.

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)}$$

N(A)*:* πλήθος ευνοϊκών αποτελεσμάτων του Α

N(Ω): πλήθος συνολικών αποτελεσμάτων του *Ω*

Αρχή της Συνδυαστικής Ανάλυσης

Πολλαπλασιαστική Αρχή

ή

Αρχή του Γινομένου

Αρχή της Συνδυαστικής Ανάλυσης

Έστω τεστ πολλαπλών επιλογών αποτελούμενο από k ερωτήματα x_i ($i=1,\ldots,k$), κάθε ένα από τα οποία έχει n_i διαφορετικές απαντήσεις, $x_i \in \{1,2,\ldots,n_i\}$

Κάθε k-άδα $(x_1\ x_2\ \ldots\ x_k)$ εκφράζει μία πλειάδα απαντήσεων στα k ερωτήματα δηλ. ένα **στιγμιότυπο**.

Ποιό είναι το πλήθος όλων των δυνατών απαντήσεων (ή όλων των στιγμιότυπων) του τεστ;

Για k=2 (x_1 x_2)

- Έστω $x_1 \in \{a_1, a_2, \ldots, a_{n1}\}$ και $x_2 \in \{b_1, b_2, \ldots, b_{n2}\}$ οι διαφορετικές απαντήσεις των 2 ερωτημάτων

- Αναπαριστούμε όλα τα δυνατά ζεύγη απαντήσεων (a_i, b_j) με την μορφή ενός πίνακα, κάθε στοιχείο του οποίου είναι μία πιθανή λύση (*ζεύγος απαντήσεων*)

$$
\begin{array}{cc|cccc|}
 & & & x_1 & & \\
 & & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n_1} \\
\hline
 & b_1 & (a_1,b_1) & (a_2,b_1) & \cdots & (a_{n_1},b_1) \\
 & b_2 & (a_1,b_2) & (a_2,b_2) & \cdots & (a_{n_1},b_2) \\
x_2 & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\
 & b_{n_2} & (a_1,b_{n_2}) & (a_2,b_{n_2}) & \cdots & (a_{n_1},b_{n_2}) \\
\hline
\end{array}
$$

Έτσι, υπάρχουν συνολικά ***n_1*n_2*** διαφορετικά **ζεύγη απαντήσεων** (**στιγμιότυπα**)

Για k=3 (x_1 x_2 x_3)

- Έστω $x_1 \in \{a_1, a_2, \ldots, a_{n1}\}$, $x_2 \in \{b_1, b_2, \ldots, b_{n2}\}$ και $x_3 \in \{c_1, c_2, \ldots, c_{n3}\}$ οι διαφορετικές απαντήσεις των 3 ερωτημάτων
- Χρησιμοποιούμε **πίνακα** με *γραμμές* τα (***n_1 x n_2***) δυνατά ζεύγη απαντήσεων των (x_1, x_2) και *στήλες* τις ***n_3*** δυνατές απαντήσεις του x_3 . Κάθε στοιχείο του είναι μία πιθανή λύση

	c_1	c_2	…	c_{n3}
$(a_1\ b_1)$	(a_1 b_1 c_1)	(a_1 b_1 c_2)	….	(a_1 b_1 c_{n3})
$(a_1\ b_2)$	(a_1 b_2 c_1)	(a_1 b_2 c_2)	….	(a_1 b_2 c_{n3})
…				
$(a_1\ b_{n2})$	(a_1 b_{n2} c_1)	(a_1 b_{n2} c_2)	….	(a_1 b_{n2} c_{n3})
$(a_2\ b_1)$	(a_2 b_1 c_1)	(a_2 b_1 c_2)	….	(a_2 b_1 c_{n3})
….				
$(a_{n1}\ b_{n2})$	(a_{n1} b_{n2} c_1)	(a_{n1} b_{n2} c_2)	….	(a_{n1} b_{n2} c_{n3})

Συνολικά ***n_1 x n_2 x n_3*** διαφορετικές 3άδες απαντήσεων (**στιγμιότυπα**)

Πολλαπλασιαστική αρχή ή Αρχή του γινομένου (multiplication principle)

- Έστω διαδικασία αποτελείται από ***k* βήματα** και
  το **πρώτο βήμα** μπορεί να γίνει με **n_1 τρόπους**,
  το **δεύτερο βήμα** μπορεί να γίνει με **n_2 τρόπους**
  (ανεξάρτητα με το πως έγινε το πρώτο βήμα), και
  το **k-οστό βήμα** μπορεί να γίνει με **n_k τρόπους** (*ανεξάρτητα από το πως έγιναν τα προηγούμενα βήματα*)

- Τότε η διαδικασία μπορεί να γίνει με

$$n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_k$$

διαφορετικούς τρόπους.

Πολλαπλασιαστική αρχή ή Αρχή του γινομένου

Γενικά:

- Έστω *k* ερωτήματα-αντικείμενα $(x_1\ x_2\ \dots\ x_k)$ με n_i δυνατές απαντήσεις (τιμές) το κάθενα.

- Το γινόμενο $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_k$ εκφράζει:

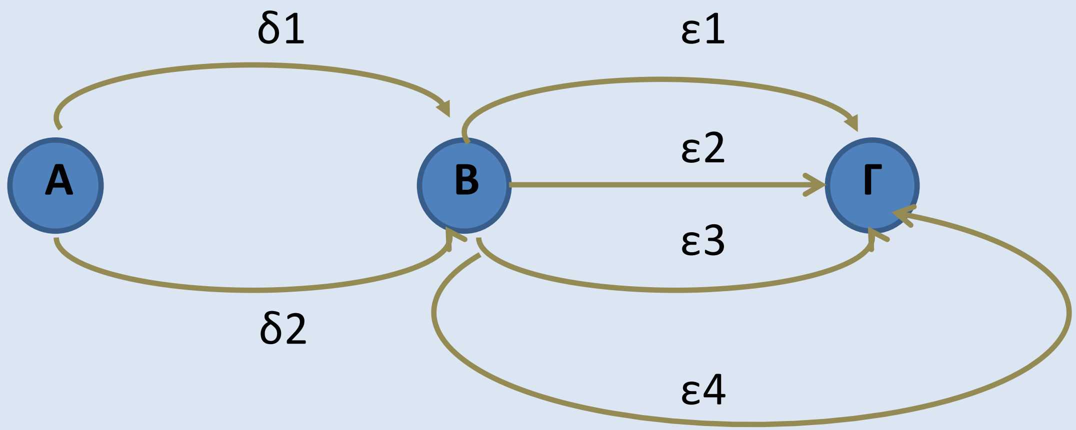
  όλους τους **διαφορετικούς τρόπους** που μπορούμε να απαντήσουμε στα *k* ερωτήματα.

  ή

  όλους τους **διαφορετικούς τρόπους** **επιλογής** των *k* αντικειμένων.

Παραδείγματα

(α) Θέλουμε να πάμε από την πόλη Α στην πόλη Γ μέσω της πόλης Β. Υπάρχουν 2 εναλλακτικές διαδρομές από την Α στην Β και 4 εναλλακτικές από την Β στην Γ. Πλήθος εναλλακτικών διαδρομών?



Συνολικά ***2x4=8*** **διαδρομές**: (δ1,ε1), …, (δ1,ε4),(δ2,ε1),…,(δ2,ε4)

Παραδείγματα

(β) Για την παραγωγή των 7-ψήφιων αριθμών κυκλοφορίας οχημάτων χρησιμοποιούνται για τα 3 πρώτα γράμματα 14 ελληνο-λατινικοί χαρακτήρες και για τα επόμενα 4 ψηφία 10 αριθμοί [0, 1, …, 9]. Πλήθος πινακίδων?

T	**P**	**Z**	**2**	**3**	**7**	**9**

Συνολικά ***14^3 x 10^4*** **διαφορετικές πινακίδες** κυκλοφορίας

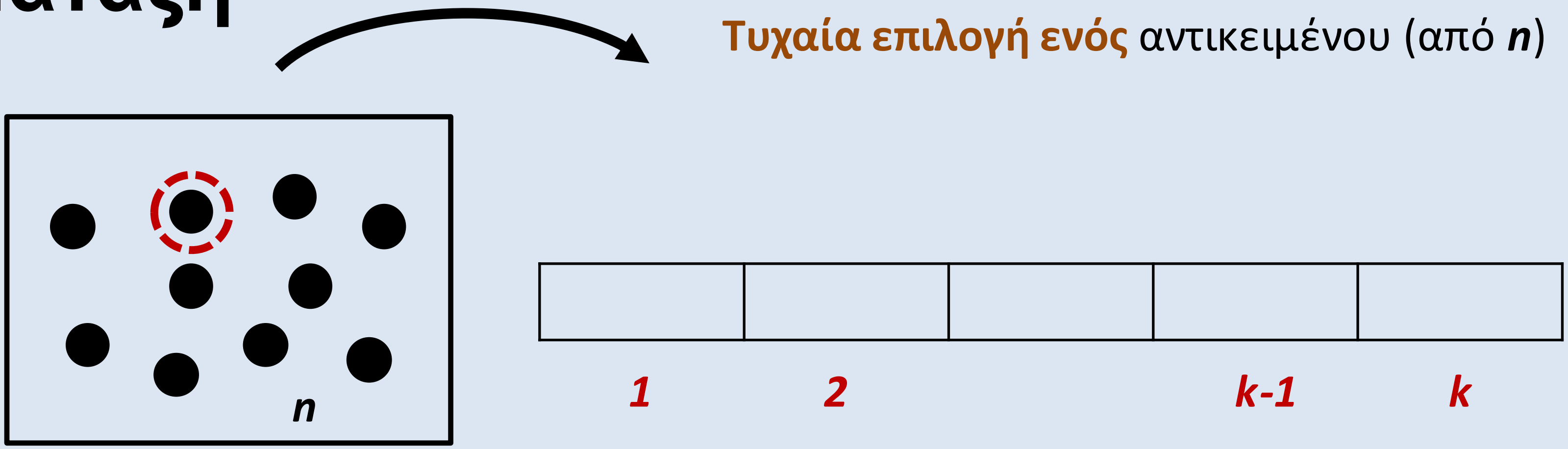
Ανάλογα με το είδος της διαδικασίας επιλογής (***δειγματοληψία***) των αντικειμένων διακρίνουμε τις **εξής περιπτώσεις:**

A. **Δειγματοληψία με** επανάθεση και **με** διάταξη

B. **Δειγματοληψία χωρίς** επανάθεση και **με** διάταξη

C. **Δειγματοληψία χωρίς** επανάθεση και **χωρίς** διάταξη

(A) Δειγματοληψία **με επανάθεση και με διάταξη**

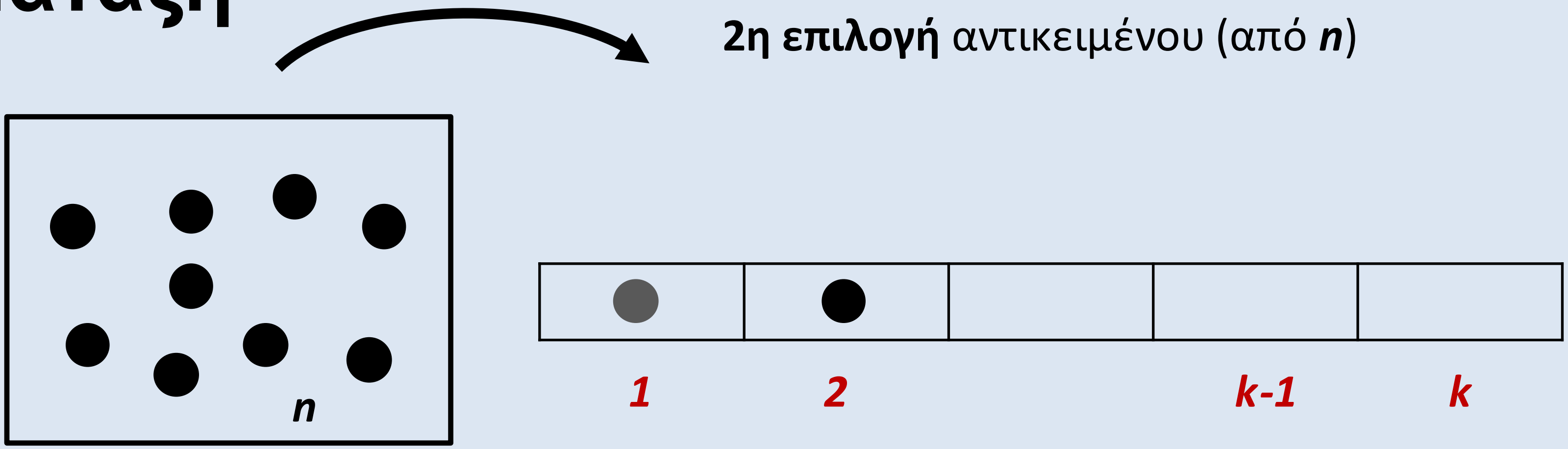


- Επιλέγουμε ***k*** αντικείμενα δοχείο που περιέχει ***n*** διαφορετικά αντικείμενα **<u>με επανάθεση</u>**, δηλ. κάθε φορά επανατοποθετούμε το αντικείμενο που επιλέχτηκε.

(**A**) Δειγματοληψία **με επανάθεση και με διάταξη**

- Επιλέγουμε ***k*** αντικείμενα δοχείο που περιέχει ***n*** διαφορετικά αντικείμενα **<u>με επανάθεση</u>**, δηλ. κάθε φορά επανατοποθετούμε το αντικείμενο που επιλέχτηκε.

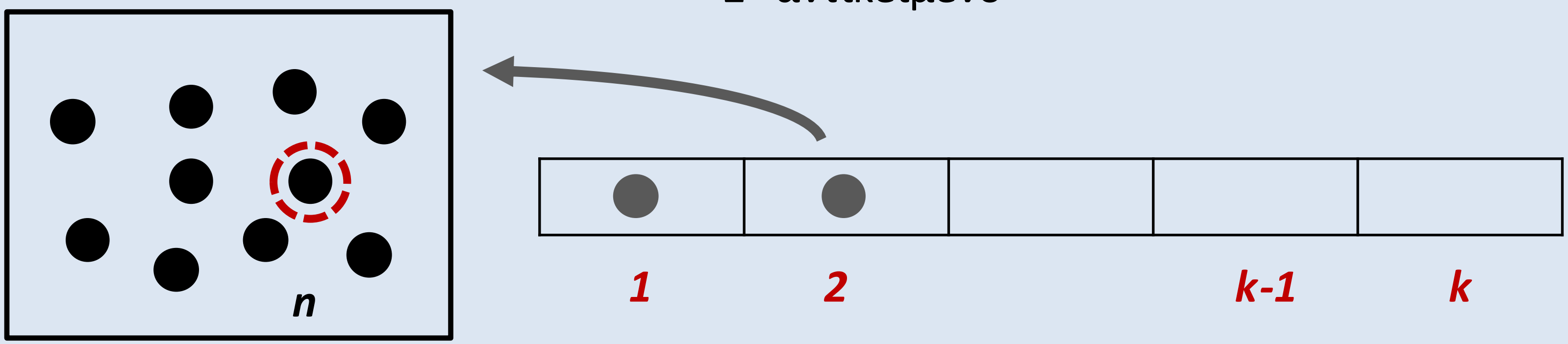
(A) Δειγματοληψία **με επανάθεση και με διάταξη**



- Επιλέγουμε ***k*** αντικείμενα δοχείο που περιέχει ***n*** διαφορετικά αντικείμενα **<u>με επανάθεση</u>**, δηλ. κάθε φορά επανατοποθετούμε το αντικείμενο που επιλέχτηκε.

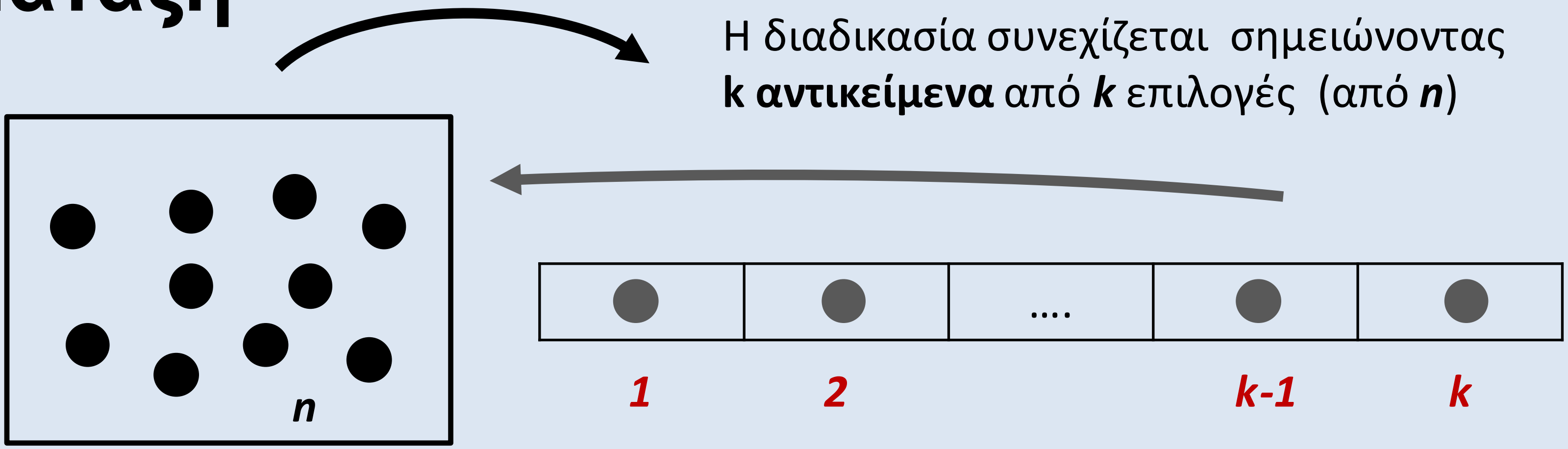
(A) Δειγματοληψία **με επανάθεση και με διάταξη**

Σημειώνουμε και **επανατοποθετούμε** το 2ο αντικείμενο



- Επιλέγουμε ***k*** αντικείμενα δοχείο που περιέχει ***n*** διαφορετικά αντικείμενα **<u>με επανάθεση</u>**, δηλ. κάθε φορά επανατοποθετούμε το αντικείμενο που επιλέχτηκε.

(**A**) Δειγματοληψία **με επανάθεση και με διάταξη**



- Επιλέγουμε ***k*** αντικείμενα δοχείο που περιέχει ***n*** διαφορετικά αντικείμενα **<u>με επανάθεση</u>**, δηλ. κάθε φορά επανατοποθετούμε το αντικείμενο που επιλέχτηκε.
- Είναι δυνατόν να επιλέξουμε το ίδιο αντικείμενο περισσότερες από 1 φορές

(**A**) Δειγματοληψία **με επανάθεση και με διάταξη**

- Επιλέγουμε ***k*** αντικείμενα δοχείο που περιέχει ***n*** διαφορετικά αντικείμενα <u>με επανάθεση</u>, δηλ. κάθε φορά επανατοποθετούμε το αντικείμενο που επιλέχτηκε.

➢ $\exists\, n_i = n$ δυνατές τιμές σε κάθε επιλογή , $i=1,\ldots,k$

και άρα σύμφωνα με την **πολλαπλασιαστική αρχή**:

$$\boxed{n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_k = n^k \text{ δυνατές επιλογές}}$$

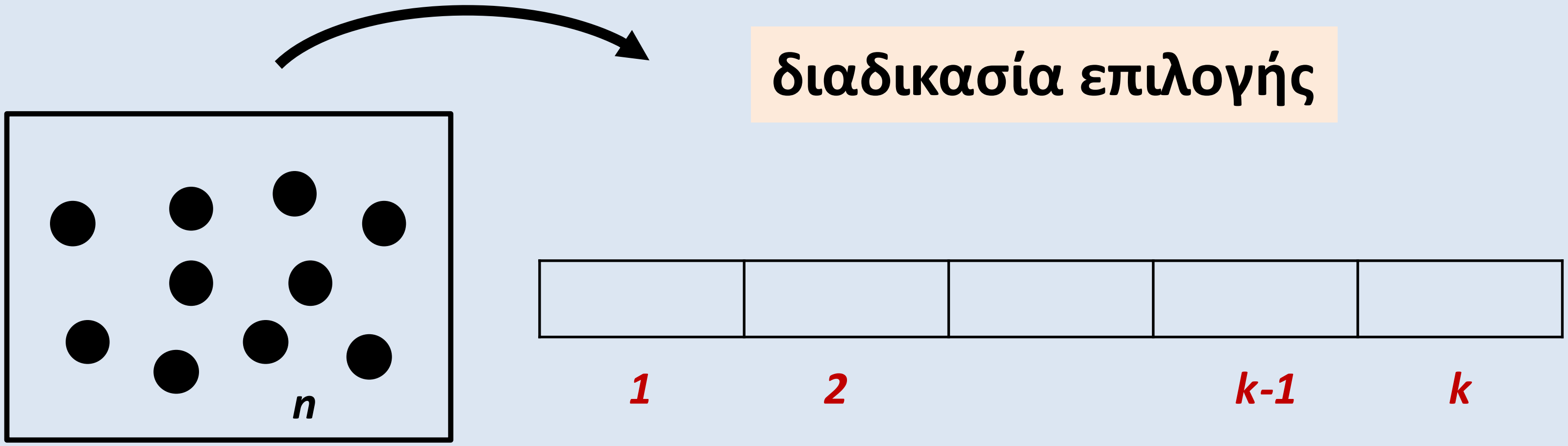
Παράδειγμα

- Έστω δοχείο με n σφαίρες. Επιλέγουμε 2 σφαίρες με επανάθεση. Ποια είναι η πιθανότητα οι 2 σφαίρες να είναι ίδιες;

Λύση

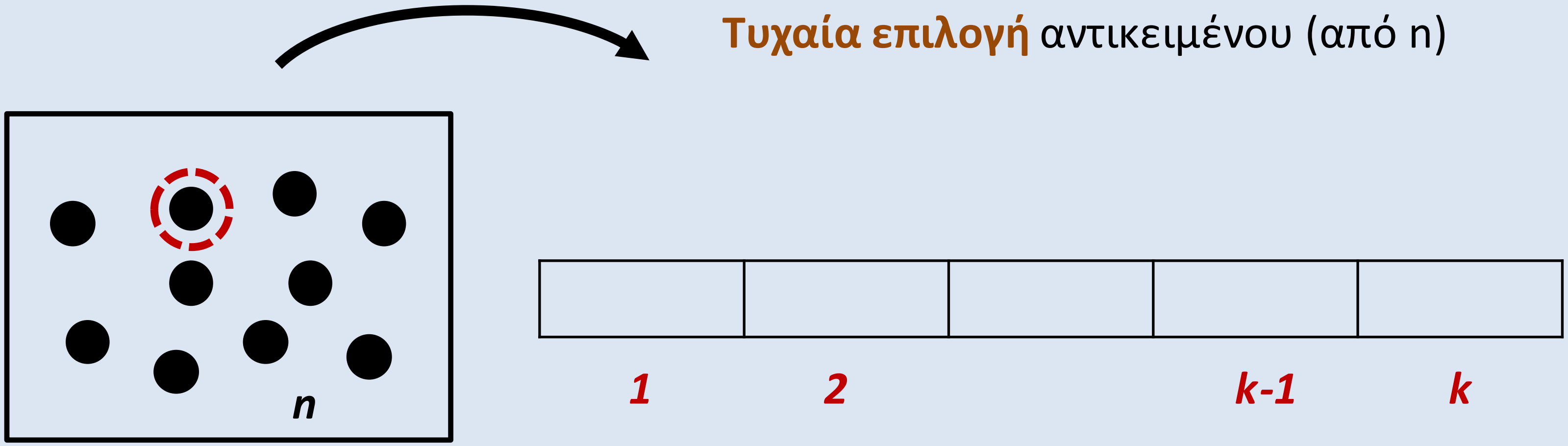
P(«2 σφαίρες ίδιες») = P(A) = N(A) / N(Ω) = n / n² = 1/n

(**B**) Δειγματοληψία **χωρίς επανάθεση και με διάταξη**



- Επιλέγουμε ***k*** αντικείμενα από ένα σύνολο *A* που περιέχει ***n*** διαφορετικά αντικείμενα **χωρίς επανάθεση**, δηλ. κάθε φορά δεν επανατοποθετούμε στο σύνολο *A* το αντικείμενο που επιλέχτηκε.

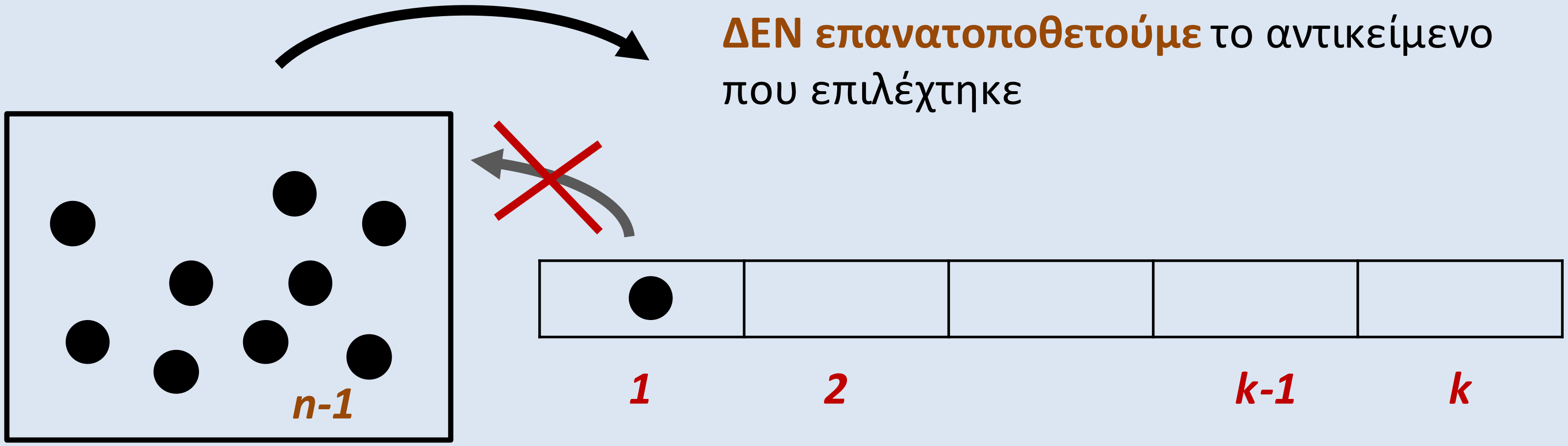
(**Β**) Δειγματοληψία **χωρίς επανάθεση και με διάταξη**



1η επιλογή: Υπάρχουν **n** διαθέσιμες σφαίρες (**n** επιλογές)

- Επιλέγουμε ***k*** αντικείμενα από ένα σύνολο *A* που περιέχει ***n*** διαφορετικά αντικείμενα χωρίς επανάθεση, δηλ. κάθε φορά δεν επανατοποθετούμε στο σύνολο Α το αντικείμενο που επιλέχτηκε.

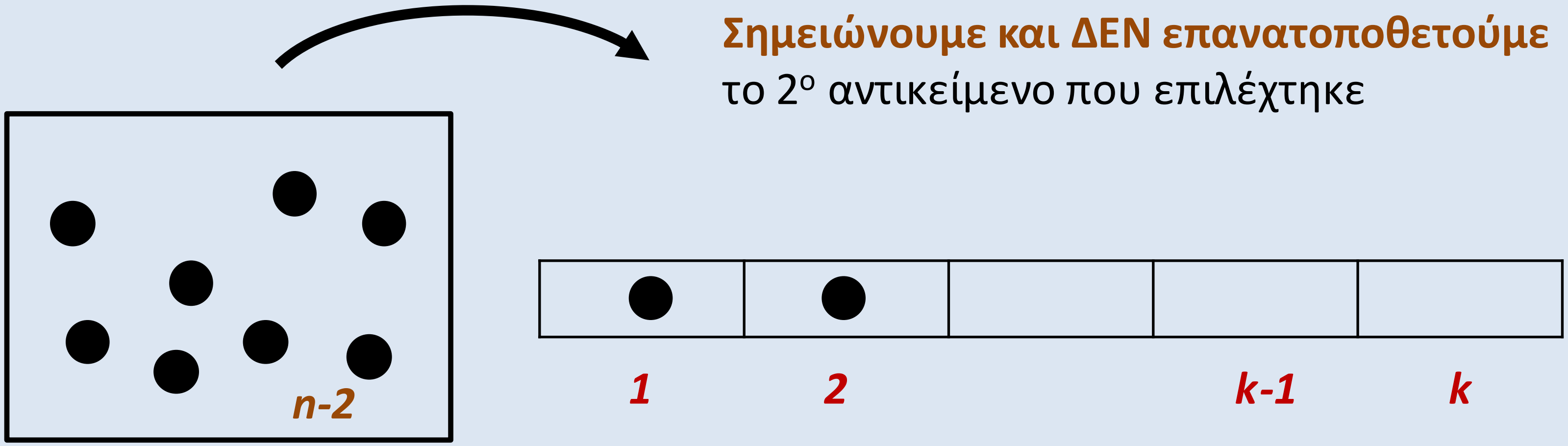
(**Β**) Δειγματοληψία **χωρίς επανάθεση και με διάταξη**



Όχι επανάθεση

- Επιλέγουμε ***k*** αντικείμενα από ένα σύνολο *A* που περιέχει ***n*** διαφορετικά αντικείμενα <u>χωρίς επανάθεση</u>, δηλ. κάθε φορά δεν επανατοποθετούμε στο σύνολο Α το αντικείμενο που επιλέχτηκε.

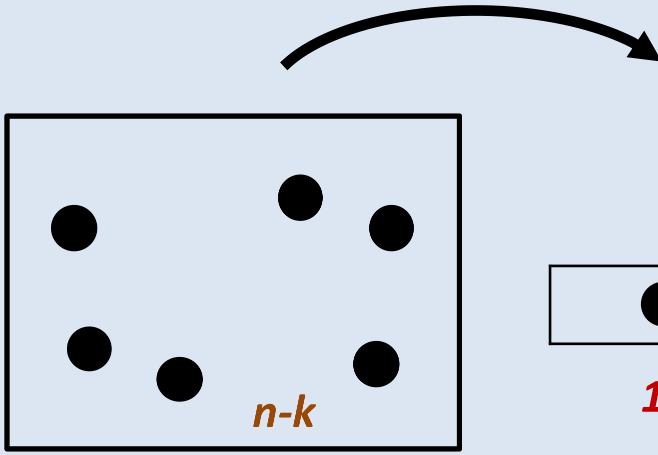
(B) Δειγματοληψία **χωρίς επανάθεση και με διάταξη**



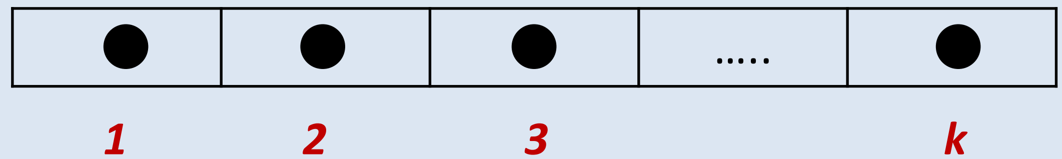
2η επιλογή: Υπάρχουν **n-1** διαθέσιμες σφαίρες (**n-1** επιλογές)

- Επιλέγουμε ***k*** αντικείμενα από ένα σύνολο *A* που περιέχει ***n*** διαφορετικά αντικείμενα <u>χωρίς επανάθεση</u>, δηλ. κάθε φορά δεν επανατοποθετούμε στο σύνολο A το αντικείμενο που επιλέχτηκε.

(**Β**) Δειγματοληψία **χωρίς επανάθεση και με διάταξη**



Επανάληψη διαδικασίας έως ότου επιλέξουμε k αντικείμενα. Κάθε φορά οι επιλογές μας μειώνονται κατά μία.



k^{η} επιλογή: Υπάρχουν **n-k+1** διαθέσιμες σφαίρες (**n-k+1** επιλογές)

- Επιλέγουμε ***k*** αντικείμενα από ένα σύνολο *A* που περιέχει ***n*** διαφορετικά αντικείμενα <u>χωρίς επανάθεση</u>, δηλ. κάθε φορά δεν επανατοποθετούμε στο σύνολο Α το αντικείμενο που επιλέχτηκε.

(**B**) Δειγματοληψία **χωρίς επανάθεση και με διάταξη**

- Επιλέγουμε ***k*** αντικείμενα από ένα σύνολο *A* που περιέχει ***n*** διαφορετικά αντικείμενα χωρίς επανάθεση. Έτσι:

1η επιλογή $n_1 = n$ *δυνατές επιλογές*

2η επιλογή $n_2 = n-1$ *δυνατές επιλογές*

...

kη επιλογή $n_k = n-(k-1) = n-k+1$ *δυνατές επιλογές*

- Έτσι **σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή** υπάρχουν:

n(n-1)….(n-k+1) δυνατές επιλογές ή **διατάξεις**

Έτσι

$$\boxed{n(n-1)\ldots(n-k+1)}$$

διατάξεις *k* αντικειμένων

ή

δυνατοί τρόποι επιλογών ***k*** **διαφορετικών αντικειμένων** από σύνολο με ***n*** **αντικείμενα** με **διατεταγμένο** τρόπο

Παραδείγματα

(1) Έστω δοχείο με n σφαίρες. Επιλέγουμε k σφαίρες με επανάθεση. Ποια είναι η πιθανότητα οι k σφαίρες να είναι ίδιες;

Λύση

P(k σφαίρες ίδιες) = 1-P(k σφαίρες ανόμοιες) =

= 1- P(επιλογή k από n χωρίς επανάθεση) =

$$= 1 - \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}$$

Παραδείγματα

(2) Δοχείο με *n* αριθμημένες σφαίρες. Επιλέγουμε 2 σφαίρες χωρίς επανάθεση. Ποια η πιθανότητα η $1^{η}$ σφαίρα να είναι μεγαλύτερη της $2^{ης}$?

Λύση

Συνολικά πόσες επιλογές υπάρχουν (2 σφαίρες χωρίς επανάθεση)?

$$N(\Omega) = n\,(n-1)$$

Παραδείγματα

(2) Δοχείο με *n* αριθμημένες σφαίρες. Επιλέγουμε 2 σφαίρες χωρίς επανάθεση. Ποια η πιθανότητα η 1η σφαίρα να είναι μεγαλύτερη της 2ης ?

Λύση

Συνολικά υπάρχουν **n (n-1)** επιλογές

Σε πόσες από αυτές η 1η σφαίρα > 2ης σφαίρας ?

$$(n-1)+(n-2)+\ldots+1=\sum_{k=1}^{n-1}k=\frac{(n-1)n}{2}\quad \text{δυν. επιλογες}$$

(πλήθος αποτελεσμάτων)

(2) Δοχείο με *n* αριθμημένες σφαίρες. Επιλέγουμε 2 σφαίρες χωρίς επανάθεση. Ποια η πιθανότητα η 1η σφαίρα να είναι μεγαλύτερη της 2ης ?

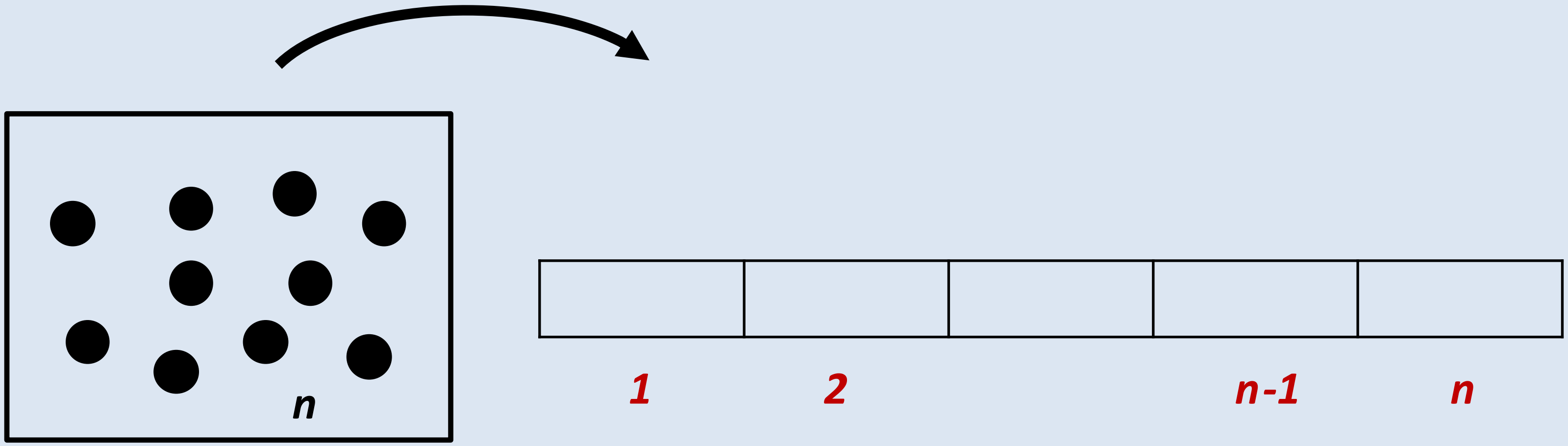
Λύση

$$P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{\frac{(n-1)n}{2}}{n(n-1)}=\frac{1}{2}$$

Παράδειγμα

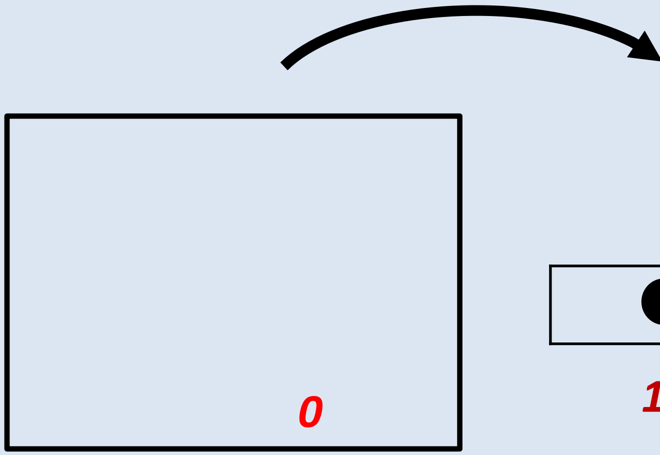
(3) Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να απονεμηθούν τα μετάλλια (χρυσό, αργυρό, χάλκινο) σε 8 αθλητές του στίβου που μετέχουν στον τελικό των 100 μέτρων;

Μεταθέσεις

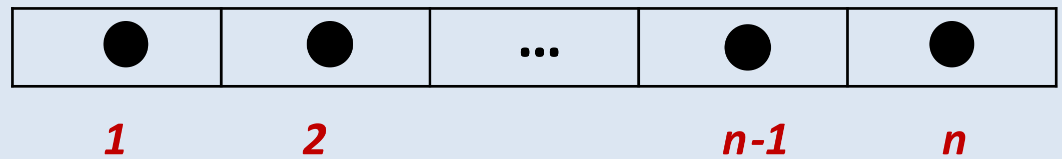


- Έστω ότι κάνουμε **δειγματοληψία χωρίς επανάθεση** από δοχείο με n αντικείμενα με $k=n$

Μεταθέσεις



Επαναληπτικά επιλέγουμε n αντικείμενα
χωρίς επανάθεση
(δηλ. επιλογή όλων, **έως ότου αδειάσει** το κουτί)



δηλ. **διατάσσουμε** τα *n* αντικείμενα

Μεταθέσεις

- Εστω ότι κάνουμε **δειγματοληψία χωρίς επανάθεση** από δοχείο με *n* αντικείμενα με ***k=n***,

- Τότε, το **πλήθος διατάξεων** είναι:

n(n-1)*(n-2)*…*2*1* = ***n!*** (***n – παραγοντικό***)

- ***n!* πλήθος μεταθέσεων, δηλ.** διατάξεων *n* αντικειμένων

- Ισχύει ότι $n! \approx \sqrt{2\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^{n}$ τύπος του *Stirling.*

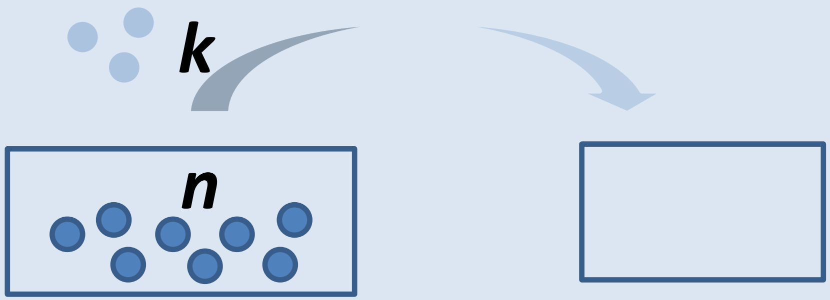
Παράδειγμα

Έστω ***n*** σφαίρες τοποθετούνται σε ***n*** δοχεία, όπου σε κάθε δοχείο επιτρέπεται να τοποθετηθούν περισσότερες από *1* σφαίρες. Ποια είναι η **πιθανότητα όλα τα δοχεία να είναι γεμάτα**?

<u>Παράδειγμα</u>

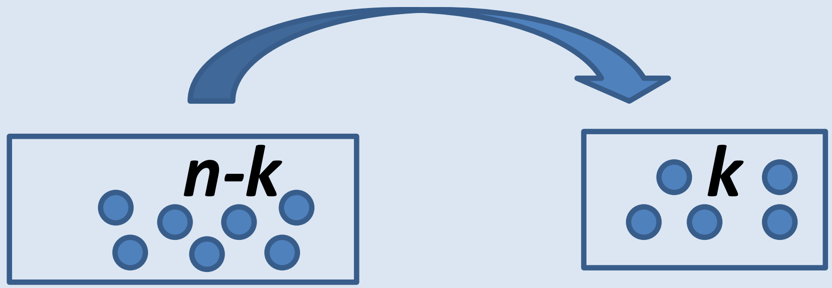
- Πέντε άντρες και τέσσερις γυναίκες γεμίζουν τις διακεκριμένες θέσεις της πρώτης σειράς ενός μικρού θεάτρου. Οι γυναίκες κάθονται στις ζυγές θέσεις. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να καθίσουν τα 9 αυτά άτομα στη συγκεκριμένη σειρά;

(Γ) Δειγματοληψία **χωρίς επανάθεση και χωρίς διάταξη**



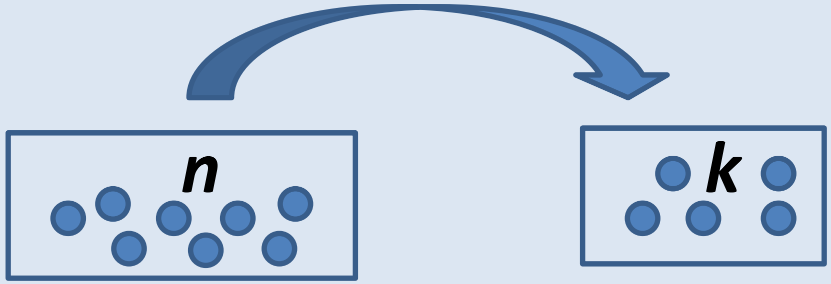
- Επιλέγουμε *k* αντικείμενα **χωρίς επανάθεση** από δοχείο με ***n*** αντικείμενα και τα τοποθετούμε σε άλλο κουτί **χωρίς να μας ενδιαφέρει η διάταξή τους**.

(Γ) Δειγματοληψία **χωρίς επανάθεση και χωρίς διάταξη**



- Επιλέγουμε *k* αντικείμενα **χωρίς επανάθεση** από δοχείο με ***n*** αντικείμενα και τα τοποθετούμε σε άλλο κουτί **χωρίς να μας ενδιαφέρει η διάταξή τους**.

(**Γ**) Δειγματοληψία **χωρίς επανάθεση και χωρίς διάταξη**



- Επιλέγουμε *k* αντικείμενα χωρίς επανάθεση από δοχείο με *n* αντικείμενα και τα τοποθετούμε σε άλλο κουτί χωρίς να μας ενδιαφέρει η διάταξή τους.

- **Πλήθος επιλογών**: *Πλήθος διαφορετικών (μη διατεταγμένων) υποσυνόλων k αντικειμένων ενός συνόλου με n αντικείμενα.*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

συνδυασμοί n ανά k

Τρόπος υπολογισμού: $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

– Επιλογή με διάταξη *k* αντικειμένων από τα *n* :

n(n-1)…(n-k+1)

– Έστω C^n_k πλήθος επιλογών k από n χωρίς διάταξη.

– Για κάθε επιλογή ∃ *k!* διατάξεις (μεταθέσεις).

– Τότε: $C_k^n k! = n(n-1)\ldots(n-k+1) \Leftrightarrow$

$$C_k^n = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \equiv \binom{n}{k}$$

Παράδειγμα

- Πριν την έναρξη ενός ποδοσφαιρικού αγώνα οι 11 παίκτες μιας ομάδας φωτογραφίζονται στον αγωνιστικό χώρο ως εξής: οι 6 από αυτούς είναι όρθιοι και οι υπόλοιποι 5 καθιστοί.

  (α) Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί αυτό να γίνει;

  (β) Αν ο τερματοφύλακας φωτογραφίζεται πάντα όρθιος, πόσοι διαφορετικοί τρόποι υπάρχουν;

Παράδειγμα

- Για τον σχεδιασμό ενός έργου ένας καλλιτέχνης έχει στην διάθεσή του 18 είδη αντικειμένων, εκ των οποίων τα 2 είναι μεταλλικά, τα 6 ξύλινα, τα 6 πλαστικά και τα 4 χάρτινα. Ο καλλιτέχνης έχει να επιλέξει ανάμεσα σε 3 τεχνοτροπίες, το 1-4-4-2 (1 μεταλλικό, 4 ξύλινα, 4 πλαστικά, 2 χάρτινα), το 1-3-5-2 και το 1-4-3-3. Ποια είναι η τεχνοτροπία με τις περισσότερες επιλογές για τον σχεδιασμό του έργου;

Παράδειγμα

- Μια κληρωτίδα έχει 8 κόκκινες, 3 λευκές και 9 μπλε σφαίρες. Αν βγάλουμε ταυτόχρονα 3 σφαίρες να υπολογιστούν οι πιθανότητες

α) να είναι και οι τρεις σφαίρες κόκκινες

β) δύο σφαίρες να είναι κόκκινες και μία μπλε

γ) τουλάχιστον μία σφαίρα να είναι λευκή

δ) να βγει μία σφαίρα από κάθε χρώμα

στ) να βγουν στη σειρά μία κόκκινη, μία λευκή και μία μπλε σφαίρα

Παρατηρήσεις

- Οι $\binom{n}{k}$ είναι οι συντελεστές του **διωνυμικού αναπτύγματος**

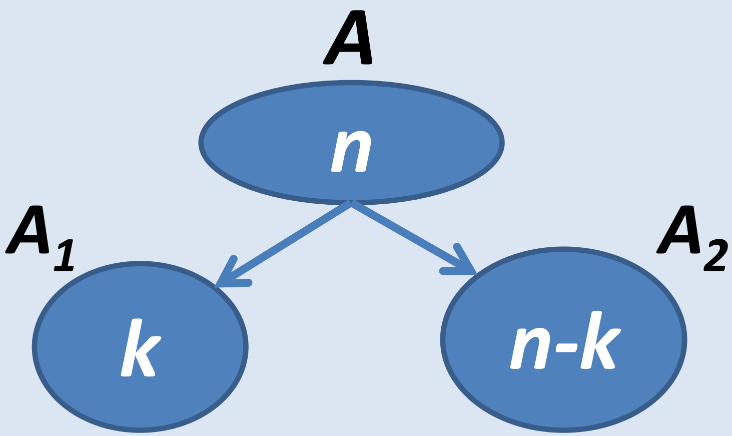
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

- Ισχύει ότι $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

- $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ $\qquad$ $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k = (x+1)^n$

Παρατηρήσεις (συν.)

- Το $\binom{n}{k}$ εκφράζει το **πλήθος διαμερίσεων** ενός συνόλου A αποτελούμενο από n αντικείμενα σε δύο (ξένα) υποσύνολα: A_1 με k αντικείμενα και A_2 με n-k αντικείμενα



- ***Πολυωνυμικοί συντελεστές***: (*n ανά* k_1 , k_2 , … , k_m)

$$\left(k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n\right)$$

$$\begin{pmatrix} & n & & \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_m \end{pmatrix} = \frac{n!}{k_1! k_2! \ldots k_m!}$$

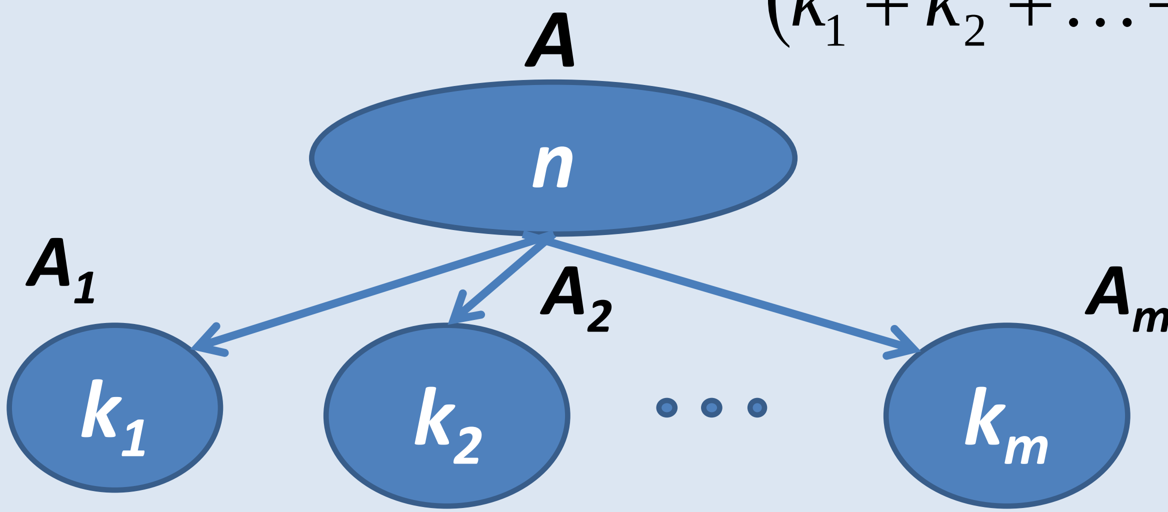
- Είναι οι συντελεστές του **πολυωνυμικού αναπτύγματος**:

$$\left(a_1 + a_2 + \ldots + a_m\right)^n = \sum_{\substack{k_1, k_2, \ldots, k_m \\ k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n}}^{n} \begin{pmatrix} & n & & \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_m \end{pmatrix} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \cdots a_m^{k_m}$$

- ***Πολυωνυμικοί* συντελεστές**: $\begin{pmatrix} & n & & \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_m \end{pmatrix} = \dfrac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_m!}$

- Εκφράζουν το **πλήθος των διαμερίσεων** ενός συνόλου *A* αποτελούμενο από *n* αντικείμενα σε m το πλήθος ξένα υποσύνολα A_1 , A_2 ,…, A_m με k_1 , k_2 ,…, k_m αντικείμενα, αντίστοιχα.

$$\left(k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n\right)$$



Μορφές συνδυαστικής

- Επιλογή **με επανάθεση** *k* **διατεταγμένων** αντικειμένων από ένα σύνολο *n* αντικειμένων

$$n^k$$

- Επιλογή **χωρίς επανάθεση** *k* **διατεταγμένων** αντικειμένων από ένα σύνολο *n* αντικειμένων

$$n(n-1)\cdots(n-k+1)$$

- Επιλογή **χωρίς επανάθεση** *k* (**μη διατεταγμένων**) αντικειμένων από ένα σύνολο *n* αντικειμένων

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$