Στατιστικός Έλεγχος Υποθέσεων (*Statistical Hypothesis Testing*)

Έλεγχος Υποθέσεων

- Μία από τις **σπουδαιότερες** ενότητες της Στατιστικής
- Εξαγωγή **συμπερασμάτων** για τις τιμές των παραμέτρων του πληθυσμού από το τυχαίο **δείγμα** που έχουμε στη διάθεσή μας
- **Διαδικασία** προσδιορισμού αν μια δεδομένη υπόθεση ισχύει ή όχι
- Κατασκευή **εργαλείων** για να κάνουμε έλεγχο

Έλεγχος υποθέσεων

- **Στόχος:**
  – **Στατιστικός έλεγχος** υπόθεσης H_0 για μία (άγνωστη) παράμετρο, $\theta \in \Theta$, ενός πληθυσμού.
  – Κατασκευή **μηχανισμού αποδοχής** *ή* **απόρριψης** της υπόθεσης με ορισμένα όρια ανοχής στο **σφάλμα**.

- **Διαδικασία**: χωρίζουμε τον παραμετρικό χώρο Θ σε δύο υποσύνολα (**περιοχές τιμών**)
  – περιοχή $\boldsymbol{\theta \in \Theta_0}$ που αντιστοιχεί σε **αποδοχή** της αρχικής υπόθεσης H_0 , και
  – περιοχή $\boldsymbol{\theta \in \Theta_1}$ που αντιστοιχεί σε **απόρριψη** της H_0 και αποδοχή μιας **εναλλακτικής υπόθεσης** H_1

Παράδειγμα: Έλεγχος επιπέδου ακτινοβολίας

- Έστω ότι μια εταιρεία κινητής τηλεφωνίας έχει κατασκευάσει ένα νέο κινητό. Πριν το προωθήσει στην αγορά θέλει να **ελέγξει** τα **επίπεδα εκπομπής** της ακτινοβολίας του.

- Αν ενδιαφέρεται να **εκτιμήσει** τη **μέση ακτινοβολία**, τότε θα υπολογίσει το **διάστημα εμπιστοσύνης του μέσου**.

- Αν όμως ενδιαφέρεται να **ελέγξει** αν η **μέση** ακτινοβολία **δεν υπερβαίνει ένα μέγιστο επιτρεπτό όριο**, τότε θα πρέπει να κάνει έναν **στατιστικό έλεγχο υποθέσεων του μέσου**.

Στατιστικός έλεγχος υποθέσεων

- ✓ **Ο στατιστικός έλεγχος υποθέσεων** είναι μία συμπερασματική διαδικασία σε προβλήματα αποφάσεων μεταξύ δύο υποθέσεων

H_0 : **μηδενική υπόθεση** (***null hypothesis***)

⬍

H_1 : **εναλλακτική υπόθεση** (***alternative hypothesis***)

- ✓ Η **ιδέα** είναι να θέσουμε ως μηδενική υπόθεση H_0 αυτή που **αμφισβητούμε** (**αμφιβάλλουμε**).

Διαδικασία

- ✓ Αρχικά κάνουμε μία υπόθεση H_0, την οποία θέλουμε να ελέγξουμε

- ✓ Ελέγχουμε την υπόθεση σε ένα **τυχαίο δείγμα**

$$\boldsymbol{X}=\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$$

  στο κατά πόσο αυτή είναι **ακραία** και άρα προκύπτει σοβαρός λόγος **απόρριψης**

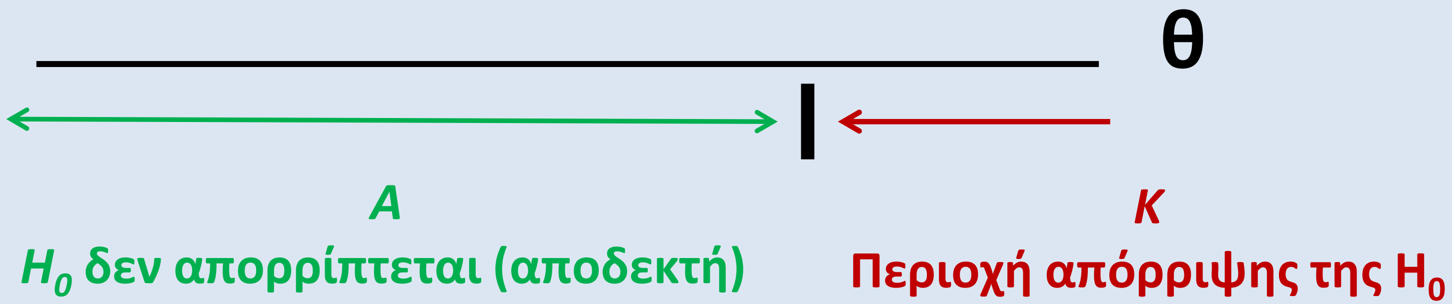
- ✓ Δηλαδή, **εξετάζουμε** αν το **τυχαίο δείγμα** $\boldsymbol{X}$ **στατιστικά διαφέρει** από αυτό που **αναμέναμε, αν** η $\boldsymbol{H_0}$ ήταν **αληθής**.

Κανόνας απόφασης

- Χωρίζουμε τον **παραμετρικό** (ή τον **δειγματικό**) χώρο σε:
  - **περιοχή αποδοχής *A*** (***acceptance)*** όπου **η *H_0*** είναι **αποδεκτή** (**δεν απορρίπτεται**)
  - **περιοχή απόρριψης *K*** (***rejection or critical region***) όπου **η *H_0* απορρίπτεται**

- Κατασκευή **κανόνα**:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{if } X\ (\delta\varepsilon\acute{\iota}\gamma\mu\alpha) \in \mathbf{A} \Rightarrow \textbf{accept } \boldsymbol{H_0} \\ \text{if } X\ (\delta\varepsilon\acute{\iota}\gamma\mu\alpha) \in \mathbf{K} \Rightarrow \textbf{reject } \boldsymbol{H_0} \end{array}}$$



Μορφές στατιστικού ελέγχου

- **Μονόπλευρος** έλεγχος (***one – tailed***)
  - ***Δεξιόπλευρος*** $H_0 : \theta = \theta_0 \qquad H_1 : \theta > \theta_0$
  - ***Αριστερόπλευρος*** $H_0 : \theta = \theta_0 \qquad H_1 : \theta < \theta_0$
- **Αμφίπλευρος** έλεγχος (***two - tailed***)

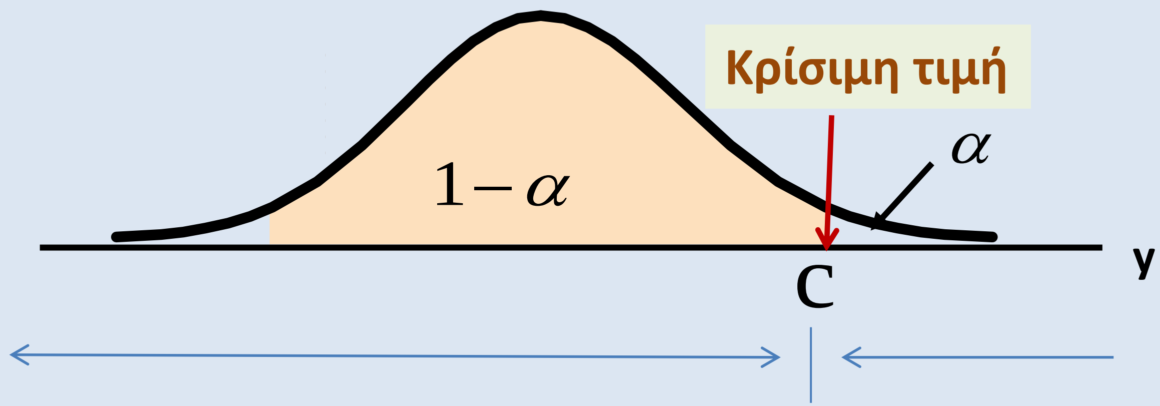
$$H_0 : \theta = \theta_0 \qquad H_1 : \theta \neq \theta_0$$

Μονόπλευρος έλεγχος (***one – tailed***)

Δεξιόπλευρος

$$H_0 : \theta = \theta_0$$
$$H_1 : \theta > \theta_0$$

α: ***πιθανότητα απόρριψης της H_0*** **(ενώ ισχύει)**



Η H_0 δεν απορρίπτεται

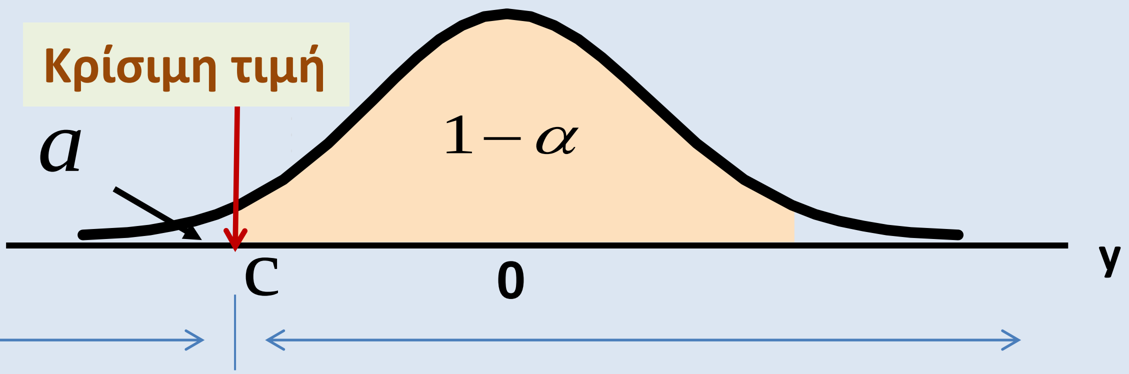
Περιοχή απόρριψης της H_0

Μονόπλευρος έλεγχος (***one – tailed***)

Αριστερόπλευρος

$$H_0 : \theta = \theta_0$$
$$H_1 : \theta < \theta_0$$

α: πιθανότητα απόρριψης της H_0 **(ενώ ισχύει)**



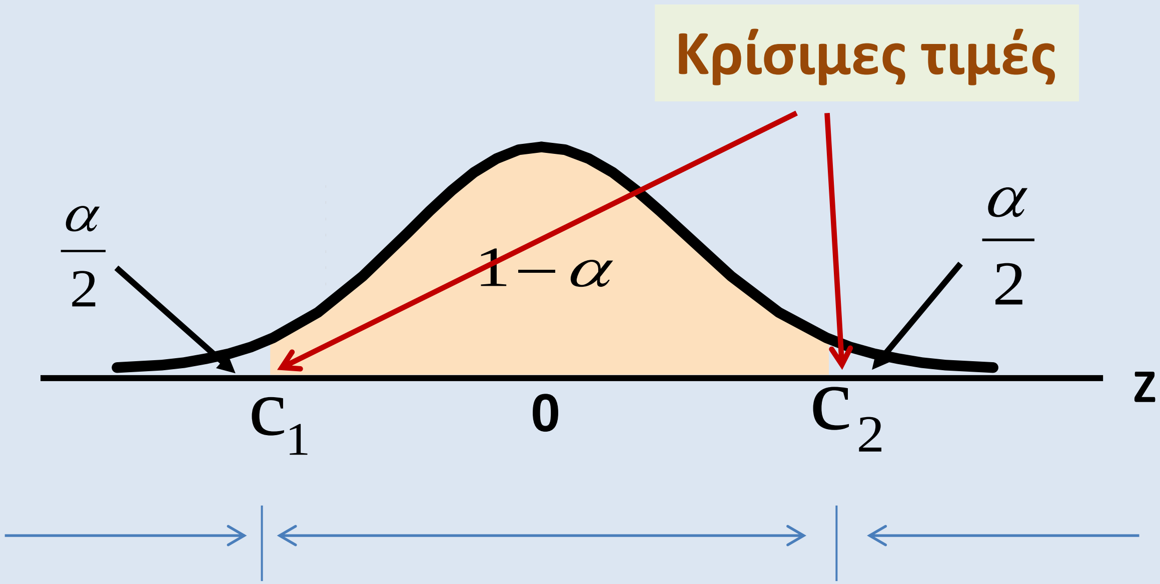
Περιοχή απόρριψης της H_0 **Η H_0 δεν απορρίπτεται**

Αμφίπλευρος έλεγχος (***two – tailed***)

$$H_0 : \theta = \theta_0$$

$$H_1 : \theta \neq \theta_0$$

α: ***πιθανότητα απόρριψης της H_0*** **(ενώ ισχύει)**



Περιοχή απόρριψης της H_0 **Η H_0 δεν απορρίπτεται** **Περιοχή απόρριψης της H_0**

Είδη σφαλμάτων

		Πραγματικότητα	
		Ισχύει η H_0	Ισχύει η H_1
Απόφαση	Αποδοχή H_0	ορθή απόφαση Accept H_0	Σφάλμα τύπου II β
	Αποδοχή H_1 (Απόρριψη H_0)	Σφάλμα τύπου I α	ορθή απόφαση Accept H_1

Σφάλμα τύπου I : Απορρίπτουμε την H_0 ενώ είναι **αληθής**

(type I error)

$$a = P(\text{type I error}) = P(\text{Απόρριψη } H_0 \mid \text{ισχύει η } H_0)$$

Σφάλμα τύπου II : Δεν απορρίπτουμε την H_0 ενώ είναι **ψευδής**

(type II error)

$$\boldsymbol{\beta} = P(\text{type II error}) = P(\text{αποδοχή } H_0 \mid \textbf{ισχύει η } \boldsymbol{H_1})$$

$$\boldsymbol{\beta} = P(\text{type II error}) = P(\text{αποδοχή } H_0 \mid \textbf{δεν ισχύει} \text{ η } H_0)$$

- **Πιθανότητα σφάλματος τύπου I (type I error)**

λάθος απόρριψη

$$a = P(\text{type I error}) = P(H_1 \mid H_0)$$

Βαθμός σημαντικότητας ενός ελέγχου και αναπαριστά την ανοχή στο **σφάλμα τύπου I**, δηλ. **απόρριψης** μιας ορθής υπόθεσης H_0 (*ενδεικτικές τιμές* ***1%, 5%, 10%***)

- **Πιθανότητα σφάλματος τύπου II (type II error)**

λάθος αποδοχή

$$\beta = P(\text{type II error}) = P(H_0 \mid H_1)$$

Αναπαριστά την ανοχή στο **σφάλμα τύπου II**, δηλ. **αποδοχή** μιας λανθασμένης υπόθεσης H_0 (δεν ισχύει).

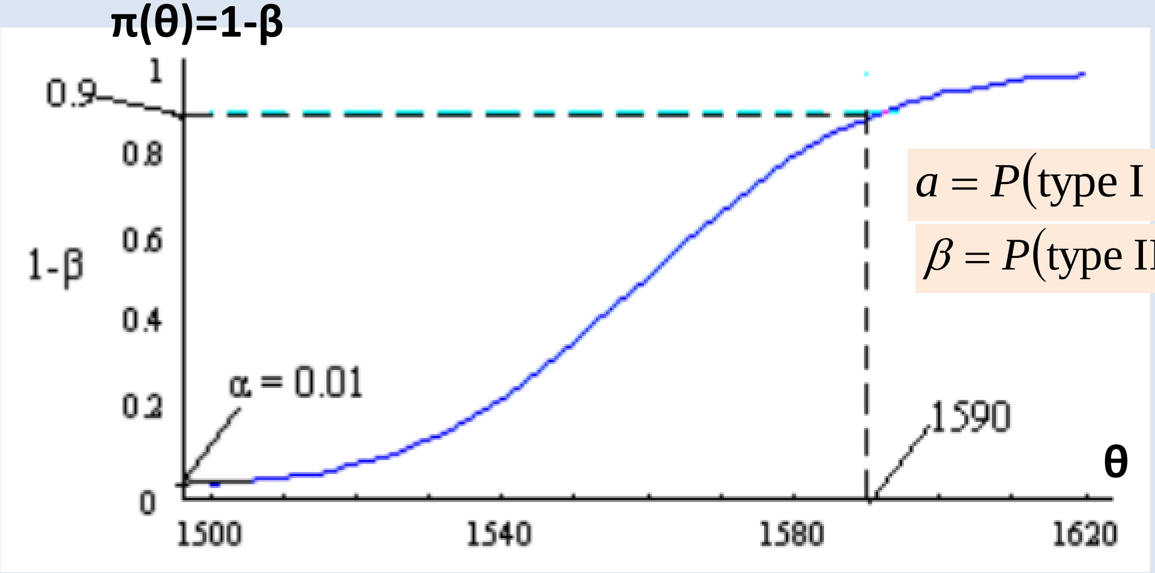
Ισχύς ενός ελέγχου (*Power*)

σωστή απόρριψη

$$\pi(\theta) = 1 - P(\text{type II error}) = 1 - \beta$$
$$= 1 - P(H_0 \mid H_1) = P(H_1 \mid H_1)$$

- **Πιθανότητα να μην συμβεί σφάλμα τύπου ΙΙ**, δηλ. **πιθανότητα ορθής απόρριψης της H_0** (και ισχυρισμού της υπόθεσης H_1).

Καμπύλη ισχύος (*Power curve*)



λάθος απόρριψη

$$a = P(\text{type I error}) = P(H_1 \mid H_0)$$

$$\beta = P(\text{type II error}) = P(H_0 \mid H_1)$$

λάθος αποδοχή

- Η γραφική παράσταση της ισχύος *π(θ)=1-β* για διάφορες τιμές της παραμέτρου θ.
- Όσο **μεγαλώνει** η περιοχή απόρριψης (πιθαν. ***α***) τόσο **ελαττώνεται** το μέγεθος του ***β***. Αν ***ελαττώσουμε*** το ***α***, τότε το ***β*** θα **μεγαλώσει**.

α >> => μεγάλη απόρριψη H_0 => μικρή αποδοχή H_0 => β << => π(θ)->1

α << => μικρή απόρριψη H_0 => μεγάλη αποδοχή H_0 => β >> => π(θ)->0

P-τιμή ενός ελέγχου (*P-value*)

- Η **P-τιμή** (***P-value***) ενός ελέγχου είναι η **μικρότερη** στάθμη σημαντικότητας στην οποία **απορρίπτεται** η H_0 **με βάση το διαθέσιμο δείγμα**.

- Έτσι, σε στάθμη σημαντικότητας ***α*** ισχύει ο **κανόνας**:
  - Αν ***α* > *P-value*** **απορρίπτεται** **η H_0**
  - Αν ***α* < *P-value*** **δεν απορρίπτεται** **η H_0**

- Με την ***P-value*** βρίσκουμε **πόσο πιθανή** είναι η εμφάνιση του δείγματος κάτω από τη μηδενική υπόθεση

- **Σημείωση**: Έτσι η «ευθύνη» της απόρριψης ή όχι της μηδενικής υπόθεσης «μετατίθεται» στον ερευνητή

Γενική στρατηγική για τον έλεγχο υποθέσεων

Βήματα της διαδικασίας ελέγχου για την παράμετρο θ

1. Ορίζουμε τις **υποθέσεις**: H_0 (θ_0) , H_1

2. Ορίζουμε το **επίπεδο σημαντικότητας (*α*) του ελέγχου**, που είναι η μέγιστη αποδεκτή πιθανότητα εσφαλμένης απόρριψης της H_0.

3. **Ο**ρίζουμε τη **στατιστική συνάρτηση ελέγχου *T(X)*** και υπολογισμός της τιμής της για το τυχαίο δείγμα ***X***.

4. Κατασκευάζουμε μία **στατιστική συνάρτηση** ***Y=g(T, θ)*** η κατανομή της οποίας να μην εξαρτάται από το *θ*

5. Υπολογίζουμε την **περιοχή απόρριψης ή κρίσιμη περιοχή** του ελέγχου **λύνοντας ως προς *T(X)***:

		Δεν απορρίπτουμε		**απορρίπτουμε**
$H_0: \theta = \theta_0 \,, H_1: \theta > \theta_0$	:	$P(Y < c \mid \theta = \theta_0) = 1 - a$		$P(Y \geq c \mid \theta = \theta_0) = a$
$H_0: \theta = \theta_0 \,, H_1: \theta < \theta_0$	:	$P(Y > c \mid \theta = \theta_0) = 1 - a$	***ή***	$P(Y \leq c \mid \theta = \theta_0) = a$
$H_0: \theta = \theta_0 \,, H_1: \theta \neq \theta_0$	:	$P(c_1 < Y < c_2 \mid \theta = \theta_0) = 1 - a$		$P(Y \geq c_2) = a/2 = P(Y \leq c_1)$

6. Εξετάζουμε αν η τιμή της *T(X)* βρίσκεται ή όχι στην κρίσιμη περιοχή, ώστε να **αποφασίσουμε αν θα απορρίψουμε ή όχι την υπόθεση *H₀***

.

Παρατηρήσεις

- **Όταν απορρίπτεται η H_0** τότε το τυχαίο δείγμα ονομάζεται **στατιστικά σημαντικό** (*statistically significant*) και σημαίνει ότι **διαφέρει σημαντικά** από αυτό που αναμενόταν με βάση την H_0

- **Όσο πιο μικρή** είναι η τιμή του επιπέδου σημαντικότητας **α**, τόσο πιο **στατιστικά σημαντικό** είναι το αποτέλεσμα του ελέγχου (**μεγαλύτερη βεβαιότητα**).

Περιπτώσεις στατιστικού ελέγχου

1. Έλεγχος για το **μέσο** (μ)
2. Έλεγχος για την **διακύμανση** (σ^2)
3. Έλεγχος για το **ποσοστό** (p)
4. Έλεγχος για την **διαφορά των μέσων** ($\mu_1 – \mu_2$) δύο πληθυσμών
5. Έλεγχος για τον **λόγο διασπορών** (σ^2_1 / σ^2_2) δύο πληθυσμών

z-test

(Α). Έλεγχος υποθέσεων για το **μέσο (μ)** με **γνωστή διασπορά (σ^2)**

- Έστω τυχαίο δείγμα $\boldsymbol{X}=\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ όπου υποθέτουμε ότι προέρχεται από κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma_0^2)$, με **άγνωστο μέσο μ** αλλά **γνωστή διασπορά σ_0^2**

- **Στατιστικός έλεγχος** για το $\boldsymbol{\mu}$ χρησιμοποιώντας **επίπεδο σημαντικότητας α.**

(A). Έλεγχος υποθέσεων για το μέσο (μ) με γνωστή διασπορά (*z-test*)

- Ορίζουμε ως **στατιστική συνάρτηση ελέγχου *T(X)*** τον δειγματικό μέσο

$$T(X) = \bar{X} = \frac{1}{n}\sum_i X_i$$

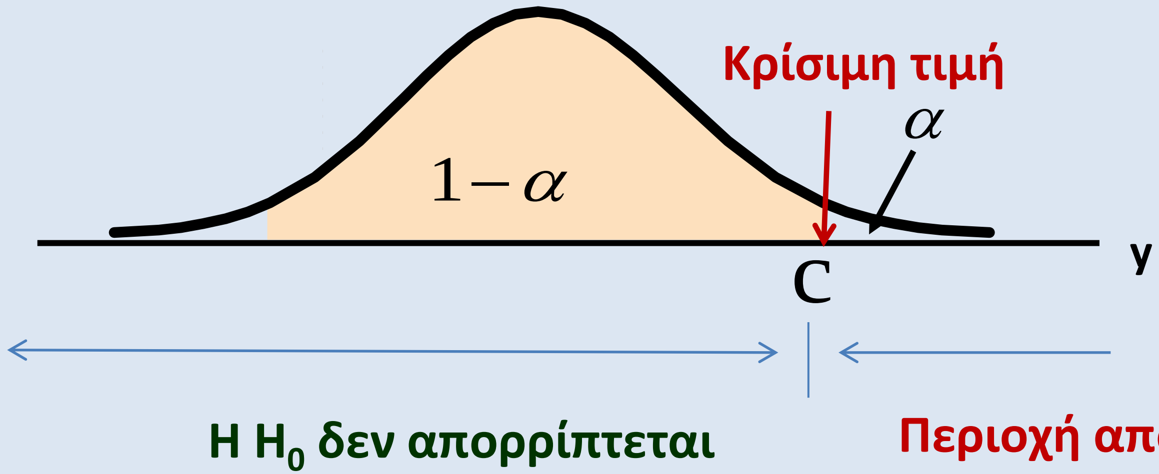
- Βασιζόμαστε στο γνωστό αποτέλεσμα:

$$Y = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

- Διακρίνουμε τις **περιπτώσεις**:

(A1) Δεξιόπλευρος έλεγχος: $H_0: \mu = \mu_0$ έναντι $H_1: \mu > \mu_0$

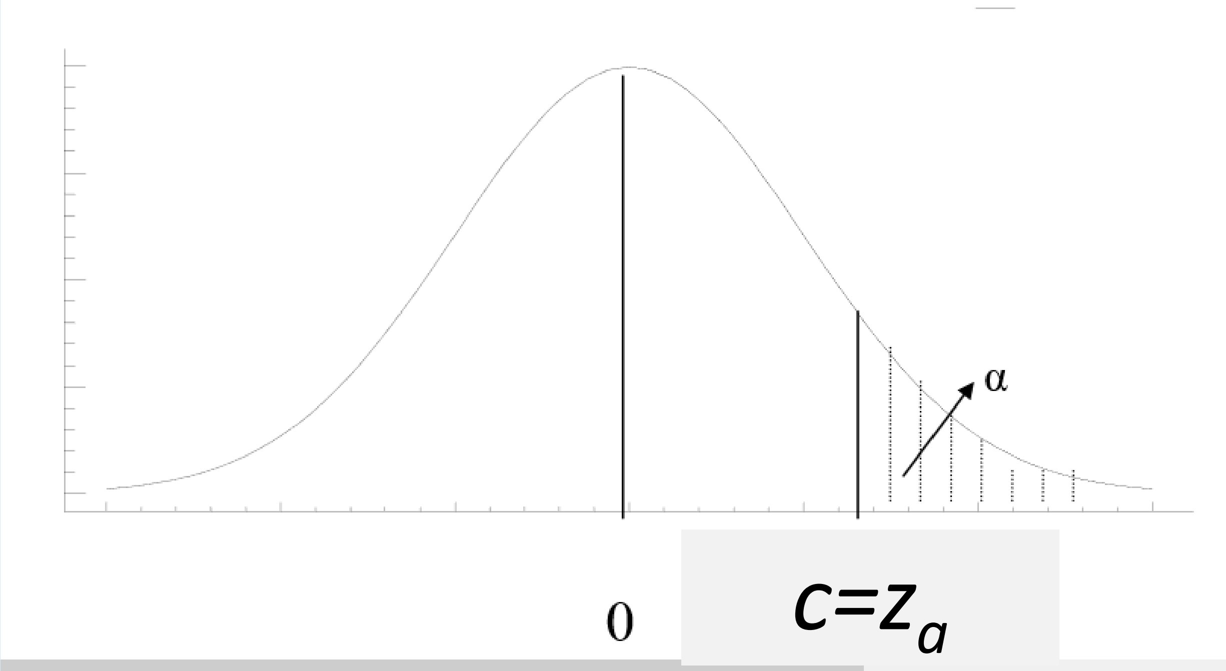
- Κατασκευή της **περιοχής απόρριψης** με βάση τη γνωστή κατανομή της Y υποθέτοντας ότι H_0 αληθής



$$Y = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

$$P\left(Y \geq c \mid H_0 \text{ is true}\right) = a \Rightarrow P\left(Y \geq c \mid \mu = \mu_0\right) = a$$

c μία σταθερά που θα προσδιοριστεί με βάση τον βαθμό σημαντικότητας ***α***.



- Εύρεση της σταθεράς c από την **κανονική κατανομή της Y:**

$$c = z_a$$

- και παίρνουμε την **ανίσωση**:

$$Y > z_a$$

- Λύνουμε ως προς τη στατιστική συνάρτηση ***T(X)*** που έχουμε ορίσει:

$$Y=\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}>z_a \Rightarrow \bar{X}>\mu_0+\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}z_a$$

- Η **κρίσιμη περιοχή** (**περιοχή απόρριψης της *H_0***) με βαθμό σημαντικότητας ***α*** είναι η:

μηχανισμός απόφασης

$$\boxed{K\ :\ \bar{X}\geq\mu_0+\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}z_a}$$

Υπολογισμός της *P-value*

- Έστω τυχαίο δείγμα ***X*** με δειγματικό μέσο $\overline{X}$

  Υπολογίζουμε την (μέγιστη) **πιθανότητα η παραπάνω τιμή να είναι ακραία:**

- Βρίσκουμε το δεξιό άκρο **<u>από το δείγμα</u>**:

$$c(x) = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma_0 / \sqrt{n}}$$

- Και υπολογίζουμε:

$$P - value = P\left(Y > c \mid H_0 \text{ αληθης}\right) = P\left(Y > c(x)\right) =$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma_0 / \sqrt{n}}\right) = \Phi\left(\frac{\mu_0 - \overline{X}}{\sigma_0 / \sqrt{n}}\right)$$

Υπολογισμός της **πιθανότητας σφάλματος II**

β=*P(Σφάλμα τύπου II)=P(accept H0 | H1 is true)*

$$\beta = P\left(Y < c \mid H_1 \text{ is true}\right) = P\left(Y < z_a \mid \mu = \mu_1\right) =$$

$$= P\left(\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma_0 / \sqrt{n}} < z_a \mid \mu = \mu_1\right) = P\left(\overline{X} < \overset{t}{\boxed{\mu_0 + \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} z_a}} \mid \mu = \mu_1\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{\overset{t}{\boxed{\mu_0 + \sigma_0 / \sqrt{n} z_a}} - \mu_1}{\sigma_0 / \sqrt{n}}\right) = \Phi\left(\frac{\mu_0 - \mu_1}{\sigma_0 / \sqrt{n}} + z_a\right)$$

πιθανότητα εσφαλμένης αποδοχής της H_0

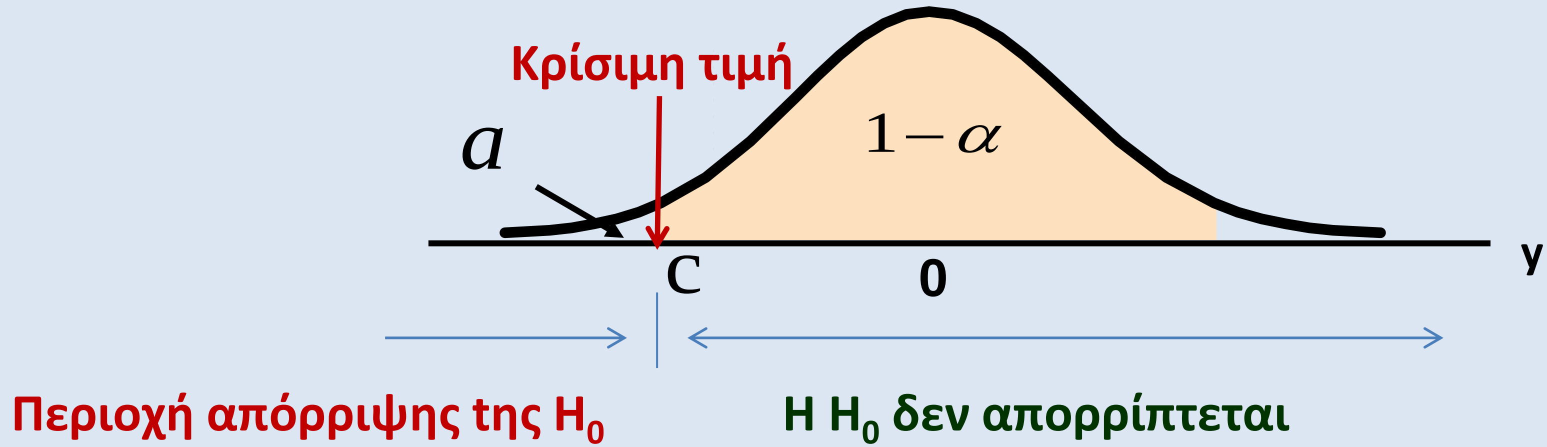
Συνάρτηση ισχύος (*Power*) του ελέγχου:

$$\pi(\mu) = 1 - \beta = 1 - \Phi\left(\frac{\mu_0 - \mu}{\sigma_0 / \sqrt{n}} + z_a\right)$$

πιθανότητα ορθής απόρριψης της H_0

(A2) Αριστερόπλευρος έλεγχος: H_0:μ=$μ_0$ έναντι H_1:μ<$μ_0$

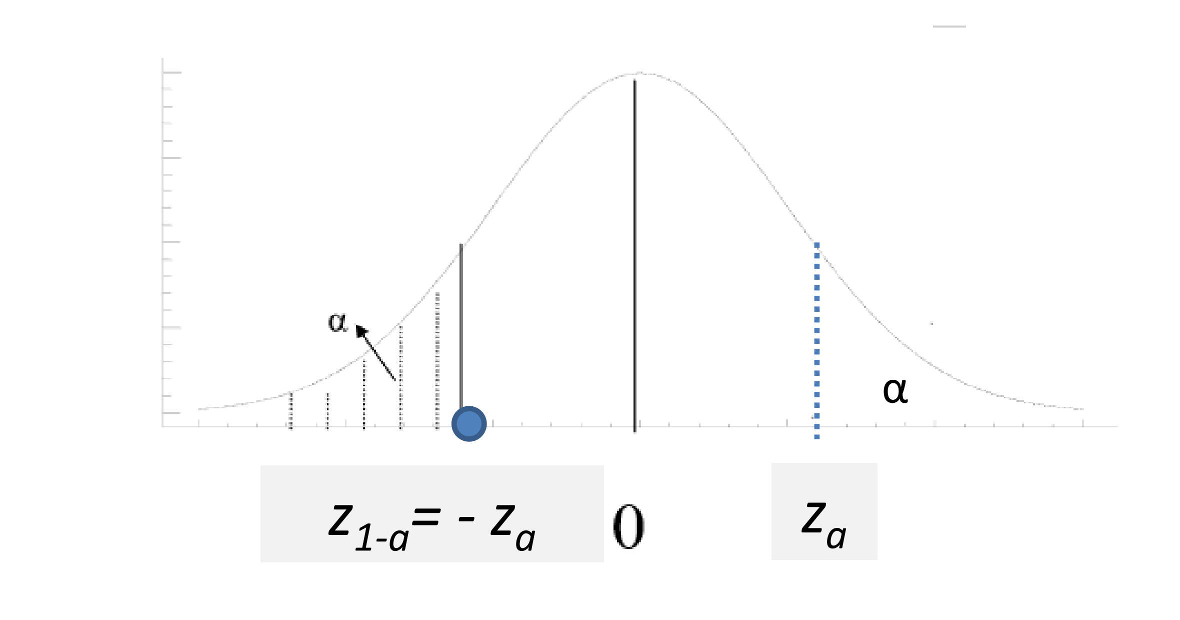
- Κατασκευή της **περιοχής απόρριψης** με βάση τη γνωστή κατανομή της Y υποθέτοντας ότι H_0 αληθής



$$P(Y < c \mid H_0 \text{ is true}) = a \Rightarrow P(Y < c \mid \mu = \mu_0) = a$$

όπου ***c* μία σταθερά** που θα προσδιοριστεί με βάση τον βαθμό σημαντικότητας ***α***.

$c = -z_a$



$$P\left(Y < c \mid H_0 \text{ is true}\right) = a \Rightarrow P\left(Y = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma_0 / \sqrt{n}} < c \mid \mu = \mu_0 \right) = a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma_0 / \sqrt{n}} < z_{1-a} = -z_a \Rightarrow \bar{X} < \mu_0 - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_a$$

Υπολογισμός της *P-value*

- Έστω τυχαίο δείγμα *X* με δειγματικό μέσο $\overline{X}$
  Υπολογίζουμε την **πιθανότητα η παραπάνω τιμή να είναι ακραία**:
- Βρίσκουμε το αριστερό άκρο

$$c(x) = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma_0 / \sqrt{n}}$$

- Και έχουμε:

$$P-value = P(Y < c \mid H_0 \text{ αληθης}) = P(Y < c(x)) = \Phi\left(\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma_0 / \sqrt{n}}\right)$$

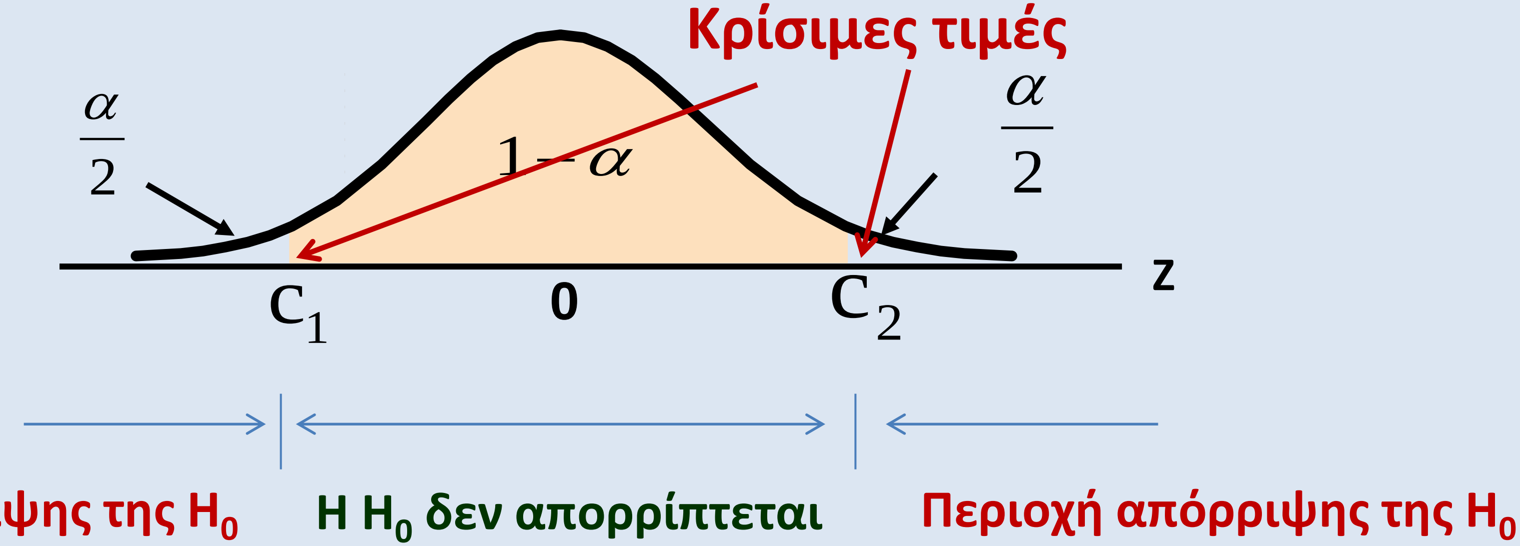
- **Κανόνας απόφασης:**

*if α > P-value => **απορρίπτουμε** την H_0*

*if α < P-value => **δεν απορρίπτουμε** την H_0*

(A3) Αμφίπλευρος έλεγχος: H_0:μ=μ_0 έναντι H_1:μ ≠ μ_0

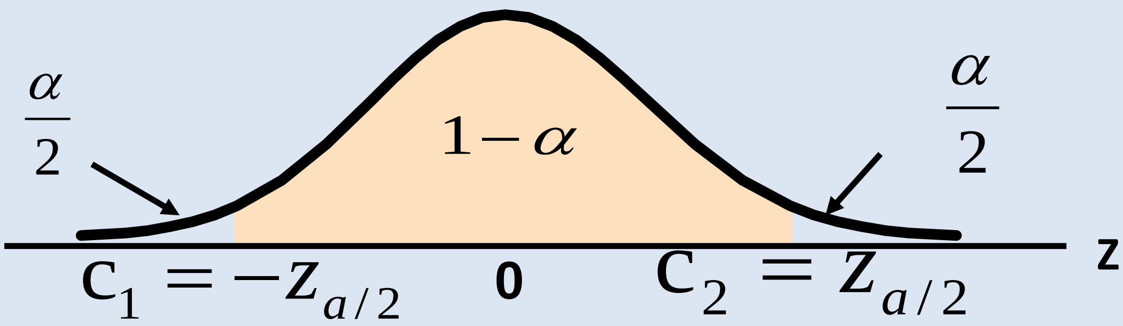
- Κατασκευή της **περιοχής απόρριψης** με βάση τη γνωστή κατανομή της Y υποθέτοντας ότι H_0 αληθής



$$P(Y < c_1 \ \& \ Y > c_2 \mid H_0 \text{ is true}) = a \Rightarrow P(Y < c_1 \ \& \ Y > c_2 \mid \mu = \mu_0) = a$$

όπου ***c_1* c_2 δύο σταθερές** που θα προσδιοριστούν με βάση τον βαθμό σημαντικότητας ***a***.

$$P(\text{reject } H_0 | \mu = \mu_0) = P(Y < c_1 \,\&\, Y > c_2 | \mu = \mu_0) = a$$



$$P(Y < c_1 \mid \mu = \mu_0) = \frac{a}{2} \Rightarrow P(Y > c_1 \mid \mu = \mu_0) = 1 - \frac{a}{2} \Rightarrow c_1 = z_{1-a/2} = -z_{a/2}$$

$$P(Y > c_2 \mid \mu = \mu_0) = \frac{a}{2} \Rightarrow c_2 = z_{a/2}$$

- άρα **περιοχή απόρριψης** **(κανόνας απόφασης)**

$$Y = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$

$$Y \geq z_{a/2} \Rightarrow \overline{X} \geq \mu_0 + \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} z_{a/2}$$

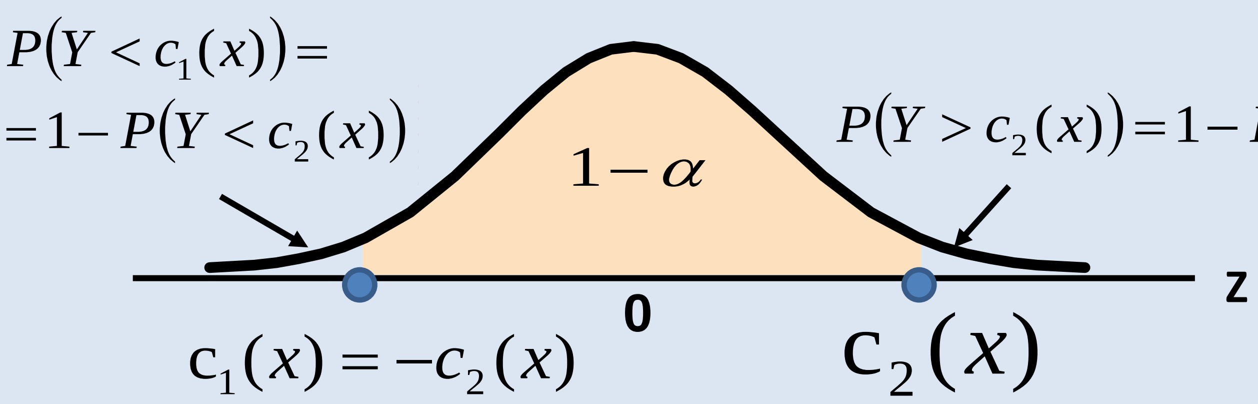
και

$$Y \leq -z_{a/2} \overline{X} \leq \mu_0 - \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} z_{a/2}$$

Υπολογισμός της P-value

- Έστω τυχαίο δείγμα *X* με δειγματικό μέσο $\overline{X}$ Υπολογίζουμε την **πιθανότητα η παραπάνω τιμή να είναι ακραία**.
- Βρίσκω τις δύο ακραίες από το δείγμα

$$c_2(x) = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma_0 / \sqrt{n}} \ , \ c_1(x) = -c_2(x)$$



Υπολογισμός της P-value

- Για τυχαίο δείγμα *X* με δειγματικό μέσο $\bar{X}$ υπολογίζουμε την πιθανότητα η παραπάνω τιμή να είναι ακραία.

- Βρίσκουμε τις δύο ακραίες από το δείγμα

$$\boldsymbol{c_2(x)} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} \quad , \quad \boldsymbol{c_1(x)} = -c_2(x)$$

- Τότε

$$\boldsymbol{P - value} = P(Y < \boldsymbol{c_1}|\mu = \mu_0) + P(Y > \boldsymbol{c_2}|\mu = \mu_0) =$$
$$= \Phi(\boldsymbol{c_1(x)}) + 1 - \Phi(\boldsymbol{c_2(x)}) = 2\left(1 - \Phi(\boldsymbol{c_2(x)})\right)$$
$$= 2\left(1 - \Phi\left(\frac{\boldsymbol{\bar{X}} - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right)\right) = 2\Phi\left(\frac{\mu_0 - \boldsymbol{\bar{X}}}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right)$$

z-test

- Έλεγχος για μέσο ***μ*** με **γνωστή διασπορά (σ^2_0)**

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$H_1 = \mu_1 > \mu_0$	$H_1 = \mu_1 < \mu_0$	$H_1 = \mu_1 \neq \mu_0$
$\bar{X} \geq \mu_0 + \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} z_a$	$\bar{X} \leq \mu_0 - \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} z_a$	$\bar{X} \geq \mu_0 + \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} z_{a/2}$ $\bar{X} \leq \mu_0 - \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} z_{a/2}$

t-test

(B). Έλεγχος υποθέσεων για το μέσο (μ) με άγνωστη διασπορά (σ^2)

- Έστω τυχαίο δείγμα $\boldsymbol{X}=\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ όπου υποθέτουμε ότι προέρχεται από κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma_0^2)$, με **άγνωστο μέσο *μ*** και **άγνωστη διασπορά.**

- Στατιστικός έλεγχος για το μ χρησιμοποιώντας **επίπεδο σημαντικότητας α**

- Βασιζόμαστε στο γνωστό αποτέλεσμα:

$$Y = \frac{\bar{X} - \mu}{S / \sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

όπου S^2 η δειγματική διασπορά:

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X} \right)^2$$

- **Παρόμοια με το *z-test***, για τις 3 πιθανές εναλλακτικές υποθέσεις έχουμε τις κρίσιμες περιοχές (περιοχές απόρριψης):
- **t-test**

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$H_1 = \mu_1 > \mu_0$	$H_1 = \mu_1 < \mu_0$	$H_1 = \mu_1 \neq \mu_0$
$\overline{X} \geq \mu_0 + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1}(a)$	$\overline{X} \leq \mu_0 - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1}(a)$	$\overline{X} \geq \mu_0 + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1}(a/2)$ $\overline{X} \leq \mu_0 - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1}(a/2)$

Έλεγχος υποθέσεων για τη διασπορά (σ^2)

- **1η Περίπτωση**: μέσος ***μ άγνωστος***, τότε χρησιμοποιούμε το αποτέλεσμα:

$$Y = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim X_{n-1}^2$$

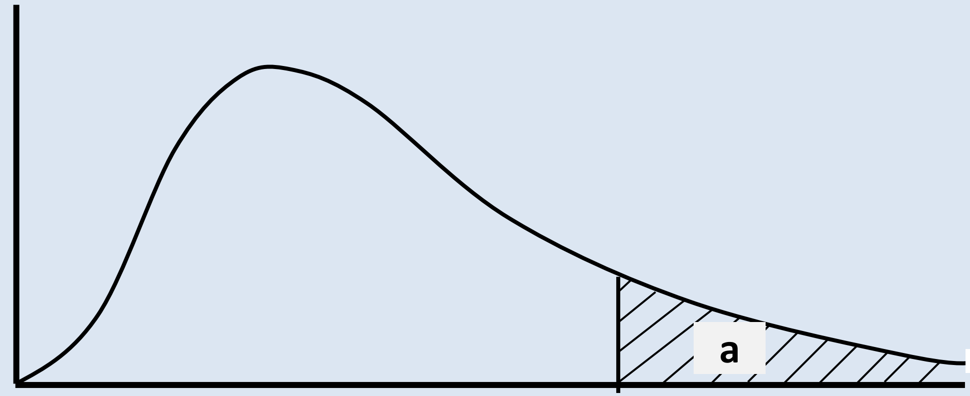
- **2η Περίπτωση**: μέσος ***μ γνωστός*** τότε χρησιμοποιούμε το αποτέλεσμα:

$$Y = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2}{\sigma^2} \sim X_n^2$$

(Γ) Έλεγχος υποθέσεων για τη διασπορά (σ^2) με άγνωστο μέσο (μ)

(γ1) $H_1 = \sigma^2 > \sigma^2_0$

$$Y = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim X^2_{n-1}$$



$$c = \chi^2_{n-1}(a)$$

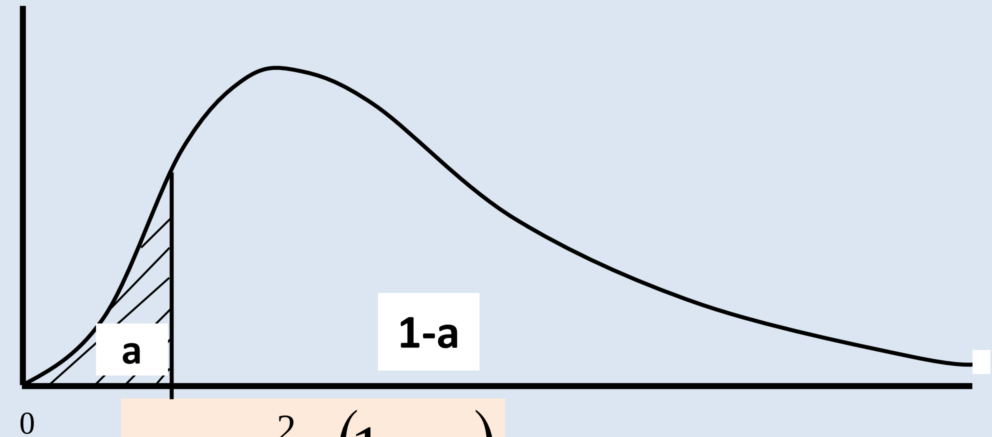
$$P(Y > c \mid H_0 \text{ is true}) = a \Rightarrow P(Y > c \mid \sigma = \sigma_0) = a$$

Κρίσιμη περιοχή (*περιοχή απόρριψης*):

$$Y > c \Rightarrow \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} > \chi^2_{n-1}(a) \Rightarrow \boxed{S^2 \geq \frac{\sigma_0^2}{n-1}\chi^2_{n-1}(a)}$$

(γ2) $H_1 = \sigma^2 < \sigma^2_0$

$$Y = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim X^2_{n-1}$$



$$c = \chi^2_{n-1}(1-a)$$

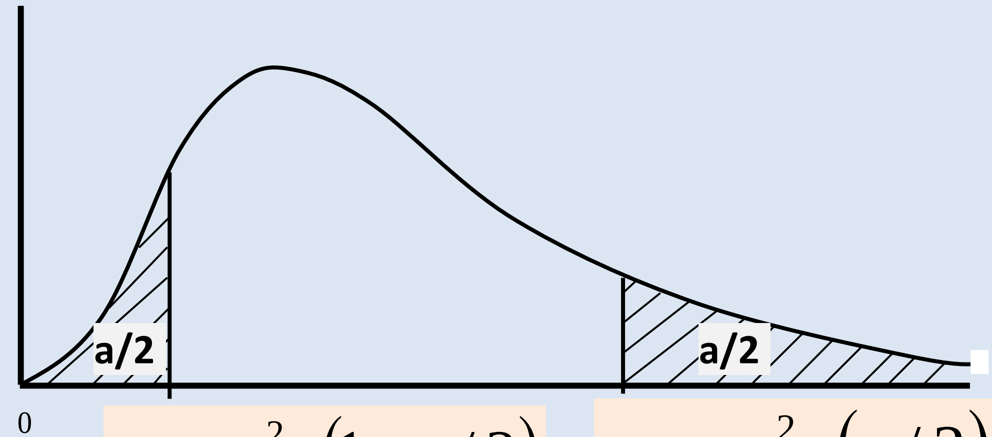
$$P(Y < c \mid H_0 \text{ is true}) = a \Rightarrow P(Y < c \mid \sigma = \sigma_0) = a$$

Κρίσιμη περιοχή (*περιοχή απόρριψης*):

$$Y < c \Rightarrow \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{n-1}(1-a) \Rightarrow \boxed{S^2 \leq \frac{\sigma_0^2}{n-1}\chi^2_{n-1}(1-a)}$$

(γ3) $H_1 = \sigma^2 \neq \sigma^2_0$

$$Y = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \mathrm{X}^2_{n-1}$$



$$c_1 = \chi^2_{n-1}(1-a/2) \qquad c_2 = \chi^2_{n-1}(a/2)$$

$$P(Y > c_2 \mid H_0 \text{ is true}) = a/2 \qquad S^2 \geq \frac{\sigma_0^2}{n-1}\chi^2_{n-1}(a/2)$$

$$P(Y < c_1 \mid H_0 \text{ is true}) = a/2 \qquad S^2 \leq \frac{\sigma_0^2}{n-1}\chi^2_{n-1}(1-a/2)$$

Έλεγχος Υποθέσεων για την διασπορά σ²

		Περίπτωση θ>θ0	Περίπτωση θ < θ0	Περίπτωση θ ≠ θ0
(Γ)	Διασπορά με **άγνωστό μέσο**	$S^2 \geq \frac{\sigma_0^2}{n-1} x_{n-1}^2(a)$	$S^2 \leq \frac{\sigma_0^2}{n-1} x_{n-1}^2(1-a)$	$S^2 \geq \frac{\sigma_0^2}{n-1} x_{n-1}^2(a/2)$ $S^2 \leq \frac{\sigma_0^2}{n-1} x_{n-1}^2(1-a/2)$
	εναλλακτικά	$\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \ddot{X}\right)^2 \geq \sigma_0^2 \chi_{n-1}^2(a)$	$\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \ddot{X}\right)^2 \leq \sigma_0^2 \chi_{n-1}^2(1-a)$	$\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \ddot{X}\right)^2 \geq \sigma_0^2 \chi_{n-1}^2(a/2)$ $\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \ddot{X}\right)^2 \leq \sigma_0^2 \chi_{n-1}^2(1-a/2)$

(Δ) Έλεγχος υποθέσεων για τη διασπορά (σ^2) με γνωστό μέσο μ

Χρησιμοποιώντας το $$Y = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2}{\sigma^2} \sim X_n^2$$

και δουλεύοντας **με παρόμοιο τρόπο** βρίσκουμε για τις 3 πιθανές εναλλακτικές υποθέσεις:

(δ1) $H_1 = \sigma^2 > \sigma^2_0$	(δ2) $H_1 = \sigma^2 < \sigma^2_0$	(δ3) $H_1 = \sigma^2 \neq \sigma^2_0$
$\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 \geq \sigma_0^2 \chi_n^2(a)$	$\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 \leq \sigma_0^2 \chi_n^2(1-a)$	$\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 \geq \sigma_0^2 \chi_n^2(a/2)$ $\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2 \geq \sigma_0^2 \chi_n^2(1-a/2)$

(Ε) Έλεγχος υποθέσεων για το ποσοστό (ρ)

- Έστω δείγμα $X=\{x_1, x_2, \ldots, x_n)$ από ***n Bernoulli*** **μεταβλητές** x_i, δηλ. με δυαδικές τιμές $\in \{0,1\}$.

- Με βάση το Κ.Ο.Θ. ο δειγματικός μέσος είναι κανονικός:

$$\bar{X} \sim N\left(\boldsymbol{\rho}, \frac{\boldsymbol{\rho(1-\rho)}}{n}\right) = N\left(\boldsymbol{\mu}, \frac{\boldsymbol{\sigma^2}}{n}\right)$$

➢ Ο έλεγχος του ποσοστού είναι μία περίπτωση στατιστικού ελέγχου ***z-test***

- Βρίσκουμε εύκολα για τις **3 πιθανές υποθέσεις**:

(ε1) $H_1 = \rho > \rho_0$	***(ε2) $H_1 = \rho < \rho_0$***	***(ε3) $H_1 = \rho \neq \rho_0$***
$\overline{X} \geq \rho_0 + \frac{\sqrt{\rho_0(1-\rho_0)}}{\sqrt{n}} z_a$	$\overline{X} \leq \rho_0 - \frac{\sqrt{\rho_0(1-\rho_0)}}{\sqrt{n}} z_a$	$\overline{X} \geq \rho_0 + \frac{\sqrt{\rho_0(1-\rho_0)}}{\sqrt{n}} z_{a/2}$ $\overline{X} \leq \rho_0 - \frac{\sqrt{\rho_0(1-\rho_0)}}{\sqrt{n}} z_{a/2}$

Θυμίζουμε το ***z-test*** $\mu_0 = \rho_0 \quad \kappa\alpha\iota \quad \sigma_0 = \rho_0(1-\rho_0)$

$H_1 = \mu_1 > \mu_0$	***$H_1 = \mu_1 < \mu_0$***	***$H_1 = \mu_1 \neq \mu_0$***
$\overline{X} \geq \mu_0 + \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} z_a$	$\overline{X} \leq \mu_0 - \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} z_a$	$\overline{X} \geq \mu_0 + \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} z_{a/2}$ $\overline{X} \leq \mu_0 - \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} z_{a/2}$

Έλεγχος Υποθέσεων ανά περίπτωση

		Περίπτωση θ>θ0	Περίπτωση θ < θ0	Περίπτωση θ ≠ θ0
(Α)	**Μέσο** με γνωστή διασπορά σ	$\overline{X} \geq \mu_0 + \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} z_a$	$\overline{X} < \mu_0 - \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} z_a$	$\overline{X} \geq \mu_0 + \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} z_{a/2}$ $\overline{X} \leq \mu_0 - \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} z_{a/2}$
(Β)	Μέσο με άγνωστη διασπορά σ	$\overline{X} \geq \mu_0 + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1}(a)$	$\overline{X} \leq \mu_0 - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1}(a)$	$\overline{X} \geq \mu_0 + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1}(a/2)$ $\overline{X} \leq \mu_0 - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1}(a/2)$
(Γ)	**Διασπορά** με γνωστό μέσο	$\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 \geq \sigma_0^2 \chi_n^2(a)$	$\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 \leq \sigma_0^2 \chi_n^2(1-a)$	$\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 \geq \sigma_0^2 \chi_n^2(a/2)$ $\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 \geq \sigma_0^2 \chi_n^2(1-a/2)$
(Δ)	Διασπορά με άγνωστο μέσο	$S^2 \geq \frac{\sigma_0^2}{n-1} x_{n-1}^2(a)$	$S^2 \leq \frac{\sigma_0^2}{n-1} x_{n-1}^2(1-a)$	$S^2 \geq \frac{\sigma_0^2}{n-1} x_{n-1}^2(a/2)$ $S^2 \leq \frac{\sigma_0^2}{n-1} x_{n-1}^2(1-a/2)$
(Ε)	**Ποσοστό** ρ	$\overline{X} \geq \rho_0 + \frac{\sqrt{\rho_0(1-\rho_0)}}{\sqrt{n}} z_a$	$\overline{X} \leq \rho_0 - \frac{\sqrt{\rho_0(1-\rho_0)}}{\sqrt{n}} z_a$	$\overline{X} \geq \rho_0 + \frac{\sqrt{\rho_0(1-\rho_0)}}{\sqrt{n}} z_{a/2}$ $\overline{X} \leq \rho_0 - \frac{\sqrt{\rho_0(1-\rho_0)}}{\sqrt{n}} z_{a/2}$
(ΣΤ)	**Διαφορά μέσων** με γνωστές διασπορές	$\overline{X} - \overline{Y} \geq \delta + \left(\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right) z_a$	$\overline{X} - \overline{Y} \leq \delta - \left(\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right) z_a$	$\overline{X} - \overline{Y} \geq \delta + \left(\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right) z_{a/2}$ $\overline{X} - \overline{Y} \leq \delta - \left(\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right) z_{a/2}$
(Ζ)	Διαφορά μέσων με άγνωστές διασπορές	$\overline{X} - \overline{Y} \geq \delta + \left(S\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\right) t_{n_1+n_2-2}(a)$	$\overline{X} - \overline{Y} \leq \delta - \left(S\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\right) t_{n_1+n_2-2}(a)$	$\overline{X} - \overline{Y} \geq \delta + \left(S\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\right) t_{n_1+n_2-2}(a/2)$ $\overline{X} - \overline{Y} \leq \delta - \left(S\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\right) t_{n_1+n_2-2}(a/2)$