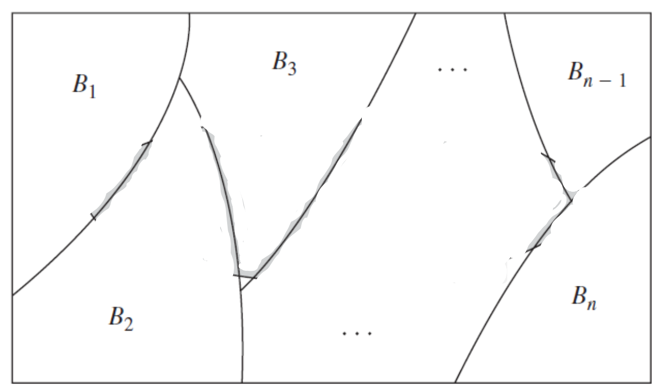
Θεώρημα της Ολικής Πιθανότητας



- **Διαμέριση:** ορίζουμε ως **διαμέριση ενός δ.χ.** ***Ω*** μία συλλογή από ***n*** **ασυμβίβαστα** μεταξύ τους (ανά ζεύγη) ενδεχόμενα που καλύπτουν όλο το ***Ω***, δηλ:

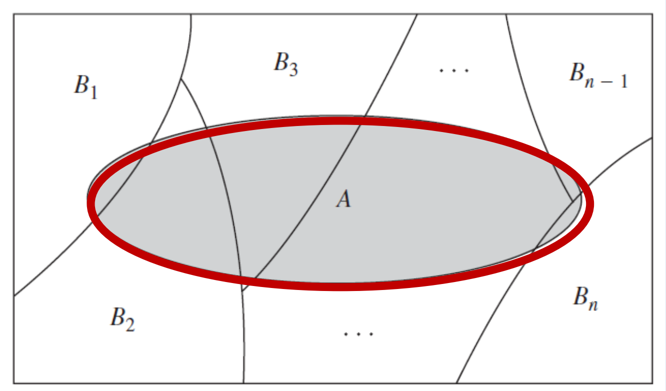
$$B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n = \Omega$$

$$B_i \cap B_j = \varnothing \quad \forall i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}, \ i \neq j$$

- Ισχύει ότι:

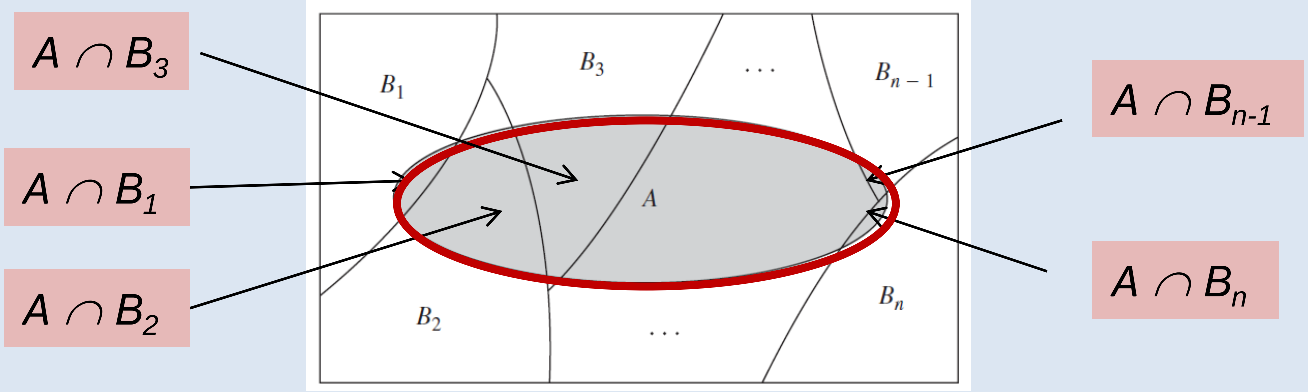
$$P(B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n) = P(B_1) + P(B_2) + \ldots + P(B_n) = 1$$

Θεώρημα της Ολικής Πιθανότητας



- Έστω σε μια διαμέριση του δ.χ. ***Ω*** σε *n* ασυμβίβαστα ενδεχόμενα **εμφανίζεται το ενδεχόμενο *Α***.
- Τότε η πιθανότητα του ενδεχομένου, ***P(A)***, ονομάζεται ***ολική πιθανότητα (total probability)*** και υπολογίζεται ως εξής:

Υπολογισμός της «Ολικής Πιθανότητας»



$$A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \cdots \cup (A \cap B_n)$$

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \cdots + P(A \cap B_n) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A \mid B_i) P(B_i)$$

εφαρμογή του πολλαπλασιαστικού τύπου

Παράδειγμα

- Η εθνική ομάδα έχει ήδη προκριθεί στον τελικό του παγκόσμιου πρωταθλήματος και περιμένει τον νικητή του ζευγαριού Γερμανία – Αγγλία, Γι' αυτό το παιχνίδι τα γραφεία στοιχημάτων δίνουν 40% πιθανότητα στην Γερμανία να προκριθεί. Επίσης, εκτιμάται ότι αν προκριθεί η Γερμανία η εθνική ομάδα έχει 60% πιθανότητα να την κερδίσει, ενώ αν προκριθεί η Αγγλία, οι πιθανότητες είναι μοιρασμένες. Ποια είναι η πιθανότητα η εθνική ομάδα να καταφέρει να κερδίσει το παγκόσμιο πρωτάθλημα;

Λύση

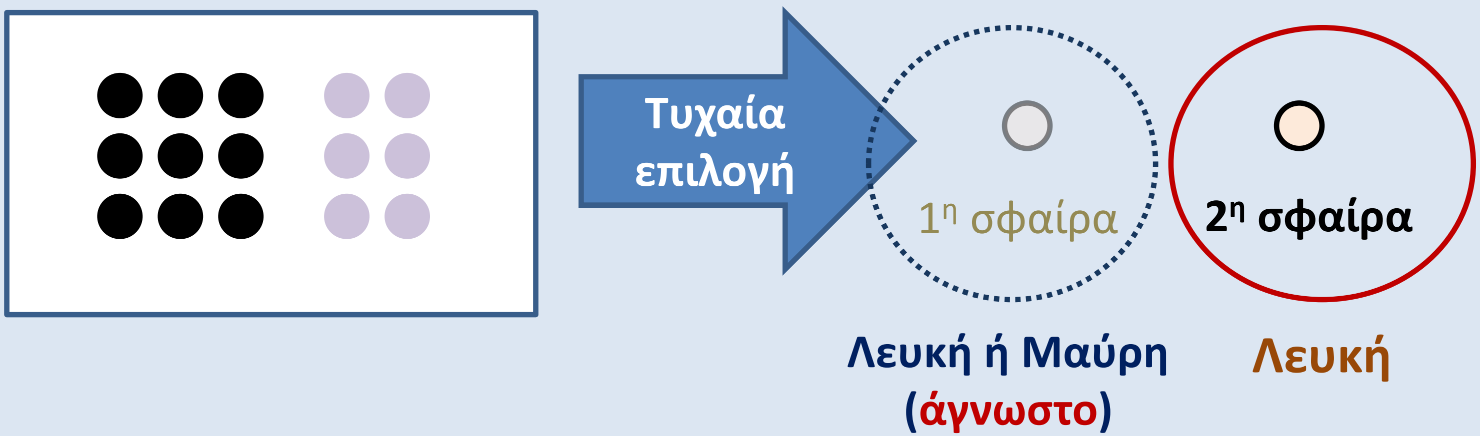
- Συμβολισμός: **Ε:** κερδίζει η εθνική, **Γ:** κερδίζει η Γερμανία, **Α:** κερδίζει η Αγγλία
- Γνωρίζουμε ότι
  - Ρ(Γ) = 0.4 και επομένως Ρ(Α)=0.6
  - Ρ(Ε|Γ) = 0.6 και Ρ(Ε|Α) = 0.5
- Ψάχνουμε την Ρ(Ε)
  - Ρ(Ε) = Ρ(Ε|Γ)Ρ(Γ) + Ρ(Ε|Α)Ρ(Α) = 0.6*0.4 + 0.5*0.6 = 0.54

<u>Παρατηρήσεις</u>

(1). **Η έννοια της ολικής πιθανότητας σε αλληλουχία πειραμάτων και πειραμάτων με <u>χρονική εξάρτηση</u>**

<u>Διαδικασία πειράματος</u>:

- Επιλέγουμε **διαδοχικά** 2 σφαίρες από κουτί με **Λ**ευκές και **Μ**αύρες σφαίρες.
- Υπολογισμός της πιθανότητας η 2η σφαίρα να είναι **Λ** (**ολική πιθανότητα**)



Παρατηρήσεις

(1). **Η έννοια της ολικής πιθανότητας σε αλληλουχία πειραμάτων και πειραμάτων με χρονική εξάρτηση**

- Υπολογισμός ολικής πιθανότητας η 2^{η} σφαίρα **Λ** (χρονική εξάρτηση)

$$
\begin{aligned}
P(\Lambda_2) &= P(\Lambda_2 \cap (\Lambda_1 \cup M_1)) = P((\Lambda_1 \cap \Lambda_2) \cup (M_1 \cap \Lambda_2)) = \\
&= P(\Lambda_1 \cap \Lambda_2) + P(M_1 \cap \Lambda_2) = P(\Lambda_2 \mid \Lambda_1) P(\Lambda_1) + P(\Lambda_2 \mid M_1) P(M_1)
\end{aligned}
$$

Παρατηρήσεις

(1). **Η έννοια της ολικής πιθανότητας σε αλληλουχία πειραμάτων και πειραμάτων με χρονική εξάρτηση**

- Υπολογισμός ολικής πιθανότητας η 2η σφαίρα **Λ** (χρονική εξάρτηση)

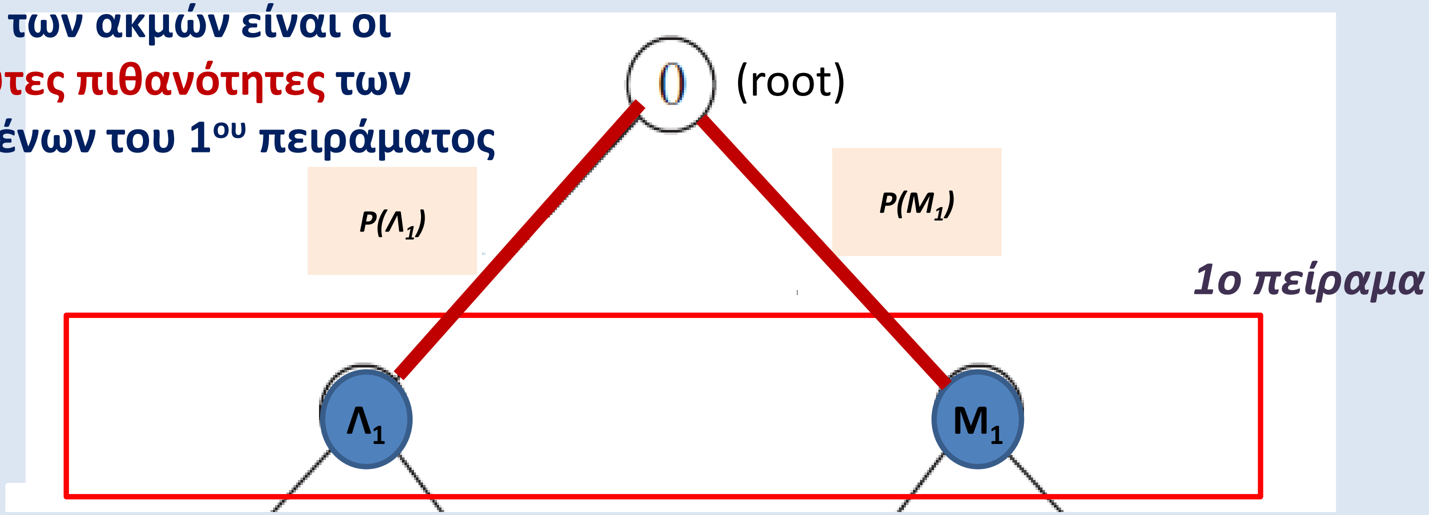
$$P(\Lambda_2) = P(\Lambda_2|\Lambda_1)\boldsymbol{P(\Lambda_1)} + P(\Lambda_2|M_1)\boldsymbol{P(M_1)}$$

$$= \boldsymbol{a_1 P(\Lambda_1)} + \boldsymbol{a_2 P(M_1)}$$

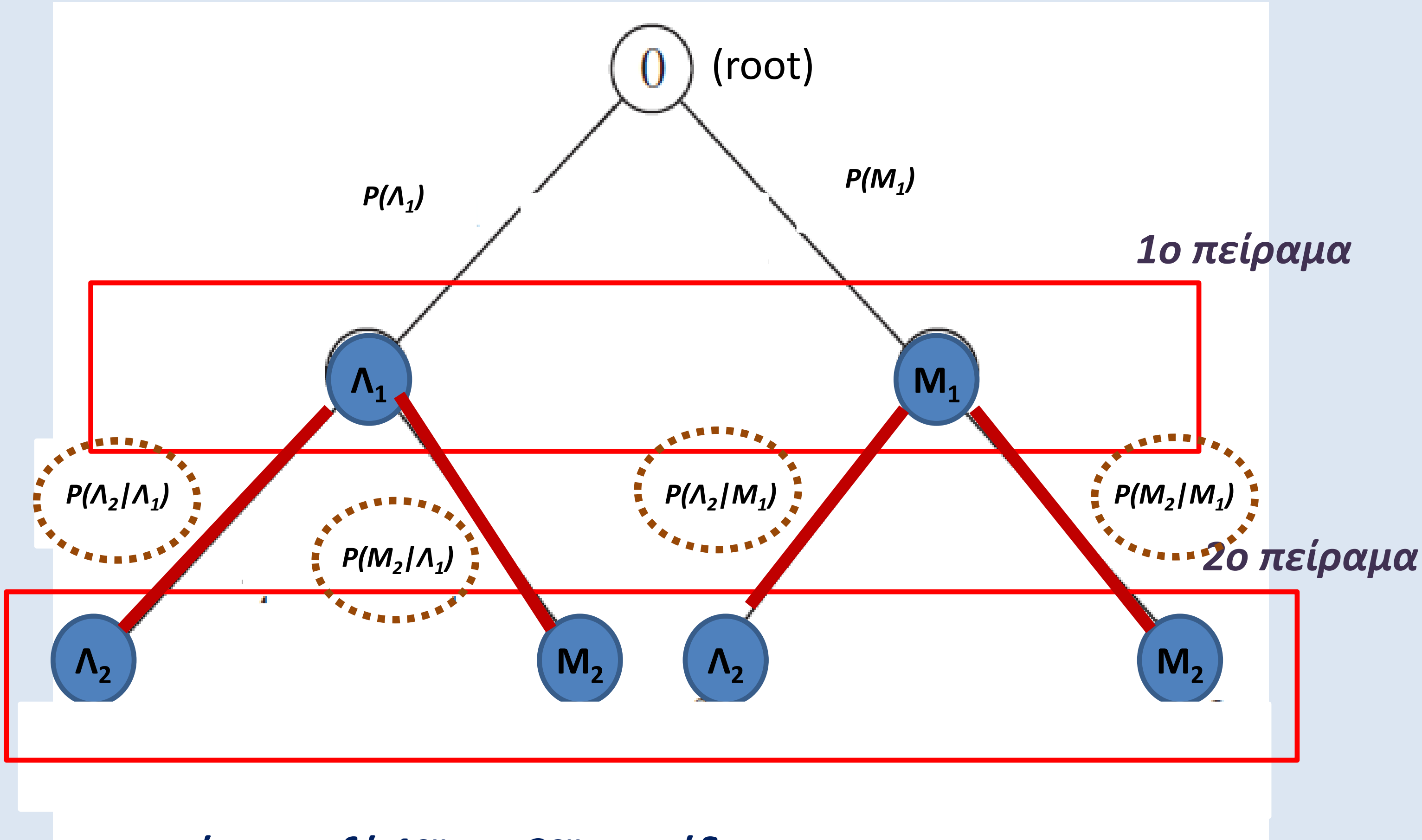
- ***Η ολική πιθανότητα ισούται με τον σταθμισμένο άθροισμα των πιθανοτήτων των ενδεχομένων (καταστάσεων) του 1ου πειράματος***
- Τα «**βάρη**» των όρων του αθροίσματος είναι οι **δεσμευμένες πιθανότητες** του ενδεχομένου με τα ενδεχόμενα του 1ου πειράματος

(2). Κατασκευή του **δέντρου καταστάσεων** του πειράματος

Τα βάρη των ακμών είναι οι αδέσμευτες πιθανότητες των ενδεχομένων του 1ου πειράματος

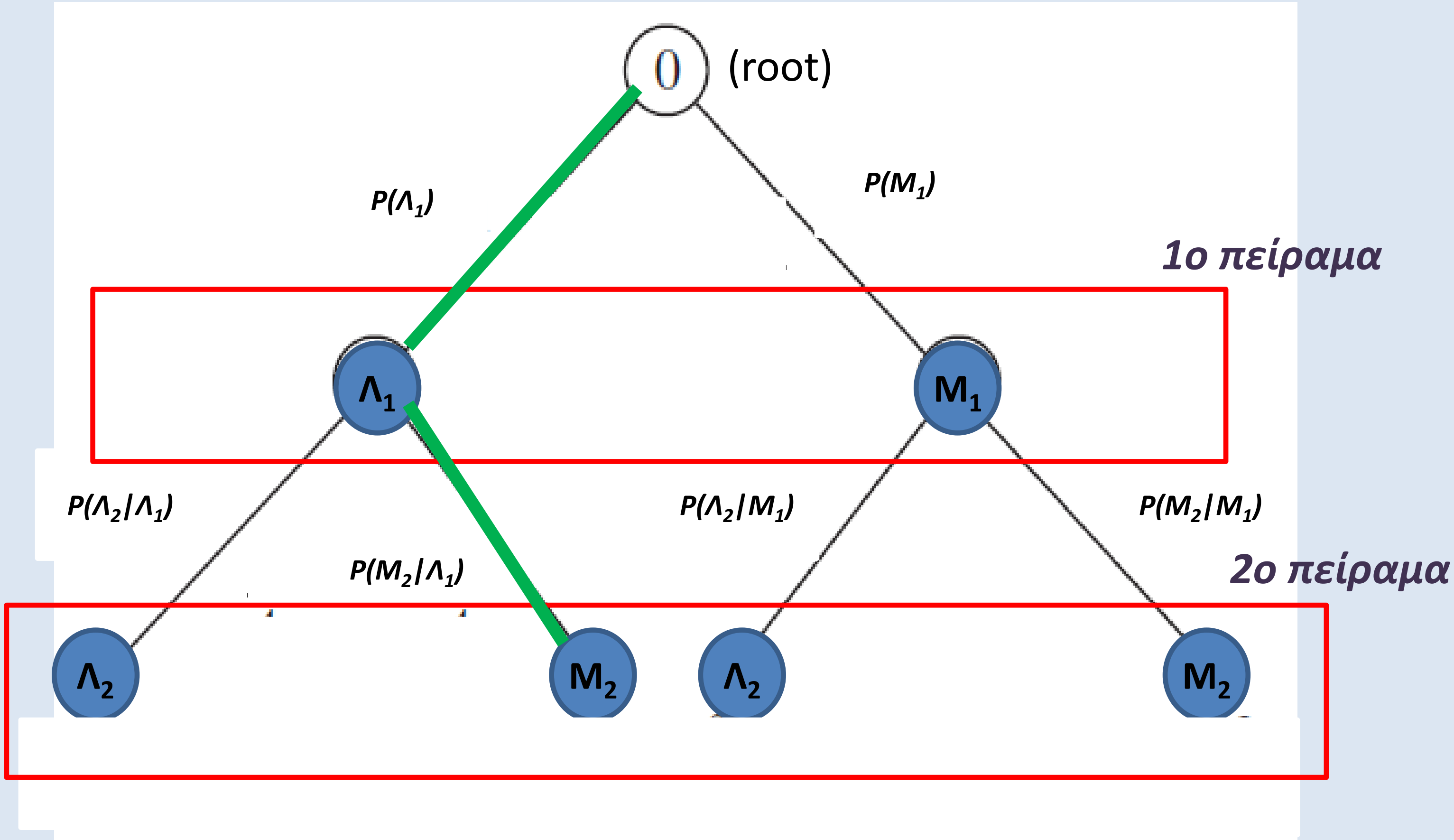


(2). Κατασκευή του **δέντρου καταστάσεων** του πειράματος



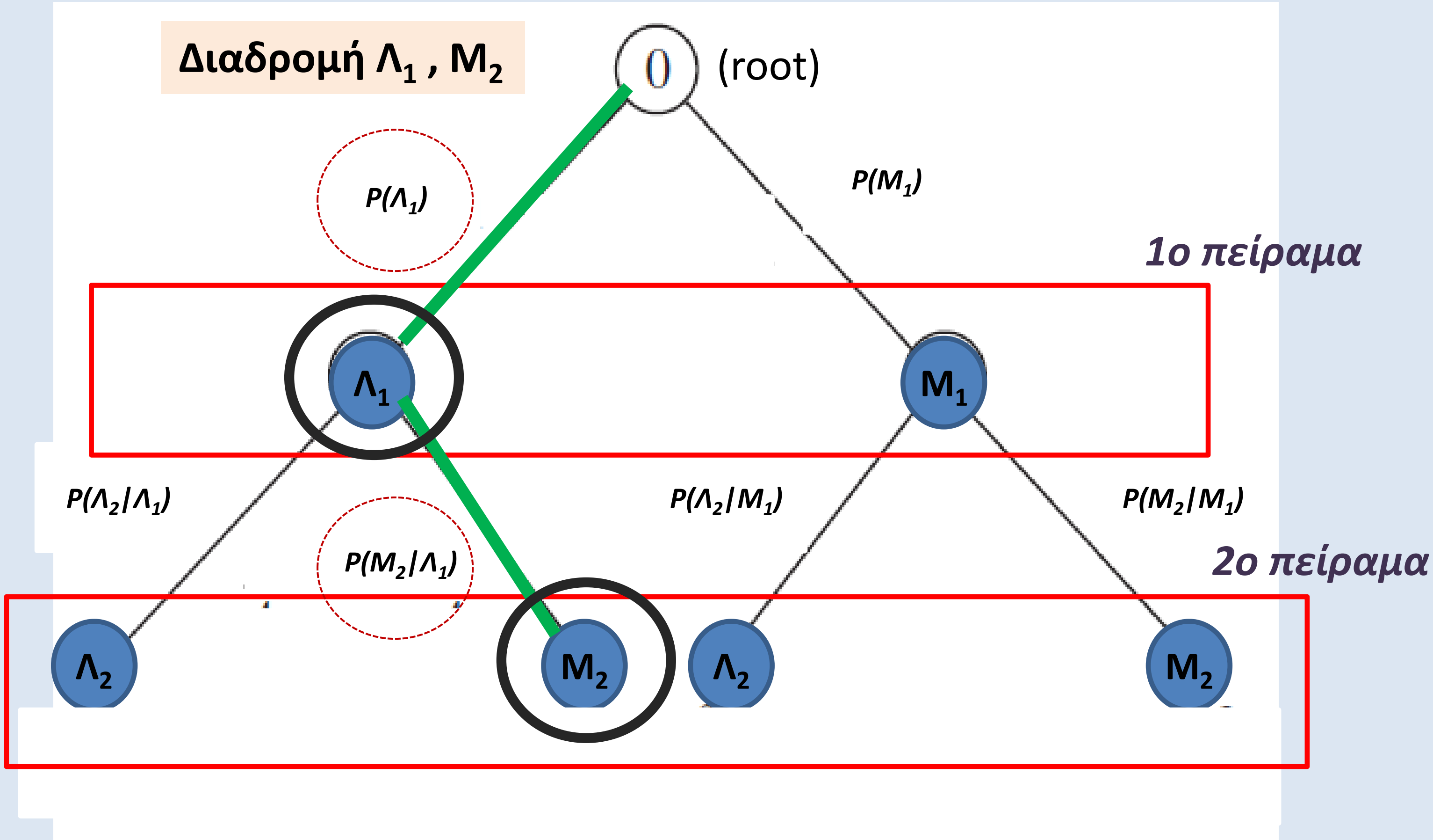
Τα βάρη των ακμών μεταξύ 1ου και 2ου επιπέδου (ή πειράματος) είναι οι δεσμευμένες πιθανότητες

(2). Χρήση του **δέντρου καταστάσεων** του πειράματος



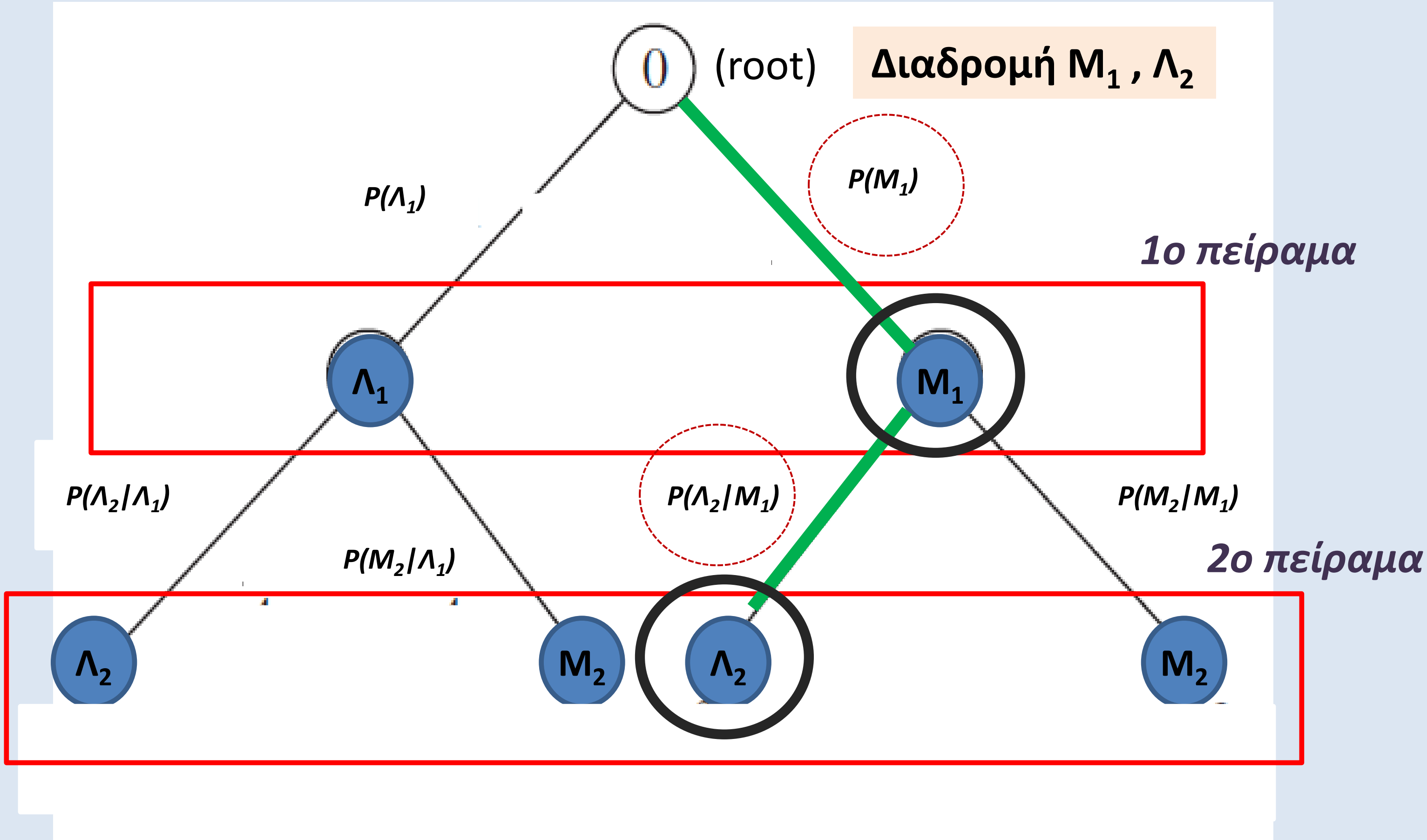
Κάθε **μονοπάτι από την ρίζα έως τα φύλλα** του δέντρου περιγράφει μία ολοκληρωμένη πειραματική διαδικασία ως μία **αλληλουχία επισκέψεων καταστάσεων** (ή κόμβων) **του δέντρου σε κάθε επίπεδο**.

(2). Χρήση του **δέντρου καταστάσεων** του πειράματος



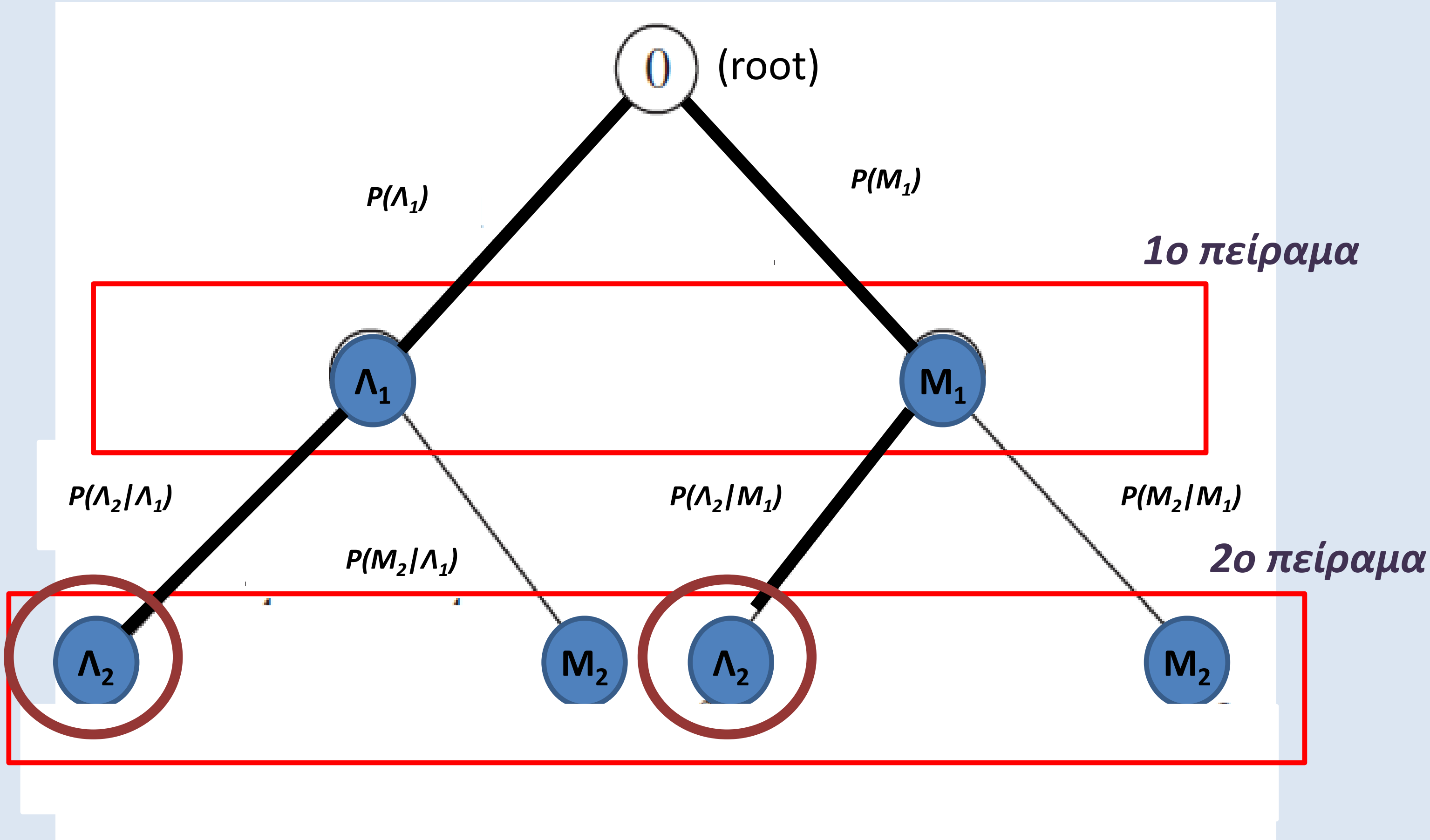
$$P(\Lambda 1 \cap M2) = P(\Lambda 1 , M2) = P(\Lambda 1) * P(M2|\Lambda 1)$$

(2). Χρήση του **δέντρου καταστάσεων** του πειράματος



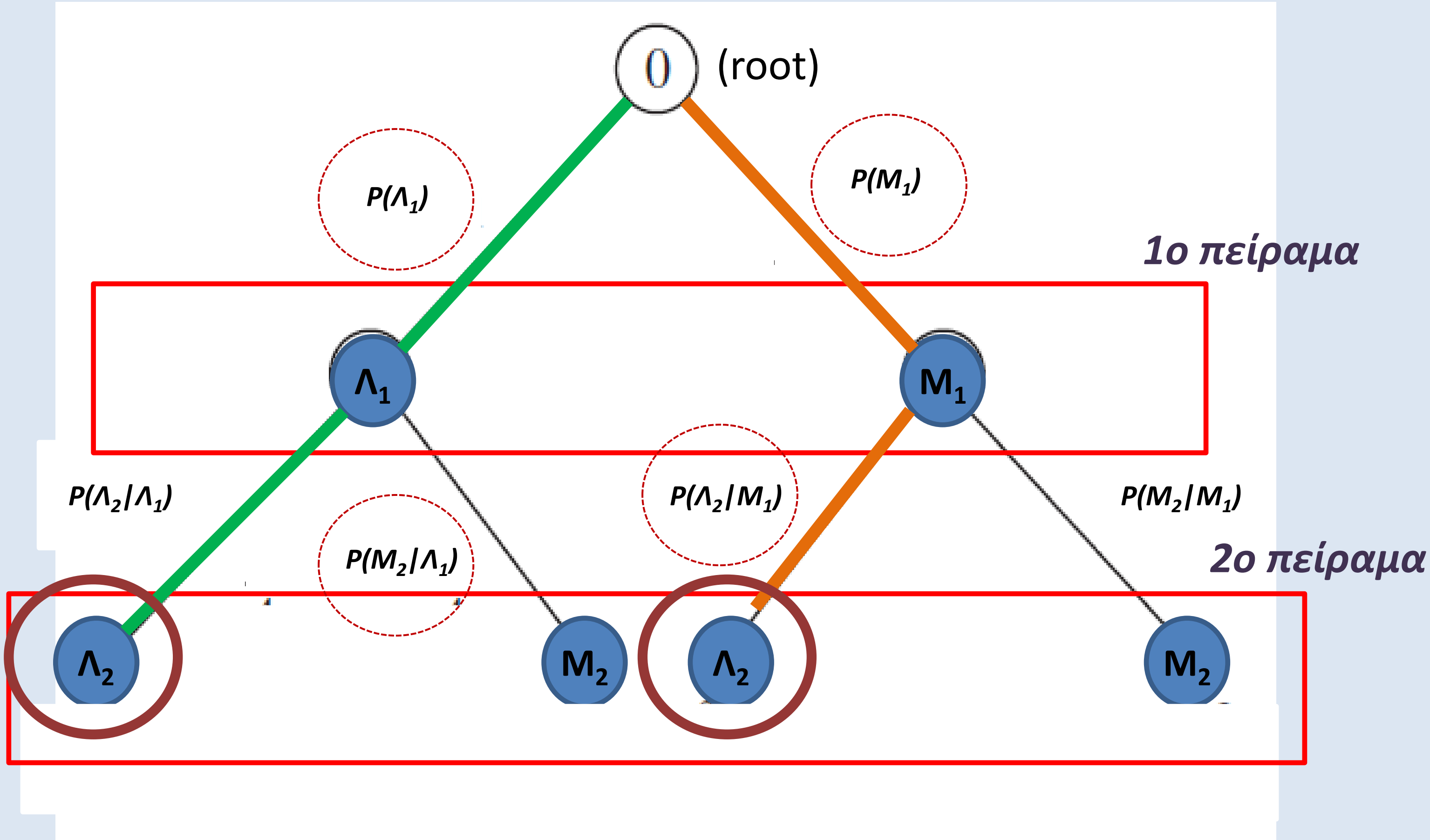
$$P(M1 , Λ2) = P(M1) * P(Λ2|M1)$$

(2). Χρήση του **δέντρου καταστάσεων** του πειράματος



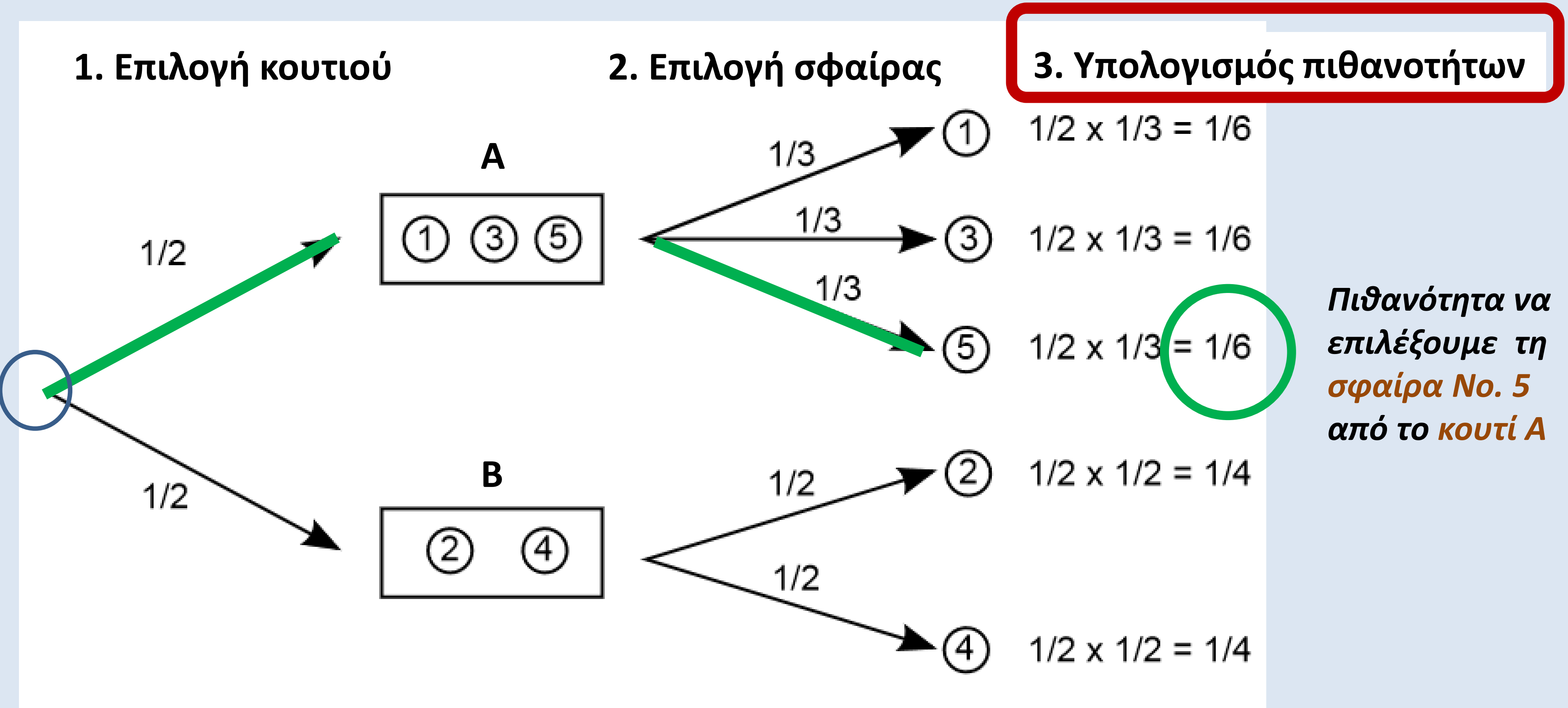
P(Λ2) = σημειώνουμε τα **μονοπάτια** από τη ρίζα ως τα **φύλλα με ετικέτα** $\boldsymbol{Λ_2}$

(2). Χρήση του **δέντρου καταστάσεων** του πειράματος



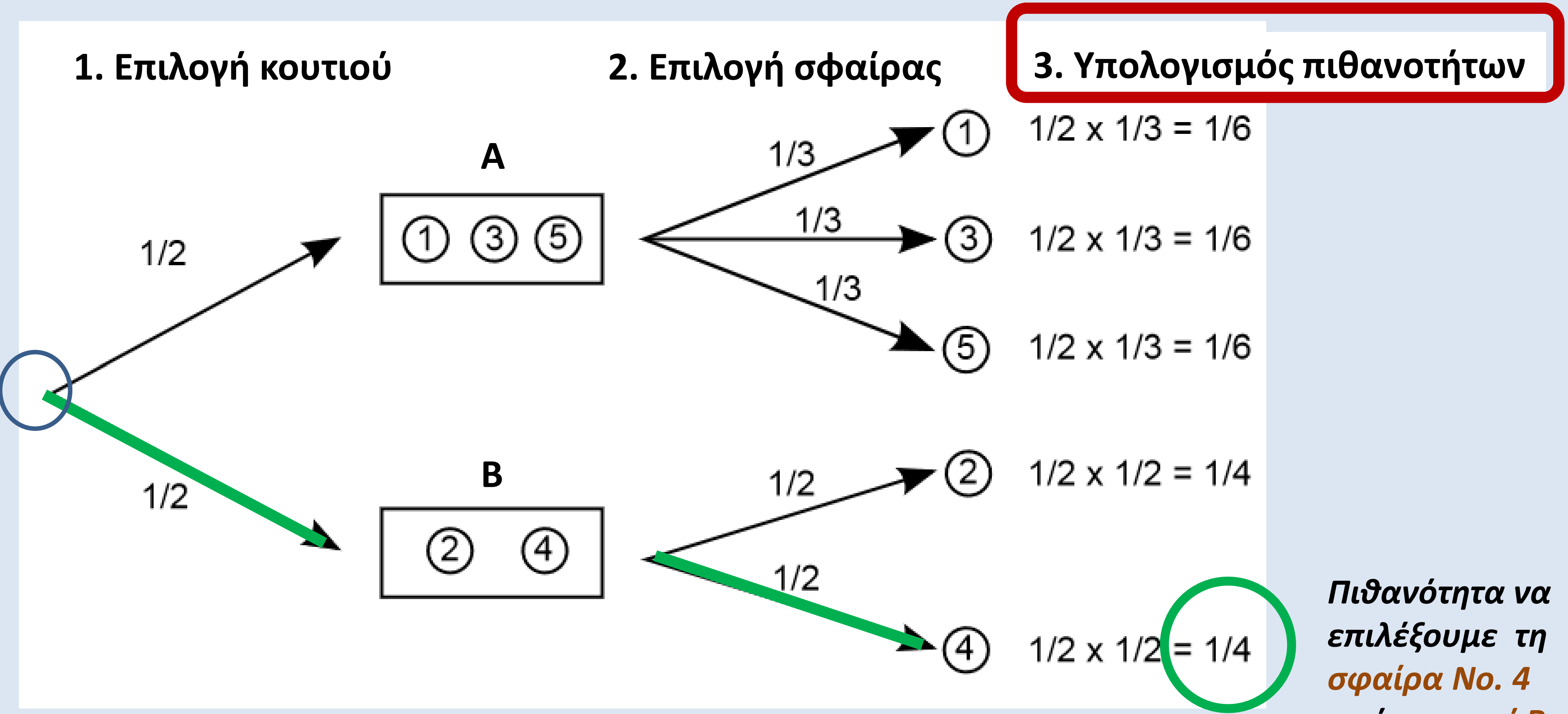
$$P(\Lambda 2) = P(\Lambda_1 \cap \Lambda_2) + P(M_1 \cap \Lambda_2) = P(\Lambda_1)P(\Lambda_2|\Lambda_1) + P(M_1)P(\Lambda_2|M_1)$$

(3) **Δέντρο καταστάσεων** του πειράματος: **<u>επιλογή σφαίρας από 2 κουτιά</u>**



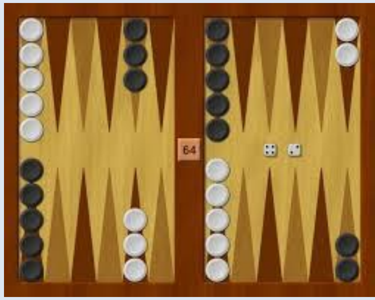
Πιθανότητα να επιλέξουμε τη σφαίρα No. 5 από το κουτί Α

(3) **Δέντρο καταστάσεων** του πειράματος: **<u>επιλογή σφαίρας από 2 κουτιά</u>**



Πιθανότητα να επιλέξουμε τη σφαίρα No. 4 από το κουτί B

(4) Δέντρο καταστάσεων σε παιχνίδια (**computer games**)

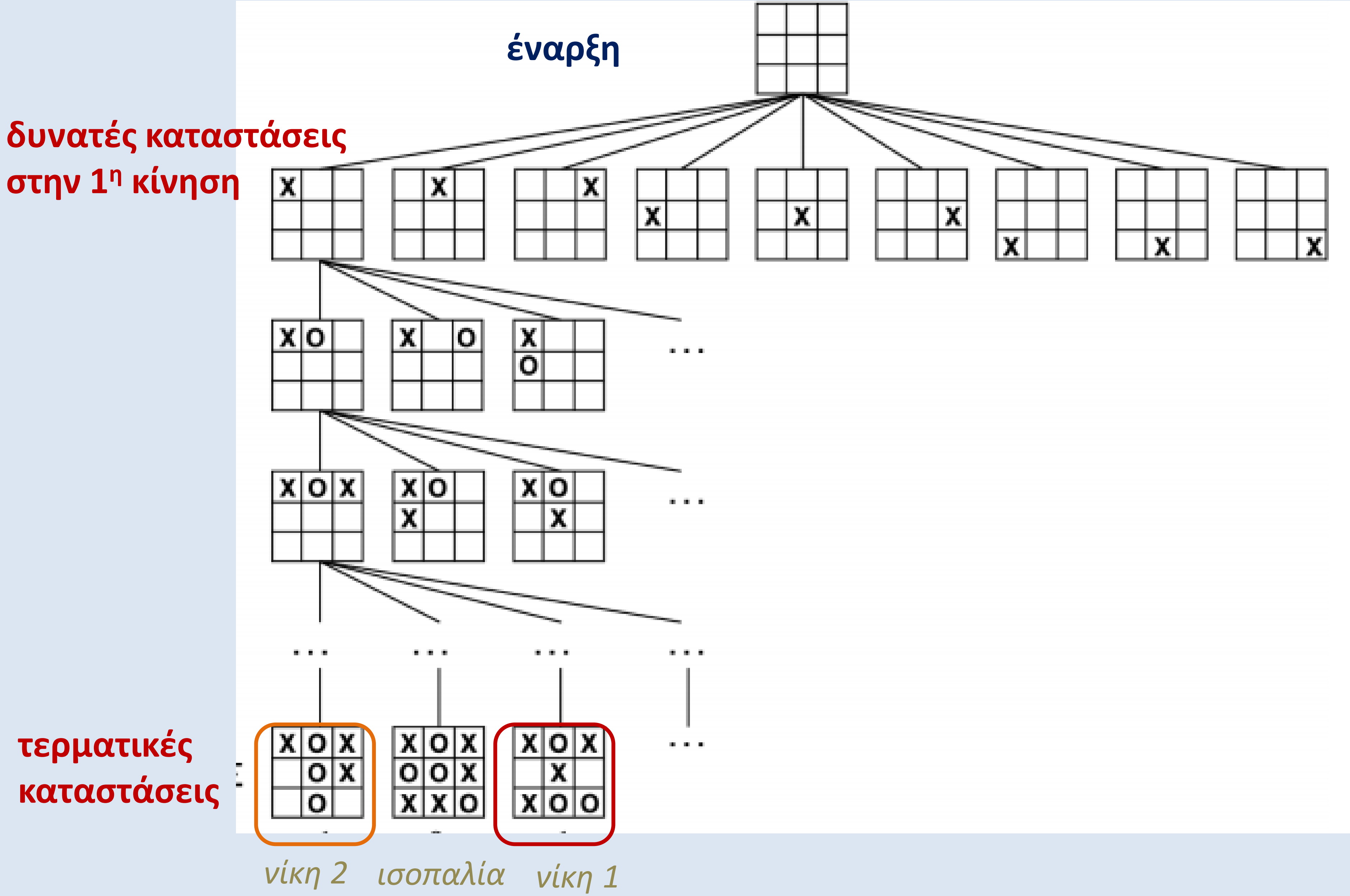


- Το **δέντρο παιχνιδιού** (***game tree***) ορίζεται από την αρχική κατάσταση και τις «νόμιμες» δυνατές κινήσεις που μπορούν να συμβούν σε κάθε βήμα εξέλιξης του παιχνιδιού.

- Παρουσιάζει όλες τις δυνατές εκβάσεις ενός παιχνιδιού, αφού περιέχει όλες τις δυνατές ακολουθίες κινήσεων **ενός παίκτη ή μεταξύ δύο παικτών**.

- Καθώς, η αναζήτηση πολλές φορές είναι απαγορευτική σε χρόνο, συχνά χρησιμοποιούνται **αλγόριθμοι ευρετικής αναζήτησης**, όπως π.χ. ο **αλγόριθμος MiniMax.**

Παράδειγμα κατασκευής δέντρου παιχνιδιού τρίλιζας



Ο Κανόνας (ή Νόμος) του **Bayes**

(Thomas Bayes – 1702-61)

Κατάλογος λημμάτων
Προβεβλημένα λήμματα
Τρέχοντα γεγονότα
Τυχαίο λήμμα

Συμμετοχή

Βοήθεια
Πύλη Κοινότητας
Αγορά
Πρόσφατες αλλαγές
Επικοινωνία
Δωρεές

Εργαλεία

Συνδέσεις προς εδώ
Σχετικές αλλαγές
Ειδικές σελίδες
Σταθερός σύνδεσμος
Πληροφορίες σελίδας
Αντικείμενο Wikidata
Παραπομπή

Εκτύπωση/εξαγωγή

Δημιουργία βιβλίου
Κατέβασμα ως PDF
Έκδοση εκτύπωσης

Σε άλλα εγχειρήματα

Τόμας Μπέιζ

Από τη Βικιπαίδεια, την ελεύθερη εγκυκλοπαίδεια

Ο **Τόμας Μπέυζ** (*Thomas Bayes* περ. 1701 – 7 Απριλίου 1761) Βρετανός κληρικός και μαθηματικός, γιος πρεσβυτεριανού ιερέα, έγινε γνωστός μετά θάνατον ως θεμελιωτής μιας ειδικής περίπτωσης του θεωρήματος του Μπέυζ.

Γεννήθηκε στο Λονδίνο και σπούδασε Θεολογία και Λογική στο πανεπιστήμιο του Εδιμβούργου (1719), καθώς ως αντικονφορμιστής δεν μπορούσε να σπουδάσει στο πανεπιστήμιο της Οξφόρδης και του Κέιμπριτζ. Ακολουθώντας τα βήματα του πατέρα του έγινε και ο ίδιος πρεσβυτεριανός ιερέας. Έζησε στο Τάνμπριτζ Γουέλς του Κεντ και ασχολήθηκε, εκτός από τη θεολογία, με τα μαθηματικά και τις φυσικές επιστήμες. Εν ζωή δημοσίευσε δύο έργα:

- *Divine Benevolence, or an Attempt to Prove That the Principal End of the Divine Providence and Government is the Happiness of His Creatures* (1731),
- *An Introduction to the Doctrine of Fluxions, and a Defence of the Mathematicians Against the Objections of the Author of the Analyst* (εκδόθηκε ανώνυμα το 1736). Εδώ υπεραμύνθηκε του λογισμού του Νεύτωνα ενάντια στην κριτική του Τζορτζ Μπέρκλεϊ).

Η Στατιστική τον απασχόλησε ιδιαίτερα, αλλά το μεγαλύτερο μέρος του έργου του στον συγκεκριμένο τομέα είδε το φως της δημοσιότητας μετά το θάνατό του. Ιδιαίτερα σημαντικό είναι ένα δοκίμιό του με τίτλο "An Essay towards solving a Problem in the Doctrine of Chances".

Ο Μπέυζ πέθανε στο Τάνμπριτζ Γουέλς και ετάφη στο κοιμητήριο Μπάνχιλ Φιλντς του Λονδίνου, τόπο ταφής πολλών αντικονφορμιστών.

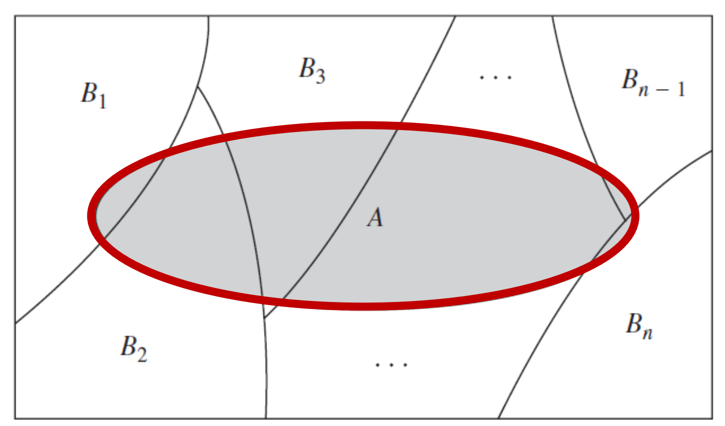
Τόμας Μπέυζ

Όνομα στη μητρική γλώσσα	Reverend Thomas Bayes (Αγγλικά)
Γέννηση	1702[1][2] Λονδίνο
Θάνατος	7 Απριλίου 1761 και 17 Απριλίου 1761[1] Τάνμπριτζ Γουέλς
Εθνικότητα	Άγγλοι

Ο Κανόνας (ή Νόμος) του **Bayes**
(Thomas Bayes – 1702-61)

Έστω **δ.χ. *Ω*** με *n* ασυμβίβαστα ενδεχόμενα:

- $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n = \Omega,\ B_i \cap B_j = \varnothing \quad \forall i,j.$
- $P(B_1)+P(B_2)+\ldots+P(B_n)=P(\Omega)=1$



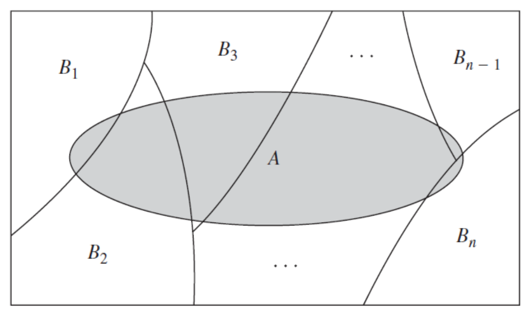
Έστω ότι εμφανίζεται το **ενδεχόμενο *A***.

Ψάχνουμε να βρούμε κατά **πόσο μεταβλήθηκε** η πιθανότητα του ***B**$_i$* **μετά** την εμφάνιση του ***A*** (***εκ των υστέρων***).

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(A \cap B_i)}{P(A)} = \frac{P(A \mid B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A \mid B_j)P(B_j)}$$

Ερμηνεία του Κανόνα του Bayes

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(A \cap B_i)}{P(A)} = \frac{P(A \mid B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A \mid B_j)P(B_j)}$$



P(B$_i$) : **εκ των προτέρων (*prior*) πιθανότητα** (*πριν την εμφάνιση του A*)

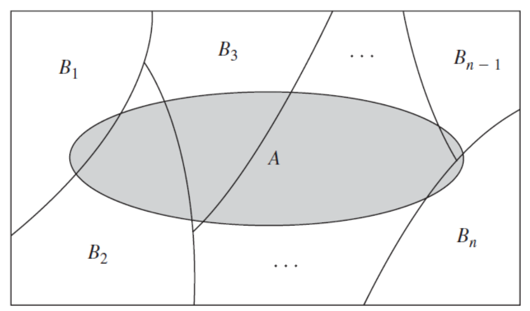
P(B$_i$|A): **εκ των υστέρων (*a-posteriori)* πιθανότητα** (*μετά την εμφάνιση του A*)

P(A): είναι η **ολική (*total*) πιθανότητα** (όρος κανονικοποίησης)

έτσι ώστε να ισχύει ότι $\sum_{i=1}^{n} P(B_i \mid A) = 1$

Ερμηνεία του Κανόνα του Bayes

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(A \cap B_i)}{P(A)} = \frac{P(A \mid B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A \mid B_j)P(B_j)}$$



$P(B_i)$: **εκ των προτέρων (*prior*) πιθανότητα** (*πριν την εμφάνιση του A*)

$P(B_i|A)$: **εκ των υστέρων (*a-posteriori)* πιθανότητα** (*μετά την εμφάνιση του A*)

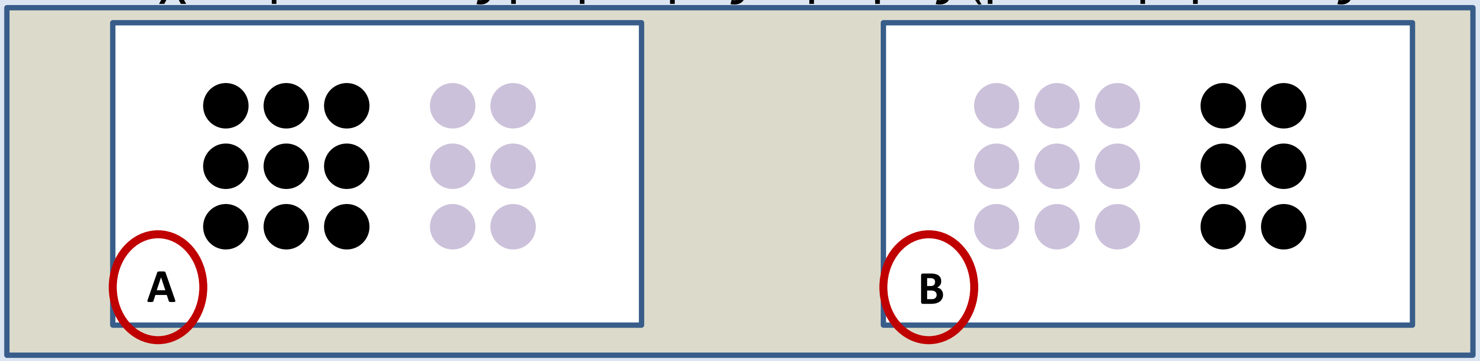
- Αρχή της **Μπεϋζιανής Στατιστικής** (***Bayesian Statistics***)
- **Μπεϋζιανά Συστήματα Αποφάσεων**

«Απόφαση με βάση την εκ των υστέρων πιθανότητα», δηλ,

απόφαση ***μετά την εμφάνιση*** κάποιας παρατήρησης ***A,*** όπου κρίνουμε το ***αίτιο*** που την προκάλεσε *(B_i)*

Παράδειγμα Μπεϋζιανού συστήματος αποφάσεων (Ι)

Έστω 2 δοχεία με λευκές με μαύρες σφαίρες (με διαφορετικές αναλογίες)



Επιλέγουμε μία σφαίρα και την παρατηρούμε. (έστω **Μ**αύρη)

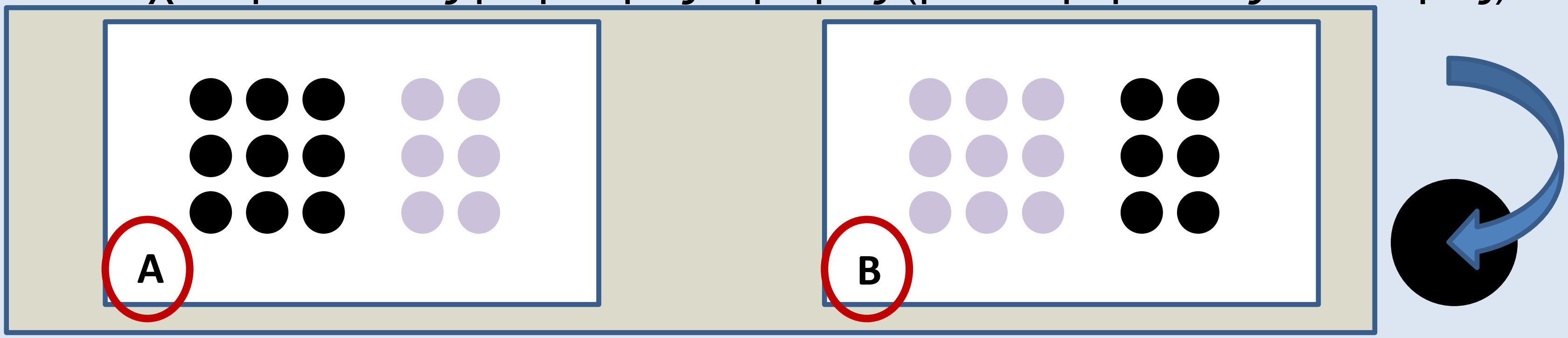
ΔΕΝ γνωρίζουμε από ποιο δοχείο προέρχεται.

Κάθε δοχείο έχει διαφορετική **αρχική βαρύτητα** να επιλεγεί που δίνεται από τις **εκ των προτέρων (prior) πιθανότητες**, **P(A)** και **P(B)**.

π.χ. $P(A) = P(B) = ½$

Παράδειγμα Μπεϋζιανού συστήματος αποφάσεων (I)

Έστω 2 δοχεία με λευκές με μαύρες σφαίρες (με διαφορετικές αναλογίες)



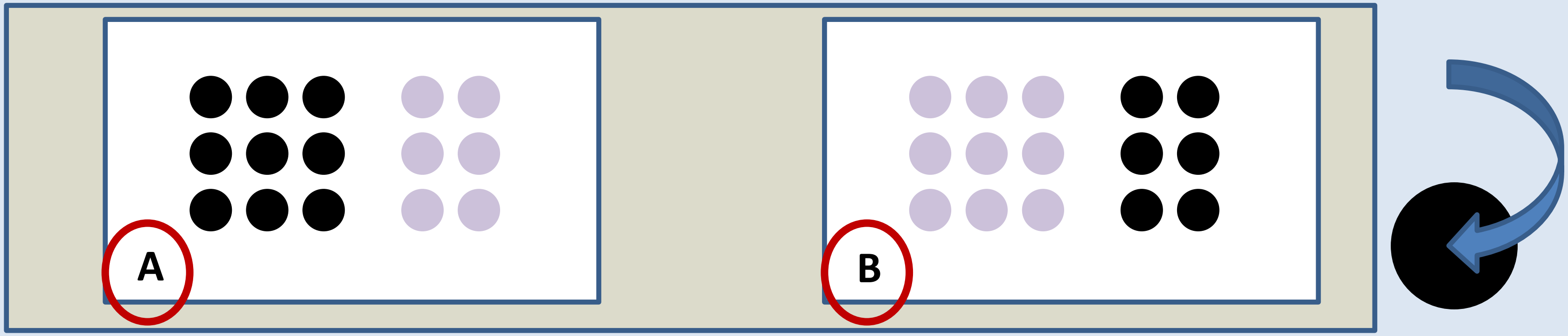
Μετά την παρατήρηση της σφαίρας ερχόμαστε **εκ των υστέρων** να αποφασίσουμε, με βάση τον κανόνα του **Bayes,** από ποιο δοχείο προέρχεται

Υπολογισμός των **εκ των υστέρων πιθανοτήτων** και **επιλογή του δοχείου** με τη **μεγαλύτερη** εκ των υστέρων πιθανότητα.

P(A|M): πιθανότητα να έχουμε επιλέξει **Μαύρη** σφαίρα από το **δοχείο A**

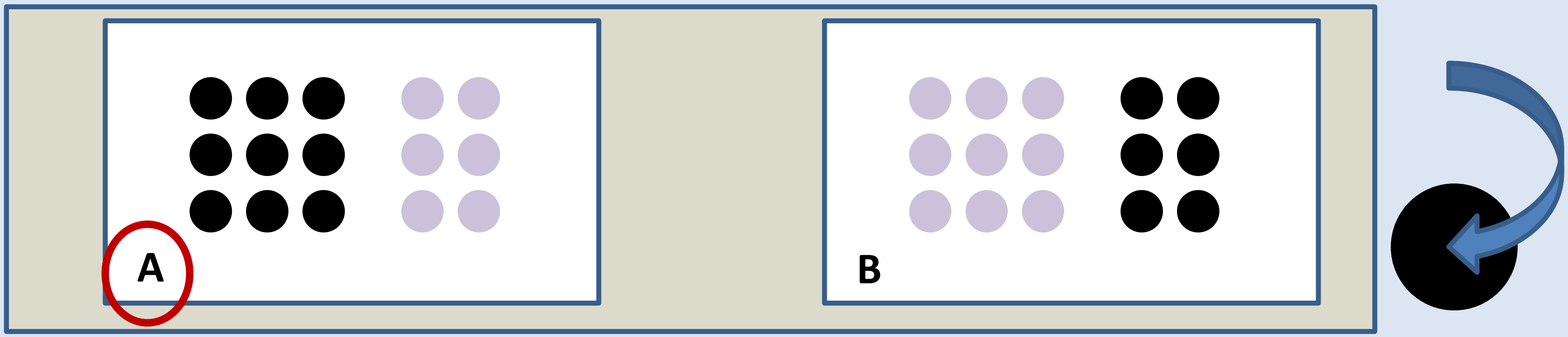
P(B|M): πιθανότητα να έχουμε επιλέξει **Μαύρη** σφαίρα από το **δοχείο B**

Παράδειγμα Μπεϋζιανού συστήματος αποφάσεων (I)



$$P(A|M)=\frac{P(M\mid A)P(A)}{P(M\mid A)P(A)+P(M\mid B)P(B)}=\frac{\frac{9}{15}\frac{1}{2}}{\frac{9}{15}\frac{1}{2}+\frac{6}{15}\frac{1}{2}}=\frac{3}{5}$$

Παράδειγμα Μπεϋζιανού συστήματος αποφάσεων (I)



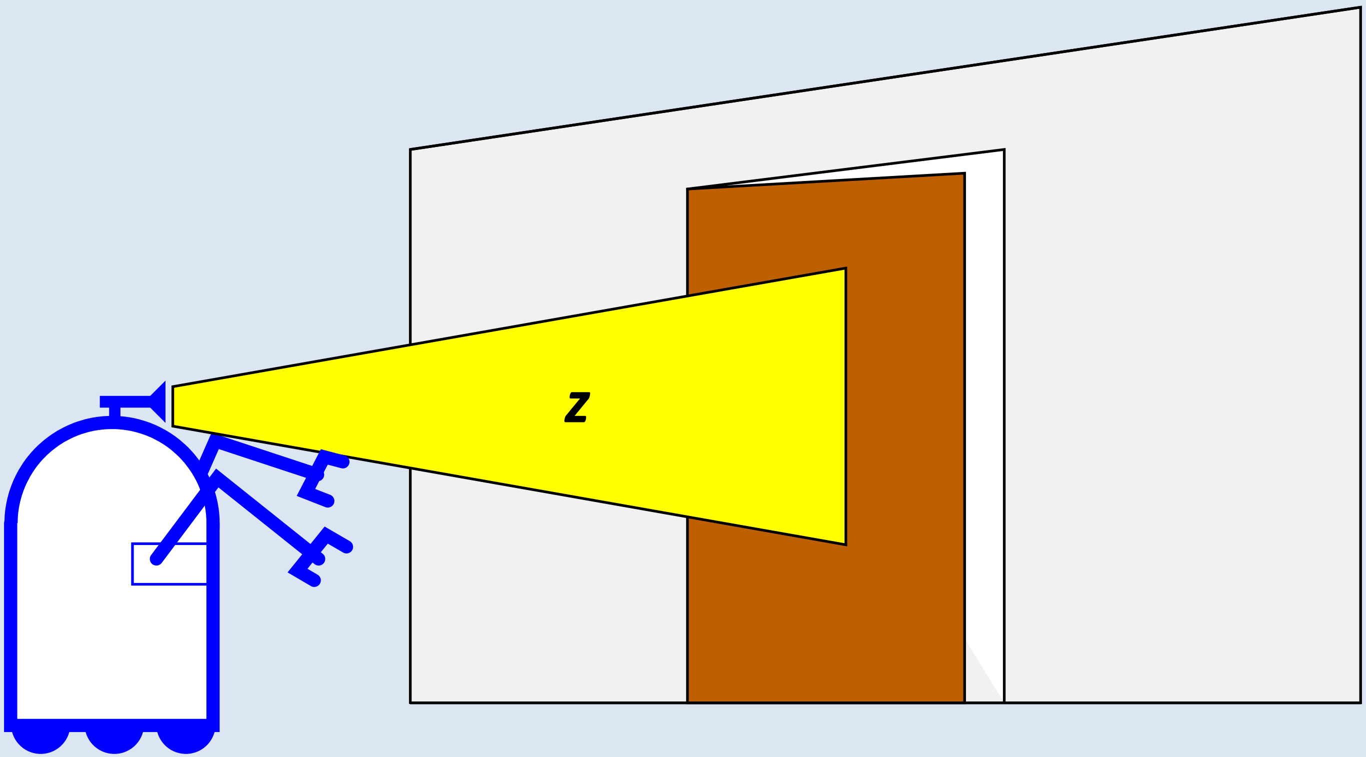
$$P(A|M) = \frac{P(M|A)P(A)}{P(M|A)P(A)+P(M|B)P(B)} = \frac{\frac{9}{15}\frac{1}{2}}{\frac{9}{15}\frac{1}{2}+\frac{6}{15}\frac{1}{2}} = \frac{3}{5}$$

$$P(A|M) > P(B|M)$$

$$P(B|M) = \frac{P(M|B)P(B)}{P(M|A)P(A)+P(M|B)P(B)} = \frac{\frac{6}{15}\frac{1}{2}}{\frac{6}{15}\frac{1}{2}+\frac{9}{15}\frac{1}{2}} = \frac{2}{5}$$

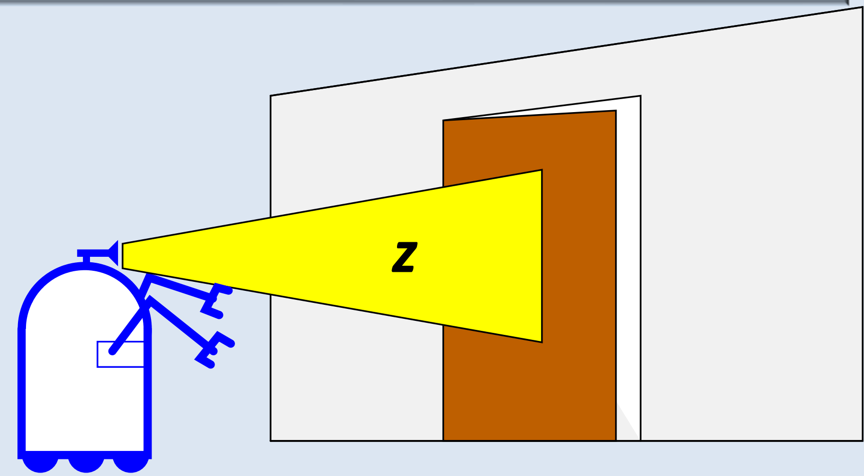
Συμπέρασμα: το **πιθανότερο** είναι η μαύρη σφαίρα να προέρχεται από το **κουτί A**

Παράδειγμα Μπεϋζιανού συστήματος αποφάσεων (II)



- Έστω **ρομποτικό σύστημα** το οποίο λαμβάνει μετρήσεις ***z*** από το περιβάλλον
- Θέλουμε να φτιάξουμε ένα **σύστημα** που να **αποφασίζει** αν η πόρτα είναι ανοιχτή (**open**) ή όχι (**¬ open**) με βάση την παρατήρηση ***z***

Παράδειγμα Μπεϋζιανού συστήματος αποφάσεων (II)



- **Μπεϋζιανό σύστημα απόφασης**: Εφαρμογή του ***Bayes rule***

- $$P(open \mid z) = \frac{P(z \mid open)P(open)}{P(z \mid open)\, p(open) + P(z \mid \neg open)\, p(\neg open)}$$

Κανόνας: **If** *P(open|z) > 0.5* **then** door is **open**

Παραδείγματα

1) Το 40% των μαθητών μιας τάξης είναι αγόρια (ενώ το 60% κορίτσια). Είναι γνωστό ότι τα αγόρια γνωρίζουν σκάκι σε ποσοστό 50%, ενώ το αντίστοιχο ποσοστό για τα κορίτσια είναι 60%. Να βρεθεί η πιθανότητα ένας (οποιοσδήποτε **ή** τυχαία επιλεγμένος) μαθητής της τάξης να γνωρίζει σκάκι.

2) Για τα ενδεχόμενα A και B είναι γνωστό ότι $P(A)=0.6$, $P(B)=0.7$ και $P(A' \mid B)=0.3$. Να υπολογιστούν οι πιθανότητες $P(A|B)$ και $P(B|A)$.

3) Το 14% των Αντρών και το 2% των Γυναικών ενός πληθυσμού έχουν ένα χαρακτηριστικό (Β). Ποια είναι η πιθανότητα ένα άτομο του πληθυσμού που επιλέγεται τυχαία να έχει το χαρακτηριστικό Β, εάν ο πληθυσμός έχει

(α) 40 Άντρες και 70 Γυναίκες,

(β) ίσο πλήθος Αντρών και Γυναικών,

(γ) τριπλάσιο αριθμό Αντρών

(4). Μαθητής απαντά σε ερωτήματα πολλαπλών επιλογών (*multiple choice*). Κάθε ερώτηση έχει 4 απαντήσεις. Η πιθανότητα να γνωρίζει την σωστή απάντηση είναι 70%. Σε περίπτωση όπου δεν γνωρίζει την σωστή απάντηση, τότε απαντά τυχαία.

α) Ποια η πιθανότητα να απαντήσει σωστά σε μια ερώτηση?

β) Εάν είναι γνωστό ότι ο μαθητής απαντά σωστά σε μια ερώτηση, ποια η πιθανότητα να γνώριζε την απάντηση?

(5). Το 10% του πληθυσμού μιας πόλης έχει προσβληθεί από μια ασθένεια *C*. Για την διάγνωσή της απαιτείται η διεξαγωγή ενός ιατρικού ελέγχου, ο οποίος παρουσιάζει κάποιο σφάλμα διάγνωσης. Συγκεκριμένα, αν το άτομο έχει την ασθένεια *C* τότε υπάρχει 1% σφάλμα στη διάγνωση, ενώ αν δεν έχει την ασθένεια *C* (υγιής) το σφάλμα διάγνωσης είναι 2%.

(α) Ποια η πιθανότητα διάγνωσης της ασθένειας C?

(β) Εάν ο έλεγχος που διεξήχθη σε κάποιο άτομο είναι θετικός, ποια η πιθανότητα να έχει πράγματι προσβληθεί από την ασθένεια *C*?