Η έννοια της «Πιθανότητας»

3 ορισμοί

- Κλασσικός ορισμός

- Στατιστικός ορισμός

- Αξιωματικός ορισμός

Ορισμός της Πιθανότητας (I)

Κλασσικός Ορισμός (*Laplace*)

Πιθανότητα ενδεχομένου *A*

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)}$$

N(A): πλήθος ευνοϊκών αποτελεσμάτων του ενδεχ. A

***N(Ω)*:** πλήθος συνολικών αποτελεσμάτων του δ.χ. *Ω*

Ελλιπής ορισμός: ισχύει **μόνο** για

– <u>διακριτούς</u> χώρους, και

– <u>ισοβαρή</u> (*ισοπίθανα*) αποτελέσματα

Ορισμός της Πιθανότητας (I)

Κλασσικός Ορισμός $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)}$

<u>Παραδείγματα</u>

- <u>Πείραμα</u>: Ρίψη νομίσματος, δ.χ. *Ω={Κ, Γ},*
  Α="Κορώνα", Α={Κ} ***P(A) = N(A)/N(Ω) = 1/2***

- <u>Πείραμα</u>: Ρίψη νομίσματος 2 φορές, *δ.χ. Ω={ΚΚ,ΚΓ,ΓΚ,ΓΓ}*
A="τουλάχ. 1 Κορώνα"={ΚΚ,ΚΓ,ΓΚ} ***P(A)=***

Ορισμός της Πιθανότητας (Ι)

Κλασσικός Ορισμός $P(A) = \dfrac{N(A)}{N(\Omega)}$

<u>Παραδείγματα</u>

- <u>Πείραμα</u>: Ρίψη νομίσματος, δ.χ. *Ω={Κ, Γ}*,
  Α="Κορώνα", Α={Κ} ***P(A) = N(A)/N(Ω) = 1/2***

- <u>Πείραμα</u>: Ρίψη νομίσματος 2 φορές, *δ.χ. Ω={ΚΚ,ΚΓ,ΓΚ,ΓΓ}*
  Α="τουλάχ. 1 Κορώνα"={ΚΚ,ΚΓ,ΓΚ} ***P(A)=N(A)/N(Ω)=3/4***

- <u>Πείραμα</u>: Ρίψη ζαριού, δ.χ. *Ω={1, 2, 3, 4, 5, 6}*,
  Α="αριθμός > *4*"={5, 6}, ***P(A) = N(A)/N(Ω) = 2/6***

Ορισμός της Πιθανότητας (ΙΙ)

Στατιστικός Ορισμός

Βασίζεται στην έννοια της *σχετικής συχνότητας* που υπολογίζεται μετά από *n* επαναλήψεις. Δηλ.

Εκτελούμε το πείραμα *n* φορές και υπολογίζουμε:

- $f_n(A)$ πλήθος εμφανίσεων (***συχνότητα***) του ενδεχ. *A*
- $f_n(A)/n$: η σχετική συχνότητα

τότε:

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{f_n(A)}{n}$$

Ελλιπής ορισμός - περιορισμοί:

- υψηλό **υπολογιστικό κόστος** (ικανός αριθμός επαναλήψεων),
- **εμπειρικός κανόνας** (όχι αυστηρά μαθηματικός)

Ορισμός της Πιθανότητας (ΙΙΙ)


1903-87

Αξιωματικός Ορισμός (*Kolmogorov 1933*)

Θεμελιώδης ορισμός της έννοιας πιθανότητας

Μέτρο πιθανότητας: ένας **κανόνας** **(μία συνάρτηση)** που καθορίζει σε κάθε ενδεχόμενο A ενός δ.χ. Ω έναν αριθμό ***P(A)*** που ονομάζεται **πιθανότητα** για την οποία ισχύουν τα επόμενα ***3* βασικά αξιώματα**:

(**I**). $P(A) \geq 0$ (**πιθανότητα μη αρνητικός αριθμός**)

(**II**). $P(\Omega) = 1$ (**πιθανότητα του δ.χ. *Ω* σταθερή και ίση με 1**)

(**III**). $P(A \cup B)=P(A)+P(B)$ αν $A \cap B = \varnothing$ δηλ αν *A*, *B* *ασυμβίβαστα*

*«ενδεχόμενα ως αντικείμενα **ύλης** με φυσική **μάζα** με μέτρο ίσο με την **πιθανότητά**»*

Πορίσματα του Αξιωματικού ορισμού

(**Π1**) $P(A')=1-P(A)$

Απόδειξη:

καθώς ***Α, Α' είναι ασυμβίβαστα*** ενδεχ. ($A \cap A'=\emptyset$) από **αξίωμα III** έχουμε

$$P(A \cup A')=P(A)+P(A')$$

Αλλά, $A \cup A'=\Omega$. Έτσι από **αξίωμα ΙΙ ,** $P(\Omega)=1$, παίρνουμε:

$$\boxed{1=P(\Omega)=P(A \cup A')=P(A)+P(A')}$$

Πορίσματα του Αξιωματικού ορισμού

(**Π2**) $P(A) \leq 1$

<u>Απόδειξη</u>:

από το Π1 έχουμε $P(A) = 1\text{-}P(A') \leq 1$, *καθώς* $P(A') \geq 0$ (αξίωμα Ι)

Σημαντικό: Επομένως **η πιθανότητα φράσσεται στο** ***[0, 1]***

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Πορίσματα του Αξιωματικού ορισμού

(**Π3**) $P(\varnothing)=0$

Απόδειξη:

καθώς $\Omega=\varnothing'$ *από* ***Π1*** *έχουμε* $P(\varnothing) = 1-P(\varnothing') = 1-P(\Omega) = 1-1 = 0$

Πορίσματα του Αξιωματικού ορισμού (συν.)

(**Π4**) Για *n* ενδεχόμενα ανά δύο ασυμβίβαστα, δηλ. $A_i \cap A_j = \varnothing \ \forall \ i,j$ *ισχύει*

$$P\left(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = P\left(A_1\right) + P\left(A_2\right) + \cdots + P\left(A_n\right) = \sum_{i=1}^{n} P\left(A_i\right)$$

<u>Απόδειξη</u>:

- Για *n=2* ισχύει από τον αξιωματικό ορισμό (αξίωμα ΙΙΙ).
- Έστω ότι ισχύει για *n=k* ασυμβίβαστα:

$$P\left(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) = \sum_{i=1}^{k} P\left(A_i\right)$$

- Θα αποδείξουμε ότι ισχύει για ***n=k+1*:**

  Τα ενδεχόμενα $\bigcup_{i=1}^{k} A_i, \ A_{k+1}$ είναι **ασυμβίβαστα** καθώς

$$\bigcup_{i=1}^{k} A_i \cap A_{k+1} = \bigcup_{i=1}^{k} \left(A_i \cap A_{k+1}\right) = \{\ \}$$

- Επομένως ισχύει:

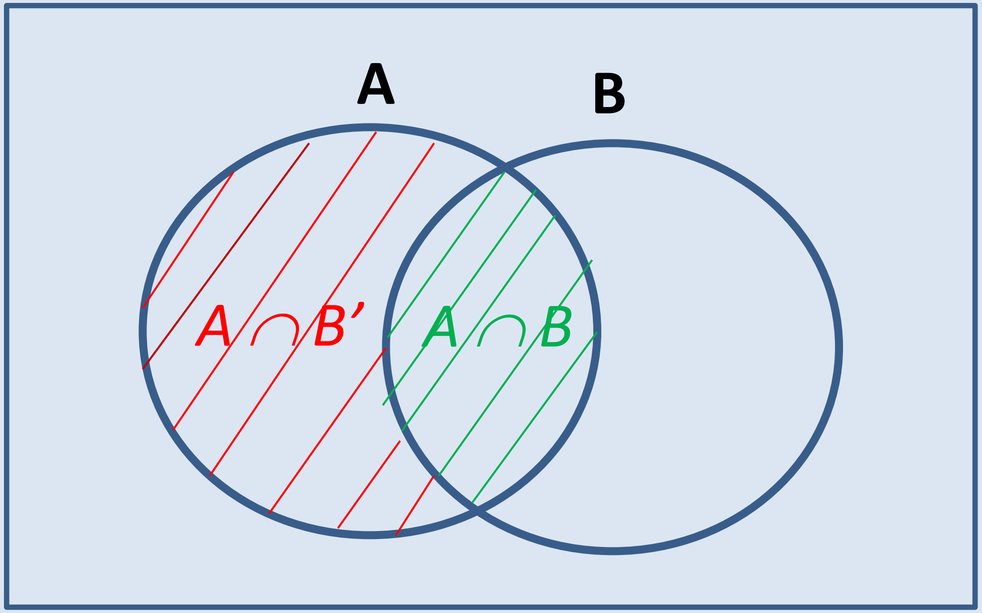
$$P\left(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k \cup A_{k+1}\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) + P\left(A_{k+1}\right) = \sum_{i=1}^{k+1} P\left(A_i\right)$$

Πορίσματα του Αξιωματικού ορισμού (συν.)

(**Π5**) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Απόδειξη:

$A = (A \cap B) \cup (A \cap B')$ *ένωση 2 ασυμβίβαστων ενδεχομένων*



Πορίσματα του Αξιωματικού ορισμού (συν.)

(**Π5**) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Απόδειξη:

$B = (A \cap B) \cup (A' \cap B)$ *ένωση 2 ασυμβίβαστων ενδεχομένων*

$P(A) = P(A \cap B') + P(A \cap B)$

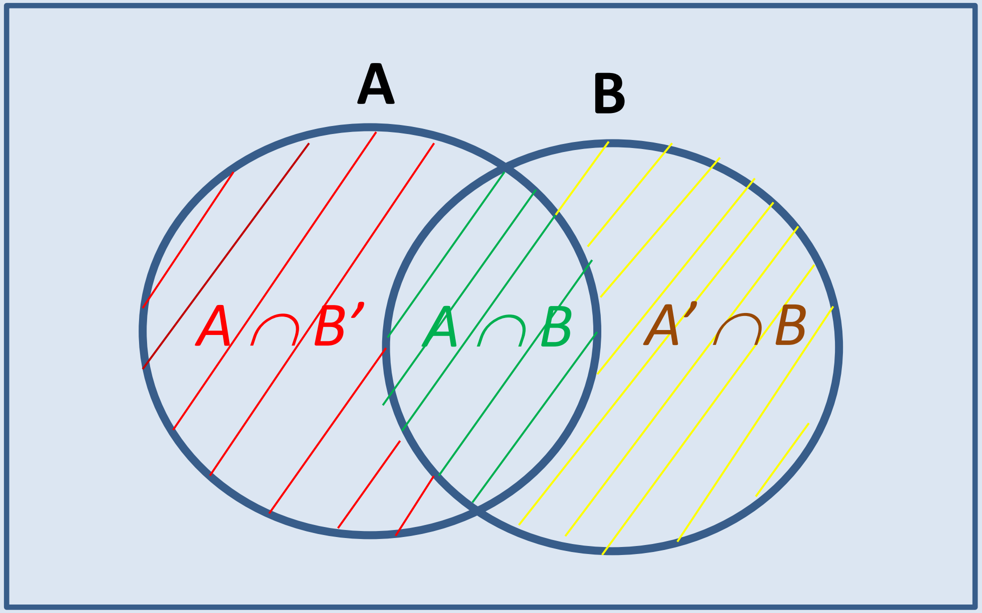
Παρόμοια $P(B) = P(A' \cap B) + P(A \cap B)$

Πορίσματα του Αξιωματικού ορισμού (συν.)

(**Π5**) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Απόδειξη:

$\boldsymbol{A \cup B} = (A \cap B) \cup (A \cap B') \cup (A' \cap B)$ *ένωση 3 ασυμβίβαστων ενδεχομένων*



Πορίσματα του Αξιωματικού ορισμού (συν.)

(**Π5**) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Απόδειξη:

$A \cup B = (A \cap B') \cup (A' \cap B) \cup (A \cap B)$ *ένωση 3 ασυμβίβαστων ενδεχομένων*

$P(A) = P(A \cap B') + P(A \cap B)$

$P(B) = P(A' \cap B) + P(A \cap B)$

$$P(A \cup B) = P(A \cap B') + P(A' \cap B) + P(A \cap B)$$

Πορίσματα του Αξιωματικού ορισμού (συν.)

(**Π5**) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Απόδειξη:

$P(A) = P(A \cap B') + P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$

$P(B) = P(A' \cap B) + P(A \cap B) \Rightarrow P(A' \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$

Αντικαθιστώντας προκύπτει το πόρισμα Π5

$P(A \cup B) = P(A \cap B') + P(A' \cap B) + P(A \cap B)$

$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Πορίσματα του Αξιωματικού ορισμού (συν.)

(**Π6**) Γενίκευση του **Π5** για *n* ενδεχόμενα

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)-\sum_{i<j} P\left(A_i \cap A_j\right)+\sum_{i<j<k} P\left(A_i \cap A_j \cap A_k\right)+\ldots$$
$$+(-1)^{n+1} P\left(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n\right)$$

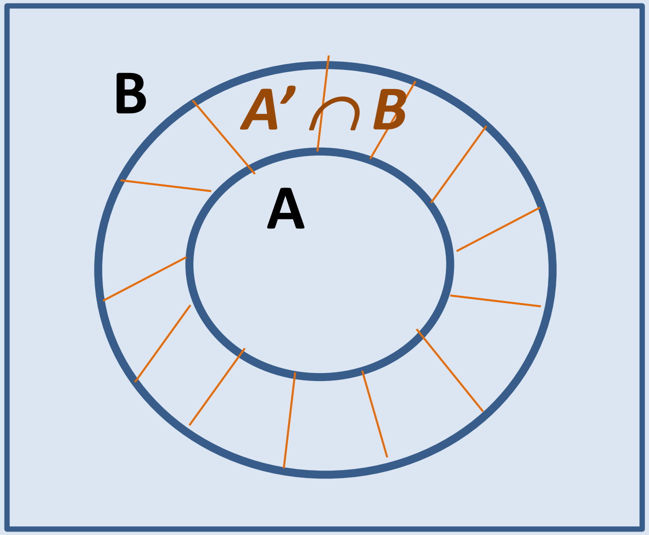
Ειδικά για ***n=3 ενδεχόμενα A, B, C*** *έχουμε*

$$P(A \cup B \cup C)=$$
$$=P(A)+P(B)+P(C)-P(A \cap B)-P(A \cap C)-P(B \cap C)+P(A \cap B \cap C)$$

Πορίσματα του Αξιωματικού ορισμού (συν.)

(**Π7**). Αν $A \subset B$ τότε $P(A) \leq P(B)$

<u>Απόδειξη</u>



$$P(B) = P(A' \cap B) + P(A) \geq P(A)$$

Υπολογισμός της Πιθανότητας

<u>Σε **διακριτούς δ.χ** (*discrete sample spaces*)</u>

Έστω δ.χ. ***Ω***=*{*a_1 *,*a_2 *,…,* a_n *)* αποτελούμενος από ***n*** (**ασυμβίβαστα**) αποτελέσματα, δηλ. $P(a_i \cap a_j) = P(\varnothing) = 0$

Για ένα **ενδεχόμενο *Α={a_1, a_2, …,a_k)*** αποτελούμενο από *k* αποτελέσματα του *Ω*.

Τότε (από *Πόρισμα Π4*)

$$P(A) = P(a_1 \cup a_2 \cup \ldots \cup \alpha_k) = P(a_1)+P(a_2)+\ldots+P(a_k)$$

Στην **ειδική περίπτωση** όπου έχουμε **ισοπίθανα αποτελέσματα**, δηλ. ***P(a_i)=1/n***, τότε:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{k}{n}$$

όπου N(A): πλήθος αποτελεσμάτων του ενδεχομένου A.

Υπολογισμός της Πιθανότητας

<u>Σε **διακριτούς δ.χ** (discrete sample spaces) (συν.)</u>

<u>Παράδειγμα</u>

Έστω δοχείο με 10 αριθμημένες σφαίρες ***Ω=****{0,1,2,…,9}*. Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

A = "αριθμός σφαίρας περιττός " = {1, 3, 5 ,7, 9}

B = "αριθμός σφαίρας πολλαπλάσιο του 3" = {3, 6, 9}

Γ = "αριθμός σφαίρας μεγαλύτερο του 5" = {6, 7, 8, 9}

- Υπολογισμός πιθανοτήτων: P(A), P(B), P(Γ), P(A∪B)

$$P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{5}{10} \qquad P(B)=\frac{N(B)}{N(\Omega)}=\frac{3}{10} \qquad P(\Gamma)=\frac{N(\Gamma)}{N(\Omega)}=\frac{4}{10}$$

Υπολογισμός της Πιθανότητας

Σε **διακριτούς δ.χ** (discrete sample spaces) (συν.)

Παράδειγμα

Έστω δοχείο με 10 αριθμημένες σφαίρες ***Ω=****{0,1,2,…,9}*. Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

A = “αριθμός σφαίρας περιττός ” = {1, 3, 5 ,7, 9}

B = “αριθμός σφαίρας πολλαπλάσιο του 3” = {3, 6, 9}

Γ = “αριθμός σφαίρας μεγαλύτερο του 5” = {6, 7, 8, 9}

$$A \cup B = \{1,3,5,6,7,9\}$$

$$A \cap B = \{3,9\}$$

- Υπολογισμός πιθανοτήτων: P(A), P(B), P(Γ), P(A∪B)

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{5}{10} \qquad P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{3}{10} \qquad P(\Gamma) = \frac{N(\Gamma)}{N(\Omega)} = \frac{4}{10}$$

$$P(A \cup B) = P(\{1,3,5,6,7,9\}) = \frac{N(A \cup B)}{N(\Omega)} = \frac{6}{10}$$

ή

$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{5}{10} + \frac{3}{10} - \frac{2}{10} = \frac{6}{10}$$

Υπολογισμός της Πιθανότητας

Σε **συνεχείς δ.χ.** (continuous sample spaces)

Υπάρχουν **άπειρα αποτελέσματα**. Τα ενδεχόμενα είναι συνεχής περιοχές του δ.χ. ***Ω***.
Η πιθανότητα είναι ***ανάλογη του «όγκου» (volume)*** που καταλαμβάνει η περιοχή στον δ.χ. ***Ω***.

$$P(A) = \frac{vol(A)}{vol(\Omega)}$$

(υποθέτοντας ισοπίθανα αποτελέσματα
ή αλλιώς
ομοιόμορφους *δειγματικούς χώρους)*

Υπολογισμός της Πιθανότητας

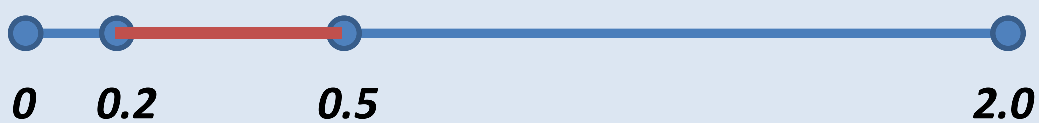
Σε συνεχείς δ.χ. (continuous sample spaces)

Υπάρχουν **άπειρα αποτελέσματα**. Τα ενδεχόμενα είναι συνεχής περιοχές του δ.χ. ***Ω***.
Η πιθανότητα είναι ***ανάλογη του «όγκου» (volume)*** που καταλαμβάνει η περιοχή στον δ.χ. ***Ω***.

$$P(A) = \frac{vol(A)}{vol(\Omega)}$$

Παραδείγματα

(1). Επιλογή αριθμού στο [0,2], ενδεχόμενο A={x: 0.2<x<0.5}



*P(**A**)=**μήκος**(A) / **μήκος**(Ω) = 0.3 / 2 = 0.15*

Υπολογισμός της Πιθανότητας

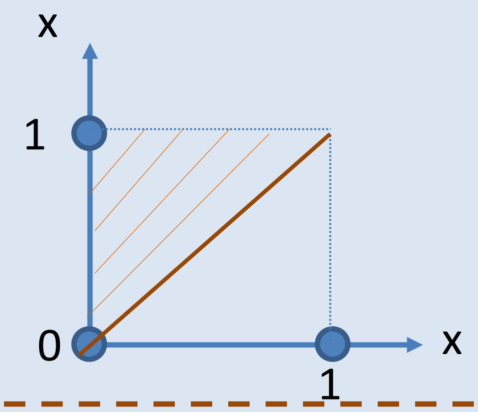
Σε **συνεχείς δ.χ.** (continuous sample spaces)

Υπάρχουν **άπειρα αποτελέσματα**. Τα ενδεχόμενα είναι συνεχής περιοχές του δ.χ. ***Ω***.
Η πιθανότητα είναι ***ανάλογη του όγκου (volume)*** που καταλαμβάνει μια περιοχή στον δ.χ. ***Ω***.

$$P(A) = \frac{vol(A)}{vol(\Omega)}$$

Παραδείγματα

(2). Επιλογή σημείου στο [0, 1] x [0, 1], ενδεχόμενο A={(x,y): 0<x<y<1}



P(A)= E(A) / E(Ω) = 1/2

Παράδειγμα 1

- Τρείς φίλοι που πηγαίνουν τακτικά στο γήπεδο πριν αγοράσουν εισιτήρια ρίχνουν ένα νόμισμα ο καθένας. Αν όλοι φέρουν το **ίδιο αποτέλεσμα**, τότε ο καθένας αγοράζει το εισιτήριό του. Αν ένας φέρει **διαφορετικό αποτέλεσμα** από τους άλλους δύο, τότε αυτός πληρώνει για τα τρία εισιτήρια. Σε άλλη περίπτωση δεν παρακολουθούν τον αγώνα!

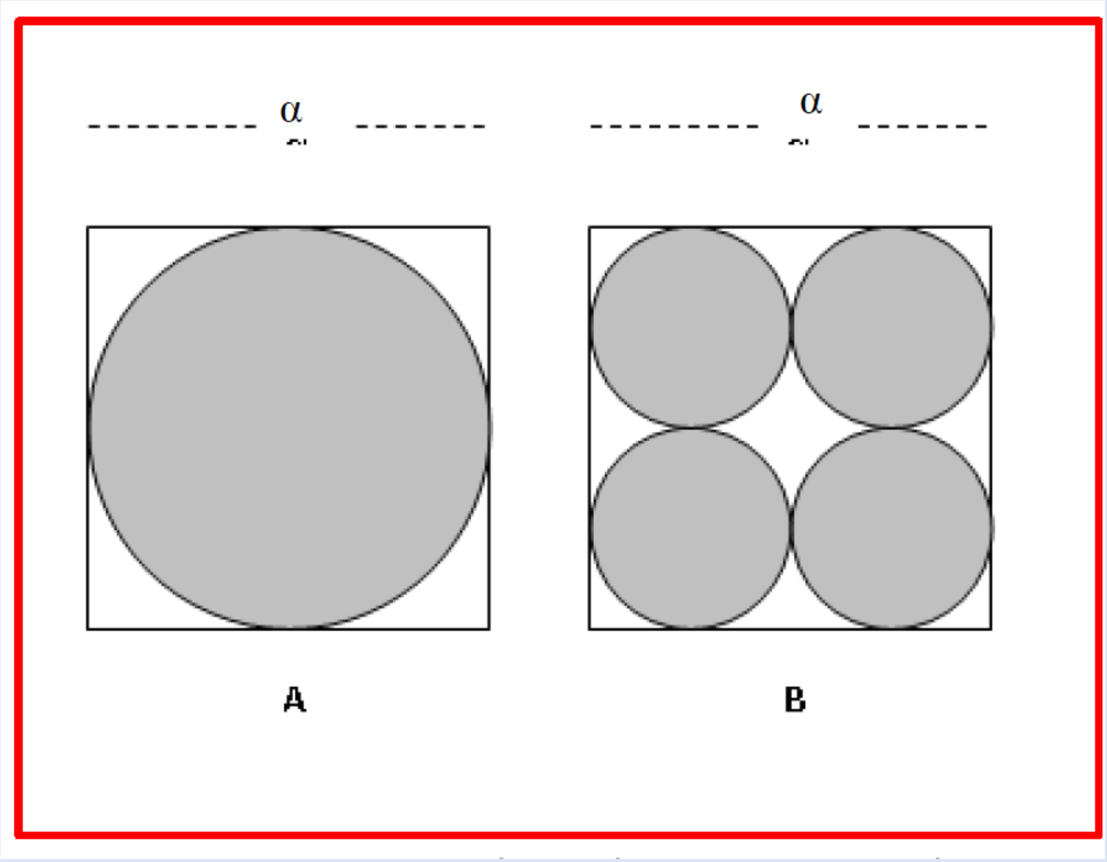
(α) Ποια ή πιθανότητα **ένας συγκεκριμένος** να πληρώσει και για τα 3 εισιτήρια;

(β) Ποια η πιθανότητα **κάποιος από τους τρεις** να πληρώσει και για τα τρία εισιτήρια;

(γ) Ποια η πιθανότητα ο **καθένας** να αγοράσει το δικό του;

(δ) Ποια η πιθανότητα να **μην** παρακολουθήσουν τον αγώνα;

Παράδειγμα 2



- Σε ένα παιχνίδι με βελάκια ο παίκτης έχει να επιλέξει ανάμεσα σε δύο στόχους A και B. Με ποια επιλογή έχει μεγαλύτερη πιθανότητα να πετύχει τον γραμμοσκιασμένο στόχο;

Δεσμευμένη (ή υπο-συνθήκη) Πιθανότητα (*Conditional Probability*)

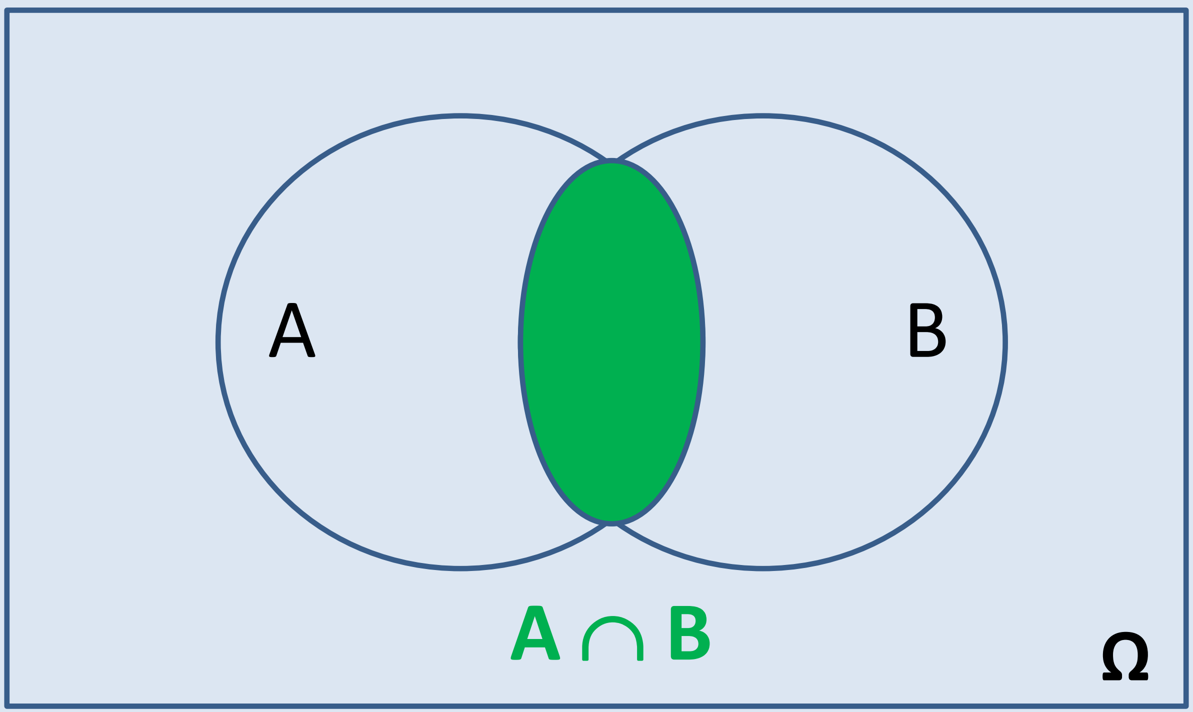
- Συχνά μας ενδιαφέρει η **συσχέτισή 2 ενδεχομένων** *A* και *B*, δηλ. να δούμε το κατά πόσο η γνώση του ενός (π.χ. *B*) επηρεάζει τη πιθανότητα εμφάνισης του άλλου (π.χ. *A*).

- ***P(A|B)*** : **δεσμευμένη** ή **υπο-συνθήκη** πιθανότητα (*conditional probability*) να συμβεί το *A* υπό την γνώση (**δοθέντος**) του *B*.

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \quad \gamma\iota\alpha \quad P(B)>0$$

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \quad \gamma\iota\alpha \quad P(B)>0$$

“ Η γνώση του ***B*** σημαίνει ότι όλα τα αποτελέσματα του πειράματος περιορίζονται στο ***B***. Το ***A*** συμβαίνει **μόνο όταν το αποτέλεσμα βρίσκεται στη τομή τους, *A* $\cap$ *B*.** ”



Δεσμευμένη Πιθανότητα (συν.)

Παρατηρήσεις:

1. Αν *A*=*B* τότε $P(\boldsymbol{A}|B) = \frac{P(\boldsymbol{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$

2. Αν A_1 , A_2 *ασυμβίβαστα* ενδεχόμενα (δηλ. $A_1 \cap A_2 = \varnothing$):

$$P(A_1 \cup A_2 \mid B) = \frac{P((A_1 \cup A_2) \cap B)}{P(B)} = \frac{P((A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B))}{P(B)} =$$

$$\frac{P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} + \frac{P(A_2 \cap B)}{P(B)} = P(A_1 \mid B) + P(A_2 \mid B)$$

3. Ισχύει ότι $P(A' \mid B) = 1 - P(A \mid B)$

Πολλαπλασιαστικός τύπος

P(A∩B) = P(A,B) : **από-κοινού** πιθανότητα (***joint probability***) να συμβαίνουν ταυτόχρονα 2 ενδεχόμενα.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$$

Πολλαπλασιαστικός τύπος

$$P(A \cap B) = P(A, B) = P(A \mid B)P(B)$$

Ερμηνεία

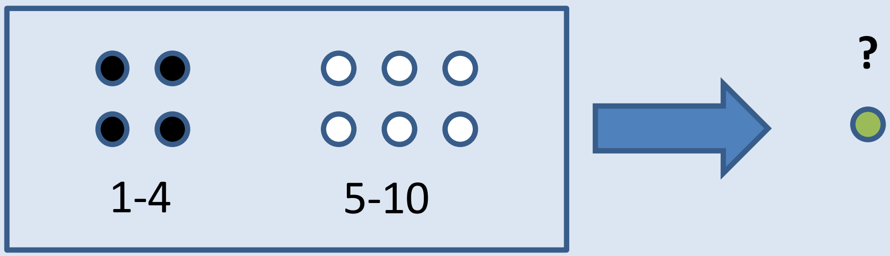
Για να ισχύουν **ταυτόχρονα** τα *A* και *B* θα πρέπει να ισχύει ένα από τα 2 (το *B* ***ή*** το A) και, **εφόσον ισχύει αυτό**, να ισχύει και το άλλο (π.χ. *A*).

$$P(A \cap B) = \begin{cases} P(A \mid B)P(B) \\ \text{ή} \\ P(B \mid A)P(A) \end{cases}$$

<u>Παραδείγματα</u>

1) Από δοχείο με 4 Μαύρες {1,2,3,4} και 6 Λευκές {5,6,7,8,9,10} σφαίρες επιλέγουμε μία σφαίρα και σημειώνουμε χρώμα και αριθμό. Ορίζουμε τα ενδεχόμενα: Α="σφαίρα Μαύρη", Β="αριθμός ζυγός", Γ="αριθμός > 5". Να υπολογίσετε τις πιθανότητες *P(A|B)* και ***P(A|Γ)*.**

Λύση



$A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{2,4,6,8,10\}$, $\Gamma=\{6,7,8,9,10\}$, $A \cap B = \{2, 4\}$, $A \cap \Gamma = \varnothing$

$P(A|B) = P(A \cap B) / P(B)$ $\quad$ $P(B) = 5/10$, $P(A \cap B) = 2/10$

$P(A|B) = 2/5$

$P(A|\Gamma) = P(A \cap \Gamma) / P(\Gamma)$ $\quad$ $P(\Gamma) = 5/10$, $P(A \cap \Gamma) = 0$

$\mathbf{P(A|\Gamma) = 0}$

Παραδείγματα

2) Η πιθανότητα να ζήσει ένας άντρας τουλάχιστον 70 έτη είναι 0.85, ενώ τουλάχιστον 75 έτη είναι 0.80. Αν επιλέξουμε έναν άντρα 70 ετών, ποια ή πιθανότητα να ζήσει τουλάχιστον επιπλέον 5 έτη?

Λύση

Ορίζουμε **A**=“ηλικία ≥ 70” και **B**=“ ηλικία ≥ 75“

Δίνεται ότι **P(A)=0.85** και **P(B) = 0.80**

Ζητείται: P(B | A) - δεσμευμένη πιθανότητα

$$P(B|A) = \mathbf{P(A \cap B)} / P(A)$$

Υπολογίζουμε: $\mathbf{P(A \cap B)} = P(B) = 0.75$

επομένως $\mathbf{P(B|A)} = P(B)/P(A) = \mathbf{80/85 = 16/17}$

Παραδείγματα

3) Ένας φοιτητής επιλέγει ένα από δύο μαθήματα επιλογής, Α και Β, ρίχνοντας ένα νόμισμα (τυχαία). Εκτιμά ότι η πιθανότητα να περάσει με την πρώτη το μάθημα Α είναι διπλάσια από την αντίστοιχη του μαθήματος Β, Ποια είναι η πιθανότητα να περάσει το μάθημα Β με την πρώτη ;

Παραδείγματα

Προϊόν	Ποσοστό
α	*15 %*
β	*25 %*
γ	*38 %*
α & β	*7 %*
α & γ	*10 %*
β & γ	*8 %*
α & β & γ	*3 %*

4) Πολυκατάστημα μελέτησε τις αγοραστικές συνήθειες των πελατών του για *3* προϊόντα και πήρε τον διπλανό πίνακα.

Να υπολογιστούν οι πιθανότητες:

i) Να αγοράσει τα *β* και γ δεδομένου ότι αγόρασε το *α*

ii) Να αγοράσει το *β* ή το γ δεδομένου ότι αγόρασε το *α*

iii) Να αγοράσει το *α* δεδομένου ότι αγόρασε τουλάχιστον ένα από τα *β* και *γ*

5) Έστω 2 ενδεχόμενα A, B για τα οποία γνωρίζουμε ότι $P(A)=0.2$, $P(B)=0.4$ και $P(A \cap B)=0.1$. Να υπολογιστούν οι πιθανότητες να συμβεί:

(α) τουλάχιστον ένα από τα A, B

(β) ακριβώς ένα από τα A, B,

(γ) κανένα από τα A, B

6) Σε μία επαρχιακή πόλη κυκλοφορούν τρεις τοπικές εφημερίδες E_1, E_2 και E_3. Τα ποσοστά της αναγνωσιμότητάς τους στο σύνολο των κατοίκων της πόλης δίνονται από τον επόμενο πίνακα:

Ανάγνωση	E_1	E_2	E_3	E_1 & E_2	E_1 & E_3	E_2 & E_3	E_1&E_2&E_3
Ποσοστό(%)	20	18	12	9	4	3	2

Αν επιλέξουμε τυχαία έναν κάτοικο της πόλης, να υπολογιστεί η πιθανότητα των παρακάτω ενδεχομένων:

A_1: «ο κάτοικος διαβάζει τουλάχιστον μια από τις εφημερίδες»,

A_2: «ο κάτοικος διαβάζει τουλάχιστον δύο από τις εφημερίδες»,

A_3: «ο κάτοικος διαβάζει ακριβώς 2 από τις εφημερίδες»,

A_4: «ο κάτοικος να διαβάζει την E_1 εάν είναι γνωστό ότι διαβάζει ακριβώς 2 εφημερίδες».

7) Έστω δοχείο με 10 σφαίρες **4Μ** και **6Λ**. Επιλέγουμε διαδοχικά 2 σφαίρες. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των παρακάτω ενδεχομένων:

α) «$1^η$ σφαίρα Μ και $2^η$ σφαίρα Λ»

β) «$1^η$ >> Λ και $2^η$ >> Μ»

γ) «$1^η$ >> Λ και $2^η$ >> Λ»

δ) «$1^η$ >> Μ και $2^η$ >> Μ»

Λύση