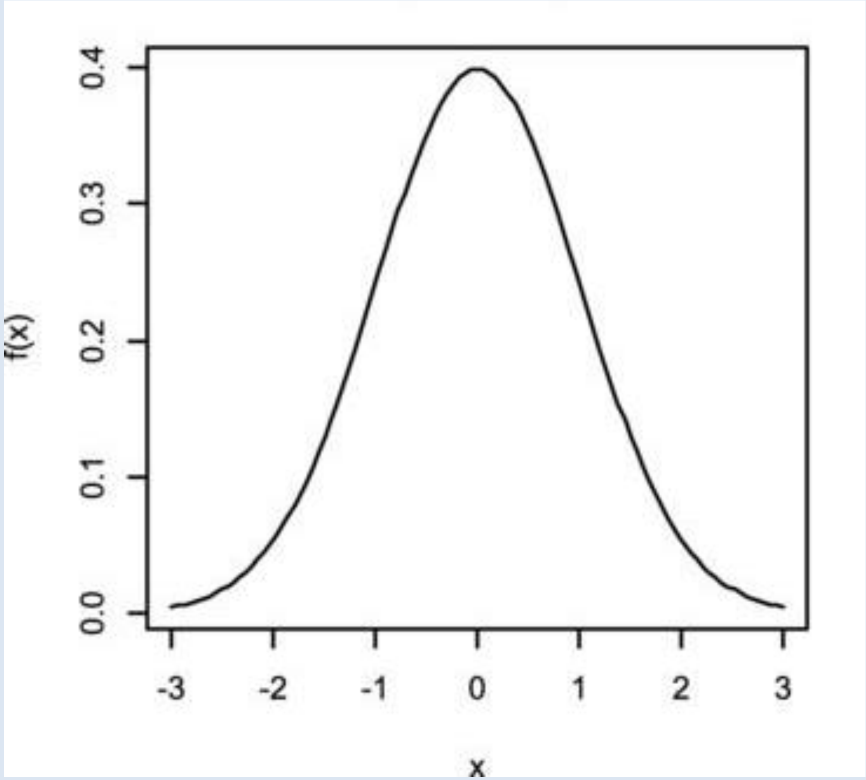
Συνεχείς Τυχαίες Μεταβλητές

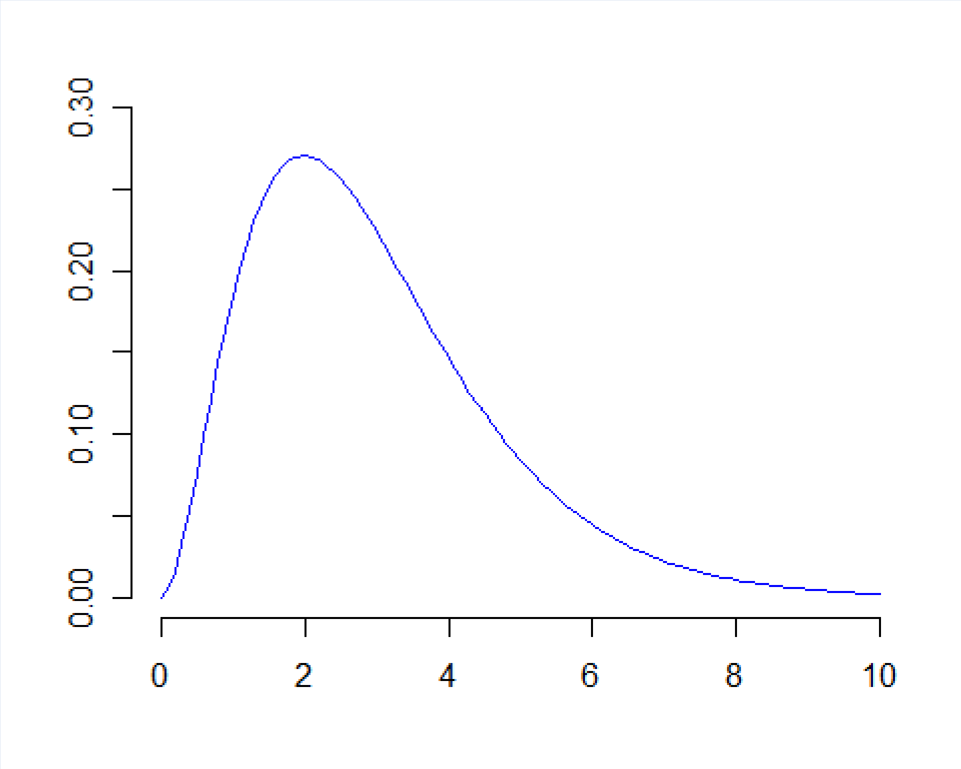
- Μια τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) ***X*** είναι ***συνεχής*** όταν ορίζεται σε ένα διάστημα που αποτελείται από **άπειρες τιμές**, δηλ. η ποσότητα που αναφέρεται στο τυχαίο **πείραμα** έχει **άπειρα αποτελέσματα**.

- <u>Παραδείγματα</u>:
  - Ένας τυχαίος (πραγματικός) **αριθμός** στο διάστημα [0, 1]
  - Η **ταχύτητα** του ανέμου
  - Η **απόσταση** ενός οχήματος από το μπροστινό του όχημα
  - Η **τιμή** μιας μετοχής
  - Το **ύψος** βροχής
  - Η **τιμή σιδήρου** στο αίμα
  - Το **ακριβές βάρος** ενός (τυχαία επιλεγμένου) ατόμου
  - Ο **χρόνος** ζωής μιας συσκευής
  - ….

Συνεχείς Τυχαίες Μεταβλητές

- Η **συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας**, σ.π.π. ***f(x)***, μιας συνεχής τυχαίας μεταβλητής είναι μία **συνεχής, ολοκληρώσιμη** συνάρτηση με τις εξής **ιδιότητες**:





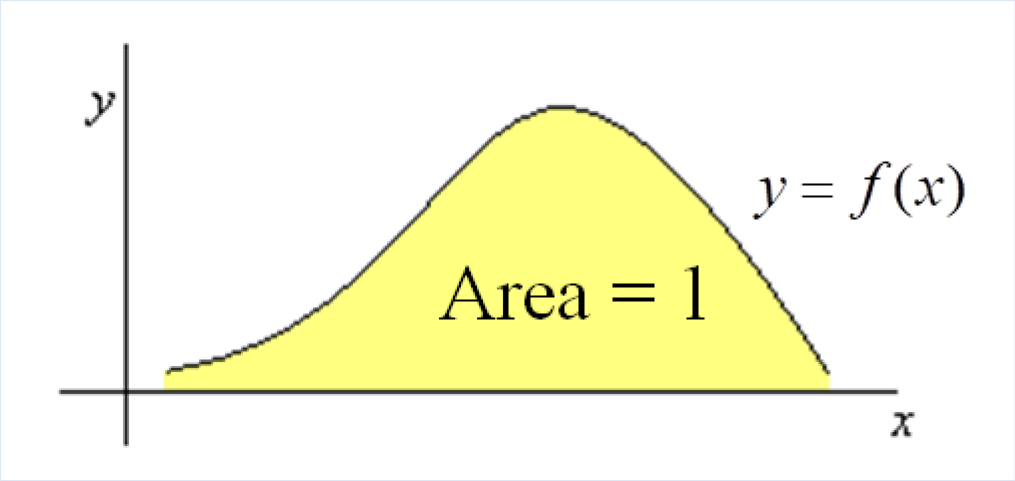
Συνεχείς Τυχαίες Μεταβλητές

- Η **συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας**, σ.π.π. ***f(x)***, μιας συνεχής τυχαίας μεταβλητής είναι μία **συνεχής, ολοκληρώσιμη** συνάρτηση με τις εξής **ιδιότητες**:

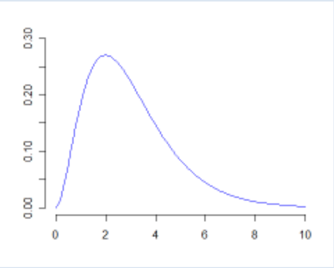
❑ Είναι **μη αρνητική**

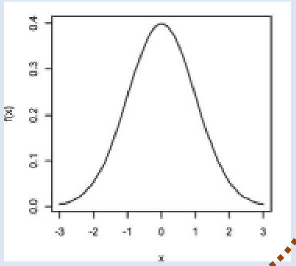
$$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Re$$

❑ Το **ολοκλήρωμά της σε όλο το πεδίο τιμών της είναι 1**



$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$





Συνεχείς Τυχαίες Μεταβλητές

Η αθροιστική σ.κ.π. ***F(x)*** μιας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής είναι **παντού συνεχής**

Ιδιότητες σ.κ.π. $F(x) = P(X \le x) = P(X \in (-\infty, x])$

(**1**). $0 \le F(x) \le 1$

(**2**). $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1 \qquad \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$

(**3**). αν $x_1 < x_2$ τότε $F(x_1) \le F(x_2)$

παντού συνεχής

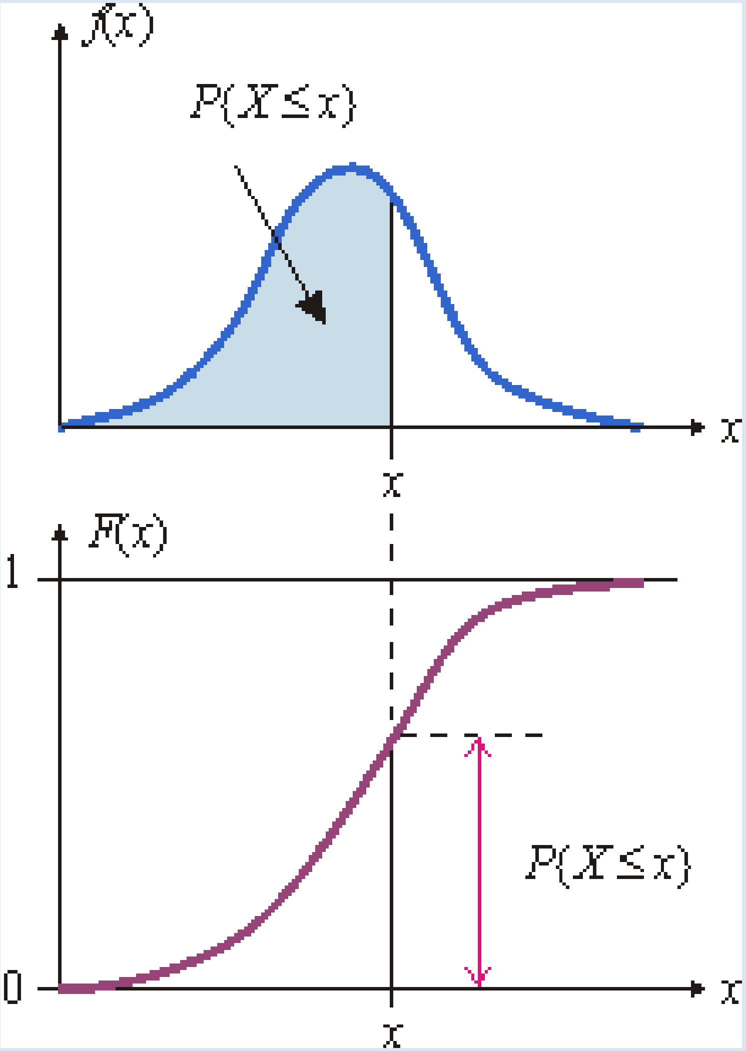
(**4**). $F(x) = \lim_{h \to 0} F(x+h) = F(x^+) = \lim_{h \to 0} F(x-h) = F(x^-)$

(**5**). $\text{Αν } a < b \;\Rightarrow\; P(a < X \le b) = P(a \le X < b) =$
$= P(a < X < b) = P(a \le X \le b) = F(b) - F(a)$

(**6**). $P(X = a) = F(a^+) - F(a)$

(**7**). $P(X > x) = 1 - P(X \le x) = 1 - F(x)$

Συνεχείς Τυχαίες Μεταβλητές



- Η **σ.κ.π.** ***F(x)*** γράφεται ως το **ολοκλήρωμα** της **συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας,** ***f(x)***:

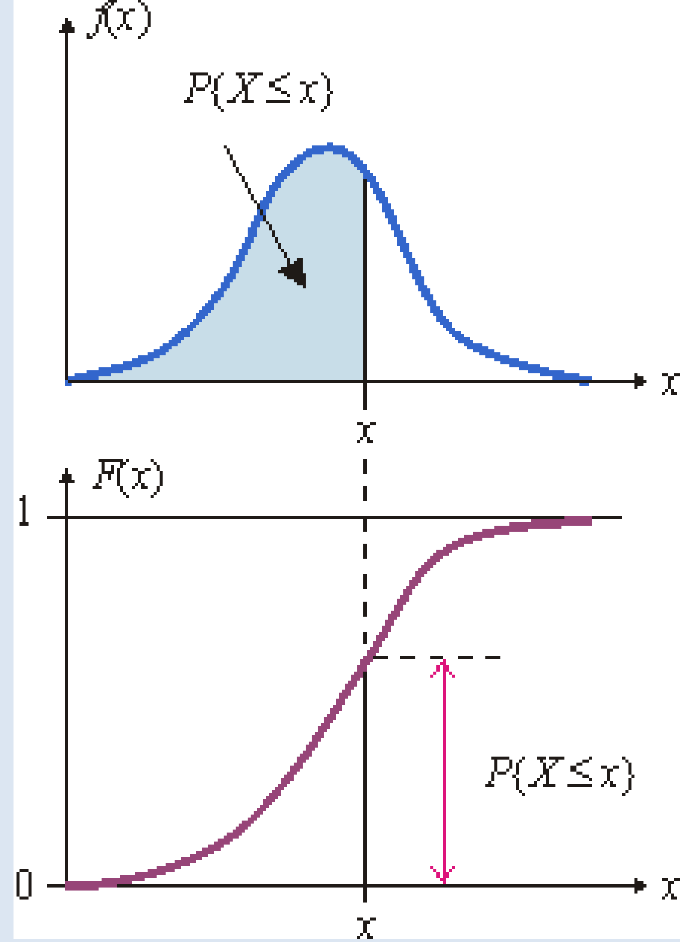
$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})dt$$

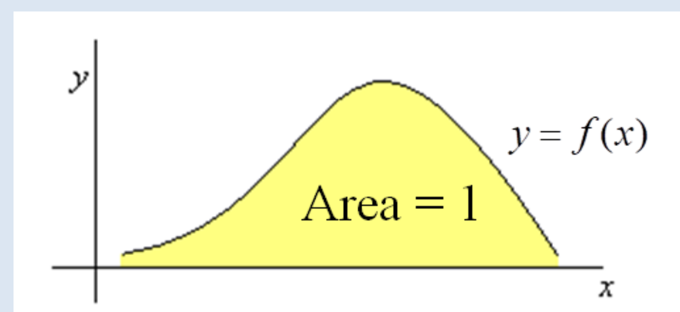
- Έτσι συνολικά ισχύει ότι:

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{t})dt$$

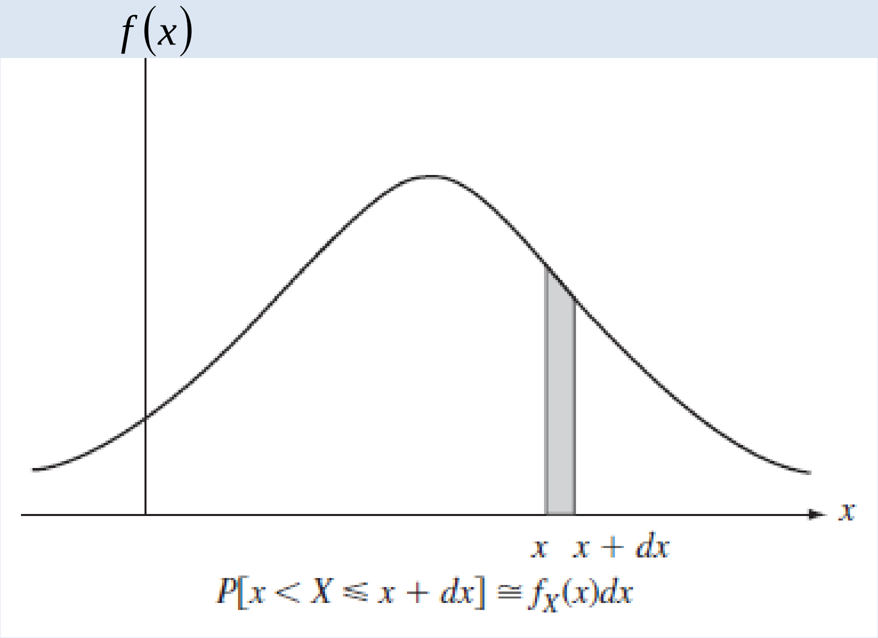
$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \frac{d\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})}{dx}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})dx = 1$$





Υπολογισμός **πιθανότητας σημείου** *x* μιας συνεχής τυχαίας μεταβλητής

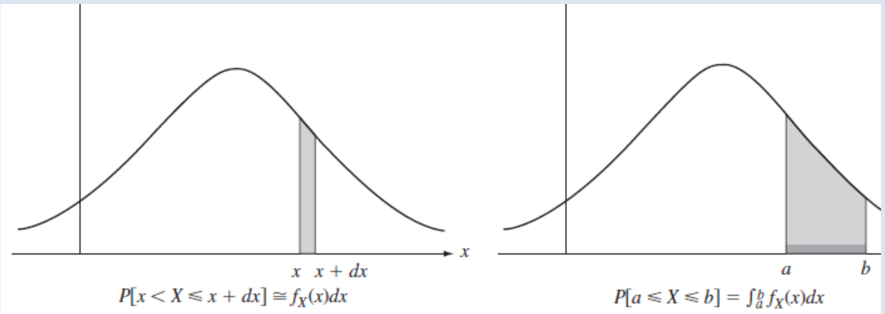


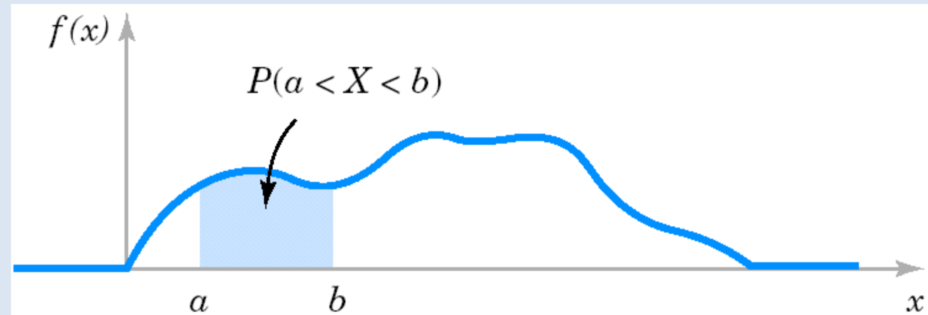
$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

$$P(X = x) = P(x < X \leq x + dx) = F(x + dx) - F(x) =$$

$$= \left(\frac{F(x + dx) - F(x)}{dx} \right) dx = f(x) dx \ (\approx 0)$$

Υπολογισμός **πιθανότητας διαστήματος τιμών** μιας συνεχής τυχαίας μεταβλητής

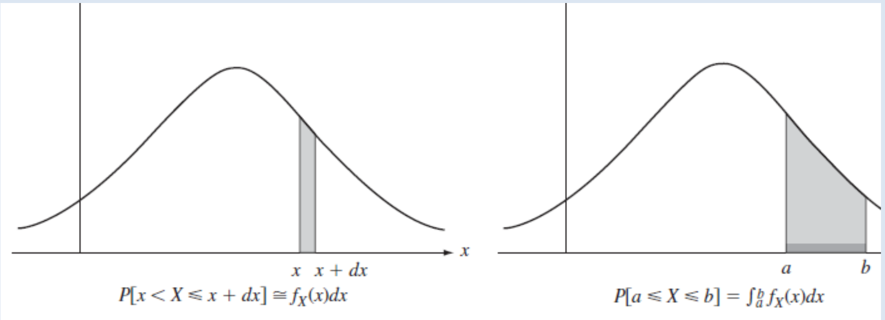


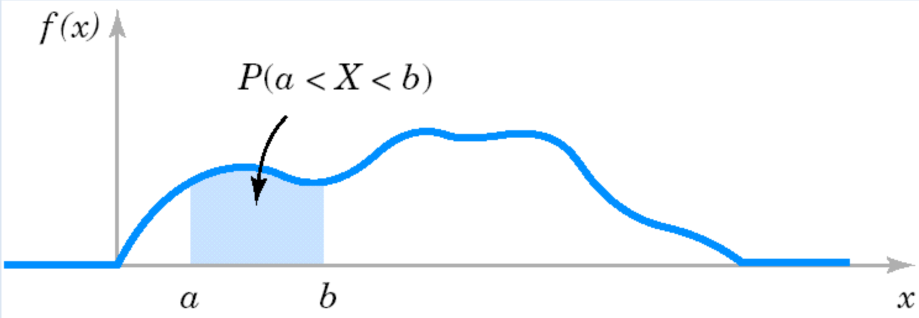


$$P(a \le X \le b) = P(a < X \le b) = P(a \le X < b) = P(a < X < b) =$$

$$= F(b) - F(a) = \int_{-\infty}^{b} f(x)dx - \int_{-\infty}^{a} f(x)dx$$

Υπολογισμός **πιθανότητας διαστήματος τιμών** μιας συνεχής τυχαίας μεταβλητής





$$P(a \le X \le b) = P(a < X \le b) = P(a \le X < b) = P(a < X < b) =$$

$$= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

εμβαδόν *κάτω από τη καμπύλη της σ.π.π. f(x) στο [a, b]*

Υπολογισμός **πιθανότητας ενδεχομένου** μιας συνεχής τυχαίας μεταβλητής

- Η **πιθανότητα** ενός ενδεχομένου ***B*** μιας τ.μ. *X* ορίζεται ως το **ολοκλήρωμά της συνάρτησης πυκνότητας** στο διάστημα τιμών του ενδεχομένου ***B***

$$P(X \in B) = \int_B f(x)dx$$

π.χ.

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

Σημαντικό θεώρημα

- **Κάθε** μη-αρνητική συνάρτηση $g(x) \geq 0$, $\forall x$ με **πεπερασμένο ολοκλήρωμα**: ,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, dx = c$$

μπορεί να μετατραπεί σε **συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.)** ως εξής:

$$f(x) = \frac{1}{c} g(x)$$

Θεώρημα (συν.)

- **Αν** $g(x) \geq 0 \ , \ \forall x$ $\quad \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, dx = c$
- Ορίζοντας $\quad f(x) = \frac{1}{c} g(x)$

- Τότε θα ισχύει ότι:

$$f(x) \geq 0 \ , \ \forall x$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

που είναι οι δύο **βασικές ιδιότητες της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας**.

Παραδείγματα

(1) Έστω τυχαία μεταβλητή *X* με συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = c\, x^2 , \; 0<x<1$$

Να βρεθεί η συνάρτηση κατανομής πιθανότητας *F*(*x*).

Λύση

- Μπορούμε να βρούμε την **σταθερά c** εφαρμόζοντας την ιδιότητα των **συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Rightarrow c\int_0^1 x^2 dx = c\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{c}{3} = 1 \Rightarrow \boxed{c = 3}$$

Παραδείγματα

(1) Έστω τυχαία μεταβλητή *X* με συνάρτηση πυκνότητας

$f(x) = c\, x^2$, $0<x<1$

Να βρεθεί η συνάρτηση κατανομής πιθανότητας $F(x)$.

Λύση

- Εύρεση **αθροιστικής συνάρτησης κατανομής πιθανότητας:**

  για $0<x<1$:

$$c = 3$$

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = c\int_0^x t^2\,dt = c\left.\frac{t^3}{3}\right|_0^x = c\,\frac{x^3}{3} \boxed{= x^3}$$

Παραδείγματα

(1) Έστω τυχαία μεταβλητή *X* με συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = c\,x^2\ ,\ 0<x<1$$

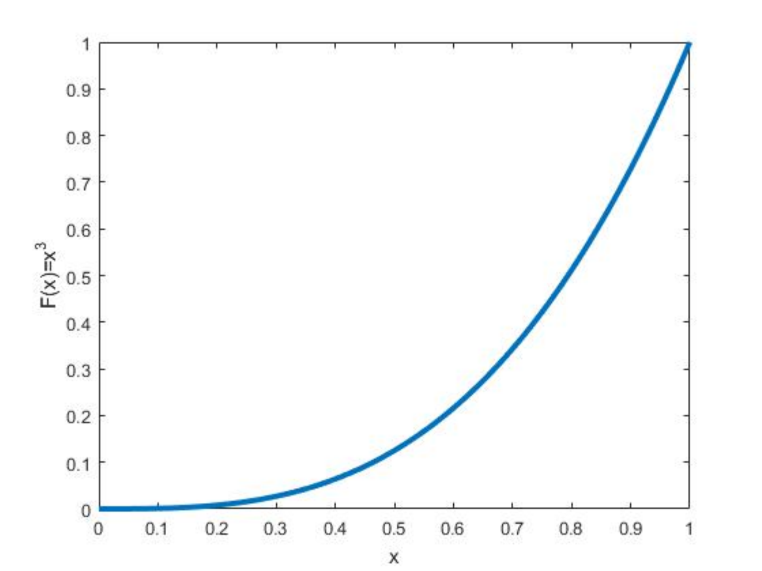
Να βρεθεί η συνάρτηση κατανομής πιθανότητας *F(x)*.

Λύση

- **Αθροιστική συνάρτηση κατανομής πιθανότητας:**

Έτσι:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x\le 0 \\ x^3 & 0<x<1 \\ 1 & x\ge 1 \end{cases}$$



Παραδείγματα

(2) Έστω τυχαία μεταβλητή *X* με συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = c\, x^3 ,\ 0<x<2$$

Να βρεθεί η συνάρτηση κατανομής πιθανότητας *F(x)*.

Λύση

(α) Μπορούμε να βρούμε την **σταθερά c** εφαρμόζοντας την ιδιότητα των συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Rightarrow c\int_0^2 x^3 dx = c\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2 = c4 = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{4}$$

<u>Παραδείγματα</u>

(2) Έστω τυχαία μεταβλητή *X* με συνάρτηση πυκνότητας

$f(x) = c\, x^3 \,,\ 0<x<2$

Να βρεθεί η συνάρτηση κατανομής πιθανότητας *F(x)*.

<u>Λύση</u>

(β) Εύρεση της **συνάρτησης κατανομής πιθανότητας**

για *0<x<2*

$$c = \frac{1}{4}$$

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = c\int_0^x t^3 dt = c\left[\frac{t^4}{4}\right]_0^x = c\,\frac{x^4}{4} = \frac{x^4}{16}$$

Παραδείγματα

(2) Έστω τυχαία μεταβλητή *X* με συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = c\,x^3\ ,\ 0<x<2$$

Να βρεθεί η συνάρτηση κατανομής πιθανότητας *F(x)*.

Λύση

(β) Εύρεση της **συνάρτησης κατανομής πιθανότητας**

Έτσι:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x\le 0 \\ \dfrac{x^4}{16} & 0<x<2 \\ 1 & x\ge 2 \end{cases}$$

(3) Έστω τ.μ. X με σ.π.π. $\alpha > 0$

$$f(x) = ce^{-a|x|}\,, \quad -\infty < x < \infty$$

α) Να υπολογιστεί η σταθερά c.

β) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(|X|<u)$ $(u>0)$.

Λύση

(α)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Rightarrow c\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|x|}dx = c\left(\int_{-\infty}^{0} e^{ax}dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-ax}dx\right) =$$

$$\overset{y=ax}{=} c\frac{1}{a}\left(\int_{-\infty}^{0} e^{y}dy + \int_{0}^{+\infty} e^{-y}dy\right) = \frac{c}{a}(1+1) = 1 \Rightarrow \boxed{c = \frac{a}{2}}$$

(3) Έστω τ.μ. *X* με σ.π.π. $\alpha > 0$

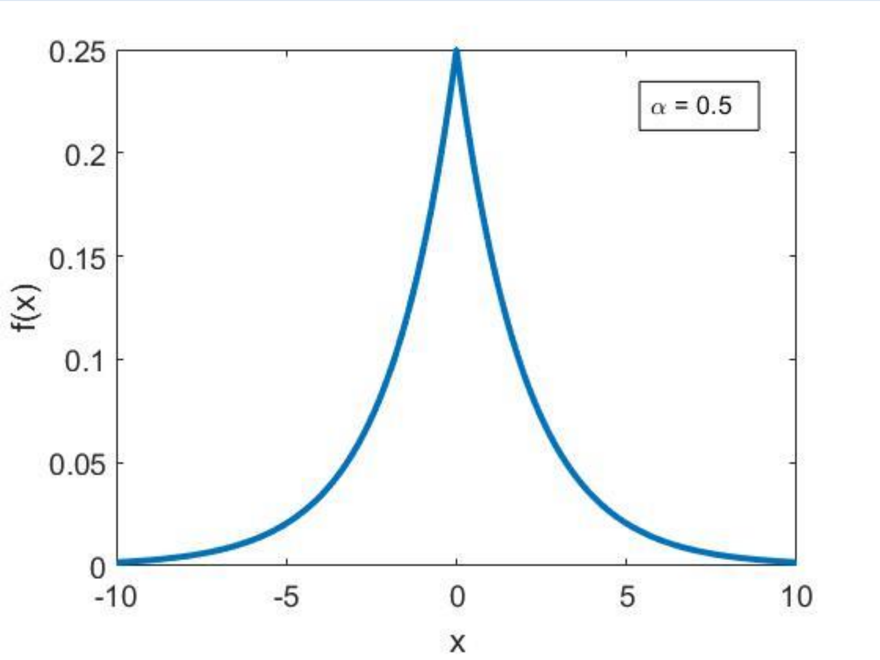
$$f(x) = ce^{-a|x|}\,,\ -\infty < x < \infty$$

α) Να υπολογιστεί η σταθερά *c*.

β) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(|X|<u)$ $(u>0)$.

Λύση

$$f(x) = \frac{a}{2}e^{-a|x|}$$



(3) Έστω τ.μ. X με σ.π.π.

$$f(x) = ce^{-a|x|}\ , \ -\infty < x < \infty$$

α) Να υπολογιστεί η σταθερά c.

β) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(|X|<u)$ $(u>0)$.

<u>Λύση</u>

$$c = \frac{a}{2}$$

(β)

$$P(|X|<u) = \int_{-u}^{+u} f(x)dx = c\int_{-u}^{+u} e^{-a|x|}dx = c\left(\int_{-u}^{0} e^{ax}dx + \int_{0}^{+u} e^{-ax}dx\right) =$$

$$\overset{y=ax}{=} \frac{c}{a}\left(\int_{-au}^{0} e^{y}dy + \int_{0}^{+au} e^{-y}dy\right) = \frac{c}{a}\left(\left(1-e^{-au}\right)-\left(e^{-au}-1\right)\right) = 1-e^{-au}$$

(4) Έστω τ.μ. X με σ.π.π.

$$f(x) = c\left(4x - 2x^2\right),\ 0 < x < 2$$

α) Να υπολογιστεί η σταθερά c.

β) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(X>1)$.

Λύση

(α)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Rightarrow c\int_0^2 \left(4x - 2x^2\right)dx = c\left(4\int_0^2 x dx - 2\int_0^2 x^2 dx\right) =$$

$$= c\left(2x^2\Big|_0^2 - \frac{2}{3}x^3\Big|_0^2\right) = 1 \Rightarrow c = \frac{3}{8}$$

(4) Έστω τ.μ. X με σ.π.π.

$$f\left(x\right)=c\left(4x-2x^{2}\right),\ 0<x<2$$

α) Να υπολογιστεί η σταθερά c.

β) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(X>1)$.

Λύση

(β)

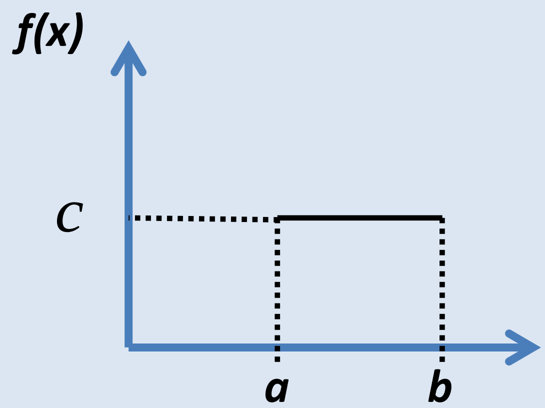
$$P\left(X>1\right)=\int_{1}^{+\infty} f\left(x\right)dx=c\int_{1}^{2}\left(4x-2x^{2}\right)dx=\frac{3}{8}\left(4\int_{1}^{2} xdx-2\int_{1}^{2} x^{2}dx\right)=$$

$$=\frac{3}{4}x^{2}\Big|_{1}^{2}-\frac{1}{4}x^{3}\Big|_{1}^{2}=\frac{1}{2}$$

Γνωστές κατανομές συνεχών τυχαίων μεταβλητών

- ✓ **Ομοιόμορφη** (***Uniform***) κατανομή
- ✓ **Εκθετική** (***Exponential***) κατανομή
- ✓ **Κανονική** (***Normal***) ή Gaussian κατανομή
- ✓ **Γάμμα** (***Gamma***) κατανομή

(A). Ομοιόμορφη (*Uniform*) κατανομή *X ~ U(a,b)*



$$X \sim U(a,b)$$

- Έστω τυχαία μεταβλητή με τιμές στο διάστημα *[a, b]* (Ω_X)
- **Υπόθεση:** Όλες οι τιμές στο διάστημα *[a, b]* είναι ισοπίθανες
- Δηλαδή:

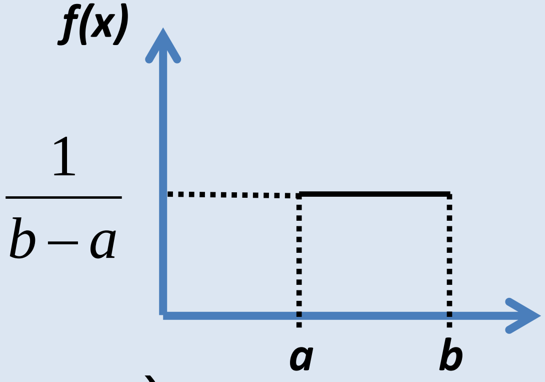
$$f(x)=\begin{cases} c & a \le x \le b \\ 0 & \delta\iota\alpha\varphi o\rho\varepsilon\tau\iota\kappa\acute{\alpha} \end{cases}$$

- **Υπολογισμός**: $\int_a^b f(x)dx = 1 \Rightarrow c\int_a^b dx = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{b-a}$

(A). **Ομοιόμορφη (Uniform)** κατανομή *X ~ U(a,b)* (συν.)

- Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (**σ.π.π.**)

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a<x<b \\ 0 & \alpha\lambda\lambda o\upsilon \end{cases}$$



- Συνάρτηση κατανομής πιθανότητας (**σ.κ.π.**)

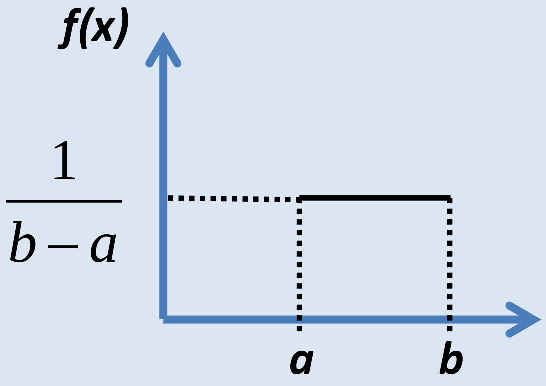
για a<x<b

$$F(x)=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\frac{1}{b-a}\int_{a}^{x} dt=\frac{x-a}{b-a}$$

(A). Ομοιόμορφη (Uniform) κατανομή $X \sim U(a,b)$ (συν.)

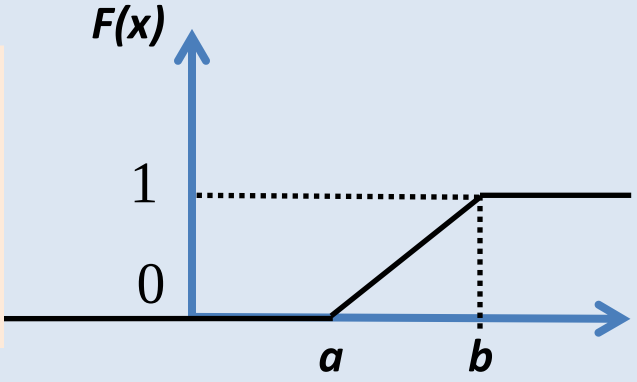
- Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (**σ.π.π.**)

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a<x<b \\ 0 & \alpha\lambda\lambda o\upsilon\end{cases}$$



- Συνάρτηση κατανομής πιθανότητας (**σ.κ.π.**)

$$F(x)=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\begin{cases}0 & x\le a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a<x<b \\ 1 & x\ge b\end{cases}$$



Παράδειγμα Ομοιόμορφης τυχαίας μεταβλητής

- Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του χρόνου που απαιτείται σε μία συναρμολόγηση είναι f(x)=0.1 για 30<x<40 (sec).

  (α) Να προσδιοριστεί το ποσοστό των συναρμολογήσεων που απαιτούν περισσότερο από 35 sec για να ολοκληρωθούν.

  (β) Ποιος χρόνος αντιστοιχεί στο 90% των συναρμολογήσεων;

Λύση

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} 0 & x \le a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a < x < b \\ 1 & x \ge b \end{cases}$$

(α)
$$P(X > 35) = 1 - F(35) = 1 - \frac{x-a}{b-a} = \frac{b-x}{b-a} = 0.5$$

Δηλ. ποσοστό 50%

Παράδειγμα Ομοιόμορφης τυχαίας μεταβλητής

- Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του χρόνου που απαιτείται σε μία συναρμολόγηση είναι f(x)=0.1 για 30<x<40 (sec).

  (α) Να προσδιοριστεί το ποσοστό των συναρμολογήσεων που απαιτούν περισσότερο από 35 sec για να ολοκληρωθούν.

  (β) Ποιος **χρόνος αντιστοιχεί στο 90%** των συναρμολογήσεων;

Λύση

$$F(x)=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\begin{cases}0 & x\le a\\ \dfrac{x-a}{b-a} & a<x<b\\ 1 & x\ge b\end{cases}$$

(α) $$P(X>35)=1-F(35)=1-\frac{x-a}{b-a}=\frac{b-x}{b-a}=0.5$$

Δηλ. ποσοστό 50%

(β) $$find \quad x^* \quad : \quad F(x^*)=0.9$$

$$\frac{x^*-a}{b-a}=0.9\Rightarrow x^*=0.1a+0.9b=39$$

(Β). Εκθετική (***Exponential***) κατανομή ***X ~ E(λ)***

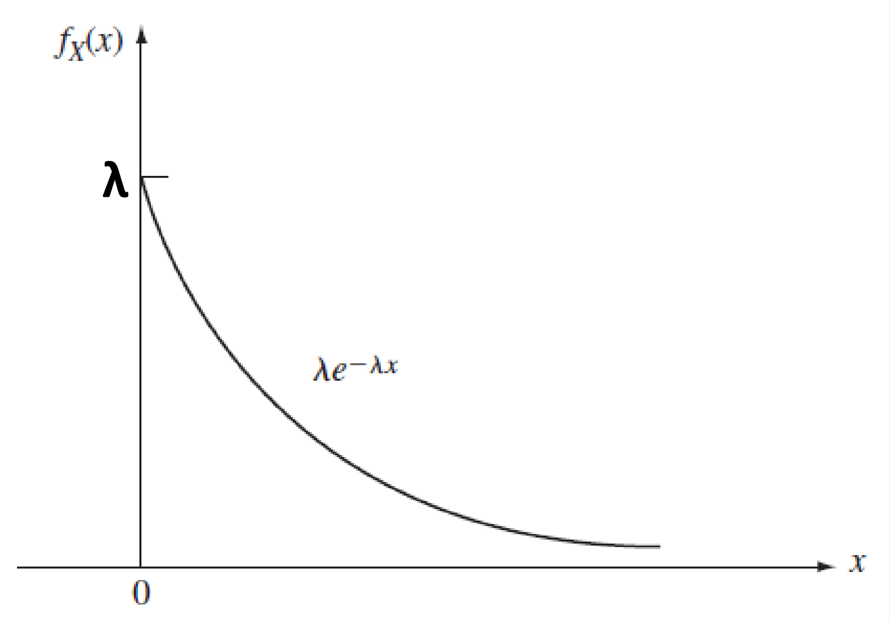
- Χρησιμοποιείται για την περιγραφή **διάρκειας ζωής** και **χρόνων αναμονής**.

- Είναι ανάλογη της ***Γεωμετρικής κατανομής*** σε διακριτούς χώρους.

(Β). Εκθετική (***Exponential***) κατανομή ***X ~ E(λ)***

- Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (**σ.π.π.**)

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x > 0$$



λ>0 : **παράμετρος** κατανομής

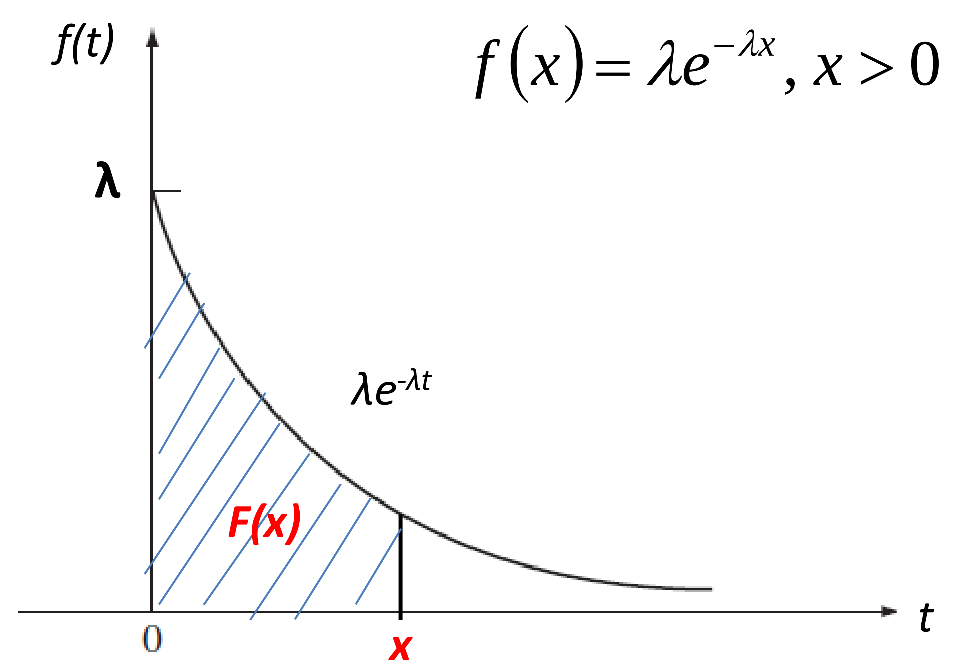
- ***f(0) = λ*** (κορυφή κατανομής)

- Ισχύει ότι $$\int_0^\infty e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$$

(Β). Εκθετική (***Exponential***) κατανομή (συν.)

- Συνάρτηση κατανομής πιθανότητας (**σ.κ.π.**)

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

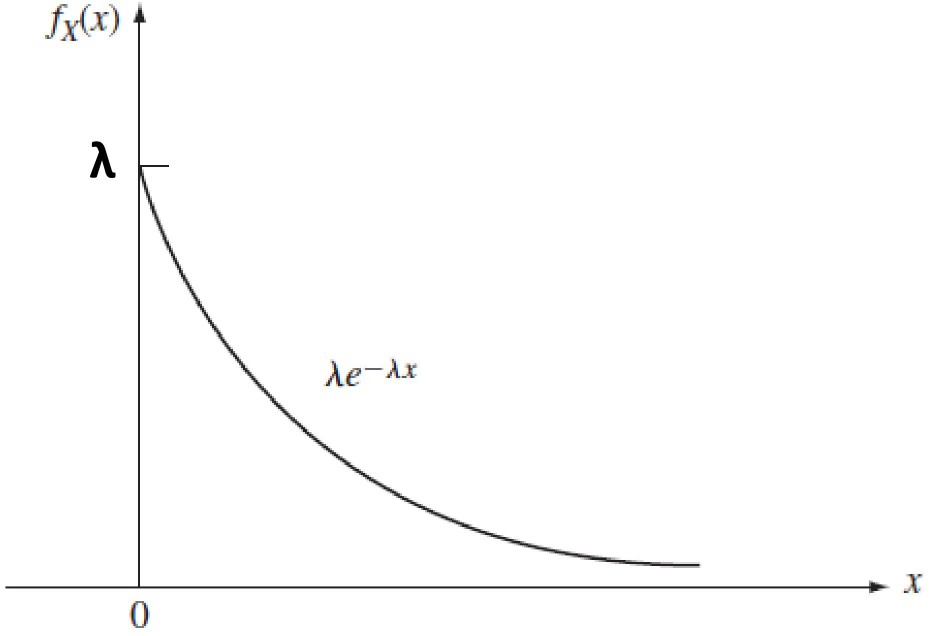


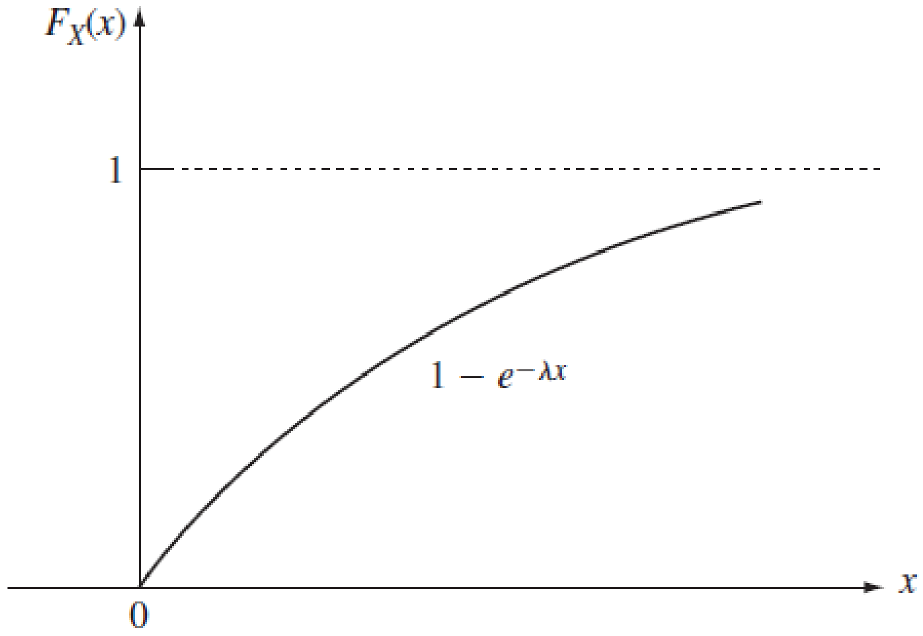
(Β). Εκθετική (***Exponential***) κατανομή (συν.)

- Συνάρτηση κατανομής πιθανότητας (**σ.κ.π.)**

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{0}^{x} \lambda e^{-\lambda t} dt =$$

$$\overset{y=\lambda t}{=} \int_{0}^{\lambda x} e^{-y} dy = 1 - e^{-\lambda x}$$





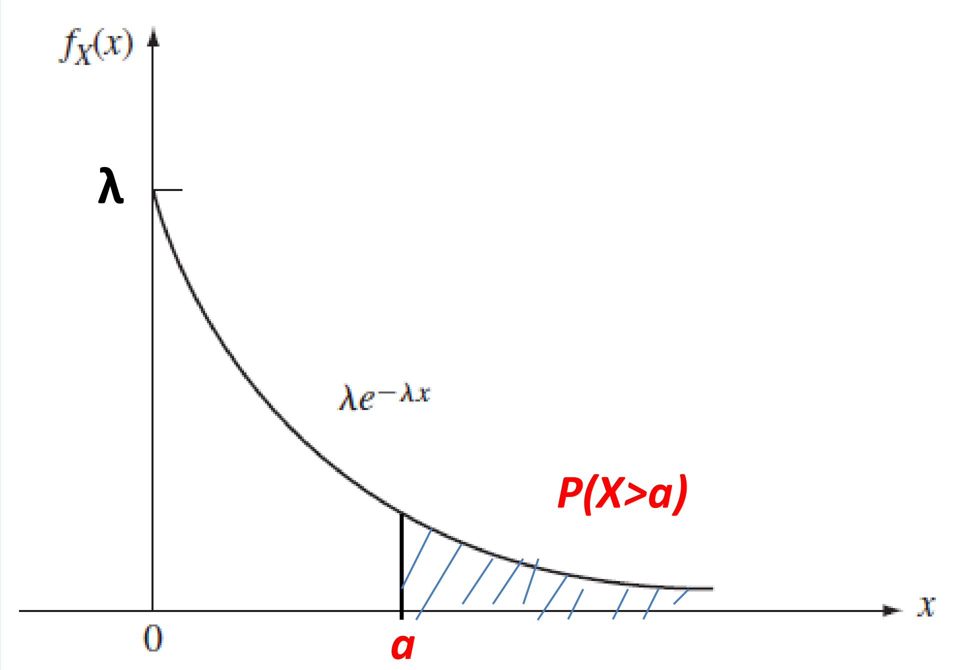
Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (**σ.π.π.**)

Συνάρτηση κατανομής πιθανότητας (**σ.κ.π.**)

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad , \quad x > 0$$

$$F(x) = P(X \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

λ* : *παράμετρος κλίσης



- **Πιθανότητα αναμονής**, δηλ. να **περιμένουμε τουλάχιστον *α* χρονικές στιγμές**,
- **Πιθανότητα διάρκεια ζωής** να είναι **τουλάχιστον *α*** ***χρονικές στιγμές***.

Τρόπος υπολογισμού:

$$P(X>a)=\int_a^\infty f(x)dx=\int_a^\infty \lambda e^{-\lambda x}dx=e^{-\lambda a}$$

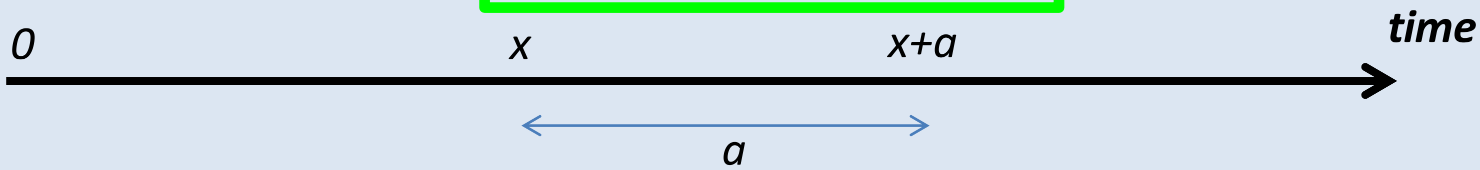
ή

$$F(a)=1-e^{-\lambda a}$$

$$P(X>a)=1-P(X\le a)=1-F(a)=e^{-\lambda a}$$

- Έχουμε ότι: $P(X > x) = 1 - F(x) = e^{-\lambda x}$

- Ισχύει η ιδιότητα της **απώλειας μνήμης**



- Πιθανότητα να περιμένουμε **τουλάχιστον επιπλέον** *a* χρονικές στιγμές, εάν έχουμε περιμένει ήδη ***x*** χρονικές στιγμές δίχως να έχει εμφανιστεί

$$P(X > x + a \mid X > x) = \frac{P(X > x + a \cap X > x)}{P(X > x)} = \frac{P(X > x + a)}{P(X > x)} =$$
$$= \frac{e^{-\lambda(x+a)}}{e^{-\lambda x}} = e^{-\lambda a} = P(X > a)$$

<u>Παράδειγμα</u>

- Η **διάρκεια ζωής** (σε έτη) των κατοίκων μιας χώρα είναι μια **εκθετική τυχαία μεταβλητή** με παράμετρο ***λ=1/70***. Να βρεθεί η πιθανότητα:

α) να πάρει σύνταξη ένα νεογέννητο όταν το όριο ηλικίας συνταξιοδότησης είναι το 67ο έτος.

β) να συνταξιοδοτηθεί ένας κάτοικος ο οποίος είναι σήμερα σε ηλικία 47 ετών.