έμα 1 (20%). Απαντήστε στα παρακάτω ερωτήματα

) Τι είναι ο συντελεστής συσχέτισης μεταξύ δύο τυχαίων μεταβλητών; Τι συμπεραίνουμε αν η τιμή του ίναι 0. Είναι δυνατόν να έχει αρνητική τιμή;

β) Αποδείξτε τη γνωστή σχέση της διακύμανσης: $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

γ) Τι είναι το 50-οστό ποσοστημόριο? Είναι ποτέ δυνατόν να ισούται με το μέσο? Υπάρχει το 110-οστό ποσοστημόριο? Ποια από τα ποσοστημόρια σημειώνονται στα θηκογράμματα (boxplots)?

δ) Να αποδειχθεί ότι αν δύο ενδεχόμενα είναι ανεξάρτητα τότε και τα συμπληρώματά τους είναι επίσης ανεξάρτητα.

ε) Τι θα πρέπει να συμβαίνει για να ισχύει η σχέση μεταξύ δύο ενδεχομένων: $P(A \cup B)=P(A)+(B)$;

Θέμα 2 (20 %). Ένας παίκτης παίζει ένα παιχνίδι ρίχνοντας ένα ζάρι. Αν έρθει 1 ή 6 τότε κερδίζει και στα το παιχνίδι. Σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση, δηλ. αν έρθει (2, 3, 4 ή 5), επαναλαμβάνεται η ρίψη του ζα

Ποια είναι η πιθανότητα να τελειώσει το παιχνίδι με την πρώτη ζαριά;

...ανότητα να μην καταφέρει να κερδίσει μετά από 4 συνεχόμενες ζαριές;

...ανότητα να κερδίσει την 4η συνεχόμενη ζαριά;

...αναμενόμενος αριθμός συνεχόμενων ζαριών μέχρις ότου κερδίσει;

...α 3 (20%). Η αντοχή ενός υλικού (σε μονάδες δύναμης) ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέσ ...αι διακύμανση 4. Το κόστος κατασκευής μιας συσκευής εξαρτάται αποκλειστικά από αυτό το ...κεκριμένα, αν η αντοχή του είναι μεγαλύτερη της τιμής 48 τότε το κόστος είναι 15 ευρώ, ενώ σε α ...ρίπτωση (μικρότερη ή ίση τιμή του 47) το κόστος πέφτει στα 5 ευρώ.

α) Να υπολογιστεί η μέση τιμή και η διακύμανση του κόστους κατασκευής της συσκευής.

β) Να υπολογιστεί η πιθανότητα σε μια παρτίδα 6 συσκευών το πολύ μία από αυτές να έχει κατασ με κόστος 5 ευρώ.

Θέμα 4 (20%). Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας δύο τυχαίων μεταβλητών, X, Y, δίνετα παρακάτω σχέση:

$$f(x,y) = c\,x^2 y \ , \ 0<x<3 \text{ και } 0<y<2$$

α) Να βρεθεί η σταθερά c.

β) Να βρεθούν οι περιθώριες κατανομές και οι μέσες τιμές των δύο μεταβλητών,

γ) Να υπολογιστούν οι πιθανότητες $P(X<1, Y<1)$, $P(X<2.5)$, $P(1<Y<2.5)$.

έμα 5 (20%). Ο ισχυρισμός ότι ο μέσος φοιτητής του τμήματος καταφέρνει να περνά 5 μα ...ξεταστική αμφισβητείται. Για τον έλεγχό του ρωτήσαμε 10 τυχαίους φοιτητές για τις επιδό ...λευταία εξεταστική και πήραμε τις εξής απαντήσεις: {2, 7, 4, 8, 9, 5, 11, 3, 7, 4}. Μπορούμε να ...ε επίπεδο σημαντικότητας 5% αν ο ισχυρισμός αυτός είναι αληθής;

Καλή επιτυχία

... δύο ενδεχομένων: $P(A \cup B)=P(A)+(B)$;

Θέμα 2 (20 %). Ένας παίκτης παίζει ένα παιχνίδι ρίχνοντας ένα ζάρι. Αν έρθει 1 ή 6 τότε κερδίζει και σταματά το παιχνίδι. Σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση, δηλ. αν έρθει (2, 3, 4 ή 5), επαναλαμβάνεται η ρίψη του ζαριού.

α) Ποια είναι η πιθανότητα να τελειώσει το παιχνίδι με την πρώτη ζαριά;

β) Ποια είναι η πιθανότητα να μην καταφέρει να κερδίσει μετά από 4 συνεχόμενες ζαριές;

γ) Ποια είναι η πιθανότητα να κερδίσει την 4η συνεχόμενη ζαριά;

δ) Ποιος είναι ο αναμενόμενος αριθμός συνεχόμενων ζαριών μέχρις ότου κερδίσει;

Θέμα 3 (20%). Η αντοχή ενός υλικού (σε μονάδες δύναμης) ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή 50 και διακύμανση 4. Το κόστος κατασκευής μιας συσκευής εξαρτάται αποκλειστικά από αυτό το υλικό. Συγκεκριμένα, αν η αντοχή του είναι μεγαλύτερη της τιμής 48 τότε το κόστος είναι 15 ευρώ, ενώ σε αντίθετη περίπτωση (μικρότερη ή ίση τιμή του 47) το κόστος πέφτει στα 5 ευρώ.

α) Να υπολογιστεί η μέση τιμή και η διακύμανση του κόστους κατασκευής της συσκευής.

β) Να υπολογιστεί η πιθανότητα σε μια παρτίδα 6 συσκευών το πολύ μία από αυτές να έχει κατασκευαστεί με κόστος 5 ευρώ.

Θέμα 4 (20%). Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας δύο τυχαίων μεταβλητών, *X*, *Y*, δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$f(x,y) = c\,x^2 y \ , \ 0<x<3 \text{ και } 0<y<2$$

α) Να βρεθεί η σταθερά *c*.

β) Να βρεθούν οι περιθώριες κατανομές και οι μέσες τιμές των δύο μεταβλητών,

γ) Να υπολογιστούν οι πιθανότητες $P(X<1, Y<1)$, $P(X<2.5)$, $P(1<Y<2.5)$.

Θέμα 5 (20%). Ο ισχυρισμός ότι ο μέσος φοιτητής του τμήματος καταφέρνει να περνά *5* μαθήματα σε μια εξεταστική αμφισβητείται. Για τον έλεγχό του ρωτήσαμε *10* τυχαίους φοιτητές για τις επιδόσεις τους στην τελευταία εξεταστική και πήραμε τις εξής απαντήσεις: *{2, 7, 4, 8, 9, 5, 11, 3, 7, 4}*. Μπορούμε να διαπιστώσουμε με επίπεδο σημαντικότητας 5% αν ο ισχυρισμός αυτός είναι αληθής;

Καλή επιτυχία

Προπτυχιακό Μάθημα: «Πιθανότητες & Στατιστική»

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

(Εξεταστική Σεπτέμβριος 2023)

Ονοματεπώνυμο: .... (Α.Μ. ....)

(Διάρκεια εξέτασης: **2 ώρες**)

Θέμα 1 (20%). Απαντήστε στα παρακάτω ερωτήματα (δικαιολογήστε την απάντησή σας)

α) Αν τα ενδεχόμενα *Α, Β, Γ* είναι ανεξάρτητα και γνωρίζετε ότι $P(A) > P(B)$, τότε ισχύει πως $P(A|\Gamma)>P(B|\Gamma)$;

β) Ποια είναι η κατανομή του αθροίσματος 2 ανεξάρτητων τ.μ. $Z=X+Y$;

γ) Τι είναι η διάμεσος και τι η κορυφή μιας κατανομής; Υπάρχει περίπτωση να ταυτίζονται;

δ) Ποια είναι η κατά προσέγγιση κατανομή του μέσου όρου n ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με κοινό μέσο μ και κοινή διακύμανση σ^2 ;

ε) Τι είναι τα *z-test*, *t-test* και *P-value* στον στατιστικό έλεγχο;

Θέμα 2 (20 %). Ο χρόνος συναρμολόγησης *Χ* μιας συσκευής είναι εκθετική τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή 30 sec. Να υπολογιστούν τα παρακάτω:

α) Η διασπορά, η κορυφή και η διάμεσος αυτού του χρόνου.

β) Το ποσοστό των συναρμολογήσεων που απαιτούν περισσότερο από χρόνο 40 sec.

γ) Το αναμενόμενο (μέσο) κόστος συναρμολόγησης (*K*) της συσκευής αν γνωρίζεται πως αυτό προκύπτει από τον μαθηματικό τύπο: $K(X) = X^2 +2X +5$.

Θέμα 3 (20%). Η απόκλιση (σε μέτρα) *Χ* των αλμάτων εις μήκος του Τεντόγλου (αθλητή στίβου) από τα 8.00 μέτρα είναι μια συνεχής κανονική τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή 0 και τυπική απόκλιση 1. Ο αθλητής κερδίζει [...]οιο μετάλλιο αν η απόκλιση του άλματός του δεν ξεπερνά προς τα κάτω το ¼ του μέτρου, δηλ. $X > -1/4$.

[...]α υπολογιστεί η πιθανότητα ένα οποιοδήποτε άλμα να είναι επιτυχημένο, δηλ. να κερδίσει μετάλλιο.

[...]α είναι η πιθανότητα να κάνει τουλάχιστον 2 επιτυχημένα άλματα σε 6 συνεχόμενα άλματα;

[...]πολογιστεί το πλήθος των συνεχόμενων αλμάτων που απαιτούνται έτσι ώστε να κερδίσει μετάλλι[ο με πιθανό]τητα τουλάχιστον 0.98.