Ροπές τυχαίων μεταβλητών

(*Moments of random variables*)

Ροπές τυχαίων μεταβλητών

Ορισμός

- **Ροπές** ονομάζονται οι **αναμενόμενες** (ή **οι μέσες**) **τιμές** των **δυνάμεων** μιας τυχαίας μεταβλητής.

Ροπές

- καλύπτουν το **σύνολο των χαρακτηριστικών** της τυχαίας μεταβλητής που μπορούν να εξαχθούν με βάση την κατανομή της,

- προσδιορίζουν **μέτρα τάσης** της μεταβλητής,

- βοηθούν στη βαθύτερη **μελέτη** και **κατανόηση** της τυχαίας μεταβλητής.

2 ειδών ροπές

- **Απλές ροπές**: αναμενόμενες τιμές των **δυνάμεων** της τυχαίας μεταβλητής.
- **Κεντρικές ροπές**: αναμενόμενες τιμές των **δυνάμεων γύρω από το μέσο** της τυχαίας μεταβλητής.

Απλές Ροπές

Έστω τυχαία μεταβλητή ***X*** με σ.π.π. ***f(x)***.

- **Απλή ροπή *n*-τάξης:** $$\mu_n = E\left(X^n\right)$$

$$\mu_n = E\left(X^n\right) = \sum_x x^n f(x)$$ αν X **διακριτή** τ.μ.

$$\mu_n = E\left(X^n\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x)dx$$ αν X **συνεχής** τ.μ.

Προτάσεις

- Η **ροπή *n*-τάξης** υπάρχει περί την αρχή, όταν και μόνο όταν $\boldsymbol{E(|X|^n) < \infty}$
- **Αν** υπάρχει η ροπή ***n***-τάξης, δηλ. $\boldsymbol{E(|X|^n) < \infty}$, **τότε** υπάρχει και η ροπή ***m***-τάξης ∀ ***m<n***

Απόδειξη

Ισχύει ότι $|x|^m \leq 1+|x|^n \qquad m < n$

Τότε:

$$E(|X|^{\boldsymbol{m}}) \leq E(1+|X|^{\boldsymbol{n}}) = 1 + E(|X|^{\boldsymbol{n}}) < \infty$$

• Κεντρικές Ροπές (γύρω από το μέσο)

$$\sigma_n = E\left(\left(X-\mu\right)^n\right)$$

Αν τ.μ. *X* **διακριτή**:

$$\sigma_n = E\left(\left(X-\mu\right)^n\right) = \sum_x \left(x-\mu\right)^n f\left(x\right)$$

Αν τ.μ. *X* **συνεχής**:

$$\sigma_n = E\left(\left(X-\mu\right)^n\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x-\mu\right)^n f\left(x\right) dx$$

Πρόταση 1: Σχέση μεταξύ κεντρικής (***σ**$_n$*) και απλής (***μ**$_k$*) ροπής

$$\sigma_n = E\left((X-\mu)^n\right) = E\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}X^k(-\mu)^{n-k}\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}E\left(X^k\right)(-\mu)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mu_k(-\mu)^{n-k} =$$

$$= (m-\mu)^n$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$$

όπου ***m*** είναι το **σύνολο των απλών ροπών** της μεταβλητής

$$m^k = E\left(X^k\right) = \mu_k$$

Πρόταση 1: Σχέση μεταξύ κεντρικής (***σ**$_n$*) και απλής (***μ**$_k$*) ροπής

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mu_k (-\mu)^{n-k} = (m-\mu)^n$$

$$m^k = E(X^k) = \mu_k$$

- Η **κεντρική ροπή *n*-τάξης** είναι το **δυωνυμικό ανάπτυγμα** της **διαφοράς** των ***n* απλών ροπών** από το **μέσο**
- ή αλλιώς η ***ολική διαφορά*** των απλών ροπών από τη μέση τιμή

Πρόταση 1: Σχέση μεταξύ κεντρικής (***σ**$_n$*) και απλής (***μ**$_k$*) ροπής

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mu_k (-\mu)^{n-k} = (m-\mu)^n$$

$$m^k = E\left(X^k\right) = \mu_k$$

- π.χ. για ***n=2***

$$\sigma_2 = (m-\mu)^2 = \cancelto{1}{\mu_0}\mu^2 - 2\cancelto{\mu}{\mu_1}\mu + \mu_2 =$$
$$= \mu_2 - \mu^2 = E\left(X^2\right) - \left(E(X)\right)^2$$

- που είναι **η γνωστή σχέση της *διακύμανσης***

Πρόταση 2: Σχέση μεταξύ απλής (***μ***$\boldsymbol{\mu_n}$) και κεντρικής ($\boldsymbol{\sigma_k}$) ροπής

$$\mu_n = E\left(X^n\right) = E\left(\left(X-\mu+\mu\right)^n\right) = E\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(X-\mu\right)^k \mu^{n-k}\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} E\left(\left(X-\mu\right)^k\right)\mu^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sigma_k \mu^{n-k} =$$

$$= \left(s+\mu\right)^n$$

$$\left(a+b\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

όπου $s^k = E\left(\left(X-\mu\right)^k\right) = \sigma_k$ οι **κεντρικές ροπές *k*-τάξης**

(*k*<*n*)

Πρόταση 2: Σχέση μεταξύ απλής (***μ_n***) και κεντρικής (***σ_k***) ροπής

$$\mu_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sigma_k \mu^{n-k} = (s+\mu)^n$$

$$s^k = E\left(\left(X-\mu\right)^k\right) = \sigma_k$$

- Η **απλή ροπή *n*-τάξης** είναι το **διωνυμικό ανάπτυγμα** του **αθροίσματος** των ***n* κεντρικών ροπών** με το **μέσο** της τυχαίας μεταβλητής
- ή αλλιώς το ***ολικό άθροισμα*** των κεντρικών ροπών με τη μέση τιμή

Πρόταση 2: Σχέση μεταξύ απλής ($\boldsymbol{\mu_n}$) και κεντρικής ($\boldsymbol{\sigma_k}$) ροπής

$$\mu_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sigma_k \mu^{n-k} = (s+\mu)^n$$

$$s^k = E\left((X-\mu)^k\right) = \sigma_k$$

- π.χ. για ***n=2***

$$\mu_2 = (s+\mu)^2 = \overset{1}{\sigma_0}\mu^2 + 2\overset{0}{\sigma_1}\mu_1 + \sigma_2 = \mu^2 + \sigma_2$$

- που ισχύει από την **γνωστή σχέση της *διακύμανσης***

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X) \Rightarrow \boldsymbol{E\left(X^2\right) = E^2(X) + V(X)}$$

Ειδικές ροπές

- **μέση τιμή** μ είναι η απλή ροπή **1ης τάξης**,
- **διακύμανση** σ^2 είναι η κεντρική ροπή **2ης τάξης**

Σημαντικές ροπές

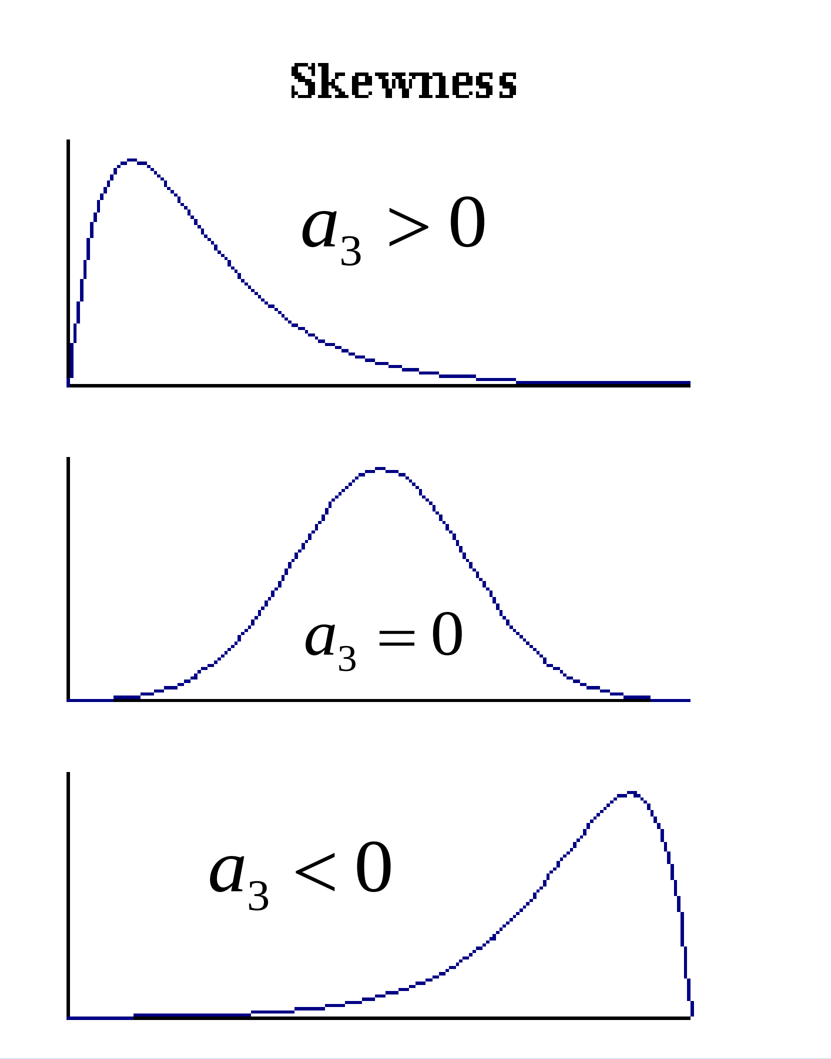
- **Λοξότητα (*skewness*) :** ροπή **3ης τάξης**
- **Κυρτότητα (*kurtosis*) :** ροπή **4ης τάξης**

Λοξότητα (*skewness*)

εκφράζει τον βαθμό **συμμετρίας** της κατανομής

$$\boldsymbol{a_3} = \frac{E\left((X-\mu)^3\right)}{\sigma^3}$$

στη περίπτωση της **κανονικής** κατανομής ισχύει ότι: ***a_3 = 0***

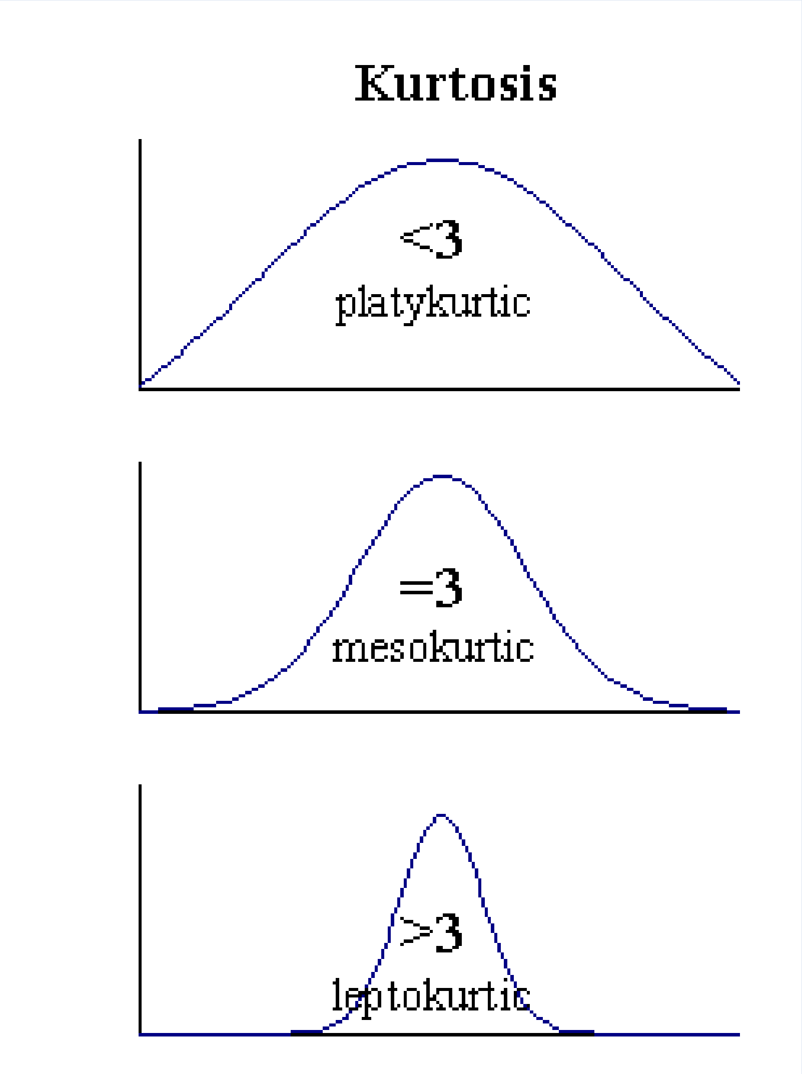


Κυρτότητα (*kurtosis*)

εκφράζει τον βαθμό **αιχμηρότητας** της κατανομής

$$\boldsymbol{a_4} = \frac{E\left((X-\mu)^4\right)}{\sigma^4}$$

στη περίπτωση της **κανονικής** κατανομής ισχύει ότι: $\boldsymbol{\alpha_4 = 3}$



Ροπογεννήτρια
(moment generation function - mgf)

- **Ορισμός:** Η συνάρτηση ροπογεννήτριας είναι μία συνάρτηση $M : \Re \rightarrow [0, \infty)$ που ορίζεται ως:

$$M(t) = E\left(e^{tX}\right)$$

- Ανάλογα με τον τύπο της τυχαίας μεταβλητής:

αν ***X*** **διακριτή** τ.μ. $M(t) = E\left(e^{tX}\right) = \sum_{x} e^{tx} f(x)$

αν ***X*** **συνεχής** τ.μ. $M(t) = E\left(e^{tX}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x) dx$

Υπολογισμός ροπών με ροπογεννήτρια

$$M(t) = E\left(e^{tX}\right)$$

Υπολογισμός 1ης ροπής *E(X)*

- Παίρνουμε την **1η παράγωγο ως προς t**

$$\frac{d}{dt}M(t) = \frac{d}{dt}E\left(e^{tX}\right) = E\left(\frac{d}{dt}e^{tX}\right) = E\left(Xe^{tX}\right)$$

- **Θέτοντας *t=0*** παίρνουμε την **1η ροπή *E(X)*.** Δηλαδή:

$$\mu_1 (= \mu) = E(X) = \left.\frac{d}{dt}M(t)\right|_{t=0}$$

Υπολογισμός ροπών με ροπογεννήτρια

- Παραγωγίζοντας στη συνέχεια ξανά παίρνουμε:

$$\frac{d^2}{dt^2}M(t)=\frac{d}{dt}\left(E\left(Xe^{tX}\right)\right)=E\left(X^2e^{tX}\right)$$

- **Θέτοντας *t=0*** παίρνουμε την **2η ροπή** ***E(X²)***. Δηλαδή:

$$\mu_2=E\left(X^2\right)=\frac{d^2}{dt^2}M(t)\Big|_{t=0}$$

Υπολογισμός ροπών με ροπογεννήτρια

- Γενικά η **ροπή *n*-τάξης** υπολογίζεται με την χρήση ροπογεννήτριας ως εξής:

$$\mu_n = E\left(X^n\right) = \left.\frac{d^n M(t)}{dt^n}\right|_{t=0}$$

Χρήσιμες σχέσεις

- Για ***t=0***: $$M(0) = E\left(e^{0X}\right) = E(1) = 1$$

- Υπολογισμός της ροπογεννήτριας μιας **γραμμικής συνάρτησης *Y=aX+b*** :

$$M_Y(t) = E\left(e^{tY}\right) = E\left(e^{t(aX+b)}\right) = E\left(e^{bt}e^{taX}\right) =$$
$$= e^{bt}E\left(e^{(at)X}\right) = e^{bt}M_X(at)$$

Ροπογεννήτριες γνωστών κατανομών

1. Ροπογεννήτρια Διωνυμικής: *X~b(n,ρ)*

$$f(x)=\binom{n}{x}\rho^{x}(1-\rho)^{n-x} \quad x=\{0,1,2,\dots,n\}$$

$$M(t)=E\left(e^{tX}\right)=\sum_{x}e^{tx}f(x)=\sum_{x=0}^{n}e^{tx}\binom{n}{x}\rho^{x}(1-\rho)^{n-x}=$$

$$=\sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x}\left(\rho e^{t}\right)^{x}(1-\rho)^{n-x}=\left(\rho e^{t}+1-\rho\right)^{n}$$

διωνυμικό ανάπτυγμα

$$(a+b)^{n}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k}b^{n-k}$$

Υπολογισμός του **μέσου** και **διακύμανσης** της Διωνυμικής με τη χρήση της ροπογεννήτριας

$$M(t) = \left(\rho e^t + 1 - \rho\right)^n$$

$$\mu = E(X) = \frac{d}{dt} M(t)\Big|_{t=0} = n\left(\rho e^t + 1 - \rho\right)^{n-1} \rho e^t\Big|_{t=0} = n\rho$$

$$E(X^2) = \frac{d^2 M(t)}{dt^2}\Bigg|_{t=0} = n\rho\left[(\rho e^t + 1 - \rho)^{n-1} e^t + (n-1)(\rho e^t + 1 - \rho)^{n-2} \rho e^{2t}\right]\Big|_{t=0}$$

$$= n\rho + n(n-1)\rho^2$$

$$V(X) = E\left(X^2\right) - E^2(X) = n\rho + n(n-1)\rho - (n\rho)^2 = n\rho(1-\rho)$$

2. Ροπογεννήτρια της Poisson: *X~P(λ)*

$$f\left(x\right)=\frac{\lambda^{x}}{x!}e^{-\lambda}$$

$$M\left(t\right)=E\left(e^{tX}\right)=\sum_{x}e^{tx}f\left(x\right)=\sum_{x=0}^{n}e^{tx}\frac{\lambda^{x}}{x!}e^{-\lambda}=$$

$$=e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{n}\frac{\left(\lambda e^{t}\right)^{x}}{x!}=e^{-\lambda}e^{\lambda e^{t}}=e^{\lambda(e^{t}-1)}$$

$$e^{a}=\sum_{x=0}^{n}\frac{a^{x}}{x!}$$

Υπολογισμός του μέσου και διακύμανσης της Poisson με τη χρήση της ροπογεννήτριας

$$M(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$$

$$\mu = E(X) = \frac{d}{dt} M(t)\Big|_{t=0} = \lambda e^t e^{\lambda\left(e^t - 1\right)}\Big|_{t=0} = \lambda e^{\lambda 0} = \lambda$$

$$E\left(X^2\right) = \frac{d^2 M(t)}{dt^2}\Big|_{t=0} = \lambda e^{-\lambda}\left(\lambda e^t + 1\right) e^{\lambda e^t + t}\Big|_{t=0} = \lambda^2 + \lambda$$

$$V(X) = E\left(X^2\right) - E^2(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

3. Ροπογεννήτρια της Εκθετικής: *X~E(λ)*

$$f\left(x\right)=\lambda e^{-\lambda x}$$

$$M\left(t\right)=E\left(e^{tX}\right)=\int_0^{\infty} e^{tx} f(x)dx=\int_0^{\infty} e^{tx}\lambda e^{-\lambda x}dx=$$

$$=\lambda\int_0^{\infty} e^{-(\lambda-t)x}dx=\frac{\lambda}{\lambda-t} \qquad (\upsilon\pi o\theta\varepsilon\tau o\upsilon\mu\varepsilon\ o\tau\iota\ \lambda>t)$$

Υπολογισμός του μέσου και διακύμανσης της Εκθετικής με τη χρήση ροπογεννήτριας

$$M(t)=\frac{\lambda}{\lambda-t}$$

$$\mu=E(X)=\frac{d}{dt}M(t)\Big|_{t=0}=\frac{\lambda}{(\lambda-t)^2}\Big|_{t=0}=\frac{1}{\lambda}$$

$$E(X^2)=\frac{d^2M(t)}{dt^2}\Big|_{t=0}=\frac{2\lambda}{(\lambda-t)^3}\Big|_{t=0}=\frac{2}{\lambda^2}$$

$$V(X)=E(X^2)-E^2(X)=\frac{2}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda^2}$$

4. Ροπογεννήτρια της **Κανονικής**: $X \sim N(\mu,\sigma^2)$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$M(t)=E\left(e^{tX}\right)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{tx}f(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}e^{tx}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}+tx}dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{\frac{-\left(x^2-2\mu x+\mu^2\right)+2\sigma^2tx}{2\sigma^2}}dx=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{\frac{-x^2+2(\mu+\sigma^2t)x-\mu^2-(\mu+\sigma^2t)^2+(\mu+\sigma^2t)^2}{2\sigma^2}}dx=$$

$$=e^{\frac{-\mu^2+(\mu+\sigma^2t)^2}{2\sigma^2}}\overset{1}{\boxed{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{\left(x-\left(\mu+\sigma^2t\right)\right)^2}{2\sigma^2}}dx}}=e^{\mu t+\frac{1}{2}\sigma^2t^2}$$

ολοκλήρωμα συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας

Υπολογισμός μέσου και διακύμανσης με τη χρήση της ροπογεννήτριας

$$M(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$

$$E(X) = \frac{d}{dt} M(t)\Big|_{t=0} = (\mu + \sigma^2 t) e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}\Big|_{t=0} = \mu$$

$$E(X^2) = \frac{d^2 M(t)}{dt^2}\Big|_{t=0} = \left(\sigma^2 + (\mu + \sigma^2 t)^2\right) e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}\Big|_{t=0} = \sigma^2 + \mu^2$$

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X) = \sigma^2 + \mu^2 - \mu^2 = \sigma^2$$

- Ροπογεννήτρια **Καννονικής** $M_X(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$

- Έτσι, η **ροπογεννήτρια της τυπικής Κανονικής**, δηλ. της **Κανονικής** ***N(μ=0, σ²=1)***, είναι:

$$M_X(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$$

Ροπογεννήτριες γνωστών κατανομών

$$M(t)=E\left(e^{tX}\right)$$

Κατανομή	σ.π.π.	Ροπογεννήτρια
Διωνυμική ***Bin(n,ρ)***	$f(x)=\binom{n}{x}\rho^x(1-\rho)^{n-x}$	$M(t)=\left(\rho e^t+1-\rho\right)^n$
Poisson ***P(λ)***	$f(x)=\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}$	$M(t)=e^{\lambda(e^t-1)}$
Εκθετική ***Exp(λ)***	$f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$	$M(t)=\frac{\lambda}{\lambda-t}$
Κανονική ***N(μ,σ²)***	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$M(t)=e^{\mu t+\frac{1}{2}\sigma^2t^2}$
Τυπική Κανονική ***N(0,1)***	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$	$M(t)=e^{\frac{t^2}{2}}$

Σημαντική παρατήρηση

- Μία **κατανομή** ορίζεται **μονοσήμαντα** από τη συνάρτηση **ροπογεννήτριας**.

- Έτσι, αν βρεθεί τυχαία μεταβλητή με ροπογεννήτρια ενός γνωστού τύπου μιας συγκεκριμένης κατανομής, τότε **αυτομάτως** η τυχαία μεταβλητή ακολουθεί την αντίστοιχη κατανομή.

Χαρακτηριστική συνάρτηση (*Characteristic function*)

Ορισμός:

$$\Phi(\omega) = E\left(e^{j\omega X}\right) \qquad (\ j^2 = -1\ )$$
$$= E\left(\cos(\omega X) + j sin(\omega X)\right)$$
$$= E(\cos(\omega X)) + jE(sin(\omega X))$$

όπου $e^{jx} = \cos x + j\sin x$ ο τύπος του ***Euler***

Χαρακτηριστική συνάρτηση (*Characteristic function*)

Ορισμός:

$$\Phi(\omega) = E\left(e^{j\omega X}\right) =$$
$$= E(\cos(\omega X)) + jE(sin(\omega X))$$

Παρατήρηση

- Η χαρακτηριστικη συνάρτηση είναι μία **καλά ορισμένη συνάρτηση**, καθώς οι συνημιτονοειδείς είναι καλά ορισμένες συναρτήσεις (καθώς είναι φραγμένες στο *[-1, 1]*).

Χαρακτηριστική συνάρτηση μιας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής

$$\boxed{\Phi(\omega) = E\left(e^{j\omega X}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega x} f(x)\,dx}$$

ή

$$\Phi(\omega) = E\left(e^{j\omega X}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\omega x) f(x)\,dx + j\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(\omega x) f(x)\,dx$$

- Υπάρχουν **2 ερμηνείες** με βάση τον παραπάνω ορισμό

Χαρακτηριστική συνάρτηση (συν.)

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\omega}) = E\left(e^{j\omega X}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega x} f(x)\,dx$$

1η ερμηνεία: Η ***Φ(ω)*** είναι η αναμενόμενη τιμή της $\boldsymbol{e^{j\omega X}}$

2η ερμηνεία: Η ***Φ(ω)*** είναι ο **μετασχηματισμός *Fourier*** της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας ***f(x)*** στο **πεδίο του χρόνου (τιμών της μεταβλητής)**.

Έτσι, η σ.π.π. ***f(x)*** είναι ο **αντίστροφος μετασχηματισμός *Fourier*** της ***Φ(ω)*** στο **πεδίο των συχνοτήτων**, δηλ.

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega x} \Phi(\boldsymbol{\omega})\,d\boldsymbol{\omega}$$

Μετασχηματισμοί Fourier

- Έστω συνάρτηση ***f(t)*** . Το ολοκλήρωμα:

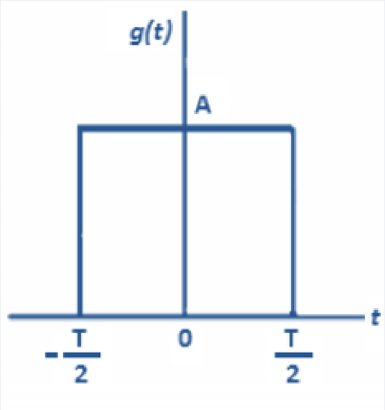
$$\Phi(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

  καλείται ***μετασχηματισμός Fourier***.
- Η συνάρτηση μετασχηματίζεται ως μια συνάρτηση με μεταβλητή την **συχνότητα *ω***, «αποκαλύπτοντας» έτσι το **φασματικό** της περιεχόμενο.
- Ένα μη-περιοδικό σήμα αναλύεται στο (-∞, ∞) σε ένα **συνεχές φάσμα περιοδικών** εκθετικών σημάτων .
- Το σήμα μεταβαίνει από το **πεδίο του χρόνου** στο **πεδίο των συχνοτήτων**.

- Με απλά λόγια, ο **μετασχηματισμός *Fourier*** είναι ένα **εργαλείο** με το οποίο «βλέπουμε» ένα σήμα από μια **άλλη «οπτική γωνία»**.
- Ο **αντίστροφος μετασχηματισμός *Fourier*** είναι:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega x} \Phi(\omega) d\omega$$

Παράδειγμα



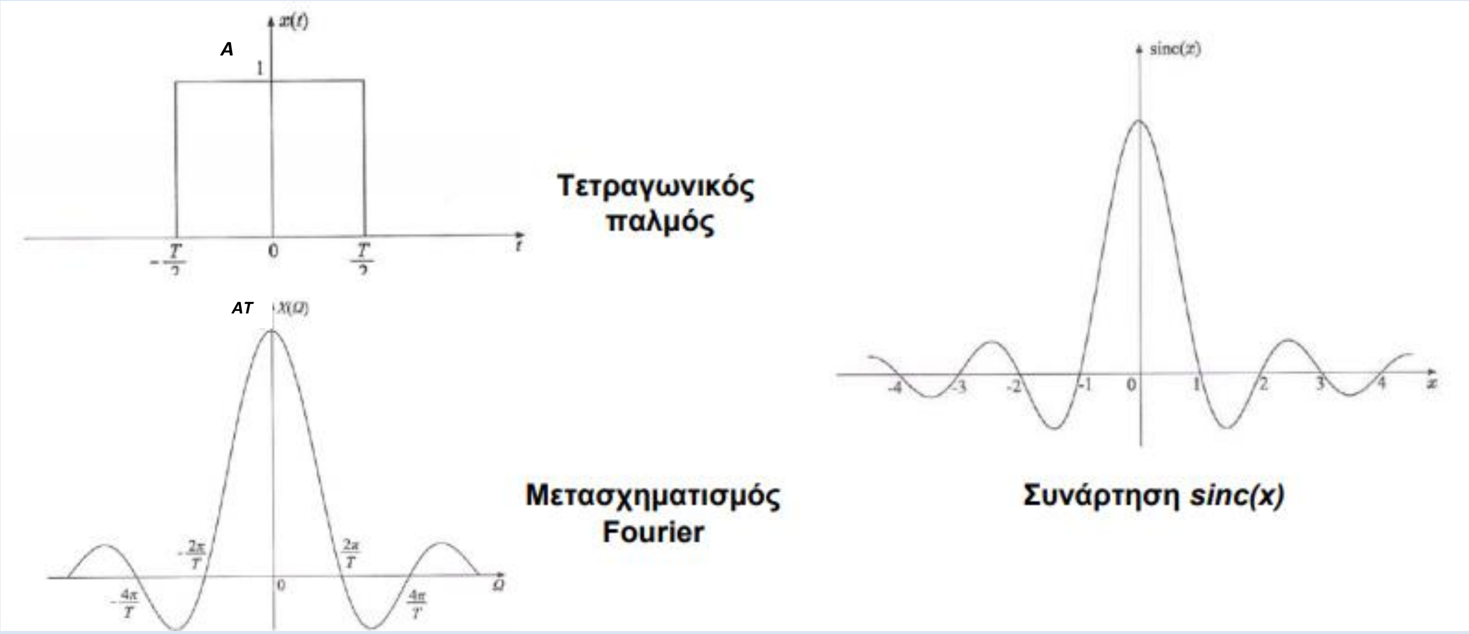
- Ορθογώνιος παλμός πλάτους Α και διάρκειας Τ

$$f(t)=\begin{cases} A & -\frac{T}{2}\le t\le \frac{T}{2} \\ 0 & |t|>\frac{T}{2} \end{cases}$$

- **Μετασχηματισμός *Fourier*** :

$$e^{jx}=\cos x + j\sin x$$

$$\Phi(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt = A\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-j\omega t}dt = \frac{A}{j\omega}\left(e^{j\omega\frac{T}{2}}-e^{-j\omega\frac{T}{2}}\right) = AT\,\frac{\sin\left(\omega\frac{T}{2}\right)}{\omega\frac{T}{2}} = AT\,\mathrm{sinc}\left(\omega\frac{T}{2}\right)$$



Χρήση της χαρακτηριστικής συνάρτησης για την παραγωγή ροπών

- Καθώς ισχύει $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$
- παίρνουμε:

$$\Phi(\omega) = E\left(e^{j\omega X}\right) = E\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(j\omega X)^k}{k!}\right) =$$

$$= E\left(1 + j\omega X + \frac{(j\omega X)^2}{2!} + \ldots + \frac{(j\omega X)^n}{n!} + \ldots\right) =$$

$$= 1 + j\omega E(X) + \frac{j^2\omega^2}{2!} E\left(X^2\right) + \ldots + \frac{j^n\omega^n}{n!} E\left(X^n\right) + \ldots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{j^k\omega^k}{k!} E\left(X^k\right)$$

$$\Phi(\omega) = 1 + j\omega E(X) + \frac{j^2\omega^2}{2!}E(X^2) + \ldots + \frac{j^n\omega^n}{n!}E(X^n) + \ldots$$

- Έτσι, οι ροπές υπολογίζονται ως εξής:

$$E(X) = \frac{1}{j}\frac{d\Phi(\omega)}{d\omega}\bigg|_{\omega=0}$$

$$E(X^2) = \frac{1}{j^2}\frac{d\Phi^2(\omega)}{d\omega^2}\bigg|_{\omega=0}$$

$$\vdots$$

$$E(X^n) = \frac{1}{j^n}\frac{d\Phi^n(\omega)}{d\omega^n}\bigg|_{\omega=0}$$

Πιθανογεννήτρια

$$G(z) = E\left(z^{X}\right) = \sum_{x} z^{x} f(x)$$

- Ορίζεται <u>**μόνο για διακριτές**</u> τυχαίες μεταβλητές που παίρνουν **ακέραιες τιμές {0, 1, 2, …}**

- Είναι ο ***z-μετασχηματισμός*** της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας ***f(x) :***

$$G(z) = E\left(z^{X}\right) = \sum_{x} z^{x} f(x) = \sum_{x} z^{x} P(X = x) =$$

$$= P(X = 0) + zP(X = 1) + z^{2} P(X = 2) + \ldots + z^{k} P(X = k) + \ldots$$

πολυώνυμο ως προς z με συντελεστές τις πιθανότητες των τιμών της μεταβλητής

Πιθανογεννήτρια ως γεννήτορας Πιθανοτήτων

$$G(z) = P(X=0) + zP(X=1) + z^2 P(X=2) + \ldots + z^k P(X=k) + \ldots$$

$$f(0) = P(X=0) = G(z)\Big|_{z=0}$$

$$f(1) = P(X=1) = \frac{dG(z)}{dz}\bigg|_{z=0}$$

$$f(k) = P(X=2) = \frac{1}{2}\frac{dG^2(z)}{dz^2}\bigg|_{z=0}$$

Πιθανογεννήτρια ως γεννήτορας Πιθανοτήτων

$$G(z) = P(X=0) + zP(X=1) + z^2P(X=2) + \ldots + z^k P(X=k) + \ldots$$

$$f(0) = P(X=0) = G(z)\Big|_{z=0}$$

$$f(1) = P(X=1) = \left.\frac{dG(z)}{dz}\right|_{z=0}$$

$$\vdots$$

$$f(k) = P(X=k) = \frac{1}{k!}\left.\frac{dG^k(z)}{dz^k}\right|_{z=0}$$

Σχέση **Ροπογεννήτριας**, **Χαρακτηριστικής συνάρτησης** και **Πιθανογεννήτριας** μιας τυχαίας μεταβλητής

- ✓ Ροπογεννήτρια: $M(t) = E\left(e^{tX}\right)$
- ✓ Χαρακτηριστική συνάρτηση: $\Phi(\omega) = E\left(e^{j\omega X}\right)$
- ✓ Πιθανογεννήτρια: $G(z) = E\left(z^{X}\right)$

Ισχύει ότι:

$$M(t) = E\left(e^{tX}\right) = \Phi(-jt) = G\left(e^{t}\right)$$

παρόμοια Βρίσκουμε:

$$\Phi(\omega) = E\left(e^{j\omega X}\right) = M(j\omega) = G\left(e^{j\omega}\right)$$

$$G(z) = E\left(z^{X}\right) = M(\ln z) = \Phi(-j\ln z)$$

Παραδείγματα

1) Να υπολογιστεί η μέση τιμή και η διακύμανση μιας τ.μ. X με συνάρτηση ροπογεννήτριας

$$M(t) = \frac{1}{81}\left(e^{t} + 2\right)^{4}$$

2) Έστω ροπογεννήτρια

$$M(t) = \boldsymbol{a}\, t^2 + \boldsymbol{b}\, t + \boldsymbol{c}$$

Αν γνωρίζετε ότι $E(X)=5$ και $V(X)=3$ να βρεθούν οι συντελεστές $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$.

3) Έστω διακριτή τ.μ. *X* με ροπογεννήτρια

$$M(t) = a + be^{2t} + ce^{4t}$$

και μέση τιμή 3 και διακύμανση 2. Να βρείτε τις τιμές των συντελεστών *a, b, c,* και την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας.

4) Να υπολογιστεί η πιθανότητα ***P(X ≥ 1)*** στις περιπτώσεις:

(α) η τ.μ. *X* είναι **διακριτή** με ροπογεννήτρια: $M(t) = e^{2e^t - 2}$

(β) η τ.μ. X είναι **συνεχής** με ροπογεννήτρια: $M(t) = e^{t(2t-1)}$