Προπτυχιακό Μάθημα: «Πιθανότητες & Στατιστική»

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

Εξετάσεις ακαδημαϊκού έτους 2023-24

Ονοματεπώνυμο: .... (Α.Μ. ....)

(Διάρκεια εξέτασης: **2 ώρες**)

Θέμα 1 (25%). Απαντήστε στα παρακάτω ερωτήματα

α) Τι είναι το 25-οστό ποσοστημόριο? Ποια ποσοστημόρια σημειώνονται στα θηκογράμματα (boxplots)?

β) Τι είναι το μέσο, η διάμεσος και η κορυφή μιας κατανομής; Υπάρχει περίπτωση να ταυτίζονται;

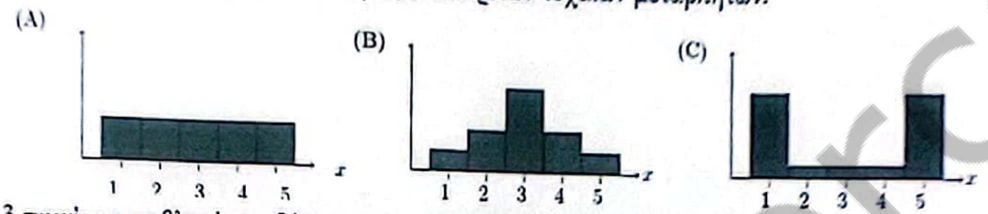
γ) Τι ονομάζουμε P-τιμή (P-value) ενός στατιστικού ελέγχου;

δ) Τι θα πρέπει να συμβαίνει για να ισχύει ότι $P(A|B) = P(B|A)$, για δύο ενδεχόμενα Α, Β ;

ε) Είναι δυνατόν η συνδιακύμανση να είναι ίση με την συσχέτιση ;

στ) Αν τα ενδεχόμενα Α, Β, Γ είναι ανεξάρτητα να δειχθεί αν ισχύει το ίδιο και για τα $A \cup B,\ \Gamma$.

ζ) Δίνονται οι συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας 3 διακριτών τυχαίων μεταβλητών:



Κατατάξτε τις 3 τυχαίες μεταβλητές με βάση την τυπική απόκλιση (κατά αύξουσα).

ζ) Έστω Χ τυχαία κανονική μεταβλητή N(5, 1). Τι κατανομή ακολουθούν οι μεταβλητές: (i) Υ= Χ – 5 και (ii) Ζ= Υ ^{2}.

Θέμα 2 (20%). Μια συνεχής τυχαία μεταβλητή έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x) = \begin{cases} 2 & -c \le x \le c \\ 0 & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$

Να υπολογιστούν τα επόμενα:

α) η σταθερά c

β) οι πιθανότητες $P(0 \le X < 1)$, $P(X \ge 0.1 | 0 \le X < 1)$

γ) οι τιμές των E(5X+1), V(4X) και V(X^2 +4)

Θέμα 3 (15%). Στη Θεσσαλική πεδιάδα εμφανίζονται έντονες πλημμύρες (κατά μέσο όρο) μια φορά στα 10 χρόνια.

Α) Να υπολογιστεί η πιθανότητα στα επόμενα πέντε (5) έτη να πλημμυρίσει η περιοχή:

α1) το πολύ δύο χρονιές,

α2) τουλάχιστον μία χρονιά.

Β) Να υπολογιστεί η πιθανότητα η επόμενη χρονιά που θα πλημμυρίσει η περιοχή να είναι μετά από 5 χρόνια από σήμερα.

Γ) Να υπολογιστεί η πιθανότητα μέσα στον επόμενο αιώνα (100 έτη) να μην πλημμυρίσει η περιοχή πάνω από 12 φορές.

Θέμα 4 (20 %). Η από-κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των τυχαίων μεταβλητών Χ, Υ έχει την εξής μορφή:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} cxy & x + y < 2,\ x > 0 \ \kappa\alpha\iota\ y > 0 \\ 0 & \alpha\lambda\lambda o\acute{\upsilon} \end{cases}$$

α) Να υπολογιστεί η σταθερά c.

β) Να βρεθούν οι περιθώριες κατανομές των Χ και Υ.

γ) Να υπολογιστούν τα εξής: E(X), E(Y), E(X^{2}Y), E(X+Y), COV(X, Y)

Θέμα 5 (20 %). Ένας αισθητήρας ανίχνευσης κίνησης απαιτεί ρύθμιση όταν το ποσοστό των μη ανιχνεύσιμων κινούμενων αντικειμένων ξεπερνά το 4%. Σε ένα δείγμα 96 κινούμενων αντικειμένων βρέθηκαν 7 περιπτώσεις μη ανιχνεύσιμων περιπτώσεων.

α) Να εξεταστεί σε στάθμη σημαντικότητας 2.5% αν ο αισθητήρας χρειάζεται ρύθμιση.

β) Να βρεθεί η μικρότερη στάθμη σημαντικότητας για την οποία ο αισθητήρας χρειάζεται ρύθμιση.

Καλή επιτυχία

Τμήμα Μηχανικών Η/Υ & Πληροφορικής, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων

Εξετάσεις ακαδημαϊκού έτους 2023-24

[redacted]

Ονοματεπώνυμο: .... [redacted] .... (Α.Μ. [redacted]

(Διάρκεια εξέτασης: **2 ώρες**)

Θέμα 1 (25%). Απαντήστε στα παρακάτω ερωτήματα:

α) Να αποδειχθεί ότι αν δύο ενδεχόμενα είναι ανεξάρτητα τότε και τα συμπληρώματά τους είναι επίσης ανεξάρτητα.

β) Ποια η κατανομή του μέσου όρου 25 ανεξάρτητων και ισόνομων εκθετικών τυχαίων μεταβλητών με παράμετρο λ=4;

γ) Σε ποιους ελέγχους αναφέρονται τα z-test και t-test ;

δ) Τι ονομάζεται πιθανότητα σφάλματος τύπου Ι και τι τύπου ΙΙ; Είναι δυνατόν να ταυτίζονται;

ε) Τι ονομάζεται συντελεστής συσχέτισης και τι τιμές παίρνει; Τι συμπεραίνουμε αν η τιμή του είναι 1.

στ) Εξηγείστε αν η συνάρτηση $f(x)=x^2+x+1/6,\ 0<x<1$, είναι ή όχι συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας;

ζ) Έστω Χ τυχαία κανονική μεταβλητή N(5, 1). Τι κατανομή ακολουθούν οι μεταβλητές: (i) $Y= X-5$ και (ii) $Z= Y^2$.

Θέμα 2 (20%). Ο χρόνος ζωής (σε ώρες) ενός ευπαθούς προϊόντος είναι μια συνεχής τυχαία μεταβλητή με την παρακάτω συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$f(x)=\begin{cases} cx & 0<x\le 2 \\ c(4-x) & 2<x\le 4 \end{cases}$$

α) Να βρεθεί η τιμή της σταθεράς c.

β) Να υπολογιστούν η μέση τιμή, η δεύτερη (απλή) ροπή και η διακύμανση.

γ) Να υπολογιστεί η πιθανότητα ο χρόνος ζωής να είναι μεταξύ μίας και τριών ωρών,

δ) Να υπολογιστεί η διάμεσος της τυχαίας μεταβλητής.

Θέμα 3 (15%). Αν οι τυχαίες μεταβλητές X, Y είναι ανεξάρτητες και ακολουθούν την τυπική κανονική κατανομή, να βρεθεί ο συντελεστής συσχέτισης των τυχαίων μεταβλητών $W=X-Y+1$ και $Z=2X+Y-2$.

Θέμα 4 (20%). Σε ένα γνωστό εστιατόριο της πόλης οι πατάτες σερβίρονται σε μεγάλη και σε μικρή μερίδα. Το βάρος της μεγάλης μερίδας ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή 100 gr και τυπική απόκλιση 4 gr, ενώ της μικρής μερίδας ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή 47 gr και τυπική απόκλιση 3 gr.

α) Να υπολογιστεί η πιθανότητα το βάρος δύο μικρών μερίδων να είναι μικρότερο του βάρους μιας μεγάλης μερίδας.

β) Να υπολογιστεί η τυπική απόκλιση που θα πρέπει να έχει η κατανομή της μεγάλης μερίδας ώστε το βάρος δύο μικρών μερίδων να είναι ακριβώς το ίδιο με το βάρος μιας μεγάλης μερίδας.

Θέμα 5 (20%). Σε μια έρευνα που έγινε για την καλύτερη παιδαγωγική κατάρτιση ενός μαθήματος στο τμήμα χρησιμοποιήθηκε πειραματικά για φέτος η εργαστηριακή εκπαιδευτική δραστηριότητα σε ένα τυχαία επιλεγμένο σύνολο 15 φοιτητών. Μετά το τέλος της εξεταστικής η μέση βαθμολογία τους βρέθηκε 82 (με άριστα το 100) με τυπική απόκλιση 5.7.

α) Να εξεταστεί με βαθμό σημαντικότητας 5% αν το εργαστήριο βοηθάει στην βελτίωση της βαθμολογίας του μέσου φοιτητή και στο να ξεπεράσει το κατώφλι της αριστείας, δηλ. το 80%.

β) Τι θα συμβεί αν διπλασιαστεί το σύνολο των φοιτητών του «πειράματος», με την τυπική απόκλιση να παραμείνει στην ίδια κλίμακα (τιμή 5.7) ;

γ) Ποια θα πρέπει να είναι τουλάχιστον η μέση βαθμολογία του συνόλου των 15 φοιτητών (υποθέτοντας την ίδια τιμή της τυπικής απόκλισης 5.7) ώστε να ισχυριστούμε πως η μέση βαθμολογία ξεπέρασε το φράγμα του 85% , με βαθμό σημαντικότητας 1% ;

Καλή επιτυχία