Η συνάρτηση πυκνότητας (ή μάζας) πιθανότητας

probability density (or mass) function (pdf)

Η συνάρτηση πυκνότητας (ή μάζας) πιθανότητας (*probability density (or mass) function – pdf*)

- Έστω **διακριτή τυχαία μεταβλητή *X*** με πεδίο τιμών

$$\Omega_X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

- Κάθε τιμή έχει ένα **μέτρο πιθανότητας**

$$P(X = x_1), P(X = x_2), \dots, P(X = x_n)$$

και ισχύει ότι:

$$P(X = x_1) + P(X = x_2) + \cdots + P(X = x_n) = 1$$

Η συνάρτηση πυκνότητας (ή μάζας) πιθανότητας

- Καλούμε **συνάρτηση πυκνότητας (ή μάζας) πιθανότητας (σ.π.π.)** το σύνολο πιθανοτήτων των τιμών μιας **διακριτής** τ.μ. *X* $\Omega_X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

$$f(x) = P(X = x) \quad \forall x \in \Omega_X$$

- για την οποία ισχύουν οι **παρακάτω συνθήκες**:

$$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega_X$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = 1$$

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i)$$

- Η αθροιστική συνάρτηση, ***F(x)***, εκφράζει το **άθροισμα πιθανοτήτων** όλων των τιμών της μεταβλητής που παρεμβάλλονται από την πρώτη τιμή της μεταβλητής, x_1, μέχρι (και) την τιμή ***x.***

- Καθώς όμως οι **πιθανότητες** για μια διακριτή μεταβλητή αποτελούν τις τιμές της **συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας** έχουμε ότι:

$$\boldsymbol{F(x)} = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i) = \sum_{\boldsymbol{x_i \leq x}} \boldsymbol{f(x_i)}$$

- Αντίστοιχα, η τιμή της **συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας** (σ.π.π.) ***f(x)*** για μια τιμή ***x*** της τυχαίας μεταβλητής είναι το **άλμα της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής *F(x)*** στην τιμή αυτή:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = P(X = x) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^{-})$$

Σημαντικό

Για να **μελετήσουμε** μία τυχαία μεταβλητή θα πρέπει:

1. Να βρούμε τις **τιμές** που παίρνει η μεταβλητή, $\boldsymbol{\Omega_X}$

2. Να υπολογίσουμε τις πιθανότητες για κάθε τιμή

$$P(X = x_1), P(X = x_2), \ldots, P(X = x_n)$$

3. Να βρούμε τις συναρτήσεις **πυκνότητας** ***f(x)*** και **αθροιστικής (κατανομής)** ***F(x)*** **πιθανότητας**

$$f(x_i) = P(X = x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1})$$

$$F(x) = P(X \le x) = \sum_{x_i \le x} P(X = x_i) = \sum_{x_i \le x} f(x_i)$$

- Έστω πείραμα τύχης ρίψης 2 ζαριών και έστω ζ_1 και ζ_2 τα αντίστοιχα αποτελέσματα. Μελετήστε τις επόμενες μεταβλητές:

  α) $\boldsymbol{X = \max(\zeta_1 , \zeta_2)}$, μέγιστη τιμή των δύο ζαριών

  β) $\boldsymbol{Y = \min(\zeta_1 , \zeta_2)}$, ελάχιστη τιμή των δύο ζαριών

  γ) $\boldsymbol{Z = \mathrm{abs}(\zeta_1 , \zeta_2) = |\zeta_1 - \zeta_2 |}$, απόλυτη διαφορά των ζαριών

α) $\mathbf{X = max(\zeta_1 , \zeta_2)}$

- $\Omega_X = \{1, 2, 3, 4 ,5 ,6\}$

- **f(1)**=P(X=1)=1/36

  f(2)=P(X=2)=3/36

  f(3)=P(X=3)=5/36

  …

  f(6)=P(X=6)=11/36

εύρεση συνάρτηση πυκνότητας (σ.π.π.)

Κατασκευή αθροιστικής συνάρτησης κατανομής πιθανότητας (σ.κ.π.)

α) ***X = max(ζ₁ , ζ₂)***

- $\Omega_X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $f(1)=P(X=1)=1/36$

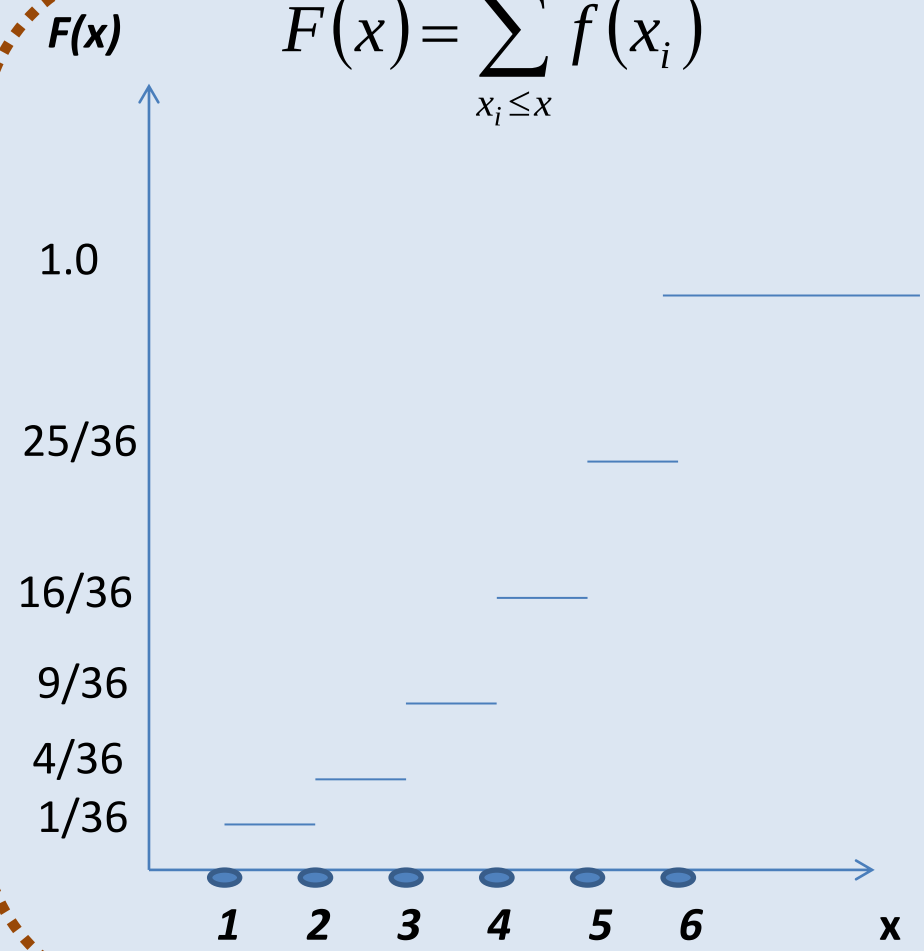
  $f(2)=P(X=2)=3/36$

  $f(3)=P(X=3)=5/36$

  …

  $f(6)=P(X=6)=11/36$

$$F(x) = \sum_{x_i \le x} f(x_i)$$



*β) **Y = min(ζ$_1$, ζ$_2$)***

- Ω_Y = {1, 2, 3, 4 ,5 ,6}

- f(1)=P(Y=1)=11/36

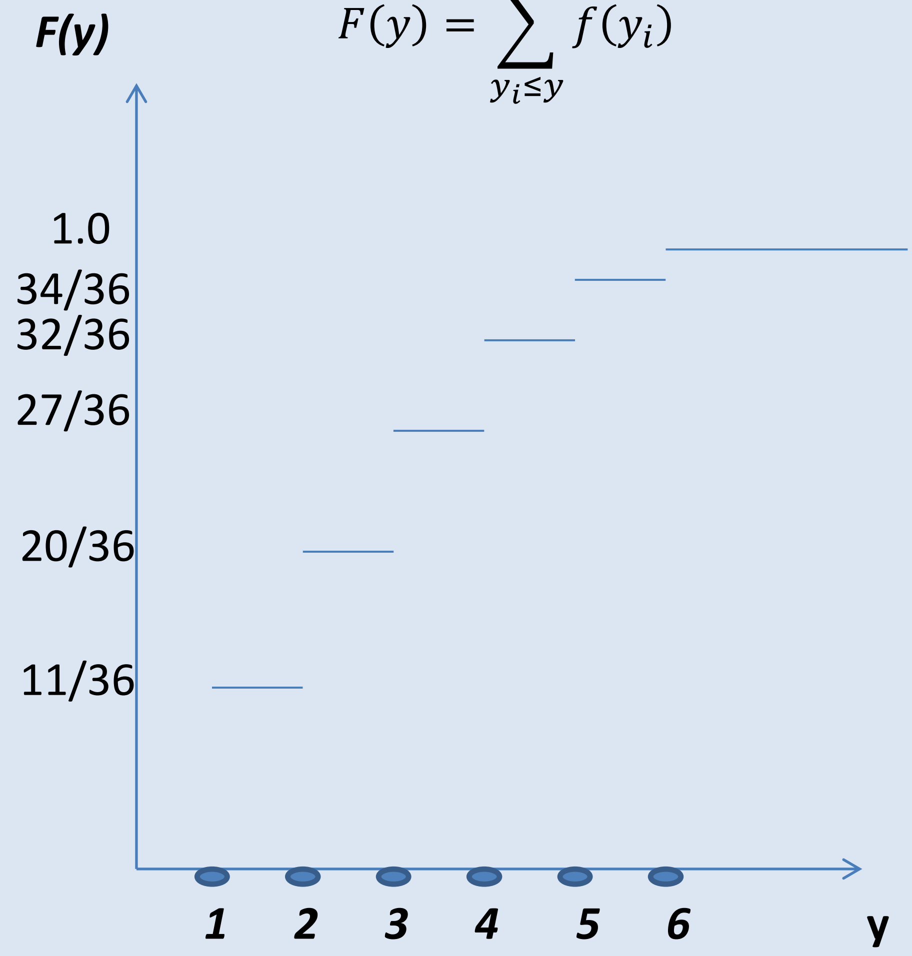
  f(2)=P(Y=2)=9/36

  f(3)=P(Y=3)=7/36

  …

  f(6)=P(Y=6)=1/36

$$F(y) = \sum_{y_i \leq y} f(y_i)$$



γ) **Z = abs(ζ$_1$, ζ$_2$) = | ζ$_1$ - ζ$_2$ |**

- $\Omega_Z = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
- $f(0)=P(Z=0)=6/36$
  $f(1)=P(Z=1)=10/36$
  $f(2)=P(Z=2)=8/36$
  $f(3)=P(Z=3)=6/36$
  $f(4)=P(Z=4)=4/36$
  $f(5)=P(Z=5)=2/36$

$$F(z) = \sum_{z_i \le z} f(z_i)$$