Μέση τιμή (μ) και διακύμανση (σ^2)
γνωστών κατανομών
διακριτών τυχαίων μεταβλητών

(A) Μέσος και διακύμανση Ομοιόμορφης κατανομής

- **Ομοιόμορφη τυχαία διακριτή μεταβλητή (***n ισοπίθανες τιμές***)**

$$f(x) = P(X = x) = \frac{1}{n} \quad , \quad \forall \ x \in \{1, \ldots, n\}$$

Υπολογισμός **μέσης τιμής** ομοιόμορφης διακριτής μεταβλητής

$$\mu = E(X) = \sum_{x=1}^{n} x f(x) = \sum_{x=1}^{n} x \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{x=1}^{n} x =$$

$$= \frac{1}{n} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$$

(A) Μέσος και διακύμανση Ομοιόμορφης κατανομής

- **Ομοιόμορφη τυχαία διακριτή μεταβλητή (**_n ισοπίθανες τιμές_**)**

$$f(x) = P(X = x) = \frac{1}{n} \quad , \quad \forall \; x \in \{1, \ldots, n\}$$

Υπολογισμός **διακύμανσης** ομοιόμορφης διακριτής μεταβλητής

$$E(X^2) = \sum_{x=1}^{n} x^2 f(x) = \frac{1}{n} \sum_{x=1}^{n} x^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{2(2n^2+3n+1) - 3(n^2+2n+1)}{12} = \frac{n^2-1}{12}$$

(Β) Μέσος και διακύμανση Bernoulli κατανομής

- **Bernoulli τυχαία (δυαδική) μεταβλητή**

$$f(x) = \begin{cases} \rho & x = 1 \\ 1-\rho & x = 0 \end{cases} = \rho^x (1-\rho)^x \quad , \quad x = \{0,1\}$$

Υπολογισμός **μέσης τιμής** Bernoulli μεταβλητής

$$\mu = E(X) = \sum_{x=0}^{1} x f(x) = 0 \times (1-\rho) + 1 \times \rho = \rho$$

(Β) Μέσος και διακύμανση Bernoulli κατανομής

- **Bernoulli τυχαία (δυαδική) μεταβλητή**

$$f(x) = \begin{cases} \rho & x = 1 \\ 1-\rho & x = 0 \end{cases} = \rho^{x}(1-\rho)^{x} \quad , \quad x = \{0,1\}$$

Υπολογισμός **διακύμανσης** Bernoulli μεταβλητής

$$E(X^2) = \sum_{x=0}^{1} x^2 f(x) = 0^2 \times (1-\rho) + 1^2 \times \rho = \rho$$

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X) = \rho - \rho^2 = \rho(1-\rho)$$

(Γ). Μέσος και διακύμανση Διωνυμικής κατανομής

- **Διωνυμική τυχαία μεταβλητή**

$$f(x) = \binom{n}{x} \rho^x (1-\rho)^{n-x} \quad , \quad x = \{0,1,\ldots,n\}$$

Υπολογισμός μέσης τιμής (1)

$$\mu = E(X) = \sum_{x=0}^{n} x f(x) = \sum_{x=0}^{n} x \binom{n}{x} \rho^x (1-\rho)^{n-x} =$$

$$= \sum_{x=0}^{n} x \frac{n!}{x!(n-x)!} \rho^x (1-\rho)^{n-x} =$$

$$= \sum_{x=1}^{n} n \boxed{\frac{(n-1)!}{(x-1)!(n-x)!}} \rho \rho^{x-1} (1-\rho)^{n-x} =$$

$$\binom{n-1}{x-1}$$

(Γ). Μέσος και διακύμανση Διωνυμικής κατανομής

- **Διωνυμική τυχαία μεταβλητή**

$$f(x)=\binom{n}{x}\rho^{x}(1-\rho)^{n-x} \quad , \quad x=\{0,1,\ldots,n\}$$

Υπολογισμός μέσης τιμής (2)

$$=n\rho\sum_{x=1}^{n}\binom{n-1}{x-1}\rho^{x-1}(1-\rho)^{n-x}=$$

k=x-1
ν=n-1

$$=n\rho\sum_{k=0}^{\nu}\binom{\nu}{k}\rho^{k}(1-\rho)^{\nu-k}=n\rho\big(\underbrace{\rho+(1-\rho)}_{1}\big)^{\nu}=n\rho$$

$$(a+b)^{n}=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^{k}b^{n-k}$$

(Γ). Μέσος και διακύμανση Διωνυμικής κατανομής

- **Διωνυμική τυχαία μεταβλητή**

$$f(x)=\binom{n}{x}\rho^{x}(1-\rho)^{n-x} \quad , \quad x=\{0,1,\ldots,n\}$$

Υπολογισμός διακύμανσης (1)

$$E(X(X-1))=\sum_{x=0}^{n}x(x-1)f(x)=\sum_{x=0}^{n}x(x-1)\binom{n}{x}\rho^{x}(1-\rho)^{n-x}=$$

$$=\sum_{x=2}^{n}x(x-1)\frac{n!}{x!(n-x)!}\rho^{x}(1-\rho)^{n-x}=\sum_{x=2}^{n}n(n-1)\frac{(n-2)!}{(x-2)!(n-x)!}\rho^{2}\rho^{x-2}(1-\rho)^{n-x}=$$

$$=n(n-1)\rho^{2}\sum_{x=2}^{n}\binom{n-2}{x-2}\rho^{x-2}(1-\rho)^{n-x}=n(n-1)\rho^{2}$$

$$(a+b)^{n}=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^{k}b^{n-k}$$

(Γ). Μέσος και διακύμανση Διωνυμικής κατανομής

- **Διωνυμική τυχαία μεταβλητή**

$$f(x)=\binom{n}{x}\rho^x(1-\rho)^{n-x} \quad , \quad x=\{0,1,\ldots,n\}$$

Υπολογισμός διακύμανσης (2)

$$E\left(X^2\right)=E\left(X\left(X-1\right)\right)+E\left(X\right)=n\left(n-1\right)\rho^2+n\rho$$

$$V\left(X\right)=E\left(X^2\right)-E^2\left(X\right)=$$

$$=n(n-1)\rho+n\rho-(n\rho)^2=n\rho(1-\rho)$$

(Δ). Μέσος και διακύμανση Γεωμετρικής κατανομής

- **Γεωμετρική τυχαία μεταβλητή**

$$f(x) = \rho(1-\rho)^{x-1} \quad , \quad x = \{1,2,\ldots\}$$

Υπολογισμός μέσης τιμής

$$\mu = E(X) = \sum_{x=0}^{n} x f(x) = \sum_{x=1}^{\infty} x\rho(1-\rho)^{x-1} = \rho \boxed{\sum_{x=1}^{\infty} x(1-\rho)^{x-1}}$$

Ισχύει ότι: $\displaystyle \sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a} \Rightarrow \left(\sum_{k=0}^{\infty} a^k\right)' = \left(\frac{1}{1-a}\right)' \Rightarrow \boxed{\sum_{k=1}^{\infty} k a^{k-1} = \frac{1}{(1-a)^2}}$

Έτσι παίρνουμε:

$$\mu = E(X) = \rho \frac{1}{\left(1-(1-\rho)\right)^2} = \frac{1}{\rho}$$

(Δ). Μέσος και διακύμανση Γεωμετρικής κατανομής

- **Γεωμετρική τυχαία μεταβλητή**

$$f(x) = \rho(1-\rho)^{x-1} \quad , \quad x = \{1,2,\ldots\}$$

Υπολογισμός της διακύμανσης (1)

$$E(X(X-1)) = \sum_{x=0}^{n} x(x-1)f(x) = \sum_{x=2}^{\infty} x(x-1)\rho(1-\rho)^{x-1} = \rho(1-\rho)\sum_{x=2}^{\infty} x(x-1)(1-\rho)^{x-2}$$

Ισχύει ότι: $\left(\sum_{k=0}^{\infty} a^k\right)'' = \left(\frac{1}{1-a}\right)'' \Rightarrow \left(\sum_{k=1}^{\infty} k a^{k-1}\right)' = \left(\frac{1}{(1-a)^2}\right)' \Rightarrow \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a^{k-2} = \frac{2}{(1-a)^3}$

Έτσι παίρνουμε:

$$E(X(X-1)) = \rho(1-\rho)\frac{2}{(1-(1-\rho))^3} = \frac{2(1-\rho)}{\rho^2}$$

(Δ). Μέσος και διακύμανση Γεωμετρικής κατανομής

- **Γεωμετρική τυχαία μεταβλητή**

$$f(x) = \rho(1-\rho)^{x-1} \quad , \quad x = \{1,2,\ldots\}$$

Υπολογισμός της διακύμανσης (2)

$$E(X^2) = E(X(X-1)) + E(X) = \frac{2(1-\rho)}{\rho^2} + \frac{1}{\rho} = \frac{2-\rho}{\rho^2}$$

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{2-\rho}{\rho^2} - \frac{1}{\rho^2} = \frac{1-\rho}{\rho^2}$$

(Ε). Μέσος και διακύμανση Poisson κατανομής

- **Poisson τυχαία μεταβλητή**

$$f(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \quad , \quad x = \{0,1,2,\ldots\}$$

Υπολογισμός μέσης τιμής

$$\mu = E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} x f(x) = \sum_{x=1}^{\infty} x \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} =$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \boxed{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}} = \lambda e^{-\lambda} \boxed{e^{\lambda}} = \lambda$$

(Ε). Μέσος και διακύμανση Poisson κατανομής

- **Poisson τυχαία μεταβλητή**

$$f(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \quad , \quad x = \{0,1,2,\dots\}$$

Υπολογισμός διακύμανσης (1)

$$E\big(X(X-1)\big) = \sum_{x=1}^{\infty} x(x-1)\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda} =$$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda}\sum_{x=2}^{\infty}\frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!} = \lambda^2 e^{-\lambda}\boxed{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}} = \lambda^2$$

$$e^{\lambda}$$

(Ε). Μέσος και διακύμανση Poisson κατανομής

- **Poisson τυχαία μεταβλητή**

$$f(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \quad , \quad x = \{0,1,2,\ldots\}$$

Υπολογισμός διακύμανσης (2)

$$E(X^2) = E(X(X-1)) + E(X) = \lambda^2 + \lambda$$

$$\sigma^2 = V(X) = \boxed{E(X^2)} - E^2(X) =$$
$$= \boxed{\lambda^2 + \lambda} - \lambda^2 = \lambda$$

Μέση Τιμή και Διακύμανση Γνωστών Διακριτών τυχαίων μεταβλητών

Κατανομή	σ.π.π. *f(x)*	Μέση Τιμή (μ)	Διακύμανση (σ^2)
Ομοιόμορφη	$\frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
Διωνυμική	$\binom{n}{x}\rho^x(1-\rho)^{n-x}$	$n\rho$	$n\rho(1-\rho)$
Γεωμετρική	$\rho(1-\rho)^{x-1}$	$\frac{1}{\rho}$	$\frac{1-\rho}{\rho^2}$
Poisson	$\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}$	λ	λ

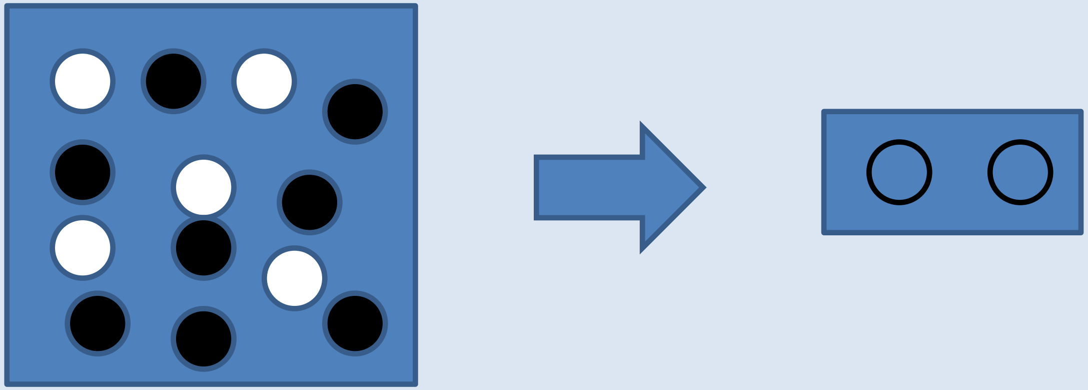
Παραδείγματα

(1) Να βρεθεί η μέση τιμή και η διακύμανση μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής με συνάρτηση πυκνότητας: ***f(x)=(5-x)/10 , x={1,2,3,4}***

(2) Έστω ***Poisson*** τυχαία μεταβλητή με παράμετρο ***λ>0***. Αν δίνεται ότι $\boldsymbol{E(X^2)=12}$ να βρεθεί η τιμή του ***λ***.

(3) Αν $\boldsymbol{E(X)}=1$ και $\boldsymbol{V(X)}=5$ να υπολογιστούν τα εξής :

(α) $\boldsymbol{E((2+X)^2)}$ και (β) $\boldsymbol{V(4 + 3X)}$



(4) Υποθέστε το επόμενο **παιχνίδι**. Από ένα κουτί που περιέχει **5 λευκές** και **8 μαύρες** σφαίρες αφαιρείται 2 σφαίρες και τις ελέγχετε. Αν έχουν το ίδιο χρώμα τότε **κερδίζετε** **2 ευρώ**, ενώ αν έχουν διαφορετικό **χάνετε** **1 ευρώ**.

1. Να υπολογίσετε την **μέση τιμή** και την **διακύμανση** του **κέρδους**.
2. Ποια είναι η πιθανότητα να κερδίσετε τουλάχιστον 4 φορές 2 ευρώ αν παίξετε 10 συνεχόμενες φορές το παραπάνω παιχνίδι (κάθε φορά επανατοποθετείτε τις επιλεγόμενες σφαίρες στο κουτί).