Μέρος ΙΙ. Τυχαίες Μεταβλητές

Τυχαίες Μεταβλητές

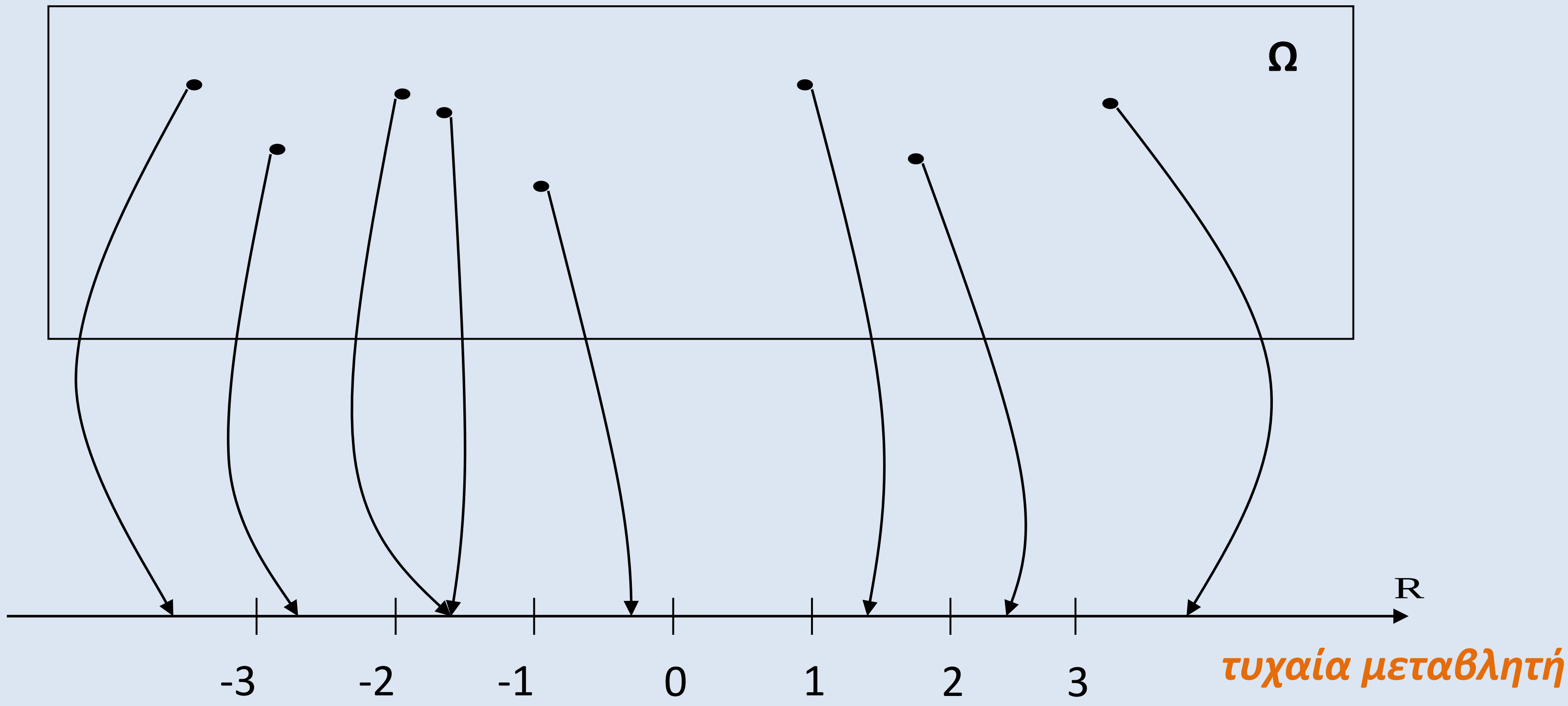
Ορισμός

«Μια **τυχαία μεταβλητή** (**τ.μ.**) είναι μια συνάρτηση η οποία καθορίζει αριθμητικές τιμές σε μία **ποσότητα** που σχετίζεται με το αποτέλεσμα ενός πειράματος.

Σε κάθε αποτέλεσμα του πειράματος αντιστοιχεί μία (και μόνο μία) αριθμητική τιμή στη ποσότητα.

Καθώς το πείραμα είναι στοχαστικό και οι τιμές της τυχαίας μεταβλητής είναι εξίσου **στοχαστικές»**

- **Τυχαία μεταβλητή**
  - Δίνουμε σε μια ποσότητα μια αριθμητική τιμή για κάθε αποτέλεσμα του πειράματος



Συμβολισμός

- Συμβολίζουμε με **κεφαλαία** μια **τυχαία μεταβλητή**

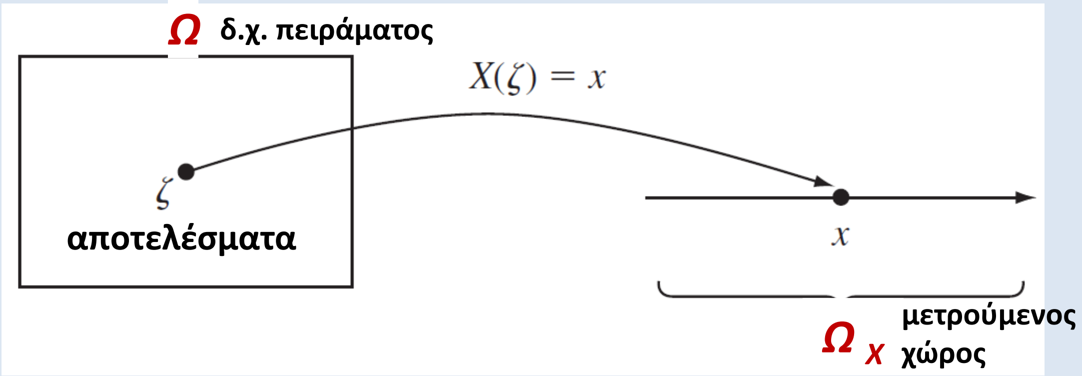
π.χ. **τ.μ.** ***X*** **ή** **τ.μ.** ***Y*** **ή** **τ.μ.** ***Z***

- Συμβολίζουμε με **μικρά τις τιμές μιας μεταβλητής**

π.χ. έστω **τ.μ.** ***X*** με **τιμές** $x_1, x_2, x_3, \ldots$

$$P(X = x) \quad , \quad P(X = x_1) \, , \, P(X = x_2)$$

$$P(Y = y) \quad , \quad P(Z = z) \quad , \ldots.$$



- Οι **τυχαίες μεταβλητές** περιγράφουν **μετρούμενες ποσότητες** ενός τυχαίου πειράματος.
- **Τυχαία μεταβλητή** (**τ.μ.**) ***X*** **:** μία συνάρτηση ή μια απεικόνιση ***Ω -> R*** όπου:

$$\boxed{P(X=x) = P(\zeta \in \Omega : X(\zeta)=x)}$$

Παράδειγμα

- **Τυχαίο πείραμα:** ρίψη νομίσματος 3 φορές.
- **Δειγματικός χώρος** $\Omega=\{ΚΚΚ,ΚΚΓ,ΚΓΚ,ΓΚΚ,ΚΓΓ,ΓΚΓ,ΓΓΚ,ΓΓΓ\}$
- Ορίζουμε την **τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) Χ**: φορές «Κορώνα»
- Σύνολο τιμών της μεταβλητής $\Omega_X = \{0,1,2,3\}$
- Υπολογισμός πιθανοτήτων: $P(X=x) = P(\zeta \in \Omega : X(\zeta)=x)$

$P(X=0)=P(ΓΓΓ)=1/8$

$P(X=1)=P(ΚΓΓ \cup ΓΚΓ \cup ΓΓΚ)=3/8$

$P(X=2)=P(ΚΚΓ \cup ΚΓΚ \cup ΓΚΚ)=3/8$

$P(X=3)=P(ΚΚΚ)=1/8$

$$P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=P(\Omega)=1$$

Παράδειγμα (Γενίκευση)

- **Τυχαίο πείραμα:** ρίψη νομίσματος ***n*** φορές.
- **Δειγματικός χώρος *Ω***: *όλες οι δυνατές n-άδες αποτελεσμάτων. Υπάρχουν* $\boldsymbol{2^n}$ *δυνατά αποτελέσματα*
- Ορίζουμε τ.μ. X: φορές «Κορώνα» σε n ρίψεις
- Σύνολο τιμών της μεταβλητής $\boldsymbol{\Omega_X} = \{0,1,2,\ldots,n\}$
- Υπολογισμός πιθανοτήτων: $\boldsymbol{P(X=x)\ \forall x \in \Omega_X}$

$$P(X=x) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{\binom{n}{x}}{2^n}$$

Ισχύει:

$$\sum_{x=0}^{n} P(X=x) = \frac{1}{2^n}\sum_{x=0}^{n}\binom{n}{x} = 1$$

Αθροιστική συνάρτηση κατανομής πιθανότητας (σ.κ.π.)
Cumulative density function (cdf)

Ανάγκη:

*Μας ενδιαφέρει να **αναπαριστούμε** με ευκολία κάποια **ενδεχόμενα πάνω στις τυχαίες μεταβλητές** και στη συνέχεια να **υπολογίζουμε** τις αντίστοιχες πιθανότητες τους.*

Αθροιστική συνάρτηση κατανομής πιθανότητας (σ.κ.π.)
Cumulative density function (cdf)

π.χ. Έστω τ.μ. Χ που μετρά το πλήθος των επιτυχημένων μαθημάτων σε μία εξεταστική περίοδο. Ζητείται:

- «Πιθανότητα κάποιος να επιτύχει **τουλάχ. 2 μαθήματα**»

$$P\left(X \geq 2\right)$$

- «Πιθανότητα να έχει περάσει **το πολύ 5 μαθήματα**» δηλ.

$$P\left(X \leq 5\right)$$

- «Πιθανότητα να έχει περάσει **όχι λιγότερα από 2 μαθήματα και όχι περισσότερα από 5**»,

$$P\left(2 \leq X \leq 5\right)$$

Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής πιθανότητας (σ.κ.π.) Cumulative density function (cdf)

- Έστω τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) $\boldsymbol{X}$ ορισμένη στο $\boldsymbol{\Omega_X} = \{\, \boldsymbol{x} \,\}$

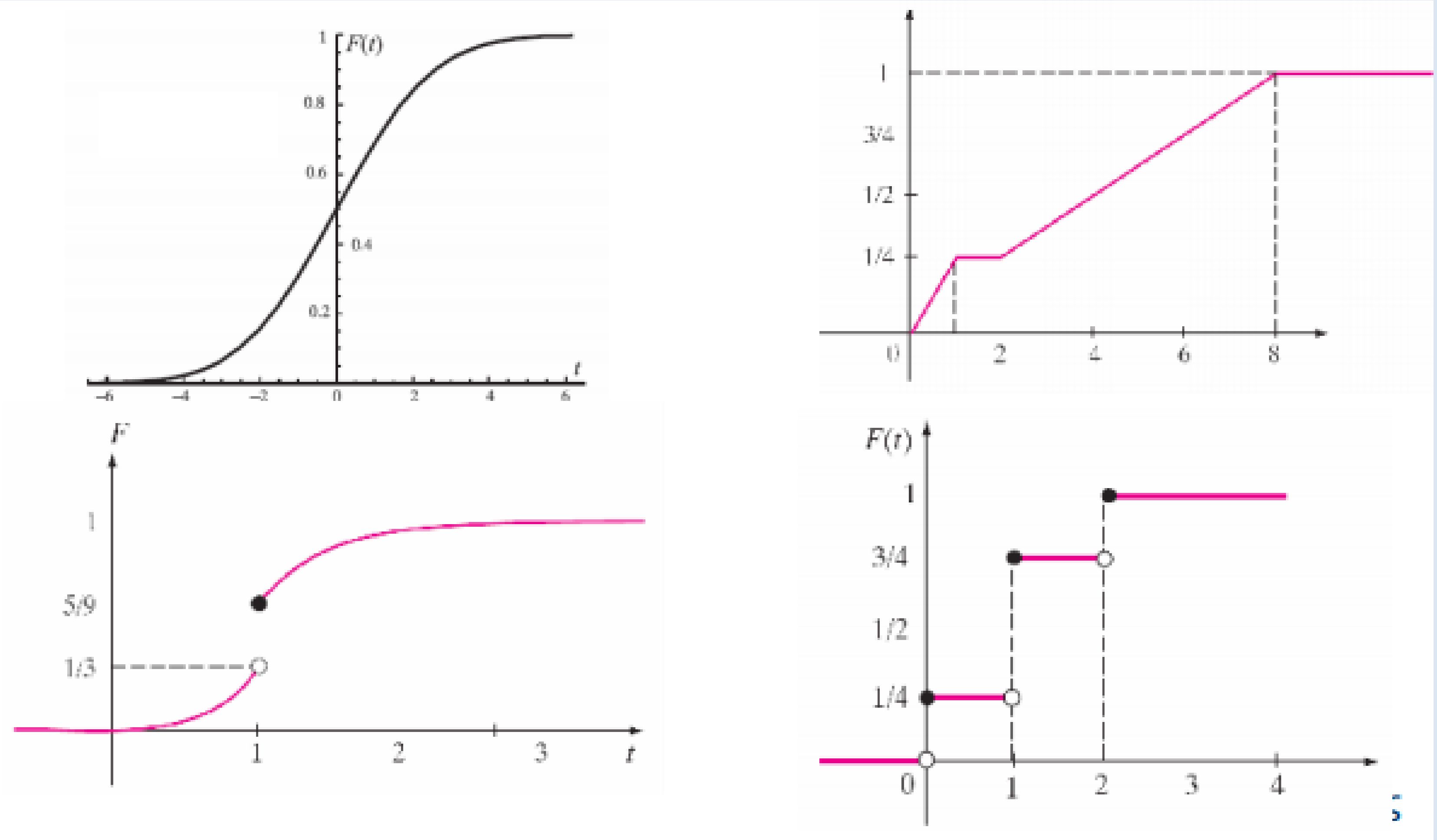
- <u>Ορίζουμε</u> την **αθροιστική συνάρτηση κατανομής πιθανότητας (σ.κ.π.)** ως:

$$F(x) = P(X \le x) = P(X \in (-\infty, x])$$

✓ Η σ.κ.π. ***F(x)*** υπολογίζει την **αθροιστική πιθανότητα** του διαστήματος τιμών της μεταβλητής $(-\infty, x]$.

✓ Χρησιμοποιείται για τον **υπολογισμό της πιθανότητας οποιουδήποτε διαστήματος τιμών** της μεταβλητής.

Μορφές της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής πιθανότητας (σ.κ.π.)



Ιδιότητες της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής πιθανότητας (σ.κ.π.)

$$F(x) = P(X \le x) = P(X \in (-\infty, x])$$

(**1**). $0 \le F(x) \le 1$, εφόσον είναι πιθανότητα

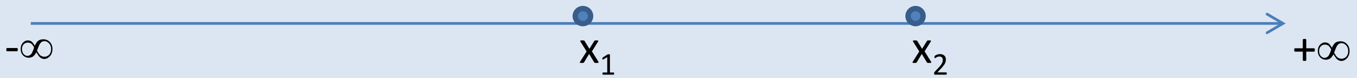
(**2**). $\boxed{\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1}$ $\qquad \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = F(\infty) = P(-\infty < X < +\infty) = P(\Omega) = 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = F(-\infty) = P(X \le -\infty) = P(\varnothing) = 0$$

(3). αν $x_1 < x_2$ τότε $F(x_1) \leq F(x_2)$

Απόδειξη



$$F(x_2) = P(X \leq x_2) = P(\{X \leq x_1\} \cup \{x_1 < X \leq x_2]) =$$

$$= P(\{X \leq x_1\}) + P(\{x_1 < X \leq x_2]) =$$

$$= F(x_1) + P(\{x_1 < X \leq x_2]) \geq F(x_1)$$

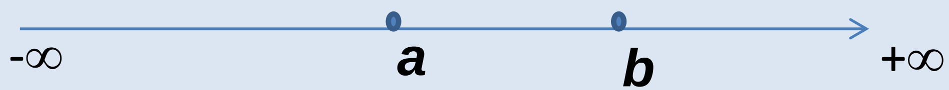
Συμπέρασμα: η σ.κ.π. $F(x)$ είναι ***<u>μη φθίνουσα</u>*** συνάρτηση

(**4**). Η σ.κ.π. *F(x)* είναι **συνεχής από δεξιά** (ή δεξιά συνεχής)

$$F(x) = \lim_{h \to 0} F(x+h) = F(x^+)$$

(**5**). $$\text{Αν } a < b \;\Rightarrow\; P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$$

<u>Απόδειξη</u>



$\{X \leq b\} = \{X \leq a\} \cup \{a < X \leq b\}$

άρα

$P(X \leq b) = P(X \leq a) + P(a < X \leq b)$ => $\mathbf{F(b) = F(a) + P(a < X \leq b)}$

(**6**). Τρόπος υπολογισμού της πιθανότητας *P(X=a)*

$$P(X=a)=\lim_{h\to 0} P(a-h<X\le a)=F(a)-F(a-h)=F(a)-F(a^-)$$

- ✓ δηλ. **η πιθανότητα σε ένα σημείο εκφράζει το άλμα της *σ.κ.π. F(x)*** στο σημείο αυτό.
- ✓ Έτσι, αν η *F(x)* είναι σταθερή ή συνεχής γύρω από το *a*, τότε *P(X=a)=0*
- ✓ Επίσης ισχύει ότι:

$$P(a \le X \le b) = P(a^- < X \le b) = F(b) - F(a^-)$$

(**7**). Ισχύει ότι $P(X>x)=1-P(X\le x)=1-F(x)$

Ιδιότητες σ.κ.π. $F(x) = P(X \le x) = P(X \in (-\infty, x])$

(**1**). $0 \le F(x) \le 1$

(**2**). $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1 \qquad \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$

(**3**). αν $x_1 < x_2$ τότε $F(x_1) \le F(x_2)$

(**4**). $F(x) = \lim_{h \to 0} F(x+h) = F(x^+)$

(**5**). Αν $a < b \;\Rightarrow\; P(a < X \le b) = F(b) - F(a)$

(**6**). $P(X = a) = F(a) - F(a^-)$

(**7**). $P(X > x) = 1 - P(X \le x) = 1 - F(x)$

Θεώρημα ***Καραθεοδωρή*** *(1873-1950)*

Κάθε σ.κ.π. ***F(x)*** είναι:

α) **μη-φθίνουσα**

β) **δεξιά συνεχής**

γ) $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$

Ισχύει και το **αντίστροφο**:

Κάθε συνάρτηση που ικανοποιεί τις 3 παραπάνω συνθήκες είναι **συνάρτηση κατανομής πιθανότητας** (**σ.κ.π.**).

Διακριτές Τυχαίες Μεταβλητές

Ορισμός

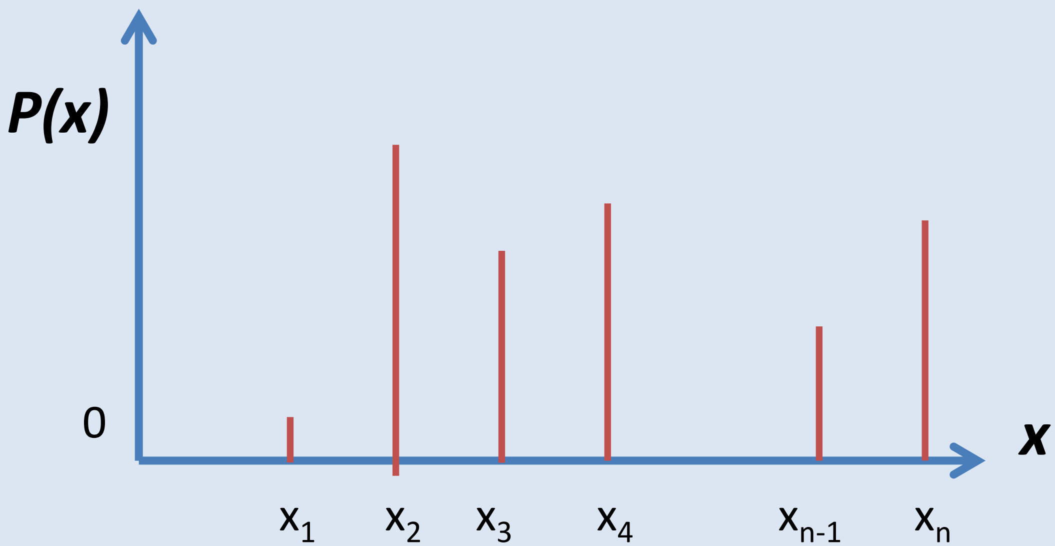
- Μία τυχαία μεταβλητή (**τ.μ.**) ***X*** ονομάζεται **διακριτή** εάν το σύνολο τιμών της είναι **πεπερασμένο** ή το πολύ **απείρως αριθμήσιμο**

$$\Omega_X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

Διακριτές Τυχαίες Μεταβλητές

- Μια διακριτή τυχαία μεταβλητή έχει ποσό πιθανότητας **μόνο πάνω στις τιμές της**

$\Omega_X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$



$$P(X = x_1),\; P(X = x_2),\; \ldots,\; P(X = x_n)$$

Ισχύει ότι:

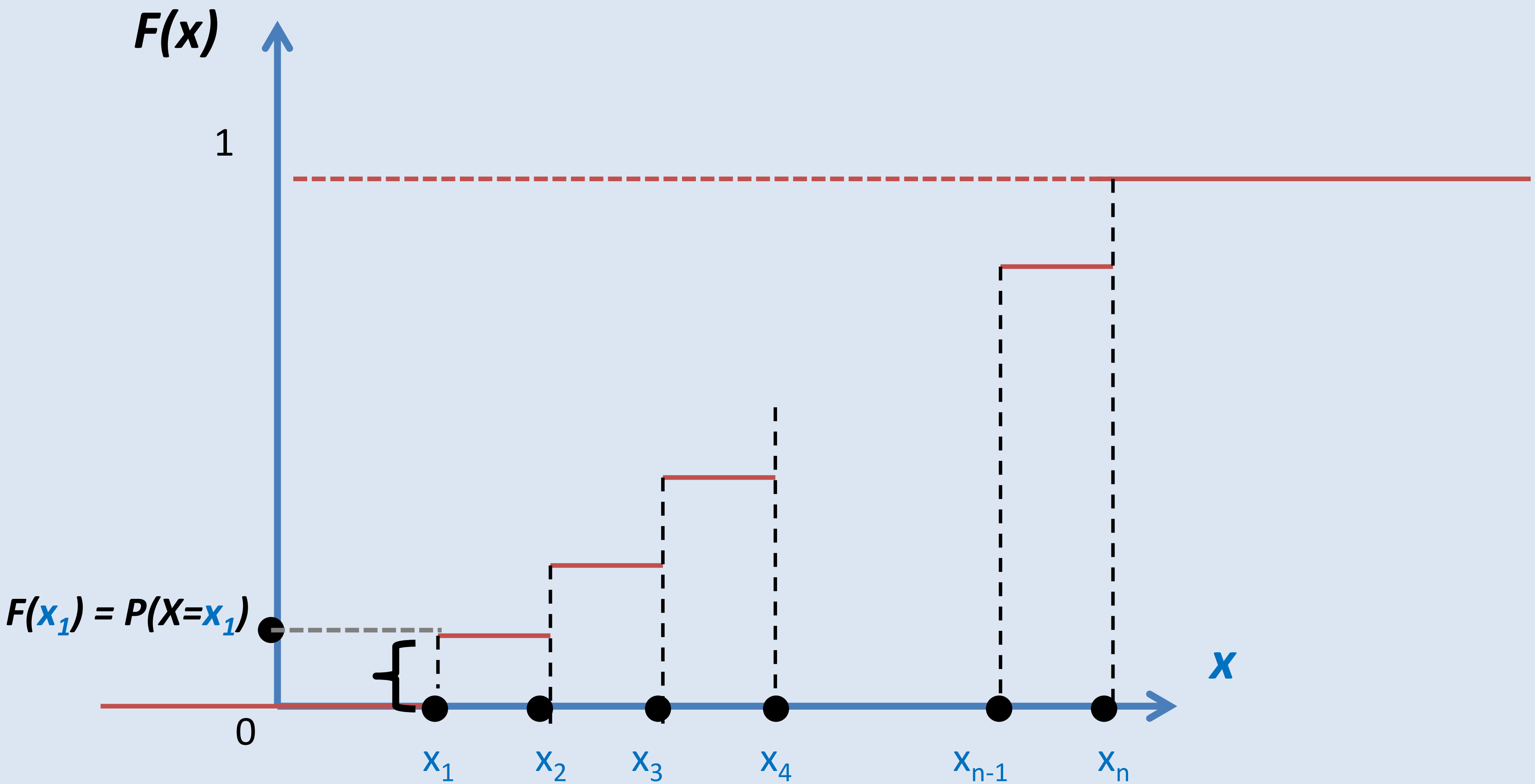
$$\sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = 1$$

$$F(x) = P(X \le x) = P(X \in (-\infty, x])$$

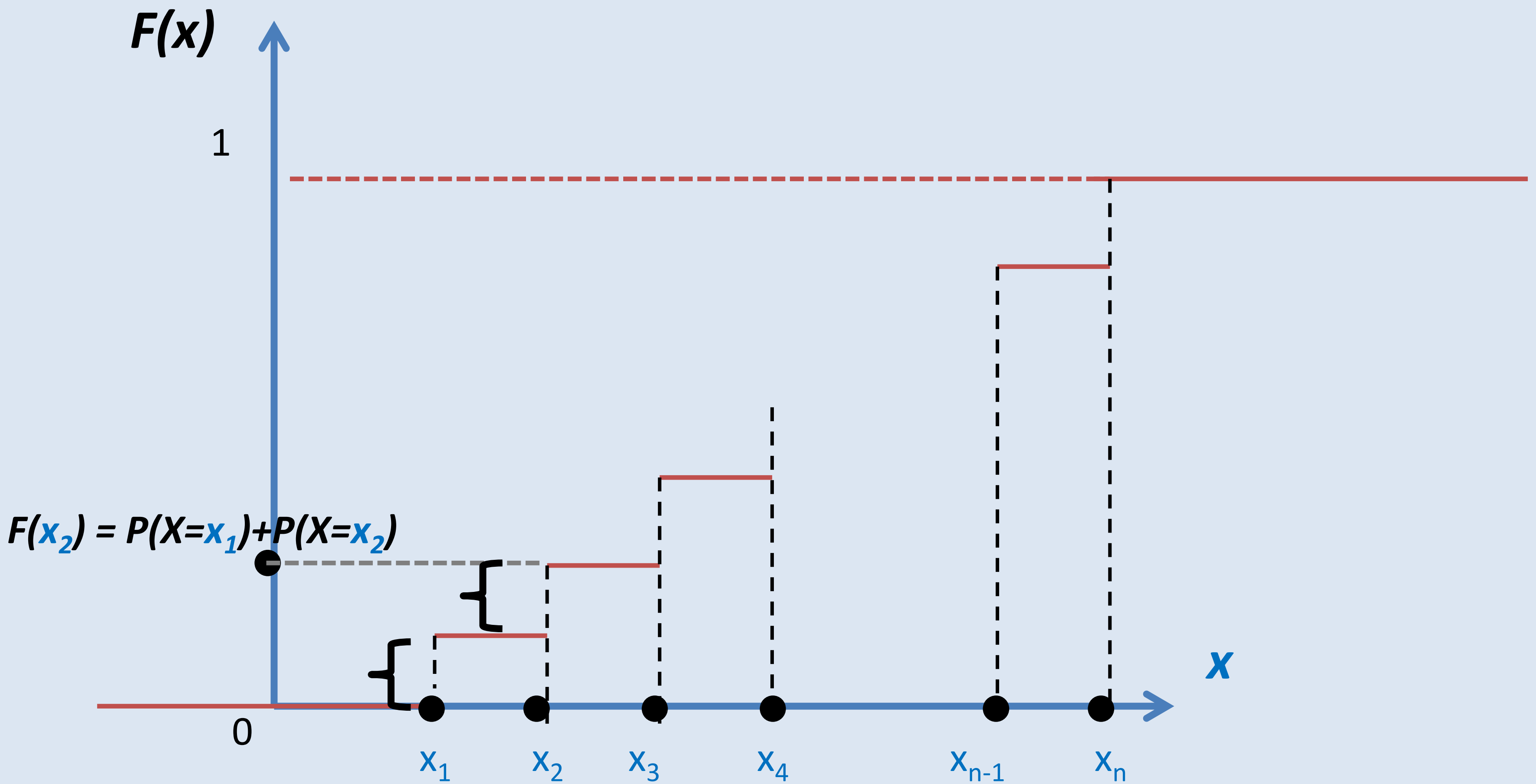
$$F(x) = P(X \le x) = \sum_{x_i \le x} P(X = x_i)$$

- Η αθροιστική συνάρτηση, ***F(x)***, εκφράζει το **άθροισμα πιθανοτήτων** όλων των τιμών της μεταβλητής που παρεμβάλλονται από την πρώτη τιμή της, x_1, μέχρι (και) την τιμή x

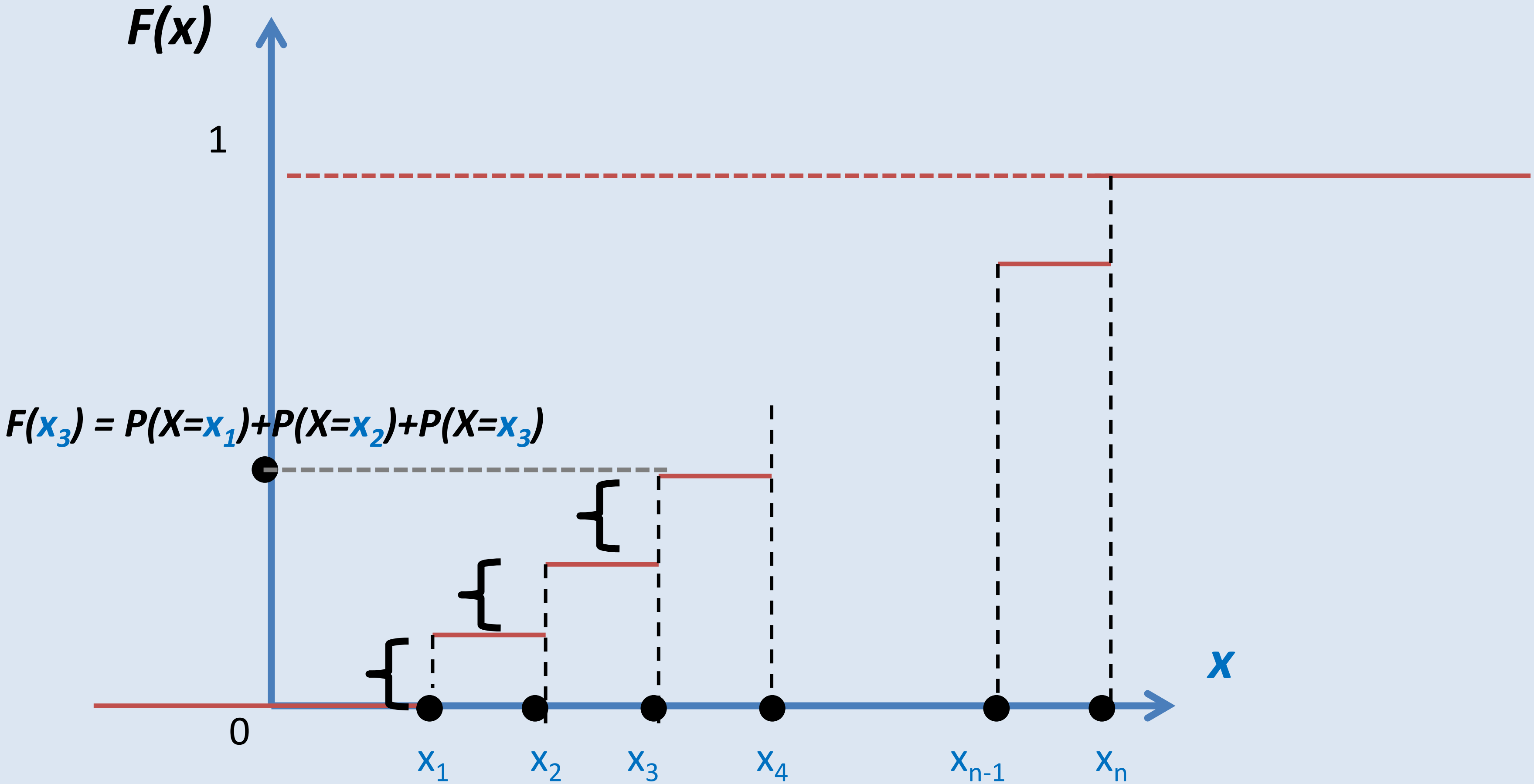
$$F(x) = P(X \le x) = \sum_{x_i \le x} P(X = x_i)$$



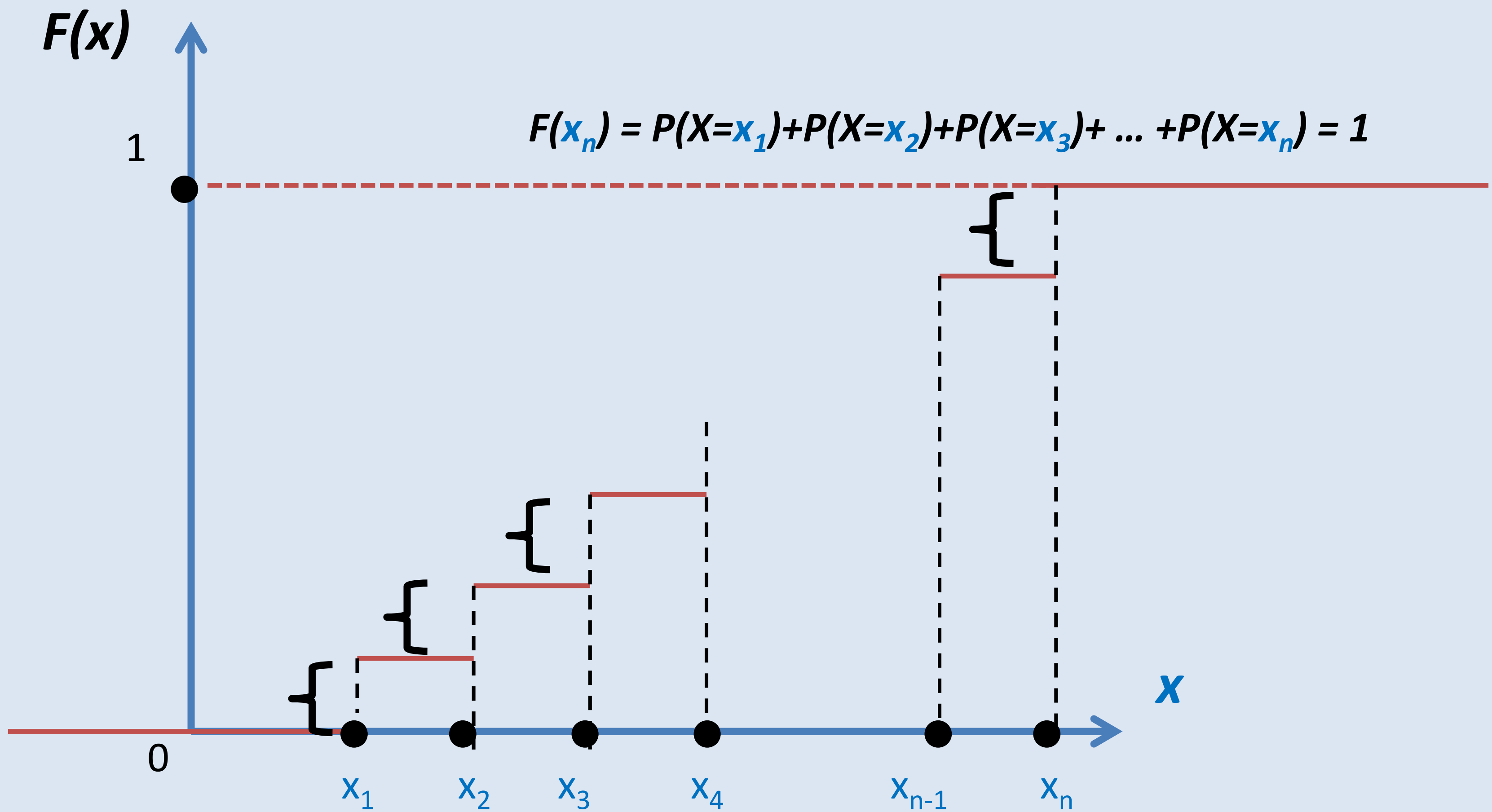
$$F(x) = P(X \le x) = \sum_{x_i \le x} P(X = x_i)$$



$$F(x) = P(X \le x) = \sum_{x_i \le x} P(X = x_i)$$

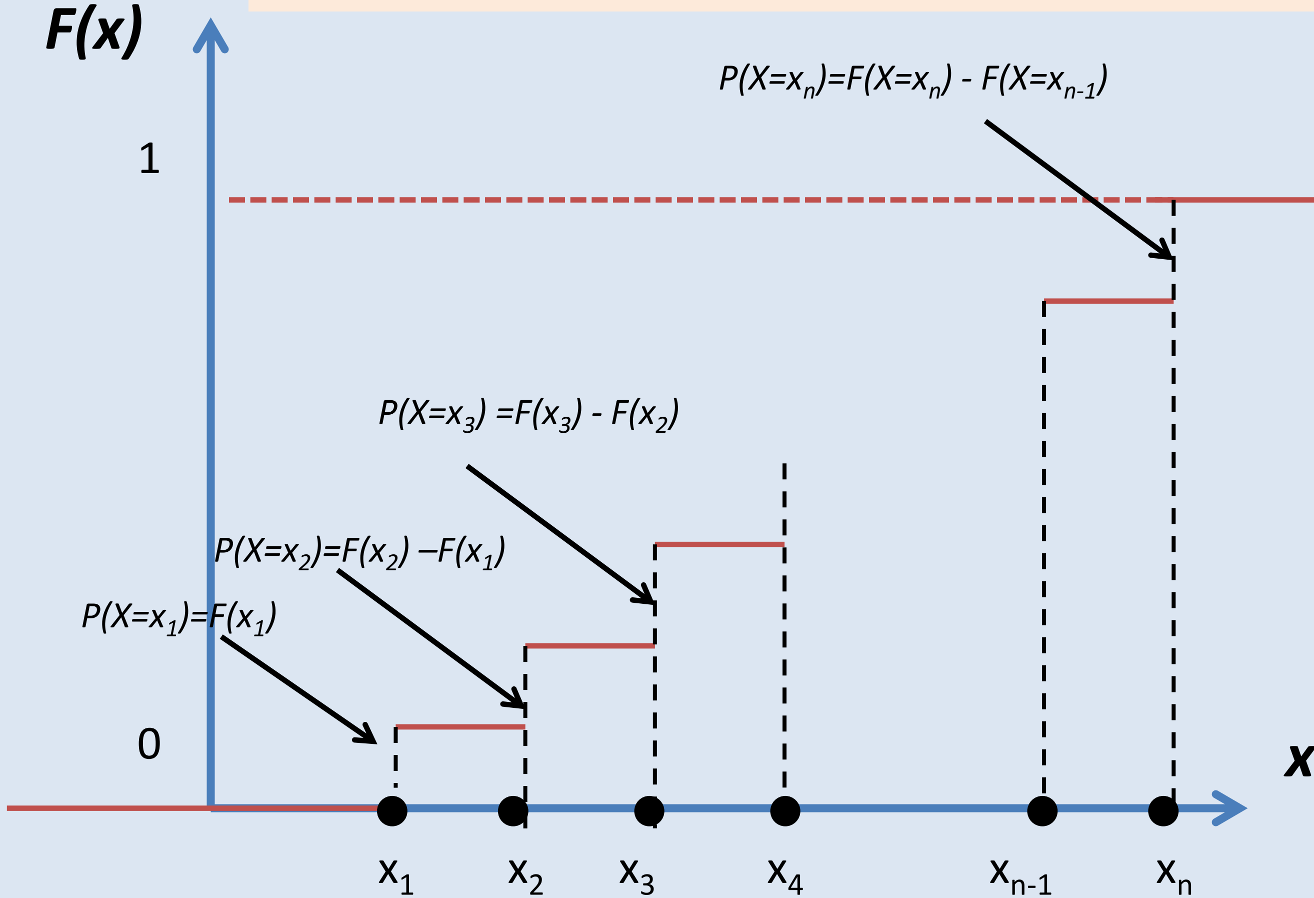


$$F(x) = P(X \le x) = \sum_{x_i \le x} P(X = x_i)$$



- Η σ.κ.π. $F(x) = P(X \leq x)$ είναι **μη φθίνουσα**, **δεξιά συνεχής** και **κλιμακωτή** με **άλματα** στις τιμές της μεταβλητής.

$$P(X=a) = \lim_{h\to\infty} P(a-h < X \leq a) = F(a) - F(a-h) = F(a) - F(a^-)$$



Παράδειγμα

Μία ασφαλιστική εταιρεία προσφέρει ασφάλειες ζωής ύψους *X* με τιμές εκφρασμένες σε δεκάδες χιλιάδες ευρώ.
Η συνάρτηση κατανομής πιθανότητας του *X* είναι:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & -\infty < x < 1 \\ 0.2 & 1 \le x < 3 \\ k & 3 \le x < 6 \\ 0.8 & 6 \le x < 12 \\ 1 & x \ge 12 \end{cases}$$

α) Τι τιμές παίρνει το *k* ?

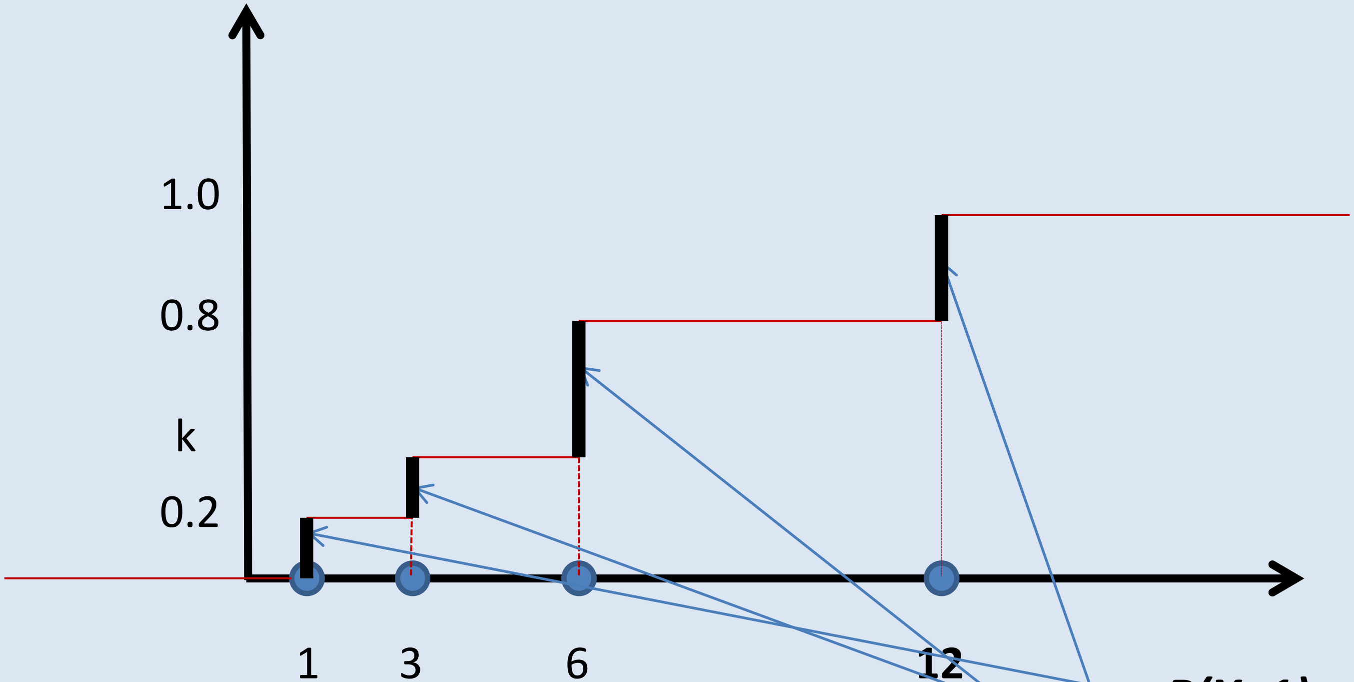
β) Να υπολογιστούν οι πιθανότητες στα σημεία {0, 1, 2, 3 ,5, 6, 12}, και στα διαστήματα τιμών:

$P(1 < X \le 6)$, $P(1 \le X < 6)$, $P(X \ge 3)$

Λύση

α) $0.2 \le k < 0.8$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x < 1 \\ 0.2 & 1 \le x < 3 \\ k & 3 \le x < 6 \\ 0.8 & 6 \le x < 12 \\ 1 & x \ge 12 \end{cases}$$



$\Omega_X = \{1, 3, 6, 12\}$

P(X=1) = *0.2 = F(1)-F(1⁻)*

P(X=3) = *k-0.2=F(3)-F(3⁻)*

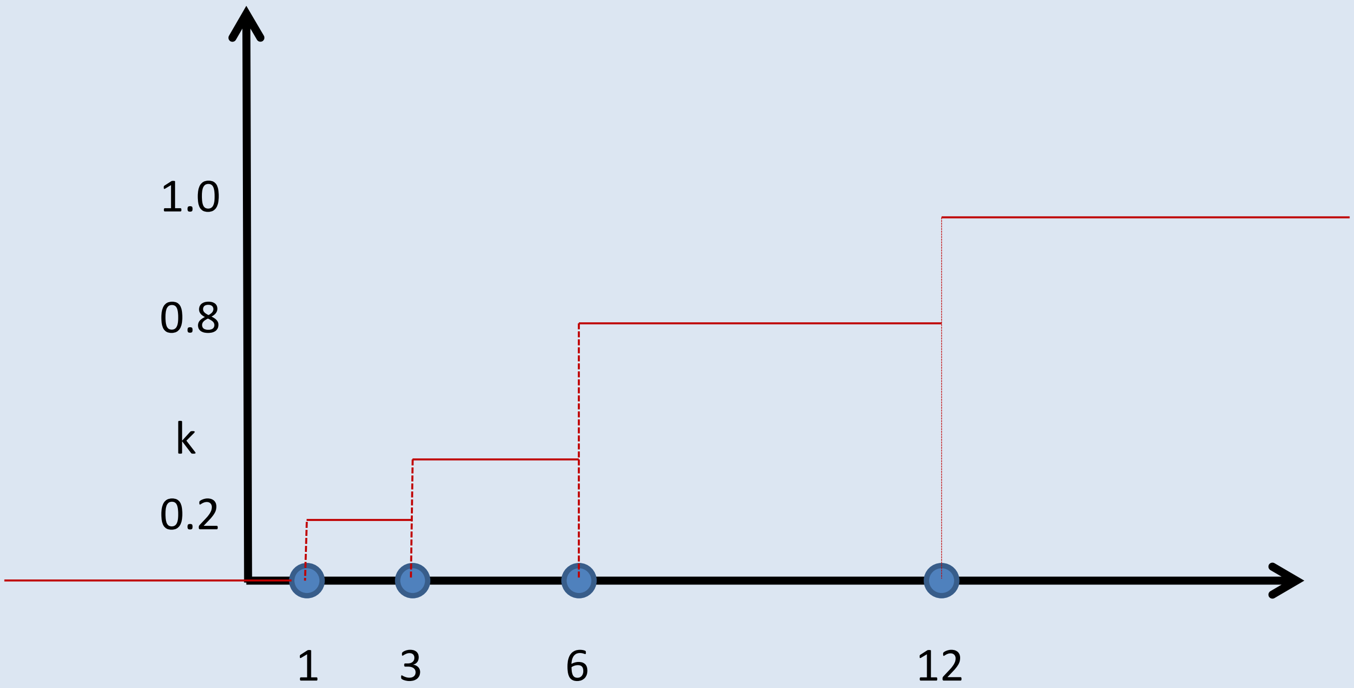
P(X=6) = *0.8-k=F(6)-F(6⁻)*

P(X=12)= *1-0.8=0.2=F(12)-F(12⁻)*

Παράδειγμα

β) Πιθανότητες στα σημεία {0,1,2,3,5,6,12}

$$F(x)=\begin{cases} 0 & -\infty < x < 1 \\ 0.2 & 1 \le x < 3 \\ k & 3 \le x < 6 \\ 0.8 & 6 \le x < 12 \\ 1 & x \ge 12 \end{cases}$$



$P(X=0)=F(0)-F(0^-)=0$

$P(X=2)=F(2)-F(2^-)=0$

$P(X=5)=F(5)-F(5^-)=0$

$P(X=1)=F(1)-F(1^-)=0.2$

$P(X=3)=F(3)-F(3^-)=k-0.2$

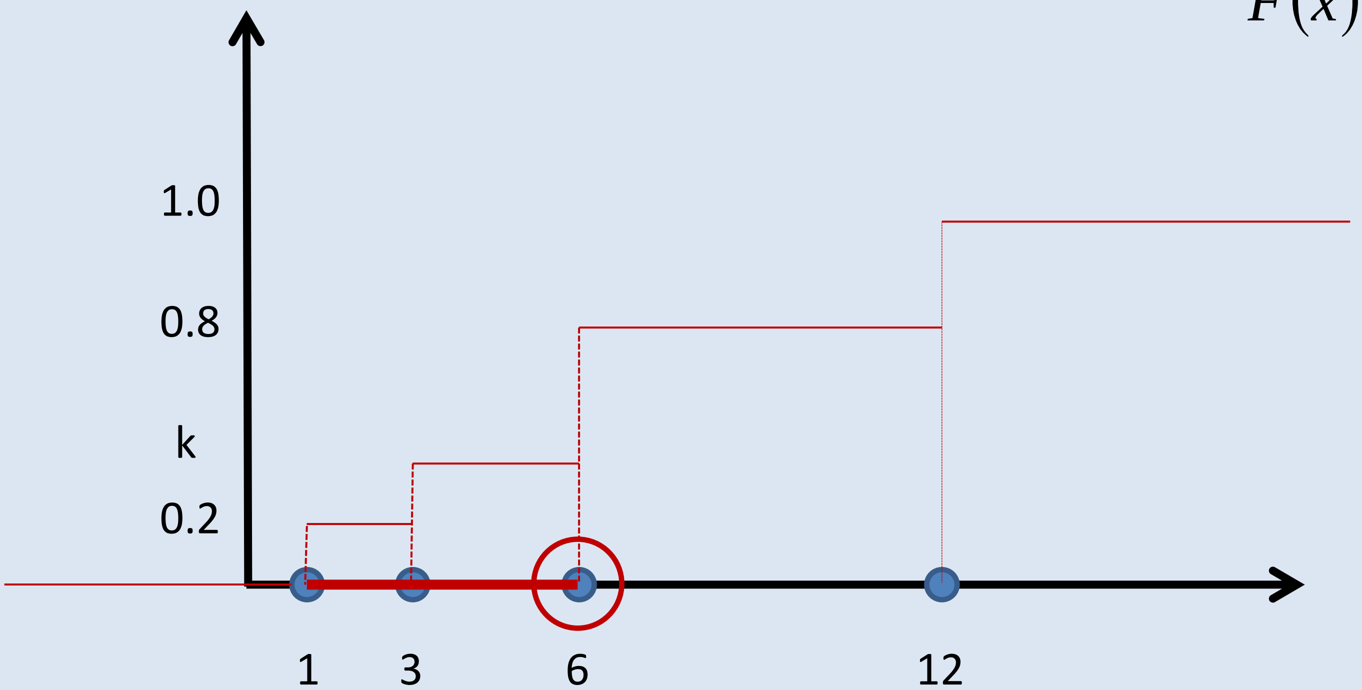
$P(X=6)=F(6)-F(6^-)=0.8-k$

$P(X=12)=F(12)-F(12^-)=0.2$

Παράδειγμα

β) Πιθανότητες στα διαστήματα τιμών:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & -\infty < x < 1 \\ 0.2 & 1 \le x < 3 \\ k & 3 \le x < 6 \\ 0.8 & 6 \le x < 12 \\ 1 & x \ge 12 \end{cases}$$

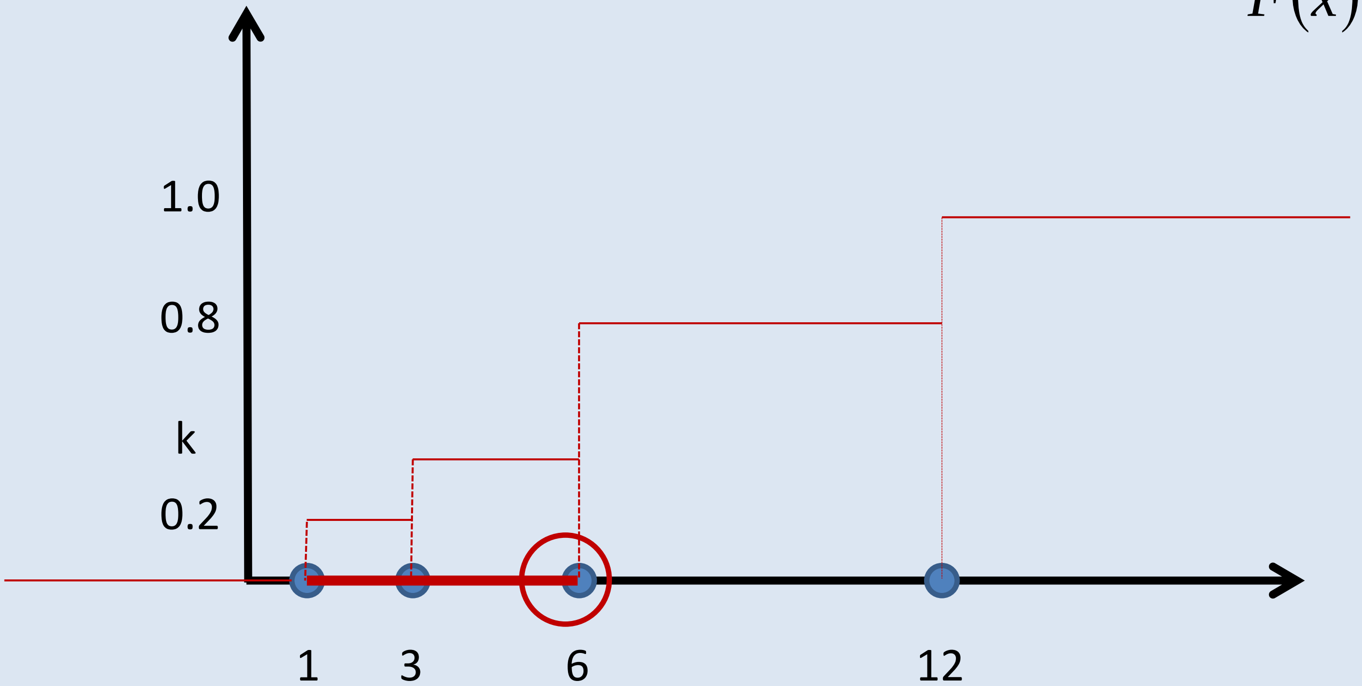


P(1 < X ≤ 6)=F(6)-F(1)=0.8-0.2=0.6

Παράδειγμα

β) Πιθανότητες στα διαστήματα τιμών:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & -\infty < x < 1 \\ 0.2 & 1 \le x < 3 \\ k & 3 \le x < 6 \\ 0.8 & 6 \le x < 12 \\ 1 & x \ge 12 \end{cases}$$



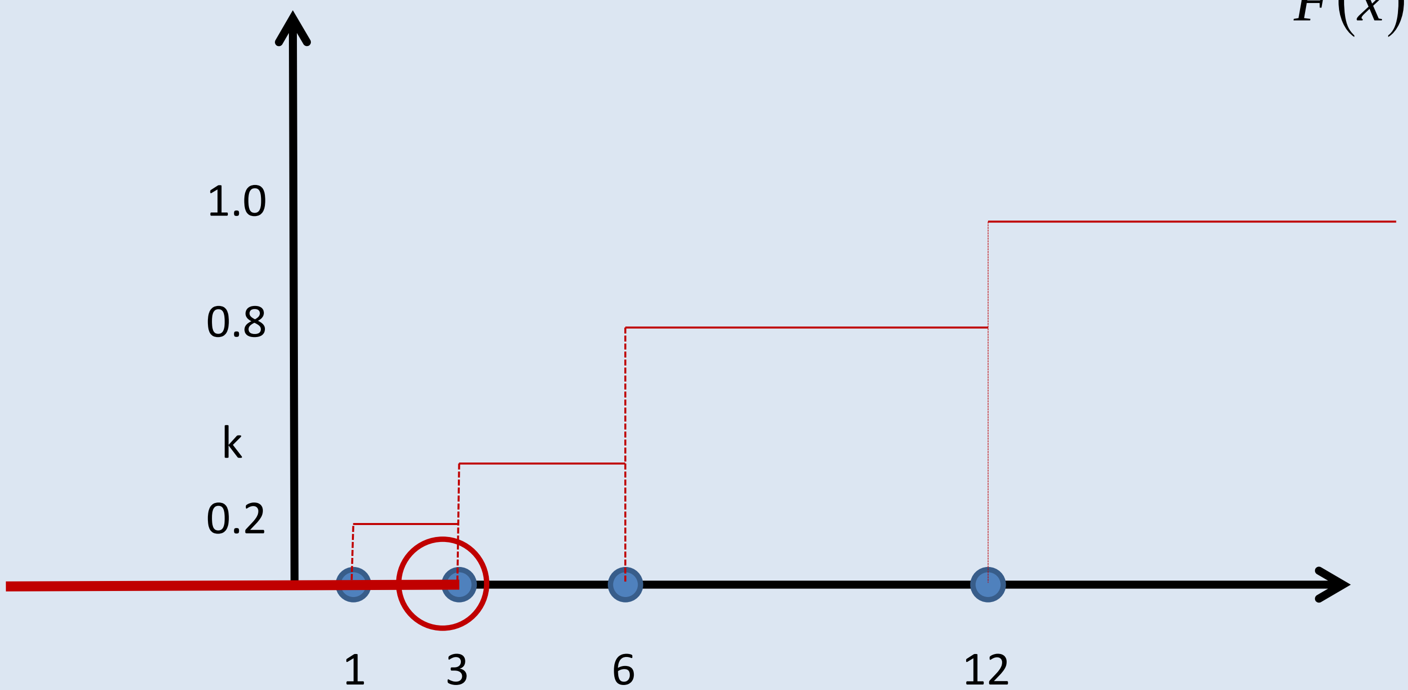
$P(1 < X \le 6)=F(6)-F(1)=0.8-0.2=0.6$

$P(1 \le X < 6) = P(1^- < X \le 6^-) = F(6^-)-F(1^-)=k-0=k$

Παράδειγμα

$$F(x)=\begin{cases} 0 & -\infty < x < 1 \\ 0.2 & 1 \le x < 3 \\ k & 3 \le x < 6 \\ 0.8 & 6 \le x < 12 \\ 1 & x \ge 12 \end{cases}$$

β) Πιθανότητες στα διαστήματα τιμών:



P(1 < X ≤ 6)=F(6)-F(1)=0.8-0.2=0.6

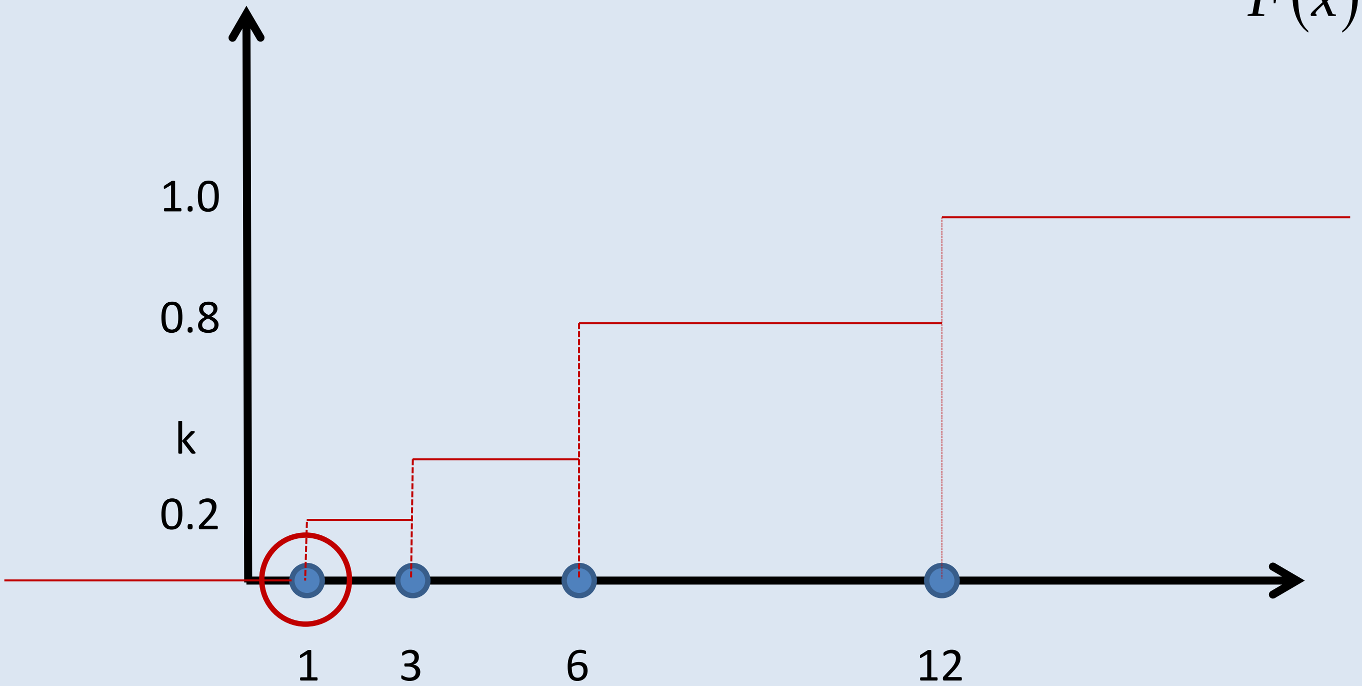
P(1 ≤ X < 6) = P(1⁻ < X ≤ 6⁻) =F(6⁻)-F(1⁻)=k

P(X ≥ 3) = 1-P(X<3) = 1-P(X≤3⁻) = 1 - F(3⁻) = 1-0.2=0.8

Παράδειγμα

β) Πιθανότητες στα διαστήματα τιμών:

$$F(x)=\begin{cases}0 & -\infty<x<1\\ 0.2 & 1\leq x<3\\ k & 3\leq x<6\\ 0.8 & 6\leq x<12\\ 1 & x\geq 12\end{cases}$$



P(X=1) = 0.2
P(X=3) = k-0.2
P(X=6) = 0.8-k
P(X=12) = 0.2

P(1 < X ≤ 6)=P(X=3)+P(X=6)=0.6

P(1 ≤ X < 6) = P(X=1)+P(X=3)=k

Εναλλακτικά

P(X ≥ 3) = P(X=3)+P(X=6)+P(X=12)=0.8

ή

P(X ≥ 3) = 1-P(X<3) = 1-P(X=1) = 0.8