Μέρος V

Οριακά Θεωρήματα

Άθροισμα *n* τυχαίων μεταβλητών

- Έστω ***n*** τυχαίες μεταβλητές X_1 , X_2 , …, X_n . Το **άθροισμά** τους είναι μία τυχαία μεταβλητή:

$$\boldsymbol{S_n} = X_1 + X_2 + \cdots + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

- **Μέση τιμή** αθροίσματος = άθροισμα μέσων τιμών των ***n*** μεταβλητών

$$E(\boldsymbol{S_n}) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$$

Απόδειξη

- Για ***n=2*** *τυχαίες μεταβλητές με από-κοινού σ.π.π.* $f_{1,2}(x_1, x_2)$ έχουμε:

$$E\left(X_1 + X_2\right) =$$

$$= \int\int \left(x_1 + x_2\right) f_{1,2}\left(x_1, x_2\right) dx_1 dx_2 =$$

$$= \int\int x_1 f_{1,2}\left(x_1, x_2\right) dx_1 dx_2 + \int\int x_2 f_{1,2}\left(x_1, x_2\right) dx_1 dx_2 =$$

$$= \int x_1 \left(\int f_{1,2}\left(x_1, x_2\right) dx_2\right) dx_1 + \int x_2 \left(\int f_{1,2}\left(x_1, x_2\right) dx_1\right) dx_2 =$$

$$= \int x_1 f_1\left(x_1\right) dx_1 + \int x_2 f_2\left(x_2\right) dx_2 =$$

περιθώριες

$$= E\left(X_1\right) + E\left(X_2\right)$$

- Για ***n=3*** *έχουμε πάλι 2 τυχαίες μεταβλητές την* $\boldsymbol{X_{12}} = X_1 + X_2$ *και την* $\boldsymbol{X_3}$.
- *Έτσι ισχύει ότι*

$$E\left(X_1+X_2+X_3\right)=E\left(X_{12}+X_3\right)=$$
$$=E\left(X_{12}\right)+E\left(X_3\right)=E\left(X_1+X_2\right)+E\left(X_3\right)=$$
$$=E\left(X_1\right)+E\left(X_2\right)+E\left(X_3\right)$$

- **Αναδρομικά** για τις ***n*** τυχαίες μεταβλητές έχουμε

$$E(X_1 + X_2 + \cdots + X_{n-1} + X_n) = E\left(X_{1,n-1} + X_n\right) =$$

$$= E\left(X_{1,n-1}\right) + E(X_n) = E\left(X_{1,n-2} + X_{n-1}\right) + E(X_n) =$$

$$= E\left(X_{1,n-2}\right) + E(X_{n-1}) + E(X_n) =$$

$$\vdots$$

$$= E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_{n-1}) + E(X_n)$$

- **Διακύμανση του αθροίσματος *n*** τυχαίων μεταβλητών

$$\boldsymbol{S_n} = X_1 + X_2 + \cdots + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$V(S_n) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} COV(X_i, X_j)$$

Απόδειξη

- Έστω n=2 τυχαίες μεταβλητές

$$S_2 = X_1 + X_2$$

$$V(S_2) = E\left[(S_2 - E(S_2))^2\right] = E\left[(X_1 + X_2 - (E(X_1) + E(X_2)))^2\right] =$$
$$= E\left[((X_1 - E(X_1)) + (X_2 - E(X_2)))^2\right] =$$
$$= E\left[(X_1 - E(X_1))^2 + (X_2 - E(X_2))^2 + 2(X_1 - E(X_1))(X_2 - E(X_2))\right] =$$
$$= \boxed{E\left[(X_1 - E(X_1))^2\right]} + \boxed{E\left[(X_2 - E(X_2))^2\right]} + 2\boxed{E\left[(X_1 - E(X_1))(X_2 - E(X_2))\right]} =$$
$$= V(X_1) + V(X_2) + 2COV(X_1, X_2)$$

(1) Άθροισμα **ανεξάρτητων μεταβλητών**

- Η μέση τιμή του αθροίσματος παραμένει το άθροισμα, δηλ.

$$E(S_n) = E(X_1) + E(X_2) + \ldots + E(X_n) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$$

- Η διακύμανση είναι ίση με το **άθροισμα** των διακυμάνσεων

$$V(S_n) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \cancelto{0}{COV(X_i, X_j)} = \sum_{i=1}^{n} V(X_i)$$

(2) Άθροισμα **ανεξάρτητων και ισόνομων μεταβλητών**

- Οι μεταβλητές είναι **ανεξάρτητες** και ***ισόνομες***, (***i.i.d. - independent identically distributed***), δηλ.
- έχουν **κοινό μέσο και διακύμανση** $E(X_i)=\mu,\ V(X_i)=\sigma^2\ \forall i$:
- Τότε

$$E(S_n)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=n\mu$$

$$V(S_n)=\sum_{i=1}^{n}V(X_i)=n\sigma^2$$

(3) Ο **μέσος όρος *n* ανεξάρτητων** και **ισόνομων** τυχαίων μεταβλητών

$$M_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{n} S_n$$

- **Μέση τιμή:**

$$\boxed{E(M_n) = \frac{1}{n}E(S_n) = \frac{1}{n}n\mu = \mu}$$

(3) Ο **μέσος όρος** ***n*** **ανεξάρτητων** και **ισόνομων** τυχαίων μεταβλητών

$$M_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{n} S_n$$

- **Μέση τιμή:**

$$E(M_n) = \frac{1}{n} E(S_n) = \frac{1}{n} n\mu = \mu$$

- **Διακύμανση:**

$$\boxed{V(M_n) = \frac{1}{n^2} V(S_n) = \frac{1}{n^2} \boxed{n\sigma^2} = \frac{\sigma^2}{n}}$$

$$V(aX) = a^2 V(X)$$

Ανισοτικές σχέσεις

Ανισότητα του *Markov*

Έστω τ.μ. X με θετικές τιμές, δηλ. $\Omega_X = \{x: x>0\}$. Τότε

$$\boxed{P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}}$$

Απόδειξη

$$E(X) = \int_0^\infty xf(x)dx = \int_0^a xf(x)dx + \int_a^\infty xf(x)dx \geq \int_a^\infty xf(x)dx \geq$$

$$\geq \int_a^\infty af(x)dx = a\int_a^\infty f(x)dx = aP(X \geq a)$$

Ανισότητα του Chebyshev

- Έστω τ.μ. *X* με μέσο *E(X)=μ* και διακύμανση *V(X)=σ²*.
- Εφαρμόζοντας την ανίσωση του *Markov* $P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$

  για $D^2 = (X-\mu)^2$ και $a = \varepsilon^2$ και $E(D^2) = E((X-\mu)^2) = V(X)$

  παίρνουμε:

$$P(D^2 \geq \varepsilon^2) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2} \Rightarrow \boldsymbol{P(|X-\mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}}$$

Εφαρμογή της ανισότητας του **Chebyshev** για τον **δειγματικό μέσο M_n**

- Γνωρίζουμε για τον **μέσο όρο** : $E(M_n)=\mu$ και $V(M_n)=\sigma^2/n$

$$\boldsymbol{M_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{1}{n} S_n$$

$$E(M_n) = \frac{1}{n} E(S_n) = \frac{1}{n} n\mu = \mu$$

$$V(M_n) = \frac{1}{n^2} V(S_n) = \frac{1}{n^2} n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$\boxed{P(|\boldsymbol{X} - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(\boldsymbol{X})}{\varepsilon^2}}$$

Εφαρμογή της ανισότητας του Chebyshev για τον δειγματικό μέσο M_n

- Γνωρίζουμε για τον **μέσο όρο** : $E(M_n)=\mu$ και $V(M_n)=\sigma^2/n$

- Χρησιμοποιώντας την ανισότητας **Chebyshev** για το M_n :

$$P(|X-\mu|\geq\varepsilon)\leq\frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{P(|M_n-\mu|\geq\varepsilon)\leq\frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}\Rightarrow P(|M_n-\mu|<\varepsilon)\geq 1-\frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}}$$

Ερμηνεία

δ

$$P\left(\left|M_n - \mu\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \Rightarrow P\left(\left|M_n - \mu\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

- Αν επιλέξουμε ένα **άνω** **φράγμα *ε*** για το **σφάλμα** (**ανοχή σφάλματος**), τότε

- ο δειγματικός μέσος (***M$_n$***) δηλ. ο μέσος όρος των μετρήσεων, θα είναι **κατά** ***ε* προσέγγιση** ίσος με τον πραγματικό μέσο (***μ***) με πιθανότητα τουλάχιστον ***1-δ***,

όπου ***δ = σ² / (n ε²).***

Νόμοι των μεγάλων αριθμών

- **Ασθενής νόμος** $$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|M_n-\mu\right|<\varepsilon\right)=1$$ $$P\left(\left|M_n-\mu\right|<\varepsilon\right)\geq 1-\frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

Μετά από πολλές μετρήσεις, ο δειγματικός μέσος θα προσεγγίσει τον πραγματικό μέσο με υψηλή πιθανότητα

$$M_n \xrightarrow{\mathbf{P}} \mu$$ ***σύγκλιση κατά πιθανότητα***

- **Ισχυρός νόμος** $$P\left(\lim_{n\to\infty} M_n=\mu\right)=1$$

Με πιθανότητα 1 (πλήρη βεβαιότητα) ο δειγματικός μέσος θα προσεγγίσει τον πραγματικό μετά από πολλές μετρήσεις

$$M_n \xrightarrow{\text{σ.β.}} \mu$$ ***σύγκλιση με βεβαιότητα***

Κεντρικό Οριακό Θεώρημα (Κ.Ο.Θ.)

- ✓ Εξετάζει την **ασυμπτωτική συμπεριφορά του αθροίσματος** πολλών τυχαίων μεταβλητών.
- ✓ Πολλές τυχαίες μεταβλητές που περιγράφουν διάφορα χαρακτηριστικά είναι αποτέλεσμα **συνάθροισης πολλών τυχαίων μεταβλητών** π.χ. μηνιαίο ή ετήσιο εισόδημα εργαζομένου, ύψος αποζημίωσης, θέση και ταχύτητα των μορίων ενός αερίου, βάρος/ύψος ατόμων, κ.ο.κ.
- ✓ Εξηγεί την **κανονικότητα τυχαίων μεταβλητών** σε εφαρμογές και τη σημαντικότητα της **κανονικής κατανομής**.

Κεντρικό Οριακό Θεώρημα (Κ.Ο.Θ.)

- ✓ Στη θεωρία της **μέτρησης σφαλμάτων**, το παρατηρούμενο **σφάλμα** μπορεί να εκφραστεί ως το **άθροισμα** μεγάλου πλήθους ανεξάρτητων επιμέρους σφαλμάτων (ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών).

- ✓ Στη **Στατιστική** ο **μέσος** πολλών ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών είναι κομβικής σημασίας για την **εκτίμηση** και τον **στατιστικό έλεγχο παραμέτρων**.

Κεντρικό Οριακό Θεώρημα (Κ.Ο.Θ.)

- Έστω *n* **ανεξάρτητες** και **ισόνομες** τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, \ldots, X_n$, δηλ. κοινό μέσο ($\boldsymbol{\mu_i = \mu}$) και διακύμανση ($\boldsymbol{\sigma_i^2 = \sigma^2}$)
- Τότε το άθροισμα τους $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$

ακολουθεί ***προσεγγιστικά*** την **Κανονική κατανομή** (*ανεξάρτητα της κατανομής των* X_i) με **μέσο** $\boldsymbol{n\mu}$ και **διακύμανση** $\boldsymbol{n\sigma^2}$, δηλ.

$$S_n \sim N\left(n\mu, n\sigma^2\right)$$

ή

$$Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \sim N(0,1)$$

Καθώς ισχύει ότι: Αν $X \sim N(\mu,\sigma^2) \Rightarrow Z=(X-\mu)/\sigma \sim N(0,1)$

- Έστω *n* **ανεξάρτητες** και **ισόνομες** τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, \ldots, X_n$, δηλ. κοινό μέσο ($\boldsymbol{\mu_i = \mu}$) και διακύμανση ($\boldsymbol{\sigma_i^2 = \sigma^2}$)
- Τότε το άθροισμα τους είναι κατά προσέγγιση «κανονικό»

$$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$S_n \sim N\left(n\mu, n\sigma^2\right)$$

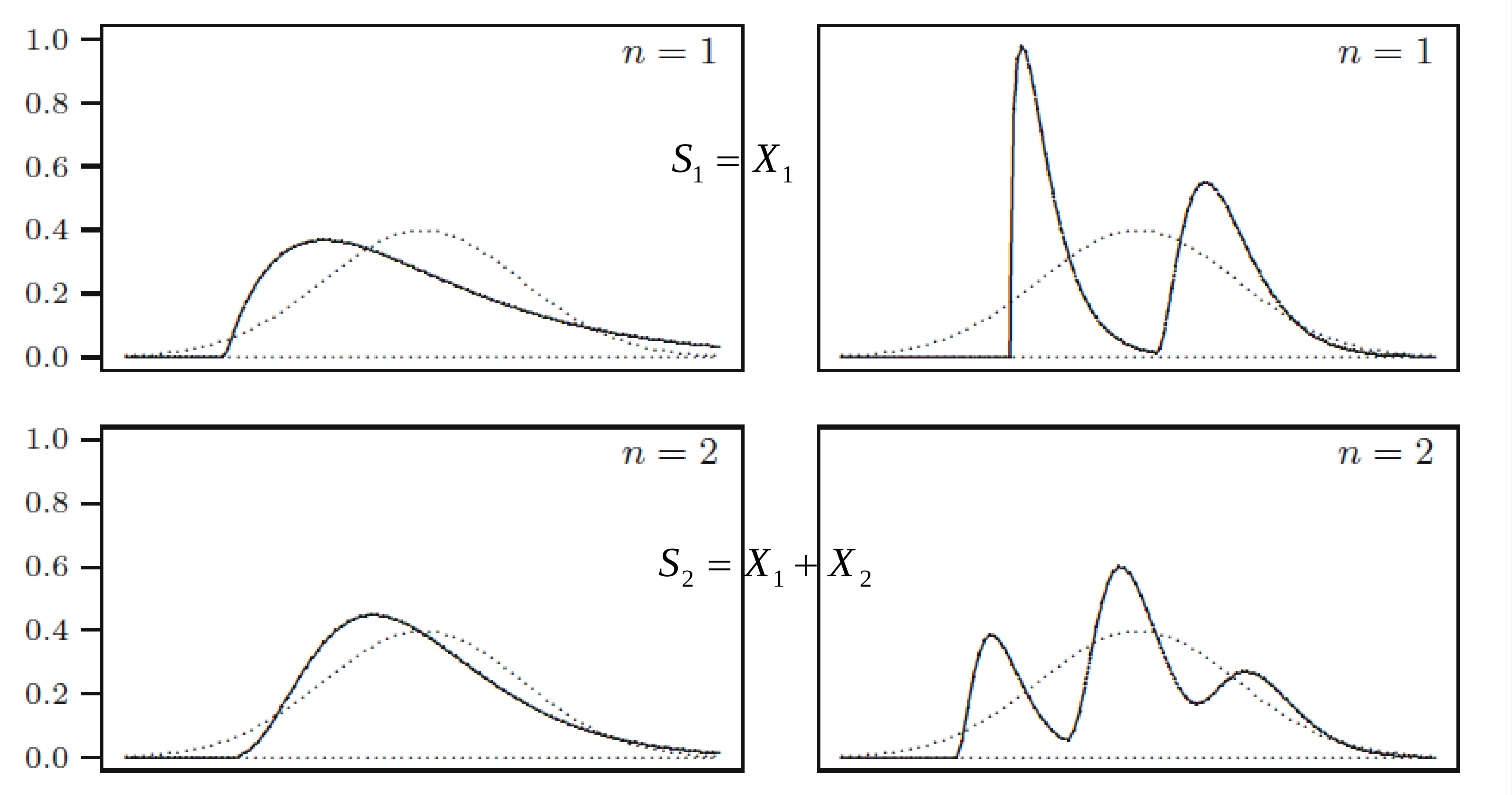
- Το ίδιο ισχύει και για τον **μέσο όρο** ως τυχαία μεταβλητή

$$\boldsymbol{M_n} = \frac{\boldsymbol{S_n}}{n} \sim N\left(\boldsymbol{\mu}, \frac{\boldsymbol{\sigma^2}}{\boldsymbol{n}}\right)$$

ακολουθεί ***προσεγγιστικά*** την **Κανονική κατανομή** με **μέσο** $\boldsymbol{\mu}$ και **διακύμανση** $\boldsymbol{\sigma^2/n}$

Παράδειγμα εφαρμογής του Κ.Ο.Θ. σε δύο περιπτώσεις κατανομής του X_i

Περίπτωση 1 **Περίπτωση 2**

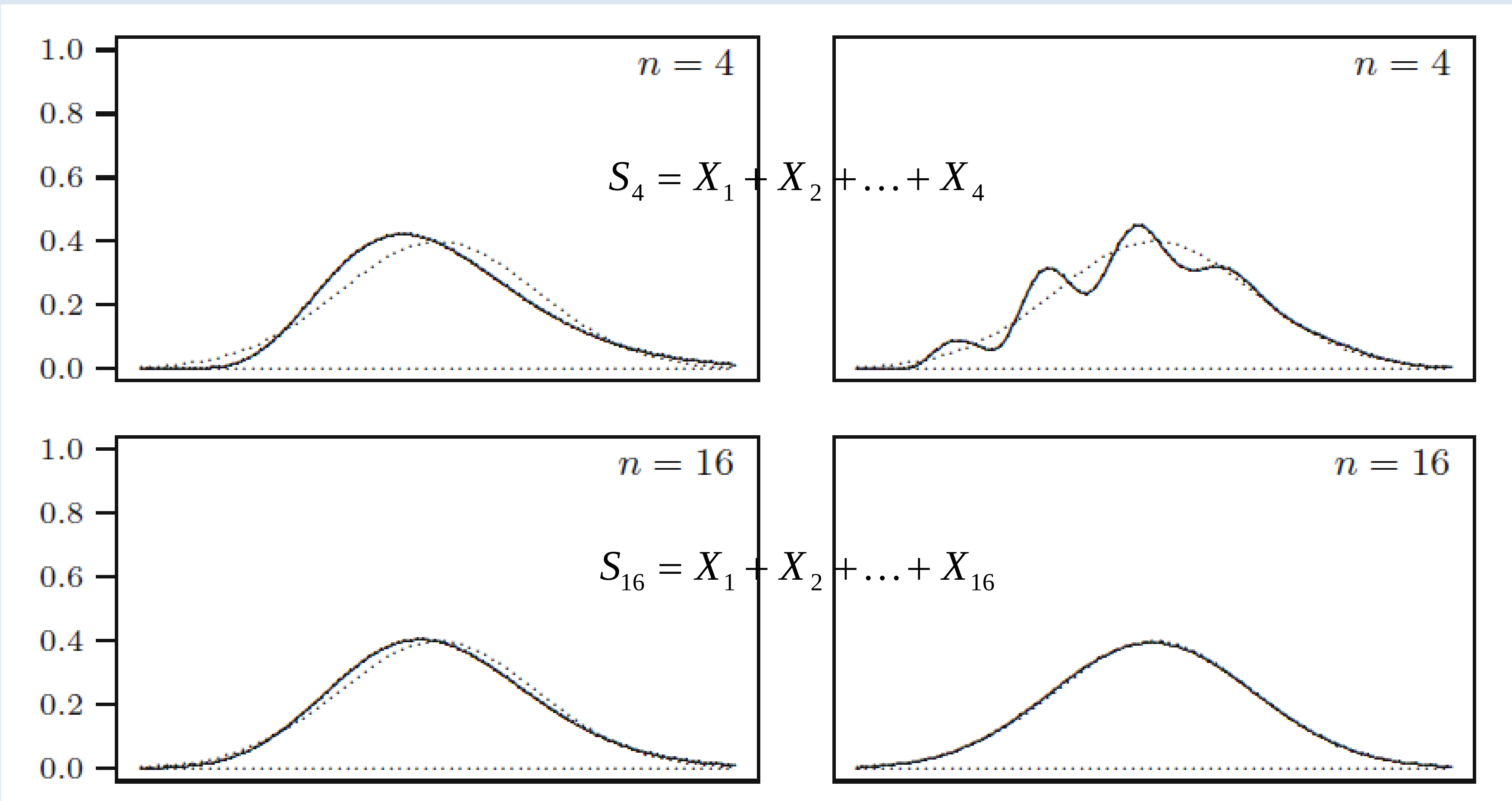


$S_1 = X_1$

$S_2 = X_1 + X_2$

Παράδειγμα εφαρμογής του Κ.Ο.Θ. σε δύο περιπτώσεις κατανομής του X_i

Περίπτωση 1 | **Περίπτωση 2**

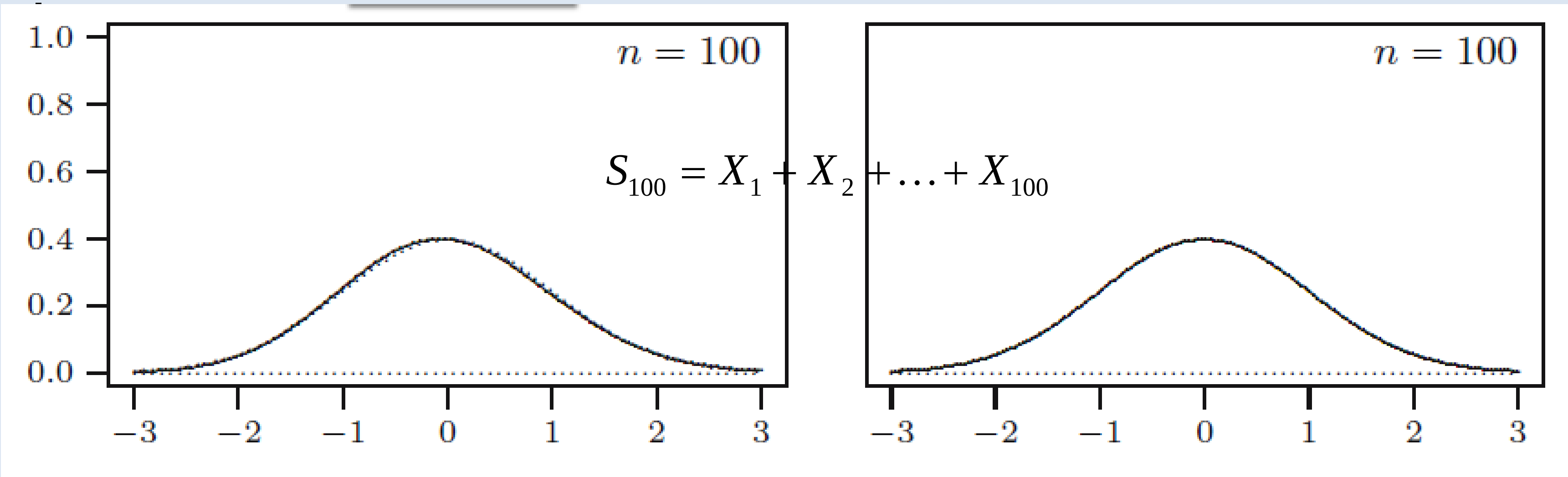


$S_4 = X_1 + X_2 + \ldots + X_4$

$S_{16} = X_1 + X_2 + \ldots + X_{16}$

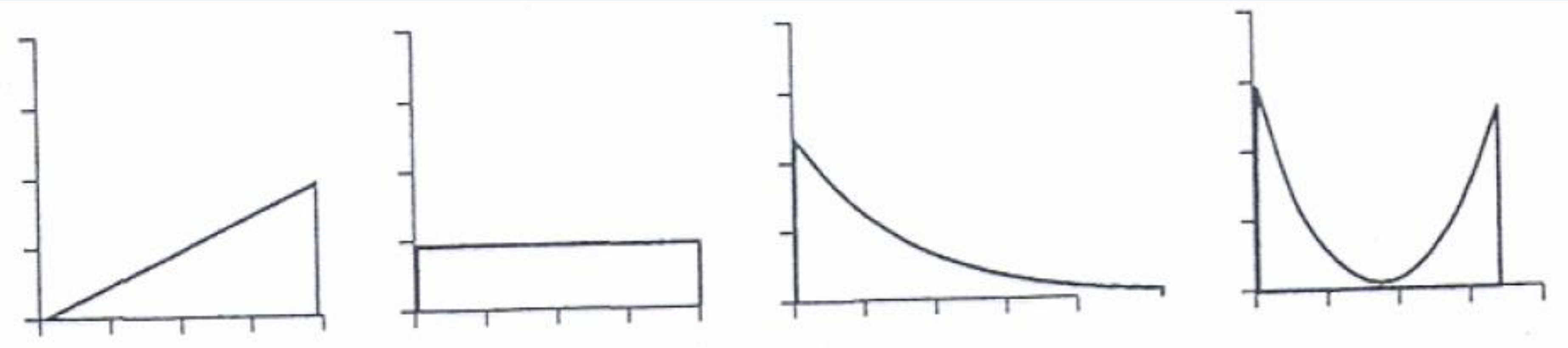
Παράδειγμα εφαρμογής του Κ.Ο.Θ. σε δύο περιπτώσεις κατανομής του X_i

Περίπτωση 1 **Περίπτωση 2**



$$S_{100} = X_1 + X_2 + \ldots + X_{100}$$

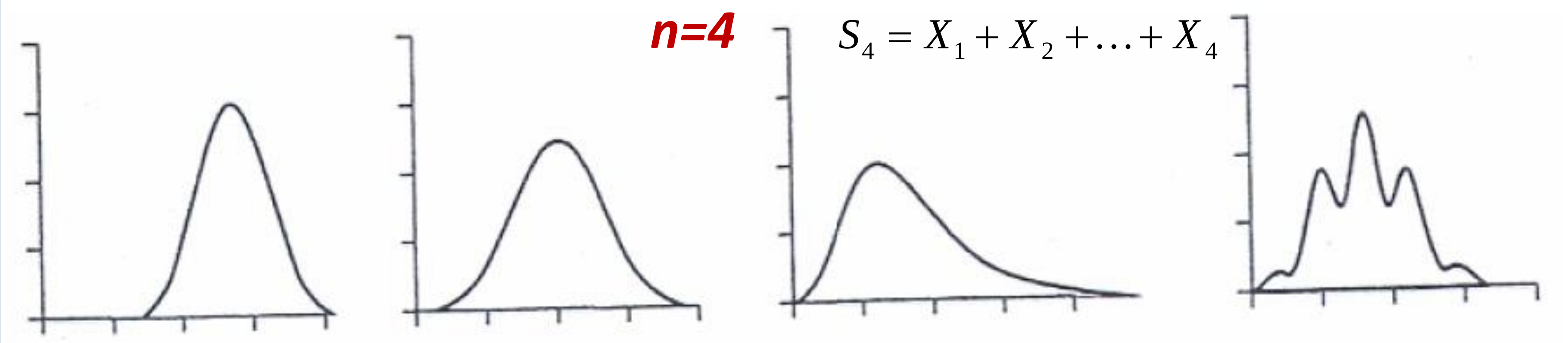
- Αν για παράδειγμα θεωρήσουμε **πληθυσμούς** μεγέθους ***n*** από τις παρακάτω κατανομές



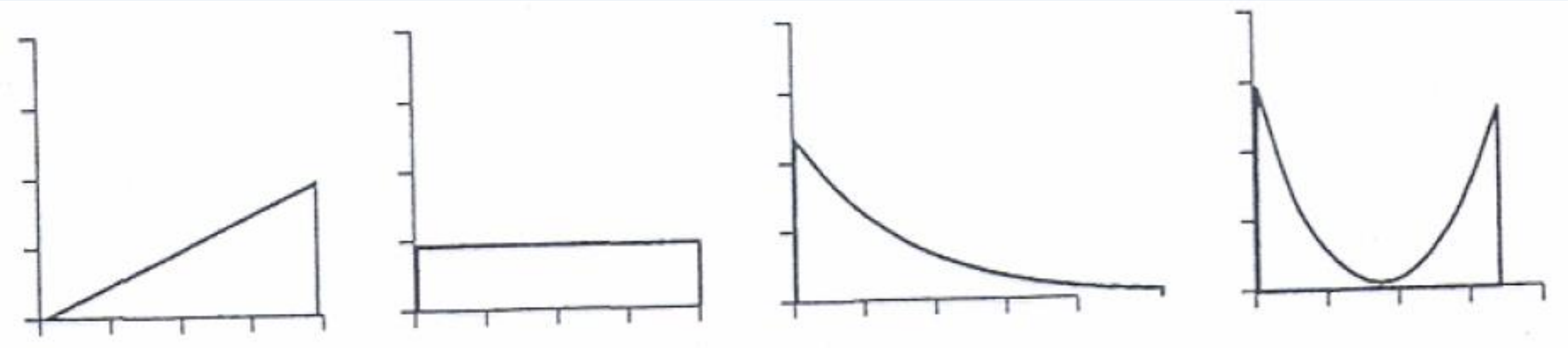
- Τότε οι **κατανομές** των **δειγματικών μέσων** ή του **αθροίσματος** θα είναι **κανονικές**

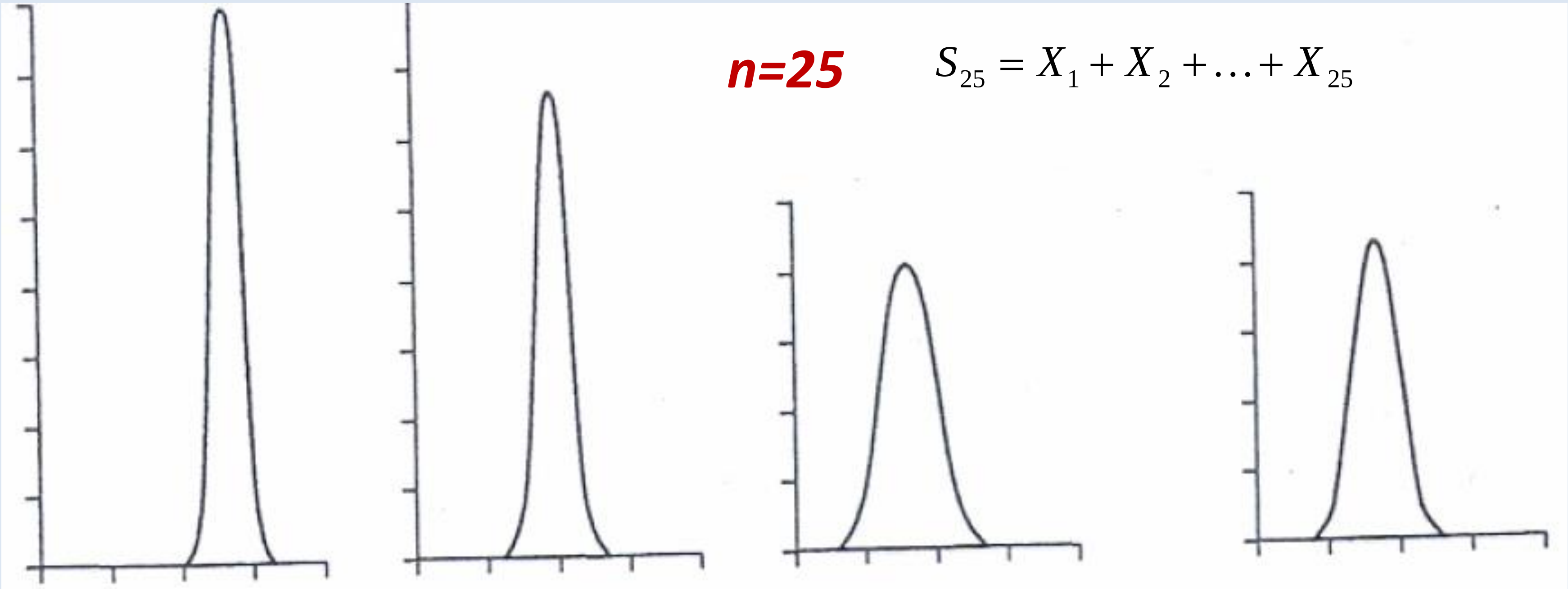
n=4

$$S_4 = X_1 + X_2 + \ldots + X_4$$



- Αν για παράδειγμα θεωρήσουμε **πληθυσμούς** μεγέθους ***n*** από τις παρακάτω κατανομές





Απόδειξη του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος

- Η απόδειξη θα γίνει βασιζόμενοι στη συνάρτηση **ροπογεννήτριας**.

- Η ροπογεννήτρια της τυπικής Κανονικής κατανομής ***N(0,1)*** είναι (έχει δειχθεί):

$$M(t) = E\left(e^{tX}\right) = e^{\frac{t^2}{2}}$$

Απόδειξη του Κ.Ο.Θ.

- Ορίζουμε την μεταβλητή $$Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \mu)}{\sqrt{n}\sigma}$$
- Υπολογίζουμε την **ροπογεννήτρια**:

$$M_{Z_n}(t) = E\left(e^{Z_n t}\right) = E\left(e^{\sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \mu)}{\sqrt{n}\sigma} t}\right) =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} E\left(e^{\left(\frac{X_i - \mu}{\sqrt{n}\sigma}\right)t}\right) = \left(E\left(e^{\left(\frac{X - \mu}{\sqrt{n}\sigma}\right)t}\right)\right)^n$$

Οι μεταβλητές είναι ανεξάρτητες και ισόνομες

όπου *X* η κοινή μεταβλητή των *n* μεταβλητών

Απόδειξη του Κ.Ο.Θ. (συν.)

$$M_{Z_n}(t) = \left(E\left(e^{\left(\frac{X-\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right)t} \right) \right)^n$$

- Αλλά καθώς ισχύει ότι:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

- Παίρνουμε ότι

$$e^{\left(\frac{X-\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right)t} = 1 + \frac{X-\mu}{\sqrt{n}\sigma}t + \frac{(X-\mu)^2}{2!\left(\sqrt{n}\sigma\right)^2}t^2 + \frac{(X-\mu)^3}{3!\left(\sqrt{n}\sigma\right)^3}t^3 + \ldots$$

Απόδειξη του Κ.Ο.Θ. (συν.)

- Έτσι η ροπογεννήτρια της Z_n γίνεται: $M_{Z_n}(t) = \left(E\left(e^{\left(\frac{X-\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right)t} \right) \right)^n$

$$M_{Z_n}(t) = \left(E\left(1 + \frac{X-\mu}{\sqrt{n}\sigma} t + \frac{(X-\mu)^2}{2!\left(\sqrt{n}\sigma\right)^2} t^2 + \frac{(X-\mu)^3}{3!\left(\sqrt{n}\sigma\right)^3} t^3 + \ldots \right) \right)^n =$$

$$= \left(1 + \frac{t}{\sqrt{n}\sigma} \underbrace{E(X-\mu)}_{0} + \frac{t^2}{2!\left(\sqrt{n}\sigma\right)^2} \underbrace{E\left[(X-\mu)^2\right]}_{\sigma^2} + \underbrace{\phi(n)}_{0} \right)^n \approx$$

$$\approx \left(1 + \frac{t^2}{2n} \right)^n \approx e^{\frac{t^2}{2}}$$

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n} \right)^n = e^a$$

Απόδειξη του Κ.Ο.Θ. (συν.)

- Έτσι η ροπογεννήτρια της $Z_n = \dfrac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{(X_i - \mu)}{\sqrt{n}\sigma}$

$$M_{Z_n}(t) \approx e^{\frac{t^2}{2}}$$

- Που είναι (**προσεγγιστικά**) η ροπογεννήτρια της **τυπικής Κανονικής**.

- Έτσι αποδείξαμε ότι η Z_n ακολουθεί την τυπική Κανονική ***N(0,1)***.

Πόρισμα του Κ.Ο.Θ. : Προσέγγιση Διωνυμικής

- Έστω *n* ανεξάρτητες και ισόνομες ***Bernoulli*** τυχαίες μεταβλητές με **μέσο *μ*=*ρ*** και **διακύμανση *σ*²= *ρ(1-ρ)*.**
- Τότε το άθροισμα S_n είναι μια Διωνυμική μεταβλητή

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Bin(n, \rho)$$

- Από το **Κ.Ο.Θ.** έχουμε ότι το άθροισμα προσεγγιστικά ακολουθεί την **Κανονική κατανομή *N(nμ, nσ²)***, δηλ.

$$S_n \sim Bin(n, \rho) \approx \boldsymbol{N}\left(\boldsymbol{n\rho}, \boldsymbol{n\rho(1-\rho)}\right)$$

Πόρισμα του Κ.Ο.Θ. : Προσέγγιση Διωνυμικής

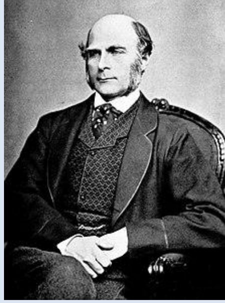
- Εφαρμογή του πορίσματος για **ρ = 1 / 2** :

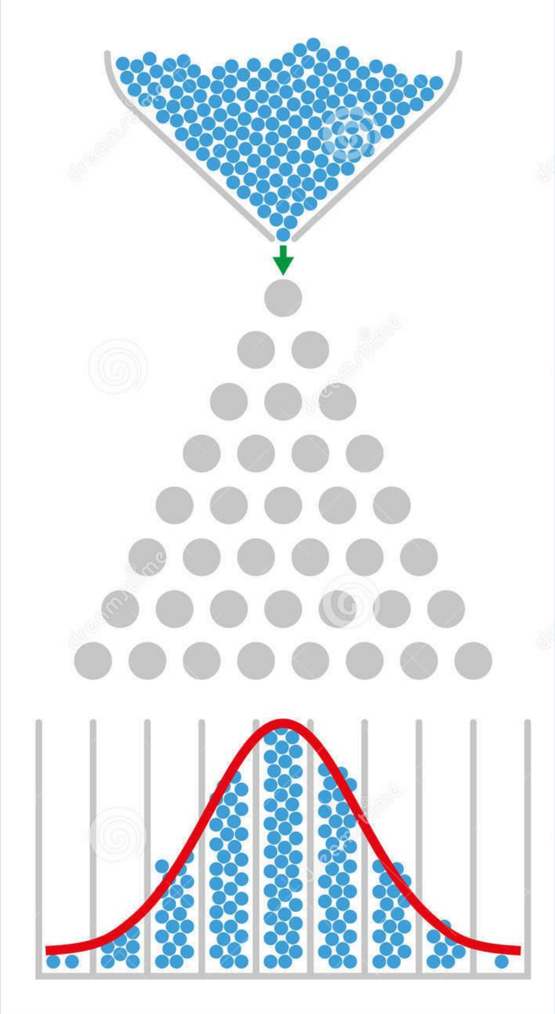
$$S_n \sim Bin\left(n, \frac{1}{2}\right) \approx N(n\rho, n\rho(1-\rho)) = N\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{4}\right)$$

- Έτσι η **διωνυμική πιθανότητα** προσεγγίζεται ικανοποιητικά από την **κανονική**:

$$p(x) = \binom{n}{x} 2^{-n} \approx \sqrt{\frac{2}{\pi\, n}}\, e^{-\frac{(2x-n)^2}{2n}}$$

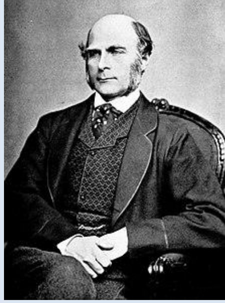
“Μηχανή” ή πίνακας του Galton (1822-1911)



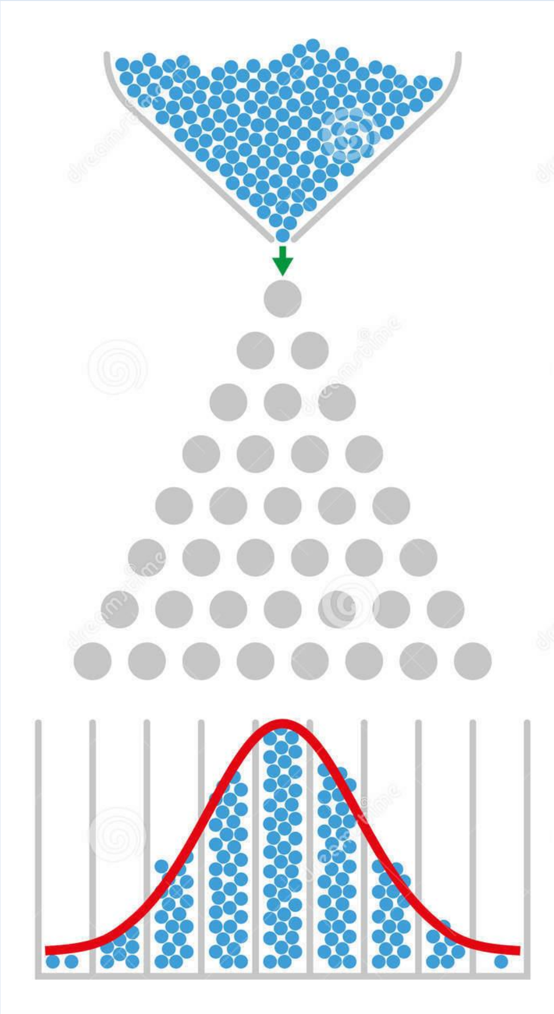


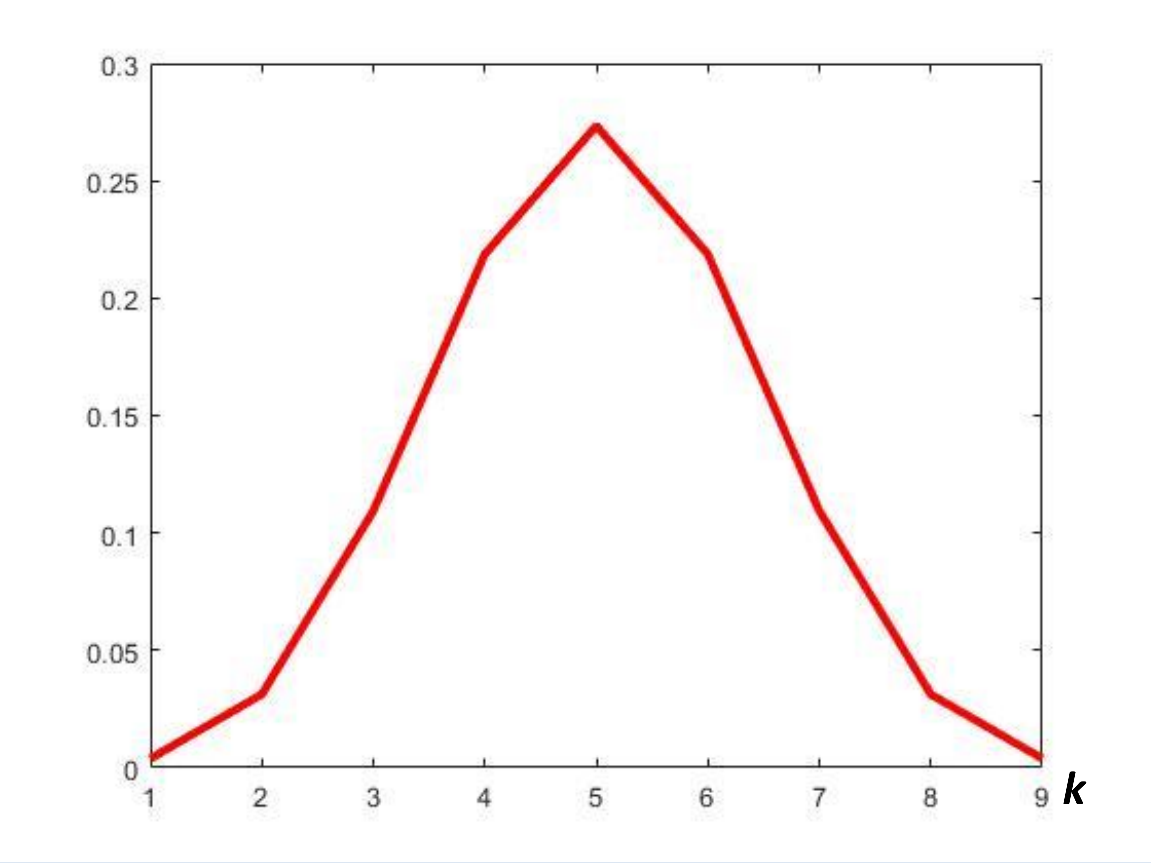
(1873)

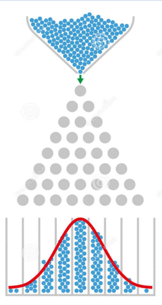
“Μηχανή” ή πίνακας του Galton (1822-1911)



$$p(k) = \binom{n}{k} 2^{-n} \approx \sqrt{\frac{2}{\pi\, n}}\, e^{-\frac{(2k-n)^2}{2n}}$$



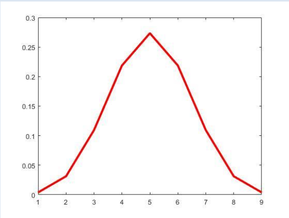




Παράδειγμα για n=10

$$p(k) = \binom{n}{k} 2^{-n} \approx \sqrt{\frac{2}{\pi\, n}}\, e^{-\frac{(2k-n)^2}{2n}}$$

	$\binom{n}{k} 2^{-n}$ Διωνυμική	$\sqrt{\frac{2}{\pi\, n}}\, e^{-\frac{(2k-n)^2}{2n}}$ Προσέγγιση Κανονικής
k=2	0.0439	0.0417
k=3	0.1172	0.1134
k=4	0.2051	0.2066
k=5	0.2461	0.2523
k=6	0.2051	0.2066
k=7	0.1172	0.1134
k=8	0.0439	0.0417



Παραδείγματα

- Το πάχος ενός βιβλίου είναι μια τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή 3cm και τυπική απόκλιση 1cm. Να υπολογιστεί η πιθανότητα σε ένα ράφι μήκους 1.30 cm να χωρέσουν 40 βιβλία.

- Οι παραγγελίες σ' ένα εστιατόριο είναι μια τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή *8* ευρώ και διακύμανση *4*.

  (α) Ποια είναι η πιθανότητα οι 100 πρώτοι πελάτες να ξοδέψουν ποσό μεγαλύτερο του 840 ευρώ.

  (β) Ποια η πιθανότητα το συνολικό ποσό των 100 πρώτων πελατών να είναι μεταξύ 780 και 820 ευρώ.

  (γ) Μετά από πόσες παραγγελίες θα είμαστε 90% βέβαιοι ότι το συνολικό ποσό των παραγγελιών θα ξεπεράσει τα 1000 ευρώ.

- Ο χρόνος μεταξύ διαδοχικών δρομέων ενός μαραθωνίου είναι εκθετική μεταβλητή με παράμετρο $\lambda=1/m$. Ποια η πιθανότητα ο 1000^ος^ δρομέας να εμφανιστεί την χρονική στιγμή $(1000 \pm 50)m$ sec.

- Ο κυκλικός τροχός της ρουλέτας ο οποίος είναι χωρισμένος σε 37 (ίσα) τόξα που φέρουν αριθμούς από [0, 36], μπαίνει σε περιστροφική κίνηση και ένα σφαιρίδιο ρίχνεται σε αυτόν. Αν ο αριθμός του τόξου είναι *περιττός* τότε ο παίκτης κερδίζει 100 ευρώ, ενώ σε αντίθετη περίπτωση (ζυγός ή μηδέν) χάνει 100 ευρώ. Να υπολογιστούν:

  (α) η πιθανότητα σε 100 παιχνίδια ο παίκτης να μην χάσει χρήματα

  (β) ο αριθμός των παιχνιδιών που μπορεί να παίζει ο παίκτης, ώστε με πιθανότητα τουλάχιστον 40% να χάσει το πολύ 10 ευρώ.