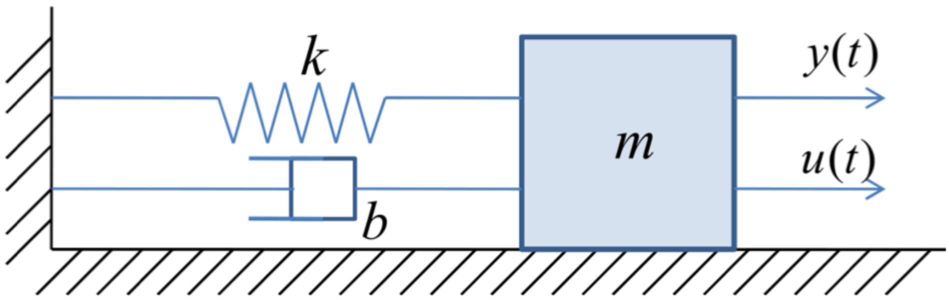
Προσομοίωση και Μοντελοποίηση Δυναμικών Συστημάτων

Εργασία 1

Γραμμική Παραμετροποίηση - Εκτίμηση Άγνωστων Παραμέτρων - Μέθοδος Ελαχίστων Τετραγώνων

Δήμητρα Μπαντή 10363

Θέμα 1



Σχήμα 1: Σύστημα μάζας-ελατηρίου-αποσβεστήρα.

1. Βρείτε το μαθηματικό μοντέλο που περιγράφει τη δυναμική συμπεριφορά του συστήματος και παραμετροποιήστε το γραμμικά στη μορφή:

   y = (θ∗)T ζ,
   όπου το σήμα ζ παράγεται από μετρήσεις της εξωτερικής δύναμης u και της μετατόπισης y.

Θεωρούμε σταθερές του συστήματος την μάζα m την σταθερά του ελατηρίου k και την σταθερά απόσβεσης b.

Το ελατήριο θεωρούμε πως έχει φυσικό μήκος lo=0 και σύμφωνα με τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα έχουμε :

$$\Sigma F = m\ddot{y} \Leftrightarrow u - ky - b\dot{y} = m\ddot{y} \Leftrightarrow m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = u$$

$$\Leftrightarrow \ddot{y} + \frac{b}{m}\dot{y} + \frac{k}{m}y = \frac{1}{m}u \quad (1)$$

Δημιουργούμε το διάνυσμα θ* με όλες τις παραμέτρους και το διάνυσμα Δ με όλα τα σήματα εισοδου-εξοδου.

$$\theta^* = \begin{bmatrix}\frac{b}{m} & \frac{k}{m} & \frac{1}{m}\end{bmatrix}^T = [\theta_1^* \;\; \theta_2^*]^T$$

$$\Delta = [-\dot{y} \quad -y \quad u\,]^T$$

Το σύστημα περιγράφεται από την σχέση :

$$\ddot{y} = \theta^* \Delta \;(2)$$

Βάζω στην (2) ευσταθές φίλτρο $\frac{1}{\Lambda(s)}$ όπου

$\Lambda(s) = s^2 + \lambda_1 s + \lambda_2 = s^2 + 4s + 2$

$y = (\theta^*)^T \zeta$

$$(\theta^*)^T = [\theta_1^{*T} \;\, -\lambda^T \;\theta_2^{*T}]^T = \begin{bmatrix}\frac{b}{m} - 4 & \frac{k}{m} - 2 & \frac{1}{m}\end{bmatrix}^T$$

Το σήμα ζ που παράγεται από μετρήσεις της εξωτερικής δύναμης u και της μετατόπισης y:

$$\zeta = \left[-\frac{\Delta_1^T(s)}{\Lambda(s)}y \ \frac{\Delta_0^T(s)}{\Lambda(s)}u\right]^T = \left[-\frac{[s \ \ 1]^T}{\Lambda(s)}y \ \frac{1}{\Lambda(s)}u\right]^T$$
$$= \left[-\frac{s}{\Lambda(s)}y \ \ -\frac{1}{\Lambda(s)}y \ \frac{1}{\Lambda(s)}u \ \right]^T$$

2.Σχεδιάστε την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων για την εκτίμηση των άγνωστων παραμέτρων m, b και k, όταν μετρούμε μόνο την μετατόπιση και την εξωτερική δύναμη που εφαρμόζεται στη μάζα.

Αφού έχουμε παραμετροποιήσει το σύστημα στην μορφή

$y = (\theta^*)^T\zeta$

μπορούμε να εφαρμόσουμε μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων για να βρούμε τις παραμέτρους θ* .

Έστω ότι παίρνουμε μετρήσεις n του Υ.

$$\Upsilon = [\Upsilon(1) \ \ \Upsilon(2) \ldots \Upsilon(n)]$$

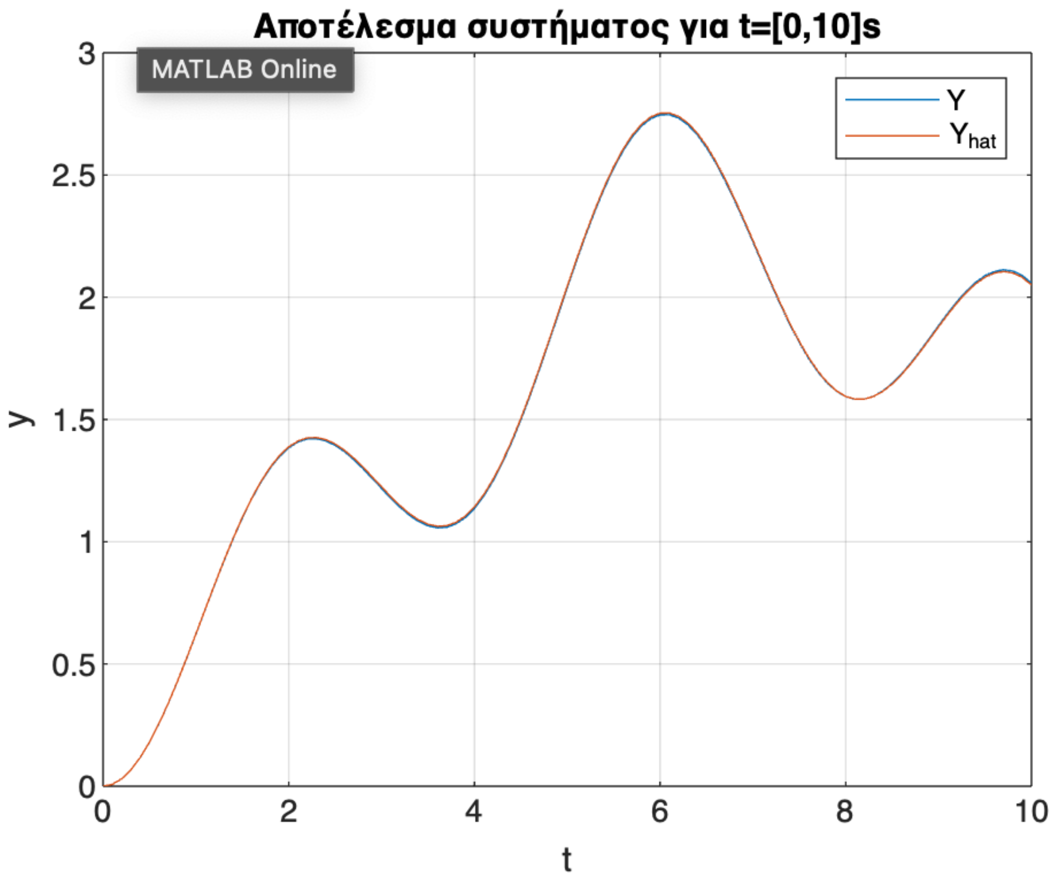
$$\Phi = \begin{bmatrix} \varphi_1(1) & \varphi_2(1) & \varphi_3(1) \\ \varphi_1(2) & \varphi_2(2) & \varphi_3(2) \\ & \cdots & \\ & \cdots & \\ \varphi_1(n) & \varphi_2(n) & \varphi_3(n) \end{bmatrix}$$

Άρα, μπορούμε να υπολογίσουμε το θ0 που ελαχιστοποιεί το σφάλμα πρόβλεψης από τον τύπο

$$\theta_o{}^T \Phi^T \Phi = Y^T \Phi$$

Προσομοιώστε το σύστημα στο Matlab με την βοήθεια των συναρτήσεων ode επιλέγοντας m = 8.5 [kg], b = 0.65 [kg/s], k = 2 [kg/s2], και u(t) = 10 cos(0.5πt) + 3 [N], και θεωρώντας μηδενικές αρχικές συνθήκες για τις καταστάσεις του συστήματος. Χρησιμοποιήστε δείγματα ανά 0.1 [s] από το διάστημα εκτέλεσης [t0 tf] = [0 10] [s], και εφαρμόστε την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων βάσει των δεδομένων που καταγράψατε. Δημιουργήστε γραφικές παραστάσεις των y(t), yˆ(t) και της διαφοράς τους y(t) − yˆ(t). Σχολιάστε τα αποτελέσματα.

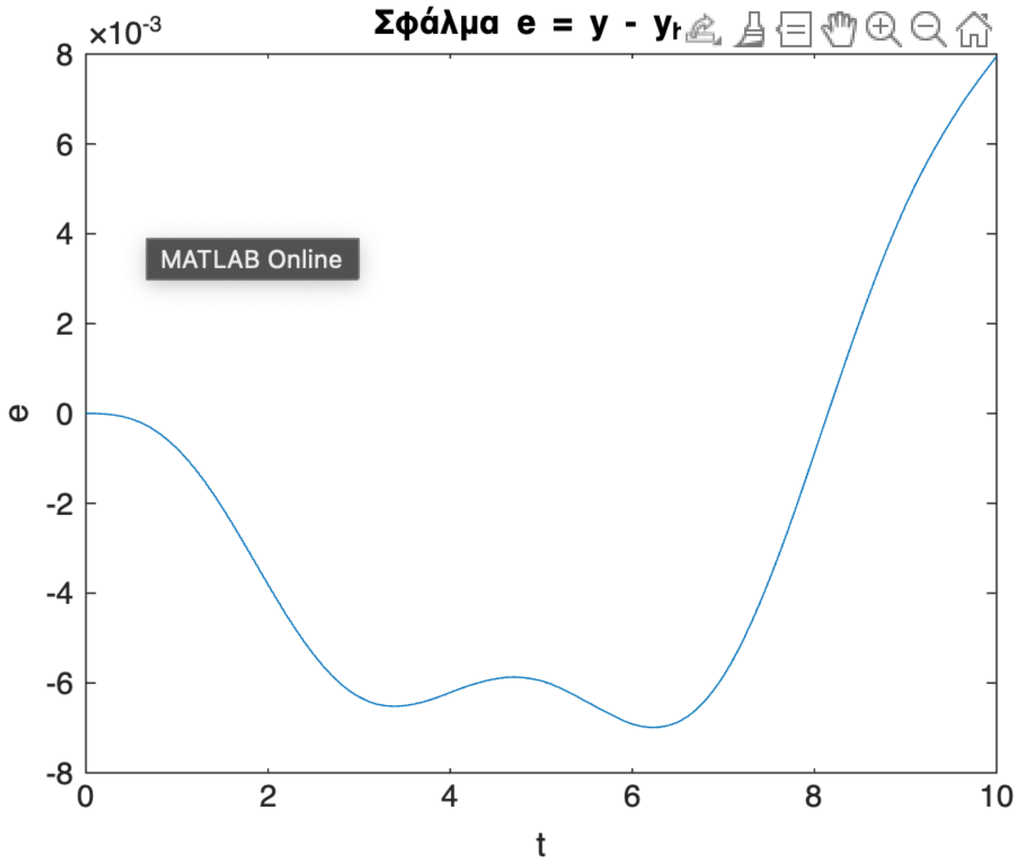
Με αντικατάσταση των σταθερών και χρήση της συνάρτησης ode45, λύνουμε την διαφορική εξίσωση που περιγράφει το σύστημα και παίρνουμε τελικά την έξοδο (μετατόπιση) του συστήματος.



Εκτιμούμε τις παραμέτρους m,b,k με την βοήθεια της μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων. Αρχικά υπολογίζουμε τους πίνακες Υ και Φ για το επιθυμητό χρονικό διάστημα t = [0,10]s και στην συνέχεια υπολογίζουμε τις παραμέτρους εφαρμόζοντας τον τύπο

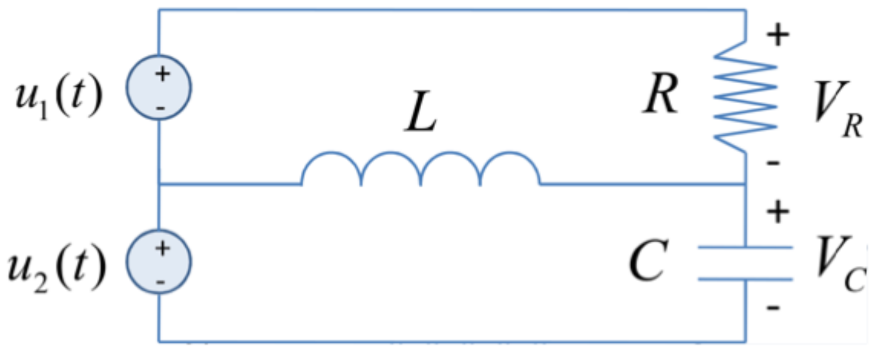
$$\theta_o{}^T \Phi^T \Phi = \Upsilon^T \Phi$$

Παρατηρώ ότι η μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων μας οδήγησε σε αρκετά ακριβή υπολογισμό των παραμέτρων του συστήματος και συνεπώς σε ακριβή υπολογισμό της εξόδου του συστήματος. Αυτό φαίνεται και από την γραφική απεικόνιση του Y bar, το οποίο φαίνεται σχεδόν να συμπίπτει με το Y.



Y η έξοδος που θα μας δώσει το σύστημα αν το προσομοιάσουμε για τον ίδιο χρόνο, αλλά με τις παραμέτρους που υπολογίσαμε με την βοήθεια της μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων.

Θέμα 2



Σχήμα 2: Κύκλωμα RLC.

1. Εκτιμήστε με την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων τον πίνακα μεταφοράς του κυκλώματος. Οι τάσεις VR, VC παράγονται από το αρχείο v.p καλώντας την συνάρτηση στο Matlab ως εξής:

[V_R,VC]=v(t), t=ti ήt=[t1 t2 ...tN].

Δημιουργήστε γραφικές παρασ τάσεις των VC (t), V^C (t) και της διαφοράς τους VC (t) − V^C (t). Αντιστοίχως για τα VR(t), V^R(t).

Εφαρμόζουμε κυκλωματική ανάλυση για να βρούμε το μαθηματικό μοντέλο που περιγράφει το σύστημα.

Για το πηνίο:

$$V = L * \frac{di}{dt}$$

Για τον πυκνωτή:

$$I = C * \frac{dV}{dt}$$

Επομένως θεωρώντας I_1 το ρεύμα που διαρρέει τον πάνω βρόχο και I_2 το ρεύμα που διαρρέει τον κάτω βρόχο έχουμε:

- $I_1 = \frac{V_R}{R}$
- $I_2 = C\, V_C$

Εφαρμόζω νόμο τάσεων Kirchoff

-Για τον πάνω βρόχο:

$$u_1(t) = V_R + L * \dot{I_1} - L * \dot{I_2} = V_R + L * \frac{\dot{V_R}}{R} - L*C*\ddot{V_C} \Leftrightarrow$$

$$u_1(t) = V_R + L * (\frac{\dot{V_R}}{R} - C*\ddot{V_C}) \quad (1)$$

-Για τον κάτω βρόχο:

$$u_2(t) = V_c + L * \dot{I_2} - L * \dot{I_1} = V_c - L * \frac{\dot{V_R}}{R} + L*C*\ddot{V_C} \Leftrightarrow$$

$$u_2(t) = V_C - L * (\frac{\dot{V_R}}{R} - C*\ddot{V_C}) \quad (2)$$

-Για τον υπερβροχο:

$$u_1(t) + u_2(t) = V_R + V_C \quad (3)$$

Λύνοντας την (3) ως προς V_R και αντικαθιστώντας στην (1) έχουμε:

$$\ddot{V}_C + \frac{1}{RC}\dot{V}_C + \frac{1}{LC}V_C = \frac{1}{RC}\dot{u_1}(t) + \frac{1}{RC}\dot{u_2}(t) + \frac{1}{LC}u_2(t) \quad (4)$$

Λύνοντας την (3) ως προς V_C και αντικαθιστώντας στην (1) έχουμε :

$$\ddot{V}_R + \frac{1}{RC}\dot{V}_R + \frac{1}{LC}V_R = \ddot{u_1}(t) + \frac{1}{LC}u_1(t) + \frac{1}{LC}\ddot{u_2}(t) \quad (5)$$

Για την (4):

$$\mathcal{L}\{\ddot{V}_C + \frac{1}{RC}\dot{V}_C + \frac{1}{LC}V_C\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{RC}\dot{u_1}(t) + \frac{1}{RC}\dot{u_2}(t) + \frac{1}{LC}u_2(t)\right\} \Leftrightarrow$$

$$s^2V_C(s) + \frac{s}{RC}V_C(s) + \frac{1}{LC}V_C(s) = \frac{s}{RC}u_1(s) + \frac{1}{LC}u_2(s) + \frac{1}{LC}u_2(s) \Leftrightarrow$$

$$V_C(s)(s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}) = \frac{s}{RC}u_1(s) + u_2(s)\left(\frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}\right) \Leftrightarrow$$

$$\boldsymbol{V_C(s) = u_1(s)\ \frac{\frac{S}{RC}}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}} + u_2(s)\ \frac{\frac{S}{RC} + \frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}}} \quad \textbf{(6)}$$

Για την (5) :

$$\mathcal{L}\{\ddot{V}_R + \frac{1}{RC}\dot{V}_R + \frac{1}{LC}V_R\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{RC}u_1(t) + \frac{1}{RC}\ddot{u_1}(t) + \frac{1}{LC}\ddot{u_2}(t)\right\}$$

$$\Leftrightarrow s^2V_R(s) + \frac{s}{RC}V_R(s) + \frac{1}{LC}V_R(s) = s^2u_1(s) + \frac{1}{LC}u_1(s) + s^2u_2(s) \Leftrightarrow$$

$$\boldsymbol{V_R(s) = u_1(s)\ \frac{s^2 + \frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}} + u_2(s)\ \frac{s^2}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{1}{LC}}} \quad \textbf{(7)}$$

Σε μορφή πίνακα :

$$\begin{bmatrix} V_C(s) \\ V_R(s) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\frac{s}{RC}}{s^2+\frac{s}{RC}+\frac{1}{LC}} + & \frac{\frac{s}{RC}+\frac{1}{LC}}{s^2+\frac{s}{RC}+\frac{1}{LC}} \\ \frac{s^2+\frac{1}{LC}}{s^2+\frac{s}{RC}+\frac{1}{LC}} + & \frac{s^2}{s^2+\frac{s}{RC}+\frac{1}{LC}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} \quad (8)$$

Για να υπολογίσουμε τον πίνακα μεταφοράς πρέπει να υπολογίσουμε τις παραμέτρους R , C, L . Θα κάνουμε χρήση της μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων στην

$$\ddot{V}_C + \frac{1}{RC}\dot{V}_C + \frac{1}{LC}V_C = \frac{1}{RC}\dot{u_1}(t) + \frac{1}{RC}\dot{u_2}(t) + \frac{1}{LC}u_2(t) \quad (4)$$

$$\theta^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{RC} & \frac{1}{LC} & \frac{1}{RC} & 0 & \frac{1}{RC} & \frac{1}{LC} \end{bmatrix}^T$$

$$\Delta = [-\dot{V}_C \quad -V_C \quad \dot{u_1}(t) \quad u_1(t) \quad \dot{u_2}(t) \quad u_2(t)\ ]^T$$

$$\ddot{V}_C = {\theta^*}^T \Delta \quad (9)$$

Φιλτράρω με ευσταθές φίλτρο

$\Lambda(s) = (s+\rho_1)(s+\rho_2) = s^2 + (\rho_1+\rho_2)s + \rho_1\rho_2 = s^2 + \lambda_1 s + \lambda_2$

Και επιλέγω πόλους $\rho_1 = 100$ και $\rho_2 = 200$

$V_C = \theta_\lambda{}^T \zeta$

$$\boldsymbol{\theta_\lambda}^{\boldsymbol{T}} = [{\theta_1}^{*T} \ -\lambda^T \ {\theta_2}^{*T}]^T =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{RC} - \lambda_1 & \frac{1}{LC} - \lambda_2 & \frac{1}{RC} & 0 & \frac{1}{RC} & \frac{1}{LC} \end{bmatrix}^T$$

$$\zeta = \left[-\frac{\Delta_1^T(s)}{\Lambda(s)} y \; \frac{\Delta_1^T(s)}{\Lambda(s)} \; u_1 \;\; \frac{\Delta_1^T(s)}{\Lambda(s)} \; u_2 \right]^T$$

$$= \left[-\frac{[s \;\; 1]^T}{\Lambda(s)} y \; \frac{[s \;\; 1]^T}{\Lambda(s)} u_1 \; \frac{[s \;\; 1]^T}{\Lambda(s)} \; u_2 \right]^T =$$

$$\left[-\frac{s}{\Lambda(s)} y \;\; -\frac{1}{\Lambda(s)} y \;\; \frac{s}{\Lambda(s)} u_1 \;\; \frac{1}{\Lambda(s)} u_1 \;\; \frac{s}{\Lambda(s)} u_2 \;\; \frac{1}{\Lambda(s)} u_2 \; \right]^T$$

Τρέχουμε τον αλγόριθμο ελαχίστων τετραγώνων για t = [0, 4] με περίοδο δειγματοληψίας T = 10^{-4}.

Υπολογίζουμε τον πίνακα Φ και το θ_o από τον τύπο $\theta_o{}^T \Phi^T \Phi = V_C{}^T \Phi$

παρατηρούμε πως η μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων οδηγεί σε μια ικανοποιητική προσέγγιση του $\overline{V_C}$ και αυτό το βλέπουμε από την γραφική απεικόνιση $\overline{V_C}$ *και* V_C.

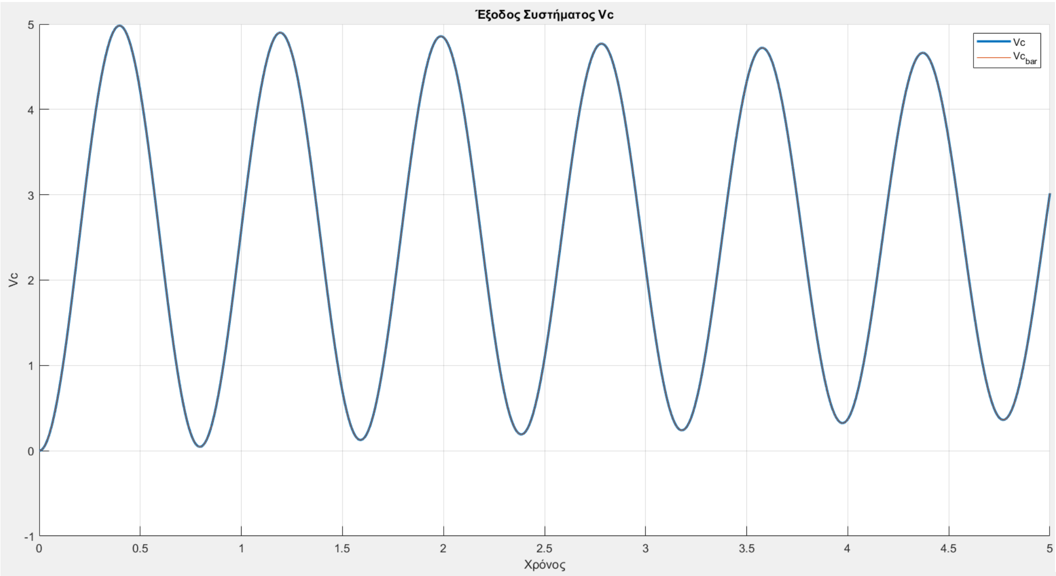
Επίσης βλέπουμε πως το σφάλμα e = $\overline{V_C} - V_C$ είναι αρκετά μικρό αρχικά και μετά από κάποιο χρονικό διάστημα σταθερά μηδέν.

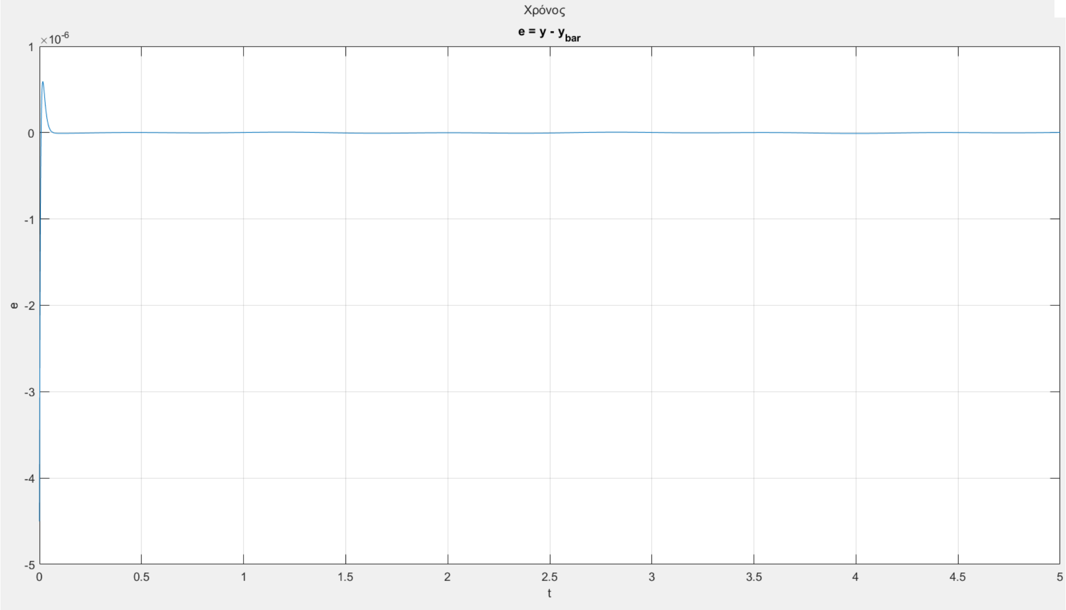
Τέλος με επίλυση του συστήματος εξισώσεων παίρνουμε :

$$\boldsymbol{\theta_o} = \left[\frac{1}{RC} - \lambda_1 \quad \frac{1}{LC} - \lambda_2 \quad \frac{1}{RC} \quad 0 \;\; \frac{1}{RC} \quad \frac{1}{LC} \quad \right]^T$$

$\frac{1}{RC}$=*0.069430*

$\frac{1}{LC}=62.4992831$

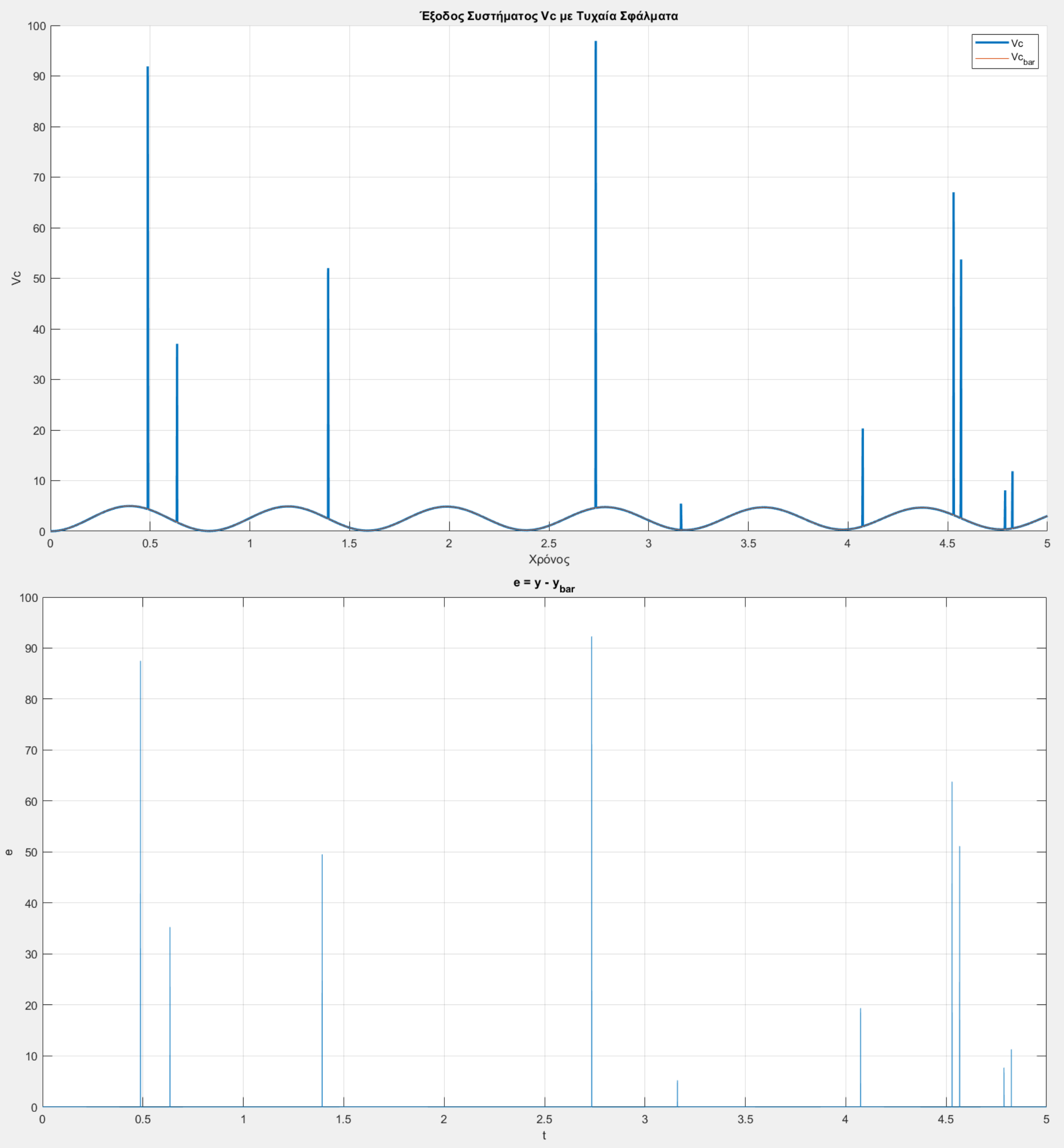




2.Θεωρήστε ότι οι μετρήσεις $V_R(ti)$, $V_C(ti)$ λαμβάνονται εσφαλμένα (π.χ. στα παραγόμενα σήματα $V_R(t)$, $V_C(t)$ προσθέστε σε ορισμένες τυχαίες χρονικές στιγμές ti τυχαίες τιμές $\eta_i(t_i)$ πολύ μεγαλύτερης τάξης μεγέθους από τις καταγεγραμμένες). Παρατηρήστε τι αντίκτυπο έχει αυτό το σφάλμα μέτρησης στις εκτιμήσεις των παραμέτρων μέσω της μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων. Σχολιάστε τα αποτελέσματα.

Για να προσθέσουμε τυχαια σφάλματα στη V_c παράγουμε 10 τυχαίες μετρήσεις της στις οποιες προσθέτουμε ένα σφάλμα που είναι 20* V_c.

Κατόπιν υπολογίζουμε τον πίνακα Φ ,τις παραμέτρους $\boldsymbol{\theta_o}$ και την νεα πρόβλεψη V_c.



Βλέπουμε ότι το τυχαίο σφάλμα δεν 'περνάει' την εκτίμηση V_c και η μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων εκτίμησε το μοντέλο «κόβοντας» τα σφάλματα του αρχικού μοντέλου.