Προσομοίωση και Μοντελοποίηση Δυναμικών Συστημάτων

Εργασία 2

Εκτίμηση Άγνωστων Παραμέτρων - Μέθοδο Πραγματικού Χρόνου

Δήμητρα Μπαντή 10363

Θέμα 1

Θεωρούμε το σύστημα $\dot{x}$=−ax+bu, x(0)=0 (1) .Θεωρώντας ότι η είσοδος του συστήματος είναι:

1. u(t) = 5
2. u(t) = 5sin(2t), για t ≥ 0

Δημιουργήστε τις γραφικές παραστάσεις των x(t), $\hat{x}$(t) και της διαφοράς x(t)− $\hat{x}$(t), καθώς και των εκτιμήσεων $\hat{a}$(t), $\hat{b}$(t) των a και b, αντίστοιχα. Τι διαφορές παρατηρείτε μεταξύ των δύο περιπτώσεων;

(Θεωρήστε για τα πειράματά σας ότι a = 4 και b = 1.5)

Πρώτα για την θεωρητική ανάλυση θέλουμε εκτίμηση παραμέτρων με την μέθοδο κλίσης οπότε φέρνουμε το σύστημα σε γραμμικά παραμετρική μορφή:

(1)⇒ $\dot{x}=a_m x-a_m x-ax+bu$ ⇒

$\boldsymbol{\dot{x}+a_m x=(a_m-a)x+bu}$

Έχοντας μηδενικές αρχικές συνθήκες εφαρμόζω μετασχηματισμό Laplace στη παραπάνω:

$$sX(s) + a_m X(s) = (a_m - a)X(s) + bU(s)$$

$$\Leftrightarrow X(s) = \frac{1}{s+a_m}\,[(a_m - a)X(s) + bU(s)] \;\Leftrightarrow\; X = \theta^{*T}\varphi$$

- $\theta^{*T} = [a_m - a \quad b]^T = [\theta_1{}^{*T} \quad \theta_2{}^{*T}\,]^T$
- $\varphi = [\,\frac{1}{s+a_m}X \quad \frac{1}{s+a_m}U]^T = [\varphi_1 \quad \varphi_2\,]^T$

Σχεδιάζουμε το σύστημα εκτίμησης των αγνώστων παραμέτρων σύμφωνα με την μέθοδο κλίσης. Δηλαδή αρχικά βρίσκουμε το σύστημα αναγνώρισης το οποίο είναι το $\boldsymbol{\hat{x}} = \boldsymbol{\hat{\theta}}^{*\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\varphi}$ και υπολογίζουμε το σφάλμα

$$e = x - \hat{x} = \theta^{*T}\varphi - \hat{\theta}^{*T}\varphi = -\tilde{\theta}\,\varphi$$

Όπου $\tilde{\theta} = \theta^* - \hat{\theta}$

Θέλουμε να βρούμε την αναδρομική εκτίμηση $\hat{\theta}$ του θ^* στην ελαχιστοποίηση ως προς $\hat{\theta}$ κατάλληλα ορισμένης συνάρτησης κόστους του e. Επιλέγουμε μια τυπικη συνάρτηση :

$$K(\hat{\theta}) = \frac{e^2}{2} = \left(\frac{x - \hat{\theta}^{*T}\varphi}{2}\right)^2 \quad \text{(2)}$$

Θέλουμε $\nabla K(\hat{\theta})\big|_{\hat{\theta} = \theta} = 0$

$$\nabla K(\hat{\theta}) = -(x - x - \hat{\theta}^{*T}\varphi)\varphi = -e\varphi$$

Η ζητούμενη ελαχιστοποίηση σύμφωνα με την μέθοδο κλίσης:

$$\dot{\tilde{\theta}} = -\gamma\,\nabla K(\hat{\theta}) \Rightarrow$$

$\dot{\tilde{\theta}} = \gamma e \varphi^T$ με $[\dot{\tilde{\theta}}_1 \quad \dot{\tilde{\theta}}_2\,]^T$ = γe$[\varphi_1 \quad \varphi_2\,]^T$ (3)

$$\xRightarrow{I.L.T} \begin{cases} \varphi_1 = \frac{1}{s+a_m} x \Rightarrow \dot{\varphi_1} = -a_m\varphi_1 + x\,, \varphi_1(0) = 0 \\ \varphi_2 = \frac{1}{s+a_m} u = -a_m\varphi_2 + u\,, \varphi_2(0) = 0 \end{cases}$$

Οπότε καταλήγουμε στις παρακάτω εξισώσεις κατάστασης :

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \widehat{\theta_1} \\ x_3 = \widehat{\theta_2} \\ x_4 = \varphi_1 \\ x_5 = \varphi_2 \\ x_6 = \hat{x} \end{cases} \overset{\frac{d}{dt}}{\Rightarrow} \begin{cases} \dot{x_1} = \dot{x} = ax_1 + bu \\ \dot{x_2} = \dot{\widehat{\theta_1}} = \gamma e\varphi_1 = \gamma e x_4 \\ \dot{x_3} = \dot{\widehat{\theta_2}} = \gamma e\varphi_2 = \gamma e x_5 \\ \dot{x_4} = \dot{\varphi_1} = -a_m\,\varphi_1 + x = -a_m\,x_4 + x_1 \\ \dot{x_5} = \dot{\varphi_2} = -a_m\,\varphi_2 + u = -a_m\,x_5 + u \\ \dot{x_5} = \dot{\hat{x}} = (\widehat{\theta_1} - a_m)\hat{x} + \widehat{\theta_2}u = (x_2 - a_m)x_6 + ux_3 \end{cases}$$

Επίσης για το σφάλμα έχουμε:

e = x -$\hat{\theta}\varphi = x_1 - (\widehat{\theta_1}\,\varphi_1 + \widehat{\theta_2}\varphi_2) = x_1 - (x_2x_4 + x_3x_5)$

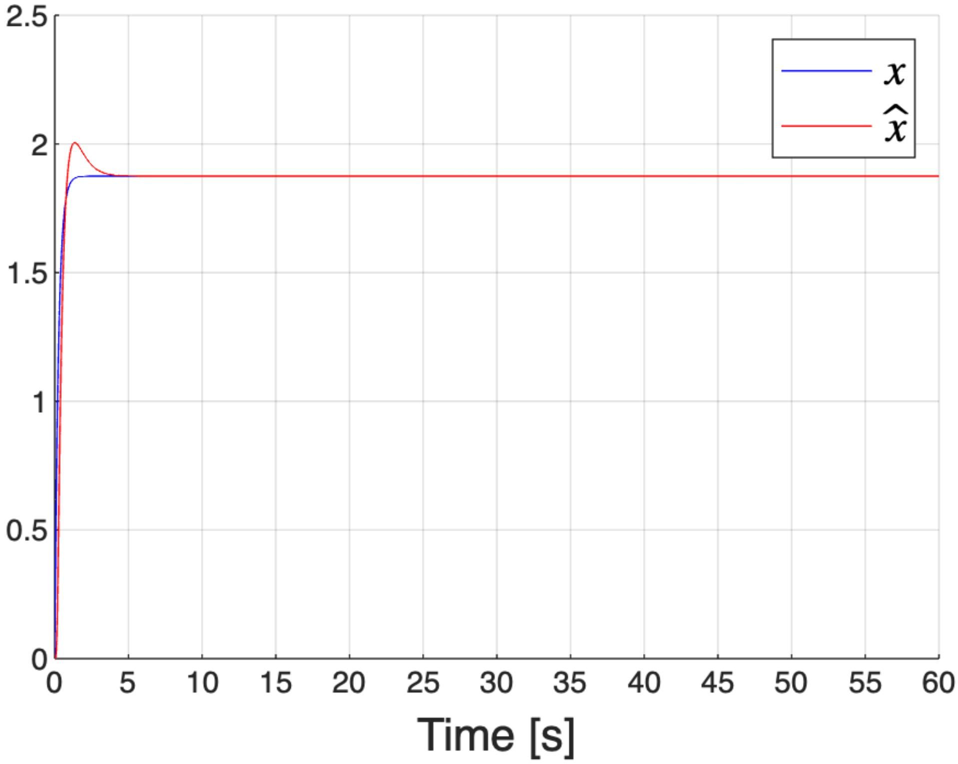
Οπότε τελικά:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = ax_1 + bu \\ \dot{x_2} = \gamma e x_4(x_1 - (x_2x_4 + x_3x_5)) \\ \dot{x_3} = \gamma e x_5(x_1 - (x_2x_4 + x_3x_5)) \\ \dot{x_4} = -a_m\,x_4 + x_1 \\ \dot{x_5} = -a_m\,x_5 + u \\ \dot{x_5} = (x_2 - a_m)x_6 + ux_3 \end{cases}$$

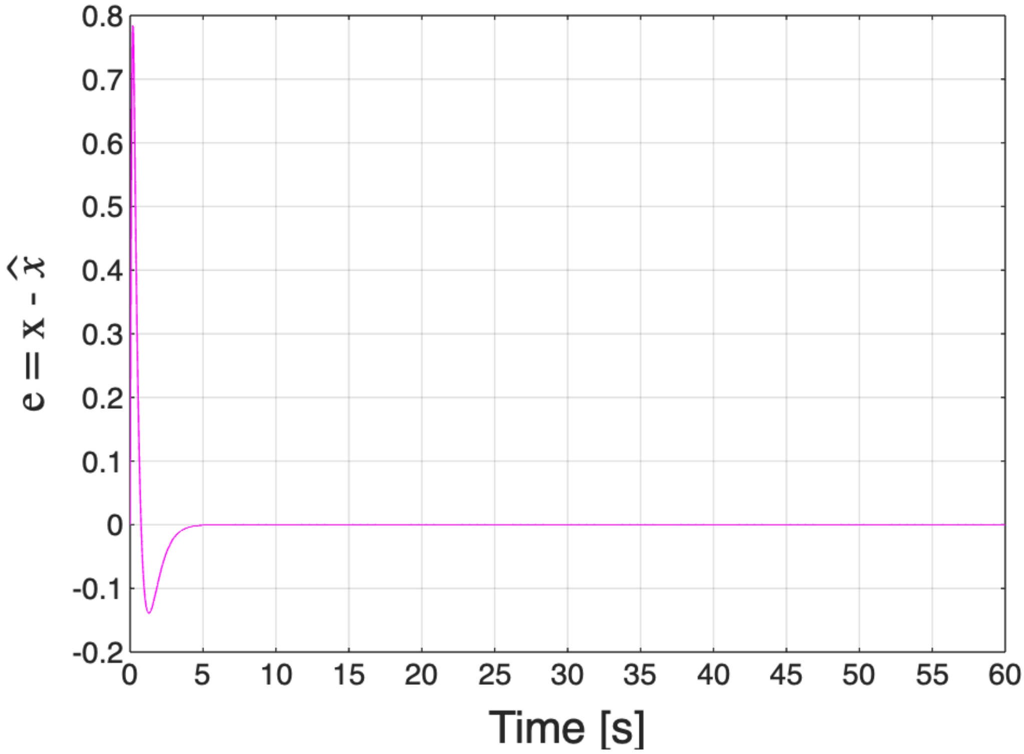
1.Για να βρούμε τις εκτιμήσεις των αγνώστων παραμέτρων $\hat{a}$(t) και $\hat{b}$(t) με τη βοήθεια της μεθόδου κλίσης λύνουμε το σύστημα διαφορικών εξισώσεων με δοθείσα είσοδο συστήματος u = 5, a = 4 και b = 1.5 .Επιλέγουμε ως κατάλληλες παραμέτρους γ = 5 και a_m = 5. Ακολουθούν οι γραφικές παραστάσεις μετά την προσομοίωση σε

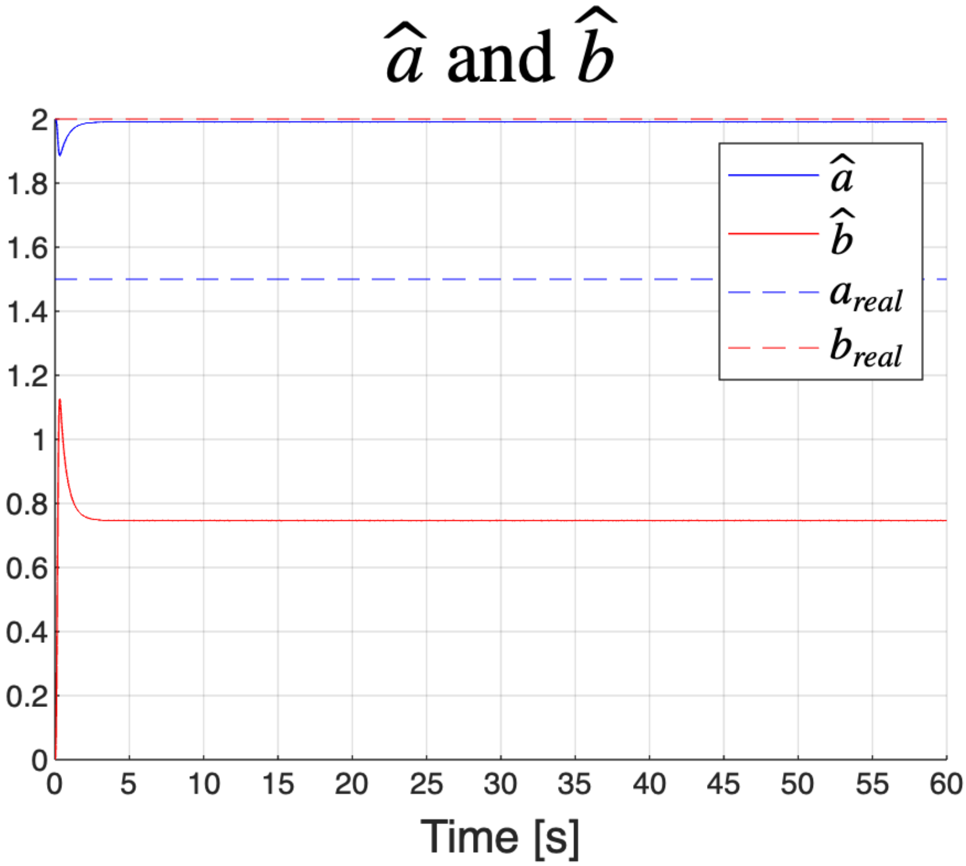
MATLAB των x(t), $\hat{x}$(t) και της διαφοράς τους x(t) − $\hat{x}$(t), καθώς και των εκτιμήσεων $\hat{a}$(t), $\hat{b}$(t) των a και b, αντίστοιχα.

Plot of x and $\hat{x}$



$e = x - \hat{x}$



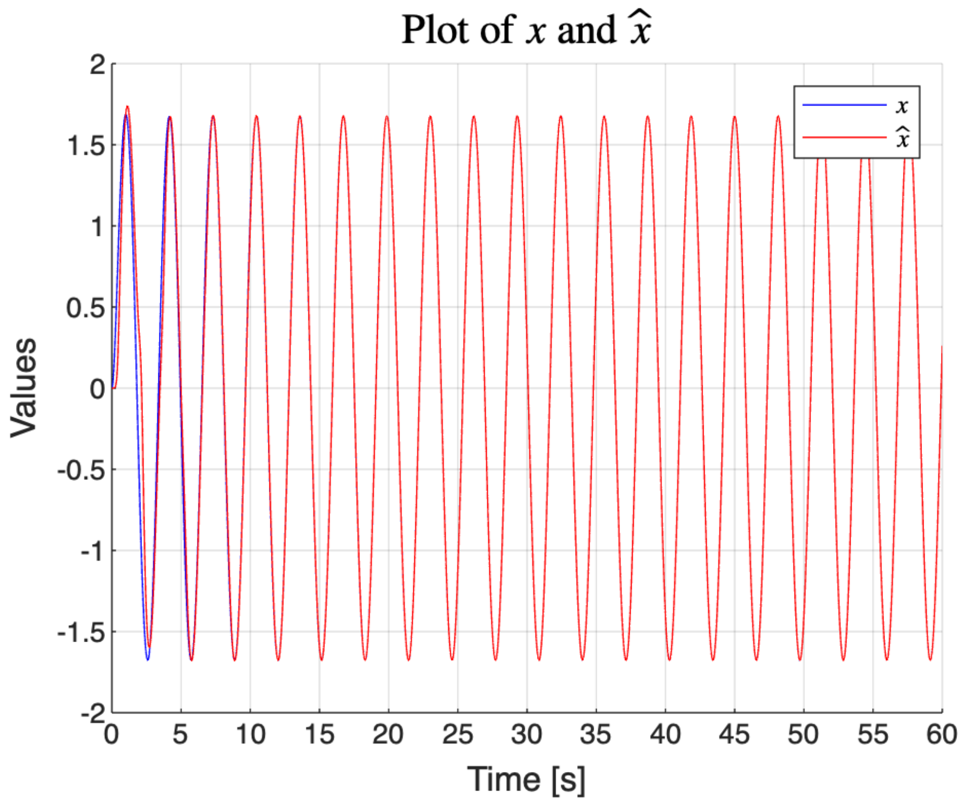


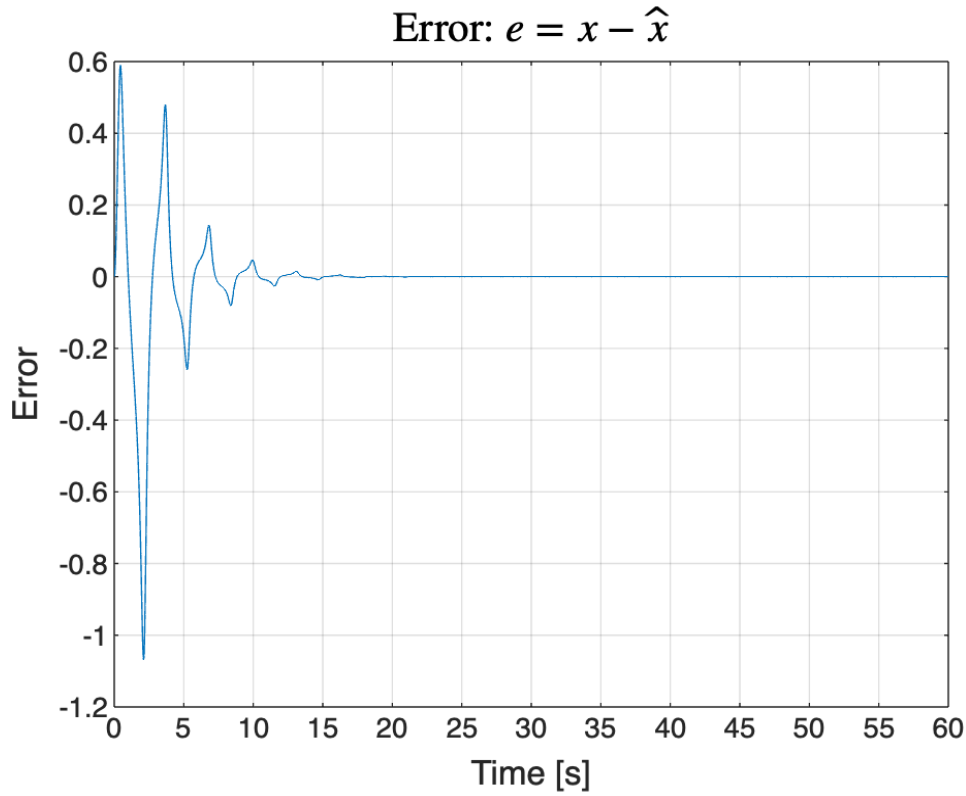
Παρατηρούμε πως όταν εφαρμόζουμε σταθερή εκτίμηση η εκτίμηση της εξόδου $\hat{y}$= $\hat{x}$ τείνει να συγκλίνει στην πραγματική έξοδο y = x , όμως οι τιμές των $\hat{a}$(t), $\hat{b}$(t) δεν φτάνουν τις πραγματικές τιμές παραμέτρων του συστήματος.

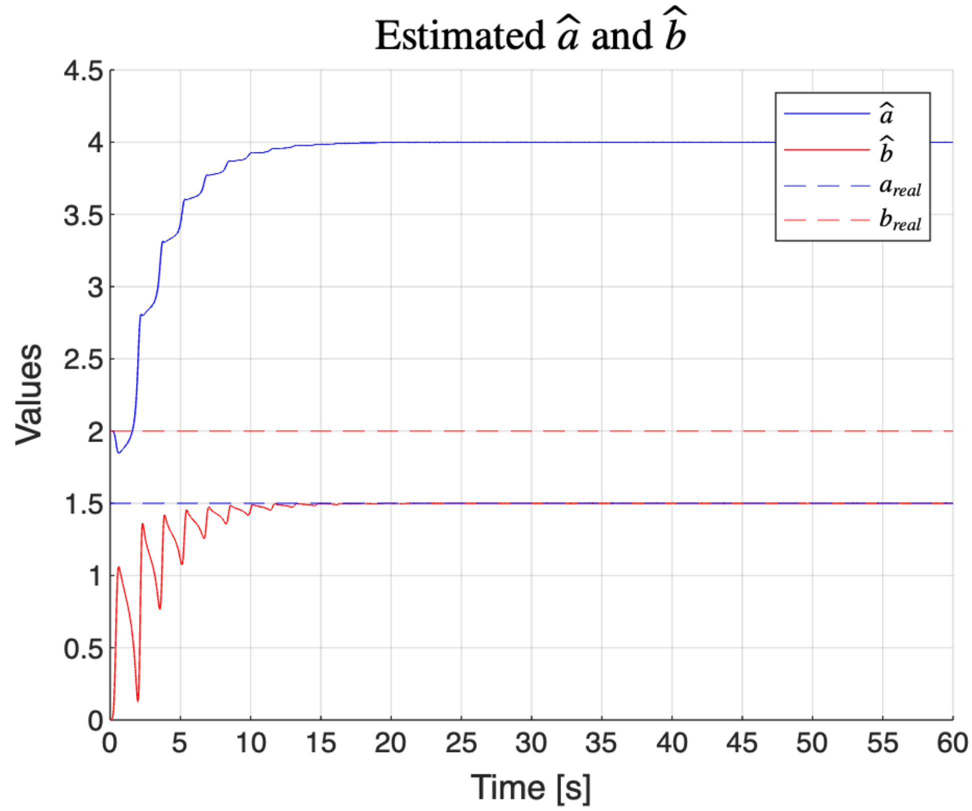
Το γεγονός αυτό οφείλεται στο ότι πρέπει να έχουμε διαφορετική είσοδο για να πέτυχουμε ταυτόχρονη ικανοποίηση των συνθηκών σύγκλισης μεταξύ των παραμέτρων και σύγκλισης σφάλματος στο μηδέν.

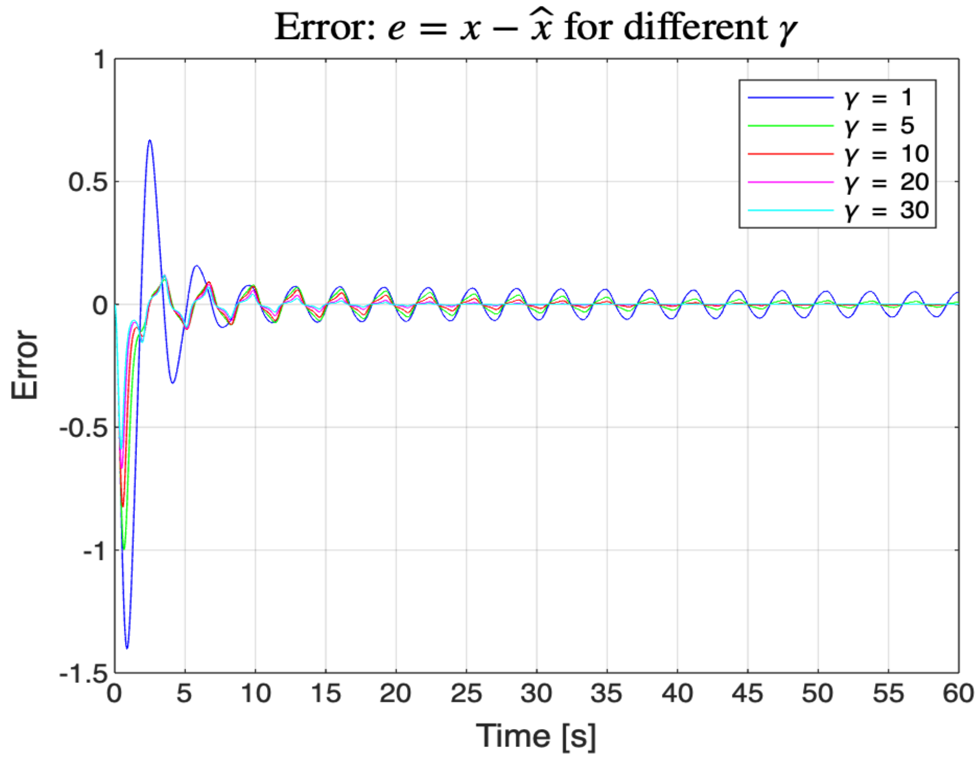
Θέλουμε μια είσοδο που να μην είναι σταθερή(πχ u =5) , αλλά να έχει μια διακριτή και μία μη μηδενική συχνότητα.(det(H) $\neq$ 0)

2.Προσόμοιωνουμε τώρα για a = 4,b = 1.5 και είσοδο συστήματος u = 5sin(2t) και με την επιλογή κατάλληλων παραμέτρων γ = 5 και a_m = 5


Plot of x and $\hat{x}$
Values
Time [s]
x
$\hat{x}$
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50
55
60


Error: $e = x - \hat{x}$
Error
Time [s]
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
-1.2
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50
55
60





Παρατηρούμε ότι με το πέρασμα του χρόνου η εκτίμηση της εξόδου τείνει να συγκλίνει στην πραγματική έξοδο του συστήματος και οι $\hat{a}$(t), $\hat{b}$(t) συγκλίνουν στις πραγματικές τιμές παραμέτρων του συστήματος.

Θέμα 2

1.Για την παράλληλη δομή:

Για το σύστημα :

$\dot{x}$=−ax+bu = $-\theta_1 x + \theta_2 u$ $\qquad$ $x(0) = 0$

$y=x$

$\dot{\hat{x}} = -\widehat{\theta_1}\,\widehat{x} + \widehat{\theta_2}u$, $\widehat{x}(0) = 0$

$\widehat{\theta_1} = \hat{\alpha}$, $\widehat{\theta_2} = \hat{b}$

Για το σφάλμα εκτίμησης παράλληλης δομής

$e = x - \widehat{x} \overset{\frac{d}{dt}}{\Rightarrow} \dot{e} = \dot{x} - \dot{\widehat{x}} = -\theta_1{}^* x + \theta_2{}^* u + \widehat{\theta_1}\widehat{x} - \widehat{\theta_2}u \pm \theta_1{}^* x$

$e = -\theta_1{}^* e + \tilde{\theta}_1 \widehat{x} - \tilde{\theta}_2 u$

Ορίζουμε την συνάρτηση Lyapunov:

$V(\hat{\theta}) = \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2\gamma_1}\tilde{\theta}_1{}^2 + \frac{1}{2\gamma_2}\tilde{\theta}_2{}^2 \overset{\frac{d}{dt}}{\Rightarrow}$

$\dot{V}(\hat{\theta}) = e\,\dot{e} + \frac{1}{\gamma_1}\tilde{\theta}_1\,\dot{\tilde{\theta}}_1 + \frac{1}{\gamma_2}\tilde{\theta}_2\,\dot{\tilde{\theta}}_2$

$\dot{V}(\hat{\theta}) = -\theta_1{}^* e^2 + \tilde{\theta}_1\,\widehat{x}\,\dot{e} - \tilde{\theta}_2\,ue + \frac{1}{\gamma_1}\tilde{\theta}_1\,\dot{\tilde{\theta}}_1 + \frac{1}{\gamma_2}\tilde{\theta}_2\,\dot{\tilde{\theta}}_2$

Για να συγκλίνει το μοντέλο παράλληλης δομής προς το πραγματικό σύστημα και σύμφωνα με τα θεωρήματα Barbalat και Lyapunov, θέλουμε :

$$V(\hat{\theta}) \geq 0 \;\kappa\alpha\iota\; \dot{V}(\hat{\theta}) \leq 0$$

$\dot{\widehat{\theta_1}}$ = -γ_1 $\widehat{x}$ e

$\dot{\widehat{\theta_2}}$ = -γ_2 ue

Οι εξισώσεις κατάστασης του συστήματος λαμβάνοντας υπόψιν ότι το σήμα x περιλαμβάνει θόρυβο η(t):

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \widehat{\theta_1} \\ x_3 = \widehat{\theta_2} \\ x_4 = \hat{x} \end{cases} \overset{\frac{d}{dt}}{\Rightarrow} \begin{cases} \dot{x_1} = \dot{x} = -ax_1 + bu \\ \dot{x_2} = \dot{\widehat{\theta_1}} = \gamma_1 e\hat{x} = \gamma_1 e x_4 \\ \dot{x_3} = \dot{\widehat{\theta_2}} = \gamma_2 eu \\ \dot{x_4} = \dot{\hat{x}} = -\widehat{\theta_1}\hat{x} + \widehat{\theta_2}u = -x_4\, x_2 + x_3 u \end{cases}$$

Το σφάλμα πρόβλεψης όταν το x λαμβάνεται με θόρυβο είναι:

$$e = x + \eta - \hat{x} = x_1 - x_4 + \eta$$

Επομένως οι εξισώσεις κατάστασης για σύστημα χωρίς θόρυβο είναι:

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \widehat{\theta_1} \\ x_3 = \widehat{\theta_2} \\ x_4 = \dot{\hat{x}} \end{cases} \overset{\frac{d}{dt}}{\Rightarrow} \begin{cases} \dot{x_1} = \dot{x} = -ax_1 + bu \\ \dot{x_2} = -\gamma_1 x_4 (x_1 - x_4) \\ \dot{x_3} = \gamma_2 u (x_1 - x_4) \\ \dot{x_4} = -x_4\, x_2 + x_3 u \end{cases}$$

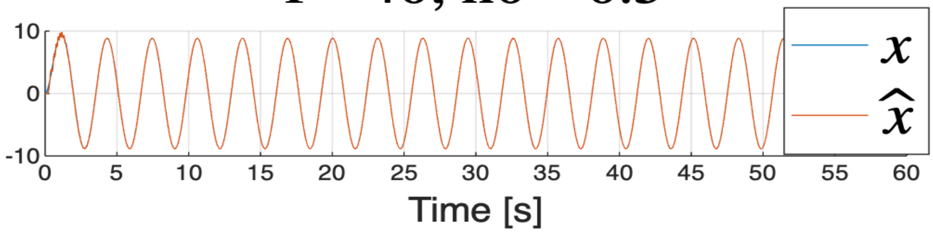
Και με θόρυβο:

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \widehat{\theta_1} \\ x_3 = \widehat{\theta_2} \\ x_4 = \dot{\hat{x}} \end{cases} \overset{\frac{d}{dt}}{\Rightarrow} \begin{cases} \dot{x_1} = \dot{x} = -ax_1 + bu \\ \dot{x_2} = -\gamma_1 x_4 (x_1 + \eta - x_4) \\ \dot{x_3} = \gamma_2 u (x_1 + \eta - x_4) \\ \dot{x_4} = -x_4\, x_2 + x_3 u \end{cases}$$

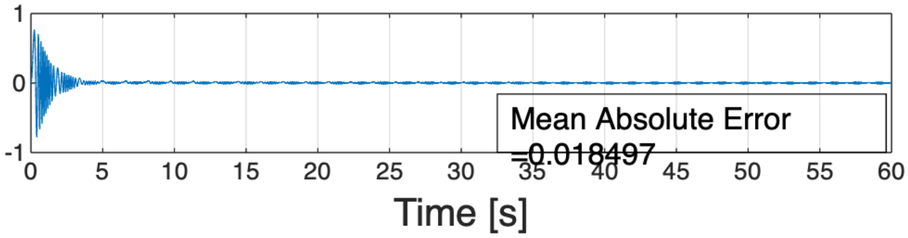
Προσομοιώνουμε σε MATLAB τον αλγόριθμο Lyapunov με παράλληλη δομή θέτοντας ως σταθερές a = 2, b = 5, είσοδο συστήματος u = 5sin(2t), θόρυβο η(t) = η0sin(2πft) και την επιλογή κατάλληλων παραμέτρων γ_1 = 15 και γ_2 = 25.

- $\eta_0 = 0.5$ και f =40.

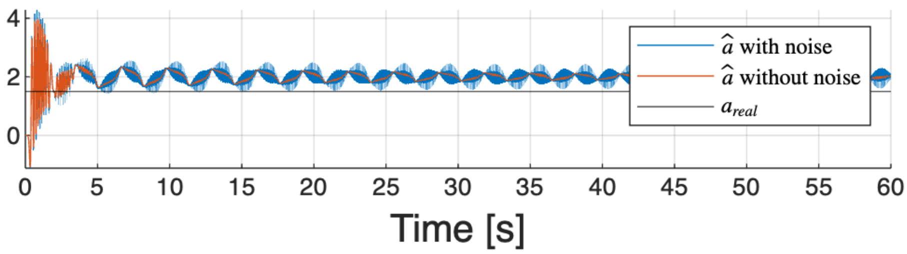
[Parallel structure] x and $\hat{x}$ with noise
f =40, h0 =0.5



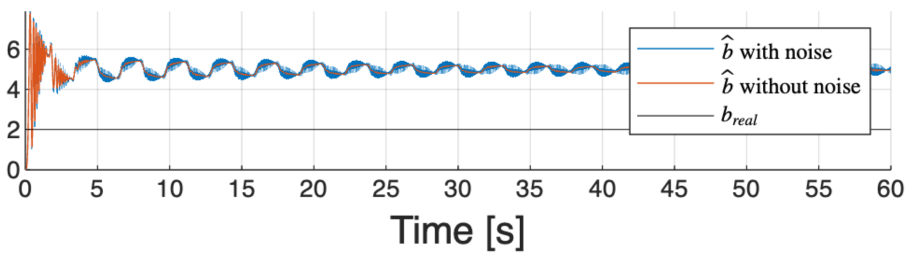
[Parallel structure] e = x - $\hat{x}$ with noise
f =40, h0 =0.5



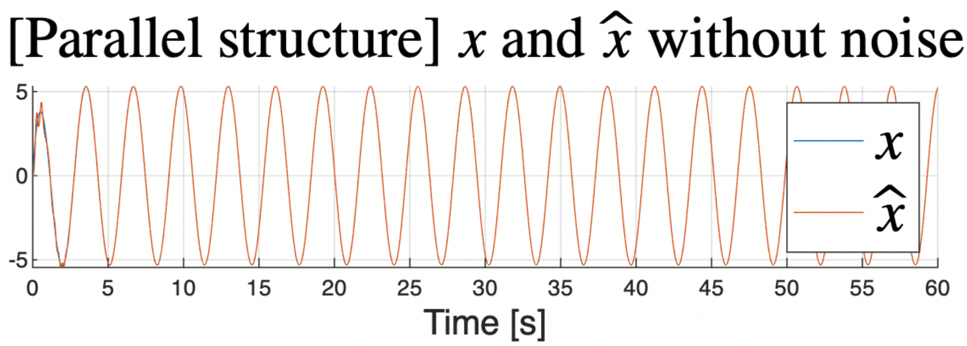
[Parallel structure] a and $\hat{a}$ with and without noise
f =40, h0 =0.5

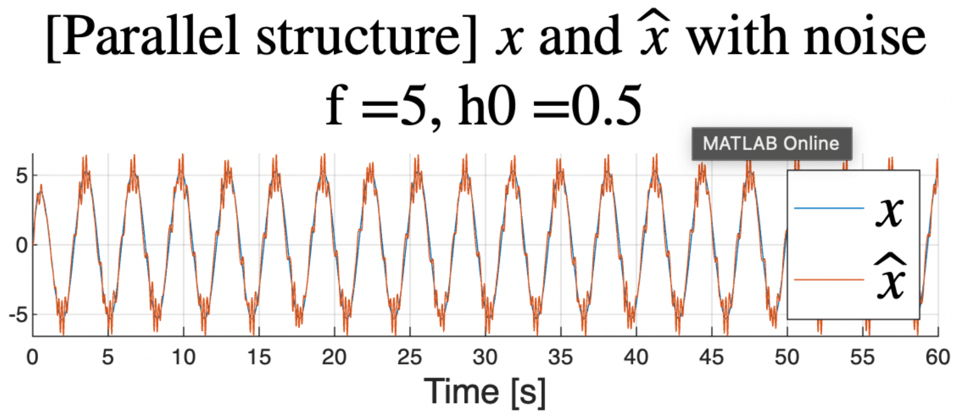


[Parallel structure] b and $\hat{b}$ with and without noise
f =40, h0 =0.5

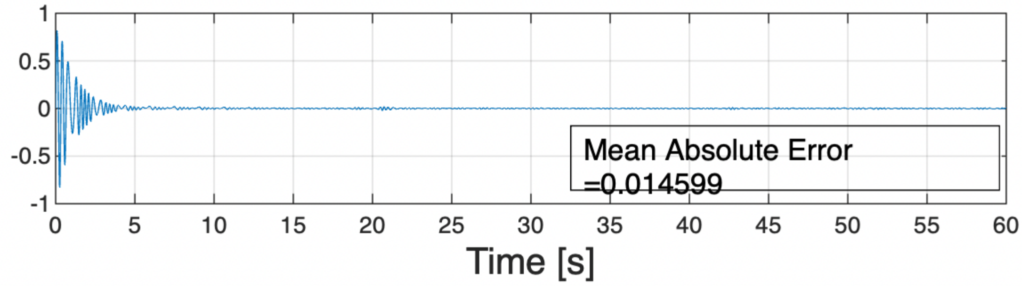


- η_0 = 0.5 και f=5



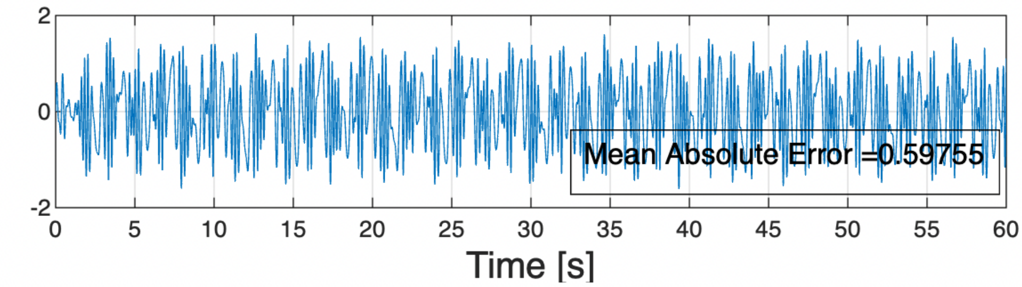


[Parallel structure] e = x - $\hat{x}$ without noise



[Parallel structure] e = x - $\hat{x}$ with noise

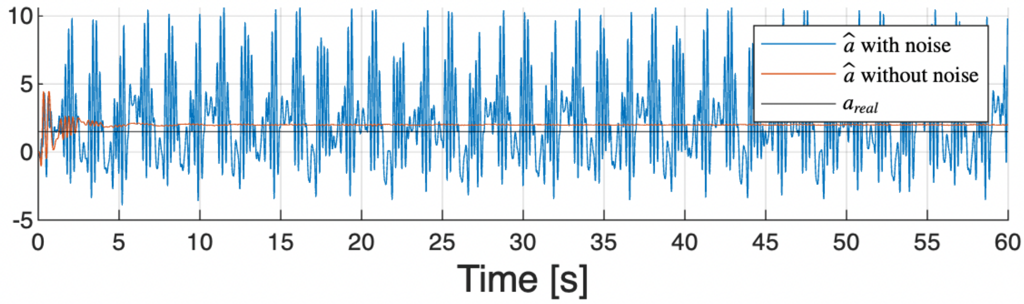
f =5, h0 =0.5



[Parallel structure] a and $\hat{a}$ with and without noise

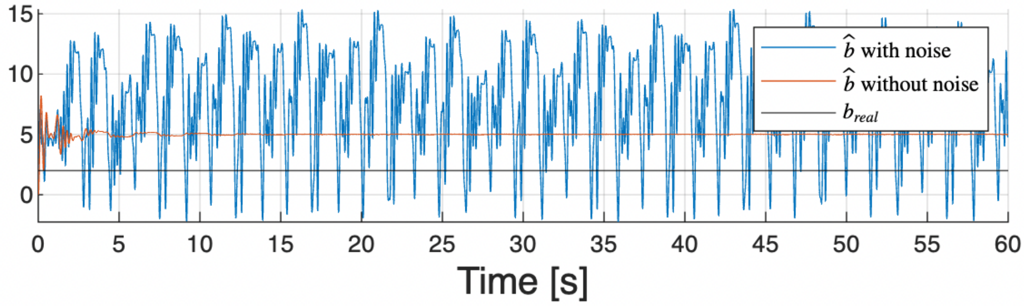
MATLAB Online

f =5, h0 =0.5



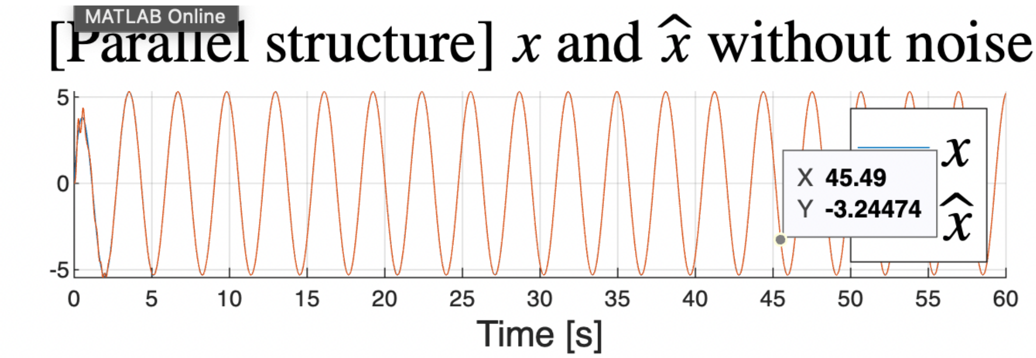
[Parallel structure] b and $\hat{b}$ with and without noise

f =5, h0 =0.5

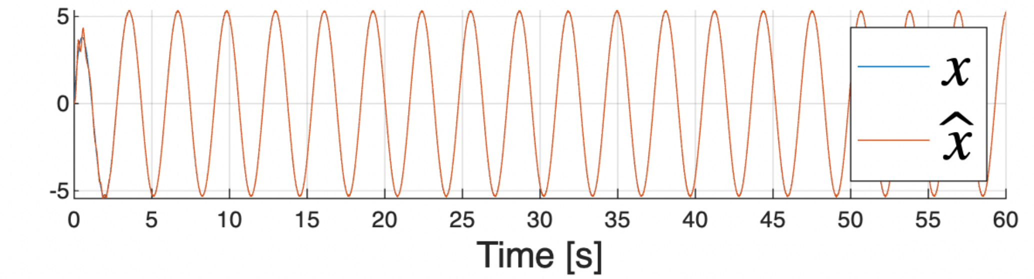


- $\eta_0 = 0.5$ και f=15

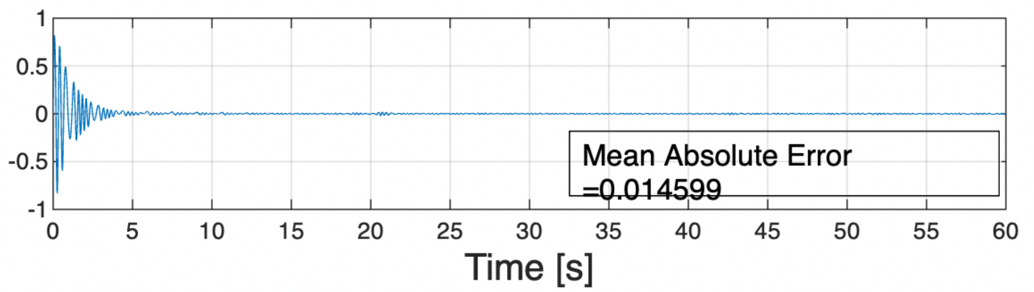
[Parallel structure] x and $\hat{x}$ without noise



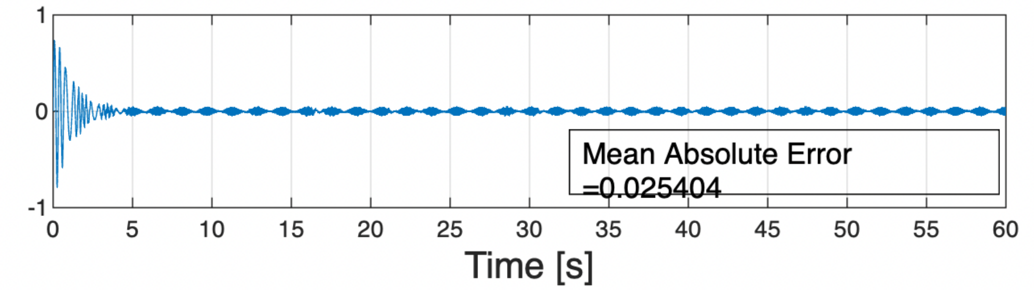
[Parallel structure] x and $\hat{x}$ with noise
f =15, h0 =0.5



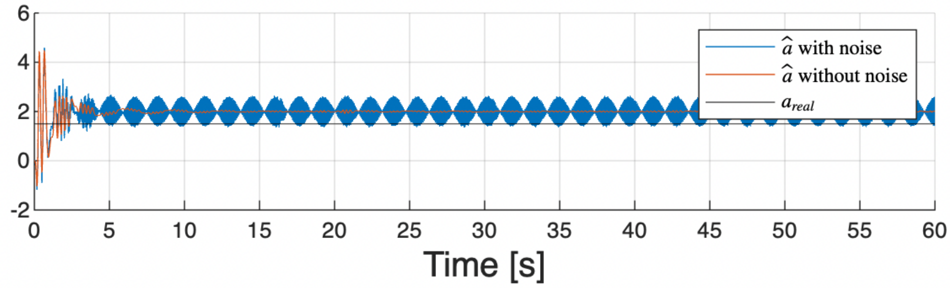
[Parallel structure] e = x - $\hat{x}$ without noise



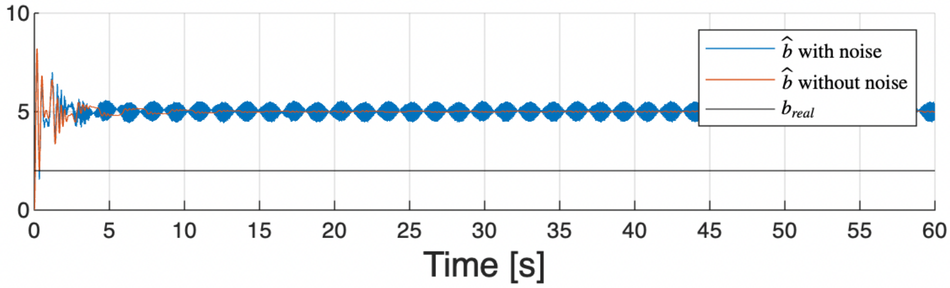
[Parallel structure] e = x - $\hat{x}$ with noise
f =15, h0 =0.5



[Parallel structure] a and $\hat{a}$ with and without noise
f =15, h0 =0.5

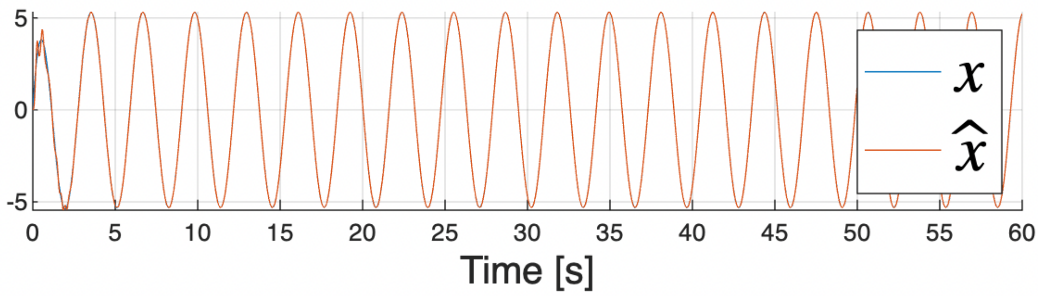


[Parallel structure] b and $\hat{b}$ with and without noise
f =15, h0 =0.5

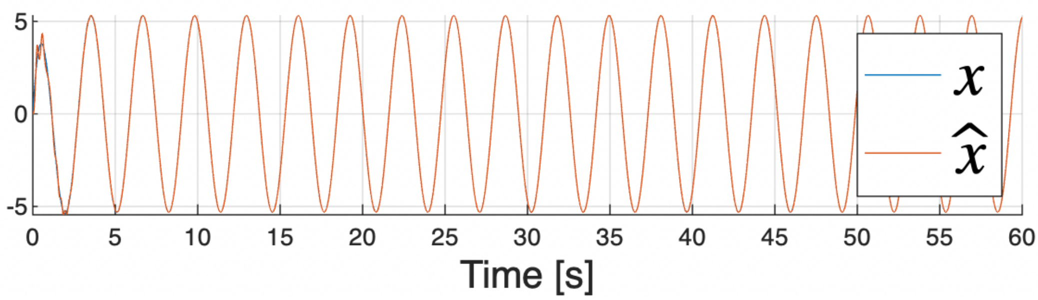


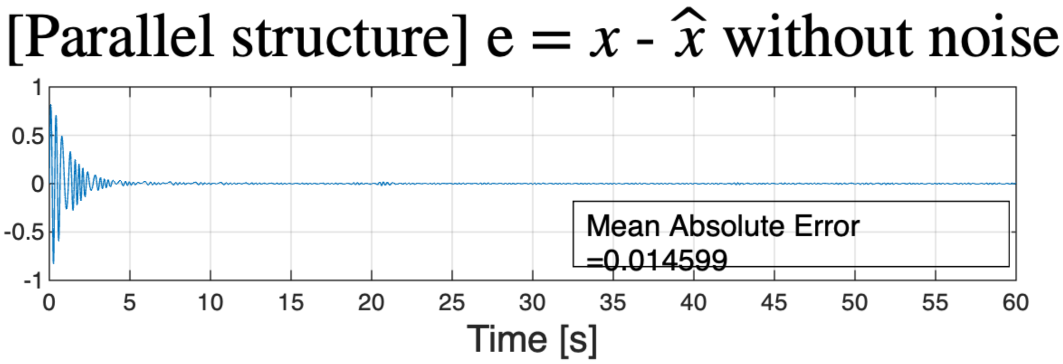
- $\eta_0 = 0.5$ και f=60

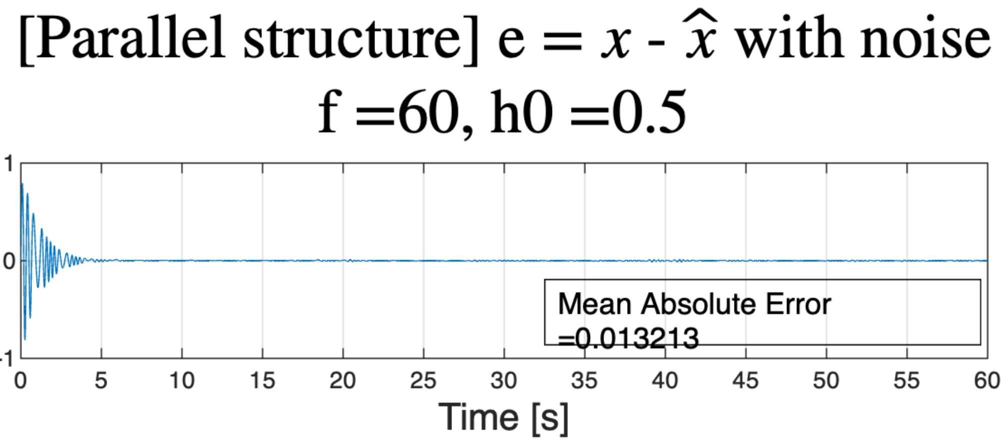
[Parallel structure] x and $\hat{x}$ without noise

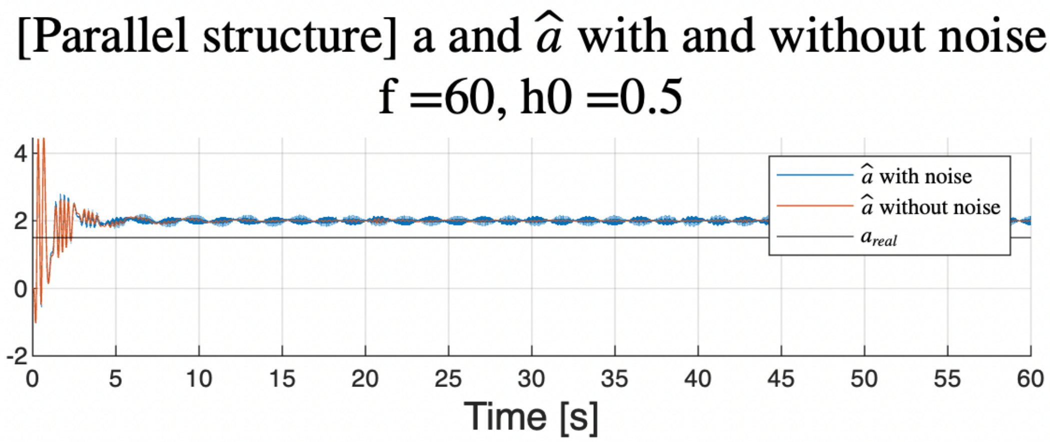


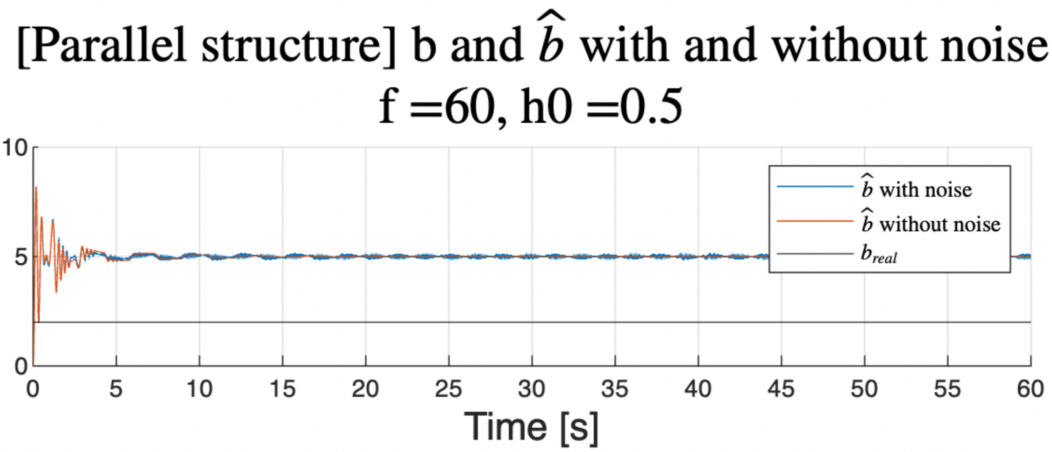
[Parallel structure] x and $\hat{x}$ with noise
f =60, h0 =0.5



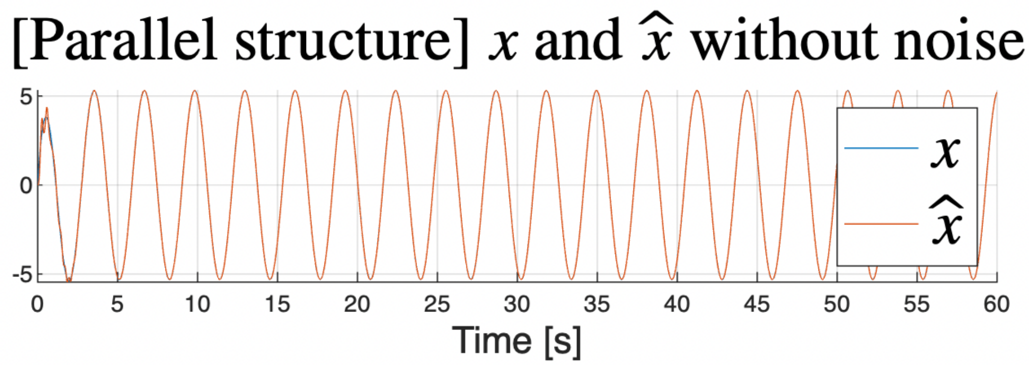

[Parallel structure] e = x - $\hat{x}$ without noise
Mean Absolute Error =0.014599
Time [s]

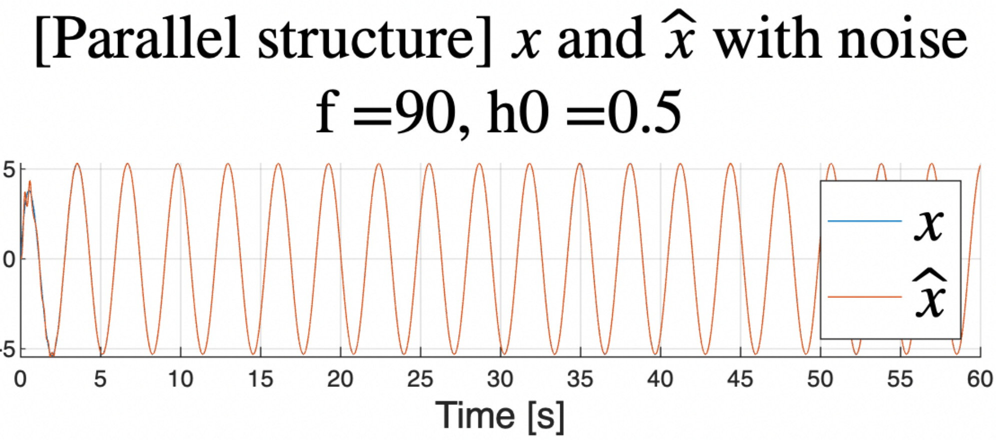

[Parallel structure] e = x - $\hat{x}$ with noise
f =60, h0 =0.5
Mean Absolute Error =0.013213
Time [s]

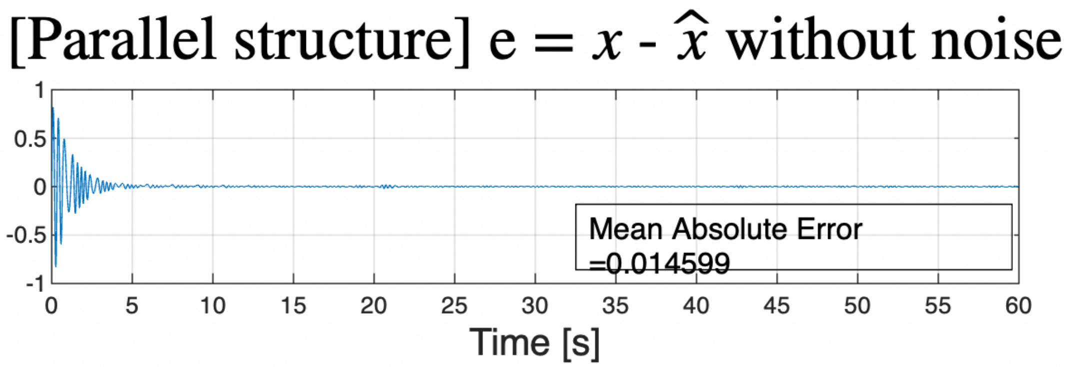

[Parallel structure] a and $\hat{a}$ with and without noise
f =60, h0 =0.5
$\hat{a}$ with noise
$\hat{a}$ without noise
a_{real}
Time [s]

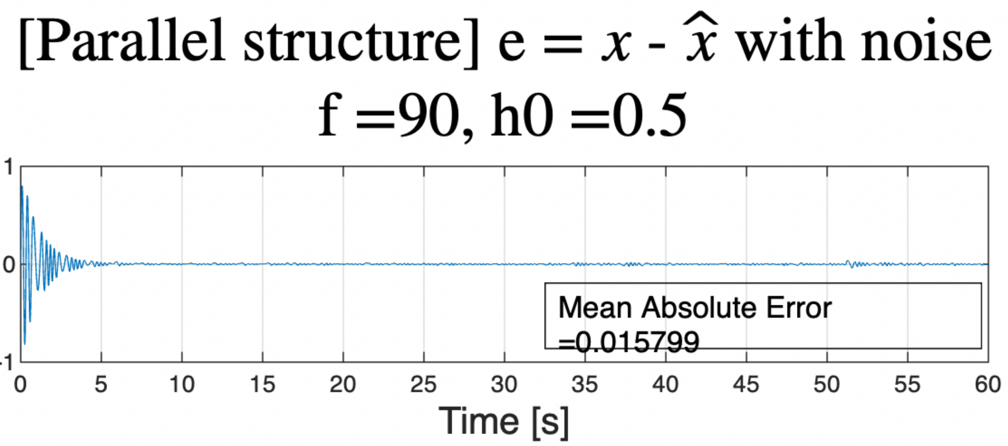

[Parallel structure] b and $\hat{b}$ with and without noise
f =60, h0 =0.5
$\hat{b}$ with noise
$\hat{b}$ without noise
b_{real}
Time [s]

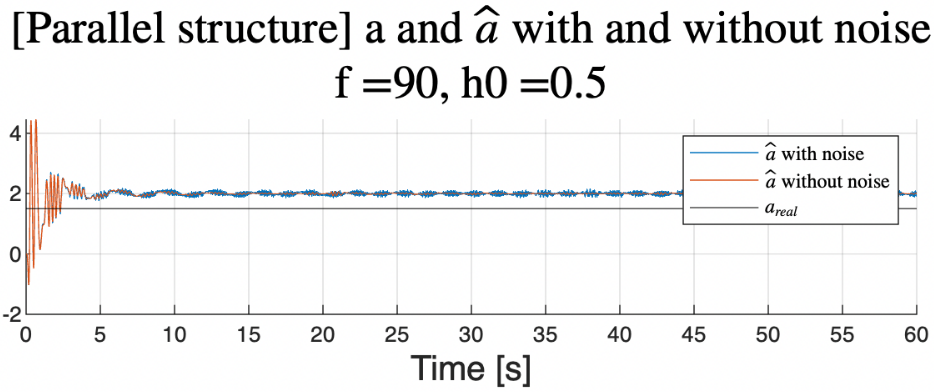
- $\eta_0 = 0.5$ και f=90

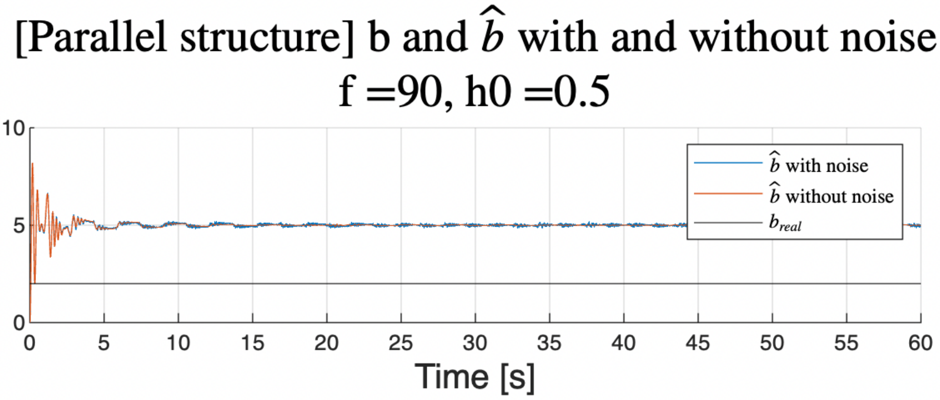




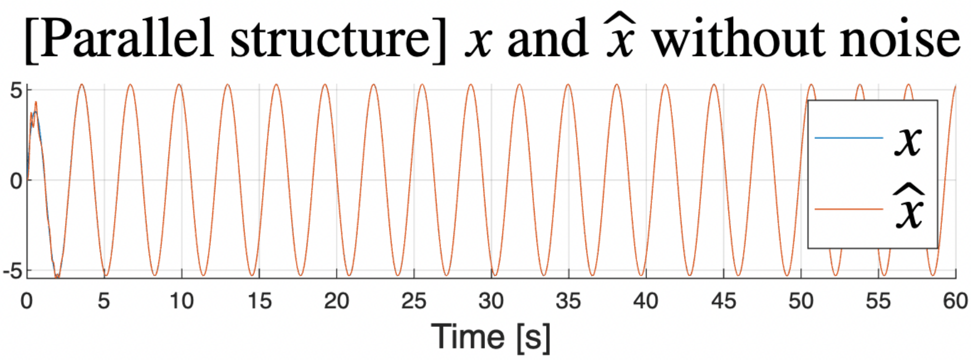


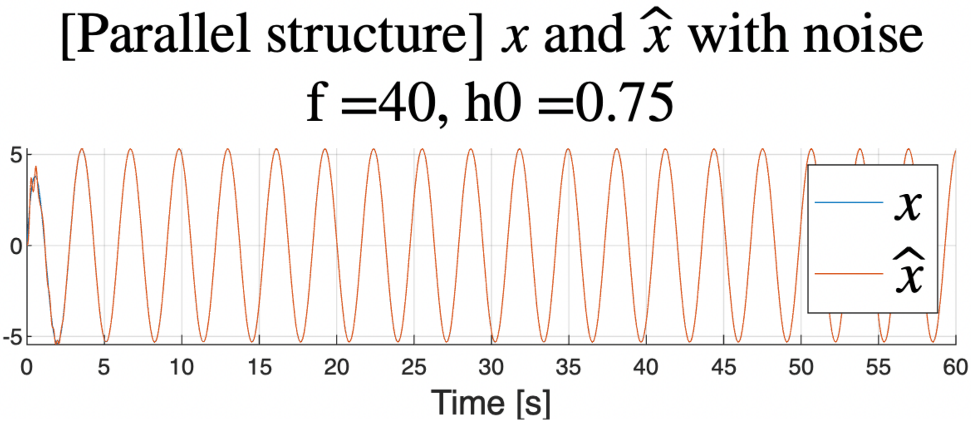


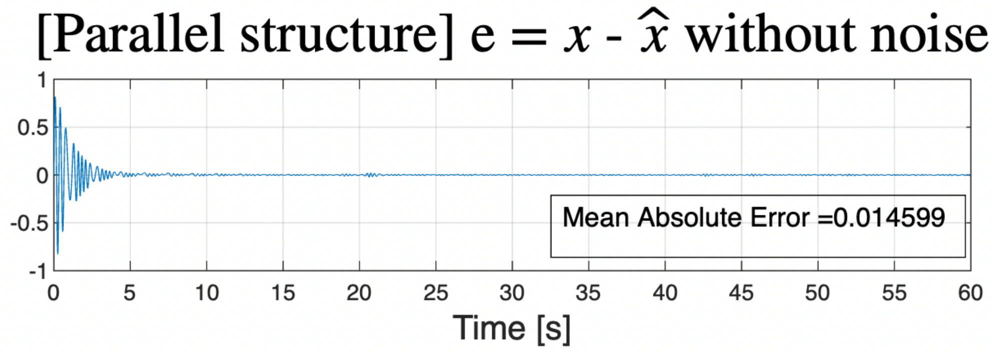


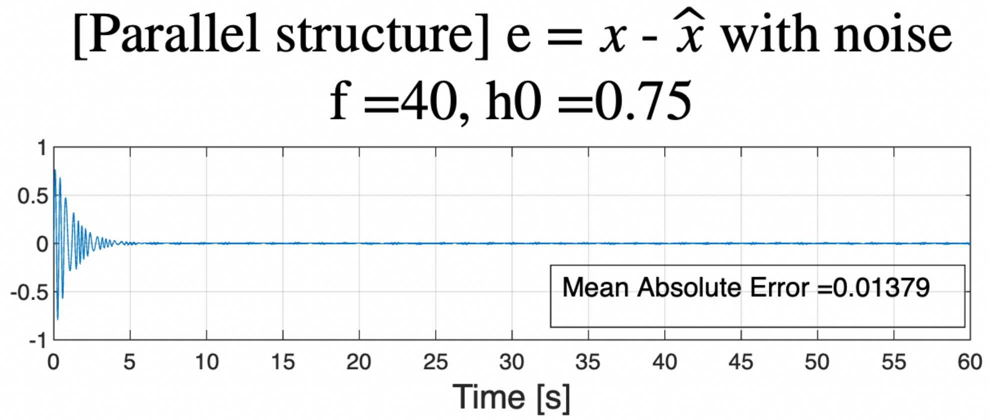


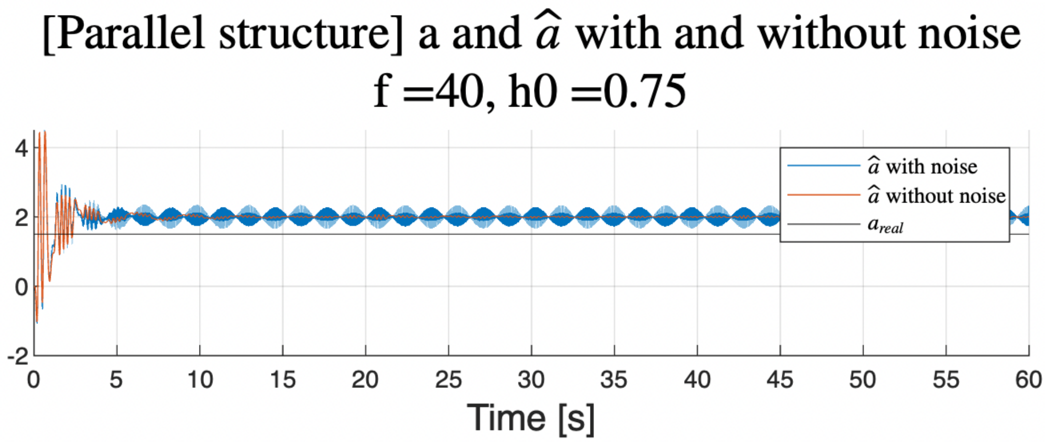
- η_0=0.75 και f=40

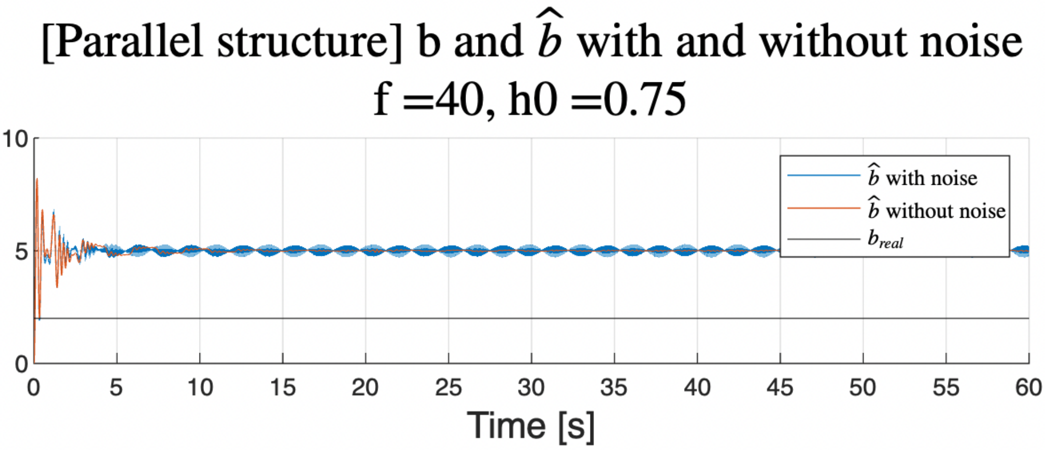




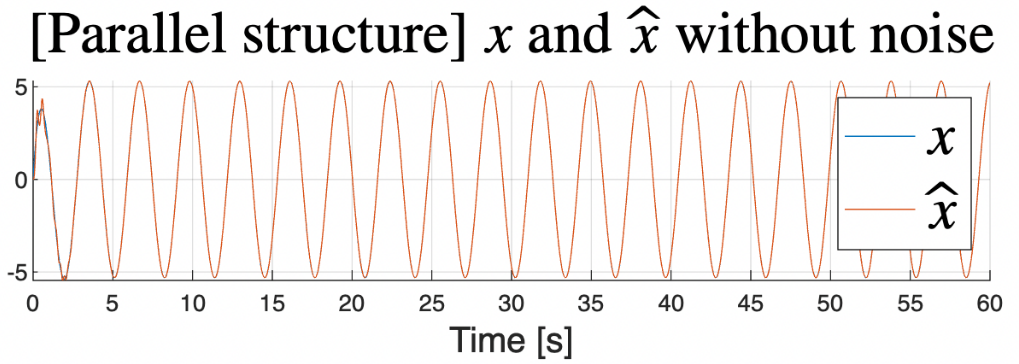

[Parallel structure] e = x - x̂ without noise
Mean Absolute Error =0.014599
Time [s]

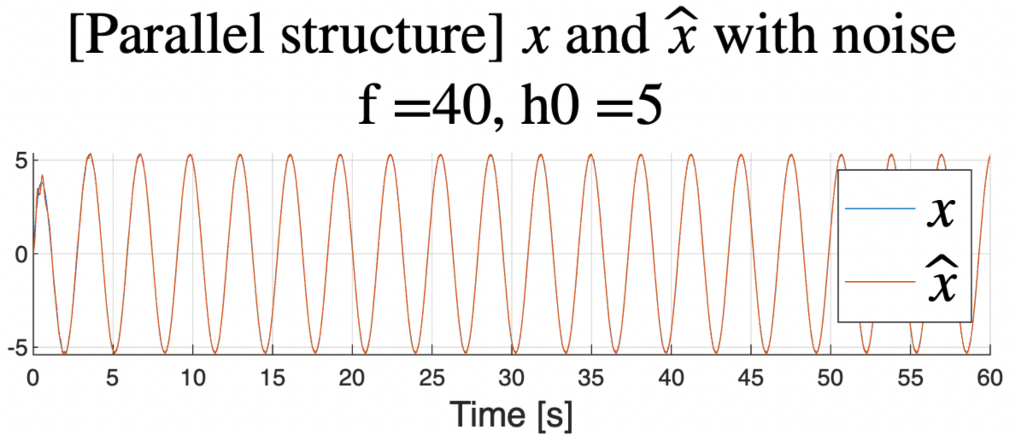

[Parallel structure] e = x - x̂ with noise
f =40, h0 =0.75
Mean Absolute Error =0.01379
Time [s]

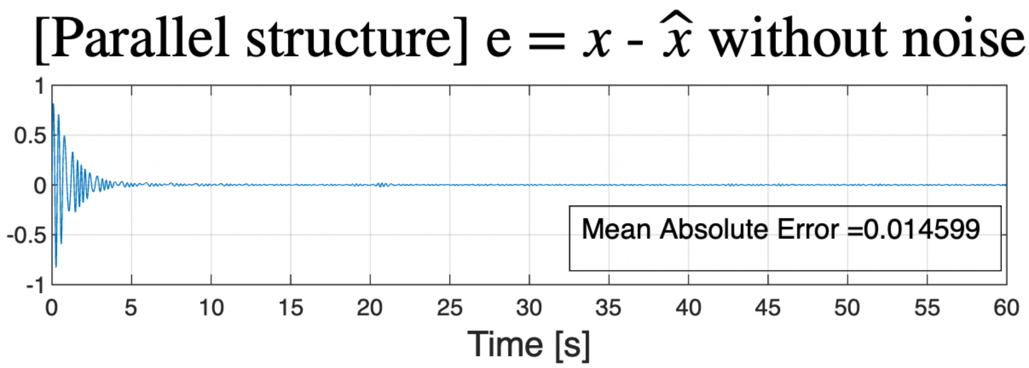

[Parallel structure] a and â with and without noise
f =40, h0 =0.75
â with noise
â without noise
a_{real}
Time [s]

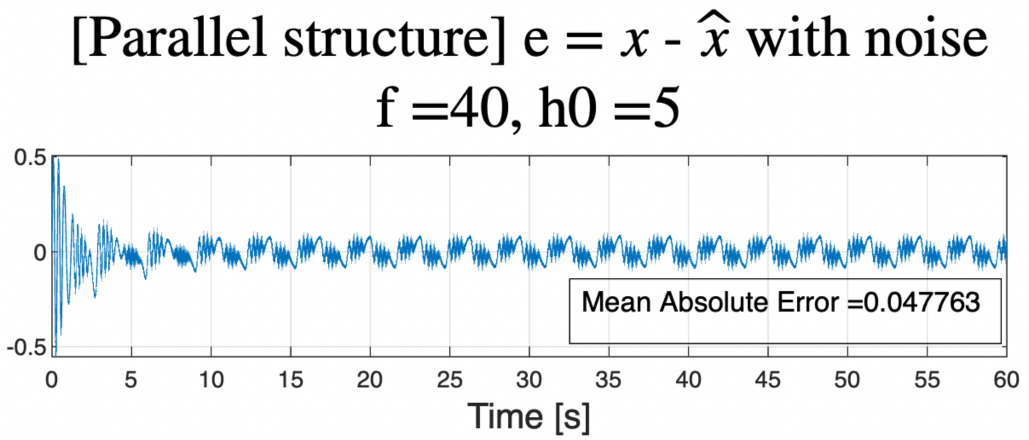

[Parallel structure] b and b̂ with and without noise
f =40, h0 =0.75
b̂ with noise
b̂ without noise
b_{real}
Time [s]

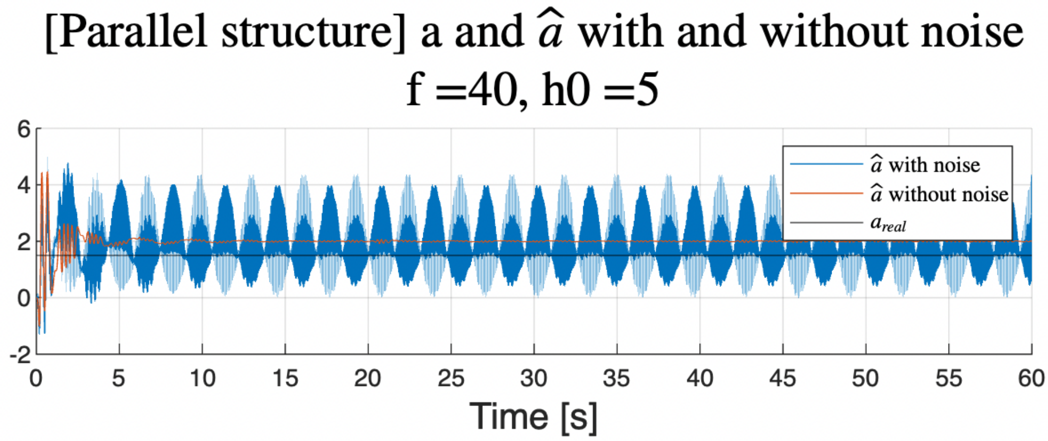
- η_0=5 και f=40

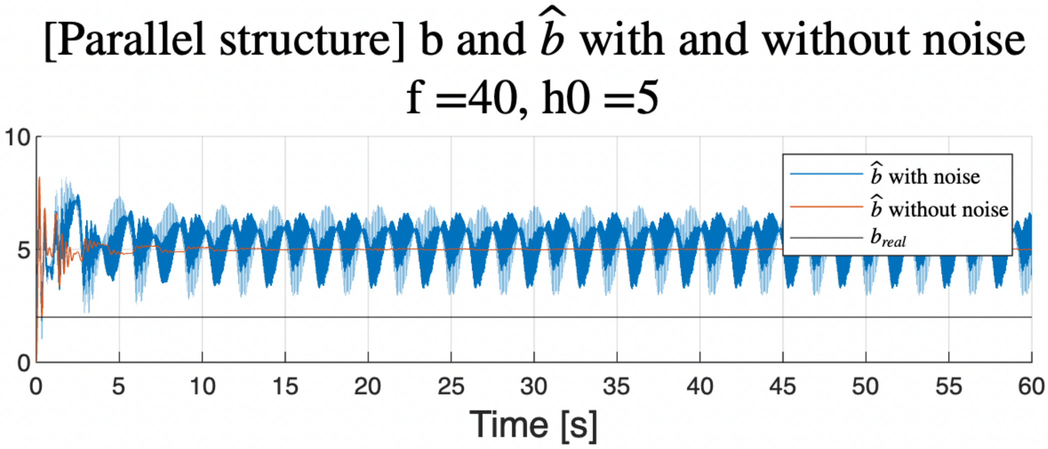












2.Για την μικτή δομή:

$\dot{x}$=−ax+bu = -$\theta_1 x + \theta_2 u$,$x(0) = 0$

$y=x$

$\mu\varepsilon\ \theta_1 = \hat{a}\ \kappa\alpha\iota\ \theta_2 = \hat{b}\ \kappa\alpha\iota\ \theta_{\mathrm{m}} = ct > 0$

Για το σφάλμα εκτίμησης μικτής δομής

e = x - $\hat{x} \overset{\frac{d}{dt}}{\Rightarrow} \dot{e} = \dot{x} - \dot{\hat{x}}$ = -θ_1^* x + θ_2^*u + $\widehat{\theta_1}\hat{x} - \widehat{\theta_2}u - \theta_m e$

e = $-\ \theta_m e + \tilde{\theta}_1\ \hat{x} - \tilde{\theta}_2\, u$

Ορίζουμε την συνάρτηση Lyapunov:

$$V(\hat{\theta}) = \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2\gamma_1}\tilde{\theta}_1^2 + \frac{1}{2\gamma_2}\tilde{\theta}_2^2 \overset{\frac{d}{dt}}{\Rightarrow}$$

$$\dot{V}(\hat{\theta}) = e\,\dot{e} + \frac{1}{\gamma_1}\tilde{\theta}_1\,\dot{\tilde{\theta}}_1 + \frac{1}{\gamma_2}\tilde{\theta}_2\,\dot{\tilde{\theta}}_2$$

$$\dot{V}(\hat{\theta}) = -\,\theta_m e^2 + \tilde{\theta}_1\,\hat{x}\,\dot{e} - \tilde{\theta}_2\,ue + \frac{1}{\gamma_1}\tilde{\theta}_1\,\dot{\tilde{\theta}}_1 + \frac{1}{\gamma_2}\tilde{\theta}_2\,\dot{\tilde{\theta}}_2$$

Για να συγκλίνει το μοντέλο παράλληλης δομής προς το πραγματικό σύστημα και σύμφωνα με τα θεωρήματα Barbalat και Lyapunov, θέλουμε :

$$V(\hat{\theta}) \geq 0 \;\kappa\alpha\iota\; \dot{V}(\hat{\theta}) \leq 0$$

Οπότε επιλέγουμε:

$\dot{\widehat{\theta_1}}$ = -$\gamma_1\, x\, e$

$\dot{\widehat{\theta_2}}$ = -γ_2 ue

Και παίρνουμε τις παρακάτω εξισώσεις κατάστασης:

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \widehat{\theta_1} \\ x_3 = \widehat{\theta_2} \\ x_4 = \hat{x} \end{cases}$$

$$\overset{\frac{d}{dt}}{\Rightarrow} \begin{cases} \dot{x_1} = \dot{x} = -ax_1 + bu \\ \dot{x_3} = \dot{\widehat{\theta_1}} = \gamma_1 ex = \gamma_1 ex \\ \dot{x_4} = \dot{\widehat{\theta_2}} = \gamma_2 eu \\ \dot{x_2} = \dot{\hat{x}} = -\widehat{\theta_1}\hat{x} + \widehat{\theta_2}u + \theta_m e = -x_4\, x_2 + x_3 u + +\theta_m e \end{cases}$$

Το σφάλμα πρόβλεψης όταν το x λαμβάνεται με θόρυβο είναι:

e = x + η - $\hat{x} = x_1 - x_2 + \eta$

Οπότε οι εξισώσεις κατάστασης είναι χωρις θόρυβο:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = -ax_1 + bu \\ \dot{x_3} = -\gamma_1 x_1(x_1 - x_4) \\ \dot{x_4} = \gamma_2 u(x_1 - x_4) \\ \dot{x_2} = -x_4\, x_2 + x_3 u + +\theta_m(x_1 - x_4) \end{cases}$$

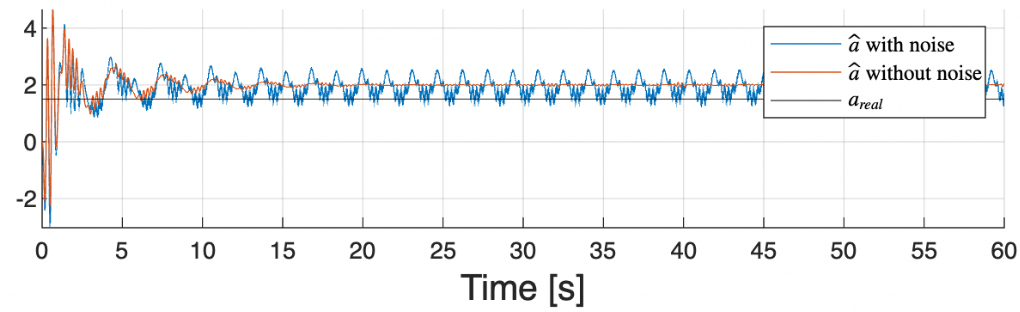
Ένω με θόρυβο είναι:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = -ax_1 + bu \\ \dot{x_3} = -\gamma_1 x_1(x_1 + \eta)(x_1 + \eta - x_4) \\ \dot{x_4} = \gamma_2 u(x_1 + \eta - x_4) \\ \dot{x_2} = -x_4\, x_2 + x_3 u + +\theta_m(x_1 + \eta - x_4) \end{cases}$$

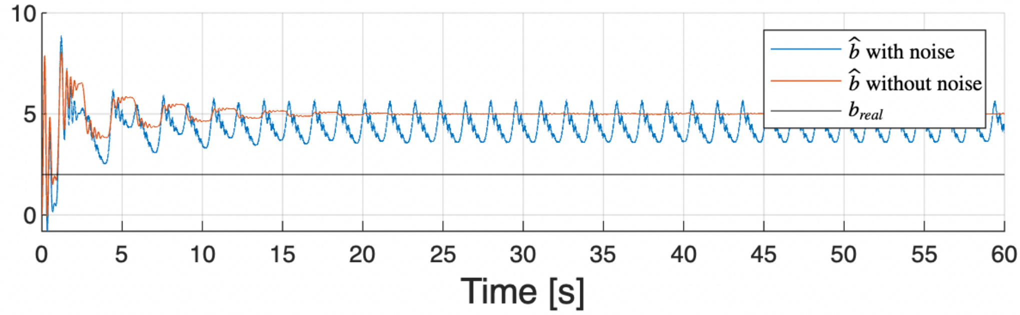
Όμοια με παραπάνω προσομοιώνουμε σε MATLAB τον αλγόριθμο Lyapunov με παράλληλη δομή θέτοντας ως σταθερές a = 2, b = 5, είσοδο συστήματος u = 5sin(2t), θόρυβο η(t) = η0sin(2πft) και την επιλογή κατάλληλων παραμέτρων γ_1 = 15 και γ_2 = 25.

- η_0 = 0.5 και f =40.

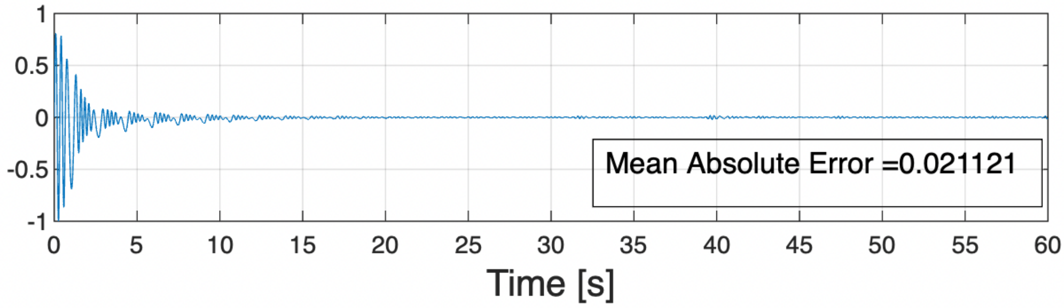
[Mixed structure] a and $\hat{a}$ with and without noise
f =40, h0 =0.5



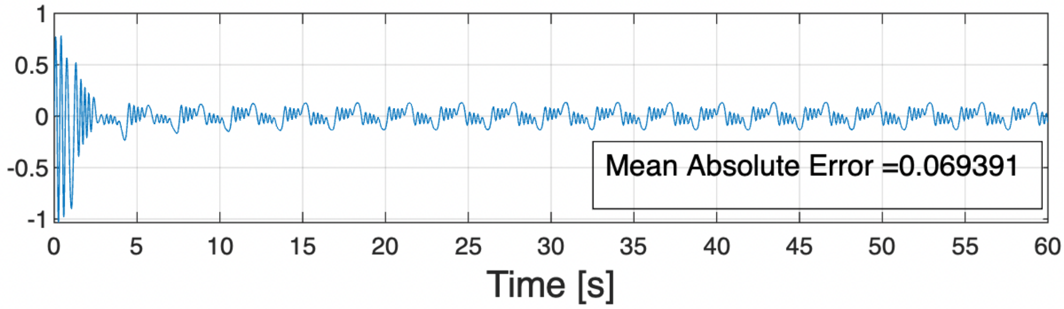
[Mixed structure] b and $\hat{b}$ with and without noise
f =40, h0 =0.5



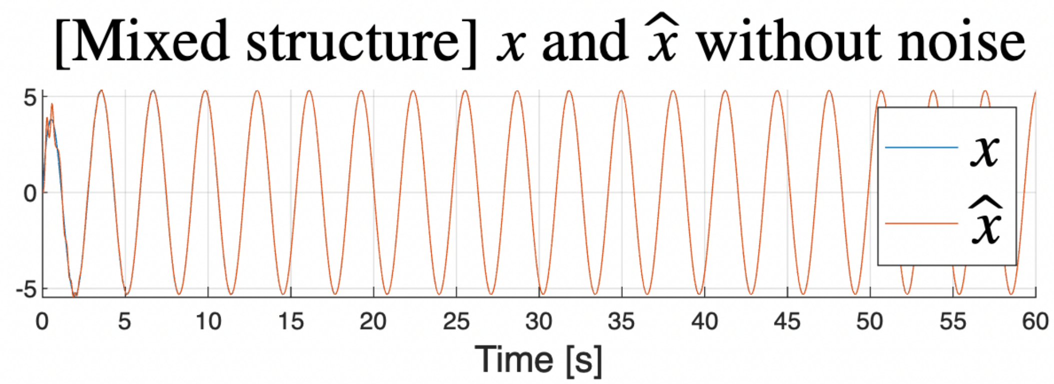
[Mixed structure] e = x - $\hat{x}$ without noise

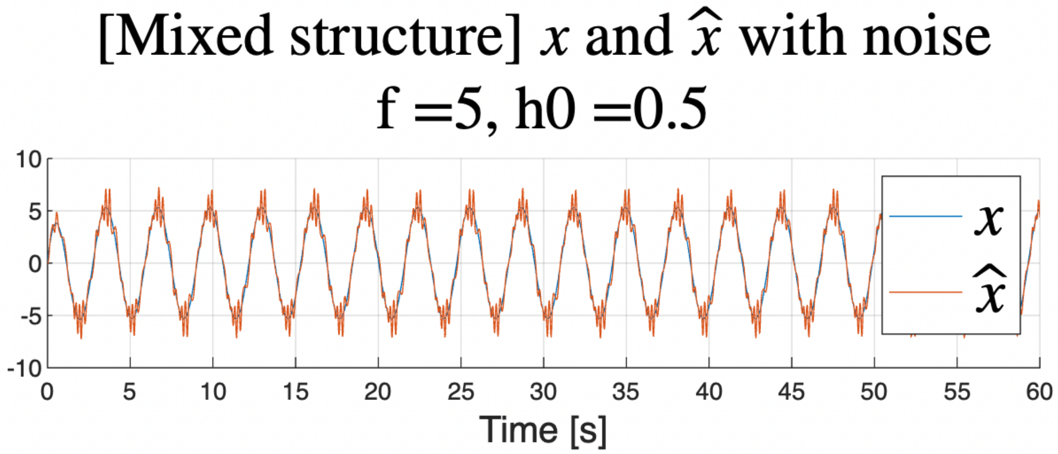


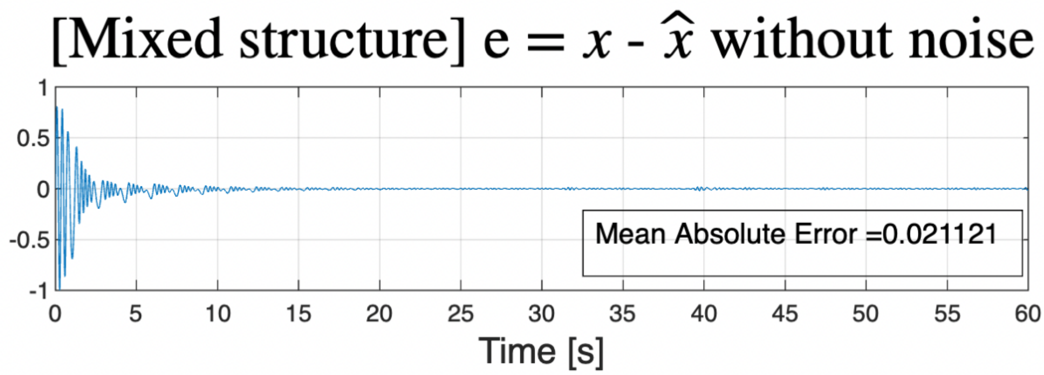
[Mixed structure] e = x - $\hat{x}$ with noise
f =40, h0 =0.5

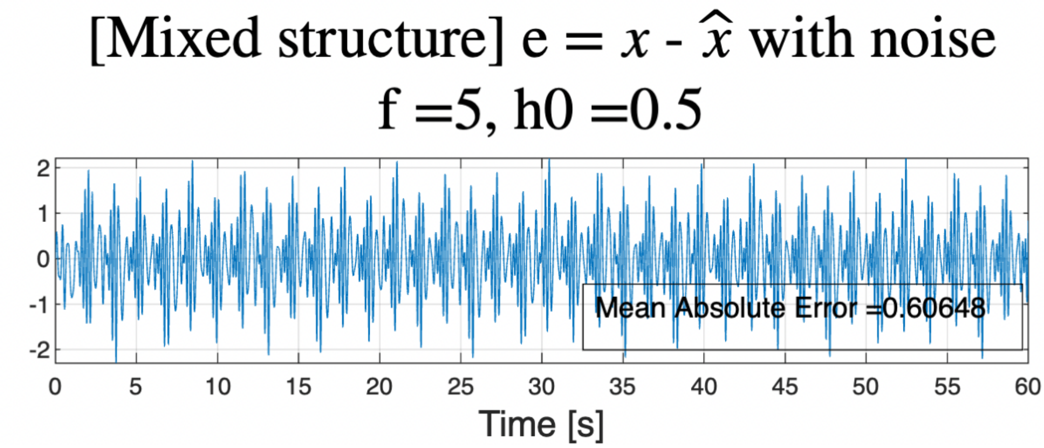


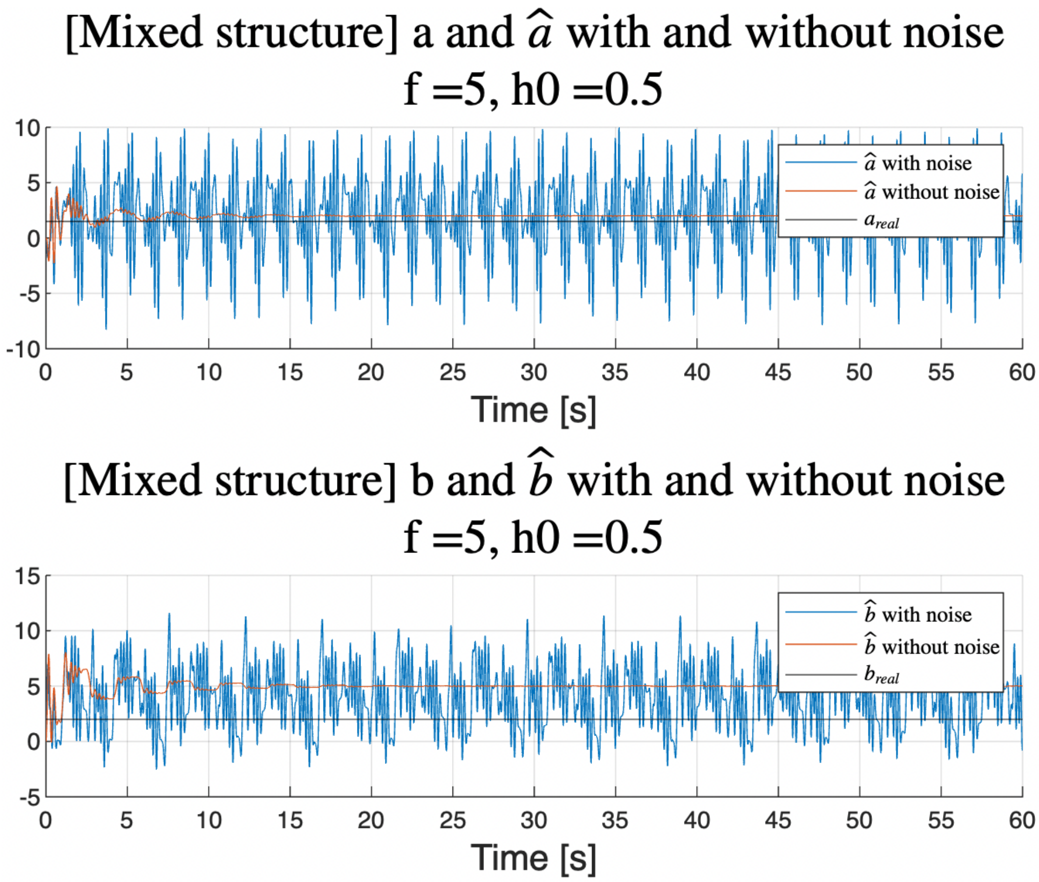
- $\eta_0 = 0.5$ και $f = 5$.



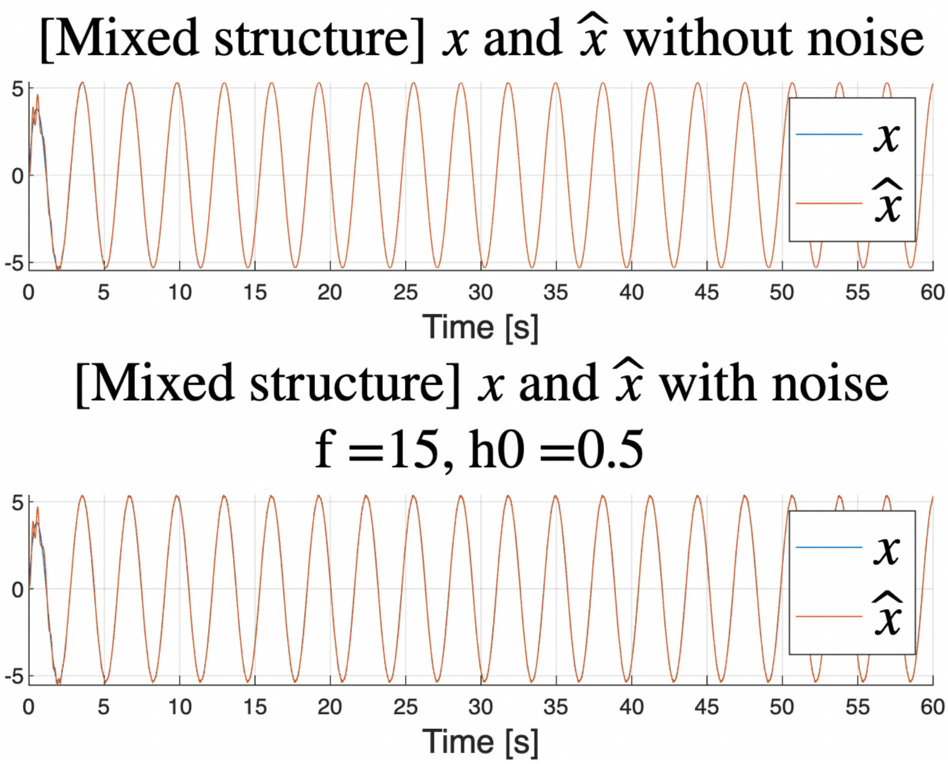


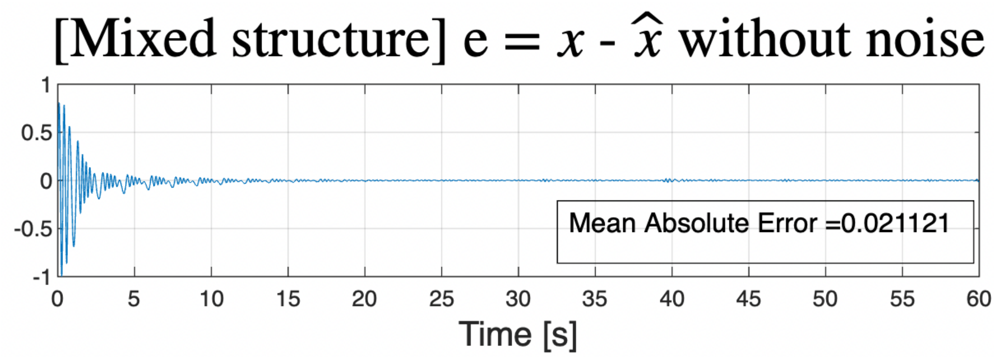


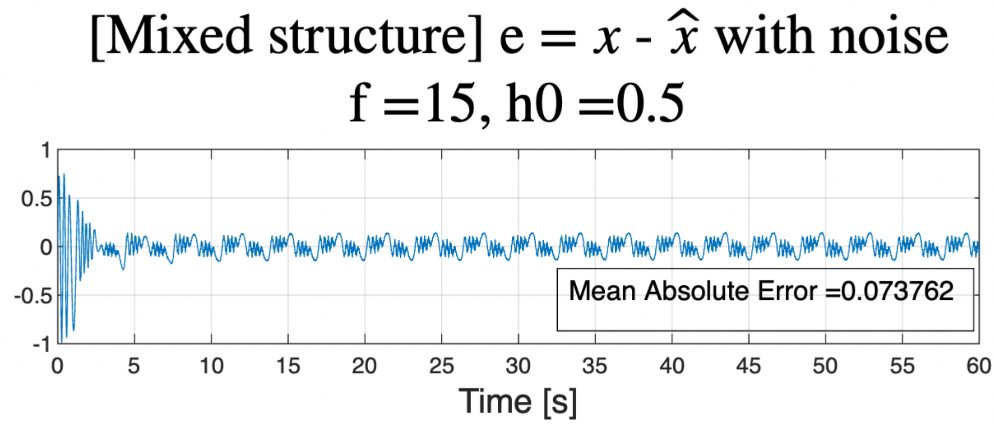


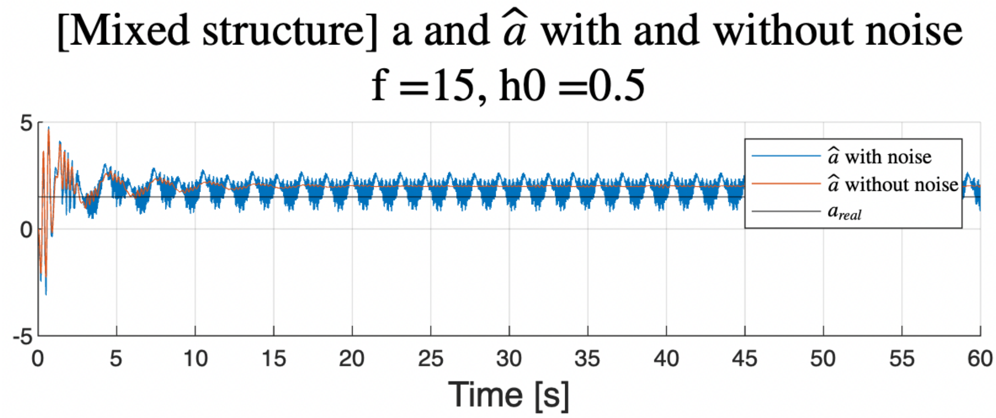


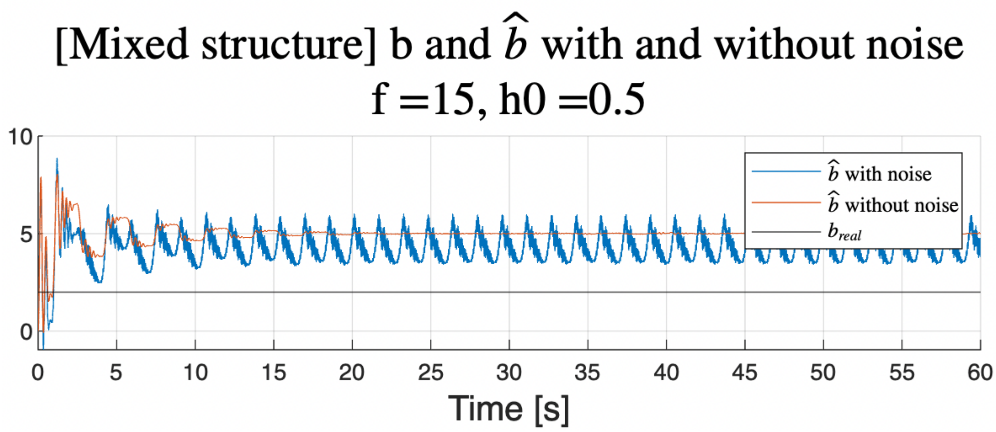
- $\eta_0 = 0.5$ και f =15.




[Mixed structure] e = x - $\hat{x}$ without noise
Mean Absolute Error =0.021121
Time [s]

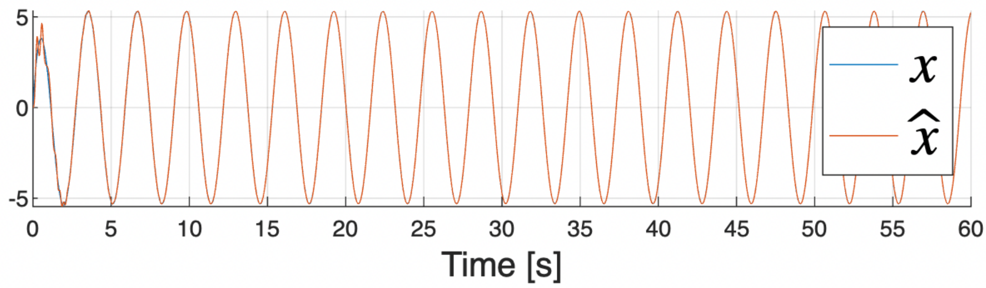

[Mixed structure] e = x - $\hat{x}$ with noise
f =15, h0 =0.5
Mean Absolute Error =0.073762
Time [s]


[Mixed structure] a and $\hat{a}$ with and without noise
f =15, h0 =0.5
$\hat{a}$ with noise
$\hat{a}$ without noise
a_{real}
Time [s]

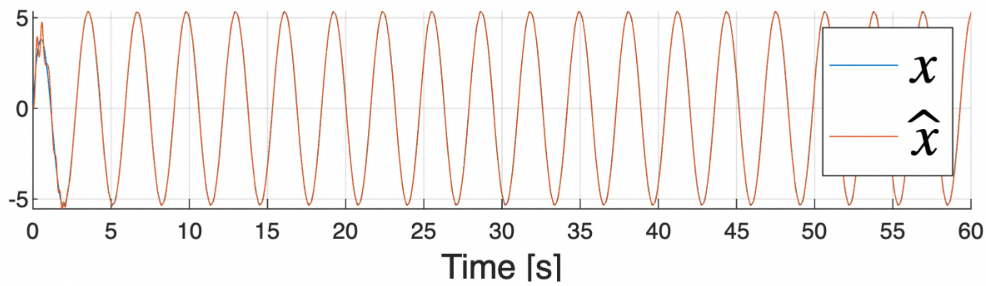

[Mixed structure] b and $\hat{b}$ with and without noise
f =15, h0 =0.5
$\hat{b}$ with noise
$\hat{b}$ without noise
b_{real}
Time [s]

- $\eta_0 = 0.5$ και f =60.

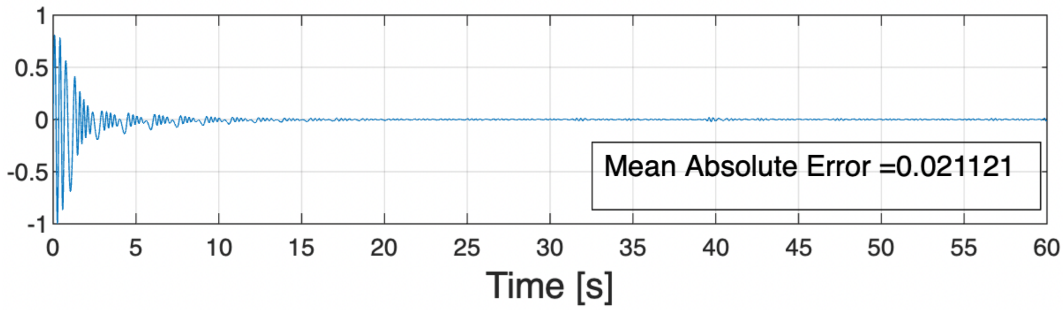
[Mixed structure] x and $\hat{x}$ without noise



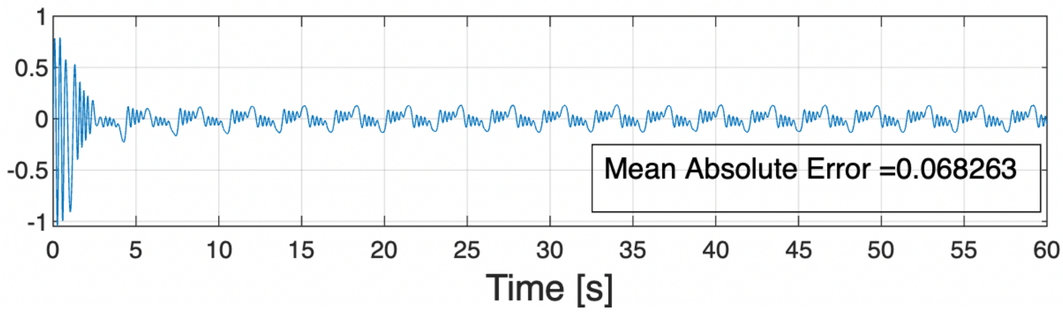
[Mixed structure] x and $\hat{x}$ with noise
f =60, h0 =0.5

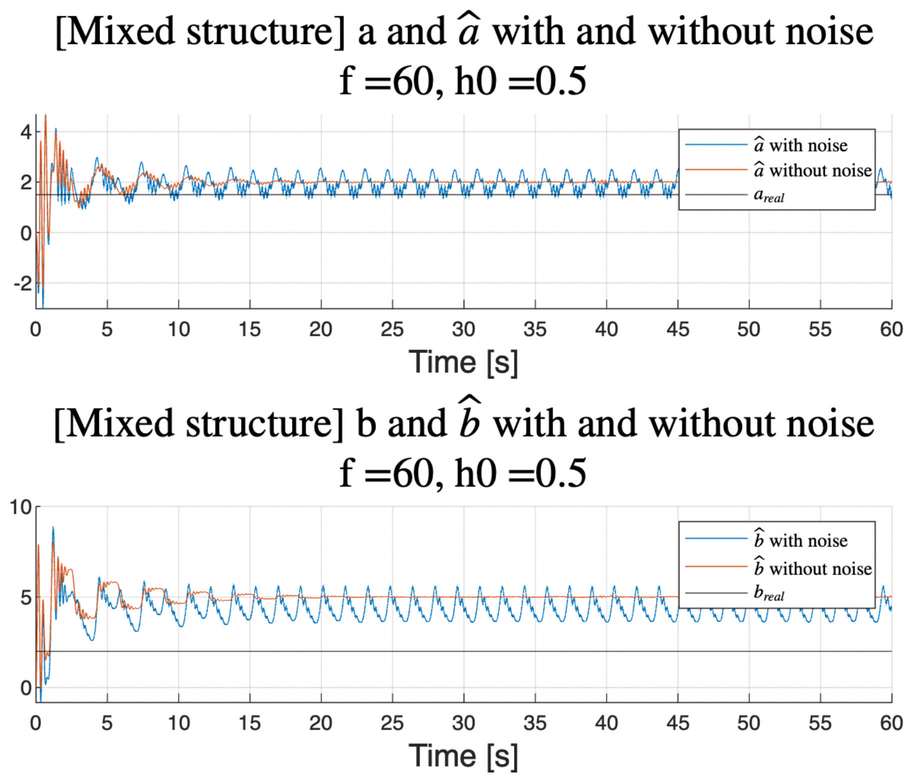


[Mixed structure] e = x - $\hat{x}$ without noise

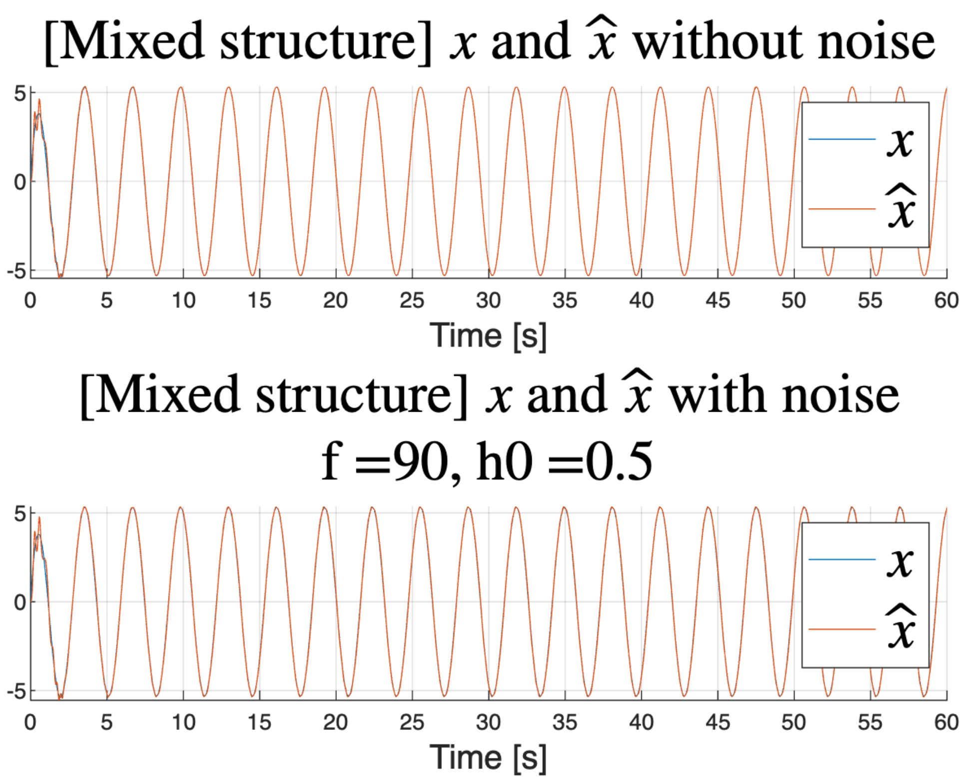


[Mixed structure] e = x - $\hat{x}$ with noise
f =60, h0 =0.5

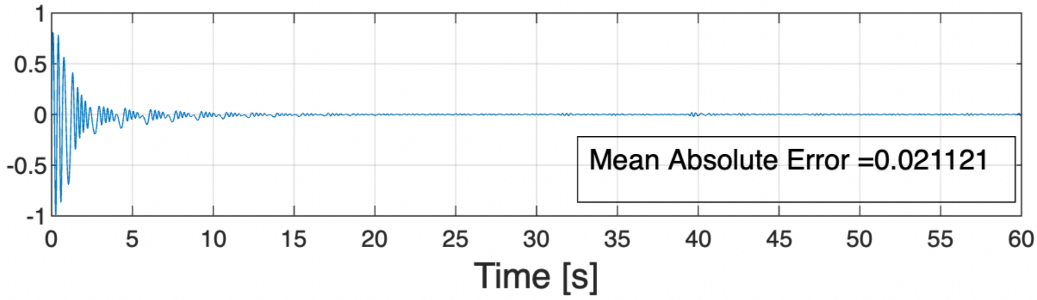




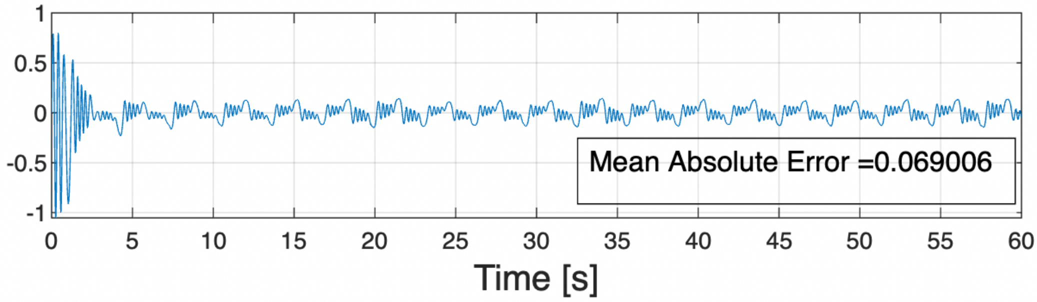
- η_0 = 0.5 και f =90.



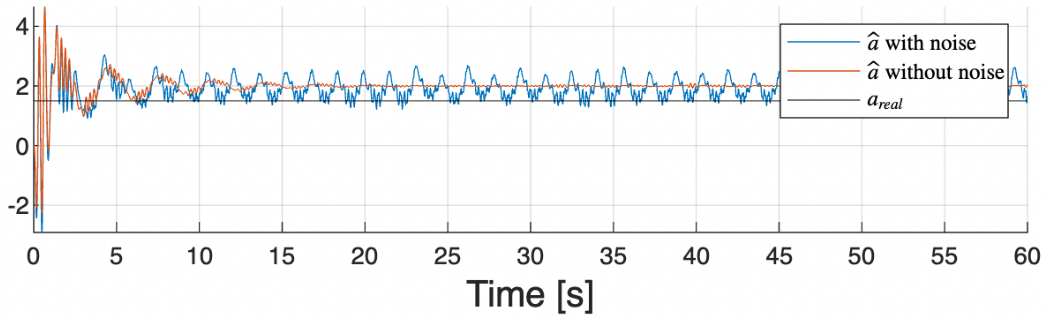
[Mixed structure] e = x - $\hat{x}$ without noise



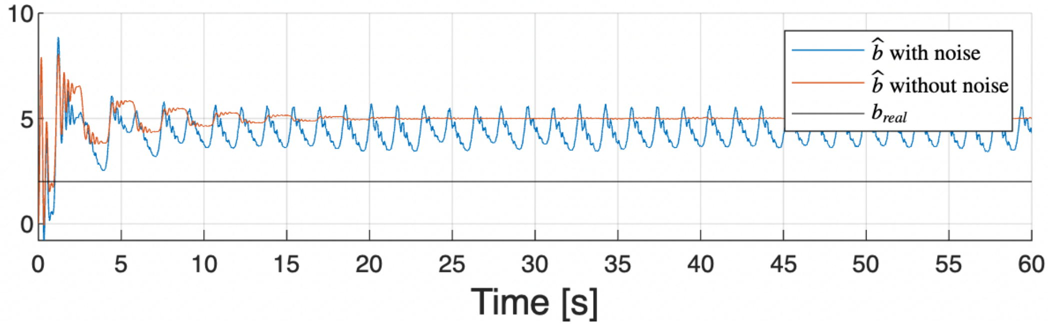
[Mixed structure] e = x - $\hat{x}$ with noise
f =90, h0 =0.5



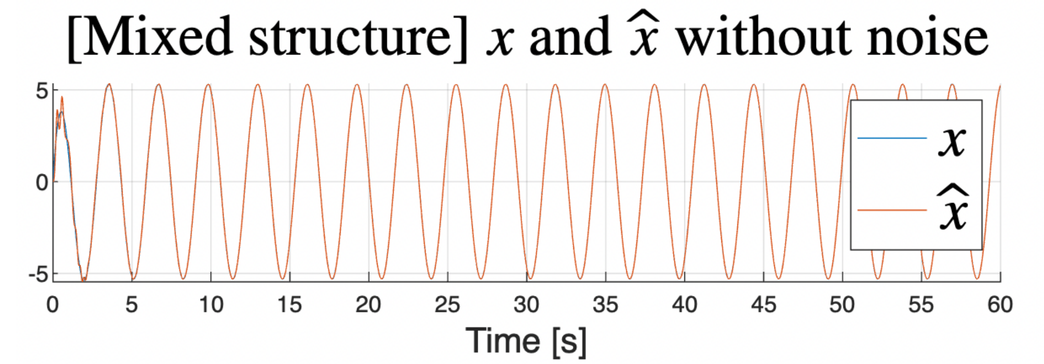
[Mixed structure] a and $\hat{a}$ with and without noise
f =90, h0 =0.5

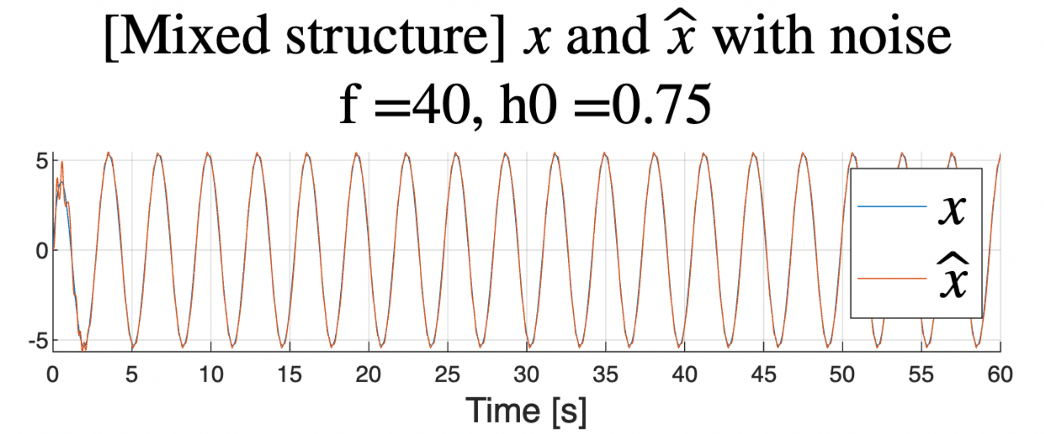


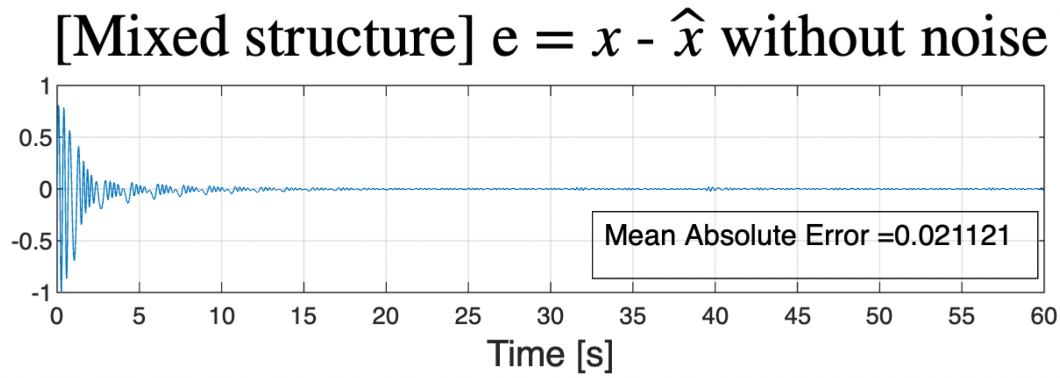
[Mixed structure] b and $\hat{b}$ with and without noise
f =90, h0 =0.5

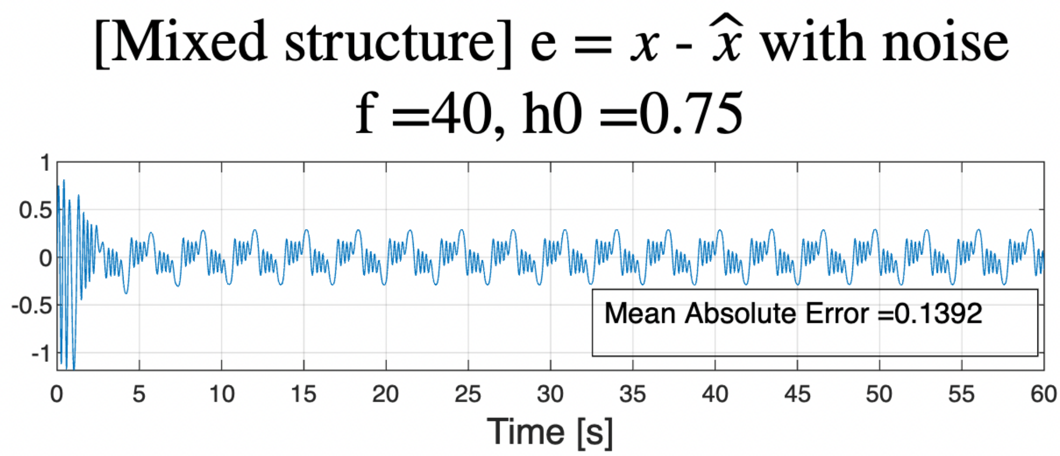


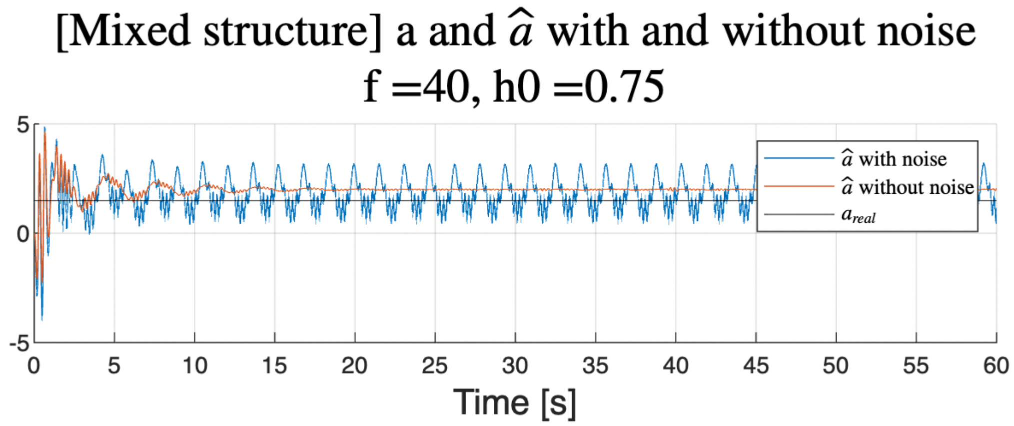
- η_0 = 0.75 και f =40.

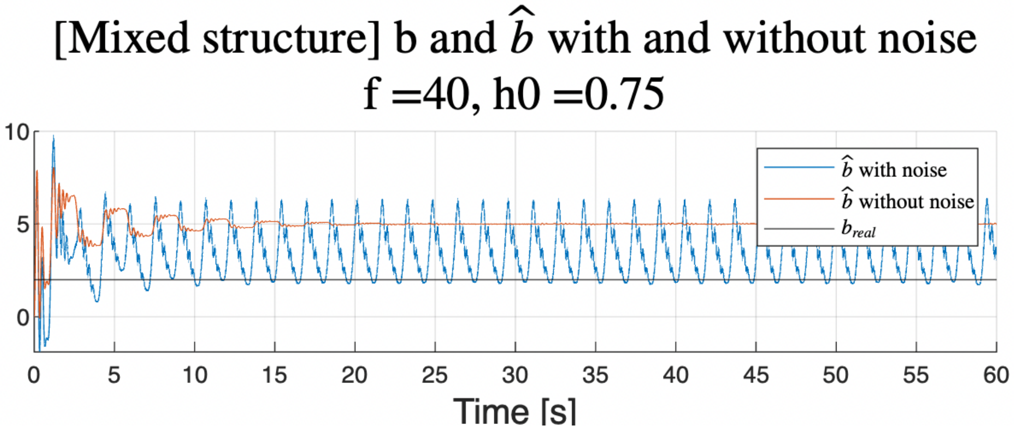




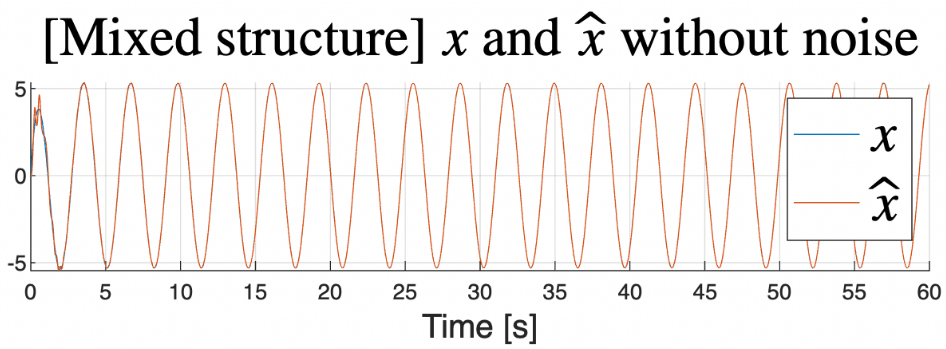


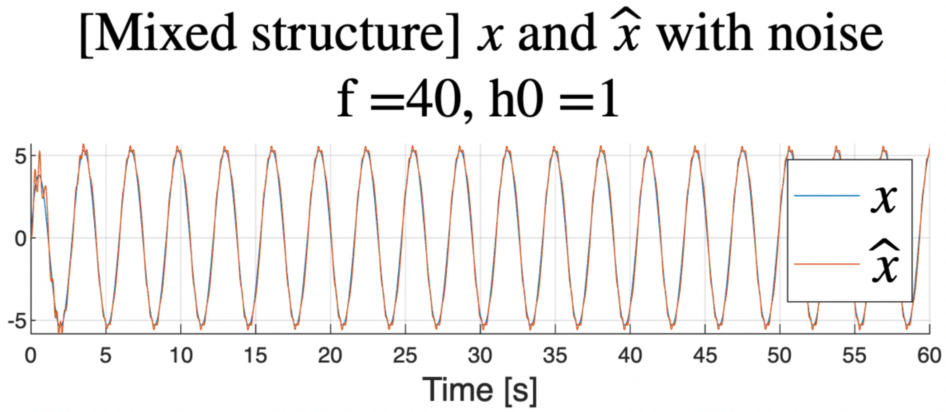


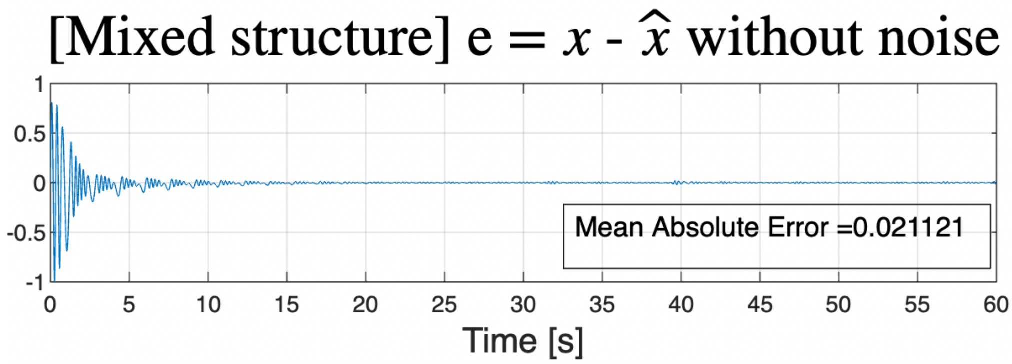


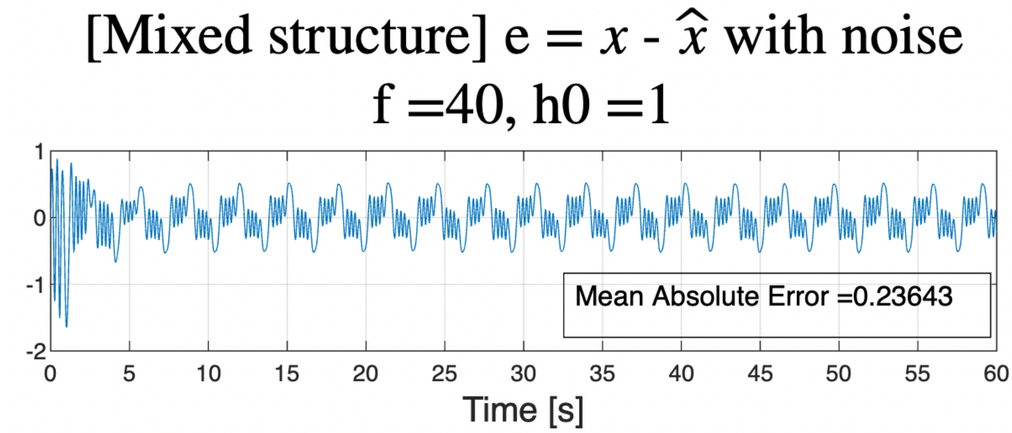


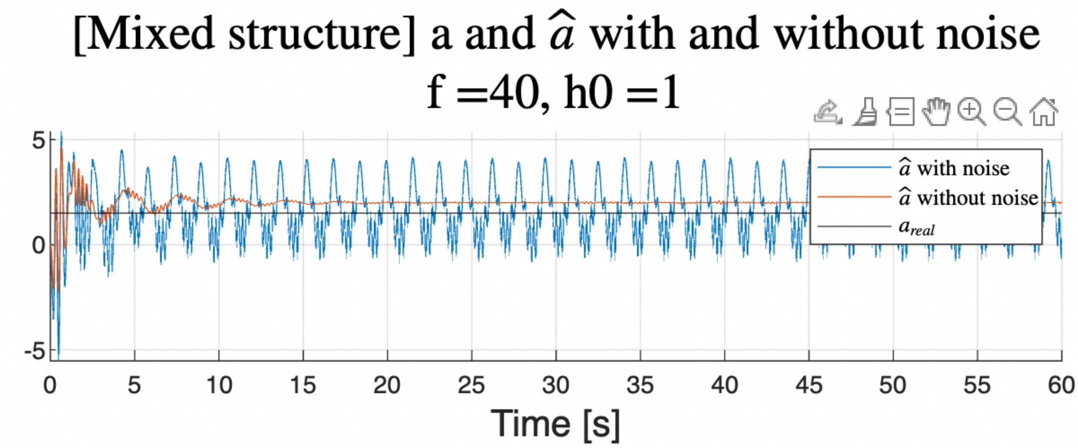
- $\eta_0 = 1$ και f =40.

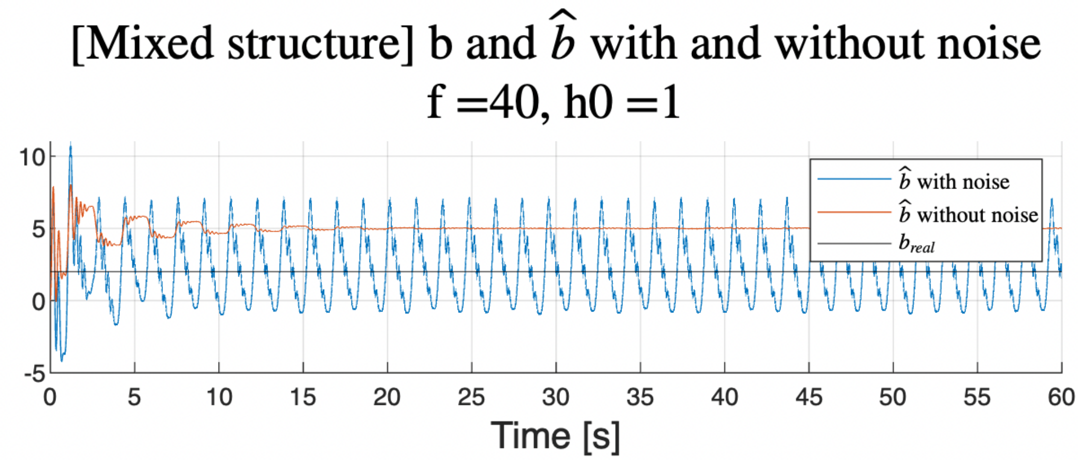





[Mixed structure] e = x - $\hat{x}$ without noise
Mean Absolute Error =0.021121
Time [s]


[Mixed structure] e = x - $\hat{x}$ with noise
f =40, h0 =1
Mean Absolute Error =0.23643
Time [s]


[Mixed structure] a and $\hat{a}$ with and without noise
f =40, h0 =1
$\hat{a}$ with noise
$\hat{a}$ without noise
a_{real}
Time [s]


[Mixed structure] b and $\hat{b}$ with and without noise
f =40, h0 =1
$\hat{b}$ with noise
$\hat{b}$ without noise
b_{real}
Time [s]

Παρατηρήσεις

- Γραφική παράσταση του $e = x - \hat{x}$ με και χωρίς θόρυβο
  Παρατηρώ ότι η αύξηση του η_0 επηρεάζει την εκτίμηση της εξόδου του συστήματος, ιδιαίτερα για μεγαλύτερες τιμές
- Γραφική παράσταση του $e = x - \hat{x}$ με και χωρίς θόρυβο
  Το σφάλμα e για μεγαλύτερες τιμές του η_0 αποκλίνει από το μηδέν και παρουσιάζει ταλαντώσεις με σχετικά μεγάλο πλάτος. Το μέσο απόλυτο σφάλμα αυξάνεται αρκετά με την αύξηση του η_0.
- –Γραφική παράσταση των a,b και $\hat{a}$,$\hat{b}$ με και χωρίς θόρυβο
  Η εκτίμηση των παραμέτρων για μεγαλύτερο η_0 παρουσιάζει ταλαντώσεις γύρω από τις πραγματικές τους τιμές, οι οποίες έχουν μεγάλο πλάτος για μεγάλες τιμές του η_0.

Θέμα 3

Θεωρούμε το σύστημα $\dot{x}$=Ax+Bu , $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0$

Όπου

- x = $[\ x_1 \quad x_2\ ]^T$ η κατάσταση του συστήματος ,
- u(t) = 4sin(πt) + 2sin(8πt) $\forall t \geq 0$ η είσοδος
- και A ≤ 0, B σταθεροί αλλά άγνωστοι πίνακες

Να σχεδιαστεί εκτιμητής πραγματικού χρόνου των άγνωστων πινάκων βασισμένος στη μέθοδο Lyapunov, και να προσομοιωθεί η λειτουργία του. Δημιουργήστε τις γραφικές παραστάσεις των x(t), x̂(t) και της διαφοράς x(t) − x̂(t), καθώς και των εκτιμήσεων Â(t),B̂(t) των A και B, αντίστοιχα.

Έχουμε A= $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ και B = $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Θεωρώντας A= $\begin{bmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} \end{bmatrix}$ και B = $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ και εκτιμητή μικτής δομής κατά Lyapunov:

$\dot{x}$ = −$\widehat{A}$x+ $\widehat{B}$u - $\Theta_m e$

Με Θ_m= $\begin{bmatrix} \theta_{1,1} & \theta_{1,2} \\ \theta_{2,1} & \theta_{2,2} \end{bmatrix}$ αυθαίρετος και σταθερός πίνακας

Για το σφάλμα:

e = x - $\widehat{x} \overset{\frac{d}{dt}}{\Rightarrow} \dot{e} = \dot{x} - \dot{\widehat{x}}$

$\Leftrightarrow \dot{e}$ = Ax+Bu -$\hat{A}\ \widehat{x} + \hat{B}u + \Theta_m e \quad \Leftrightarrow$

$\dot{e} = \Theta_m e\ -$ Ax – $\widetilde{B}\ u$, όπου $\widetilde{B} = \hat{B} - B$

Επιλέγουμε συνάρτηση Lyapunov V(e, $\widetilde{A}\ , B)$, όπου $\widetilde{A} = \hat{A} - A$ όπου P = P^T> 0 η λύση της εξίσωσης Lyapunov:

$$\Theta_m{}^T P + P\Theta_m = -I$$

V(e, $\widetilde{A}\ , B) = e^T P e + tr(\frac{\widetilde{A}^T P \widetilde{A}}{\gamma_1})$ + tr$(\frac{\widetilde{B}^T P \widetilde{B}}{\gamma_2}) \overset{\frac{d}{dt}}{\Rightarrow}$

$\dot{V} = -e^{\dot{T}} e + 2tr(\frac{\widetilde{A}^T P \dot{\widetilde{A}}}{\gamma_1}$ - $\widetilde{A}^T$ Pe x^T+ $\frac{\widetilde{B}^T P \dot{\widetilde{B}}}{\gamma_2}$ - $\widetilde{B}^T$ Pe u^T

Σύμφωνα με το θεώρημα Barbalat και Lyapunov για να συγκλίνει το μοντέλο εκτίμησης παράλληλης δομής:

$$V \geq 0\ και\ \dot{V}\ \leq 0$$

Επιλέγουμε

$\dot{\widetilde{A}} = -\gamma_1 e x^T$

$$\dot{\hat{B}} = -\gamma_1 e u^T$$

Οπότε πληρούνται οι προϋποθέσεις και προκύπτει το παρακάτω σύστημα εξισώσεων κατάστασης:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = \widehat{\alpha_{1,1}} \\ y_4 = \widehat{\alpha_{1,2}} \\ y_5 = \widehat{\alpha_{2,1}} \\ y_6 = \widehat{\alpha_{2,2}} \\ y_7 = \widehat{b_1} \\ y_8 = \widehat{b_2} \\ y_9 = \widehat{x_1} \\ y_{10} = \widehat{x_2} \end{cases} \overset{\frac{d}{dt}}{\Rightarrow}$$

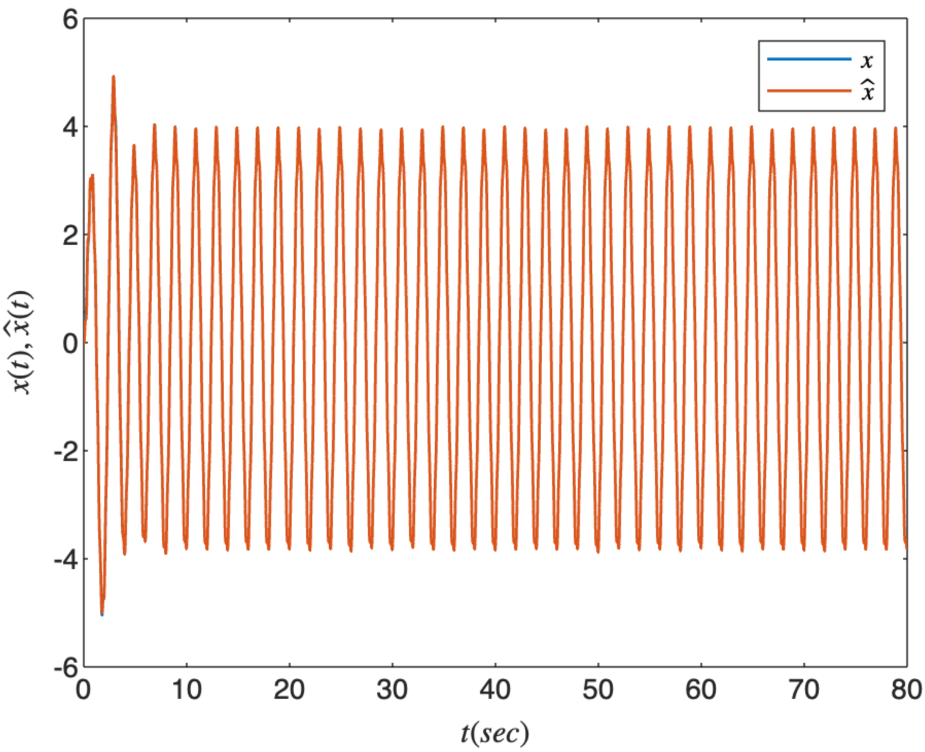
$$\begin{cases} \dot{y_1} = \dot{x_1} = \alpha_{1,1}\, x_1 + \alpha_{1,2}\, x_2 + b_1 u \\ \dot{y_2} = \dot{x_2} = \alpha_{2,1}\, x_1 + \alpha_{2,2}\, x_2 + b_2 u \\ \dot{y_3} = \dot{\widehat{\alpha_{1,1}}} = \gamma_1 e_1 x_1 = \gamma_1 e_1 y_1 \\ \dot{y_4} = \dot{\widehat{\alpha_{1,2}}} = \gamma_1 e_1 x_2 = \gamma_1 e_1 y_2 \\ \dot{y_5} = \dot{\widehat{\alpha_{2,1}}} = \gamma_1 e_2 x_1 = \gamma_1 e_2 y_1 \\ \dot{y_6} = \dot{\widehat{\alpha_{2,2}}} = \gamma_1 e_2 x_2 = \gamma_1 e_2 y_2 \\ \dot{y_7} = \dot{\widehat{b_1}} = \gamma_2 e_1 u \\ \dot{y_8} = \dot{\widehat{b_2}} = \gamma_2 e_2 u \\ \dot{y_9} = \dot{\widehat{x_1}} = \widehat{\alpha_{1,1}}\, x_1 + \widehat{\alpha_{1,2}}\, x_2 + \widehat{b_1} u - \left(\theta_{1,1} e_1 + \theta_{1,2} e_2\right) = y_3 x_1 + y_4 x_2 + y_7 u \\ -\left(\theta_{1,1} e_1 + \theta_{1,2} e_2\right) \\ \dot{y_{10}} = \widehat{\alpha_{2,1}}\, x_1 + \widehat{\alpha_{2,2}}\, x_2 + \widehat{b_2} u - \left(\theta_{2,1} e_1 + \theta_{2,2} e_2\right) = y_5 x_1 + y_6 x_2 + y_8 u \\ -\left(\theta_{2,1} e_1 + \theta_{2,2} e_2\right) \end{cases}$$

Με e = $[\, e_1 \quad e_2 \,]^T = [\, x_1 - \widehat{x_1} \quad x_2 - \widehat{x_2} \,]^T =$

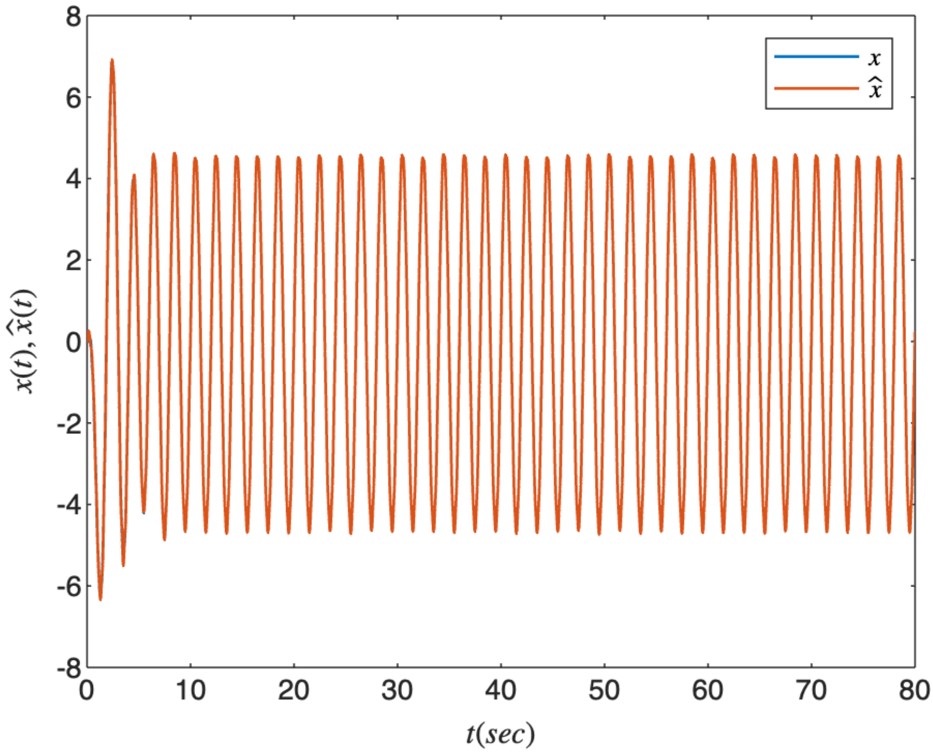
$[\, y_1 - y_9 \quad y_2 - y_{10} \,]^T$

Προσομοιώνουμε σε MATLAB θέτοντας ως σταθερές

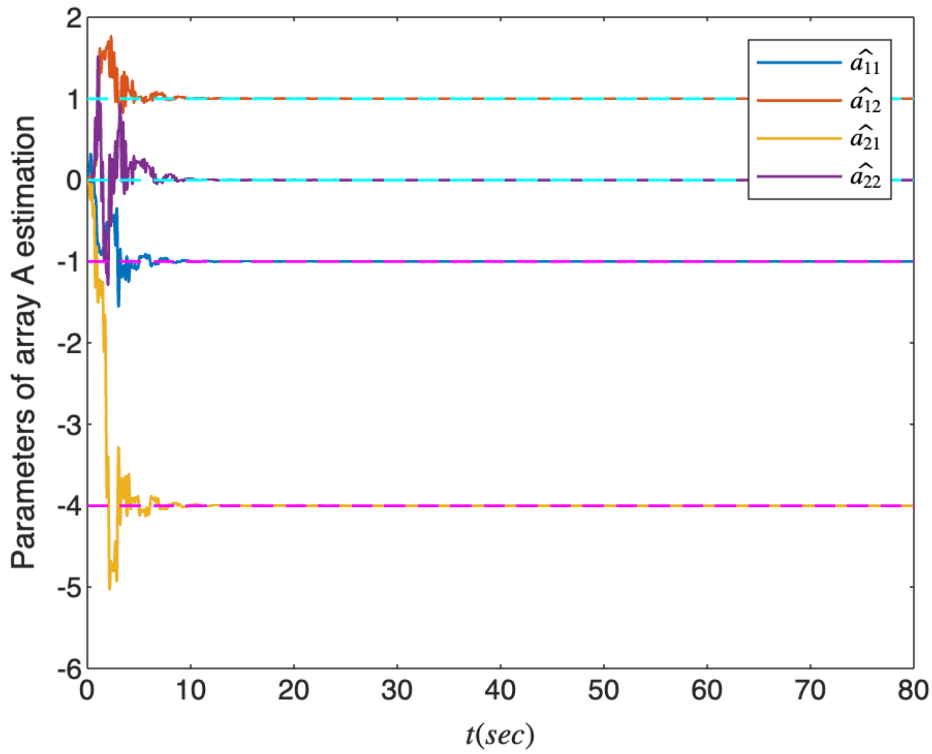
- A= $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$
- B= $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$
- $\gamma_1 = 15\,, \gamma_2 = 2$
- Θ_m= $\begin{bmatrix} -20 & -13 \\ -20 & -18 \end{bmatrix}$
- u(t) = 4sin(πt) + 2sin(8πt)



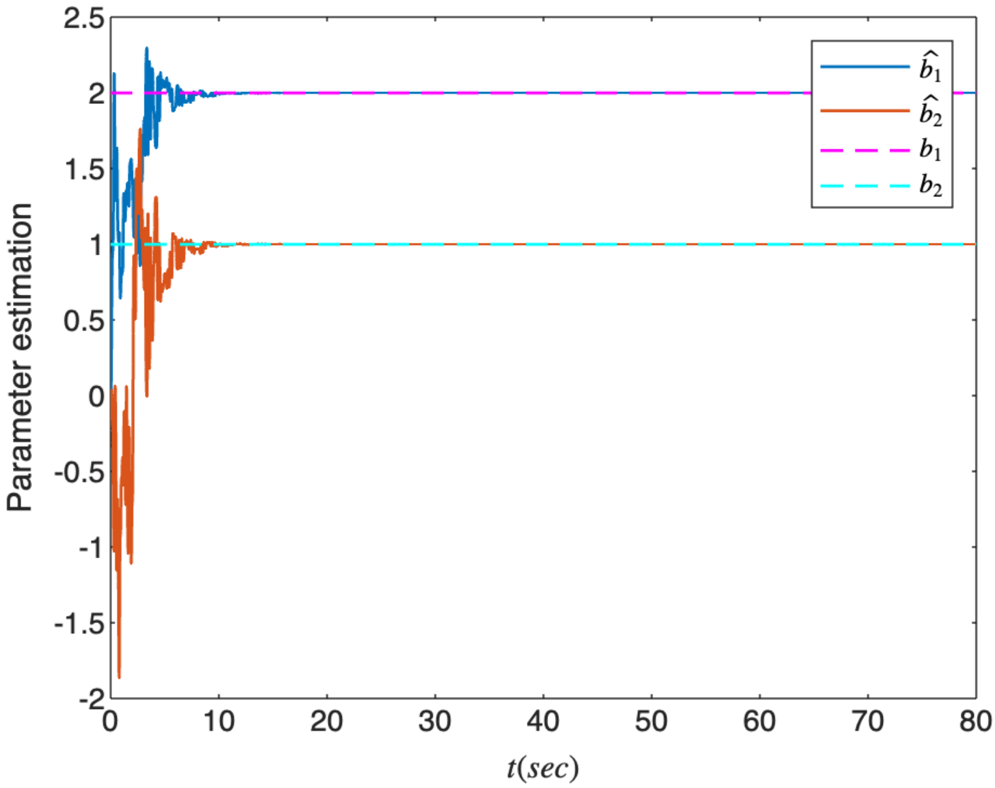
Πραγματική και Εκτιμώμενη Έξοδος του Συστήματος $x_1(t)$, $\hat{x}_1(t)$.



Πραγματική και εκτιμωμένη Έξοδος του Συστήματος $x_2(t)$, $\hat{x}_2(t)$.



Πραγματικές και Εκτιμώμενες τιμές πίνακα Α.



Πραγματικές και Εκτιμώμενες τιμές πίνακα Α.

Η εκτίμηση της εξόδου του συστήματος τείνει να συγκλίνει στην πραγματική έξοδο, με τη διαφορά τους να ναι πολύ μικρή στην αρχή και σύντομα να συγκλίνει στο μηδέν.

Οι εκτιμήσεις των παραμέτρων των πινάκων πολύ γρήγορα συγκλίνουν στις πραγματικές τιμές, και όπως φαίνεται καταλήγουν να ταυτίζονται.

Θέμα 4

$\dot{x}= -\theta_1{}^{*}$f(x) + $\theta_2{}^{*}$u   x(0) = 0 (3)

όπου ξ είναι η κατάσταση του συστήματος, u(t) = 1.5sin(2πt)e^{-3t},∀t ≥ 0, είναι η είσοδος, και $\theta_1{}^{*}$> 0, $\theta_2{}^{*}$> 0 σταθερές αλλά άγνωστες παράμετροι. Θεωρήστε ότι i) f(x) = $\frac{1}{2}$sin(x)x και ii) f(x) = $-\frac{1}{4}x^2$. Να σχεδιαστεί εκτιμητής πραγματικού χρόνου των άγνωστων παραμέτρων βασισμένος στη μέθοδο Lyapunov και να προσομοιωθεί η λειτουργία του. Δημιουργήστε τις γραφικές παραστάσεις των x(t), xˆ(t) και της διαφοράς x(t) − xˆ(t), καθώς και των εκτιμήσεων $\widehat{\theta_1(t)}$, $\widehat{\theta_2(t)}$, των $\theta_1{}^{*}$ και $\theta_1{}^{*}$, αντίστοιχα. Τι διαφορές παρατηρείτε μεταξύ των δύο περιπτώσεων· Θεωρήστε για τα πειράματά σας ότι $\theta_1{}^{*}$ =0.5και $\theta_2{}^{*}$=2.

Ψάχνουμε τους αναδρομικούς νόμους εκτίμησης των σταθερών αλλά και γνωστών παράμετρων $\theta_1{}^{*}$, $\theta_2{}^{*}$.

$\dot{x}= -\theta_1{}^{*}$f(x) + $\theta_2{}^{*}$u x(0) = 0 (3)

Το σύστημα είναι μη γραμμικό συνεπώς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μόνο την μεικτή τοπολογία . Κατά τον ίδιο τρόπο με το Θέμα 2 προκύπτει το εξής σύστημα αναγνώρισης:

$\dot{x}$ = $-\widehat{\theta_1} f$(x)+ $\widehat{\theta_2}$u - $\theta_m(x-\hat{x})$, όπου
$\widehat{\theta_1}$, $\widehat{\theta_2}$ *οι εκτιμήσεις των* $\theta_1{}^{*}$, $\theta_2{}^{*}$ και $\theta_m > 0$

Για το σφάλμα :

e = x - $\hat{x} \overset{\frac{d}{dt}}{\Rightarrow} \dot{e} = \dot{x} - \dot{\hat{x}}$

$e = -\theta_m e + \widetilde{\theta_1} f$(x) – $\widetilde{\theta_2}\, u$, όπου $\widetilde{\theta_1} = \widehat{\theta_1} - \theta_1{}^{*}$, $\widetilde{\theta_2} = \widehat{\theta_2} - \theta_2{}^{*}$

Ορίζουμε συνάρτηση Lyapunov:

$$V(\hat{\theta}) = \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{2\gamma_1}\overset{\frown}{\theta_1}^2 + \frac{1}{2\gamma_2}\overset{\frown}{\theta_2}^2 \overset{\frac{d}{dt}}{\Rightarrow}$$

$$V(\dot{\hat{\theta}}) = e\,\dot{e} + \frac{1}{\gamma_1}\overset{\frown}{\theta_1}\ \dot{\overset{\frown}{\theta_1}} + \frac{1}{\gamma_2}\overset{\frown}{\theta_2}\ \dot{\overset{\frown}{\theta_2}}$$

$$V(\dot{\hat{\theta}}) = -\theta_1{}^* e^2 + \overset{\frown}{\theta_1}\ \hat{x}\ \dot{e} - \overset{\frown}{\theta_2}\, ue + \frac{1}{\gamma_1}\overset{\frown}{\theta_1}\ \dot{\overset{\frown}{\theta_1}} + \frac{1}{\gamma_2}\overset{\frown}{\theta_2}\ \dot{\overset{\frown}{\theta_2}}$$

Για να συγκλίνει το μοντέλο μεικτής δομής προς το πραγματικό σύστημα και σύμφωνα με τα θεωρήματα Barbalat και Lyapunov, θέλουμε :

$$V(\hat{\theta}) \geq 0\ \kappa\alpha\iota\ V(\dot{\hat{\theta}}) \leq 0$$

Οπότε με βάση τους συντελεστές αορίστου προσήμου:

$\dot{\widehat{\theta_1}}$ = -ef(x)

$\dot{\widehat{\theta_2}}$ = eu

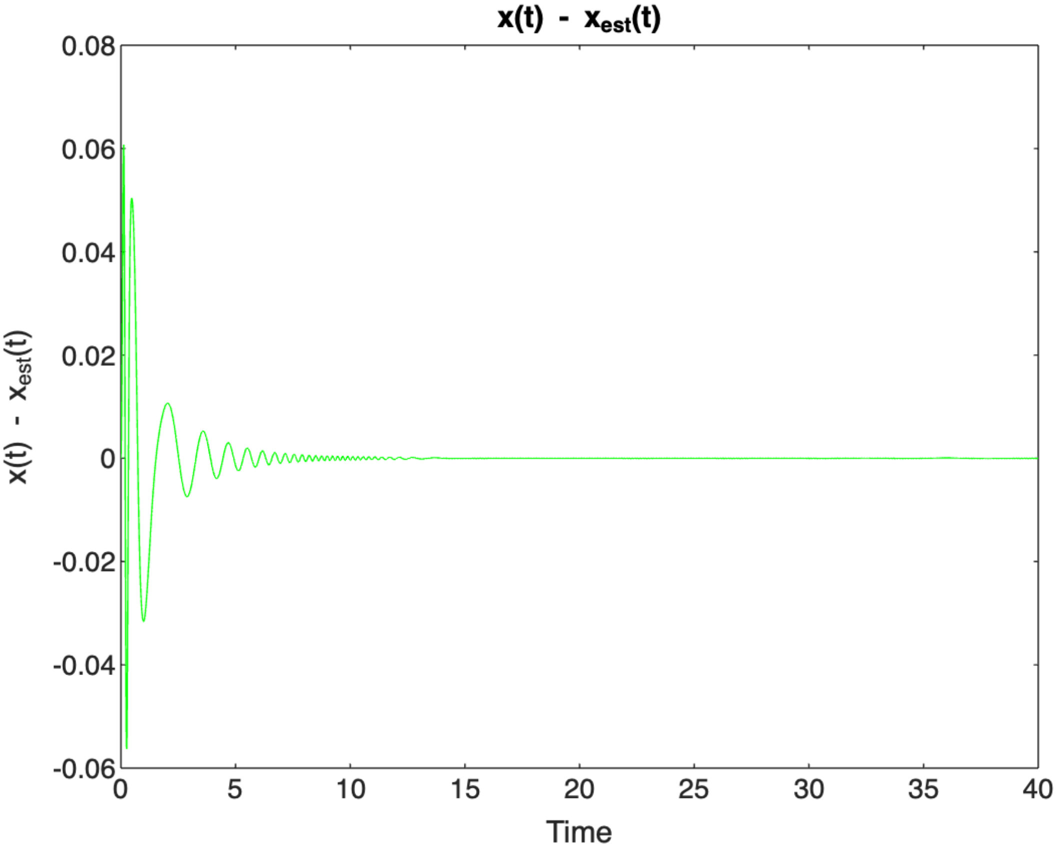
Και οπότε η $\dot{V} = -\theta_m e^2 \leq 0$ (4)

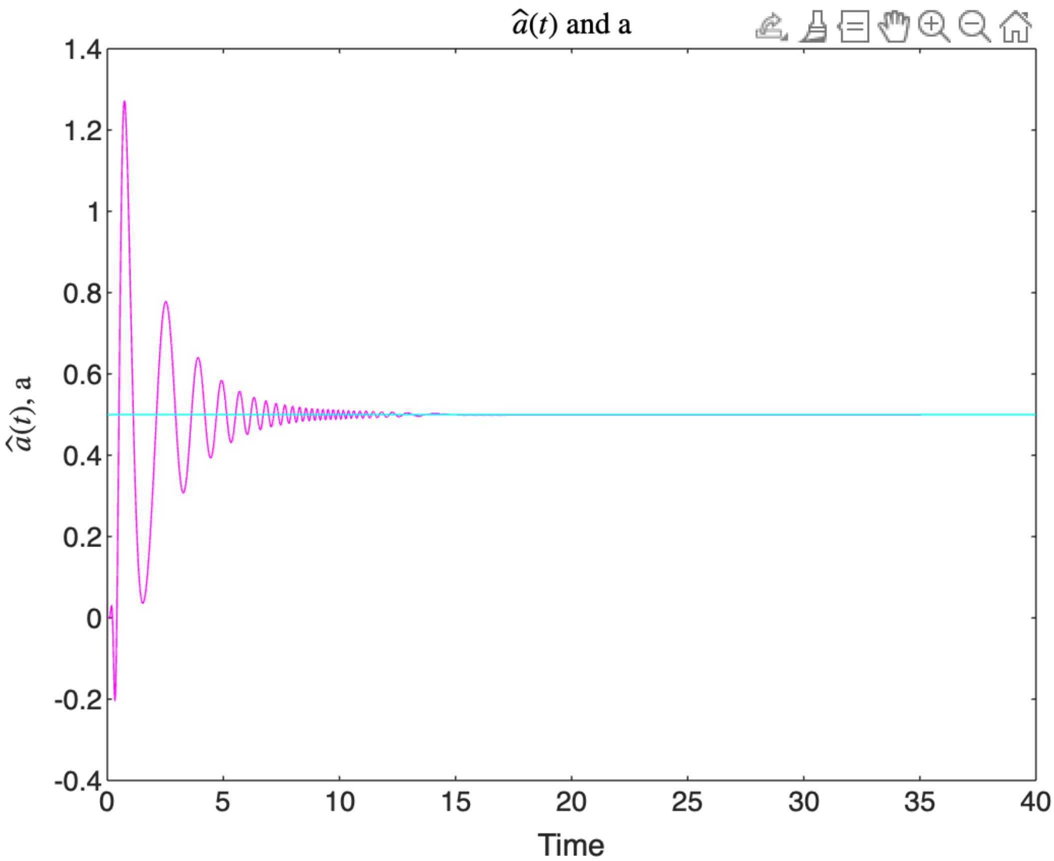
Παρατηρούμε, ότι η (4) είναι της ίδιας μορφής με την περίπτωση του γραμμικού συστήματος που αναλύθηκε παραπάνω. Με την επιπλέον υπόθεση ότι f(x) ∈ L_∞ για x ∈ L_∞ τα αποτελέσματα του συμπεράσματος από το γραμμικό σύστημα εξακολουθούν να ισχύουν.

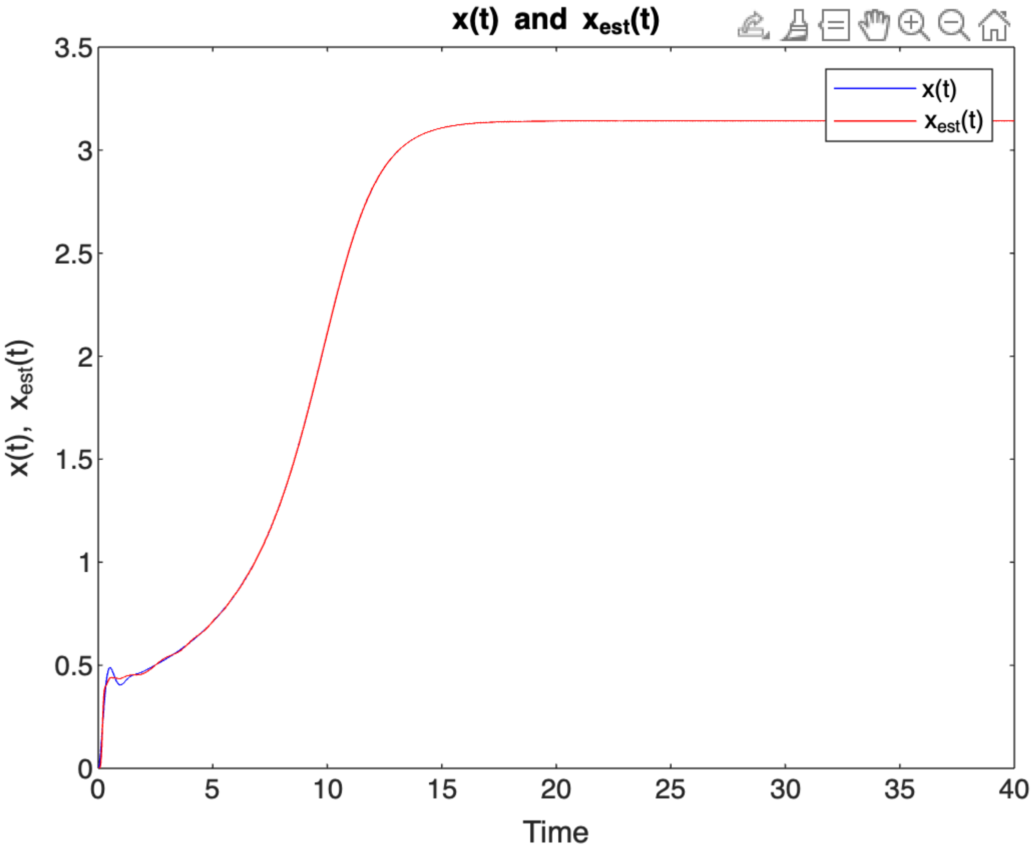
Καταλήγουμε στις παρακάτω εξισώσεις κατάστασης:

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \hat{x} \\ x_3 = \widehat{\theta_1} \\ x_4 = \widehat{\theta_2} \end{cases}$$

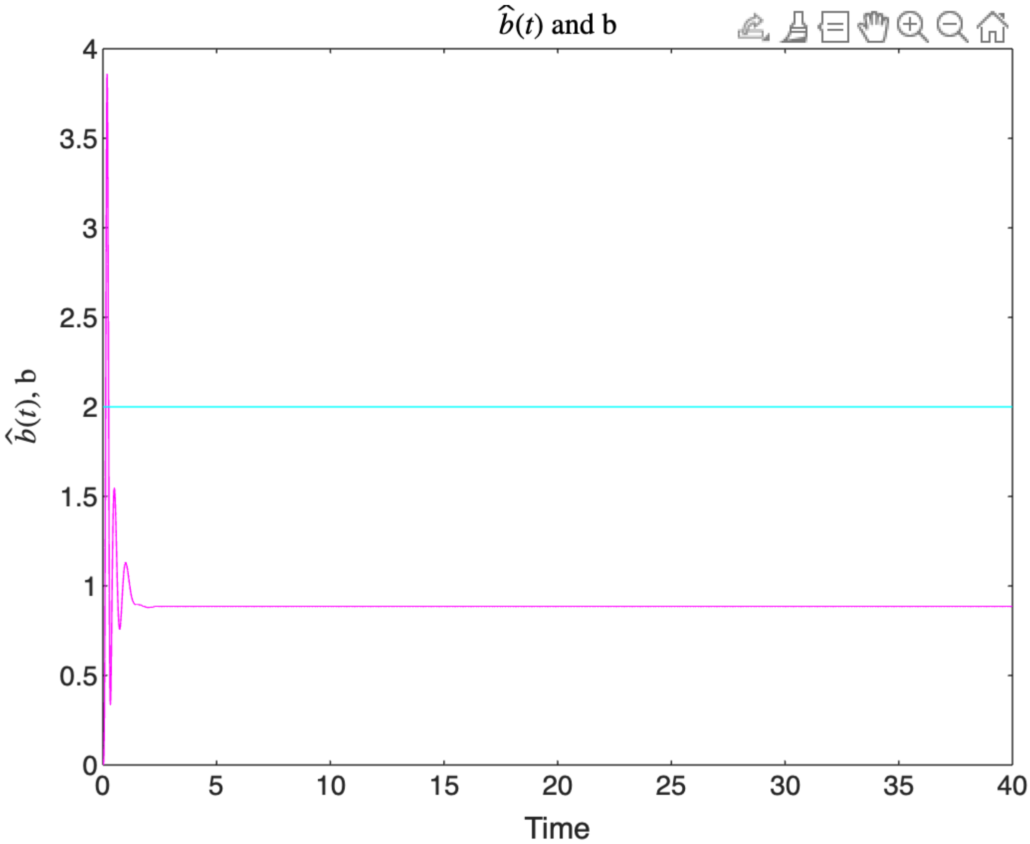
$$\overset{\frac{d}{dt}}{\Rightarrow} \begin{cases} \dot{x_1} = \dot{x} = -\theta_1{}^*\mathrm{f(x)} + \theta_2{}^*\mathrm{u} \\ \dot{x_2} = \dot{\hat{x}} = -\widehat{\theta_1 f(x)} + \widehat{\theta_2}u + \theta_m e = -x_3 f(x) + x_4 u + \theta_m(x_1 - x_2) \\ \dot{x_3} = \dot{\widehat{\theta_1}} = -\gamma_1 e f(x) \\ \dot{x_4} = \dot{\widehat{\theta_2}} = \gamma_2 e u \end{cases}$$


x(t) - x_est(t)
0.08
0.06
0.04
0.02
0
-0.02
-0.04
-0.06
x(t) - x_est(t)
0
5
10
15
20
25
30
35
40
Time


â(t) and a
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
â(t), a
0
5
10
15
20
25
30
35
40
Time



x(t) and x_est(t)
x(t)
x_est(t)
x(t), x_est(t)
Time
0
5
10
15
20
25
30
35
40
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5



$\hat{b}(t)$ and b
$\hat{b}(t)$, b
Time
0
5
10
15
20
25
30
35
40
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4