Exercicio2

November 1, 2020

Trabalho Realizado Por:

Carlos Ferreira - a87953 Daniel Ribeiro - a87994

Exercício 2

a) Provar que não existe solução do problema, usando Z3 em

i.Lógica Proposicional:

A variável $x_{p,pl}$ determina se o pombo p está no poleiro pl O número total de pombos será P e o número total de poleiros será Pl = P-1

Cada pombo p tem de estar em um poleiro pl:

$$\forall_{p<P} \quad \bigvee_{pl=0}^{Pl-1} x_{p,pl}$$

Cada poleiro apenas contém 1 pombo:

$$\forall_{pl<Pl} \quad \left(\bigwedge_{p=0}^{P-1} x_{p,pl} \rightarrow \bigwedge_{p'=p+1}^{P-1} \neg x_{p',pl} \right)$$

[1]:
```
from z3 import *
from timeit import timeit
import matplotlib.pyplot as plt

def pombos (N):

    s = Solver()
    o = 0
    r = {}

    if N > 0:

        for pombo in range (N):

            r [pombo] = {}
            o+=1
            for poleiro in range (N-1):
```

```python
                r[pombo][poleiro] = Bool ("pombo " + str(pombo) + " esta no␣
↪poleiro " + str(poleiro))
                o += 1

        # N² - N + N   O(N²)

        for pombo in range(N):
            o = o + N - 1
            s.add(Or([r[pombo][poleiro] for poleiro in range(N-1)])) # pombo␣
↪tem que estar num poleiro

        # N² - N   O(N²)

        for poleiro in range(N-1):
            for pombo in range(N):
                o = o + N - pombo + 1
                s.add(Implies(r[pombo][poleiro],And([Not(r[j][poleiro]) for j␣
↪in range (pombo + 1,N)]))) # cada poleiro contem apenas 1 pombo
         # (N - 1) * N * N/2 = (N² - N) * N/2 = N³/2 - N²/2   O(N³)

        if s.check() == sat:
            m = s.model()
            print ("Possivel")
        else:
            print ("Nao possivel")
            print ("Nº de operações:" + str(o))

    else:

        print ("Valor de n tem de ser maior de 0")

    return o
```

[2]:
```python
#Vamos testar para os exemplos com o numero de pombos = 6 e numero de pombos =␣
↪8:

for i in range (10):
    pombos(i)
```

```
Valor de n tem de ser maior de 0
Nao possivel
Nº de operações:1
Nao possivel
Nº de operações:11
```

```
Nao possivel
Nº de operações:33
Nao possivel
Nº de operações:70
Nao possivel
Nº de operações:125
Nao possivel
Nº de operações:201
Nao possivel
Nº de operações:301
Nao possivel
Nº de operações:428
Nao possivel
Nº de operações:585
```

ii. Provar que não existe solução usando lógica inteira linear:

Existem N pombos e N-1 poleiros de pombos. Cada pombo ocupa totalmente um poleiro. Pretende-se alocar cada pombo a um poleiro próprio.

$$\begin{cases} Pombos = N \\ Poleiros = N - 1 \\ 0 \leq x_{pombo,poleiro} \leq 1, \quad \text{onde (} x_{pombo,poleiro} = 1) <=> \text{pombo esta no poleiro} \end{cases}$$

Como todos os pombos estão obrigatoriamente num poleiro:

$$\sum_{pombo<N,poleiro<N-1} x_{pombo,poleiro} = N$$

Cada poleiro so pode ter 1 pombo ou nenhum:

$$\forall_{poleiro<N-1} \quad \sum_{pombo<N} x_{pombo,poleiro} \leq 1$$

[3]:
```
def pombos_inteiro_linear (N):

    o = 0
    if N > 0:

        X = {} # poleiro do pombo respetivo

        for pombo in range (N):
            X[pombo] = {}
            o+=1
            for poleiro in range (N - 1):
                X[pombo][poleiro] = Int ("pombo esta no poleiro " +␣
↪str(poleiro))
                o+=1

        # N² - N + N   O(N²)
```

```
        s = Solver()

        # como todos os pombos têm que estar num poleiro o somatario tem que␣
↪dar N

        s.add(Sum([X[p][pol] for p in range (N) for pol in range (N-1)]) == N)␣
↪# N² - N   O(N²)
        o += N * (N-1)

        # cada poleiro pode ter 0 ou nehum 1 passaros

        for poleiro in range (N - 1) :
                s.add(Sum([X[pombo][poleiro] for pombo in range (N)]) <= 1)
                o += N

        # N² - N   O(N²)

        r = s.check()

        if r==sat :
            m = s.model()
            print("Possivel:")
        else:
            print("Nao possivel")
            print ("Nº de operações:" + str(o))
    else:

        print ("Valor de n tem de ser maior de 0")

    return o
```

[4]:
```
#Vamos testar alguns exemplos:

for i in range (10):
    pombos_inteiro_linear(i)
```

```
Valor de n tem de ser maior de 0
Nao possivel
Nº de operações:1
Nao possivel
Nº de operações:8
Nao possivel
Nº de operações:21
Nao possivel
Nº de operações:40
```

```
Nao possivel
Nº de operações:65
Nao possivel
Nº de operações:96
Nao possivel
Nº de operações:133
Nao possivel
Nº de operações:176
Nao possivel
Nº de operações:225
```

B) Analisar a complexidade de cada uma das provas em função de N de forma empírica. Como sugestão pode começar por fazer um "plot" do tempo de execução

[5]:
```python
import sys, os

# Disable
def blockPrint():
    sys.stdout = open(os.devnull, 'w')

# Restore
def enablePrint():
    sys.stdout = sys.stdout



blockPrint()

import numpy as np


def graph(formula, x_range , l ):
    x = np.array(x_range)
    y = eval(formula)
    plt.plot(x, y ,label = l)


def tempos (n, f):

    t = []

    for i in range (1,n+1):

        time = timeit(setup="from __main__ import " + f ,\
                stmt= f +"("+ str(i) +")",number=1)
        t.append(time)

    return t
```

Análise

I) Lógica Proposicional

A função pombos , pelo método de lógica proposicional tem complexidade assimptótica $O(N^3)$, é possivel verificar com a contagem das operações efetuadas em cada chamada da função que estas se aproximam graficamente de n^3 , mas também com as aproximações que fizemos ao longo das funções do que poderia ser o valor polinomial de operações efetuadas a cada conjunto de ciclos iterativos.

Melhor caso : $n < 1$, n sendo número de pombos $O(1)$

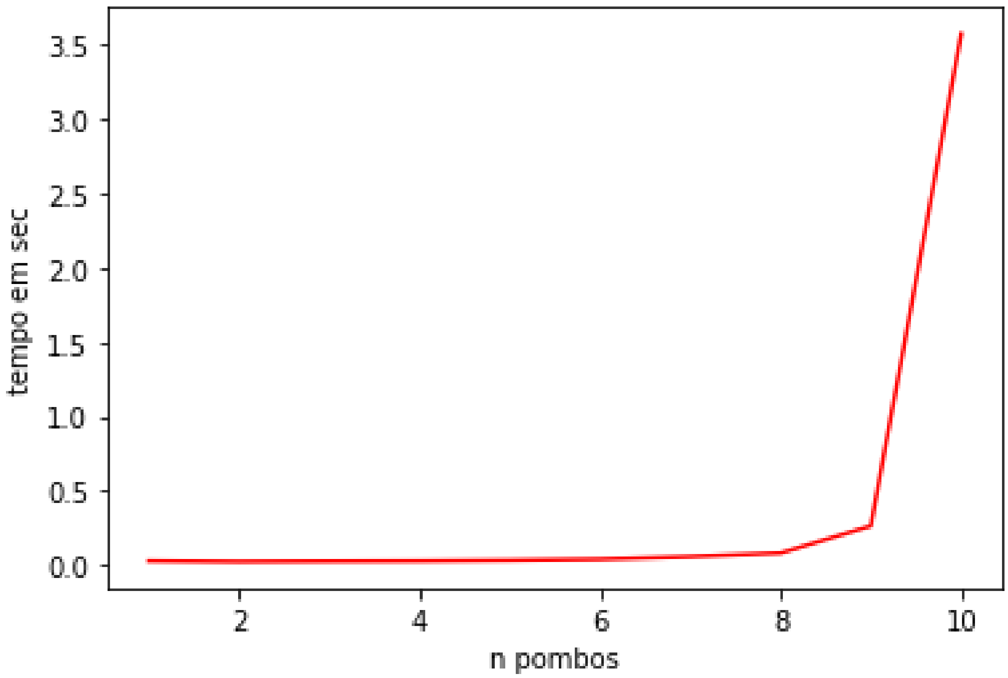
Pior caso : $n \geq 1$, n sendo número de pombos $O(N^3)$

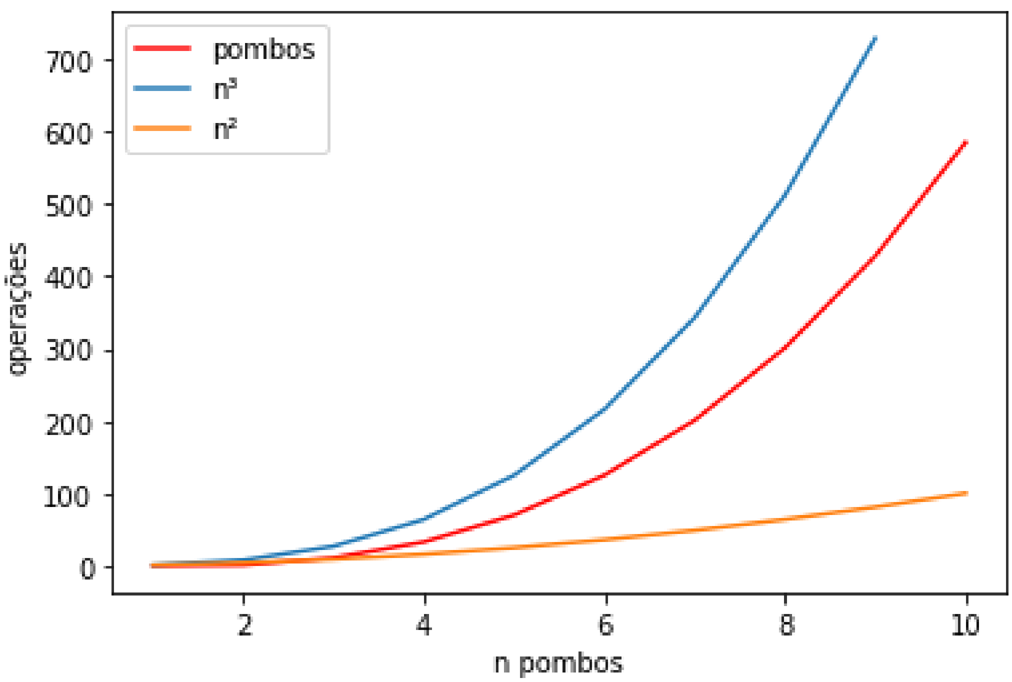
[6]:
```
t1 = tempos (10,"pombos" )
n = range (1,11)
plt.plot(n, t1, 'r')
plt.xlabel('n pombos')
plt.ylabel('tempo em sec')
plt.show()



l = []
for i in range (10):
    l.append(pombos(i))

plt.plot(n, l,'r', label = "pombos")
plt.xlabel('n pombos')
plt.ylabel('operações')
graph('x**3', range(1, 10) , "n³")
graph('x**2', range(1, 11) , "n²")
plt.legend(loc="upper left")
plt.show()
```





II) Lógica Inteiro Linear

A função pombos_inteiro_linear , pelo método de lógica linear inteira tem complexidade assimptótica $O(N^2)$, e tal como a função anterior, é possivel verificar com a contagem das operações e com as estimativas que efetuamos do possível número de operações.

Melhor caso : n < 1 , n sendo número de pombos O(1)

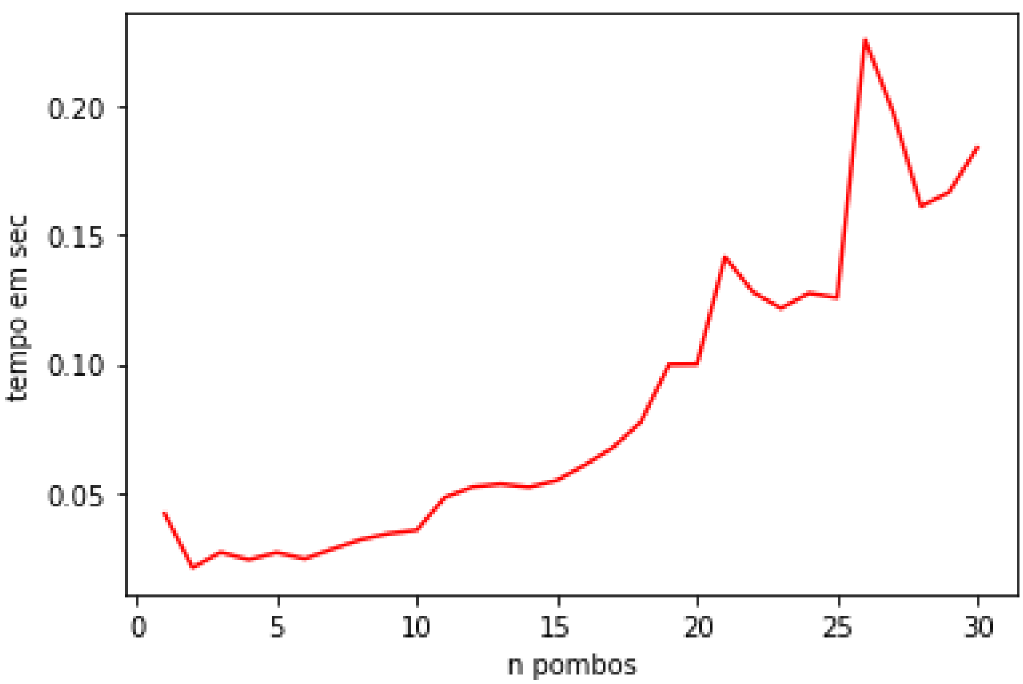
Pior caso : $n \geq 1$, n sendo número de pombos $O(N^2)$

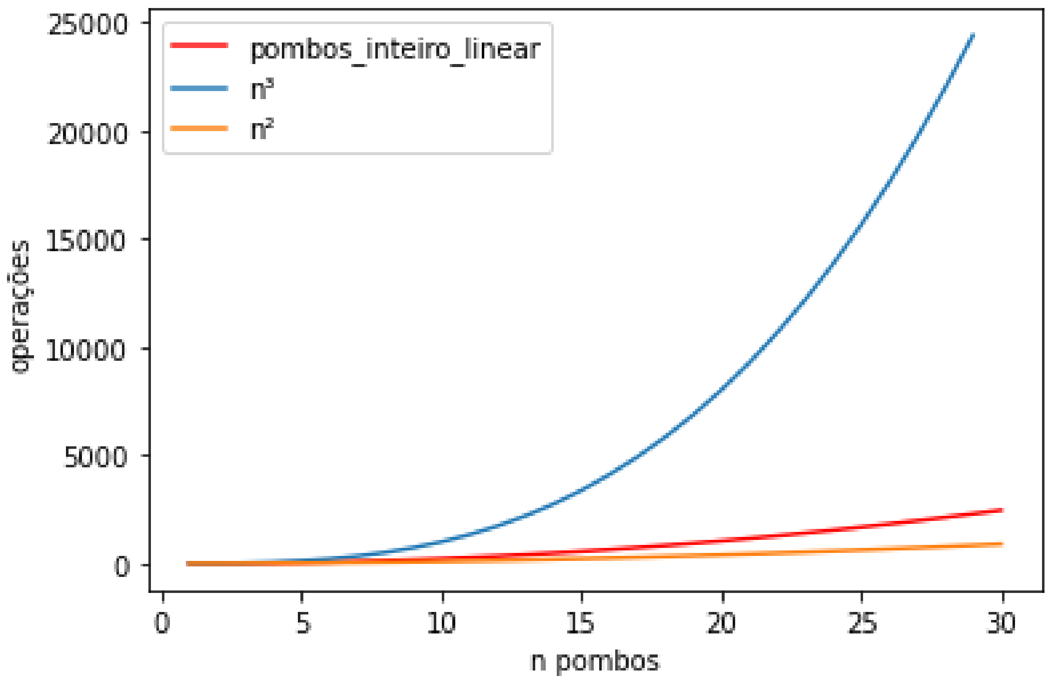
[7]:
```
t2 = tempos (30,"pombos_inteiro_linear" )
n = range (1,31)
plt.plot(n, t2, 'r')
plt.xlabel('n pombos')
plt.ylabel('tempo em sec')
plt.show()




l = []
for i in range (30):
    l.append(pombos_inteiro_linear(i))

plt.plot(n, l,'r', label = "pombos_inteiro_linear")
plt.xlabel('n pombos')
plt.ylabel('operações')
graph('x**3', range(1, 30) , "n³")
graph('x**2', range(1, 31) , "n²")
plt.legend(loc="upper left")
plt.show()
```





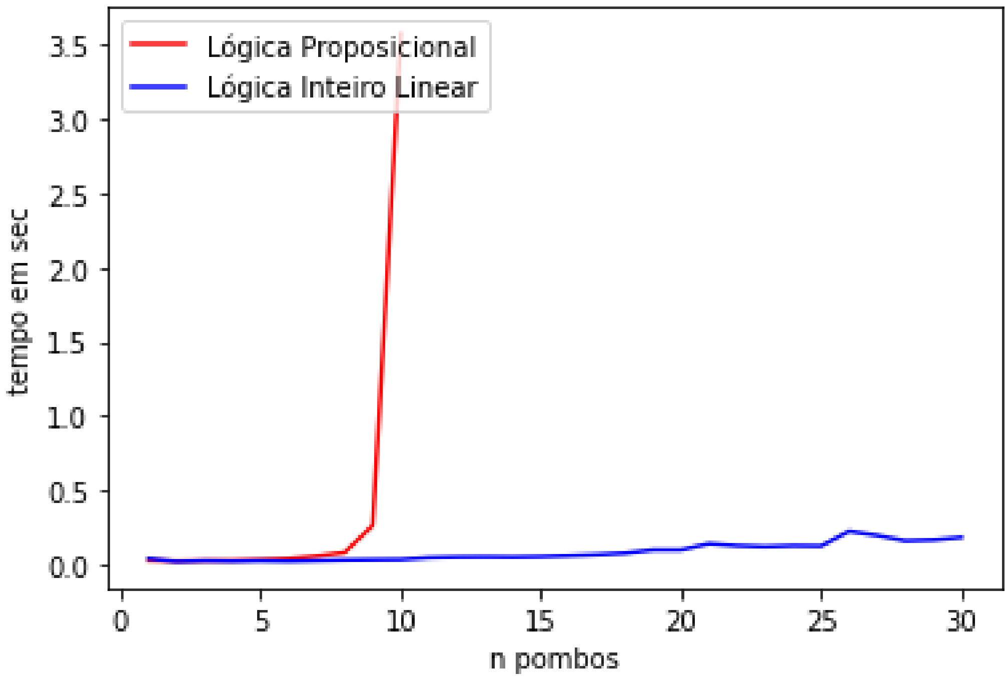
III)Comparações

É possível perceber que a lógica inteira linear é a mais eficaz na resolução do problema "pigeon hole principle" (PHP), devido ao seu grau de complexidade ser bem menor que a lógica proposicional , executando em tempos muito inferiores do que a sua concorrente.

[8]:
```
l = []
for i in range (20):
    t1.append(None)



plt.plot(n, t1, 'r', label = "Lógica Proposicional")
plt.plot(n, t2, 'b', label = "Lógica Inteiro Linear")
plt.legend(loc="upper left")
plt.xlabel('n pombos')
plt.ylabel('tempo em sec')
plt.show()
```


3.5
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
tempo em sec
0
5
10
15
20
25
30
n pombos
Lógica Proposicional
Lógica Inteiro Linear

[ ]: