REPUBLIQUE DU CAMEROUN
PAIX-TRAVAIL-PATRIE
****
UNIVERSITE DE DSCHANG
****
ÉCOLE DOCTORALE

REPUBLIC OF CAMEROON
PEACE-WORK-FATHERLAND
****
UNIVERSITY OF DSCHANG
****
POST GRADUATE SCHOOL

DSCHANG SCHOOL OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

Unité de Recherche en Mathématiques et Applications (URMA)

SUJET :

Filtres stables par endomorphismes de treillis résidués

Mémoire soutenu publiquement le 23 Juillet 2024 en vue de l'obtention du diplôme de Master en Mathématiques

Option : Algèbre

Par
NGAPGUE TEGOMO Wilfried Dimitri
Matricule : *CM-UDS-23SCI1352*
Licence en Mathématiques

Devant le jury composé de :

Président :	**TCHEKA Calvin**	*Maître de Conférences* **(Uds)**
Rapporteur:	**KOGUEP NJIONOU BLAISE B.**	*Maître de Conférences* **(Uds)**
Examinateur:	**TCHOUALAG Laurent**	*Chargé de Cours* **(Uds)**

Année académique : 2023/2024

Certification de l'originalité du travail

Je soussigné, **NGAPGUE TEGOMO Wilfried Dimitri**, étudiant en master 2 option Algèbre au Département de Mathématiques et Informatique, Faculté des Sciences de l'Université de Dschang, atteste que le présent mémoire intitulé "**Filtres stables par endomorphismes de treillis résidués**" effectué à l'Unité de Recherche de Mathématiques et Applications (URMA) sous la direction du **Pr KOGUEP NJIONOU Blaise Blériot** est le fruit de mes propres travaux de recherches.

Ce mémoire est authentique et n'a jamais été présenté pour l'obtention d'un quelconque diplôme ou grade universitaire.

Le candidat :

NGAPGUE TEGOMO Wilfried Dimitri

Date ....

Le Directeur :

Pr. KOGUEP NJIONOU Blaise Blériot

Date ....

Le Chef de Département :

Date ....

REPUBLIQUE DU CAMEROUN
Paix – Travail - Patrie
REPUBLIC OF CAMEROON
Peace – Work - Fatherland

UNIVERSITÉ DE DSCHANG
UNIVERSITY OF DSCHANG
Scholae Thesaurus DschangensisIbiCordum

BP 96, Dschang (Cameroun) – Tél./Fax (237) 233 45 13 81
Website : http://www.univ-dschang.org
E-mail : udsrectorat@univ-dschang.org

FACULTE DES SCIENCES
FACULTY OF SCIENCE

Département de Mathématiques et Informatique
Department of Mathematics and Computer Science

BP 67, Dschang (Cameroun) Tél./Fax (237) 233 45 17 35
E-mail : dept.math-info@univ-dschang.org

ATTESTATION DE CORRECTION DU MÉMOIRE DE MASTER DE

Monsieur NGAPGUE TEGOMO Wilfried Dimitri.

Nous attestons que le mémoire de Master de **Monsieur NGAPGUE TEGOMO Wilfried Dimitri,** intitulé : « Filtres stables par endomorphismes de treillis résidués » a effectivement été corrigé conformément aux remarques et aux recommandations du jury devant lequel ledit mémoire a été soutenu le **23 Juillet 2024** ; au Département de Mathématiques et Informatique de la faculté des Sciences de l'Université de Dschang.

En foi de quoi ; la présente attestation lui est délivrée pour servir et valoir ce que de droit.

Président du jury	**Rapporteur**
Pr TCHEKA Calvin	Pr KOGUEP NJIONOU Blaise B.

Examinateur	**Chef de Département**
Dr TCHOUALAG Laurent	

Dédicace

À mes parents :

NGAPGUE François et **JEULEFACK NGUEMO Honorée**

Remerciements

➠ Nous remercions tout d'abord l'**Éternel DIEU** qui m'a donné la patience et le courage durant cette année de dur labeur que j'ai passé au sein de l'université de Dschang.

➠Nous remercions **Pr Blaise B. KOGUEP NJIONOU**, mon encadreur pour son encadrement lors de la rédaction de ce mémoire.

➠ Nous remercions **l'ensemble des enseignants de l'Université de Dschang**, chacun en ce qui le concerne pour nous avoir apporté un plus dans sa discipline.

➠ Nous remercions **Dr TCHOUA YINGA Fabrice** pour son soutien, ses multiples conseils, son orientation et ses remarques constructives.

➠ Nous remercions mes parents **Francois NGAPGUE** et **Honorée JEULEFACK NGUEMO**, pour les valeurs nobles, la bienveillance et le soutien permanent tant moral que financier.

➠ Nous remercions les membres de ma famille (les grandes familles **NGAPGUE** et **JEULEFACK**) et mes amis qui m'ont encouragé et qui m'ont toujours aidé à garder l'équilibre.

➠ Nous remercions mes amis **M. Jospain KENNE ZANGUE et M. Daryl B. TCHATCHOUANG NJIPGUEP** pour leur soutien moral durant ma formation.

➠ À tous ceux qui, **de près ou de loin m'ont soutenu financièrement ou moralement**, et dont nous n'avons pas pu citer les noms, nous vous disons **merci**.

Table des matières

Liste des tableaux

Liste des figures

Résumé

Dans ce travail, nous étendons les notions de filtres stables, de filtres invariants et de filtres premiers invariants par rapport à un endomorphisme donné dans un premier temps dans le contexte des treillis résidués, puis dans celui des algèbres triangulaires. Nous explorons en détail plusieurs propriétés et résultats fondamentaux liés à ces concepts. En particulier, nous analysons les caractéristiques de l'ensemble de tous les filtres premiers invariants par un endomorphisme à la fois dans les treillis résidués et les algèbres triangulaires, de plus, nous démontrons que sous certaines conditions, cet espace topologique est de Hausdorff si et seulement si c'est un espace T_1.

Mots-clés : Treillis résidué, algèbre triangulaire, BL-algèbre, filtre, homomorphisme, filtre stable, filtre invariant.

Title

STABLE FILTERS BY ENDOMORPHISMS OF RESIDUATED LATTICES

Abstract

In this work, we extend the notions of stable filters, invariant filters and prime filters invariant with respect to a given endomorphism first in the context of residuated lattices, then in that of triangular algebras. We explore in detail several fundamental properties and results related to these concepts. In particular, we analyze the characteristics of the set of all prime filters invariant in both residuated lattices and triangular algebras. Furthermore, we show that under certain conditions, this topologic space is a Hausdorff space if and only if it is a space T_1.

Keywords : Residuated lattice, triangle algebra, BL-algebra, filter, homomorphism, stable filter, invariant filter.

Introduction générale

Motivation et revue de la littérature

La résiduation est un concept fondamental des structures ordonnées et des catégories, et qui est issue de l'algébrisation de la logique mathématique. Le concept de treillis résidué (commutatif) a été introduit pour la première fois par M. Ward et R. P. Dilworth en 1939 [13] comme une généralisation du treillis des idéaux d'un anneau. Les treillis résidués ont un intérêt logique (voir P. Hajek (1998) [8] et D. Piciu (2007) [11]), et ont été aussi largement étudiés du point de vue algébrique (un résumé de cette littérature a été fait par N. Galatos et al. (2007) [5]).

La théorie des filtres joue un rôle capital dans l'étude des algèbres logiques, car d'un point de vue logique, l'ensemble des filtres correspond à un ensemble de formules démontrables. Dans les treillis résidués, la notion de filtre a été introduite et étudiée par de nombreux chercheurs, à l'instar de J.G. Shen et X.H. Zhang (2006) [12], et de Y. Zhu et Y. Xu (2010) [17], qui ont exploré la nature algébrique de l'ensemble des filtres d'un treillis résidué commutatif.

En 2010, V. Gasse et ses collaborateurs [6] ont examiné les filtres premiers, les filtres Booléens, les filtres involutifs, ainsi que les connexions entre ces différents types de filtres dans les treillis résidués. Ce travail a été approfondi en 2014 par Busneag et Piciu [3].

En 2019, Yan Dong et Xiao Xin [4] se sont penchés sur les α-filtres et l'espace des α-filtres premiers dans les treillis résidués : ils ont démontré que l'ensemble des α-filtres d'un treillis résidué forme une algèbre de Heyting.

Van Gasse et ses collaborateurs [6] ont introduit en 2010 les algèbres triangulaires comme des variétés de treillis résidués muni de certaines opérateurs ν et μ avec un point angulaire u qui est différent de 0 et de 1. Comme généralisation de treillis résidués, les algèbres triangulaires constituent actuellement un champ riche pour les chercheurs.

Par ailleurs, les notions de filtres stables, de filtres invariants par endomorphisme de BL-algèbre et de filtres primaires ont été étudiées dans le contexte des BL-algèbres (une sous-classe de treillis résidués) par N. Abadi et J. Moghaderi en 2019 [1]. Ces chercheurs ont développé les propriétés de l'espace topologique des filtres premiers invariants d'une BL-algèbre ; cependant, l'étude de ces dernières notions demeure encore absente dans les treillis résidués et dans les algèbres triangulaires.

Pour cela, nous devrons trouver la bonne définition des notions selon que nous soyons dans les treillis residués ou dans les algèbres triangulaires.

Objectifs

L'objet de ce travail est d'étendre dans un premier temps les notions de filtres stables, filtres invariants et filtres premiers invariants par les endomorphismes de treillis résidués et dans un deuxième temps les étendre aux algèbres triangulaires.

Structure du mémoire

Mémoire qui commence par une Introduction générale et s'achève par une Conclusion et perspectives possède trois principaux Chapitres conçus comme suit :

• Dans le Chapitre 1, nous donnons quelques préliminaires, notamment sur la théorie des treillis, des treillis résidués, des filtres de treillis résidués et des morphismes de treillis résidués ;

• Dans le Chapitre 2, nous étudions les notions de filtre et d'endomorphisme de treillis résidués où nous explorons notamment les notions telles que les filtres stables, les filtres invariants par des endomorphismes de treillis résidués.

• Dans le Chapitre 3, nous donnons tout d'abord la définition d'algèbre triangulaire, nous donnons un exemple et quelques propriétés détaillées d'une algèbre triangulaire. Ensuite, nous étendons aux algèbres triangulaires les notions étudiées au Chapitre 2.

★ ★ **Chapitre Un** ★ ★

Préliminaires

Sommaire

Introduction

Dans ce Chapitre, nous abordons les structures de bases qui seront cruciales pour la suite et nous donnons quelques propriétés et exemples. Nous commençons à la section 1.1 par quelques rappels sur la théorie des ensembles notamment sur les notions de relations d'ordres, relations d'équivalences et d'ensemble partiellement ordonné, et ensuite nous nous concentrons sur des ensembles partiellement ordonnés particuliers, appelés treillis. Ensuite, à la section 1.7, nous ajoutons deux opérateurs binaires (produit et implication) à la structure de treillis afin d'obtenir la structure de treillis résidué dont nous donnons quelques propriétés et exemples. Dans la même lancée, à la section 1.11, nous introduisons la notion de filtre d'un treillis résidué et donnons quelques types de filtres dans un treillis résidué. Nous demontons également quelques relations entre ces types de filtres. Enfin, à la section 1.17, nous abordons la notion de morphisme entre deux treillis résidués qui nous sera très utile pour la suite de notre travail.

1.1 Treillis

Avant d'aborder la définitions de treillis, faisons d'abord quelques rappels dans la théorie des ensembles.

1.1.1 Quelques rappels sur la théorie des ensembles

Définition 1.2 ([7])

Soit L un ensemble non vide et $\mathcal{R}$ une relation binaire sur L. On dit que $\mathcal{R}$ est :

- ♣ **réflexive** lorsque pour tout $x \in L$, $x\mathcal{R}x$;
- ♣ **symétrique** lorsque pour tous $x, y \in L$, $x\mathcal{R}y$ implique $y\mathcal{R}x$;
- ♣ **anti-symétrique** lorsque pour tous $x, y \in L$, ($x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$) implique $x = y$;
- ♣ **transitive** lorsque pour tous $x, y, z \in L$, ($x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$) implique $x\mathcal{R}z$.

Définition 1.3 ([7])

Soit L un ensemble non vide et $\mathcal{R}$ une relation binaire sur L. On dit que $\mathcal{R}$ est :

- ♣ une **relation d'équivalence** sur L si $\mathcal{R}$ est à la fois réflexive, symétrique et transitive ;
- ♣ une **relation d'ordre** sur L si $\mathcal{R}$ est à la fois réflexive, anti-symétrique et transitive. Dans ce cas, le couple $(L, \mathcal{R})$ est appelé **ensemble partiellement ordonné** (ou **poset**). Si de plus, pour tous $x, y \in L$, on a $x\mathcal{R}y$ ou $y\mathcal{R}x$, (c'est à dire, tous les éléments sont comparables) alors l'ordre $\mathcal{R}$ est dit **total** (et le poset $(L, \mathcal{R})$ est appelé **chaine**).

Exemple 1.1. • *Toute application $f : E \longrightarrow F$ induit sur E la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ définie par : $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$;*
• *L'ensemble des entiers (naturels ou relatifs) munit de l'ordre usuel $\leq$ est une chaine.*

Dans la suite de ce mémoire, $\leq$ désignera un ordre partiel quelconque et on dira que x est plus petit que y lorsque $x \leq y$ et on dira que $x < y$ lorsque $x \leq y$ et $x \neq y$.

Définition 1.4 ([7])

Soient $(L, \leq)$ un poset, S un sous-ensemble non vide de L et $\alpha \in L$. On dit que :

- ♣ α est un **majorant** (respectivement **minorant**) de S si pour tout $x \in S$, $x \leq \alpha$ (respectivement $\alpha \leq x$) ;
- ♣ S est **borné** dans $(L, \leq)$, s'il admet un majorant et un minorant.

Un sous-ensemble S d'un ensemble non vide L peut avoir au plus un majorant (respectivement minorant) qui appartient à S. Si un tel élément existe, alors il est appelé **maximum** ou **plus grand élément** (respectivement **minimum** ou **plus petit élément**) de S et est noté $max(S)$ (respectivement $min(S)$).

1.4.1 Treillis

Définition 1.5 (Treillis[7])

- ♣ Un poset dans lequel les bornes inférieure et supérieure de chaque paire d'éléments existent, est appelé **treillis**.
- ♣ Un **treillis** est une algèbre $(L, \wedge, \vee)$ de type $(2, 2)$ (c'est à dire $\vee$ et $\wedge$ sont des opérateurs binaires sur L) telle que $\vee$ et $\wedge$ sont idempotents (c'est à dire, pour tout $(x, y) \in L^2, x \vee x = x$ et $x \wedge x = x$), commutatifs, associatifs et satisfaisant la loi d'absorption (c'est à dire, pour tout $(x, y) \in L^2, x \vee (x \wedge y) = x$ et $x \wedge (x \vee y) = x$).

L'ordre du treillis est définit par $x \leq y \Leftrightarrow x \wedge y = x$ (ou équivalent $x \vee y = y$) ; pour tout $(x, y) \in L^2$.

Remarque 1.1. *Les deux définitions de treillis sont équivalentes. En effet, si $(L, \leq)$ est un poset dans lequel les bornes inférieure (inf) et supérieure (sup) de toute paire d'éléments existent, alors (L, inf, sup) est un treillis et l'ordre de ce treillis coïncide avec $\leq$.*
Inversement, si $(L, \wedge, \vee)$ est un treillis, alors l'ordre sur ce treillis est un ordre partiel sur L et les bornes inférieure et supérieure par rapport à cet ordre sont exactement $\wedge$ et $\vee$ respectivement.

Un moyen utile de représenter les posets finis est le **diagramme de Hasse**.

En mathématiques, le diagramme de Hasse, du nom du mathématicien allemand Helmut Hasse, est une représentation visuelle d'un ordre fini. Dans un diagramme de Hasse :

1. Les éléments ordonnés sont représentés par des points.

2 La relation entre deux éléments est représentée par un segment entre deux points.

3 Si $x \leq y$, alors le point représentant x est placé plus bas que celui pour y. Ainsi, les segments n'ont pas besoin d'être orientés pour avoir leur orientation décrite.

4 Afin d'éviter de surcharger le schéma, les relations d'ordre possibles ne sont pas toutes représentées.

5 Lorsque $x < y$, s'il existe z tel que $x < z < y$, alors aucun segment ne doit lier x à y.

Exemple 1.2. *(Diagramme de Hasse)*
Pour l'ensemble des diviseurs de 60, A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60}, ordonnés par la relation de divisibilité, on obtient le diagramme de Hasse suivant :

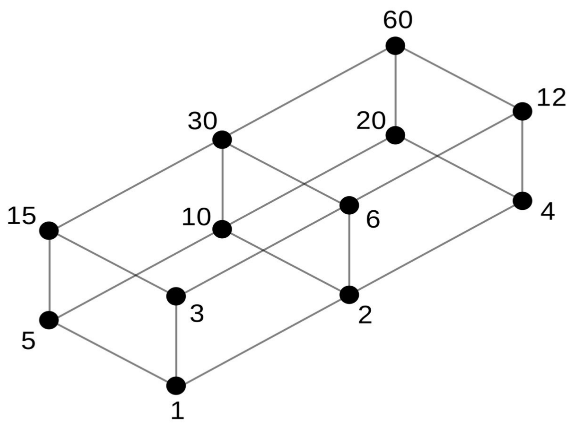

FIGURE 1: Illustration du diagramme de Hasse de l'ensemble des diviseurs de 60 par la divisibilité.

En effet comme 1 divise tout les éléments de A alors 1 est le plus petit éléments et se trouve donc en bas de la figure. De même, 60 étant uniquement divisible par 60 est donc le plus grand élément car aucun autre élément de le divise. Le reste du diagramme est conçu de façon à ce que étant donnés deux éléments x et y, les points représentant x et y sont connectés par une ligne si et seulement si x divise y et qu'il n'existe pas d'élément z tels que x divise z qui a son tour divise y (ou vice versa y divise x et il n'existe pas d'élément z tels que y divise z qui a son tour divise x). Le point correspondant au max $\{x, y\}$ *doit être placé plus haut que le point correspondant au min* $\{x, y\}$ *. Donc il n'y a pas de lignes horizontales dans un diagramme de Hasse.*

Définition 1.6 ([7])

Soient les deux treillis $(A, \wedge_A, \vee_A)$ et $(B, \wedge_B, \vee_B)$. On dit qu'une application $f : A \longrightarrow B$ est un **morphisme de treillis** lorsque, pour tous $x, y \in A$,

$$f(x \wedge_A y) = f(x) \wedge_B f(y) \quad et \quad f(x \vee_A y) = f(x) \vee_B f(y).$$

1.7 Treillis résidués

Ici, nous donnons la définitions de treillis résidué et quelques exemples et propriétés des treillis résidués.

1.7.1 Définition, exemples et propriétés

Définition 1.8 (Treillis résidué [6])

Un **treillis résidué** est une algèbre $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge, \odot, \to, 0, 1)$ de type $(2, 2, 2, 2, 0, 0)$ (dans laquelle $\vee, \wedge, \odot$ et $\to$ sont des opérateurs binaires sur l'ensemble L) muni d'une relation d'ordre $\leq$ vérifiant les propriétés suivantes :

1. $(L, \vee, \wedge)$ est un treillis borné relativement à l'ordre " $\leq$ " ayant 0 et 1 respectivement comme plus petit élément et plus grand élément ;
2. $(L, \odot, 1)$ est un monoïde commutatif d'élément neutre 1 ;
3. pour tous x, y et z dans L, $x \odot y \leq z$ si et seulement si $x \leq y \to z$ (Loi de résiduation).

N.B : L'ordre $\leq$ dans un treillis résidué $\mathcal{L}$ est définit par : pour tout $(x, y) \in L^2$, $x \leq y$ si et seulement si $x \to y = 1$ et cet ordre coïncide avec l'ordre du treillis associé.

Les opérateurs $\odot$ et $\to$ sont appelés respectivement **produit** et **implication**.

Exemple 1.3. *Soit I=[0; 1]. Pour tout $(x, y) \in I$, définissons par :*

$$x \odot y = min(x, y) \text{ et } x \to y = \begin{cases} 1 & si \quad x \leqslant y \\ y & sinon \end{cases}$$

$$\text{Alors } (I, max, min, \odot, \to, 0, 1) \text{ est un treillis résidué.}$$

Notation 1.1. *Dans ce travail, nous utiliserons les notations suivantes :*

- x' *pour* $x \to 0$ *;*

- *x'' pour $(x')'$*
- *$x \leftrightarrow y$ pour $(x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)$;*
- *x^n pour $\underbrace{x \odot x \odot \cdots \odot x}_{n-fois}$. Par convention, on pose $x^0 = 1$.*

Dans un treillis résidué $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge, \odot, \rightarrow, 0, 1)$, un élément $x \in L$ est dit :

• **idempotent** si $x \odot x = x$;

• **nilpotent** s'il existe $n \in \mathbb{N}$, tel que $x^n = 0$. Le plus petit entier n vérifiant cette égalité, est appelé ordre de x et on note $ord(x) = n$. Si un tel n n'existe pas, alors on dit que x est d'ordre infini et on note $ord(x) = \infty$.

Remarque 1.2. **1** *L'opérateur $\odot$ est croissant à gauche et à droite ;*

2 *l'opérateur $\rightarrow$ est croissant à gauche mais décroissant à droite ;*

3 *L'opérateur unaire $'$ est décroissant (c'est à dire, pour tous $x, y \in L, x \leq y$ implique $y' \leq x'$).*

A présent, nous allons donner quelques propriétés d'un treillis résidué.

Proposition 1.9 ([3, 16, 15, 1])

Dans tout treillis résidué $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge, \odot, \rightarrow, 0, 1)$, les propriétés suivantes sont valables pour tous $x, y, z \in L$:

(1) $x \leq y$ si et seulement si $x \rightarrow y = 1$;

(2) $x \rightarrow (y \rightarrow z) = (x \odot y) \rightarrow z = y \rightarrow (x \rightarrow z)$;

(3) Si $x \leq y$, alors $y \rightarrow z \leq x \rightarrow z$ et $z \rightarrow x \leq z \rightarrow y$;

(4) $x \odot y \leq x, y$ d'où $x \odot y \leq x \wedge y$ et $x \odot 0 = 0$;

(5) $x \leq y$ implique $x \odot z \leq y \odot z$;

(6) $1 \rightarrow x = x, x \rightarrow x = 1, x \leq y \rightarrow x, x \rightarrow 1 = 1, 0 \rightarrow x = 1, x \odot x' = 0$;

(7) $x \odot y = 0$ si et seulement si $x \leq y'$ et $x \leq y$ implique $y' \leq x'$;

(8) $x \leq x'', 1' = 0, 0' = 1, x''' = x', x'' \leq x' \rightarrow x$;

(9) $x \odot (x \rightarrow y) \leq x, y$;

(10) Si $x'' \leq x'' \rightarrow x$, alors $x'' = x$;

(11) $x \vee (y \odot z) \geq (x \vee y) \odot (x \vee z)$ et nous avons $x^m \vee y^n \geq (x \vee y)^{mn}$, pour tous $m, n \in \mathbb{N}$;

(12) $(x \vee y)'' = x'' \vee y'', (x \wedge y)'' = x'' \wedge y'', (x \rightarrow y)'' = x'' \rightarrow y''$;

(13) $x \leq y \rightarrow (x \odot y)$;

(14) $x \odot (y \vee z) = (x \odot y) \vee (x \odot z)$;

(15) $(x \rightarrow y) \odot (y \rightarrow z) \leq (x \rightarrow z)$.

1.9.1 Quelques types de treillis résidués

Définition 1.10 ([6, 3, 7])

Soit $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge, \odot, \rightarrow, 0, 1)$ un treillis résidué. On dit que $\mathcal{L}$ est :

1. **commutatif** si pour tous $x, y \in L$, on a l'égalité
$$(x \rightarrow y) \rightarrow y = (y \rightarrow x) \rightarrow x;$$
2. **régulier** lorsque pour tous x dans L on a $x'' = x$;
3. **non triviale** si $0 \neq 1$;
4. une **Gödel algèbre** si tout ses éléments sont idempotents c'est à dire $x^2 = x$, pour tout $x \in L$;
5. une **MTL-algèbre** si $\mathcal{L}$ est pré-linéaire, c'est à dire, $(x \rightarrow y) \vee (y \rightarrow x) = 1$ pour tous x, y dans L ;
6. une **BL-algèbre** si $\mathcal{L}$ est une MTL-algèbre vérifiant $x \wedge y = x \odot (x \rightarrow y)$ pour tous x, y dans L ;
7. une **MV-algèbre** si $\mathcal{L}$ est une BL-algèbre vérifiant $x'' = x$ pour tous x, y dans L ;
8. une **algèbre de Heyting** (ou pseudo-algèbre booléenne) si $x \odot x = x$ (ou de manière équivalente $x \odot y = x \wedge y$) pour tous x, y dans L ;
9. une **algèbre booléenne** si $\mathcal{L}$ est à la fois une MV-algèbre et une algèbre de Heyting ;
10. dite **linéaire** si $x \leq y$ ou $y \leq x$ pour tous x, y dans L.

Exemple 1.4. *(1) Soit p un entier naturel fixé. Définissons sur l'intervalle unité réel I deux opérations binaires $\odot$ and $\rightarrow$ par : pour tous $x, y \in I$,*

$$x \odot y = 1 - \min\left\{1, \sqrt[p]{(1-x)^p + (1-y)^p}\right\},$$
$$x \rightarrow y = \bigvee \{z \,|; x \odot z \leq y\}.$$

Alors $(I, \leq, \min, \max, \odot, \rightarrow, 0, 1)$, est un treillis résidué.

(2) Soit p un entier naturel fixé. Définissons sur l'intervalle unité réel I deux opérations binaires $\odot$ and $\rightarrow$ par : pour tous $x, y \in I$,

$$x \odot y = \sqrt[p]{\max\{0, x^p + y^p - 1\}},$$

$$x \to y = \min\left\{1, \sqrt{1 - x^p + y^p}\right\}.$$

Alors $(I, \leq, \min, \max, \odot, \to, 0, 1)$ *est un treillis résidué, appelé structure de* ***Lukasiewicz*** *généralisée.*

(3) Définissons sur l'intervalle unité réel I deux opérations binaires $\odot$ *and* $\to$ *par : pour tous* $x, y \in I$, $x \odot y = \min\{x, y\}$, $x \to y = 1$ *si* $x \leq y$ *et y sinon. Alors nous obtenons un treillis résidué qui est même une Gödel-algèbre.*

(4) Étant donné deux treillis résidués $(L_1, \wedge, \vee, \odot, \to, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ *et* $(L_2, \wedge, \vee, \odot, \to, \mathbf{0}, \mathbf{1})$*, l'ensemble produit* $L_1 \times L_2$ *deviens un treillis résidué si on définit toutes les opérations point par point,*

$$(a, b) \odot (c, d) = (a \odot c, b \odot d) \;\; ; \;\; (a, b) \to (c, d) = (a \to c, b \to d) \text{ où } a, c \in L_1, b, d \in L_2$$

Ce résultat est valable pour tout produit fini ou infini de treillis résidués. De plus, cette construction est un exemple de treillis résidué non-totalement ordonné. En effet, dans $L_1 \times L_2$ *la relation d'ordre est définie par*

$$(a, b) \leq (c, d) \text{ si et seulement si } a \leq c \text{ dans } L_1, b \leq d \text{ dans } L_2$$

Comme $0 \leq 1$ *dans tout treillis résidué, nous avons*

$$(\mathbf{0}, \mathbf{1}) \nleq (\mathbf{1}, \mathbf{0}) \text{ ni } (\mathbf{1}, \mathbf{0}) \nleq (\mathbf{0}, \mathbf{1})$$

Ainsi, $(\mathbf{0}, \mathbf{1})$ *et* $(1, 0)$ *sont des éléments incomparables dans* $L_1 \times L_2$.

Remarque 1.3. *Tout treillis résidué linéaire est pré-linéaire.*

Preuve. Soit $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge, \odot, \to, 0, 1)$ un treillis résidué. Supposons que $\mathcal{L}$ est linéaire.
Soit $(x, y) \in L^2$. Alors $x \leq y$ ou $y \leq x$. Sans nuire à la généralité, supposons que $x \leq y$. Donc $x \to y = 1$. c'est à dire, $(x \to y) \vee (y \to x) = 1 \vee (y \to x) = 1$. Ainsi $\mathcal{L}$ est pré-linéaire. ■

La réciproque de la remarque précédente n'est pas toujours vraie.

1.11 Notion de filtre dans un treillis résidué

Les filtres sont des sous-ensembles d'un poset satisfaisant quelques propriétés, ces concepts sont utilisés dans plusieurs structures algébriques (treillis, treillis résidué, treillis résidué d'intervalle valué, algèbre triangulaire, ...).

1.11.1 Définition et exemples

Définition 1.12 ([17])

Soit $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge, \odot, \rightarrow, 0, 1)$ un treillis résidué et F un sous-ensemble non vide de L. On dit que F est un **filtre** de $\mathcal{L}$ s'il satisfait les conditions suivantes :

♣ Pour tout $(x, y) \in L^2$, si $x \in F$ et $x \leq y$, alors $y \in F$;

♣ Pour tout $(x, y) \in F^2$, $x \odot y \in F$. (c'est à dire F est fermé sous $\odot$).

L'ensemble de tout les filtres de $\mathcal{L}$ est noté $F(\mathcal{L})$.

Définition 1.13 ([17])

Soit $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge, \odot, \rightarrow, 0, 1)$ un treillis résidué et F un sous-ensemble de L. On dit que F est un **système déductif** de $\mathcal{L}$ s'il satisfait les conditions suivantes :

♣ $1 \in F$;

♣ Pour tous $x, y \in L$, $(x \in F$ et $x \rightarrow y \in F)$ implique $y \in F$.

Proposition 1.14

Dans un treillis résidué $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge, \odot, \rightarrow, 0, 1)$, les notions de filtre et système déductif sont équivalentes.

Preuve. $\Rightarrow$) Supposons que $F \in F(\mathcal{L})$ et montrons que F est un système déductif de $\mathcal{L}$.
Soit $x \in F$. On sait que $x \leq 1$, donc $1 \in F$ car F est un filtre.
Supposons maintenant que $x \in F$ et $x \rightarrow y \in F$. Alors $x \odot (x \rightarrow y) \in F$ car F filtre. Or $x \odot (x \rightarrow y) \leq y$ d'après la Proposition 1.9] (9). Donc $y \in F$ car F filtre.
$\Leftarrow$) Supposons que F est un système déductif de $\mathcal{L}$ et montrons que $F \in F(\mathcal{L})$.
Soient x et y dans L tels que $x \in F$ et $x \leq y$ montrons que $y \in F$.
Comme $x \leq y$ alors $x \rightarrow y = 1 \in F$ et comme $x \in F$ alors $y \in F$.
Soient maintenant x et y dans F. A l'aide de la Proposition 1.9 (13) et l'hypothèse, on a $x \rightarrow (y \rightarrow (x \odot y)) = 1 \in F$. Comme $x \in F$, alors $y \rightarrow (x \odot y) \in F$ et ensuite comme $y \in F$ alors

$x \odot y \in F$.

Donc $F \in F(\mathcal{L})$. ■

Exemple 1.5. *(1) Soit* $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge, \odot, \rightarrow, 0, 1)$ *un treillis résidué.*

L'ensemble $F_\alpha = \{x \in L : \alpha \leq x\}$ *où* α *est un élément idempotent de* L *est un filtre de* $\mathcal{L}$*.*

En effet,

♣ $\alpha \in F_\alpha$ *car* $\alpha \leq \alpha$ *; donc* $F_\alpha \neq \emptyset$*.*

♣ *Soient* $x, y \in L$ *tels que* $x \leq y$ *et* $x \in F_\alpha$ *; on a* $\alpha \leq x \leq y$ (car $x \in F_\alpha$ *et donc* $\alpha \leq x$ *). Ainsi* $\alpha \leq y$ *; c'est à dire* $y \in F_\alpha$*.*

♣ *Soient* $x, y \in L$ *tels que* $x, y \in F_\alpha$*, alors on a,* $\alpha \leq x$ *et* $\alpha \leq y$*. Donc* $\alpha \odot \alpha \leq x \odot y$ *(car l'opérateur* $\odot$ *est croissant). Par conséquent,* $\alpha \leq x \odot y$ *(car* α *est idempotent). D'où* $x \odot y \in F_\alpha$*.*

Ainsi F_α *est un filtre de* $\mathcal{L}$*.*

(2) Soit $L = \{0, a, b, c, 1\}$ *tel que* $0 < a, b < c < 1$*. Définissons le point* $\odot$ *et la flèche* $\rightarrow$ *de la manière suivante :*

$\odot$	0	a	b	c	1
0	0	0	0	0	0
a	0	a	a	a	a
b	0	a	b	b	b
c	0	a	b	a	c
1	0	a	b	c	1

$\rightarrow$	0	a	b	c	1
0	1	1	1	1	1
a	c	1	1	1	1
b	0	a	1	1	1
c	0	a	b	1	1
1	0	a	b	c	1

Table 1: Tables du point et de la flèche du (2) de l'Exemple 1.5.

Alors $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge, \odot, \rightarrow, 0, 1)$ *est un treillis résidué. L'ensemble des filtres de ce treillis résidué est* $F(\mathcal{L}) = \{\{1\}, \{c, 1\}, \{b, c, 1\}, \{a, b, c, 1\}, L\}$*.*

Remarque 1.4. *Il est très facile de voir que dans un treillis résidué* $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge, \odot, \rightarrow, 0, 1)$*, le singleton* $\{1\}$ *et* L *sont toujours des filtres de* $\mathcal{L}$*. Ces filtres sont dits triviaux. Tout filtre de* $\mathcal{L}$ *distinct de* $\{1\}$ *et* L *est dit propre.*

1.14.1 Quelques types de filtres de treillis résidués

Définition 1.15 ([11, 17])

Soient $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge, \odot, \rightarrow, 0, 1)$ un treillis résidué et F un filtre propre de $\mathcal{L}$. On dit que :

1. F est un **filtre premier** de $\mathcal{L}$, si $x \vee y \in F$ implique $x \in F$ ou $y \in F$, pour tous $x, y \in L$;
2. F est un **filtre premier de second type** de $\mathcal{L}$, si pour tous $x,\ y \in L$, $x \rightarrow y \in F$ ou $y \rightarrow x \in F$;
3. F est un **filtre premier de troisième type** de $\mathcal{L}$ si pour tous $x, y \in L$, $(x \rightarrow y) \vee (y \rightarrow x) \in F$;
4. F est un **filtre maximal** de $\mathcal{L}$ s'il n'est contenu dans aucun autre filtre de $\mathcal{L}$ autre que L. En d'autres terme, si G est un filtre tel que $F \subseteq G$ alors $F = G$ ou $G = L$;
5. F est un **filtre primaire** si, pour tous $x, y \in L, (x \odot y)' \in F$ implique $(x^n)' \in F$ ou $(y^n)' \in F$, pour tous $n \in \mathbb{N}$;
6. F est un **filtre implicatif**, si $1 \in F$, $(x \rightarrow (y \rightarrow z) \in F$ et $x \rightarrow y \in F)$ implique $x \rightarrow z \in F$, pour tous $x, y, z \in L$;
7. F est un **filtre fantastique** si $1 \in F$, $(z \rightarrow (y \rightarrow x) \in F$ et $z \in F)$ implique $((x \rightarrow y) \rightarrow y) \rightarrow x \in F$, pour tous $x, y, z \in L$;
8. F est un **filtre booléen** si $x \vee x' \in F$, pour tous $x \in L$.

Exemple 1.6. *(1) Soit $L = \{0, a, b, v, 1\}$ définissons la relation d'ordre sur L à l'aide du diagramme de Hasse suivant :*

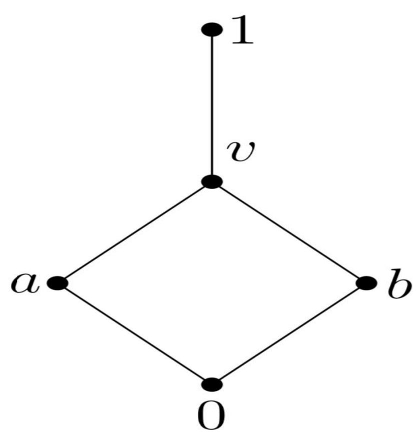

FIGURE 2: Figure de l'ordre dans l'ensemble L du (3) de l'exemple 1.5.

De même, définissons les opérations $\odot$ et $\to$ par

$\odot$	0	a	b	v	1
0	0	0	0	0	0
a	0	a	0	a	a
b	0	0	b	b	b
v	0	a	b	v	v
1	0	a	b	v	1

$\to$	0	a	b	v	1
0	1	1	1	1	1
a	c	1	b	1	1
b	0	a	1	1	1
v	0	a	b	1	1
1	0	a	b	v	1

TABLE 2: Tables du point et de la flèche du (3) de l'exemple 1.5.

Alors $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge, \odot, \to, 0, 1)$ est un treillis résidué qui est même un algèbre de Heyting, ses filtres sont $\{1\}, \{v, 1\}, \{a, v, 1\}$, $\{b, v, 1\}$ et $\{0, a, b, v, 1\}$. Remarquons que $\{1\}$ est un filtre premier de second type, mais $\{v, 1\}$ ne l'est pas. Aussi, il est à noter que $\{1\}$ n'est pas un filtre premier de troisième type, vu que la relation de prélinéarité n'est pas satisfaite : $(a \Rightarrow b) \vee (b \Rightarrow a) = b \vee a = v$. Les filtres $\{a, v, 1\}$, $\{b, v, 1\}$ et $\{0, a, b, 1\}$ sont premier, premier de second type, premier de troisième type, booléen.

(2) Soit $L = \{0, a, b, 1\}$ définissons la relation d'ordre sur L à l'aide du diagramme de Hasse suivant :

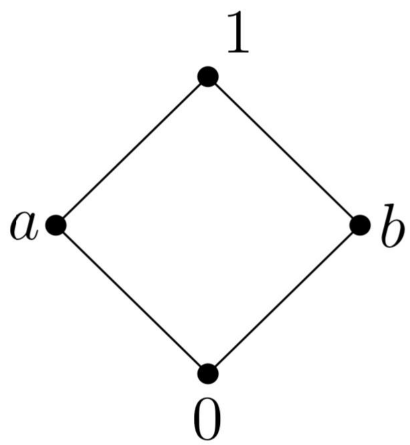

FIGURE 3: Figure de l'ordre dans le 4 de l'exemple 1.5.

Alors $\mathcal{L}$ est un treillis résidué (avec $\odot$ et $\to$ définis à l'aide de l'ordre). $\{1\}$ est un filtre booléen. Mais il n'est pas un filtre premier de second type. De façon similaire au (3), les filtres $\{a, 1\}, \{b, 1\}$ et $\{0, a, b, 1\}$ sont premier, premier de second type, premier de troisième type, booléen, mais leur intersection $\{1\}$ n'est ni premier, ni premier de second type.

Proposition 1.16 ([6])

Soit $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge, \odot, \rightarrow, 0, 1)$ un treillis résidué. Alors :

• Tout filtre premier de second type $\mathcal{L}$ est un filtre premier de troisième type de $\mathcal{L}$;

• Tout filtre premier de second type de $\mathcal{L}$ est un filtre premier de $\mathcal{L}$. Si de plus $\mathcal{L}$ est une MTL-algèbre, alors tout filtre premier de $\mathcal{L}$ est aussi un filtre premier de second type de $\mathcal{L}$.

Preuve. Soient $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge, \odot, \rightarrow, 0, 1)$ un treillis résidué et F un filtre de $\mathcal{L}$.

• Supposons que F est un filtre premier de second type et montrons que F est un filtre premier de troisième type.

pour tous $x, y \in L$, on a $x \rightarrow y \in F$ ou $y \rightarrow x \in F$. Sans nuire à la généralité, supposons que $x \rightarrow y \in F$. On sait que $x \rightarrow y \leq (x \rightarrow y) \vee (y \rightarrow x)$ et F est un filtre, donc on a $(x \rightarrow y) \vee (y \rightarrow x) \in F$. Ainsi F est un filtre premier de troisième type.

• Supposons que F est un filtre premier de second type et montrons que F est un filtre premier. Soient $x, y \in L$ tels que $x \vee y \in F$. On a $x \rightarrow y \in F$ ou $y \rightarrow x \in F$ (car F est un filtre premier de second type). Sans nuire à la généralité, supposons qu'on ait $x \rightarrow y \in F$. D'après (14) de la Proposition 1.9, on a $(x \odot (x \rightarrow y)) \vee (y \odot (x \rightarrow y)) = (x \vee y) \odot (x \rightarrow y) \in F$ car $x \vee y \in F$, $x \rightarrow y \in F$ et F est un filtre. Or $(x \odot (x \rightarrow y)) \vee (y \odot (x \rightarrow y)) \leq (x \wedge y) \vee (y \wedge (x \rightarrow y))$ (d'après (1) et (9) de la Proposition 1.9) et $(x \wedge y) \vee (y \wedge (x \rightarrow y)) \leq y \vee y$ car $x \wedge y \leq y$ et $(y \odot (x \rightarrow y)) \leq y$. Ainsi $(x \odot (x \rightarrow y)) \vee (y \odot (x \rightarrow y)) \leq y$ car $y \vee y = y$ (idempotence du $\vee$). D'où $y \in F$ car $(x \odot (x \rightarrow y)) \vee (y \odot (x \rightarrow y)) \in F$, et F est un filtre. En faisant de même mais en inversant les rôles de x et y, on obtient $x \in F$. Par conséquent, F est un filtre premier.

Si de plus $\mathcal{L}$ est une MTL-algèbre, en supposant que F soit un filtre premier de $\mathcal{L}$, on a $(x \rightarrow y) \vee (y \rightarrow x) = 1 \in F$ ce qui implique que $x \rightarrow y \in F$ ou $y \rightarrow x \in F$ car F est un filtre premier. D'où F est bien un filtre premier de second type de $\mathcal{L}$.

■

1.17 Morphismes de treillis résidués

Définition 1.18

Soient deux treillis résidués $\mathcal{A} = (A, \vee_A, \wedge_A, \odot_A, \rightarrow_A, 0_A, 1_A)$ et $\mathcal{B} = (B, \vee_B, \wedge_B, \odot_B, \rightarrow_B, 0_B, 1_B)$, une application $f : A \longrightarrow B$ satisfaisant pour tous $x, y \in A$ les cinq conditions :

1. $f(x \vee_A y) = f(x) \vee_B f(y)$;
2. $f(x \wedge_A y) = f(x) \wedge_B f(y)$;
3. $f(x \odot_A y) = f(x) \odot_B f(y)$;
4. $f(x \rightarrow_A y) = f(x) \rightarrow_B f(y)$;
5. $f(0_A) = 0_B$;

est appelée **morphisme de treillis résidués**.

Si $A = B$, alors on dira que f est un endomorphisme du treillis résidué $\mathcal{A}$ ou $\mathcal{B}$.

Lorsque f est injectif (resp. surjectif), on dit que f est un monomorphisme (resp. épimorphisme). f est un isomorphisme si il est à la fois injectif et surjectif.

Remarque 1.5. ♣ *Pour tout morphisme de treillis f comme définit précédement,* $f(1_A) = 1_B$ *;*
♣ *Tout morphisme de treillis résidués est croissant.*

Preuve. ♣ En appliquant le 4 et le 5 de la Définition 1.18 avec $x = 0_A$, on a $f(0_A \rightarrow_A y) = f(0_A) \rightarrow_B f(y) = 0_B \rightarrow_B f(y) = 1_B$

♣ En effet, étant donné $\sigma : A \longrightarrow B$ un morphisme de treillis résidués, si $x \leq y$ alors $x \rightarrow y = 1$ c'est à dire

$\sigma(x \rightarrow_A y) = \sigma(x) \rightarrow_B \sigma(y) = \sigma(1_A) = 1_B$. Ainsi $\sigma(x) \rightarrow_B \sigma(y) = 1_B$ c'est à dire $\sigma(x) \leq \sigma(y)$.

■

Une fois toutes ces notions introduites, nous pouvons aborder le prochain Chapitre qui traitera des filtres stables, invariants et premiers invariants par des endomorphismes de treillis résidués.

★ ★ Chapitre Deux ★ ★

Filtres et endomorphismes de treillis résidués

Sommaire

Introduction

Dans ce Chapitre, nous explorerons les notions de filtres stables, invariants et premiers invariants par des endomorphismes de treillis résidués. Les résultats présentés ici sont des extensions de ceux faits dans le cadre des BL-algèbres dans l'**article de D. Abadi publié en 2019 intitulé "Filters by BL-homomophisms"** [1].

Il est à noter que toutes les preuves faites dans ce Chapitre sont plus détaillées (mais similaires) à celles établies dans l'article sus-cité et celles non-démontrées dans ce Chapitre, sont similaires aux preuves établies dans le même article.

Dans la suite, sauf mention contraire $\mathcal{L}$ désigne le treillis résidué $(L, \vee, \wedge, \odot, \rightarrow, 0, 1)$.

Notation 2.1. *[1] Soit X est un sous-ensemble de L.*

- ♣ *Notons par* $D(X) = \{x \in L \mid x'' \in X\}$ *l'ensemble des* ***doubles complements*** *de* X *;*
- ♣ $M(L) = \{x \in L \mid x'' = 1\} = D(\{1\})$ *;*
- ♣ *L'intersection de tous les filtres maximaux de* $\mathcal{L}$ *contenant* X *est appelée* ***radical*** *de* X *et est noté* $\mathrm{Rad}(X)$*. Si* F *est un filtre propre de* $\mathcal{L}$*, alors* $\mathrm{Rad}(F) = \{x \in L \mid x' \rightarrow x^n \in F, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}\}$

♣ *On définit une extension de $X \subseteq L$ comme l'ensemble $X^e = \{x \in L \mid$ il existe $a \in X,\ x' \leq a'\}$.*

♣ *Les ensembles $X_l = \{a \in L \mid a \rightarrow x = x$, pour tout $x \in X\}$ et*

$X_r = \{a \in L \mid x \rightarrow a = a$, pour tout $x \in X\}$ sont appelés les stabilisateurs à gauche et à droite de X, respectivement, et l'ensemble $X_s = X_l \cap X_r$ est appelé stabilisateur de X.

Proposition 2.1

Soit X un sous ensemble d'un treillis résidué $\mathcal{L}$.

1 $D(X)$ est un filtre de $\mathcal{L}$ lorsque X est un filtre de $\mathcal{L}$;

2 $M(L)$ est un filtre de $\mathcal{L}$;

3 $\mathrm{Rad}(X)$ est un filtre de $\mathcal{L}$

Preuve. **1** En effet, $1'' = 0' = 1 \in X$ car X filtre. Donc $1 \in D(X)$. De plus, si $x, x \rightarrow y \in D(X)$ alors, $x'' \in X$ et $x'' \rightarrow y'' = (x \rightarrow y)'' \in X$ d'après la Proposition 1.9 (13) ; or X filtre donc $y'' \in X$. Ainsi, $D(X)$ est un filtre de $\mathcal{L}$ lorsque X est un filtre de $\mathcal{L}$.

2 Montrons que $M(L)$ est un filtre de $\mathcal{L}$.

• $1'' = 0' = 1$. Donc $1 \in M(L)$;

• De plus, étant donné $x, y \in L$ tels que $x, x \rightarrow y \in M(L)$, on a $x'' = (x \rightarrow y)'' = 1$. Ainsi, d'après la Proposition 1.9 (12), $1 = (x \rightarrow y)'' = x'' \rightarrow y''$ c'est à dire $x'' \rightarrow y'' = 1$ qui implique à son tour que $1 = x'' \leq y''$ c'est à dire $y'' = 1$. Donc $y \in M(L)$.

Ou tout simplement, $M(L) = D(\{1\})$ et $\{1\}$ est un filtre de $\mathcal{L}$

3 Rappelons que $\mathrm{Rad}(X)$ est défini comme l'intersection de tous les filtres maximaux de $\mathcal{L}$ contenant F.

• Supposons $x \in \mathrm{Rad}(X)$ et $x \leq y$. Comme $\mathrm{Rad}(X)$ est l'intersection de tous les filtres maximaux de $\mathcal{L}$ contenant X, pour chaque filtre maximal M, y doit appartenir à M puisque $x \leq y$ et $x \in M$. Ainsi, $y \in \mathrm{Rad}(X)$.

• Si $x, y \in \mathrm{Rad}(X)$, alors x et y appartiennent à tous les filtres maximaux de $\mathcal{L}$ contenant X. Ainsi, pour chaque filtre maximal M, $x \odot y \in M$, alors $x \odot y$ appartient également à tous les filtres maximaux de $\mathcal{L}$ contenant X, donc $x \odot y \in \mathrm{Rad}(X)$.

Ainsi, $\mathrm{Rad}(X)$ est un filtre de $\mathcal{L}$.

■

Proposition 2.2

Soient $\mathcal{L}$ un treillis résidué, σ un endomorphisme de $\mathcal{L}$, F un filtre de $\mathcal{L}$ et X un sous-ensemble non vide de L. Nous avons la véracité des assertions suivantes :

1 $\sigma(X^e) \subseteq (\sigma(X))^e$ et aussi $\sigma(X^e) = (\sigma(X))^e$ lorsque σ est un isomorphisme ;

2 $\sigma(D(X)) \subseteq D(\sigma(X))$ et on a $\sigma(D(X)) = D(\sigma(X))$ lorsque σ est un isomorphisme ou $\mathcal{L}$ est un treillis résidué régulier ;

3 $D(\sigma(F)) \subseteq D(\sigma(D(F)))$;

4 $\sigma(X_l) \subseteq (\sigma(X))_l$ et $\sigma(X_r) \subseteq (\sigma(X))_r$;

5 $\sigma(X_s) \subseteq \sigma(X)_s$;

6 Si σ est un épimorphisme, $\sigma(F) \subseteq F$ et pour tout $x \in L$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\sigma(x) \leq x^n$, alors $\sigma(F_l) = \sigma(F)_l$.

Preuve. **1** Soit $y \in \sigma(X^e)$. Alors $y = \sigma(x)$ pour un certain $x \in X^e$. Ainsi il existe $a \in X$ tel que $x' \leqslant a'$ c'est à dire $y' = (\sigma(x))' = \sigma(x') \leqslant \sigma(a') = (\sigma(a))'$ avec $\sigma(a) \in \sigma(X)$. Donc $y \in (\sigma(X))^e$ c'est à dire $\sigma(X^e) \subseteq (\sigma(X))^e$.

On suppose à présent que σ est un isomorphisme. Soit $x \in (\sigma(X))^e$ alors $x' \leqslant a'$ avec $a = \sigma(a_1), a_1 \in X$. Or comme σ isomorphisme, alors il existe $x_1 \in L$ tel que $x = \sigma(x_1)$. Il suffit de montrer que $x_1 \in X^e$. On a $x' = (\sigma(x_1))' \leqslant (\sigma(a_1))' = a'$. Ainsi, $\sigma\left(x_1'\right) \leq \sigma\left(a_1'\right)$ c'est à dire $x_1' \leq a_1'$, avec $a_1 \in X$. Ainsi $x_1 \in X^e$ c'est à dire $\sigma(x_1) \in \sigma(X^e)$ et on obtient que $\sigma(X^e) = (\sigma(X))^e$.

2 Soit $y \in \sigma(D(X))$. Alors $y = \sigma(x)$ avec $x \in D(X)$ c'est à dire $x'' \in X$. Ainsi, $y'' = (\sigma(x))'' = \sigma(x'') \in \sigma(X)$ c'est à dire $y \in D(\sigma(X))$. Donc $\sigma(D(X)) \subseteq D(\sigma(X))$.

Soit $y \in D(\sigma(X))$. On suppose que $\mathcal{L}$ est une MV-algèbre, on a $y'' \in \sigma(X)$ c'est à dire $y = \sigma(x)$ avec $x \in X$. Or $x'' = x \in X$, donc $x \in D(X)$ c'est à dire $y \in \sigma(D(X))$. D'où $\sigma(D(X)) = D(\sigma(X))$.

De même, en supposant que σ soit un isomorphisme, en prenant $y \in L$ alors il existe $y_1 \in L$ tel que $y = \sigma(y_1)$. Ainsi $y'' = \sigma(x) \Rightarrow \sigma\left(y_1''\right) = \sigma(x)$ c'est à dire $y_1'' = x \in X$ c'est à dire $y_1 \in D(X)$ et finalement $y \in \sigma(D(X))$. D'où $\sigma(D(X)) = D(\sigma(X))$.

3 Soit $y \in D(\sigma(F))$. Alors $y'' \in \sigma(F)$ c'est à dire qu'il existe $x \in F$ tel que $y'' = \sigma(x)$. De plus, $x \leq x''$, donc $x'' \in F$ car F est un filtre et ainsi $x \in D(F)$. Finalement, $y'' = \sigma(x)$ avec $x \in D(F)$ c'est à dire $y'' \in \sigma(D(F))$ c'est à dire $y \in D(\sigma(D(F)))$. Donc $D(\sigma(F)) \subseteq D(\sigma(D(F)))$.

4 Soit $y \in \sigma(X_l)$. Montrons que $y \in (\sigma(X))_l$, c'est à dire $y \to a = a, \forall a \in \sigma(X)$. Soit $a \in \sigma(X)$ alors, il existe $a_1 \in X_l$ tel que $a = \sigma(a_1)$. Or $y \in \sigma(X_l)$ c'est à dire $y = \sigma(x)$ pour un certain $x \in X$ c'est à dire $x \to a = a, \forall a \in X$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} y \to a &= \sigma(x) \to \sigma(a_1) \\ &= \sigma(x \to a_1) \text{ car } \sigma \text{ est un endomorphisme ;} \\ &= \sigma(a_1) \text{ car } x \in X_l \text{ et } a_1 \in X \\ &= a \end{aligned}$$

Ainsi, $y \in (\sigma(X))_l$ c'est à dire $\sigma(X_l) \subseteq (\sigma(X))_l$.

De manière similaire, on montre que $\sigma(X_r) \subseteq (\sigma(X))_r$.

5 La preuve découle naturellement du 4).

6 On suppose que σ est un épimorphisme et que $\sigma(F) \subseteq F$ alors $\sigma(F) = F$. D'après 4) $\sigma(F_l) \subseteq (\sigma(F))_l$. Il reste donc à montrer que $(\sigma(F))_l \subseteq \sigma(F_l)$ or comme $\sigma(F) = F$, cela revient à montrer que $F_l \subseteq \sigma(F_l)$.

Soit $y \in F_l$ alors $y \to a = a, \forall a \in F$. Comme σ est surjective, alors il existe $x \in L$ tel que $y = \sigma(x)$. Ainsi $\sigma(x) \to a = a, \forall a \in F$. D'après l'hypothèse, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\sigma(x) \leq x^n$. En appliquant la Proposition 1.9 (3) on obtient $x^n \to a \leq \sigma(x) \to a = a$ c'est à dire $x^n \to a \leq a$.

De plus, la Proposition 1.9 (4) nous permet d'établir que $x^n \leq x$ ce qui implique que $x \to a \leq x^n \to a$. Ainsi, $x \to a \leq x^n \to a \leq a$ c'est à dire $x \to a \leq a$. Or nous savons déjà que $a \leq x \to a$.

Finalement, $x \to a = a, \forall a \in F$; c'est à dire $x \in F_l$ et comme $y = \sigma(x)$ alors $y \in \sigma(F_l)$ c'est à dire $(\sigma(F))_l \subseteq \sigma(F_l)$. Donc $\sigma(F_l) = (\sigma(F))_l$.

■

2.3 Filtres stables par endomorphismes de treillis résidués

Définition 2.4

Soit $\mathcal{L}$ un treillis résidué et $\sigma : L \to L$ un endomorphisme de $\mathcal{L}$. Alors un filtre F est dit **σ-stable** si $\sigma(F) \subseteq F$.

Exemple 2.1. *(1) Soit* $L = \{0, a, b, c, 1\}$*, avec* $0 < a < b < c < 1$*. On définit* $\odot$ *et* $\rightarrow$ *comme suit :*

$\odot$	0	a	b	c	1
0	0	0	0	0	0
a	0	a	a	a	a
b	0	a	b	b	b
c	0	a	b	c	c
1	0	a	b	c	1

$\rightarrow$	0	a	b	c	1
0	1	1	1	1	1
a	a	1	1	1	1
b	0	a	1	1	1
c	0	a	b	1	1
1	0	a	b	c	1

Table 3: Tables du point et de la flèche du (1) de l'Exemple 2.1.

Alors $\mathcal{L}$ *est un treillis résidué. Posons* $\sigma : L \rightarrow L$ *définit par* $\sigma(0) = 0$*,* $\sigma(a) = b, \sigma(b) = c$ *et* $\sigma(c) = \sigma(1) = 1$*.* σ *ainsi définit est un endomorphisme du treillis résidué* $\mathcal{L}$*. Alors l'ensemble* $F_1 = \{b, c, 1\}$ *est un filtre* σ*-stable car* $\sigma(F_1) = \{c, 1\} \subseteq F_1$

(2) Soit $L = \{0, u, a, 1\}$ *tel que* $o < u < a < 1$*. On définit les opérateurs* $\odot$*,* $\rightarrow$ *comme suit :*

$\odot$	0	u	a	1
0	0	0	0	0
u	0	u	u	u
a	0	u	a	a
1	0	u	a	1

$\rightarrow$	0	u	a	1
0	1	1	1	1
u	0	1	1	1
a	0	u	1	1
1	0	u	a	1

Table 4: Tables du point et de la flèche du (2) de l'Exemple 2.1.

Alors $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge, \odot, \rightarrow, 0, 1)$ *est un treillis résidué et* $\sigma : L \rightarrow L$ *est un endomorphisme de* $\mathcal{L}$ *où* $\sigma(0) = 0$*,* $\sigma(u) = u$*,* $\sigma(a) = u$ *et* $\sigma(1) = 1$*. Alors,* $F_2 = \{a, 1\}$ *est un filtre qui n'est pas* σ*-stable.*

(3) $M(L)$ *est un filtre* σ*-stable de* $\mathcal{L}$ *pour tout endomorphisme* σ*.*

En effet la Proposition 2.1 étabit déjà que $M(L)$ *est un filtre de* $\mathcal{L}$*. Il reste donc à montrer que* $\sigma(M(L)) \subseteq M(L)$*. Soit* $y \in \sigma(M(L))$*, il existe* $x \in M(L)$ *tel que* $y = \sigma(x)$*. Ainsi,*

$$\begin{aligned} y'' &= \sigma(x)'' \\ &= \sigma\left(x''\right) \text{ car } \sigma \text{ endo ;} \\ &= \sigma(1) \text{ car } x \in M(L) \\ &= 1 \end{aligned}$$

D'où $y \in M(L)$ *c'est à dire* $M(L)$ *est un filtre* σ*-stable de* $\mathcal{L}$*.*

Proposition 2.5 ([6])

Soit $\mathcal{L}$ un treillis résidué, X un sous ensemble de L, F et G deux filtres de $\mathcal{L}$. Alors nous avons :

(1) Le **filtre engendré** par X noté $\langle X \rangle$ est définit comme étant le plus petit filtre de $\mathcal{L}$ contenant X. Plus formellement, nous avons :

$\langle X \rangle = \{a \in L : \exists n \in \mathbb{N}, \exists x_1, x_2, \ldots, x_n \in X \text{ tels que } x_1 \odot x_2 \odot \cdots \odot x_n \leq a\}$;

(2) Le filtre engendré par $F \cup G$ est :

$$\langle F \cup G \rangle = \{a \in L \mid \text{il existe } f \in F, g \in G \text{ tels que } a \geq f \odot g\} ;$$

(3) Pour tout $x \in L$, $\langle \{x\} \rangle := \langle x \rangle = \{a \in L \mid \exists n \in \mathbb{N} : x^n \leq a\}$.

Soit F un sous ensemble non vide. pour tous $x, y \in F$, définissons la relation d'équivalence $\sim$ par : $x \sim y \Leftrightarrow (x \to y \in F$ et $y \to x \in F)$ et notons par [x] la classe d'équivalence de x par la relation $\sim$.

Proposition 2.6

Soient $\mathcal{L}$ un treillis résidué et F un un filtre de $\mathcal{L}$. La relation d'équivalence $\sim$ définie ci-dessus est une relation de congruence et l'ensemble $\frac{L}{F} = \{[x], x \in L\}$ muni des opérations ci-dessous est une treillis résidué :

$$[x] \vee [y] = [x \vee y] \ \ , \ \ [x] \wedge [y] = [x \wedge y] \ \ , \ \ [x] \odot [y] = [x \odot y] \ \ , \ \ [x] \to [y] = [x \to y].$$

Remarque 2.1. $[1] = F$.

Théorème 2.7

Soient $\mathcal{L}$ un treillis résidué et σ un endomorphisme de $\mathcal{L}$. Alors étant donné un filtre F, l'application

$$\begin{array}{rccc} \bar{\sigma} : & \frac{L}{F} & \to & \frac{L}{F} \\ & [x] & \mapsto & [\sigma(x)] \end{array}$$

est bien définie si et seulement si F est un filtre σ-stable de $\mathcal{L}$.

Preuve. $\Leftarrow$: En supposant que F soit un filtre σ-stable de $\mathcal{L}$, étant donnés deux éléments [x] et [y] de $\frac{L}{F}$ tels que $[x] = [y]$, alors $x \sim y$ c'est à dire ($x \rightarrow y \in F$ et $y \rightarrow x \in F$), et comme F est un filtre σ-stable, on obtient $\sigma(x) \rightarrow \sigma(y) = \sigma(x \rightarrow y) \in \sigma(F) \subseteq F$ et $\sigma(y) \rightarrow \sigma(x) = \sigma(y \rightarrow x) \in \sigma(F) \subseteq F$. C'est-à-dire $\sigma(x) \sim \sigma(y)$ c'est à dire $[\sigma(x)] = [\sigma(y)]$. D'où $\bar{\sigma}$ est bien définie.

$\Rightarrow$: Supposons maintenant par l'absurde que $\bar{\sigma}$ est bien définie et que F ne soit pas un filtre σ-stable de $\mathcal{L}$.

Soit $L = \{0, a, b, c, 1\}$, où $0 < a < c, b < 1$ où c et b sont incomparables . Définissons $\odot$ et $\rightarrow$ de la manière suivante :

$\odot$	0	c	a	b	1
0	0	0	0	0	0
c	0	c	a	a	c
a	0	a	a	a	a
b	0	a	a	b	b
1	0	c	a	b	1

$\rightarrow$	0	c	a	b	1
0	1	1	1	1	1
c	0	1	b	b	1
a	0	1	1	1	1
b	0	c	c	1	1
1	0	c	a	b	1

Table 5: Tables du point et de la flèche de la preuve du Théorème 2.7.

Ainsi, $\mathcal{L}$ est un treillis résidué et $\sigma : L \rightarrow L$ définie par $\sigma(0) = 0$, $\sigma(a) = c, \sigma(b) = c$, $\sigma(c) = 1$ et $\sigma(1) = 1$ est un endomorphisme de $\mathcal{L}$. L'ensemble $F = \{b, 1\}$ est un filtre de $\mathcal{L}$. De plus, on a $b \rightarrow 1 = 1 \in F$ et $1 \rightarrow b = b \in F$ c'est à dire $[b] = [1]$, mais $[c] = \bar{\sigma}(b) = [\sigma(b)] \neq [\sigma(1)] = \bar{\sigma}(1) = [1]$ c'est à dire que $\bar{\sigma}$ n'est pas bien définie ce qui est absurde. ■

Le lemme suivant donne quelques propriétés de base des filtres σ-stables dans les treillis résidués.

Lemme 2.8

Soient $\mathcal{L}$ un treillis résidué, F et G des filtres σ-stables du treillis résidué $\mathcal{L}$. Alors les affirmations suivantes sont satisfaites :

1. $\sigma^n(F)$ est un filtre σ-stable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$;
2. $F \cap G$ est un filtre σ-stable ;
3. $\langle F \cup G \rangle$ est un filtre σ-stable ;
4. $D(F), \mathrm{Rad}(F)$ sont des filtres σ-stables de $\mathcal{L}$;
5. F^e est un filtre σ-stable ;
6. $F \subseteq F^e$.

Preuve. **1** Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $\sigma^{n+1}(F) = \sigma^n(\sigma(F)) \subseteq \sigma^n(F)$:

Soit $y \in \sigma^{n+1}(F)$ alors il existe $x \in \sigma(F)$ tel que $y = \sigma^n(x)$ or comme F est un filtre σ-stable, alors $x \in F$ c'est à dire $y \in \sigma^n(F)$.

2 Montrons que $\sigma(F \cap G) \subseteq F \cap G$.

Soit $y \in \sigma(F \cap G)$, alors $y = \sigma(x)$ avec $x \in F \cap G$. Ainsi, $x \in F$ et $x \in G$, ce qui implique que $\sigma(x) \in \sigma(F)$ et $\sigma(x) \in \sigma(G)$. Or F et G sont des filtres σ-stables c'est à dire $\sigma(F) \subseteq F$ et $\sigma(G) \subseteq G$. Ainsi, $\sigma(x) \in F$ et $\sigma(x) \in G$ c'est à dire $\sigma(x) \in F \cap G$.

Finalement, $y = \sigma(x) \in F \cap G$ c'est à dire $\sigma(F \cap G) \subseteq F \cap G$. Donc $F \cap G$ est un filtre σ-stable.

3 Soit $y \in \sigma(\langle F \cup G \rangle)$. Donc $y = \sigma(a)$ avec $a \in \langle F \cup G \rangle$. Ainsi, il existe $b \in F, c \in G$ tels que $b \odot c \leq a$. Alors $\sigma(b) \odot \sigma(c) \leqslant \sigma(a)$ or $\sigma(b) \in F$ et $\sigma(c) \in G$ car F et G sont des filtres σ-stables. Donc $y \in \langle F \cup G \rangle$.

4 Nous avons déjà établit à la Proposition 2.1 que D(X) est un filtre lorsque X est un filtre. Il reste à montrer que $\sigma(D(F)) \subseteq D(F)$. Soit $y \in \sigma(D(F))$, alors $y = \sigma(x)$ avec $x \in D(F)$. Ainsi, $y'' = \sigma(x'') \in \sigma(F)$ car $x'' \in F$ lorsque $x \in D(F)$. Ainsi, $y'' \in F$ car $\sigma(F) \subseteq F$. Donc $\sigma(D(F)) \subseteq D(F)$ ie D(F) est un filtre σ-stable.

De même, nous avons montrer à la Proposition 2.1 que Rad(F) est un filtre de $\mathcal{L}$. Soit $y \in \sigma(\text{Rad}(F))$, alors il existe $x \in \text{Rad}(F)$ tel que $y = \sigma(x)$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} y' \to y^n &= (\sigma(x))' \to (\sigma(x))^n \\ &= \sigma(x') \to \sigma(x^n) \\ &= \sigma(x' \to x^n) \in \sigma(F) \quad \text{car} \quad x \in \text{Rad}(F) \end{aligned}$$

Donc $y' \to y^n \in F$ car $\sigma(F) \subseteq F$. D'où la conclusion.

5 Soit $y \in \sigma(F^e)$, il existe $x \in F^e$ tel que $y = \sigma(x)$. Comme $x \in F^e$, nous obtenons $\sigma(x') \leq \sigma(a')$, pour un certain $a \in F$. Ainsi, $y \in F^e$, puisque F est un filtre σ-stable.

6 Soit $x \in F$. On sait que $0 \leq x$ et en appliquant le (3) de la Proposition 1.9 avec $z = 0$ on obtient $x' \leq 0' = 1 \in F$ ainsi $x \in F^e$.

■

Théorème 2.9

Soit $\mathcal{L}$ un treillis résidué régulier et F est un filtre de $\mathcal{L}$. Alors F^e est un filtre σ-stable de $\mathcal{L}$ si et seulement si F est un filtre σ-stable de $\mathcal{L}$.

Preuve. On suppose que F^e est un filtre σ-stable et soit $y \in \sigma(F)$ on sait que $F \subseteq F^e$ d'où $\sigma(F) \subseteq \sigma(F^e)$ or $\sigma(F^e) \subseteq F^e$ donc $\sigma(F) \subseteq F^e$. Ainsi, $y \in F^e$, d'où l'existence d'un $b \in F$ tel que $y' \leq b'$ ce qui entraine, $b = b'' \leq y'' = y$, donc $y \in F$.
Réciproquement, si F est un filtre σ-stable de $\mathcal{L}$, alors d'après le Lemme 2.8 précédent, F^e est un filtre σ-stable de $\mathcal{L}$. ■

Définition 2.10

On dit qu'un filtre propre F **admet une décomposition primaire**, s'il existe un nombre fini de filtres primaires G_i de $\mathcal{L}$, $(1 \leq i \leq n)$ tels que $F = \bigcap_{i=1}^{n} G_i$.

Corollaire 2.11

Soit F un filtre qui a une décomposition primaire telle que tout ses filtres primaires soient σ-stables. Alors F est un filtre σ-stable.

Preuve. Soit $F = \bigcap_{i=1}^{n} G_i$ tel que G_i est primaire, pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$. Alors $\sigma(F) = \sigma\left(\bigcap_{i=1}^{n} G_i\right) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} \sigma(G_i) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} G_i = F$. ■

Proposition 2.12

Soient F un filtre du treillis résidué $\mathcal{L}_1$, G un filtre du treillis résidué $\mathcal{L}_2$ et $\Gamma : L_1 \times L_2 \longrightarrow L_1 \times L_2$ un homomorphisme, où $\Gamma(a,b) = (\sigma(a), \gamma(b))$ tel que $\sigma : L_1 \longrightarrow L_1$ et $\gamma : L_2 \longrightarrow L_2$ sont des homomorphismes. Alors $F \times G$ est un filtre Γ-stable de $\mathcal{L}_1 \times \mathcal{L}_2$ si et seulement si F est un filtre σ-stable de $\mathcal{L}_1$ et G est un filtre γ-stable de $\mathcal{L}_2$.

Théorème 2.13

Soit $\mathcal{L}$ un treillis résidué et F un filtre de $\mathcal{L}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. F est un filtre σ-stable de $\mathcal{L}$;
2. Pour tout $x \in F$, $x \odot \sigma(x) \in F$;
3. Pour tout $x \in F$, $x \wedge \sigma(x) \in F$;
4. Pour tout $x \in F$, $x \rightarrow \sigma(x) \in F$;
5. $\bar{\sigma} : \frac{L}{F} \longrightarrow \frac{L}{F}$ est un endomorphisme, où $\bar{\sigma}([a]) = [\sigma(a)]$.

Preuve. $1 \Rightarrow 2$: On suppose que F est un filtre σ-stable. Soit $x \in F, \sigma(x) \in \sigma(F) \subseteq F$ car en hypothèse F est un filtre σ-stable. Donc $\sigma(x) \in F$, or $x \in F$ et F filtre donc $x \odot \sigma(x) \in F$.

2 $\Rightarrow 3$: On suppose que pour tout $x \in F, x \odot \sigma(x) \in F$. Soit $x \in F$. On sait que $x \odot \sigma(x) \leq x \wedge \sigma(x)$. D'où le résultat étant donné que F est un filtre.

$3 \Rightarrow 4$: On suppose que pour tout $x \in F, x \wedge \sigma(x) \in F$. Soit $x \in F$, d'après 3), $x \wedge \sigma(x) \in F$. Or $x \wedge \sigma(x) \leq \sigma(x)$ et F filtre. D'où $\sigma(x) \in F$. De plus, $\sigma(x) \leq x \to \sigma(x)$ et F filtre donc $x \to \sigma(x) \in F$.

$4 \Rightarrow 5$: On suppose que pour tout $x \in F, x \to \sigma(x) \in F$. Soit $[a] = [b]$, alors $a \to b \in F$ et $y \to a \in F$. Ainsi, on a $(a \to b) \to \sigma(a \to b) \in F$ et $(b \to a) \to \sigma(b \to a) \in F$. Alors $\bar{\sigma}([a]) = \bar{\sigma}([b])$, car F est filtre.

$5 \Rightarrow 1$: On suppose que $\bar{\sigma}$ est un endomoprhisme. Soit $y \in \sigma(F)$ alors $y = \sigma(x)$ avec $x \in F$. Comme $1 \in F$, alors $x \sim 1$ c'est à dire $[x] = [1]$. Donc, $\bar{\sigma}[x] = \bar{\sigma}[1]$ et ainsi $[\sigma(x)] = [\sigma(1)]$ c'est à dire $1 \to \sigma(x) = \sigma(x) \in F$. ■

Proposition 2.14

Soit $\mathcal{L}$ une Gödel-algèbre. Alors tout filtre de $\mathcal{L}$ est σ-stable si et seulement si $x \leq \sigma(x)$ pour tout $x \in L$.

Preuve. Soit $x \in L$, $x \in \langle x \rangle$ or $\langle x \rangle$ est un filtre et par l'hypothèse $\sigma(x) \in \sigma(\langle x \rangle) \subseteq \langle x \rangle$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x^n = x \leq \sigma(x)$, car $\mathcal{L}$ une Gödel-algèbre.
Réciproquement, soit F un filtre de $\mathcal{L}$. On suppose que $x \leq \sigma(x)$ pour tout $x \in L$, alors $x \to \sigma(x) = 1 \in F$ pour tout $x \in F$. Donc, par le Théorème 2.13 (4) $\Rightarrow$ (1), F est un filtre σ-stable, pour tout filtre F de $\mathcal{L}$. ■

Théorème 2.15

Soit $\mathcal{L}$ un treillis résidué. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(a) $((x \to y) \to y) \to x = y \to x$ pour tous $x, y \in L$;

(b) $(x \to y) \to y = (y \to x) \to x$ pour tous $x, y \in L$;

(c) Soient $x, y, z \in L$. Si $x \to z \leq y \to z, z \leq x$, alors $y \leq x$

(d) Soient $x, y, z \in L$. Si $x \to z \leq y \to z, z \leq x$ et $z \leq y$, alors $y \leq x$;

(e) Soient $x, y, z \in L$. Si $y \leq x$, alors $(x \to y) \to y \leq x$;

(f) $\mathcal{L}$ est une MV-algèbre.

Preuve. (a $\Leftrightarrow$ b) : On suppose que $((x \to y) \to y) \to x = y \to x$ pour tous $x, y \in L$. De par la Proposition 1.9 (2), on a :

$$\begin{aligned}
&((x \to y) \to y) \to ((y \to x) \to x)\\
&= (y \to x) \to (((x \to y) \to y) \to x)\\
&= (y \to x) \to (y \to x)\\
&= 1
\end{aligned}$$

donc, $(x \to y) \to y \leq (y \to x) \to x$, de manière similaire, on obtient $(x \to y) \to y \geq (y \to x) \to x$. Ainsi, $(x \to y) \to y = (y \to x) \to x$.

Réciproquement, supposons que $(x \to y) \to y = (y \to x) \to x$ pour tous $x, y \in L$, alors d'après la Proposition 1.9 (2),

$$\begin{aligned}
&(y \to x) \to (((x \to y) \to y) \to x)\\
&= ((x \to y) \to y) \to ((y \to x) \to x)\\
&= 1
\end{aligned}$$

Ainsi, $(y \to x) \to (((x \to y) \to y) \to x) = 1$ c'est à dire $y \to x \leq ((x \to y) \to y) \to x$. Maintenant à l'aide de la Proposition 1.9 (12) et (16),

$$\begin{aligned}
&(((x \to y) \to y) \to x) \to (y \to x)\\
&\geq y \to ((x \to y) \to y)\\
&= (x \to y) \to (y \to y)\\
&= (x \to y) \to 1\\
&= 1
\end{aligned}$$

Donc $(((x \to y) \to y) \to x) \to (y \to x) = 1$, c'est à dire, $((x \to y) \to y) \to x \leq y \to x$. Ainsi $((x \to y) \to y) \to x = y \to x$.

(b $\Rightarrow$ c) : On suppose que pour tous $x, y \in L$, $(x \to y) \to y = (y \to x) \to x$. Soit $x, y, z \in L$, tels que $x \to z \leq y \to z$ et $z \leq x$. D'après la Proposition 1.9,

$$\begin{aligned}
1 &= (x \to z) \to (y \to z)\\
&= y \to ((x \to z) \to z)\\
&= y \to ((z \to x) \to x)\\
&= y \to (1 \to x)\\
&= y \to x
\end{aligned}$$

Ainsi $y \leq x$.

(c $\Rightarrow$ d) : est évident.

(d $\Rightarrow$ e) : On suppose que pour tous $x, y, z \in L$, si $x \to z \leq y \to z, z \leq x$ et $z \leq y$, alors $y \leq x$. Soit $x, y \in L$ tels que $y \leq x$. Alors d'après la Proposition 1.9 (9), on a : $x \to y \leq ((x \to y) \to y) \to y$. D'après (d), nous obtenons $(x \to y) \to y \leq x$ car $y \leq (x \to y) \to y$.

(e $\Rightarrow$ b) : On suppose que pour tous $x, y, z \in L$, si $y \leq x$, alors $(x \to y) \to y \leq x$. Comme $x \leq (y \to x)$, d'après la Proposition 1.9, on a $((y \to x) \to x) \to y \leq x \to y$. Comme $y \leq (y \to x) \to x$, d'après la Proposition 1.9, et (e) on obtient :

$$
\begin{aligned}
(x \to y) \to y &\leq (((y \to x) \to x) \to y) \to y \\
&\leq (y \to x) \to x
\end{aligned}
$$

De manière similaire, $(y \to x) \to x \leq (x \to y) \to y$ c'est à dire $(x \to y) \to y = (y \to x) \to x$. Ce qui complete la preuve.

(f $\Leftrightarrow$ b) : De par la définition de MV-algèbre. ■

Théorème 2.16

Soit $\mathcal{L}$ une MV-algèbre et $\sigma : L \longrightarrow L$ un endomorphisme de $\mathcal{L}$ tel que $(x \odot \sigma(x)) \to x^n = x^n$, pour tout $n > 1$. Alors tout filtre de $\mathcal{L}$ est σ-stable si et seulement si $x \leq \sigma(x)$, pour tout $x \in L$.

Preuve. Supposons que tout filtre de $\mathcal{L}$ soit σ-stable. Considérons $x \in L$. Comme $\sigma(< x >) \subseteq < x >$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x^n \leq \sigma(x)$. La Proposition 1.9(3), (4) nous permet d'affirmer que $x \odot (\sigma(x) \to x^n) \leq (x \odot \sigma(x)) \to x^n$ et aisni $x \odot (\sigma(x) \to x^n) \leq x^n$. Alors, $\sigma(x) \to x^n \leq x \to x^n$ par la propriété de résiduation. Ainsi, comme $\mathcal{L}$ est une MV-algèbre et $x^n \leq \sigma(x)$ par le Théorème 2.15, on obtient $x \leqslant \sigma(x)$. La preuve du sens inverse est triviale. ■

Proposition 2.17

Soit F un filtre de='un treillis résisué $\mathcal{L}$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) F est un filtre implicatif de $\mathcal{L}$,

(ii) $x \to x^2 \in F$, pour tout $x \in L$.

Preuve. (i) $\Rightarrow$ (ii) On suppose que F est un filtre implicatif de $\mathcal{L}$. Soit $x \in L$. D'après Proposition 1.9 (2), on a $x \to (x \to x^2) = x^2 \to x^2 = 1 \in F$. De plus $x \to x = 1 \in F$, ainsi $x \to x^2 \in F$ car F est un filtre implicatif.

(ii) $\Rightarrow$ (i) On suppose que $x \to x^2 \in F$, pour tout $x \in L$. Considérons $x, y \in L$ tels que $x \to (x \to y) \in F$, ainsi $x^2 \to y \in F$. De plus d'après Proposition 1.9 (16), $(x \to x^2) \odot (x^2 \to y) \leq (x \to y)$. Or d'après l'hypothèse, $x \to x^2 \in F$. On a donc $(x \to x^2) \odot (x^2 \to y) \in F$ car F filtre c'est à dire $x \to y \in F$ car F filtre. Donc d'après [proposition 4, [9]], F est un filtre implicatif de $\mathcal{L}$. ■

Proposition 2.18

Soit F un filtre implicatif, σ un endomorphisme injectif d'un treillis résidué $\mathcal{L}$ tel que $\sigma(F) = \{1\}$. Alors $\mathcal{L}$ est une Gödel algèbre.

Preuve. D'après la Proposition 2.17, $x \to x^2 \in F$ pour tout $x \in L$. Ainsi, de par l'hypothèse, $\sigma(x) \to \sigma(x^2) = 1$ et ainsi $\sigma(x) = \sigma(x^2)$. De plus, comme σ est injectif, on obtient que $\mathcal{L}$ est une Gödel algèbre. ■

Proposition 2.19

Soit F un filtre σ-stable de $\mathcal{L}$ tel qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \to y \in \sigma^n(F)$ ou $y \to x \in \sigma^n(F)$, pour tous $x, y \in L$. Alors F est un filtre premier de second type de $\mathcal{L}$.

Corollaire 2.20

Soit F un filtre σ-stable de $\mathcal{L}$ tel que σ soit surjective. Alors F est un filtre premier de second type si et seulement si $x \to y \in \sigma^n(F)$ ou $y \to x \in \sigma^n(F)$, pour tous $x, y \in L$ et $n \in \mathbb{N}$.

2.21 Filtres invariants par endomorphismes de treillis résidués

Définition 2.22

Soit $\sigma : L \to L$ un endomorphisme du treillis résidué $\mathcal{L}$. Alors le filtre F est appelé un filtre **σ-invariant** si $\sigma^{-1}(F) = F$.

Exemple 2.2. *(1) Soit $L = \{0, a, b, c, 1\}$, où $0 < a < b < c < 1$. On définit $\odot$ et $\to$ comme suit :*

$\odot$	0	a	b	c	1
0	0	0	0	0	0
a	0	0	a	a	a
b	0	a	b	b	b
c	0	a	b	a	c
1	0	a	b	c	1

$\to$	0	a	b	c	1
0	1	1	1	1	1
a	a	1	1	1	1
b	0	a	1	1	1
c	0	a	b	1	1
1	0	a	b	c	1

TABLE 6: Tables du point et de la flèche du (1) de l'exemple 2.2.

Alors $\mathcal{L}$ est un treillis résidué. Soit $\sigma : L \to L$ définie par $\sigma(0) = 0$, *$\sigma(a) = a, \sigma(b) = b$ et $\sigma(c) = c, \sigma(1) = 1$. σ ainsi définie est un endomorphisme du treillis résidué $\mathcal{L}$. $F = \{b, c, 1\}$ est un filtre σ-stable. De plus, $\sigma^{-1}(F) = \{b, c, 1\}$, donc F est un filtre σ-invariant.*

(2) Soit $L = \{0, a, b, c, 1\}$, où $0 < a < b < 1 et 0 < a < c < 1$. Definissons $\odot$ et $\to$ comme suit :

$\odot$	0	c	a	b	1
0	0	0	0	0	0
c	0	c	a	a	c
a	0	a	a	a	a
b	0	a	a	b	b
1	0	c	a	b	1

$\to$	0	c	a	b	1
0	1	1	1	1	1
c	0	1	b	b	1
a	0	1	1	1	1
b	0	c	c	1	1
1	0	c	a	b	1

TABLE 7: Tables du point et de la flèche du (2) de l'exemple 2.2.

Alors $\mathcal{L}$ est un treillis résidué et $\sigma : L \to L$ définie par $\sigma(0) = 0$ $\sigma(a) = a, \sigma(b) = c, \sigma(c) = b$ et $\sigma(1) = 1$ est un $\mathcal{L}$-endomorphisme. Et l'ensemble $F = \{b, 1\}$ est un filtre qui n'est pas σ-invariant. Par contre, l'ensemble $G = \{a, b, c, 1\}$ est un filtre σ-invariant.

Lemme 2.23

Soit F un filtre σ-invariant. Alors F est un filtre σ-stable et $\ker(\sigma) \subseteq F$. La réciproque est vraie lorsque $\sigma^2 = \sigma$.

Preuve. Soit $a \in \ker(\sigma)$. Alors $\sigma(a) = 1 \in F$ c'est-à-dire $a \in \sigma^{-1}(F)$ et $a \in F$. De plus, soit $y \in \sigma(F) = \sigma(\sigma^{-1}(F)) = F$ c'est à dire $y \in F$. Donc $\sigma(F) \subseteq F$
Réciproquement, puisque F est un filtre σ-stable, $F \subseteq \sigma^{-1}(F)$. Maintenant, pour $a \in \sigma^{-1}(F), \sigma^2(a) = \sigma(a) \in F$ et donc $\sigma^2(a) \to \sigma(a) = 1$, c'est à dire, $\sigma(\sigma(a) \to a) = 1$. Ainsi $\sigma(a) \to a \in \ker(\sigma) \subseteq F$ d'après l'hypothèse. Comme F est un filtre et $\sigma(a) \in F$, nous obtenons $a \in F$. ■

Proposition 2.24

Soient $\mathcal{L}$ un treillis résidué, F et G des filtres σ-invariants du treillis résidué $\mathcal{L}$. Alors les affirmations suivantes sont satisfaites :

1. $F \cap G$ est un filtre σ-invariant ;
2. $\langle F \cup G \rangle$ est un filtre σ-invariants lorsque σ est surjectif ;
3. $\mathrm{Rad}(F)$ est un filtre σ-invariant de $\mathcal{L}$.

Preuve. (1) D'après le lemme 2.8, $F \cap G$ est un filtre σ-stable donc $F \cap G \subseteq \sigma^{-1}(F \cap G)$.

Soit $a \in \sigma^{-1}(F \cap G)$. Alors $\sigma(a) \in F$ et $\sigma(a) \in G$, c'est à dire, $a \in \sigma^{-1}(F) = F$ et $a \in \sigma^{-1}(G) = G$ car F et G sont des filtres σ-invariants. Ainsi, $\sigma^{-1}(F \cap G) = F \cap G$.

(2) D'après le Lemme 2.8, $\langle F \cup G \rangle$ est un filtre σ-stable et donc $\langle F \cup G \rangle \subseteq \sigma^{-1}(\langle F \cup G \rangle)$. Considérons $\alpha \in \sigma^{-1}(\langle F \cup G \rangle)$. Donc, il existe $b \in F, c \in G$ tels que $b \odot c \leq \sigma(\alpha)$. Puisque σ est un endomorphisme surjectif et que F, G sont des filtres σ-invariants, il existe donc $z \in F, t \in G$ tels que $\sigma(z) \odot \sigma(t) \leq \sigma(\alpha)$. Ainsi, $z \odot t \to \alpha \in \ker(\sigma) \subseteq \langle F \cup G \rangle$, par le Lemme 2.23 ci-dessus.

Maintenant, comme F et G sont des filtres σ-invariants, $\alpha \in \langle F \cup G \rangle$.

(3) Considérons $\alpha \in \sigma^{-1}(\mathrm{Rad}(F))$. Donc $\sigma(\alpha' \to \alpha^n) \in F$, pour tout $n \in N$. Puisque F est un filtre σ-invariant, nous avons $\alpha' \to \alpha^n \in F$. Par conséquent, $\alpha \in \mathrm{Rad}(F)$. Par le Lemme 2.23, la preuve de la réciproque est claire. ∎

Proposition 2.25

Soit σ un endomorphisme surjectif d'un treillis résidué $\mathcal{L}$ tel que $\sigma^2 = \sigma$. Alors pour tout filtre σ-stable F de $\mathcal{L}$ tel que $\ker(\sigma) \subseteq F$, nous avons $\sigma(\mathrm{Rad}(F)) = \mathrm{Rad}(F)$.

Preuve. Soit $\alpha \in \mathrm{Rad}(F)$. Alors $\alpha' \to \alpha^n \in F$, pour tout $n \in N$. Puisque σ est surjective, il existe $b \in L$ tel que $\sigma(b) = \alpha$ et donc $\alpha' \to \alpha^n = \sigma(b' \to b^n) \in F$. Ainsi, $b' \to b^n \in \sigma^{-1}(F) = F$, car F est un filtre σ-invariant d'après le Lemme 2.23. Donc $\sigma^{-1}(\alpha' \to \alpha^n) \subseteq F$, c'est à dire, $\sigma^{-1}(\alpha) \in \mathrm{Rad}(F)$, c'est à dire, $\alpha \in \sigma(\mathrm{Rad}(F))$.
D'autre part, étant donné $y \in \sigma(\mathrm{Rad}(F))$, $y = \sigma(x)$ pour un certain $x \in \mathrm{Rad}(F)$. Or d'après un résultat précédent, comme F est σ-invariant, alors $\mathrm{Rad}(F)$ est σ-invariant. Ainsi, $x \in \sigma^{-1}(\mathrm{Rad}(f))$, donc $y = \sigma(x) \in \sigma\left(\sigma^{-1}(\mathrm{Rad}(f))\right) = \mathrm{Rad}(F)$. ∎

Proposition 2.26

Soit F un filtre σ-stable tel que pour tout $a \in L$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\sigma(a) \to a^n \in F$. Alors F est σ-invariant.

Preuve. Commme F est un filtre σ-stable alors $F \subseteq \sigma^{-1}(F)$. Soit $x \in \sigma^{-1}(F)$. D'après l'hypothèse, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\sigma(x) \to x^n \in F$ or $\sigma(x) \in F$ et F filtre donc $x^n \in F$. De plus, $x^n \leq x$ pour tout $x \in L$. Donc $x \in F$ car F filtre. Alors F est σ-invariant. ■

2.27 Filtres premiers invariants par endomorphismes de treillis résidués

Rappelons qu'un filtre F d'un treillis résidué $\mathcal{L}$ est dit premier si pour tous $x, y \in L$, $x \vee y \in F \Rightarrow x \in F$ ou $y \in F$.

Théorème 2.28 (théorème des filtres premiers σ-invariants)

Soit σ un endomorphisme surjectif et F un filtre σ-invariant tel que pour tout $x \notin F$, il existe $t \in \mathbb{N}$ tel que $\sigma(x) = x^t$, et I un sous-ensemble de réunion de L tel que $F \cap I = \emptyset$. Alors il existe un filtre premier σ-invariant P tel que $F \subseteq P$ et $P \cap I = \emptyset$.

Preuve. Considérons $\sum = \{G \mid G$ est un filtre σ-invariant, $F \subseteq G$ et $G \cap I = \emptyset\}$.

Clairement, $F \in \sum$. On peut facilement vérifier que $\cup_{i \in I} G_i$ est une borne supérieure pour toute chaîne $\{G_i\}_{i \in \mathrm{I}}$ dans $\sum$. Par le Lemme de Zorn, $\sum$ a un élément maximal P.

Pour $x, y \in L$ tels que $x \notin P$ et $y \notin P$, $P \subsetneq P \vee \langle x \rangle$. De plus, $P \vee \langle x \rangle$ est un filtre σ-invariant car pour tout $a \in P \vee \langle x \rangle$, il existe $b \in P$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $b \odot x^n \leqslant a$.

Ainsi, nous avons $\sigma(b) \odot \sigma(x^n) \leqslant \sigma(a)$. Par conséquent, d'après l'hypothèse, nous avons $a \in \sigma^{-1}(P \vee \langle x \rangle)$. Maintenant, soit

$a \in \sigma^{-1}(P \vee \langle x \rangle)$. Puisque σ est surjective, il existe $z \in P$ et $c \in L$ tels que $\sigma(c) = x$ et $\sigma(z \odot c^n) \leqslant \sigma(a)$. Ainsi, $z \odot c^n \to a \in \ker(\sigma) \subseteq P \subseteq P \vee \langle c \rangle$. Comme $c \notin F$ par hypothèse, $a \in P \vee \langle c \rangle \subseteq P \vee \langle \sigma(c) \rangle = P \vee \langle x \rangle$. Donc $P \vee \langle x \rangle$ est un filtre σ-invariant. Par maximalité de P, $(P \vee \langle x \rangle) \cap \mathrm{I} \neq \emptyset$ et $(P \vee \langle y \rangle) \cap \mathrm{I} \neq \emptyset$. Pour $a \in (P \vee \langle x \rangle) \cap I$ et $b \in (P \vee \langle y \rangle) \cap I$, alors $a \vee b \in P \vee \langle x \vee y \rangle$.

Supposons que $x \vee y \in P$. Alors $a \vee b \in P \cap I$, ce qui est une contradiction. Donc P est un filtre premier. ■

Corollaire 2.29

Soient σ un endomorphisme surjectif, F un filtre σ-invariant d'un treillis résidué $\mathcal{L}$ tels que pour tout $x \notin F$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\sigma(x) = x^n$. Si $y \notin F$, alors il existe un filtre premier σ-invariant P de L tel que $F \subseteq P$ et $y \notin P$.

Corollaire 2.30

Soit σ un endomorphisme surjectif et F un filtre σ-invariant de $\mathcal{L}$ tel que pour tout $x \notin F$, il existe $n \in N$ tel que $\sigma(x) = x^n$. Alors $F = \bigcap\{P \mid P$ est un filtre premier σ-invariant, $F \subseteq P\}$.

Corollaire 2.31

Soit σ un endomorphisme surjectif tel que pour tout $x \notin \ker(\sigma)$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sigma(x) = x^n$. Alors $\ker(\sigma) = \bigcap\{P \mid P$ est un filtre premier σ-invariant $\}$.

Définition 2.32 ([2])

Une topologie sur un ensemble X est la collection $\mathcal{T}$ de parties de X vérifiant les conditions suivantes :

- ♣ L'ensemble vide $\emptyset$ et X lui-même appartiennent à $\mathcal{T}$;
- ♣ $\mathcal{T}$ est stable par union arbitraire (c'est-à-dire que toute union d'éléments de $\mathcal{T}$ appartient à $\mathcal{T}$) ;
- ♣ $\mathcal{T}$ est stable par intersection finie (c'est-à-dire que toute intersection finie d'éléments de $\mathcal{T}$ appartient à $\mathcal{T}$).

L'ensemble X muni de la topologie $\mathcal{T}$ est appelé **espace topologique**. Parfois, un tel espace est noté $(X, \mathcal{T})$. Les parties de X qui appartiennent à $\mathcal{T}$ sont appelées parties ouvertes de X.

Définition 2.33 ([2])

Soient (X, O) un espace topologique et $\mathcal{B} \subseteq O$.

- On dit que $\mathcal{B}$ est une **base d'ouverts** de X (ou **base de la topologie** O) si tout ouvert non vide de X est une réunion d'ouverts appartenant à $\mathcal{B}$;
- Un **recouvrement** de X est une famille $(A_i)_{i\in I}$ de parties de X telle que $X = \bigcup_{i\in I} A_i$. Si de plus I est un ensemble fini, on dit que est un **recouvrement fini** de X ;
- Soit $(A_i)_{i\in 1}$ un recouvrement de X. Si $J \subset I$ tel que $X = \bigcup_{j\in J} A_j$, alors on dit que $\left(A_j\right)_{j\in J}$ est un **sous-recouvrement** de $(A_i)_{i\in I}$. Si de plus, J est fini, on dit alors que $\left(A_j\right)_{j\in J}$ est un sous-recouvrement fini de $(A_i)_i \in I$;
- Un **recouvrement ouvert** de X est une famille d'ouverts $(U_i)_{i\in I}$ de X telle que $X = \cup_{i\in I} U_i$.

Définition 2.34 ([2])

Soit X un espace topologique. On dit que :

- X est **séparé** si, et seulement si, pour tout point x de X, l'intersection de tous les voisinages fermés de x se réduit au singleton $\{x\}$;
- X est de **Kolmogorov**, ou **vérifie la propriété** T_0, si pour tous points distincts x et y dans X, il existe un voisinage de l'un qui ne contient pas l'autre point ;
- X un T_1**-espace** si pour tous points distincts x et y dans X, il existe un voisinage V de x, et un voisinage W de y dans X tels que $y \notin V$ et $x \notin W$;
- X est un T_2**-espace** ou X est **séparé** ou encore X est **de Hausdorff** s'il vérifie la propriété suivante, appelée **axiome de Hausdorff** : Pour tous points distincts x et y dans X, il existe un voisinage U de x dans X et un voisinage V de y dans X tels que $U \cap V = \emptyset$.

Étant donné un espace topologique séparé X, on dit que X est **compact** si de tout recouvrement ouvert de X, on peut extraire un sous-recouvrement fini. Autrement dit, pour toute famille d'ouverts $(U_i)_{i\in I}$ de X telle que $X = \cup_{i\in I} U_i$, il existe un sous ensemble fini J de I tel que $X = \cup_{i\in J} U_i$.

Dans la suite de ce Chapitre, $\mathcal{L}$ est un treillis résidué avec au moins deux éléments et σ est un endomorphisme surjectif tel que pour tout $x \notin \ker(\sigma)$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sigma(x) = x^n$.

$\mathrm{Spec}^{\sigma}(\mathcal{L})$ désigne l'ensemble de tous les filtres premiers σ-invariants de $\mathcal{L}$. Pour tout $A \subseteq L$, considérons $H(A) = \{P \in \mathrm{Spec}^{\sigma}(\mathcal{L}) \mid A \nsubseteq P\}$ et pour tout $x \in L, H(x) = H(\{x\})$. Alors les conditions suivantes psont vraies.

Lemme 2.35

Soit $\mathcal{L}$ un treillis résidué. pour tous $x, y \in L$, on a :

1. $\cup_{x \in L} H(x) = \mathrm{Spec}^{\sigma}(\mathcal{L})$;
2. $H(x) \cap H(y) = H(x \vee y)$;
3. $H(x) \cup H(y) = H(x \wedge y)$;
4. $H(x) = \emptyset \Leftrightarrow x \in ker(\sigma)$
5. $H(0) = \mathrm{Spec}^{\sigma}(\mathcal{L})$.

1. Soit $P \in \bigcup_{x \in L} H(x)$, cela signifie qu'il existe un $x \in L$ tel que $P \in H(x)$. Par définition de $H(x)$, cela implique que P est dans l'ensemble de tous les filtres premiers σ-invariants de $\mathcal{L}$, c'est-à-dire $P \in \mathrm{Spec}^{\sigma}(\mathcal{L})$.

   Montrons l'inclusion inverse : Soit $P \in \mathrm{Spec}^{\sigma}(\mathcal{L})$. Puisque P est un filtre premier σ-invariant de $\mathcal{L}$, il ne contient pas l'élément 0 , donc $0 \notin P$. Ceci implique que P est dans $H(0)$. Ainsi, P est dans au moins un $H(x)$ avec $x \in L$, ce qui montre que P est dans l'union de tous les $H(x)$.

2. **<u>Inclusion $\subseteq$</u>** : Soit $P \in H(x) \cap H(y)$. Cela signifie que x et y ne sont pas dans P, donc leur supremum $x \vee y$ non plus. Ainsi, P ne contient pas $x \vee y$, ce qui implique que $P \in H(x \vee y)$.

   <u>Inclusion $\supseteq$</u> : Soit $P \in H(x \vee y)$. Cela signifie que $x \vee y$ n'est pas dans P. Mais si $x \vee y$ n'est pas dans P, alors ni x, ni y ne peuvent être dans P, sinon leur supremum $x \vee y$ le serait aussi. Ainsi, P ne contient ni x, ni y, ce qui signifie que P appartient à la fois à $H(x)$ et à $H(y)$, donc $P \in H(x) \cap H(y)$.

3. **<u>Inclusion $H(x) \cup H(y) \subseteq H(x \wedge y)$</u>** : Supposons que $P \in H(x) \cup H(y)$.

   Cela signifie que soit P ne contient pas x ou P ne contient pas y. Ainsi, P ne peut pas contenir $x \wedge y$ non plus, car si c'était le cas, P contiendrait à la fois x et y. Par conséquent, P est également dans $H(x \wedge y)$.

   <u>Inclusion $H(x) \cup H(y) \supseteq H(x \wedge y)$</u> : Supposons que $P \in H(x \wedge y)$. Cela signifie que $x \wedge y$ n'est pas dans P. Comme $x \odot y \leq x \wedge y \leq x$ et $x \odot y \leq x \wedge y \leq y$, alors x et y ne peuvent pas être tous deux à la fois dans P. Donc, P est soit dans $H(x)$ et soit $H(y)$, ce qui implique que P est dans l'union $H(x) \cup H(y)$.

4 $H(0) = \{P \in \mathrm{Spec}^{\sigma}(\mathcal{L}) \mid 0 \notin P\} = \{P \in \mathrm{Spec}^{\sigma}(\mathcal{L})\} = \mathrm{Spec}^{\sigma}(\mathcal{L})$ Car tout filtre premier ne contient pas 0 .

Remarque 2.2. *Le Lemme 2.35 ci-dessus nous permet de conclure que la collection* $\{H(x) \mid x \in L\}$ *forme une base pour la topologie sur* $\mathrm{Spec}^{\sigma}(\mathcal{L})$.

Théorème 2.36

Soit $\mathcal{L}$ un treillis résidué tel que chaque $H(x)$ est compact. Alors les assertions suivantes sont vraies.
(i) Soit C un sous-ensemble compact ouvert de $\mathrm{Spec}^{\sigma}(\mathcal{L})$. Alors il existe $x \in L$ tel que $C = H(x)$.
(ii) $\mathrm{Spec}^{\sigma}(\mathcal{L})$ est un espace T_0.

Preuve. (i) Supposons que C soit un sous-ensemble compact ouvert de $\mathrm{Spec}^{\sigma}(L)$. Comme C est ouvert, il existe $A \subseteq L$ tel que $C = \cup_{a \in A} H(a)$, et il existe également $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ tels que $C = \cup_{i=1}^{n} H(a_i)$ car C est compact. Par conséquent, $C = H(x)$ avec $x = a_1 \wedge a_2 \wedge \cdots \wedge a_n \in L$.

(ii) Soient P et Q deux filtres premiers σ-invariants distincts. Sans nuire à la généralité, supposons que $P \nsubseteq Q$. Choisissons un élément $x \in L$ tel que $x \in P$ et $x \notin Q$. Par conséquent, $P \notin H(x)$ et $Q \in H(x)$. Ainsi, $\mathrm{Spec}^{\sigma}(L)$ est un espace T_0. ∎

Pour tout $A \subseteq L$, notons $K(A) = \{P \in \mathrm{Spec}^{\sigma}(L) \mid A \subseteq P\}$. Clairement, $K(A) = \mathrm{Spec}^{\sigma}(\mathcal{L}) - H(A)$. Ainsi, $K(A)$ est un ensemble fermé dans $\mathrm{Spec}^{\sigma}(\mathcal{L})$. De plus, tout ensemble fermé dans $\mathrm{Spec}^{\sigma}(\mathcal{L})$ est de la forme $K(A)$ avec $A \subseteq L$.

Théorème 2.37

La fermeture de tout $X \subseteq \mathrm{Spec}^{\sigma}(\mathcal{L})$ est donnée par $\bar{X} = K\left(\bigcap_{P \in X} P\right)$.

Preuve. Soit $X \subseteq \mathrm{Spec}^{\sigma}(\mathcal{L})$. Considérons $Q \in X$. Alors $\bigcap_{P \in X} P \subseteq Q$ et donc $Q \in K\left(\bigcap_{P \in X} P\right)$. Ainsi, $K\left(\bigcap_{P \in X} P\right)$ est un ensemble fermé contenant X. Soit C un ensemble fermé contenant X dans $\mathrm{Spec}^{\sigma}(L)$. Alors $C = K(A)$ avec $A \subseteq L$. Comme $X \subseteq C = K(A)$, nous avons donc $A \subseteq P$ pour tout $P \in X$. Ainsi, $A \subseteq \bigcap_{P \in X} P$. Par conséquent, $K\left(\bigcap_{P \in X} P\right) \subseteq K(A)$. Ainsi, $K\left(\bigcap_{P \in X} P\right)$ est l'ensemble fermé le plus petit contenant X. Ainsi, $\bar{X} = K\left(\bigcap_{P \in X} P\right)$. ∎

Définition 2.38

Soit $\mathcal{L}$ un treillis résidué. Un filtre premier P de $\mathcal{L}$ est appelé un filtre σ**-premier** si pour chaque $x \in P$, il existe $y \notin P$ tel que $x \vee y \in \ker(\sigma)$.

Proposition 2.39

Tout filtre σ-premier σ-invariant d'un treillis résidué $\mathcal{L}$ est un filtre σ-invariant premier minimal.

Preuve. Soit P un filtre σ-premier σ-invariant d'un treillis résidué $\mathcal{L}$. Supposons que Q soit un filtre premier σ-invariant tel que $Q \subseteq P$. Pour $x \in P$ et $x \notin Q$, puisque P est σ-premier, il existe $y \notin P$ tel que $x \vee y \in \ker(\sigma)$. De plus, Q est σ-invariant, donc $x \vee y \in Q$. Comme $y \notin P$, on a $y \notin Q$. Par conséquent, $x \vee y \notin Q$, ce qui est une contradiction. Ainsi, P est un filtre premier σ-invariant minimal. ■

Proposition 2.40

Soit $\mathcal{L}$ un treillis résidué et σ un endomorphisme surjectif tel que pour tout $x \notin \ker(\sigma)$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\sigma(x) = x^n$. Alors tout filtre minimal premier σ-invariant de $\mathcal{L}$ est σ-premier.

Preuve. Soit P un filtre minimal premier σ-invariant et soit $a \in P$. Considérons $S = \{x \in L \mid$ il existe $b \in L - P$ tel que $a \vee b \geq x\}$. Ainsi, S est un **sous-ensemble de réunion**. De plus, $L - P \subseteq S$ et $a \in S$. Supposons que $\ker(\sigma) \cap S = \emptyset$, d'après le Théorème 2.28, il existe un filtre premier σ-invariant Q de L tel que $Q \cap S = \emptyset$. Ainsi, comme P est un filtre minimal premier σ-invariant, $Q = P$. Donc $a \in Q \cap S$ qui est absurde. Ainsi, $\ker(\sigma) \cap S \neq \emptyset$. Supposons que $t \in \ker(\sigma) \cap S$. Alors, il existe $I \in L - P$ tel que $a \vee I \geq t$. Donc, $a \vee I \in \ker(\sigma)$. ■

Théorème 2.41

Soit $\mathcal{L}$ un treillis résidué tel que chaque $H(x)$ est compact, et soit σ un morphisme surjectif tel que pour tout $x \notin \ker(\sigma)$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\sigma(x) = x^n$. Alors nous avons (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv). Si chaque filtre maximal est un filtre σ-stable, alors (iv) $\Rightarrow$ (i). Où,

(i) $\mathrm{Spec}^{\sigma}(L)$ est de Hausdorff ;

(ii) pour tous $x, y \in L$, il existe $z \in L$ tel que $x \vee z \in \ker(\sigma)$ et $H(y) \cap (\mathrm{Spec}^{\sigma}(L) - H(x)) = H(y \vee z)$;

(iii) Tout filtre premier σ-invariant est σ-premier ;

(iv) $\mathrm{Spec}^{\sigma}(L)$ est un espace T_1.

Preuve. (i) $\Rightarrow$ (ii) Supposons que $\mathrm{Spec}^{\sigma}(L)$ soit un espace de Hausdorff. Par hypothèse, $H(a)$ est compact, donc $H(a)$ est un ensemble ouvert fermé, pour chaque $a \in L$. Soient $x, y \in L$ tels que $x \neq y$. Alors $H(y) \cap \{\mathrm{Spec}^{\sigma}(L) - H(x)\}$ est un sous-ensemble compact de l'espace compact $H(y)$. Comme $H(y)$ est ouvert dans $\mathrm{Spec}^{\sigma}(L)$, $H(y) \cap \{\mathrm{Spec}^{\sigma}(L) - H(x)\}$ est un sous-ensemble compact ouvert de $\mathrm{Spec}^{\sigma}(L)$. Ainsi, par le Théorème 2.36 , il existe $z \in L$ tel que $H(z) = H(y) \cap \{\mathrm{Spec}^{\sigma}(L) - H(x)\}$. Par conséquent, $H(y) \cap \{\mathrm{Spec}^{\sigma}(L) - H(x)\} = H(y \vee z)$ et aussi $H(x \vee z) = H(x) \cap H(z) = \emptyset$. Par conséquent, $x \vee z \in \ker(\sigma)$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Soit P un filtre premier σ-invariant de L. Soient $x, y \in L$ tels que $x \in P$ et $y \notin P$, alors par (ii), il existe $z \in L$ tel que $x \vee z \in \ker \sigma$ et $H(y) \cap \{\mathrm{Spec}^{\sigma}(L) - H(x)\} = H(y \vee z)$. Ainsi, $P \in H(y) \cap \{\mathrm{Spec}^{\sigma}(L) - H(x)\} = H(y \vee z)$. Si $z \in P$, alors $y \vee z \in P$, ce qui contredit $P \in H(y \vee z)$. Par conséquent, $z \notin P$. Pour chaque $x \in P$, il existe donc $z \notin P$ tel que $x \vee z \in \ker(\sigma)$. Par conséquent, P est un filtre σ-premier.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Supposons que tout filtre premier σ-invariant soit σ-premier. Soient P et Q deux filtres premiers σ-invariants distincts. Par (iii), et Proposition 2.39, P et Q sont σ-premiers et minimaux. Par conséquent, $P \nsubseteq Q$ et $Q \nsubseteq P$. Choisissons $x \in P - Q$ et $y \in Q - P$. Alors $Q \in H(x) - H(y)$ et $P \in H(y) - H(x)$.

(iv) $\Rightarrow$ (i) Supposons que $\mathrm{Spec}^{\sigma}(L)$ soit un espace T_1. Soit P un filtre premier σ-invariant de L. Alors, par le Théorème 2.37 , $P = \bar{P} = \{Q \in \mathrm{Spec}^{\sigma}(L) \mid P \subseteq Q\}$. Comme chaque filtre maximal est un filtre σ-stable, P est maximal. Il s'ensuit que chaque filtre premier σ-invariant est un filtre premier minimal. Soient $P, Q \in \mathrm{Spec}^{\sigma}(L)$ tels que $P \neq Q$. Pour $x \in P$ et $x \notin Q$, alors par le Théorème 2.28, P est σ-premier, donc il existe $z \in L$ tel que $x \vee z \in \ker \sigma$. Ainsi, $P \in H(y)$, $Q \in H(x)$ et $H(x) \cap H(y) = H(x \vee y) = \emptyset$. Par conséquent, $\mathrm{Spec}^{\sigma}(L)$ est un espace de Hausdorff ou encore est un espace séparé. ■

En observant tous les résultats qu'ont établit N. Abadi et ses collaborateurs en 2019 [1] sur les filtres σ-stables, filtres σ-invariants, nous constatons que ces résultats restent vrais dans les treillis résidués et qu'en étendant la majorité de ces résultats concernant filtres σ-stables, invariants et premiers invariants aux les treillis résidués, nous avons des similitudes au niveau des preuves. C'est ainsi que nous allons étendre au Chapitre 3 toutes ces notions aux algèbres triangulaires.

Chapitre Trois

Filtres et endomorphismes d'algèbres triangulaires

Sommaire

Introduction

Dans ce Chapitre nous allons d'abord définir les notions liées aux algèbres triangulaires. Ensuite parcourir l'ensemble des résultats établit au Chapitre 2 en redéfinissant (quand cela est nécessaire) certains paramètres comme certains ensembles et en regardant ceux qui restent vrais dans le cadre des algèbres triangulaires. Nous allons réadapter des preuves et des hypothèses tout en montrant à chaque fois ce qui posera un problèmes et comment contourner ces problèmes.

3.1 Algèbre triangulaire

Van Gasse et al. [6] ont introduit en 2010 les algèbres triangulaires comme des variétés de treillis résidués muni de certaines opérateurs ν et μ avec un point angulaire u qui est différent de 0 et de 1.

3.1.1 Définition, exemples et propriétés

Définition 3.2 ([15])

Étant donné un treillis $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge)$, sa **triangularisation** notée $\mathbb{T}(\mathcal{L})$ est la structure $\mathbb{T}(\mathcal{L}) = (\mathrm{Int}(\mathcal{L}), \vee, \wedge)$ définie par :

– $\mathrm{Int}(L) = \left\{[x_1, x_2] : (x_1, x_2) \in A^2 \text{ et } x_1 \leq x_2\right\}$;

– $[x_1, x_2] \wedge [y_1, y_2] = [x_1 \wedge y_1, x_2 \wedge y_2]$;

– $[x_1, x_2] \vee [y_1, y_2] = [x_1 \vee y_1, x_2 \vee y_2]$.

L'ensemble $D_L = \{[x, x] : x \in L\}$ est appelée la **diagonale** $\mathbb{T}(\mathcal{L})$.

Définition 3.3 ([15])

Un **treillis résidué d'intervalle valué (TRIV)** est un treillis résidué $(\mathrm{Int}(\mathcal{L}), \vee, \wedge, \odot, \to_\odot, [0, 0], [1, 1])$ sur la triangularisation $\mathbb{T}(\mathcal{L})$ d'un treillis borné $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge)$, dans lequel la diagonale D_L est fermée sous $\odot$ et $\to_\odot$.

Définition 3.4 ([15])

Une algèbre de triangulaire est une structure $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge, \odot, \rightarrow, \nu, \mu, 0, u, 1)$ dans laquelle $(L, \vee, \wedge, \odot, \rightarrow, 0, 1)$ est un treillis résidué, ν et μ sont des opérations unaires sur L, u une constante, et satisfaisant les conditions suivantes : Pour tous $x, y \in L$,

(T_1) $\nu(x) \leq x$, $\quad (T'_1)$ $x \leq \mu(x)$,

(T_2) $\nu(x) \leq \nu(\nu(x))$, $\quad (T'_2)$ $\mu(\mu(x)) \leq \mu(x)$,

(T_3) $\nu(x \wedge y) = \nu(x) \wedge \nu(y)$, $\quad (T'_3)$ $\mu(x \wedge y) = \mu(x) \wedge \mu(y)$

(T_4) $\nu(x \vee y) = \nu(x) \vee \nu(y)$, $\quad (T'_4)$ $\mu(x \vee y) = \mu(x) \vee \mu(y)$,

(T_5) $\nu(u) = 0$, $\quad (T'_5)$ $\mu(u) = 1$,

(T_6) $\nu(\mu(x)) = \mu(x)$, $\quad (T'_6)$ $\mu(\nu(x)) = \nu(x)$,

(T_7) $\nu(x \rightarrow y) \leq \nu(x) \rightarrow \nu(y)$,

(T_8) $(\nu(x) \leftrightarrow \nu(y)) \odot (\mu(x) \leftrightarrow \mu(y)) \leq (x \leftrightarrow y)$,

(T_9) $\nu(x) \rightarrow \nu(y) \leq \nu(\nu(x) \rightarrow \nu(y))$

(T_{10}) $x = \nu(x) \wedge (\mu(x) \vee u)$ $\quad (T'_{10})$ $x = \mu(x) \vee (\nu(x) \wedge u)$

Les opérateurs unaires ν et μ sont appelés opérateurs de **nécéssité** et de **possibilité**, respectivement ; et la constance u ($u \neq 0$ et $u \neq 1$) est appelée **certitude**.

Proposition 3.5

Soit $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge, \odot, \rightarrow, \nu, \mu, 0, u, 1)$ une algèbre triangulaire, alors :

1. pour tous $x, y \in L$, si $\nu(x) = \nu(y)$ et $\mu(x) = \mu(y)$, alors $x = y$;
2. ν et μ sont des opérateurs croissants ;
3. Pour tout $x \in L$, $\nu(\nu(x)) = \nu(x)$ et $\mu(\mu(x)) = \mu(x)$;
4. $\nu(1) = 1$ et $\mu(0) = 0$.

Preuve. 1. Soient $x, y \in L$ tels que $\nu(x) = \nu(y)$ et $\mu(x) = \mu(y)$. Alors, d'après (T_{10}), on a : $x = \nu(x) \wedge (\mu(x) \vee u) = \nu(y) \wedge (\mu(y) \vee u) = y$.

Ou encore d'après (T'_{10}), on a : $x = \mu(x) \vee (\nu(x) \wedge u) = \mu(y) \vee (\nu(y) \wedge u) = y$.

2. Soient $x, y \in L$ tels que $x \leq y$. Alors on a $x \wedge y = x$. En utilisant (T_3) on obtient $\nu(x) = \nu(x \wedge y) = \nu(x) \wedge \nu(y)$ c'est à dire $\nu(x) \leq \nu(y)$. Ainsi ν est croissant. De même, en utilisant (T'_3) on obtient $\mu(x) = \mu(x \wedge y) = \mu(x) \wedge \mu(y)$ c'est à dire $\mu(x) \leq \mu(y)$ c'est à dire μ est croissant.

3 Soit $x \in L$. En appliquant (T_1) à $\nu(x)$, on obtient $\nu(\nu(x)) \leq \nu(x)$. De plus, d'après (T_2), on a $\nu(x) \leq \nu(\nu(x))$. Ainsi $\nu(\nu(x)) = \nu(x)$.

De même, en appliquant (T_1') à $\mu(x)$, on obtient $\mu(x) \leq \mu(\mu(x))$. De plus, d'après (T_2'), on a $\mu(\mu(x)) \leq \mu(x)$. Ainsi $\mu(\mu(x)) = \mu(x)$.

4 D'après (T_5'), (T_6), (T_5) et (T_6') ; $\nu(1) = \nu(\mu(u)) = \mu(u) = 1$ et $\mu(0) = \mu(\nu(u)) = \nu(u) = 0$.

■

Exemple 3.1. *[16] Soit* $L = \{[0,0], [0,a], [0,b], [a,a], [b,b], [0,1], [a,1], [b,1], [1,1]\}$. *Considérons le diagramme de Hasse suivant et les opérateurs* $\odot$ *et* $\Rightarrow$ *définis par les tables suivantes :*

$\odot$	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	0	a	0	a
b	0	0	b	b
1	0	a	b	1

$\Rightarrow$	0	a	b	1
1	1	1	1	1
a	b	1	b	1
b	a	a	1	1
1	0	a	b	1

Table 8: Tables du point et de la flèche de l'Exemple 3.1.

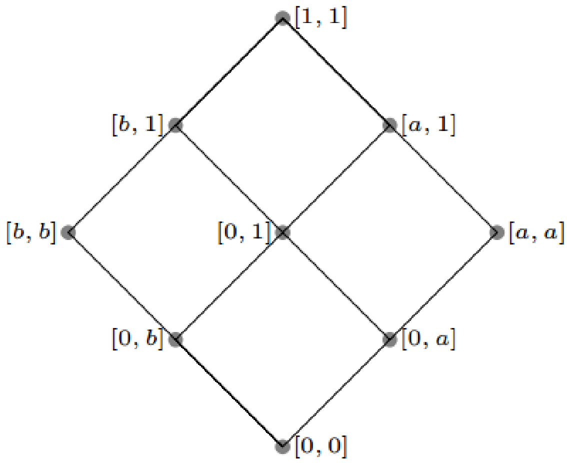

Figure 4: Figure de l'ordre des éléments de l'ensemble de l'Exemple 3.1.

En définissant ν, μ, $\star$ *et* $\rightarrow$ *par :* $\nu([x_1, x_2]) = [x_1, x_1]$; $\mu([x_1, x_2]) = [x_2, x_2]$; $[x_1, x_2] \star [y_1, y_2] = [x_1 \odot y_1, x_2 \odot y_2]$ *et* $[x_1, x_2] \rightarrow [y_1, y_2] = [(x_1 \Rightarrow y_1) \wedge (x_2 \Rightarrow y_2), x_2 \Rightarrow y_2]$, *alors* $(L, \wedge, \vee, \star, \rightarrow, \nu, \mu, [0,0], [0,1], [1,1])$ *est une algèbre triangulaire.*

Proposition 3.6

Soit $\mathcal{L} = (L, \wedge, \vee, \odot, \rightarrow, \nu, \mu, 0, u, 1)$ une algèbre triangulaire. Alors pour tous $x, y \in L$, $x \leq y$ si et seulement si $\nu(x) \leq \nu(y)$ et $\mu(x) \leq \mu(y)$.
En particulier pour $y = u$, on a : ($x \leq u$ si et seulement si $\nu(x) = 0$) ; et ($u \leq x$ si et seulement si $\mu(x) = 1$).

Preuve. Soient $x, y \in L$. Supposons que $x \leq y$, alors $\nu(x) \leq \nu(y)$ et $\mu(x) \leq \mu(y)$ (car ν et μ sont croissants).
Réciproquement, supposons que $\nu(x) \leq \nu(y)$ et $\mu(x) \leq \mu(y)$. Alors d'après (T_3) et (T_3') on a $\nu(x \wedge y) = \nu(x) \wedge \nu(y) = \nu(x)$ et $\mu(x \wedge y) = \mu(x) \wedge \mu(y) = \mu(x)$. Ainsi, $x \wedge y = x$; et donc (par définition de l'ordre sur L), $x \leq y$. D'où le résultat.
En particulier pour $y = u$, on a : $x \leq u$ si et seulement si $\nu(x) \leq \nu(0) = 0$; c'est à dire, $\nu(x) = 0$ car 0 est le plus petit élément de L.
De même, $u \leq x$ si et seulement si $1 = \mu(u) \leq \mu(x)$; c'est à dire, $\mu(x) = 1$ car 1 est le plus petit élément de L. ∎

L'ensemble des éléments exacts d'une algèbre triangulaire $\mathcal{L}$ notée $E(\mathcal{L})$ (cf. [15]) est

$$E(\mathcal{L}) = \{x \in L \mid \nu(x) = x\}.$$

Définition 3.7 ([15])

Soit $\mathcal{L} = (L, \wedge, \vee, \nu, \mu, 0, u, 1)$ une algèbre triangulaire, alors :

1. $\mathcal{L}$ est appelé **MTL-algèbre triangulaire** si $(x \rightarrow y) \vee (y \rightarrow x) = 1$ (prélinearité), pour tous $x, y \in L$;
2. Une **MTL-algèbre triangulaire** $\mathcal{L}$ est appelée BL-algèbre triangulaire si $x \wedge y = x \odot (x \rightarrow y)$, pour tous $x, y \in \mathcal{L}$;
3. Une **BL-algèbre triangulaire** $\mathcal{L}$ est appelée **MV-algèbre triangulaire** si $(x \rightarrow y) \rightarrow y = (y \rightarrow x) \rightarrow x$, pour tous $x, y \in \mathcal{L}$;
4. $\mathcal{L}$ est appelé **Gödel-algèbre** triangulaire si $x^2 = x$, pour tout $x \in L$.

Proposition 3.8

Soit $\mathcal{L} = (L, \wedge, \vee, \odot, \rightarrow, \nu, \mu, 0, u, 1)$ une algèbre triangulaire. Alors pour tous $x, y \in L$,

1 $\nu(x \odot y) = \nu(x) \odot \nu(y)$;

2 $\mu(x \odot y) \leq \mu(x) \odot \mu(y)$.

Preuve. Soient $x, y \in L$,

1 Comme $x \wedge y \leq x$ et que ν est croissant, alors $\nu(x \wedge y) \leq \nu(x)$. D'après (13) de la Proposition 1.9, on obtient $(y \rightarrow (x \odot y)) \wedge x = x$; c'est à dire $\nu(x) = \nu((y \rightarrow (x \odot y)) \wedge x) = \nu(y \rightarrow (x \odot y)) \wedge \nu(x)$. ν étant croissant, alors $\nu(x) \leq \nu(y \rightarrow (x \odot y) \leq \nu(y) \rightarrow \nu(x \odot y)$ (d'après (T_7)).

Ainsi, par la loi de résiduation, on obtient : $\nu(x) \odot \nu(y) \leq \nu(x \odot y)$. De plus, en utilisant (T_4), on a $\nu(\nu(x) \vee u) = \nu(\nu(x)) \vee \nu(u) = \nu(x) \vee \nu(u) = \nu(x \vee u)$. De même, en utilisant (T_4),(T'_4) et (T'_6) on a $\mu(\nu(x) \vee u) = \mu(\nu(x)) \vee \mu(u) = \nu(x) \vee \nu(u) = \mu(x \vee u)$.

Et donc d'après (T_8) et la Proposition 3.5 , on obtient $\nu(x) \vee u = x \vee u$. Or $x \odot u \leq u$ et $\nu(u) = 0$, donc $\nu(x \odot u) = 0$. Ainsi, en utilisant (T_4) et le 15) de la Proposition 1.9, on a : $\nu(x \odot y) = \nu(x \odot y) \vee 0 = \nu(x \odot y) \vee \nu(x \odot u) = \nu((x \odot y) \vee (x \odot u)) = \nu(x \odot (y \vee u))$.

De manière symétrique, on trouve $\nu(x \odot y) = \nu((x \odot u) \vee (y \odot u))$. Or $\nu(x) \vee u = x \vee u$, et donc $\nu(x \odot y) = \nu((x \odot u) \vee (y \odot u)) = \nu((\nu(x) \odot u) \vee (\nu(y) \odot u)) = \nu(\nu(x) \odot \nu(y)) \leq \nu(x) \odot \nu(y)$.

Ainsi $\nu(x \odot y) = \nu(x) \odot \nu(y)$.

2 En utilisant (T_6) et le premier volet de cette proposition, $\mu(x) \odot \mu(y) \in E(\mathcal{L})$ car $\nu(\mu(x) \odot \mu(y)) = \nu(\mu(x)) \odot \nu(\mu(y)) = \mu(x) \odot \mu(y)$. Or d'après (T'_1), on a $x \leq \mu(x)$ et $y \leq \mu(y)$ et donc $x \odot y \leq \mu(x) \odot \mu(y)$ (car $\odot$ est croissant). Ainsi $\mu(x \odot y) \leq \mu(\mu(x) \odot \mu(y)) = \mu(x) \odot \mu(y)$ (car μ est croissant et $\mu(x) \odot \mu(y) \in E(\mathcal{L})$). D'où le résultat.

■

Proposition 3.9 ([6])

Dans une algèbre triangulaire $\mathcal{L} = (L, \wedge, \vee, \odot, \rightarrow, \nu, \mu, 0, u, 1)$, le produit $\odot$ et l'implication $\rightarrow$ sont entièrement déterminés par leur action sur $E(\mathcal{L})$ et la valeur de $\mu(u \odot u)$. Autrement dit, pour tous $x, y \in L$,

1. $\nu(x \rightarrow y) = (\nu(x) \rightarrow \nu(y)) \wedge (\mu(x) \rightarrow \mu(y))$;
2. $\mu(x \rightarrow y) = (\mu(x) \rightarrow (\mu(u \odot u) \rightarrow \mu(y))) \wedge (\nu(x) \rightarrow \mu(y))$;
3. $\nu(x \odot y) = \nu(x) \odot \nu(y)$;
4. $\mu(x \odot y) = (\nu(x) \odot \mu(y)) \vee (\mu(x) \odot \nu(y)) \vee (\mu(x) \odot \mu(y) \odot \mu(u \odot u))$.

Ainsi, en utilisant (T_{10}) et (T'_{10}), on a :
$x \rightarrow y = (((\mu(x) \rightarrow (\mu(u \odot u) \rightarrow \mu(y)) \wedge (\nu(x) \rightarrow \mu(y))) \wedge u) \vee ((\nu(x) \rightarrow \nu(y)) \wedge (\mu(x) \rightarrow \mu(y)))$
$= (((\nu(x) \rightarrow \nu(y)) \wedge (\mu(x) \rightarrow \mu(y))) \wedge u) \wedge ((\mu(x) \rightarrow (\mu(u \odot u) \rightarrow \mu(y)) \wedge (\nu(x) \rightarrow \mu(y)))$ et
$x \odot y = (((\nu(x) \odot \mu(y)) \vee (\mu(x) \odot \nu(y)) \vee (\mu(x) \odot \mu(y) \odot \mu(u \odot u))) \wedge u) \vee (\nu(x) \odot \nu(y)) = (\nu(x) \odot \nu(y)) \vee u) \wedge ((\nu(x) \odot \mu(y)) \vee (\mu(x) \odot \nu(y)) \vee (\mu(x) \odot \mu(y) \odot \mu(u \odot u)))$.

3.9.1 Endomorphismes d'algèbres triangulaires

Définition 3.10 ([15])

Soit $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge, \odot, \rightarrow, \nu, \mu, 0, u, 1)$ une algèbre triangulaire. Si l'application $h : L \longrightarrow L$ satisfait pour $a, b \in L$:

$$h(a \vee b) = h(a) \vee h(b), \qquad h(a \wedge b) = h(a) \wedge h(b),$$
$$h(a \odot b) = h(a) \odot h(b), \qquad h(a \rightarrow b) = h(a) \rightarrow h(b),$$
$$h(\nu(a)) = \nu(h(a)), \qquad h(\mu(a)) = \mu(h(a)).$$

Alors h est un **endomorphisme de l'algèbre triangulaire** $\mathcal{L}$.

Remarque 3.1. *Les propriétés des morphismes de treillis résidués restent vraies dans le cadre des morphismes d'algèbres triangulaires.*

Dans la suite, $\sigma : L \longrightarrow L$ est un endomorphisme de l'algèbre triangulaire $\mathcal{L}$.

3.11 Filtres dans une algèbre triangulaire

Puisqu'une algèbre triangulaire a une structure de treillis résidué, alors il existe un lien entre filtre dans un treillis résidué et filtre dans une algèbre triangulaire.

3.11.1 Définition et exemples

Définition 3.12 ([15])

Soit $\mathcal{L} = (L, \wedge, \vee, \odot, \rightarrow, \nu, \mu, 0, u, 1)$ une algèbre triangulaire. Un **filtre de** $\mathcal{L}$ est un sous-ensemble non vide F de L vérifiant les propriétés suivantes :

(F_1) si $x \in F$ et $x \leq y$, alors $y \in F$;

(F_2) si $x, y \in F$, alors $x \odot y \in F$;

(F_3) si $x \in F$, alors $\nu(x) \in F$.

L'ensemble de tout les filtres de L est noté $F(\mathcal{L})$.

Exemple 3.2. *Soit $\mathcal{L} = (L, \wedge, \vee, \odot, \rightarrow, \nu, \mu, 0, u, 1)$ une algèbre triangulaire.*
L'ensemble $F_\alpha = \{x \in L : \alpha \leq x\}$ où α est un élément idempotent de $E(\mathcal{L})$ est un filtre de $\mathcal{L}$.
En effet,

1. *$\alpha \in F_\alpha$ car $\alpha \leq \alpha$; donc $F_\alpha \neq \emptyset$.*
2. *Soient $x, y \in L$ tels que $x \leq y$ et $x \in F_\alpha$; on a $\alpha \leq x \leq y$ (car $x \in F_\alpha$ et donc $\alpha \leq x$). Donc $\alpha \leq y$; c'est à dire, $y \in F_\alpha$.*
3. *Soient $x, y \in L$ tels que $x, y \in F_\alpha$, alors on a $\alpha \leq x$ et $\alpha \leq y$. Donc $\alpha \odot \alpha \leq x \odot y$ (car l'opérateur $\odot$ est croissant). D'où $\alpha \leq x \odot y$ (car α est idempotent). D'où $x \odot y \in F_\alpha$.*
4. *Soit $x \in F_\alpha$ alors $\alpha \leq x$, ce qui implique $\alpha = \nu(\alpha) \leq \nu(x)$ car ν est croissant.*

Ainsi F_α est un filtre de $\mathcal{L}$.

Définition 3.13 ([15])

Soit $\mathcal{L} = (L, \wedge, \vee, \odot, \rightarrow, \nu, \mu, 0, u, 1)$ une algèbre triangulaire. Un **système déductif** de $\mathcal{L}$ est un sous-ensemble F de L vérifiant les propriétés suivantes :

(F'_1) $1 \in F$;

(F'_2) Soient $x, y \in L$. Si $x \in F$ et $x \rightarrow y \in F$, alors $y \in F$;

(F'_3) Soit $x \in L$. Si $x \in F$, alors $\nu(x) \in F$.

Proposition 3.14

Soit F un sous ensemble de L. Alors F est un filtre de $\mathcal{L}$ si et seulement si F est un système déductif de $\mathcal{L}$.

Remarque 3.2. *Un filtre d'une algèbre triangulaire* $(L, \wedge, \vee, \odot, \rightarrow, \nu, \mu, 0, u, 1)$ *est un filtre du treillis résidué* $(L, \wedge, \vee, \odot, \rightarrow, 0, 1)$ *satisfaisant* (F_3)*. Ainsi, toutes les propriétés sur les filtres d'un treillis résidué sont aussi valides pour les filtres d'une algèbre triangulaire.*

3.14.1 Quelques propriétés

Proposition 3.15 ([16])

Soit $\mathcal{L}$ une algèbre triangulaire, $(E(L), \vee, \wedge, \odot, \rightarrow, 0, 1)$ sa sous-algèbre des éléments exacts et $F \subseteq L$. Alors F est un filtre de l'algèbre triangulaire L si et seulement si F_3 est vraie et $F \bigcap E(\mathcal{L})$ est un filtre du treillis résidué $(E(\mathcal{L}), \vee, \wedge, \odot, \rightarrow, 0, 1)$.

La Proposition 3.15 suggère deux façons différentes de définir des types spéciaux de filtres des algèbres triangulaires.

1. La première consiste à imposer une propriété à un filtre de la sous-algèbre des éléments exacts et à étendre ce filtre à toute l'algèbre triangulaire, en utilisant F_3. Nous les appelons des **filtres étendus**. Par exemple, un filtre premier étendu de l'algèbre triangulaire $(L, \vee, \wedge, \odot, \rightarrow, \nu, \mu, 0, u, 1)$ est un sous-ensemble F de L tel que $F \cap E(\mathcal{L})$ est un filtre premier de $E(\mathcal{L})$ et $x \in F$ si et seulement si $\nu(x) \in F \cap E(\mathcal{L})$.
2. La deuxième façon consiste à imposer une propriété à l'ensemble du filtre. Par exemple, un filtre premier F d'une algèbre triangulaire $(L, \vee, \wedge, \odot, \rightarrow, \nu, \mu, 0, u, 1)$ est un filtre de L tel que F est un filtre premier du treillis résidué $(L, \vee, \wedge, \odot, \rightarrow, 0, 1)$.

Définition 3.16

Soit $\mathcal{L}$ une algèbre triangulaire et F un filtre de $\mathcal{L}$. Alors F est :

1. Un filtre premier si $\nu(x \vee y) \in F$ implique $\nu(x) \in F$ ou $\nu(y) \in F$, pour tous $x, y \in L$;
2. Un filtre premier de second type si pour tous $x, y \in L$, $\nu(x \rightarrow y) \in F$ ou $\nu(y \rightarrow x) \in F$;
3. Un filtre premier de troisième type si pour tous $x, y \in L$, $\nu(x \rightarrow y) \vee \nu(y \rightarrow x) \in F$;
4. Un filtre implicatif si pour tous $x, y, z \in L$, $\nu(x \rightarrow (y \rightarrow z)), \nu(x \rightarrow y) \in F$, implique $\nu(x \rightarrow z) \in F$.

Dans la suite, sauf indication contraire, $(L, \wedge, \vee, \odot, \rightarrow, \nu, \mu, 0, u, 1)$ est une algèbre triangulaire et sera notée par $\mathcal{L}$ tout simplement.

La notation 2.1 nous donnait la définition de certains ensembles dans les treillis résidués, nous allons à présent sans confusions faite, redéfinir ces ensembles dans le cadre des algèbres triangulaires en modifiant dans certains cas les hypothèses.

Notation 3.1. *Soit X est un sous-ensemble de L.*

1. $M'(L) = \{x \in L \mid (\nu(x))'' = 1\}$ *;*
2. *L'ensemble des ν-doubles compléments de X est* $D'(X) = \{x \in L \mid (\nu(x))'' \in X\}$ *;*
3. *L'intersection de tous les filtres maximaux de $\mathcal{L}$ contenant X est appelée radical de X et est noté* $\mathrm{Rad}'(X)$*. Si F un filtre propre d'une MTL-algèbre triangulaire $\mathcal{L}$ alors* $\mathrm{Rad}'(F) = \{x \in L \mid (\nu(x^n))' \rightarrow \nu(x) \in F$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}\}$ *;*
4. *L'extension de X est l'ensemble* $X^e = \{x \in L \mid (\nu(x))' \leq a'$ *pour un certain* $a \in X\}$ *;*
5. *Les ensembles* $X_l = \{a \in L \mid \nu(a) \rightarrow x = x$*, pour tout* $x \in X\}$ *et* $X_r = \{a \in L \mid x \rightarrow \nu(a) = \nu(a)$*, pour tout* $x \in X\}$ *sont appelés les stabilisateurs gauche et droite de X, respectivement, et l'ensemble* $X_s = X_l \cap X_r$ *est appelé stabilisateur de X.*

Proposition 3.17

Soient $\mathcal{L}$ une algèbre triangulaire, X un sous ensemble de L et F un filtre de $\mathcal{L}$:

1. $D'(X)$ est un filtre de $\mathcal{L}$ lorsque X est un filtre de $\mathcal{L}$;
2. $M'(L)$ est un filtre de $\mathcal{L}$;
3. $\mathrm{Rad}'(F)$ est un filtre de $\mathcal{L}$.

<u>Preuve</u>. (1) Montrons que $D'(X)$ est un filtre de $\mathcal{L}$ lorsque X est un filtre de $\mathcal{L}$.

• $(\nu(1))'' = 1'' = 0' = 1 \in X$ car X filtre. Donc $1 \in D'(X)$;

• De plus, étant donné $x, y \in L$ tels que $x, x \rightarrow y \in D'(X)$, on a : $(\nu(x \rightarrow y))'' \leq (\nu(x) \rightarrow \nu(y))'' = (\nu(x))'' \rightarrow (\nu(y))''$ or $(\nu(x \rightarrow y))'' \in X$ et X filtre donc $(\nu(x))'' \rightarrow (\nu(y))'' \in X$ et de même, $(\nu(x))'' \in X$ implique $(\nu(y))'' \in X$ c'est à dire $y \in D(X)$;

• Soit $x \in D'(X)$, alors $(\nu(x))'' \in X$ c'est à dire $(\nu(\nu(x)))'' \in X$ car $\nu(\nu(x)) = \nu(x) \forall x \in L$. Donc $\nu(x) \in D'(X)$. On conclut donc que $D'(X)$ est un filtre de $\mathcal{L}$ lorsque X est un filtre de $\mathcal{L}$.

(2) Montrons que $M'(L)$ est un filtre de $\mathcal{L}$. On a $M'(L) = D'(1)$. Comme $\{1\}$ est un filtre alors d'après le (1) ci-dessus, $M'(L)$ est aussi un filtre.

(3) La preuve reste la même qu'à la Proposition 2.1. ∎

Proposition 3.18

Tout comme dans les treillis résidués, étant donné F un filtre de l'algèbre triangulaire $\mathcal{L}$ et X un sous-ensemble non vide de L. Nous avons :

1. $\sigma(X^e) \subseteq (\sigma(X))^e$ et aussi $\sigma(X^e) = (\sigma(X))^e$ lorsque σ est un isomorphisme ;
2. $\sigma(D'(X)) \subseteq D'(\sigma(X))$ et on a $\sigma(D'(X)) = D'(\sigma(X))$ lorsque σ est un isomorphisme ou L est une MV-algèbre triangulaire ;
3. $D'(\sigma(F)) \subseteq D'(\sigma(D'(F)))$;
4. $\sigma(X_l) \subseteq (\sigma(X))_l$ et $\sigma(X_r) \subseteq (\sigma(X))_r$;
5. $\sigma(X_s) \subseteq (\sigma(X))_s$;
6. Si σ est surjective, $\sigma(F) \subseteq F$ et pour tout $x \in L$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\sigma(x) \leq x^n$, alors $\sigma(F_l) = \sigma(F)_l$.

Preuve. **(1) :** Soit $y \in \sigma(X^e)$. Alors il existe $x \in X^e$ tel que $y = \sigma(x)$. Comme $x \in X^e$, alors il existe $a \in X$ tel que $(\nu(x))' \leq a'$. Ainsi, $(\nu(y))' = (\nu(\sigma(x)))' = (\sigma(\nu(x)))' = \sigma((\nu(x))') \leq \sigma(a') = (\sigma(a))'$ avec $\sigma(a) \in \sigma(X)$. Donc $y \in (\sigma(X))^e$ c'est à dire $\sigma(X^e) \subseteq (\sigma(X))^e$.
On suppose à présent que σ est un isomorphisme, alors $x \in (\sigma(X))^e$ alors $(\nu(x))' \leq a'$ avec $a = \sigma(a_1), a_1 \in X$. Or comme σ isomorphisme, alors il existe $x_1 \in L$ tel que $x = \sigma(x_1)$. Il suffit de montrer que $x_1 \in X^e$. On a $(\nu(x))' = (\nu(\sigma(x_1)))' = \sigma((\nu(x_1))') \leq (\sigma(a_1))' = a'$. Ainsi, $\sigma((\nu(x_1))') \leq \sigma(a_1')$ c'est à dire $(\nu(x_1))' \leq a_1'$ avec $a_1 \in X$. Ainsi $x_1 \in X^e$ c'est à dire $\sigma(x_1) \in \sigma(X^e)$ et on obtient que $\sigma(X^e) = (\sigma(X))^e$.

(2) : Soit $y \in \sigma(D'(X))$. Alors $y = \sigma(x)$ avec $x \in D'(X)$ c'est à dire $x'' \in X$.
Ainsi, $y'' = (\sigma(x))'' = \sigma(x'') \in \sigma(X)$ c'est à dire $y \in D'(\sigma(X))$. Donc $\sigma(D'(X)) \subseteq D'(\sigma(X))$.
Soit $y \in D'(\sigma(X))$. Supposons que $\mathcal{L}$ soit une MV-algèbre triangulaire, on a $y'' \in \sigma(X)$ c'est à dire $y = \sigma(x)$ avec $x \in X$. Or $x'' = x \in X$, donc $x \in D'(X)$ c'est à dire $y \in \sigma(D'(X))$. D'où $\sigma(D'(X)) = D'(\sigma(X))$.
De plus, si σ est un isomorphisme, comme $y \in L$ alors il existe $y_1 \in L$ tel que $y = \sigma(y_1)$. Ainsi $y'' = \sigma(x) \Rightarrow \sigma(y_1'') = \sigma(x)$ c'est à dire $y_1'' = x \in X$ c'est à dire $y_1 \in D(X)$ et finalement $y \in \sigma(D'(X))$. D'où $\sigma(D'(X)) = D'(\sigma(X))$.

(3) : Soit $y \in D'(\sigma(F))$. Alors $y'' \in \sigma(F)$ c'est à dire qu'il existe $x \in F$ tel que $y'' = \sigma(x)$. De plus, $x \leq x''$, donc $x'' \in F$ car F est un filtre et ainsi $x \in D'(F)$. Finalement, $y'' = \sigma(x)$ avec $x \in D'(F)$ c'est à dire $y'' \in \sigma(D'(F))$ c'est à dire $y \in D'(\sigma(D'(F)))$. Donc $D'(\sigma(F)) \subseteq D'(\sigma(D(F)))$.

(4) : Soit $y \in \sigma(X_l)$. Montrons que $y \in (\sigma(X))_l$ c'est à dire $\nu(y) \to a = a$, $\forall a \in \sigma(X)$. Soit $a \in \sigma(X)$ alors il existe $a_1 \in X$ tel que $a = \sigma(a_1)$. Or $y \in \sigma(X_l)$ c'est à dire qu'il existe $x \in X_l$ tel que $y = \sigma(x)$ avec $\nu(x) \to a = a$, $\forall a \in \sigma(X)$. Ainsi,

$$\begin{array}{rcl} \nu(y) \to a & = & \nu(\sigma(x)) \to \sigma(a_1); \\ & = & \sigma(\nu(x)) \to \sigma(a_1); \\ & = & \sigma(\nu(x) \to a_1) \ \texttt{car} \ \sigma \ est \ un \ endomorphisme; \\ & = & \sigma(a_1) \ \texttt{car} \ x \in X_l \ \texttt{et} \ a_1 \in X; \\ & = & a. \end{array}$$

Ainsi, $y \in (\sigma(X))_l$ c'est à dire $\sigma(X_l) \subseteq (\sigma(X))_l$.
De manière similaire, on montre que $\sigma(X_r) \subseteq (\sigma(X))_r$.
(5) : La preuve découle naturellement du 4).

(6) : D'après les hypothèse, $\sigma(F) = F$. D'après 4), $\sigma(F_l) \subseteq \sigma(F)_l$. Il reste donc à montrer que $\sigma(F)_l \subseteq \sigma(F_l)$ or comme $\sigma(F) = F$, cela revient à montrer que $F_l \subseteq \sigma(F_l)$.
Soit $y \in F_l$ alors $\nu(y) \to a = a, \forall a \in F$. Comme σ est surjective, alors il existe $x \in L$ tel que $y = \sigma(x)$. Ainsi $\nu(\sigma(x)) \to a = \sigma(\nu(x)) \to a = a, \forall a \in F$. D'après l'hypothèse, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\sigma(x) \leq x^n$ c'est à dire $\sigma(\nu(x)) \leq (\nu(x))^n$. En appliquant le 3) de la *Proposition* 1.9 on obtient $(\nu(x))^n \to a \leq \sigma(\nu(x)) \to a = a$ c'est à dire $(\nu(x))^n \to a \leq a$.
De plus, le 4) de la même proposition nous permet d'établir que $x^n \leq x$ c'est à dire $(\nu(x))^n \leq \nu(x)$ ce qui implique que $\nu(x) \to a \leq (\nu(x))^n \to a \leq a$. Or nous savons déjà que $a \leq (\nu(x))^n \to a$.
Finalement, $(\nu(x))^n \to a = a, \forall a \in F$; c'est à dire $x \in F_l$ et comme $y = \sigma(x)$ alors $y \in \sigma(F_l)$ c'est à dire $\sigma(F)_l \subseteq \sigma(F_l)$. Donc $\sigma(F_l) = \sigma(F)_l$. ■

3.19 Filtres stables par endomorphismes d'algèbres triangulaires

Étant donné une algèbre triangulaire $\mathcal{L}$ et σ un endomorphisme de $\mathcal{L}$, la définissions d'un filtre σ-stable reste la même qu'à la Définition 2.4.

Exemple 3.3. *(1) Reprenons le treillis résidué $\mathcal{L}$ du (1) de l'Exemple 2.1 et définissons les opérateurs ν et μ de la manière suivante :*

x	$\nu(x)$
0	0
a	0
b	b
c	c
1	1

x	$\mu(x)$
0	0
a	b
b	b
c	c
1	1

Table 9: Tables de ν et de μ du (1) de l'Exemple 3.3.

Alors $\mathcal{L}' = (L, \vee, \wedge, \odot, \rightarrow, \nu, \mu, 0, a, 1)$ est une algèbre triangulaire et $\sigma : L \to L$ est un endomorphisme de l'algèbre triangulaire $\mathcal{L}'$ où $\sigma(a) = 0$, $\sigma(b) = 1$ et $\sigma(c) = 1$. Alors, $F_1 = \{b, c, 1\}$ est un filtre σ-stable de l'algèbre triangulaire $\mathcal{L}'$.
(2) Soit $L = \{0, u, a, 1\}$ tel que $o < u < a < 1$. On définit les opérateurs $\odot$, $\rightarrow$, ν et μ comme suit :

$\odot$	0	u	a	1
0	0	0	0	0
u	0	u	u	u
a	0	u	a	a
1	0	u	a	1

$\rightarrow$	0	u	a	1
0	1	1	1	1
u	0	1	a	1
a	0	u	1	1
1	0	u	a	1

x	$\nu(x)$
0	0
u	0
a	0
1	1

x	$\mu(x)$
0	0
u	1
a	1
1	1

Table 10: Tables du point, de la flèche, de ν et de μ du (2) de l'Exemple 3.3.

Alors $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge, \odot, \rightarrow, \nu, \mu, 0, u, 1)$ est une algèbre triangulaire et $\sigma : L \to L$ est un endomorphisme de l'algèbre triangulaire $\mathcal{L}$ où $\sigma(0) = 0$, $\sigma(u) = u$, $\sigma(a) = u$ et $\sigma(1) = 1$. Alors, $F_2 = \{a, 1\}$ est un filtre qui n'est pas un filtre σ-stable.

Maintenant, nous allons aborder les notions de filtre engendré par un sous ensemble d'une algèbre triangulaire et de filtre engendré par la réunion de deux filtres dans une algèbre triangulaire.

Étant donné $\mathcal{L}$ une algèbre triangulaire et X un sous ensemble de L. Alors :

1 Le filtre engendré par X noté $\langle X \rangle$ est définit comme étant le plus petit filtre de $\mathcal{L}$ contenant X. Plus formellement, nous avons :

$$\langle X \rangle = \{a \in L : \exists n \in \mathbb{N}^*, \exists x_1, x_2, \ldots, x_n \in X \mid \nu(x_1) \odot \nu(x_2) \odot \ldots \odot \nu(x_n) \leq a\}$$

2 pour tous filtres F et G de $\mathcal{L}$, le filtre engendré par $F \cup G$ est :

$$\langle F \cup G \rangle = \{a \in L tel\ qu'il\ existe\ f \in F\ et\ g\ \in G \mid a \geq \nu(f) \odot \nu(g)\}$$

Lemme 3.20

Soient F et G des filtres σ-stables de l'algèbre triangulaire $\mathcal{L}$. Alors les affirmations suivantes sont satisfaites :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sigma^n(F)$ est un σ-stable lorsque $\sigma^n(F)$ est un filtre de $\mathcal{L}$.
2. $F \cap G$ est un filtre σ-stable de $\mathcal{L}$.
3. $\langle F \cup G\rangle$ est un filtre σ-stable de $\mathcal{L}$.
4. $D'(F)$ est un filtre σ-stable de $\mathcal{L}$;
5. Si $\mathcal{L}$ est une MTL-algèbre triangulaire, alors Rad'(F) est un filtre σ-stable de $\mathcal{L}$.
6. F^e est un filtre σ-stable.

Preuve. **1** La preuve est similaire à celle faite au Lemme 2.8 (1).

2 On montre facilement que $F \cap G$ est un filtre de $\mathcal{L}$. le reste de la preuve est similaire à celle faite au Lemme 2.8 (2).

3 Montrons d'abord que $\langle F \cup G\rangle$ est un filtre de $\mathcal{L}$.

On a $\nu(1) \odot \nu(1) \leq 1$ or $1 \in F \cup G$ donc $1 \in \langle F \cup G\rangle$. De plus, étant donné x et y dans L tels que $x, x \to y \in \langle F \cup G\rangle$, on a l'existence de deux couples $(\alpha_1, \alpha_2) \in F$ et $(\beta_1, \beta_2) \in G$ tels que $\nu(\alpha_1) \odot \nu(\beta_1) \leq x$ et $\nu(\alpha_2) \odot \nu(\beta_2) \leq x \to y$. Ainsi, $\nu(\alpha_1) \odot \nu(\beta_1) \odot \nu(\alpha_2) \odot \nu(\beta_2) \leq x \odot x \to y \leq y$ (d'après Proposition 1.9 (9)).

Donc $(\nu(\alpha_1) \odot \nu(\alpha_2)) \odot (\nu(\beta_1) \odot \nu(\beta_2)) \leq y$ Or $\nu(\alpha_1) \odot \nu(\alpha_2) \in F$ et $\nu(\beta_1) \odot \nu(\beta_2) \in G$ car $(\alpha_1, \alpha_2) \in F$, $(\beta_1, \beta_2) \in G$, F et G sont des filtres σ-stables. Donc $y \in \langle F \cup G\rangle$.

D'autre part, si $x \in \langle F \cup G\rangle$, alors il existe $(\alpha, \beta) \in F \times G$ tel que $\nu(\alpha) \odot \nu(\beta) \leq x$ c'est à dire $\nu(\nu(\alpha) \odot \nu(\beta)) = \nu(\alpha) \odot \nu(\beta) \leq \nu(x)$. Donc $\nu(x) \in \langle F \cup G\rangle$. Donc $\langle F \cup G\rangle$ est un filtre de $\mathcal{L}$.

Montrons maintenant que $\sigma(\langle F \cup G\rangle) \subseteq \langle F \cup G\rangle$: Soit $y \in \sigma(\langle F \cup G\rangle)$.

Il existe alors $a \in \langle F \cup G\rangle$ tel que $y = \sigma(a)$. Ainsi, il existe $b \in F, c \in G$ tel que $\nu(b) \odot \nu(c) \leq a$. Alors $\sigma(\nu(b)) \odot \sigma(\nu(c)) = \nu(\sigma(b)) \odot \nu(\sigma(c)) \leq \sigma(a)$ c'est à dire $\nu(\sigma(b)) \odot \nu(\sigma(c)) \leq \sigma(a) = y$ or $\sigma(b) \in F$ et $\sigma(c) \in G$ car F et G sont des filtres σ-stables. Donc $y \in \langle F \cup G\rangle$.

4 Nous avons déjà établit que D'(X) est un filtre lorsque X est un filtre. Il reste à montrer que $\sigma(D'(F)) \subseteq D'(F)$. Soit $y \in \sigma(D'(F))$, alors il existe $x \in D'(F)$ tel que $y = \sigma(x)$. Ainsi, $(\nu(y))'' = (\nu(\sigma(x)))'' \in \sigma(F)$ car $x'' \in F$ lorsque $x \in D'(F)$. Ainsi, $y'' \in F$ car $\sigma(F) \subseteq F$. Donc $\sigma(D'(F)) \subseteq D'(F)$ c'est à dire, D'(F) est un filtre σ-stable.

5 Nous avons déjà montré précédemment que Rad'(F) est un filtre de $\mathcal{L}$.
Soit $y \in \sigma(\text{Rad'}(F))$, alors il existe $x \in \text{Rad'}(F)$ tel que $y = \sigma(x)$

$$\begin{aligned} (\nu(y^n))' \to \nu(y) &= (\nu((\sigma(x))^n))' \to \nu(\sigma(x)); \\ &= (\nu(\sigma(x^n)))' \to \sigma(\nu(x)) \ \ car \ \ \sigma \ \ endomorphisme; \\ &= (\sigma(\nu(x^n)))' \to \sigma(\nu(x)) \ \ car \ \ \sigma \ \ endomorphisme; \\ &= \sigma((\nu(x^n))') \to \sigma(\nu(x)) \ \ car \ \ \sigma \ \ endomorphisme; \\ &= \sigma((\nu(x^n))' \to \nu(x)) \in \sigma(F). \end{aligned}$$

Donc $(\nu(y^n))' \to \nu(y) \in F$ car $\sigma(F) \subseteq F$ car F filtre σ-stable c'est à dire $y \in \text{Rad'}(F)$. D'où la conclusion.

6 Pour tout $y \in \sigma(F^e)$, il existe $x \in F^e$ tel que $y = \sigma(x)$. Comme $x \in F^e$, il existe $a \in F$ tel que $(\nu(x))' \leq a'$ nous obtenons $\sigma((\nu(x))') = (\sigma(\nu(x)))' = (\nu(\sigma(x)))' = (\nu(y))' \leq \sigma(a') = (\sigma(a))'$. Or $\sigma(a) \in F$ car $a \in F$ et F un filtre σ-stable. Ainsi, $y \in F^e$.

■

Théorème 3.21

Soit $\mathcal{L}$ une MV-algèbre triangulaire et $\sigma : L \longrightarrow L$ un endomorphisme de $\mathcal{L}$ tel que $(x \odot \sigma(x)) \to x^n = x^n$, pour tout $n > 1$. Alors tout filtre de $\mathcal{L}$ est un filtre σ-stable si et seulement si $x \leq \sigma(x)$, pour tout $x \in L$.

Preuve. Supposons que tout filtre de $\mathcal{L}$ est un filtre σ-stable. Considérons $x \in L$. Comme $\sigma(< x >) \subseteq < x >$, il existe $n \in N$ tel que $x^n \leq \sigma(x)$. Par la Proposition 1.9 (3), (4), on a $x \odot \sigma(x) \leq \sigma(x)$ c'est à dire $\sigma(x) \to x^n \leq (x \odot \sigma(x)) \to x^n$. Ainsi $x \odot (\sigma(x) \to x^n) \leq (x \odot \sigma(x)) \to x^n$ et donc $x \odot (\sigma(x) \to x^n) \leq x^n$. Ainsi, $\sigma(x) \to x^n \leq x \to x^n$ par la propriété de résiduation. Par conséquent, comme $\mathcal{L}$ est une MV-algèbre et $x^n \leq \sigma(x)$; par le Théorème 2.15, on obtient $x \leq \sigma(x)$. La preuve de la réciproque est claire ■

Théorème 3.22 ([14])

Soit F un filtre d'une algèbre triangulaire $\mathcal{L}$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) F est un filtre implicatif de $\mathcal{L}$,

(ii) Pour tout $x \in L$, $F_x = \{\nu(a) \in L : x \to a \in F\}$ est un filtre de $\mathcal{L}$,

(iii) $\nu(x \to (x \to y)) \in F$ implique $\nu(x \to y) \in F$, pour tous $x, y \in L$,

(iv) $\nu(x \to (y \to z)) \in F$ implique $\nu((x \to y) \to (x \to z)) \in F$, pour tous $x, y, z \in L$.

Lemme 3.23 ([14])

Soit F un filtre de $\mathcal{L}$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) F est un filtre implicatif de $\mathcal{L}$,

(ii) $\nu(x \to x^2) \in F$, pour tout $x \in L$.

Preuve. (i) $\Rightarrow$ (ii) D'après Proposition 1.9 (2), on a $\nu(x \to (x \to x^2)) = \nu(x^2 \to x^2) = \nu(1) = 1 \in F$. De plus $\nu(x \to x) = \nu(1) = 1 \in F$, ainsi $\nu(x \to x^2) \in F$ car F est un filtre implicatif.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Considérons $x, y \in L$ tels que $\nu(x \to (x \to y)) \in F$, ainsi $\nu(x^2 \to y) \in F$. De plus d'après Proposition 1.9 (16), $(x \to x^2) \odot (x^2 \to y) \leq (x \to y)$ c'est à dire $\nu(x \to x^2) \odot \nu(x^2 \to y) \leq \nu(x \to y)$. Or d'après l'hypothèse, $\nu(x \to x^2) \in F$. On a donc $\nu(x \to x^2) \odot \nu(x^2 \to y) \in F$ c'est à dire $\nu(x \to y) \in F$. Donc d'après le Théorème 3.22 précédent F est un filtre implicatif de $\mathcal{L}$. ■

La Proposition 2.18 du Chapitre 2 nous dis qu'étant donné F un filtre implicatif, σ un endomorphisme injectif d'un treillis résidué $\mathcal{L}$ tel que $\sigma(F) = \{1\}$. Alors $\mathcal{L}$ est une Gödel algèbre. Lorsqu'on essaye d'étendre ce résultat aux algèbres triangulaires, il n'est pas toujours vrai. En effet, considérons L={0, u, a, 1} une chaine ; définissons les opérations $\odot, \to, \nu$ et μ comme suivent :

$\odot$	0	u	a	1
0	0	0	0	0
u	0	0	u	u
a	0	0	u	a
1	0	u	a	1

$\to$	0	u	a	1
0	1	1	1	1
u	a	1	1	1
a	0	u	1	1
1	0	u	a	1

x	$\mu(x)$
0	0
u	1
a	1
1	1

x	$\nu(x)$
0	0
u	0
a	1
1	1

TABLE 11: Tables du point, de la flèche, de ν et de μ du contre-exemple de la Proposition 2.18 dans le cadre des algèbres triangulaires.

Alors $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge, \odot, \rightarrow, \nu, \mu, 0, u, 1)$ est une algèbre triangulaire et $\sigma : L \rightarrow L$ définit par $\sigma(0) = 0$, $\sigma(u) = u$, $\sigma(a) = a$ et $\sigma(1) = 1$ est un endomorphisme de l'algèbre triangulaire $\mathcal{L}$. De plus, on a $F = \{a, 1\}$ qui est un filtre implicatif de l'algèbre triangulaire $\mathcal{L}$ satisfaisant $\sigma(F) = \{1\}$ mais on a $u \odot u = 0$ c'est à dire que $\mathcal{L}$ n'est pas une Gödel-algèbre triangulaire.

De ce fait, nous allons réadapter cette proposition de la manière suivante :

Proposition 3.24

Soient F un filtre implicatif de l'algèbre triangulaire $\mathcal{L}$, σ un endomorphisme injectif et $\sigma(F) = \{1\}$. Alors $\mathcal{L} \cap E(\mathcal{L})$ est une Gödel algèbre triangulaire.

Preuve. Soit $x \in L \cap E(\mathcal{L})$. On sait que $x^2 \leq x$ et ainsi $\nu(x^2) \leq \nu(x)$ ce qui implique $\sigma(\nu(x^2)) \leq \sigma(\nu(x))$. De plus, d'après le lemme précédent, $\nu(x \rightarrow x^2) \in F$ et en utilisant l'hypothèse, $\sigma(\nu(x \rightarrow x^2)) = 1$ c'est à dire $\sigma(\nu(x)) \leq \sigma(\nu(x^2))$. Ainsi, $\sigma(\nu(x)) = \sigma(\nu(x^2))$ et comme σ est injective, on conclut que $\nu(x) = \nu(x^2)$. ■

Proposition 3.25

Soit F un filtre σ-stable de $\mathcal{L}$ tel qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\nu(x \rightarrow y) \in \sigma^n(F)$ ou $\nu(y \rightarrow x) \in \sigma^n(F)$, pour tous $x, y \in L$. Alors F est un filtre premier de second type.

Preuve. Soit $x, y \in L$, supposons que $\nu(x \rightarrow y) \notin F$ et montrons que $\nu(y \rightarrow x) \in F$. D'après l'hypothèse, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\nu(x \rightarrow y) \in \sigma^n(F)$ ou $\nu(y \rightarrow x) \in \sigma^n(F)$. Comme F est un filtre σ-stable, alors $\sigma^n(F) \subseteq F$ et ainsi $\nu(x \rightarrow y) \notin \sigma^n(F)$. Par conséquent, $\nu(y \rightarrow x) \in \sigma^n(F) \subseteq F$ et donc F est un filtre premier de second type. ■

Corollaire 3.26

Soit F un filtre σ-stable de L tel que σ est surjective. Alors F est un filtre premier de second type si et seulement si $\nu(x \rightarrow y) \in \sigma^n(F)$ ou $\nu(y \rightarrow x) \in \sigma^n(F)$, pour tous $x, y \in L$ et $n \in \mathbb{N}$.

3.27 Filtres invariants par endomorphisme d'algèbres triangulaires

Étant donné une algèbre triangulaire $\mathcal{L}$ et σ un endomorphisme de $\mathcal{L}$, la définissions d'un filtre σ-invariant reste la même qu'à la Définition 2.22.

Exemple 3.4. *Soit* $L = \{0, a, b, c, 1\}$, *où* $0 < a < b < c < 1$. *On définit* $\odot$, $\rightarrow$, ν *et* μ *comme suit :*

$\odot$	0	a	b	c	1
0	0	0	0	0	0
a	0	0	a	a	a
b	0	a	b	b	b
c	0	a	b	c	c
1	0	a	b	c	1

$\rightarrow$	0	a	b	c	1
0	1	1	1	1	1
a	a	1	1	1	1
b	0	a	1	1	1
c	0	a	b	1	1
1	0	a	b	c	1

x	$\nu(x)$
0	0
a	0
b	a
c	b
1	1

x	$\mu(x)$
0	0
a	1
b	1
c	1
1	1

TABLE 12: Tables du point, de la flèche, de ν et de μ de l'Exemple 3.4.

Alors $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge, \odot, \rightarrow, \nu, \mu, 0, a, 1)$ *est une algèbre triangulaire. Soit* $\sigma : L \rightarrow L$ *définie par* $\sigma(0) = 0$, $\sigma(a) = a$, $\sigma(b) = c$ *et* $\sigma(c) = b$, $\sigma(1) = 1$. σ *ainsi définie est un endomorphisme de l'algèbre triangulaire* $\mathcal{L}$. $F = \{b, c, 1\}$ *est un filtre* σ*-stable. De plus,* $\sigma^{-1}(F) = \sigma^{-1}(\{b, c, 1\}) = F$, *donc* F *est un filtre* σ*-invariant.*

Théorème 3.28

Soit σ un endomorphisme de $\mathcal{L}$ tel que $\sigma^2 = \sigma$ et F un sous ensemble de L. Alors F est un filtre σ-invariant si et seulement si F est un filtre σ-stable et $\ker(\sigma) \subseteq F$.

Preuve. Soit $a \in \ker(\sigma)$. Alors $\sigma(a) = 1 \in F$ c'est-à-dire $a \in \sigma^{-1}(F)$ et $a \in F$. Réciproquement, puisque F est un filtre σ-stable, $F \subseteq \sigma^{-1}(F)$. Maintenant, pour $a \in \sigma^{-1}(F), \sigma^2(a) = \sigma(a) \in F$ et donc $\sigma^2(a) \rightarrow \sigma(a) = 1$, c'est à dire, $\sigma(\sigma(a) \rightarrow a) = 1$. Ainsi $\sigma(a) \rightarrow a \in \ker(\sigma) \subseteq F$. Comme F est un filtre et $\sigma(a) \in F$, nous obtenons $a \in F$. ∎

Proposition 3.29

Soient F et G des filtres σ-invariants. Alors les énoncés suivants sont vrais :

1. $F \cap G$ est un filtre σ-invariant.
2. $\langle F \cup G \rangle$ est σ-invariant, lorsque σ est un endomorphisme surjectif.
3. Rad'(F) est un filtre σ-invariant.

Preuve. (1) D'après un résultat précédent $F \cap G$ est un filtre σ-stable donc $F \cap G \subseteq \sigma^{-1}(F \cap G)$. Soit $a \in \sigma^{-1}(F \cap G)$. Alors $\sigma(a) \in F$ et $\sigma(a) \in G$, c'est à dire, $a \in \sigma^{-1}(F) = F$ et $a \in \sigma^{-1}(G) = G$ car F et G sont des filtres σ-invariants.

(2) D'après la Proposition 2.8, $\langle F \cup G \rangle$ est un filtre σ-stable et donc $\langle F \cup G \rangle \subseteq \sigma^{-1}(\langle F \cup G \rangle)$. Considérons $\alpha \in \sigma^{-1}(\langle F \cup G \rangle)$. Donc, il existe $b \in F, c \in G$ tels que $\nu(b) \odot \nu(c) \leq \sigma(\alpha)$. Puisque σ est un endomorphisme surjectif et que F, G sont des filtres σ-invariants, il existe donc $z \in F, t \in G$ tels que $\nu(\sigma(z)) \odot \nu(\sigma(t)) \leq \sigma(\alpha)$.
Ainsi, $\sigma(\nu(z)) \odot \sigma(\nu(t)) \leq \sigma(\alpha)$ c'est à dire $\sigma(\nu(z) \odot \nu(t)) \leq \sigma(\alpha)$ c'est à dire $\sigma(\nu(z) \odot \nu(t) \to \alpha) = 1$. Ainsi, $\nu(z) \odot \nu(t) \to \alpha \in \ker(\sigma) \subseteq \langle F \cup G \rangle$, par le Théorème 3.28 ci-dessus. Maintenant, comme F et G sont des filtres σ-invariants, $\alpha \in \langle F \cup G \rangle$.

(3) D'après un resultat précédent, $\mathrm{Rad}(F)$ est un filtre σ-stable et donc $\mathrm{Rad}(F) \subseteq \sigma^{-1}(\mathrm{Rad}(F))$. Considérons $\alpha \in \sigma^{-1}(\mathrm{Rad}(F))$. Alors $\sigma(\alpha) \in \mathrm{Rad}(F)$ c'est à dire $(\nu((\sigma(\alpha))^n))' \to \nu(\sigma(\alpha)) \in F$, $\forall n \in \mathbb{N}$. De cela, nous obtenons $\sigma((\nu(\alpha^n))' \to \nu(\alpha)) \in F$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Puisque F est un filtre σ-invariant, nous avons $(\nu(\alpha^n))' \to \nu(\alpha) \in F$. Par conséquent, $\alpha \in \mathrm{Rad}(F)$. Par le Théorème 3.28, la preuve de la réciproque est claire. ∎

Proposition 3.30

Soit σ surjective et $\sigma^2 = \sigma$. Alors pour tout filtre σ-stable F de $\mathcal{L}$ tel que $\ker(\sigma) \subseteq F$, nous avons $\sigma(\mathrm{Rad}(F)) = \mathrm{Rad}(F)$.

Preuve. Supposons $\alpha \in \mathrm{Rad}(F)$. Alors $(\nu(\alpha^n))' \to \nu(\alpha) \in F$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Puisque σ est surjective, il existe $b \in L$ tel que $\sigma(b) = \alpha$ et donc $(\nu(\alpha^n))' \to \nu(\alpha) = (\nu((\sigma(b))^n))' \to \nu(\sigma(b)) = \sigma((\nu(b^n))' \to \nu(b)) \in F$. Ainsi, $(\nu(b^n))' \to \nu(b) \in \sigma^{-1}(F) = F$, car F est un filtre σ-invariant d'après le théorème 3.28. Donc $b \in \mathrm{Rad}(F)$ c'est à dire $\sigma(b) \in \sigma(Rad(F))$ c'est à dire $\alpha \in \sigma(Rad(F))$.
D'autre part, étant donné $y \in \sigma(\mathrm{Rad}(F))$, il existe $x \in Rad(f)$ tel que $y = \sigma(x)$. Or d'apres la Proposition 3.29, comme F est σ-invariant, alors $Rad(F)$ est σ-invariant. Ainsi, $x \in \sigma^{-1}(Rad(F))$, donc $y = \sigma(x) \in \sigma(\sigma^{-1}(Rad(F))) = Rad(F)$. ∎

Proposition 3.31

Soit F un filtre σ-stable tel que pour tout $a \in L$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\sigma(a) \to a^n \in F$. Alors F est σ-invariant.

Preuve. Commme F est un filtre σ-stable, $F \subseteq \sigma^{-1}(F)$. Soit $x \in \sigma^{-1}(F)$. D'après l'hypothèse, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\sigma(x) \to x^n \in F$ or $\sigma(x) \in F$ et F filtre donc $x^n \in F$. De plus, $x^n \leq x$. Donc $x \in F$ car F filtre. ∎

3.32 Filtres premiers invariants par endomorphismes d'algèbres triangulaires

Rappel : Un filtre d'une algèbre triangulaire $\mathcal{L}$ est dit premier si pour tous x, y dans L, $\nu(x \vee y) \in F \Rightarrow \nu(x) \in F$ ou $\nu(y) \in F$.

Théorème 3.33

Soit F un filtre σ-invariant et σ un endomorphisme surjectif tel que pour tout $x \notin F$, il existe $t \in \mathbb{N}$ tel que $\sigma(x) = x^t$, et $\mathtt{I}$ un sous-ensemble de réunion de L tel que $F \cap \mathtt{I} = \emptyset$. Alors il existe un filtre premier σ-invariant P tel que $F \subseteq P$ et $P \cap \mathtt{I} = \emptyset$.

Preuve. Considérons $\sum = \{G \mid G$ est un filtre σ-invariant, $F \subseteq G$ et $G \cap \mathtt{I} = \emptyset\}$.

Clairement, $F \in \sum$. On peut facilement vérifier que $\cup_{i \in \mathtt{I}} G_i$ est une borne supérieure pour toute chaîne $\{G_i\}_{i \in \mathtt{I}}$ dans $\sum$. Par le Lemme de Zorn, $\sum$ a un élément maximal P.

Pour $x, y \in L$ tels que $\nu(x) \notin P$ et $\nu(y) \notin P$, $P \subsetneq P \vee \langle x \rangle$. De plus, $P \vee \langle x \rangle$ est un filtre σ-invariant car pour tout $a \in P \vee \langle x \rangle$, il existe $b \in P$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $b \odot x^n \leq a$.

Ainsi, nous avons $\sigma(b) \odot \sigma(x^n) \leq \sigma(a)$. Par conséquent, d'après l'hypothèse, nous avons $a \in \sigma^{-1}(P \vee \langle x \rangle)$. Maintenant, soit $a \in \sigma^{-1}(P \vee \langle x \rangle)$. Puisque σ est surjective, il existe $z \in P$ et $c \in L$ tels que $\sigma(c) = x$ et $\sigma(z \odot c^n) \leq \sigma(a)$. Ainsi, $z \odot c^n \to a \in \ker(\sigma) \subseteq P \subseteq P \vee \langle c \rangle$. Comme $c \notin F$ par hypothèse, $a \in P \vee \langle c \rangle \subseteq P \vee \langle \sigma(c) \rangle = P \vee \langle x \rangle$. Donc $P \vee \langle x \rangle$ est un filtre σ-invariant. Par maximalité de P, $(P \vee \langle x \rangle) \cap \mathtt{I} \neq \emptyset$ et $(P \vee \langle y \rangle) \cap \mathtt{I} \neq \emptyset$. Pour $a \in (P \vee \langle x \rangle) \cap \mathtt{I}$ et $b \in (P \vee \langle y \rangle) \cap \mathtt{I}$, alors $a \vee b \in P \vee \langle x \vee y \rangle$. Supposons que $\nu(x \vee y) \in P$. Alors $\nu(a \vee b) \in P \cap \mathtt{I}$, ce qui est une contradiction. Donc P est un filtre premier. ■

Corollaire 3.34

Soient σ un endomorphisme surjectif, F un filtre σ-invariant d'une algèbre triangulaire $\mathcal{L}$ tels que pour tout $x \notin F$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\sigma(x) = x^n$. Si $y \notin F$, alors il existe un filtre premier σ-invariant P de L tel que $F \subseteq P$ et $y \notin P$.

Corollaire 3.35

Soit σ un endomorphisme surjectif et F un filtre σ-invariant d'une algèbre triangulaire $\mathcal{L}$ tel que pour tout $x \notin F$, il existe $n \in N$ tel que $\sigma(x) = x^n$. Alors $F = \bigcap\{P \mid P$ est un filtre premier σ-invariant, $F \subseteq P\}$.

Corollaire 3.36

Soit σ un endomorphisme surjectif tel que pour tout $x \notin \ker(\sigma)$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sigma(x) = x^n$. Alors $\ker(\sigma) = \bigcap\{P \mid P$ est un filtre premier σ-invariant $\}$.

Dans ce qui suit, $\mathcal{L}$ est une algèbre triangulaire et σ est un endomorphisme surjectif tel que pour tout $x \notin \ker(\sigma)$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sigma(x) = x^n$. $\mathrm{Spec}^\sigma(\mathcal{L})$ **désigne l'ensemble de tous les filtres premiers σ-invariants de $\mathcal{L}$.** Pour tout $A \subseteq L$, considérons $H'(A) = \{P \in \mathrm{Spec}^\sigma(\mathcal{L}) \mid A \nsubseteq P\}$ et pour tout $x \in L$, $H'(x) = H'(\{x\})$. Alors les conditions suivantes peuvent être démontrées facilement.

Lemme 3.37

Soit $\mathcal{L}$ une algèbre triangulaire. pour tous $x, y \in L$, les assertions suivantes sont vraies :
(i) $\bigcup_{x\in L} H'(x) = \mathrm{Spec}^\sigma(\mathcal{L})$.
(ii) $H'(x) \cap H'(y) = H'(x \vee y)$.
(iii) $H'(x) \cup H'(y) = H'(x \wedge y)$.
(iv) $H'(x) = \emptyset \Leftrightarrow x \in \ker(\sigma)$.
(v) $H'(0) = \mathrm{Spec}^\sigma(\mathcal{L})$.

Preuve. conf. Preuve Lemme 2.35 ■

Remarque 3.3. *Le Lemme 3.37 ci-dessus nous permet de conclure que la collection* $\{H'(x) \mid x \in L\}$ *forme une base pour une topologie sur* $\mathrm{Spec}^\sigma(\mathcal{L})$.

Théorème 3.38

Soit $\mathcal{L}$ une algèbre triangulaire telle pour tout $x \in L$, $H'(x)$ est compact. Alors les assertions suivantes sont vraies.
(i) Soit C un sous-ensemble compact ouvert de $\mathrm{Spec}^\sigma(\mathcal{L})$. Alors il existe $x \in L$ tel que $C = H'(x)$.
(ii) $\mathrm{Spec}^\sigma(\mathcal{L})$ est un espace T_0.

Preuve. (i) Supposons que C soit un sous-ensemble compact ouvert de $\mathrm{Spec}^\sigma(L)$. Comme C est ouvert, il existe $A \subseteq L$ tel que $C = \cup_{a\in A} H'(a)$, et il existe également $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ tels que $C = \cup_{i=1}^{n} H'(a_i)$ car C est compact. Par conséquent, $C = H'(x)$ avec $x \in L$.

(ii) Soient P et Q deux filtres premiers σ-invariants distincts. Sans nuire à la généralité, supposons que $P \nsubseteq Q$. Choisissons un élément $x \in L$ tel que $x \in P$ et $x \notin Q$. Par conséquent, $P \notin H'(x)$ et $Q \in H'(x)$. Ainsi, $\mathrm{Spec}^{\sigma}(L)$ est un espace T_0. ■

Pour tout $A \subseteq L$, notons $K'(A) = \{P \in \mathrm{Spec}^{\sigma}(L) \mid A \subseteq P\}$. Clairement, $K'(A) = \mathrm{Spec}^{\sigma}(\mathcal{L}) - H'(A)$. Ainsi, $K'(A)$ est un ensemble fermé dans $\mathrm{Spec}^{\sigma}(\mathcal{L})$. De plus, tout ensemble fermé dans $\mathrm{Spec}^{\sigma}(\mathcal{L})$ est de la forme $K'(A)$ avec $A \subseteq L$.

Théorème 3.39

La fermeture de tout $X \subseteq \mathrm{Spec}^{\sigma}(\mathcal{L})$ est donnée par $\bar{X} = K\left(\bigcap_{P \in X} P\right)$.

Preuve. En effet, soit $X \subseteq \mathrm{Spec}^{\sigma}(\mathcal{L})$. Considérons $Q \in X$. Alors $\bigcap_{P \in X} P \subseteq Q$ et donc $Q \in K\left(\bigcap_{P \in X} P\right)$. Ainsi, $K\left(\bigcap_{P \in X} P\right)$ est un ensemble fermé contenant X. Soit C un ensemble fermé contenant X dans $\mathrm{Spec}^{\sigma}(L)$. Alors $C = K'(A)$ avec $A \subseteq L$. Comme $X \subseteq C = K'(A)$, nous avons donc $A \subseteq P$ pour tout $P \in X$. Ainsi, $A \subseteq \bigcap_{P \in X} P$. Par conséquent, $K\left(\bigcap_{P \in X} P\right) \subseteq K'(A)$. Ainsi, $K\left(\bigcap_{P \in X} P\right)$ est l'ensemble fermé le plus petit contenant X. Ainsi, $\bar{X} = K\left(\bigcap_{P \in X} P\right)$. ■

Définition 3.40

Soit $\mathcal{L}$ une algèbre triangulaire. Un filtre premier P de $\mathcal{L}$ est appelé un filtre σ-premier si pour chaque $x \in P$, il existe $y \notin P$ tel que $x \vee y \in \ker(\sigma)$.

Proposition 3.41

Tout filtre σ-premier σ-invariant d'une algèbre triangulaire $\mathcal{L}$ est un filtre σ-invariant premier minimal.

Preuve. Soit P un filtre σ-premier σ-invariant d'une algèbre triangulaire L. Supposons que Q soit un filtre premier σ-invariant tel que $Q \subseteq P$. Pour $x \in P$ et $x \notin Q$, puisque P est σ-premier, il existe $y \notin P$ tel que $x \vee y \in \ker(\sigma)$. De plus, Q est σ-invariant, donc $x \vee y \in Q$. Comme $y \notin P$, on a $y \notin Q$. Par conséquent, $x \vee y \notin Q$, ce qui est une contradiction. Ainsi, P est un filtre premier σ-invariant minimal. ■

Proposition 3.42

Soit $\mathcal{L}$ une algèbre triangulaire et σ un endomorphisme surjectif tel que pour tout $x \notin ker(\sigma)$, il existe $n \in N$ tel que $\sigma(x) = x^n$. Alors tout filtre minimal premier σ-invariant de $\mathcal{L}$ est σ-premier.

Preuve. Soit P un filtre minimal premier σ-invariant et soit $a \in P$. Considérons $S = \{x \in L \mid$ il existe $b \in L - P$ tel que $a \vee b \geq x\}$. Ainsi, S est un sous-ensemble de réunion. De plus, $L - P \subseteq S$ et $a \in S$. Supposons que $\ker(\sigma) \cap S = \emptyset$, d'après le Théorème 3.33 des filtres premiers σ-invariants, il existe un filtre premier σ-invariant Q de L tel que $Q \cap S = \emptyset$. Ainsi, comme P est un filtre minimal premier σ-invariant, $Q = P$. Donc $a \in Q \cap S$ qui est absurde. ainsi, $\ker(\sigma) \cap S \neq \emptyset$. Supposons que $t \in \ker(\sigma) \cap S$. Alors, il existe $l \in L - P$ tel que $a \vee l \geq t$. Donc, $a \vee l \in \ker(\sigma)$. ∎

Théorème 3.43

Soit $\mathcal{L}$ une algèbre triangulaire telle que pour tout $x \in L$, $H'(x)$ est compact, et soit σ un morphisme surjectif tel que pour tout $x \notin \ker(\sigma)$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\sigma(x) = x^n$. Alors nous avons (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv). Si chaque filtre maximal est un filtre σ-stable, alors (iv) $\Rightarrow$ (i). Où,

(i) $\mathrm{Spec}^{\sigma}(L)$ est de Hausdorff.

(ii) pour tous $x, y \in L$, il existe $z \in L$ tel que $x \vee z \in \ker(\sigma)$ et $H'(y) \cap \{\mathrm{Spec}^{\sigma}(L) - H'(x)\} = H'(y \vee z)$.

(iii) Tout filtre premier σ-invariant est σ-premier.

(iv) $\mathrm{Spec}^{\sigma}(L)$ est un espace T_1.

Preuve. (i) $\Rightarrow$ (ii) Supposons que $\mathrm{Spec}^{\sigma}(L)$ soit un espace de Hausdorff. Par hypothèse, $H'(a)$ est compact, donc $H'(a)$ est un ensemble ouvert fermé, pour chaque $a \in L$. Soient $x, y \in L$ tels que $x \neq y$. Alors $H'(y) \cap \{\mathrm{Spec}^{\sigma}(L) - H'(x)\}$ est un sous-ensemble compact de l'espace compact $H'(y)$. Comme $H'(y)$ est ouvert dans $\mathrm{Spec}^{\sigma}(L)$, $H'(y) \cap \{\mathrm{Spec}^{\sigma}(L) - H'(x)\}$ est un sous-ensemble compact ouvert de $\mathrm{Spec}^{\sigma}(L)$. Ainsi, par le théorème théorème 3.28, il existe $z \in L$ tel que $H'(z) = H'(y) \cap \{\mathrm{Spec}^{\sigma}(L) - H'(x)\}$. Par conséquent, $H'(y) \cap \{\mathrm{Spec}^{\sigma}(L) - H'(x)\} = H'(y \vee z)$ et aussi $H'(x \vee z) = H'(x) \cap H'(z) = \emptyset$. Par conséquent, $x \vee z \in \ker(\sigma)$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Soit P un filtre premier σ-invariant de L. Pour $x, y \in L$ tels que $x \in P$ et $y \notin P$, alors par (ii), il existe $z \in L$ tel que $x \vee z \in \ker \sigma$ et $H'(y) \cap \{\mathrm{Spec}^{\sigma}(L) - H'(x)\} = H'(y \vee z)$. Ainsi, $P \in H'(y) \cap \{\mathrm{Spec}^{\sigma}(L) - H'(x)\} = H'(y \vee z)$. Si $z \in P$, alors $y \vee z \in P$, ce qui contredit $P \in H'(y \vee z)$. Par conséquent, $z \notin P$. Pour chaque $x \in P$, il existe donc $z \notin P$ tel que $x \vee z \in \ker(\sigma)$. Par conséquent, P est un filtre σ-premier.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Supposons que tout filtre premier σ-invariant soit σ-premier. Soient P et Q deux filtres premiers σ-invariants distincts. Par (iii), et Proposition 1.9, P et Q sont σ-premiers et minimaux. Par conséquent, $P \nsubseteq Q$ et $Q \nsubseteq P$. Choisissons $x \in P - Q$ et $y \in Q - P$. Alors $Q \in H'(x) - H'(y)$ et $P \in H'(y) - H'(x)$.

(iv) $\Rightarrow$ (i) Supposons que $\mathrm{Spec}^{\sigma}(L)$ soit un espace T_1. Soit P un filtre premier σ-invariant de L. Alors, par un résultat précédent, $P = \overline{P} = \{Q \in \mathrm{Spec}^{\sigma}(L) \mid P \subseteq Q\}$. Comme chaque filtre maximal est un filtre σ-stable, P est maximal. Il s'ensuit que chaque filtre premier σ-invariant est un filtre premier minimal. Soient $P, Q \in \mathrm{Spec}^{\sigma}(L)$ tels que $P \neq Q$. Pour $x \in P$ et $x \notin Q$, alors par le théorème des filtres premiers σ-invariants, P est σ-premier, donc il existe $z \in L$ tel que $x \vee z \in \ker \sigma$. Ainsi, $P \in H'(y), Q \in H'(x)$ et $H'(x) \cap H'(y) = H'(x \vee y) = \emptyset$. Par conséquent, $\mathrm{Spec}^{\sigma}(L)$ est un espace de Hausdorff ou encore est un espace séparé. ■

Conclusion et perspective

Dans ce mémoire, il était question pour nous d'étendre aux treillis résidués les notions étudiées par N. Abadi en 2019 dans son article intitulé "Filters by BL-homomorphisms" [1]. Il en ressort que des résultats tels que l'union de deux filtres σ-stables (resp. σ-invariants) est encore un filtres σ-stable(resp. σ-invariant), le filtre engendré par l'union de deux filtres σ-stables (resp. σ-invariants) est un filtre σ-stable (resp. σ-invariant), en certaines conditions, $\mathrm{Spec}^{\sigma}(\mathcal{L})$ est Hausdorff si et seulement si c'est un espace T_1 étendus aux treillis résidués sont quasiment similaires à ceux présent dans les BL-algèbres.

C'est dans ce sens que nous avons étendus ces notions aux algèbres triangulaires et nous remarquons que certains résultats ont étés réadaptés sur les filtres σ-stables, invariants et premiers invariants dans les treillis résidués.

De ce fait, en étendant aux algèbres triangulaires les résultats obtenu au Chapitre 2 nous constatons que la majorité de ses résultats reste vraie ceci se justifie par exemple par le fait que pour démontrer qu'un sous ensemble est un filtre d'une algèbre triangulaire il faudra juste démontrer les conditions (F_3) et pour le reste, les preuves découlerons naturellement des propriétés des endomorphismes d'algèbre triangulaire. En effet, un endomorphisme d'algèbre triangulaire est d'abord un endomorphisme du treillis résidué sous-jacent et en plus les opérateurs ν et μ sont tous deux commutatifs avec l'endomorphisme en question.

Certains résultats ont étés réadapter comme par exemple le définition de l'ensemble de doubles compléments qui est réadapter en ν-doubles complements, et des résultats comme le Théorème 2.18 qui est vrai dans le cadre des treillis résidués mais pas dans le cadre des algèbres triangulaires qui a été réadapter et énoncé au Théorème 3.24.

Dans nos futurs travaux, nous nous proposons d'étudier et d'appliquer nos résultats en logique floue.

Bibliographie

[1] N. D. Abadi, J. Moghaderi, *Filters by BL-homomorphisms*, Soft Comput 23, 9831-9841, (2019).

[2] Y. Boutelba, *Espaces topologiques métrisables*, Mémoire de fin d'études,Université Mohammed Seddik Benyahia - Jijel, (2023).

[3] D. Busneag, D. Piciu, *Some types of filters in residuated lattices*, Soft Comput 18, 825-837, (2014).

[4] Y. Y. Dong, X. L. Xin, *α-filters and prime α-filter spaces in residuated lattices*, Soft Comput 23, 3207-3216, (2019).

[5] N. Galatos, P. Jipsen, T. Kowalski and H. Ono, *Studies in logic and the foundations of mathematics*, 151, 1-509, (2007).

[6] B. V. Gasse, G. Deschrijver, C. Cornelis, E.E. Kerre, *Filters of residuated lattices and triangle algebra*, information science 180, 3006-3020, (2010).

[7] B. V. Gasse, *Interval-valued algebras and fuzzy logics*, PhD Thesis, Ghent University, (January 2010).

[8] P. Hajek, *Metamathematics of fuzzy logics*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, (1998).

[9] M. Kondo, Dudek, *Filter theory of BL-algebras*, Soft Comput (12) 419-423, (2008).

[10] S. Motamed and J. Moghaderi, *Some results on filters in residuated lattices*, Quasigroups and Related Systems 27, 91-105, (2019).

[11] D. Piciu , *Algebra of fuzzy logic, Editura Universtaria*, Universtaria Craiova, (2007).

[12] J.G. Shen, X.H. Zhang, *Filters of residuated lattices*, Chin Q J Math 21, 443-447,(2006).

[13] M. Ward, R. P. Dilworth, *Residuated lattices*, Transactions of the American Mathematical Society 45, 335-354, (1939).

[14] A. Zahiri, A. B. Saeid, E. Eslami, *An approach to filters in triangle algebras*, Publication de l'int. mathématique, nouvelle série, tome 101(115), 267-283, (2017).

[15] A. Zahiri, A. B. Saeid, E. Eslami, *A study of stabilizers in triangle algebras*, Mathematical Institute Slovak Academy of Sciences, Math. Slovaca 68(1), 41-52, (2018).

[16] A. Zahiri, A. B. Saeid, E. Turunen, *On local triangle algebras*, Fuzzy Sets ans Systems, 418, 126-138 (2021).

[17] Y. Zhu, Y. Xu, *Filter theory of residuated lattices*, Information. Sci. 180, 3614-3632, (2010).