Povratna projekcija

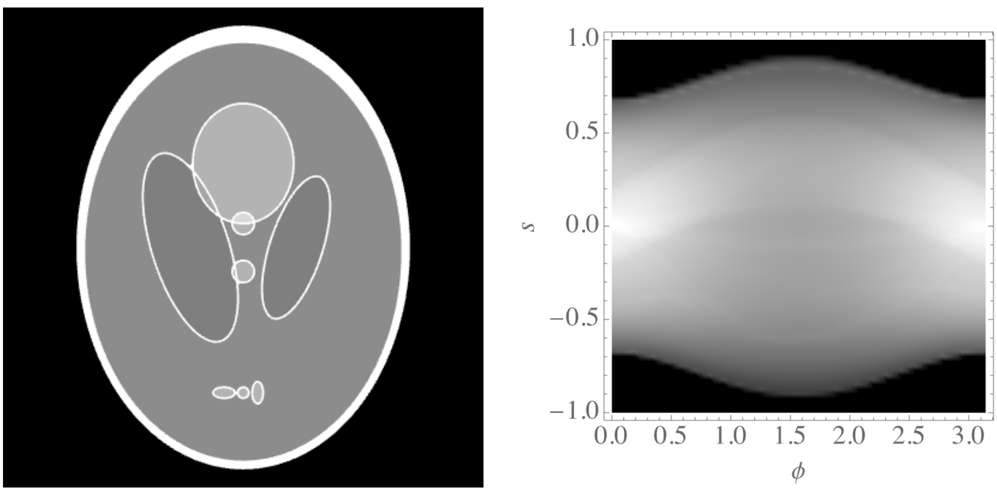
8. november 2023

1 Uvod in teoretične osnove

Kot vhodne podatke imate podane Radonovo transformirane slike (projekcije za kote $\phi \in [0, \pi]$ in za razdalje $s = [-1, 1]$):

$$p(\phi, s) = \iint f(x, y)\delta(x \cos\phi + y \sin\phi - s)\, dx\, dy\,, \tag{1}$$

kjer $f(x, y)$ predstavlja intenziteto slike v sivih odtenkih, s konvencijo, da so vrednosti $f(x, y)$ med 0 (črna) in 1 (bela). V tem projektu boste iz podanega sinograma (projekcije $p(\phi, s)$) rekonstruirali pripadajoče slike $f(x, y)$. Za primer glej Sliko 1. V vseh naslednjih zgledih



Slika 1: Shepp-Logan-ov fantom (levo) in njegova Radonova transformacija (desno).

je definicijsko območje slike f interval $[-1, 1]^2$, pri čemer lahko upoštevate, da je $f(x, y)$ neničelna le znotraj enotske krožnice, $x^2 + y^2 < 1$.

1.1 Filtrirana povratna projekcija

Na predavanjih smo pokazali, da je eksaktna rekonstrukcija mogoča:

$$f(x,y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\pi d\phi \int_{-\infty}^{\infty} dk\, \tilde{R}(k) \tilde{f}(k\cos\phi, k\sin\phi) e^{ik(x\cos\phi + y\sin\phi)}\,, \tag{2}$$

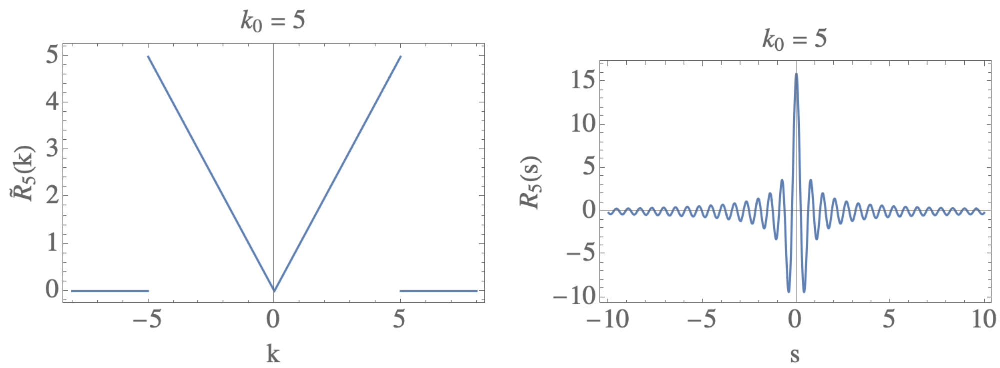
kjer je $\tilde{R}(k)$ filter v k-prostoru, in je $\tilde{R}(k) = |k|$. V praksi seveda odrežemo visoke frekvence, ki ležijo nad poljubno izbranim k_0:

$$\tilde{R}_{k_0}(k) = |k|\theta(k_0 - |k|)\,, \tag{3}$$

kjer je θ Heavisidova funkcija. Ta rekonstrukcija je poznana filtrirana povratna projekcija, kjer filter $|k|$ zagotovi, da so v polarnih koordinatah vse frekvence enakomerno zastopane. V realnem prostoru filtrirno funkcijo dobimo z inverzno Fourierovo transformacijo (preveri!):

$$R_{k_0}(s) = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{2k_0}{s}\sin(k_0 s) - \frac{4}{s^2}\sin^2(k_0 s/2)\right]\,, \tag{4}$$

kot npr. na Sliki 2. Spremenljivka s v tem primeru predstavlja koordinato vzdolž projekcije pod kotom ϕ, in se izraža kot $s = x\cos\phi + y\sin\phi$. Ker nas zanima le slika znotraj enotske krožnice vedno velja $-1 < s < 1$. Pokazali smo, da lahko produkt funkcij v k-prostoru



Slika 2: Filter R v k- in s-prostoru.

predstavimo kot konvolucijo v s-prostoru, in posledično se filtrirana povratna projekcija lahko zapiše tudi kot

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi d\phi\, [p * R](x\cos\phi + y\sin\phi) \qquad (5)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi d\phi \int_{s-1}^{s+1} d\tau\, [p(\phi, s-\tau)R(\tau)]\Big|_{s=x\cos\phi+y\sin\phi} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi d\phi \int_{-1}^{1} d\tau\, [p(\phi, \tau)R(s-\tau)]\Big|_{s=x\cos\phi+y\sin\phi}\,. \end{aligned}$$

Navadna (naivna) povratna projekcija ustreza primeru, ko je $R(\tau)$ kar $\delta(\tau)$, torej ko konvolucija ne spremeni funkcije $p(\phi, s)$.

2 Vhodni podatki

Sinogram fantoma na Sliki 1 se nahaja v datoteki `phantom.dat`, in vam služi za verifikacijo metode povratne projekcije. Nato imate še sinograma `sg1.dat`, `sg2.dat`, ki ju rekonstruirajte po najboljših močeh.

V posamezni datoteki imate v prvi vrstici n_s vrednosti sinograma $p(0,-1)$, $p(0,-1+\Delta s),\ldots,p(0,1-\Delta s)$, kjer je n_s število vzorčenj v smeri s in je korak $\Delta s = 2/n_s$. Vsaka od n_ϕ vrstic ustreza enemu kotu ϕ, torej je število v i-ti vrstici in j-tem stolpcu ($i=0,\ldots,n_\phi-1$, $j=0,\ldots,n_s-1$) vrednost sinograma $p_{ij} = p(i\Delta\phi, -1+j\Delta s)$. Tu je $\Delta\phi = \pi/n_\phi$.

Uporabite diskretizirano verzijo enačbe (5), ki se glasi

$$f(x,y) = \frac{1}{n_s n_\phi} \sum_{i=0}^{n_\phi-1} \sum_{j=0}^{n_s-1} p_{ij} R(s_i + 1 - j\Delta s)\,, \tag{6}$$

kjer je $s_i = x\cos(i\Delta\phi) + y\sin(i\Delta\phi)$. Koordinati x, y sta poljubni in pri rekonstrukciji ni smiselno x in y jemati bolj na gosto kot z razmikom Δs. Če definiramo še matriko $R_{ji}(x,y) \equiv R(s_i + 1 - j\Delta s)$, lahko izraz na desni zapišemo kot sled[1] produkta matrik:

$$f(x,y) = \frac{1}{n_s n_\phi} \sum_{i=0}^{n_\phi-1} \sum_{j=0}^{n_s-1} p_{ij} R_{ji}(x,y) = \frac{1}{n_s n_\phi} \mathrm{Tr}[pR(x,y)]\,. \tag{7}$$

Ko rekonstruirate $f(x,y)$ na izbrani mreži točk (x_i, y_i), vse dobljene $f_{ij} = f(x_i, y_i)$ deli z največjim $f_{\max} = \max_{i,j} f_{ij}$, torej $f_{ij} \to f_{ij}/f_{\max}$. Na 0 postavi vse morebitne negativne vrednosti f_{ij}, kot tudi tiste f_{ij}, za katere i in j ležita izven enotske krožnice.

Opazili boste, da je rekonstrukcija precej časovno potratna. Hitrejša alternativa je, da konvolucijo izračunamo v k-prostoru preko hitre Fourierove transformacije (FFT).

Rekonstruirane slike lahko narišete npr. v Mathematici (funkcija `Image`) ali v kakšem drugem okolju po vaši izbiri.

2.1 Izbira parametrov filtra

Pri linearnem filtru (ramp filter) je bistven parameter največja frekvenca k_0. Ker imamo vzorčenje v smeri s v razdalji Δs je največja frekvenca, ki jo lahko zaznamo ravno polovična frekvenca vzorčenja, $k_{\max} = \pi/\Delta s = (n_s\pi)/2$ (Nyquistova frekvenca). Izbira k_0 naj bo manjša od $k_{\max}$. Opazuj, kako se se spreminja povratna projekcija, ko nastaviš k_0 na $k_{\max}/3$, $k_{\max}/2$, $k_{\max}$.

V splošnem je možna tudi izbira alternativnih filtrov, ki porežejo visoke frekvence (šum), glej npr. `https://www.clear.rice.edu/elec431/projects96/DSP/filters.html`.

[1] Sled (ang. *trace*) je definirana kot vsota diagonalnih elementov matrike, $\mathrm{Tr}(A) = \sum_i A_{ii}$.