



7. naloga - Newtonov zakon

Ma-Fi praktikum 2023/24

Newtonov zakon



- Danes bomo naše znanje o reševanju diferencialnih enačb z začetnimi pogoji razširili na diferencialne enačbe 2. reda.
 - Med te spada tudi Newtonov zakon, zato si lahko na tem primeru tudi največ predstavljamo (v fizikalnem smislu).
 - Pravzaprav nam današnja razširitev pomaga pri reševanju diferencialnih enačb poljubnega reda, kot bomo v kratkem videli.
 - ... in v poljubno dimenzijah!



Podrobnosti...

- Torej, 2. Newtonov zakon je popolnoma splošno zapisan kot:

$$\vec{F} = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$

- Ne gre pa pozabiti, da za specifično rešitev le-tega potrebujemo tudi ustrezne začetne pogoje:

$$\vec{r}(t = 0) = \vec{r}_0$$

$$\dot{\vec{r}}(t = 0) = \vec{v}_0$$

- Če upoštevamo tri prostorske dimenzije, imamo torej tu:
 - Sistem **treh diferencialnih enačb 2. reda** in
 - **šest** začetnih pogojev.
- Sila je seveda lahko **funkcija lege, časa in tudi hitrosti (ali gibalne količine)**, zato 2. N. Z. tudi ni v splošnem tako enostavno rešljiv!

$$\ddot{\vec{r}}(t) = \frac{\vec{F}(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}})}{m}$$

Podrobnosti...



- Bistven korak v numeričnem (in pogosto tudi analitičnem) reševanju je, da vpeljemo raje novo vmesno spremenljivko:

- v fizikalnem smislu je to lahko ali hitrost (**v**) ali pa gibalna količina (**p**):

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t)$$

$$\vec{p}(t) = m \dot{\vec{r}}(t)$$

- Recimo, da se odločimo za slednjo: Naš 2. N.Z. potem postane:

$$\dot{\vec{r}}(t) = \vec{p}(t)/m$$

$$\dot{\vec{p}}(t) = \vec{F}(t, \vec{r}, \vec{p})$$

- Po tej transformaciji imamo torej tu:
 - Sistem **šestih (sklopljenih) diferencialnih enačb 1. reda** in
 - **šest** začetnih pogojev.

$$\vec{r}(t = 0) = \vec{r}_0$$

$$\vec{p}(t = 0) = \vec{p}_0$$



Podrobnosti...

- Formalno gledano, lahko naš sistem zapišemo tudi z šest-dimenzionalnim vektorjem \vec{y} :

$$\vec{y} = (\vec{r}, \vec{p})$$

$$\vec{f} = (\vec{p}/m, \vec{F})$$

$$\dot{\vec{y}}(t) = \vec{f}(t, \vec{y})$$

- Dodamo še začetne pogoje v novem zapisu:

$$\vec{y}(t = 0) = \vec{y}_0$$

- Takoj lahko opazimo, da se nam je problem (vsaj na videz) zelo poenostavil.
 - Z izjemo vektorjev zgleda povsem enako, kot naš problem 'hoda' iz prejšnjega tedna!

$$y'(x) = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 .$$

- Dejansko lahko tudi vse metode iz prejšnjega tedna kar neposredno uporabimo!**



Midpoint metoda

$$y'(x) = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

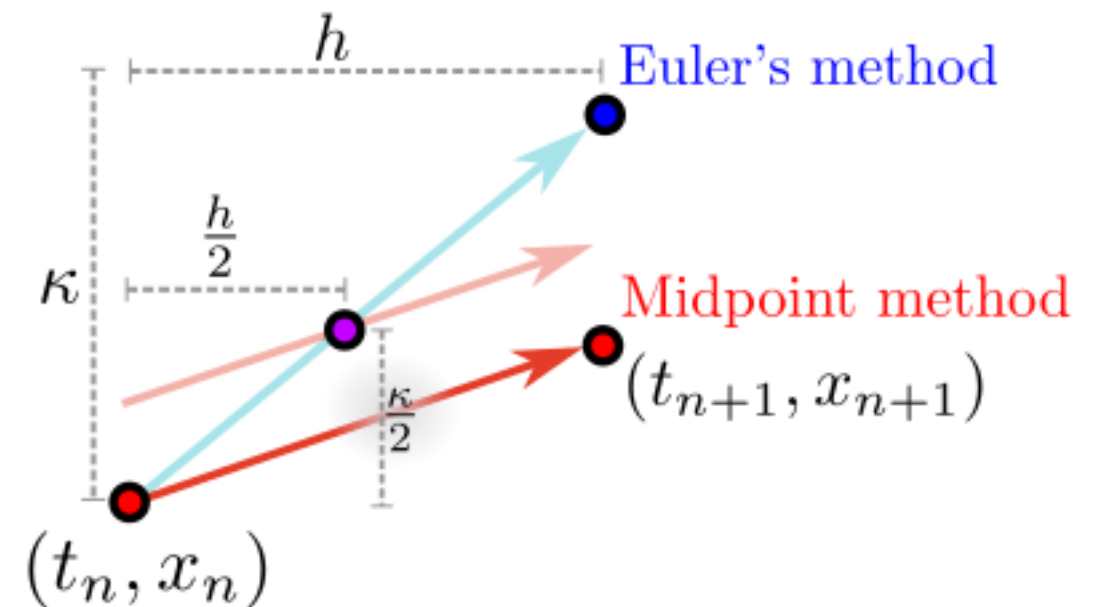
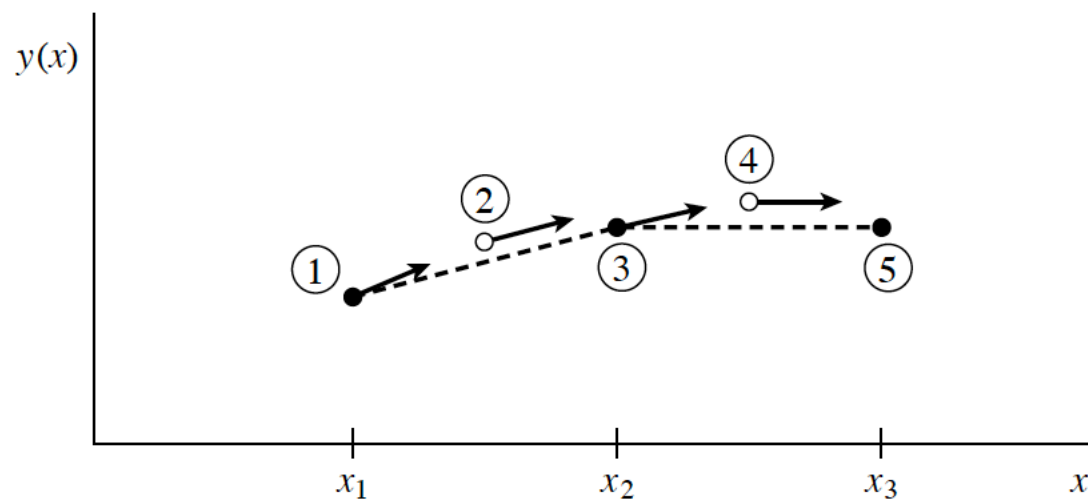
- Po slovensko recimo **Metoda središčne točke...**

$$Y_0 = y_0,$$

$$Y_{i+\frac{1}{2}} = Y_i + \frac{h}{2} f(x_i, Y_i),$$

$$Y_{i+1} = Y_i + h f\left(x_i + \frac{h}{2}, Y_{i+\frac{1}{2}}\right)$$

- Izboljšava z oceno odvoda na **sredi intervala enega koraka**.
- Ima **globalno napako $O_g(h^2)$** - metoda bi (lokalno) točno rešila enačbo parabole.
- Potrebujemo dve vrednotenji f na korak.





Midpoint metoda v N-dim

$$\vec{y}'(x) = \vec{f}(x, \vec{y}), \quad \vec{y}(x_0) = \vec{y}_0$$

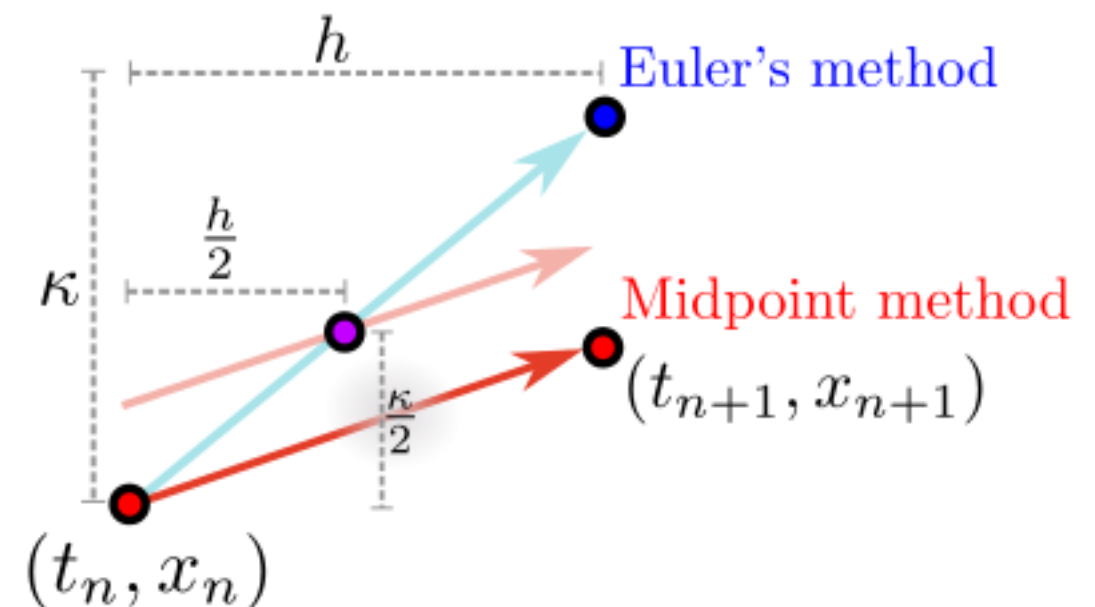
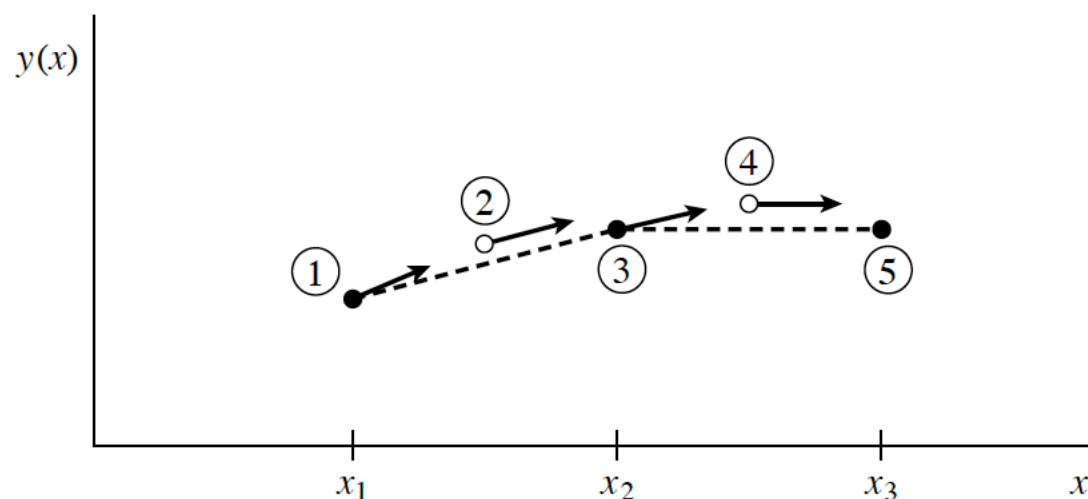
- Po slovensko recimo **Metoda središčne točke...**

$$\vec{Y}_0 = \vec{y}_0,$$

$$\vec{Y}_{i+\frac{1}{2}} = \vec{Y}_i + \frac{h}{2} \vec{f}(x_i, \vec{Y}_i),$$

$$\vec{Y}_{i+1} = \vec{Y}_i + h \vec{f}(x_i + \frac{h}{2}, \vec{Y}_{i+\frac{1}{2}})$$

- Izboljšava z oceno odvoda na **sredi intervala enega koraka.**
- Ima **globalno napako $O_g(h^2)$** - metoda bi (lokalno) točno rešila enačbo parabole.
- Potrebujemo dve vrednotenji f na korak.





Midpoint metoda v N-dim

$$\vec{y}'(x) = \vec{f}(x, \vec{y}), \quad \vec{y}(x_0) = \vec{y}_0$$

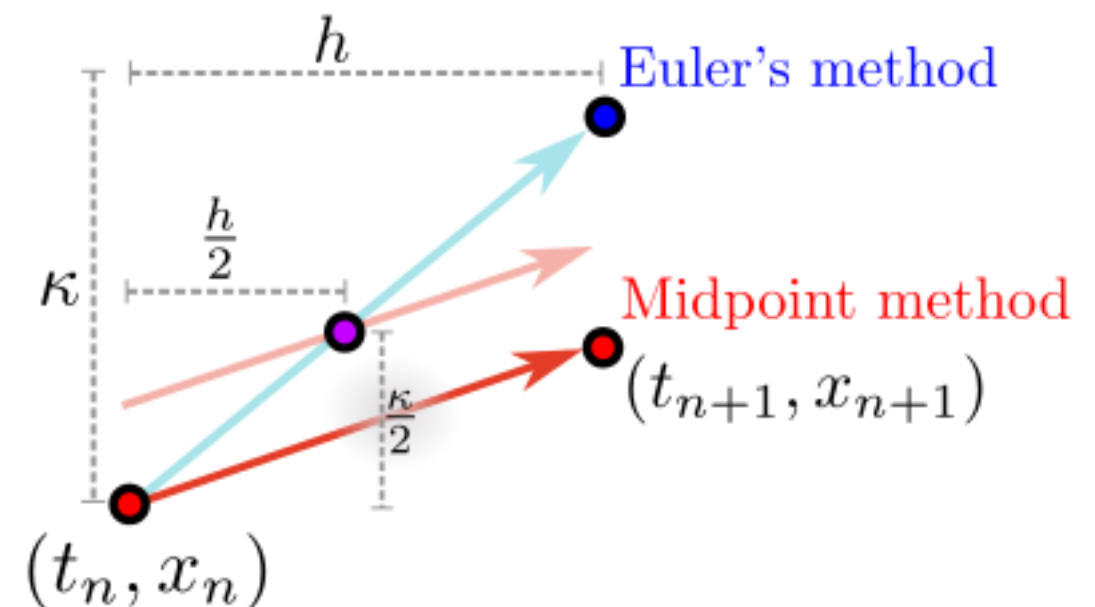
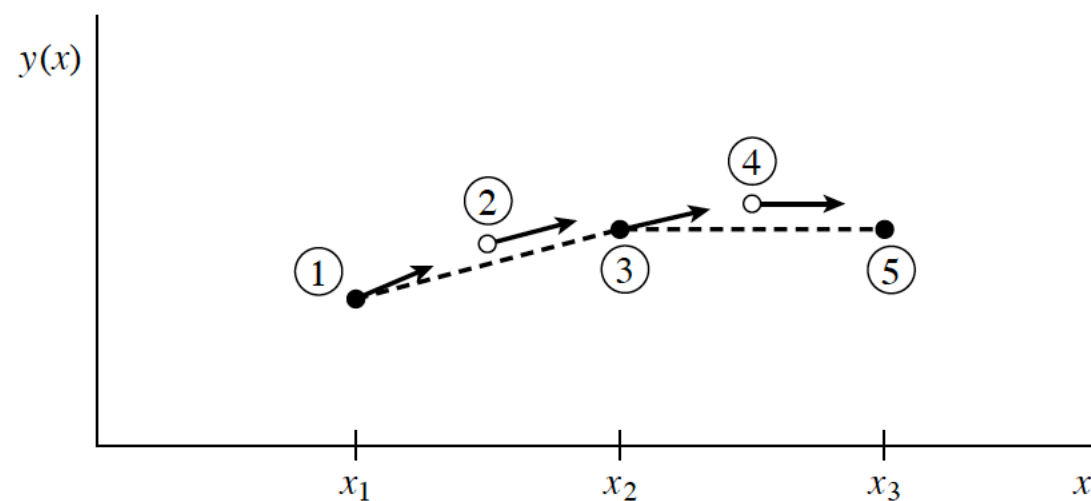
- Po slovensko recimo **Metoda središčne točke...**

$$\vec{Y}_0 = \vec{y}_0,$$

$$\vec{Y}_{i+\frac{1}{2}} = \vec{Y}_i + \frac{h}{2} \vec{f}(x_i, \vec{Y}_i),$$

$$\vec{Y}_{i+1} = \vec{Y}_i + h \vec{f}(x_i + \frac{h}{2}, \vec{Y}_{i+\frac{1}{2}})$$

- Razlika z eno-dimenzionalno metodo je torej samo ustrezna uporaba vektorjev.
 - ... kar na primer Pythonov NumPy paket počne že **avtomatsko!**





V splošnem torej...

$$\vec{y}'(x) = \vec{f}(x, \vec{y}), \quad \vec{y}(x_0) = \vec{y}_0$$

- Zgornji sistem enačb lahko dobimo za poljubno kombinacijo dimenzij in/ali reda diferencialne enačbe. Na primer:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

- Lahko prevedemo na zgornji zapis z vpeljavo novih spremenljivk:

$$v = y', \quad z = v' = y'', \dots$$

$$\vec{y} = (y, v, z, \dots)$$

- ... in seveda ustrezno prevedbo začetnih pogojev.
- **Tu bi lahko tudi končali, vendar obstaja še ena posebnost, ki nam pride še posebej prav v fiziki, in vodi v novo kategorijo metod...**

Simplektične metode



- Tu nam spet za predstavu pride prav fizika: Pogosto v naših primerih veljajo **ohranitveni izreki (zakoni)**, npr. **energija**, **vrtilna in gibalna količina** ipd.
 - Nobena od numeričnih metod ni bila namensko izpeljana z zahtevo o tovrstnih ohranitvah...
 - Metodam, ki ohranjajo energijo, rečemo **simplektične metode** (zgodba je matematično malce bolj komplicirana, ampak za nas je to kar v redu interpretacija).
- Vse naše izpeljave bodo zdaj eno-dimenzionalne zaradi preglednosti...
 - ... več-dim. razširitev je preprosta, kot smo se že naučili...



WIKIPEDIA
The Free Encyclopedia

[Main page](#)
[Contents](#)
[Current events](#)
[Random article](#)

Article [Talk](#)

Read

[Edit](#)

[View history](#)



Not logged in [Talk](#) [Contributions](#) [Create account](#) [Log in](#)

Symplectic integrator

From Wikipedia, the free encyclopedia

In [mathematics](#), a **symplectic integrator (SI)** is a [numerical integration scheme](#) for [Hamiltonian systems](#). Symplectic integrators form the subclass of [geometric integrators](#) which, by definition, are [canonical transformations](#). They are widely used in [nonlinear dynamics](#), [molecular dynamics](#), [discrete element methods](#), [accelerator physics](#), [plasma physics](#), [quantum physics](#), and [celestial mechanics](#).



Simplektične metode

- Najbolj preprosta, a kar učinkovita je **metoda Verlet (1967)/Störmer(1907)/Encke(~1850)**.
 - Globalno natančna do **drugega reda**.
 - **Ena** evaluacija funkcije na korak.
 - Točno ohranja **energijo in tudi vrtilno količino sistema** (če je ta v danem problemu smiselna).
 - Kot da imen ni dovolj, je metoda poznana tudi kot **leapfrog** metoda (skakanje žabice...).

- Naša eno-dimenzionalne izpeljava izhaja tako iz enačbe 2. reda:

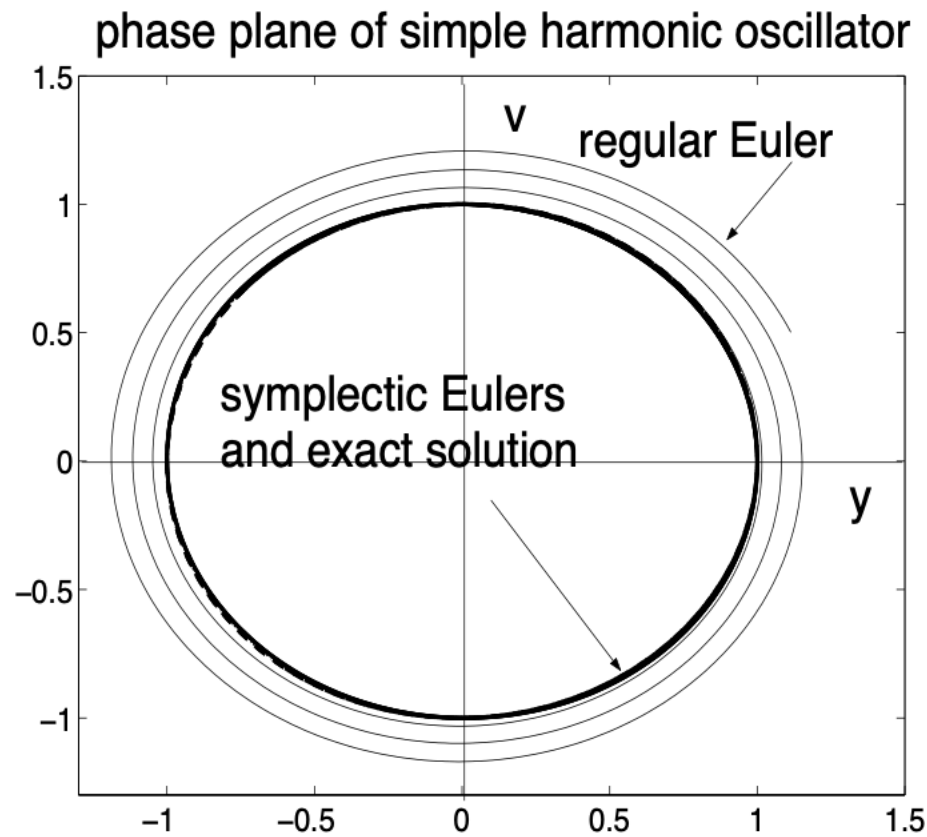
$$y'' = f(y), \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = v_0$$

- ...kjer je $f(y)$ le funkcija koordinate, zaradi ohranitve energije...

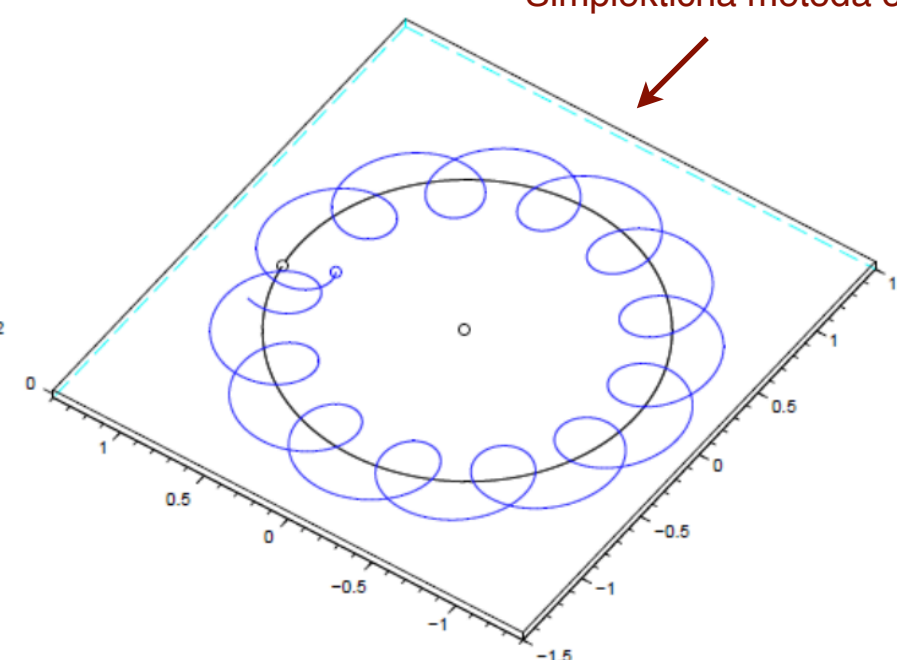
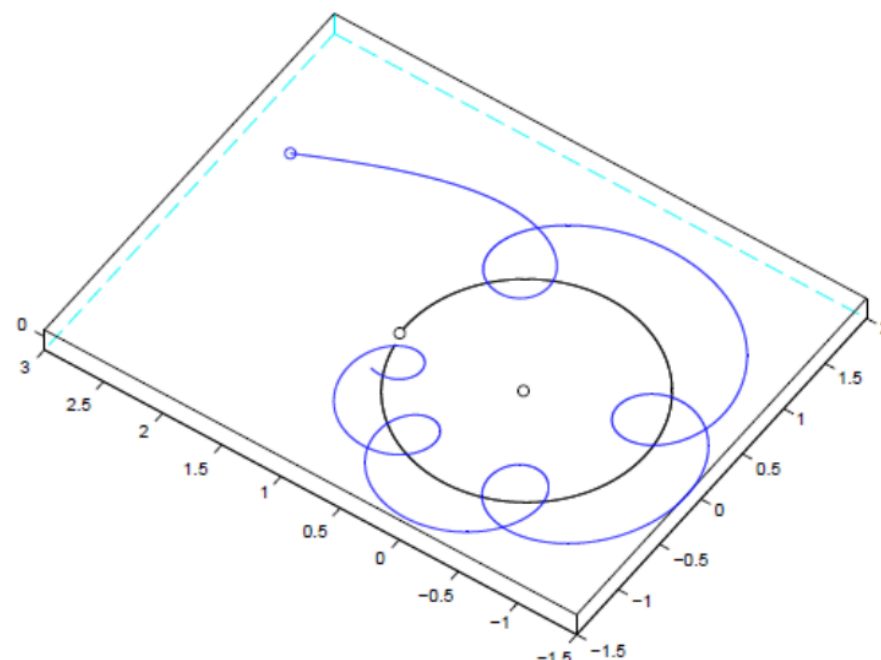
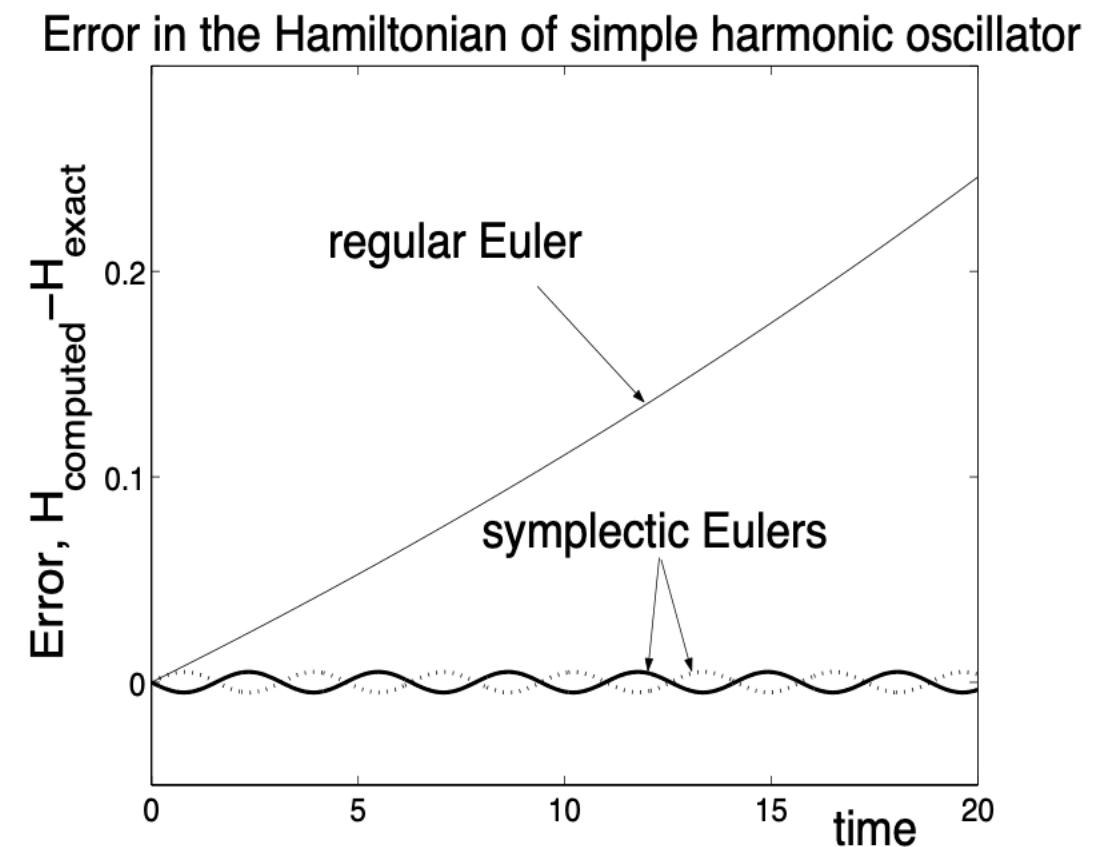


Simplektične metode

- Grafično, v faznem prostoru (lege in hitrosti ali gibalne količine):



The Sun-Earth-Moon System



Simplektična metoda ohranja stabilno orbito....





Simplektične metode

$$y'' = f(y), \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = v_0$$

- Izpeljav je več. Najhitrejša (ali vsaj najlepša) je, če najprej zopet vpeljemo **hitrost v** kot novo vmesno spremenljivko:

$$\begin{aligned} y' &= v, \\ v' &= f(y), \\ y(x_0) &= y_0, \quad v(x_0) = v_0 \end{aligned}$$

- .. in nato razbijemo korak v dve polovici. V prvi izboljšamo oceno za hitrost:

$$\begin{aligned} x_n \rightarrow x_{n+\frac{1}{2}} : \quad v_{n+\frac{1}{2}} &= v_n + \frac{h}{2} f(y_n) \\ y_{n+\frac{1}{2}} &= y_n + \frac{h}{2} v_{n+\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

- V drugi pa oceno za lego (in pospešek).

$$\begin{aligned} x_{n+\frac{1}{2}} \rightarrow x_{n+1} : \quad y_{n+1} &= y_{n+\frac{1}{2}} + \frac{h}{2} v_{n+\frac{1}{2}} \\ v_{n+1} &= v_{n+\frac{1}{2}} + \frac{h}{2} f(y_{n+1}) \end{aligned}$$

- Pazi, en izračun f je iz prejšnjega koraka!



Simplektične metode

$$y'' = f(y), \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = v_0$$

- 'Skakljanje' (in namen izpeljave) postane očitno, če nas v vmesnih točkah ne zanima lega, v mrežnih točkah pa ne hitrost, ker lahko račun poenostavimo. Namesto:

$$x_n \rightarrow x_{n+\frac{1}{2}} : \quad v_{n+\frac{1}{2}} = v_n + \frac{h}{2} f(y_n)$$

$$y_{n+\frac{1}{2}} = y_n + \frac{h}{2} v_{n+\frac{1}{2}}$$

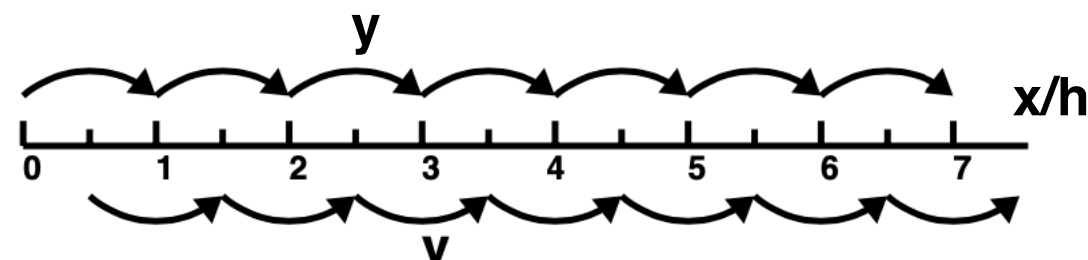
$$x_{n+\frac{1}{2}} \rightarrow x_{n+1} : \quad y_{n+1} = y_{n+\frac{1}{2}} + \frac{h}{2} v_{n+\frac{1}{2}}$$

$$v_{n+1} = v_{n+\frac{1}{2}} + \frac{h}{2} f(y_{n+1})$$

- Dobimo samo:

$$y_{n+1} = y_n + h v_{n+\frac{1}{2}}$$

$$v_{n+\frac{3}{2}} = v_{n+\frac{1}{2}} + h f(y_{n+1})$$





Simplektične metode

$$y'' = f(y), \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = v_0$$

- Alternativno lahko ta sistem zapišemo tudi samo 'na mreži' vrednosti...

$$x_n \rightarrow x_{n+\frac{1}{2}} : \quad v_{n+\frac{1}{2}} = v_n + \frac{h}{2} f(y_n)$$

$$y_{n+\frac{1}{2}} = y_n + \frac{h}{2} v_{n+\frac{1}{2}}$$

$$x_{n+\frac{1}{2}} \rightarrow x_{n+1} : \quad y_{n+1} = y_{n+\frac{1}{2}} + \frac{h}{2} v_{n+\frac{1}{2}}$$

$$v_{n+1} = v_{n+\frac{1}{2}} + \frac{h}{2} f(y_{n+1})$$

- Pa dobimo:

$$y_{n+1} = y_n + h v_n + \frac{h^2}{2} f(y_n)$$

$$y(t) = y_0 + v_0 \cdot t + a \cdot \frac{t^2}{2}$$

$$v_{n+1} = v_n + \frac{h}{2} [f(y_n) + f(y_{n+1})]$$

...povprečni pospešek ...



Simplektične metode

$$y'' = f(y), \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = v_0$$

- Še tretji zapis pa dobimo, če se v enačbi znebimo še hitrosti. Vzamemo:

$$y_{n+1} = y_n + h v_n + \frac{h^2}{2} f(y_n)$$

$$v_{n+1} = v_n + \frac{h}{2} [f(y_n) + f(y_{n+1})]$$

- Ter prejšnji korak:

$$y_n = y_{n-1} + h v_{n-1} + \frac{h^2}{2} f(y_{n-1})$$

$$v_n = v_{n-1} + \frac{h}{2} [f(y_{n-1}) + f(y_n)]$$

- Pa se nam veliko členov zgledno pokrajša in dobimo:

$$y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1} = h^2 f(y_n)$$

Henrici: raje zapiši kot:

$$\Delta_n = y_n - y_{n-1}$$

$$\Delta_{n+1} = \Delta_n + h^2 f(x, y_n)$$

$$y_{n+1} = y_n + \Delta_{n+1}$$

Central Difference Method



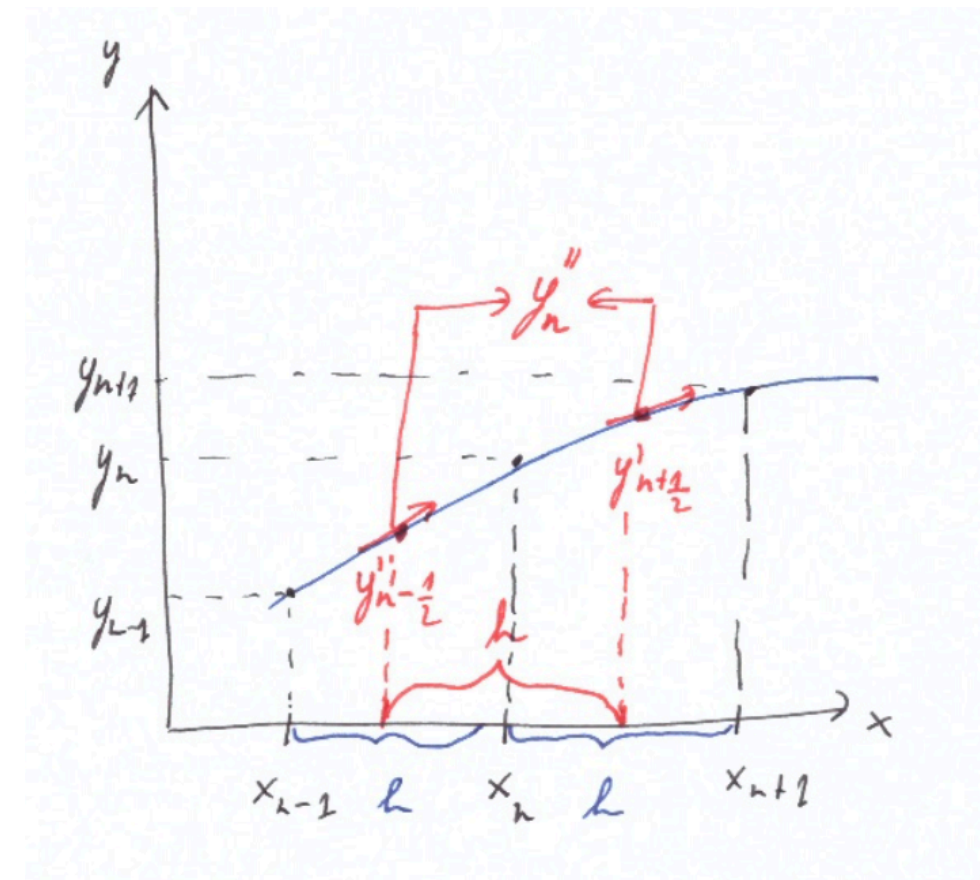
$$y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1} = h^2 f(y_n)$$

- Novi zapis bi lahko dobili tudi po povsem drugi poti, namreč s približkom drugega odvoda:

$$y_n'' = \frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{h^2} + O(h^2);$$

- Le-tega imenujemo tudi središčna razlika (central difference), od tod še eno ime metode..
- CDM razvita neodvisno od simplektične debate.

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2}(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{dy}{dx}(x + h/2) - \frac{dy}{dx}(x - h/2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{y(x + h) - y(x)}{h} - \frac{y(x) - y(x - h)}{h} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} [y(x + h) - 2y(x) + y(x - h)] \end{aligned}$$





Central Difference Method

$$y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1} = h^2 f(y_n)$$

- Novi zapis bi lahko dobili tudi po povsem drugi poti, namreč s približkom drugega odvoda:

$$y_n'' = \frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{h^2} + O(h^2);$$

- Le-tega imenujemo tudi središčna razlika (central difference), od tod še eno ime metode..
- CDM razvita neodvisno od simplektične debate.
- **Dodatno potrebno začetno točko y_1 dobimo iz začetnih pogojev.**
 - po Taylorju (ali pospešenem gibanju):

$$y_1 = y_0 + v_0 \cdot h + f(y_0) \cdot \frac{h^2}{2}$$

- Brez te naše izpeljave pa ne bi vedeli, da je tudi CDM v resnici simplektična (pač identična leapfrog metodi).

PEFRL



$$y'' = f(y), \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = v_0$$

- Obstajajo tudi simplektične metode višjih redov. Ena najboljših je **Position Extended Forest-Ruth-Like method (PEFRL)**.
 - Ime primer, kako včasih ne znamo najti dobrega akronima...
 - **Globalno četrtega reda, štiri vrednotenja funkcije na korak...**

$$x = x + \xi h v$$

$$v = v + (1 - 2\lambda) \frac{h}{2} F(x)$$

$$x = x + \chi h v$$

$$v = v + \lambda h F(x)$$

$$x = x + (1 - 2(\chi + \xi)) h v$$

(PEFRL algorithm)

$$v = v + \lambda h F(x)$$

$$x = x + \chi h v$$

$$v = v + (1 - 2\lambda) \frac{h}{2} F(x)$$

$$x = x + \xi h v$$

$$\xi = +0.1786178958448091\text{E}+00$$

$$\lambda = -0.2123418310626054\text{E}+00$$

$$\chi = -0.6626458266981849\text{E}-01$$



Naloga

- Čim več metod uporabi za izračun nedušenega nihanja matematičnega nihala z začetnim pogojem $\theta(0) = \theta_0 = 1$, $\dot{\theta}(0) = 0$.
 - Poišči korak, ki zadošča za natančnost na 3 mesta. Primerjaj tudi periodično stabilnost shem: pusti, naj teče račun čez 10 ali 20 nihajev in poglej, kako se amplitude nihajev sistematično kvarijo.
 - Pomagaš si lahko tudi tako, da občasno izračunaš energijo:

$$E \propto 1 - \cos \theta + \frac{\dot{\theta}^2}{2\omega_0^2}$$

- **Nariši tudi ustrezne fazne portrete!**

- Z analitično rešitvijo dobimo za nihajni čas $\frac{4}{\omega_0} K\left(\sin^2 \frac{\theta_0}{2}\right)$, kjer je $K(m)$ popolni eliptični integral prve vrste, definiran z:

$$K(m) = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-mz^2)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{(1-m\sin^2 u)}}$$

- Analitična rešitev za matematično nihalo je potem:

Pazi, obstaja tudi definicija z m^2 , v Scipy je tale !!

$$\theta(t) = 2 \arcsin \left\{ \sin \frac{\theta_0}{2} \operatorname{sn} \left[K\left(\sin^2 \frac{\theta_0}{2}\right) - \omega_0 t; \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \right] \right\}$$

- Dodatno lahko tudi sprogramirate eliptični integral, ki je analitična rešitev dane enačbe ali pa ga vzamete iz ustreznih programskih knjižnjic.



Dodatni nalogi

- **Dodatna naloga:** Razišči še resonančno krivuljo vzbujenega dušenega matematičnega nihala:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \beta \frac{dx}{dt} + \sin x = v \cos(\omega_0 t) ,$$

- Opazuj obnašanje odklonov in hitrosti nihala
- pri dušenju $\beta=0.5$, vzbujevalni frekvenci $\omega_0=2/3$ in amplitudo vzbujanja na območju $0.5 < v < 1.5$.
- Poskusi opaziti **histerezo** obnašanje resonančne krivulje pri velikih amplitudah vzbujanja.

- **Dodatna dodatna naloga:** Oglej si še odmike in hitrosti (fazne portrete) van der Polovega oscilatorja:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - \lambda \frac{dx}{dt} (1 - x^2) + x = v \cos(\omega_0 t) ,$$

s parametri $\omega_0=1$ $v=10$ ter $\lambda=1$ ali $\lambda=100$.

- Tu se ne trudi s preprostimi diferenčnimi shemami temveč uporabi napredne metode ...

