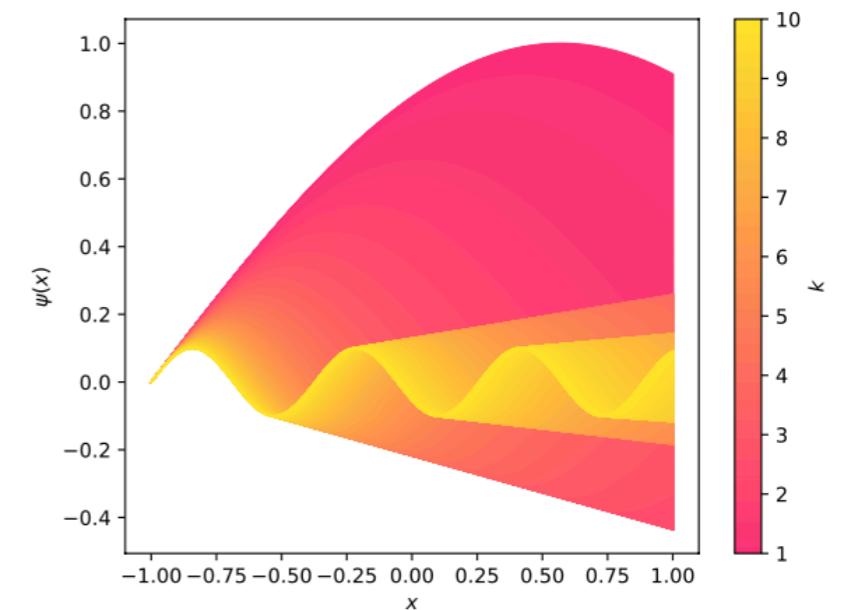
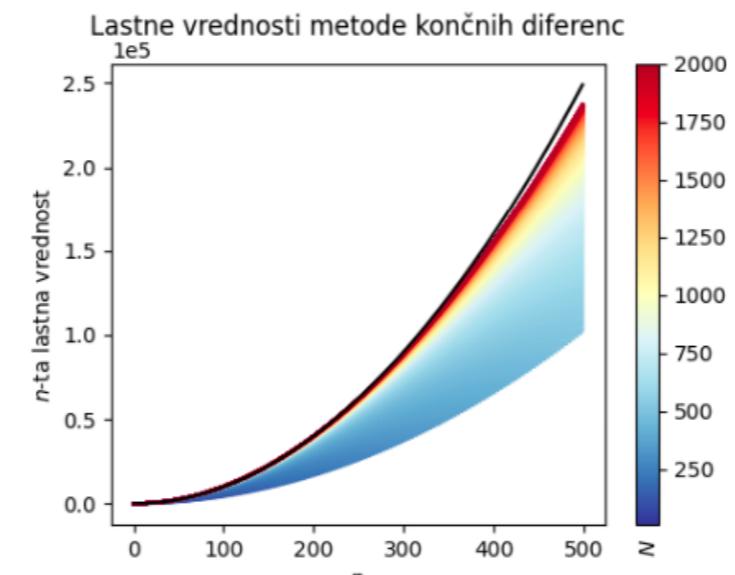
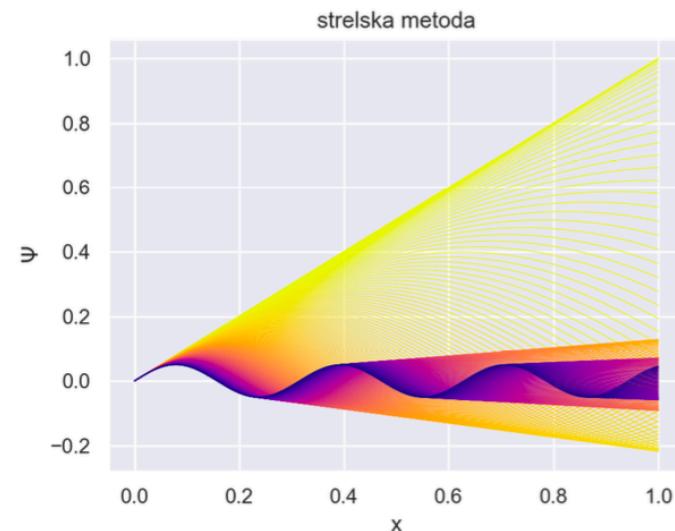




# 8. naloga

---

2022/23

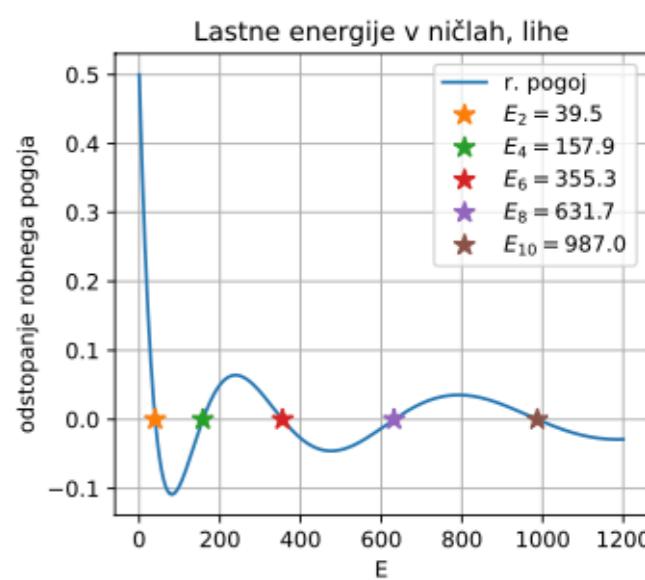
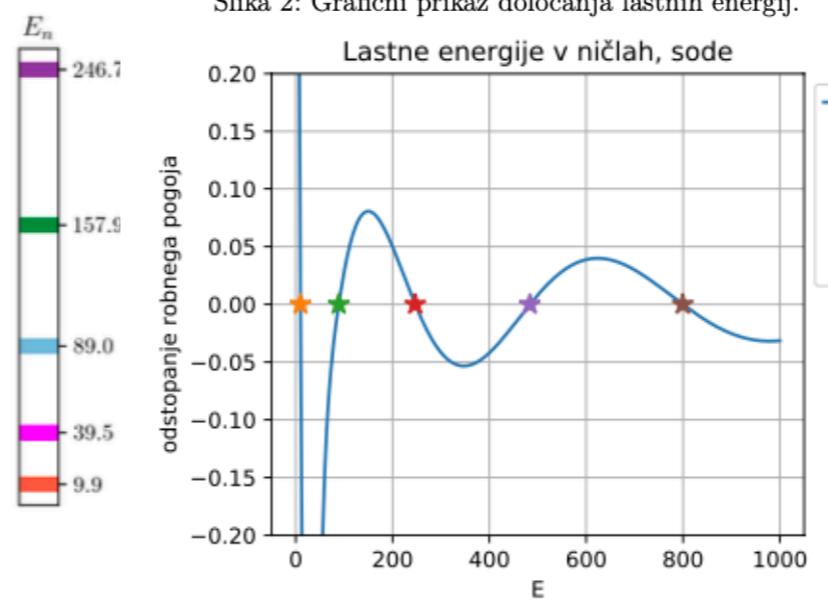
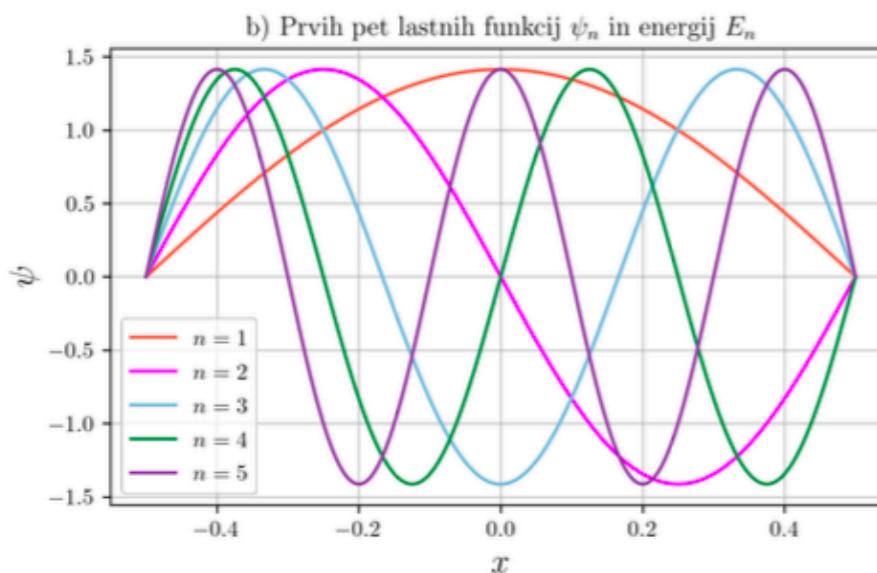
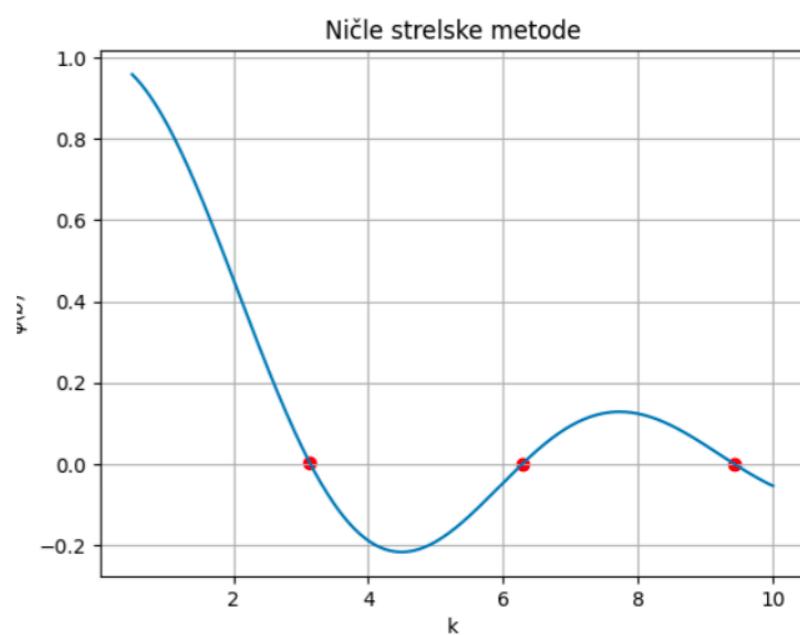
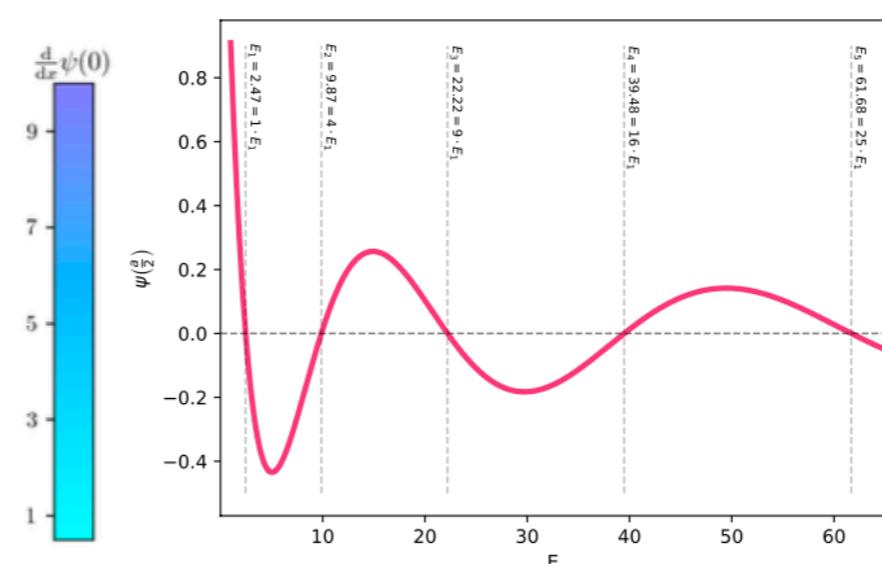
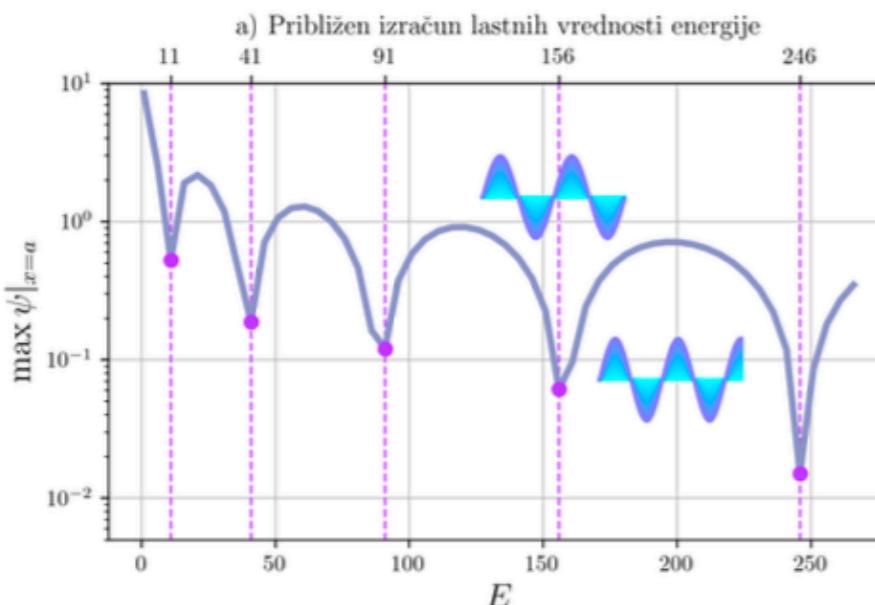




# Neskončna jama

- Strelska metoda: v splošnem ste se znašli, najmanj težav...
  - Problem se prevede na **iskanje ničel** v odvisnosti od začetnih pogojev ( $\lambda$ ).
  - Tu napaka (odstopanja) seveda niso nujno simetrična (če streljamo z ene strani...).
  - Lahko streljate **tudi iz sredine intervala** (upoštevamo sodo/liho opcijo za začetno vrednost funkcije  $\psi(0) = 0 \mid 1$ ,  $\psi'(0) = 1 \mid 0$ ).

Rešitev neskončne potencialne jame s strelsko metodo

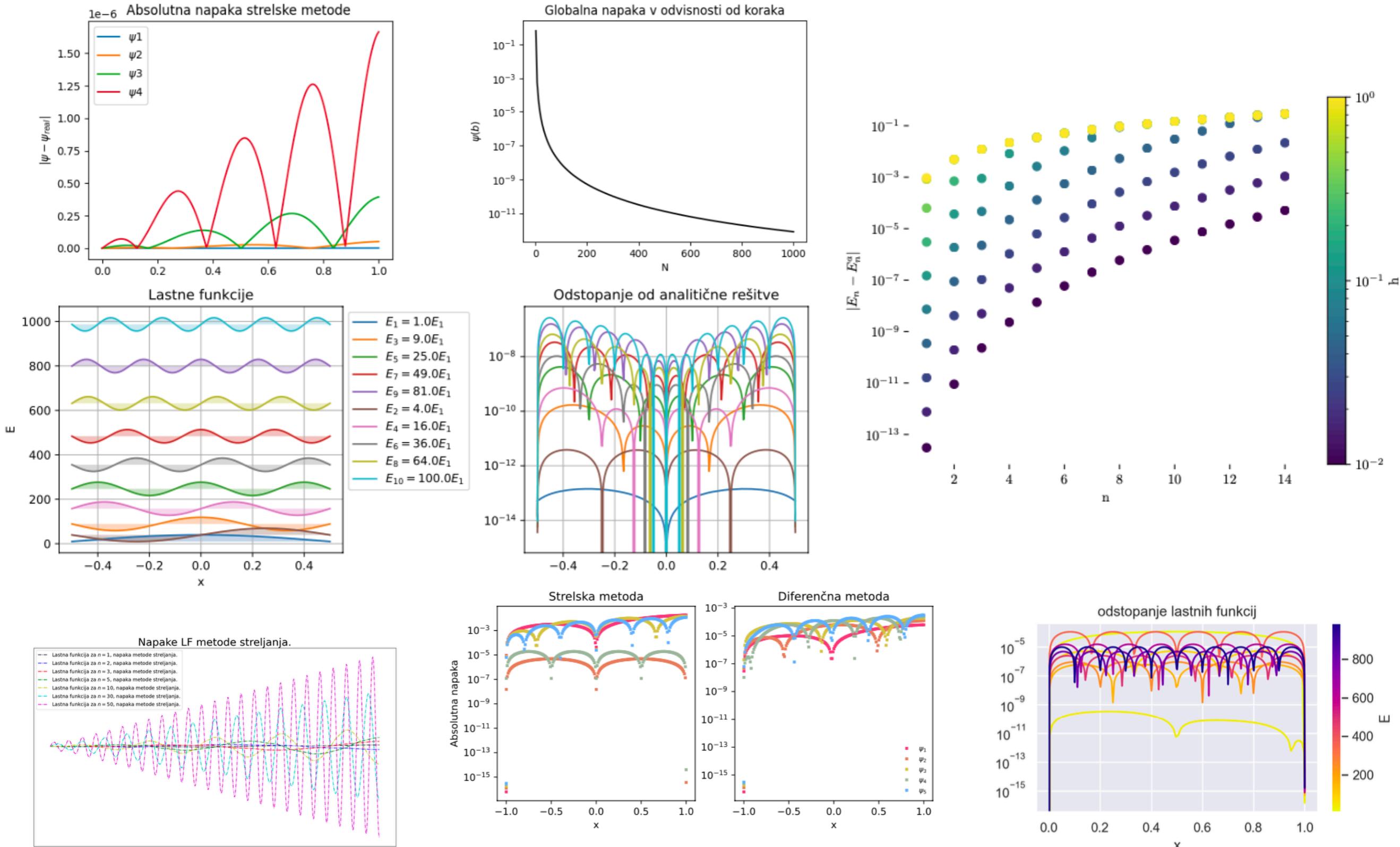


Slika 2: Grafični prikaz določanja lastnih energij.



# Neskončna jama

- **Strelska metoda:** lepe študije napak, velikosti korakov ipd...



Slika 5: Absolutna napaka v primerjavi z analitično rešitvijo, kjer je velikost matrike pri diferenčni metodi  $n = 100000$ .

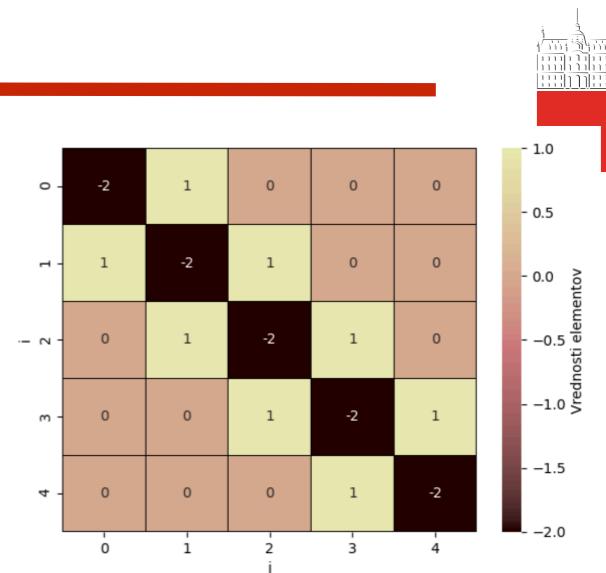
Slika 3: Napake lastnih funkcij z metodo streljanja.

# Neskončna jama

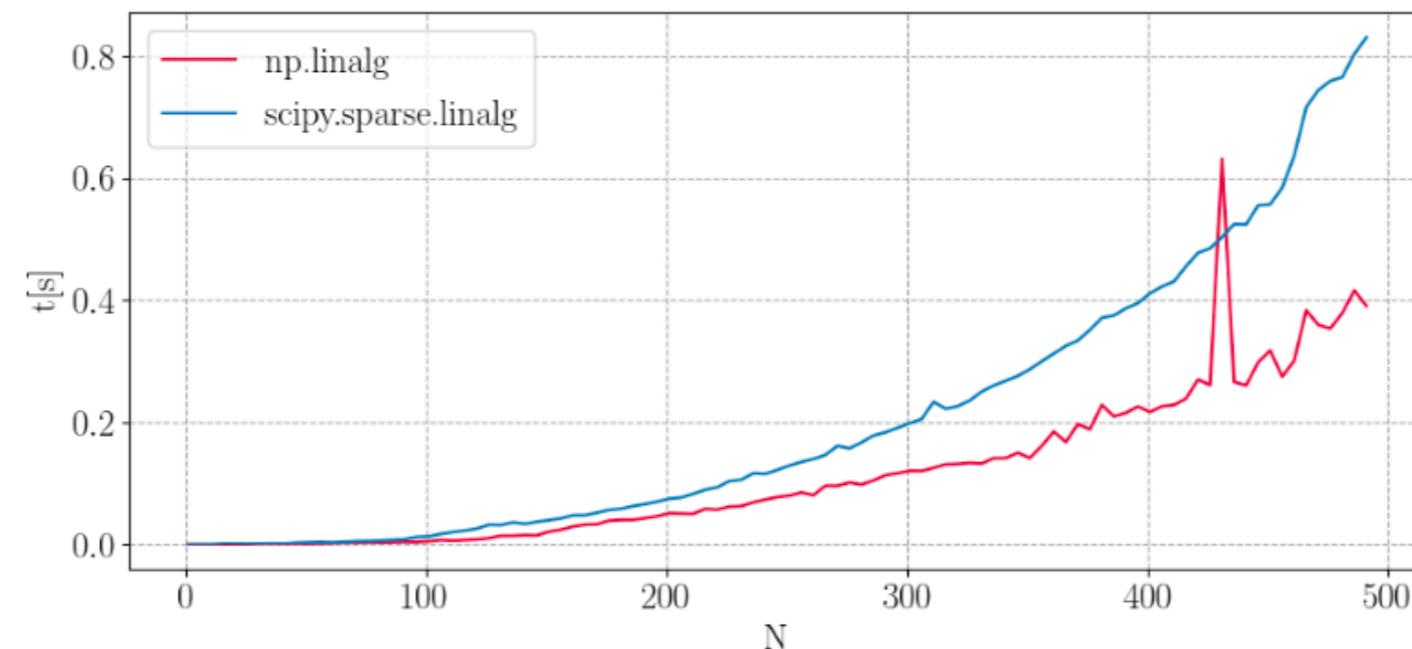
- Diferenčna metoda: korektno reševanje, matrični sistem...

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & 1 & -2 & 1 & \\ & & \vdots & & \\ & 1 & -2 & 1 & \\ & & 1 & -2 & 1 \\ & & & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(A - I\lambda) \vec{\psi} = 0$$



- Tu pa je napaka (odstopanja) seveda nujno simetrična (hkratna relaksacija...).
- Paziti morate, da vam algoritmom (npr. **numpy.linalg.eigh**, bolje kot **eig!**) poda lastne vrednosti (in vektorje) urejene po velikosti!



**Sparse celo ni boljši ... !**

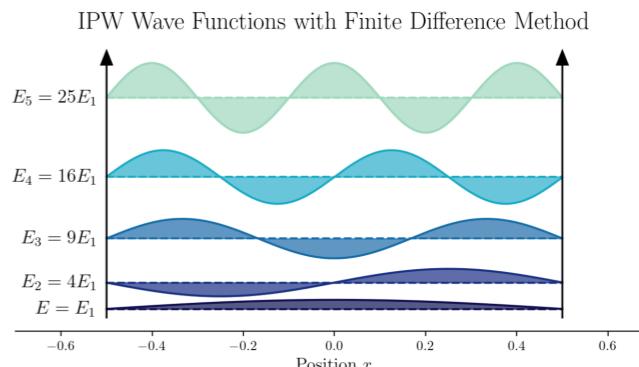


# Neskončna jama

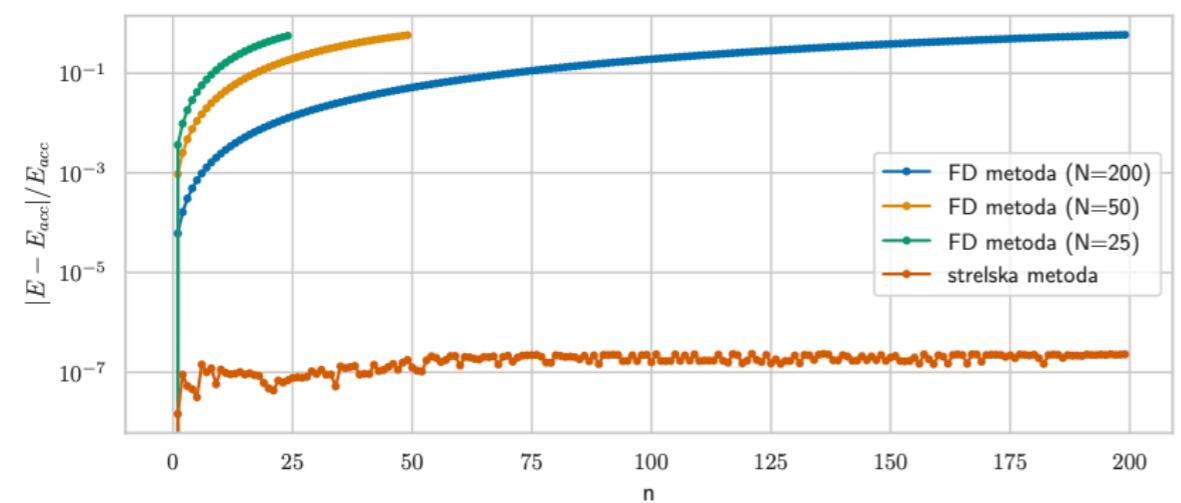
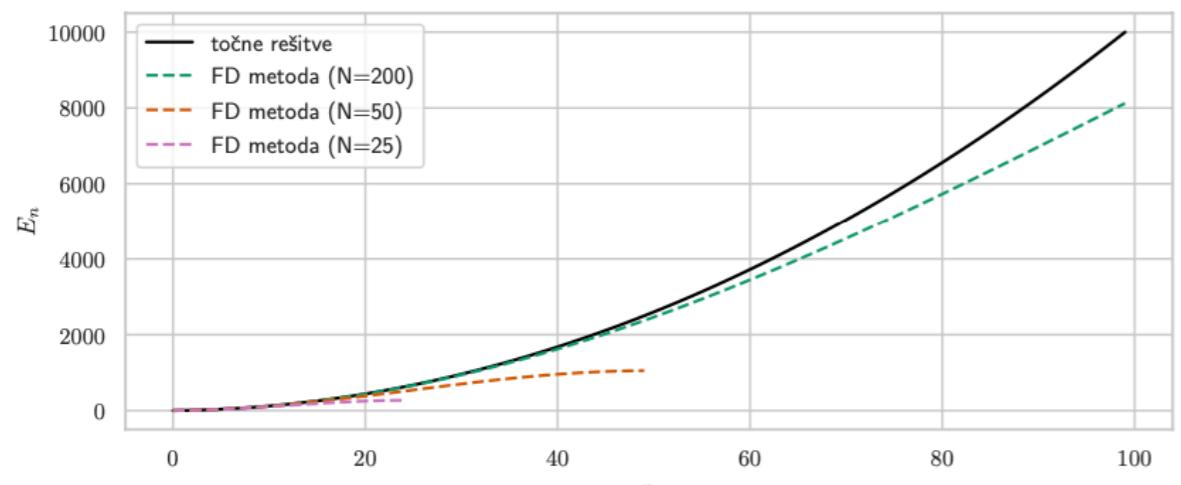
- Diferenčna metoda: korektno reševanje, matrični sistem...

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & 1 & -2 & 1 & \\ & & \vdots & & \\ & & 1 & -2 & 1 \\ & & & 1 & -2 \\ & & & & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

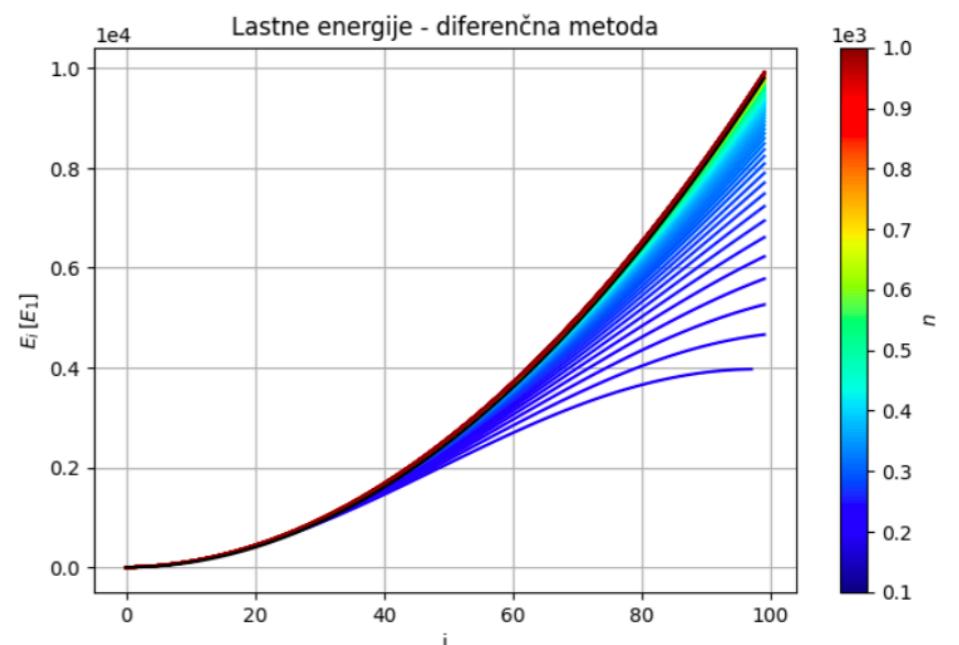
$$(A - I\lambda) \vec{\psi} = 0$$



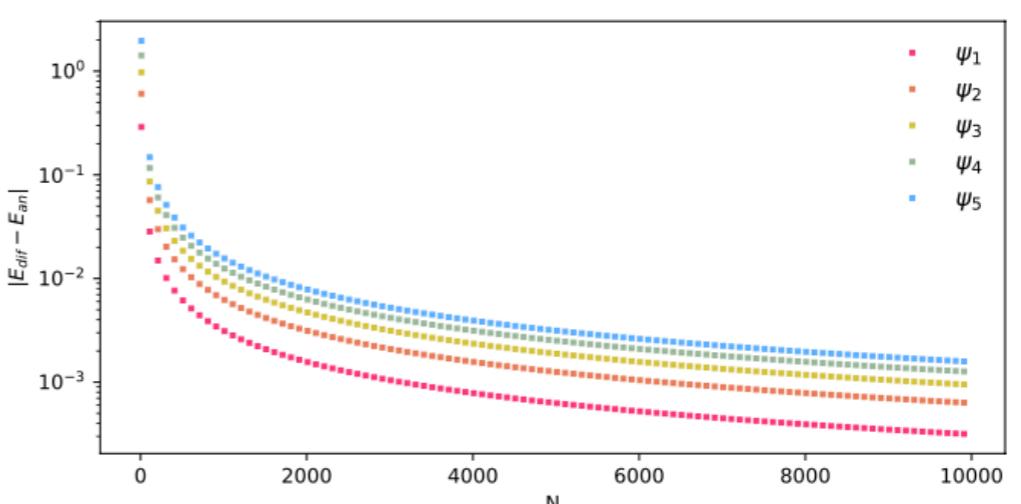
Velikost matrike je res pomembna ...



Slika 3: Spekter lastnih energij za različne dimenzije matrik  $N$  pri metodi končnih differenc (zgoraj). Relativna napaka vrednosti lastnih energij (spodaj) pri različnih  $N$  in pri strelski metodi. Opomba: kot omenjeno v poglavju Metode, pri strelski metodi uporabljamo adaptiven korak.



Slika 3: Za dobro oceno prvih  $j$  lastnih energij bi potrebovali najmanj nekje  $3j$  delilnih točk.



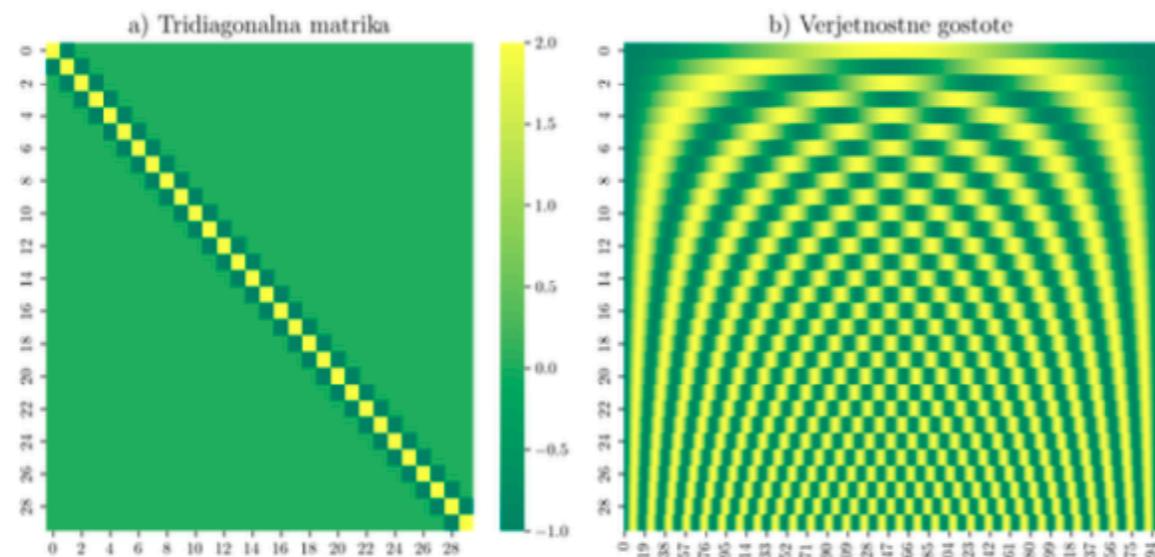


# Neskončna jama

- Diferenčna metoda: korektno reševanje, matrični sistem...

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & -1 & -2 & -1 \\ 0 & . & . & . & . & 1 \end{bmatrix} \quad (A - I\lambda) \vec{\psi} = 0$$

- Tu pa je napaka (odstopanja) seveda nujno simetrična (hkratna relaksacija...).
- Paziti morate, da vam algoritom (npr. **numpy.linalg.eigh**) poda lastne vrednosti (in vektorje) urejene po velikosti!



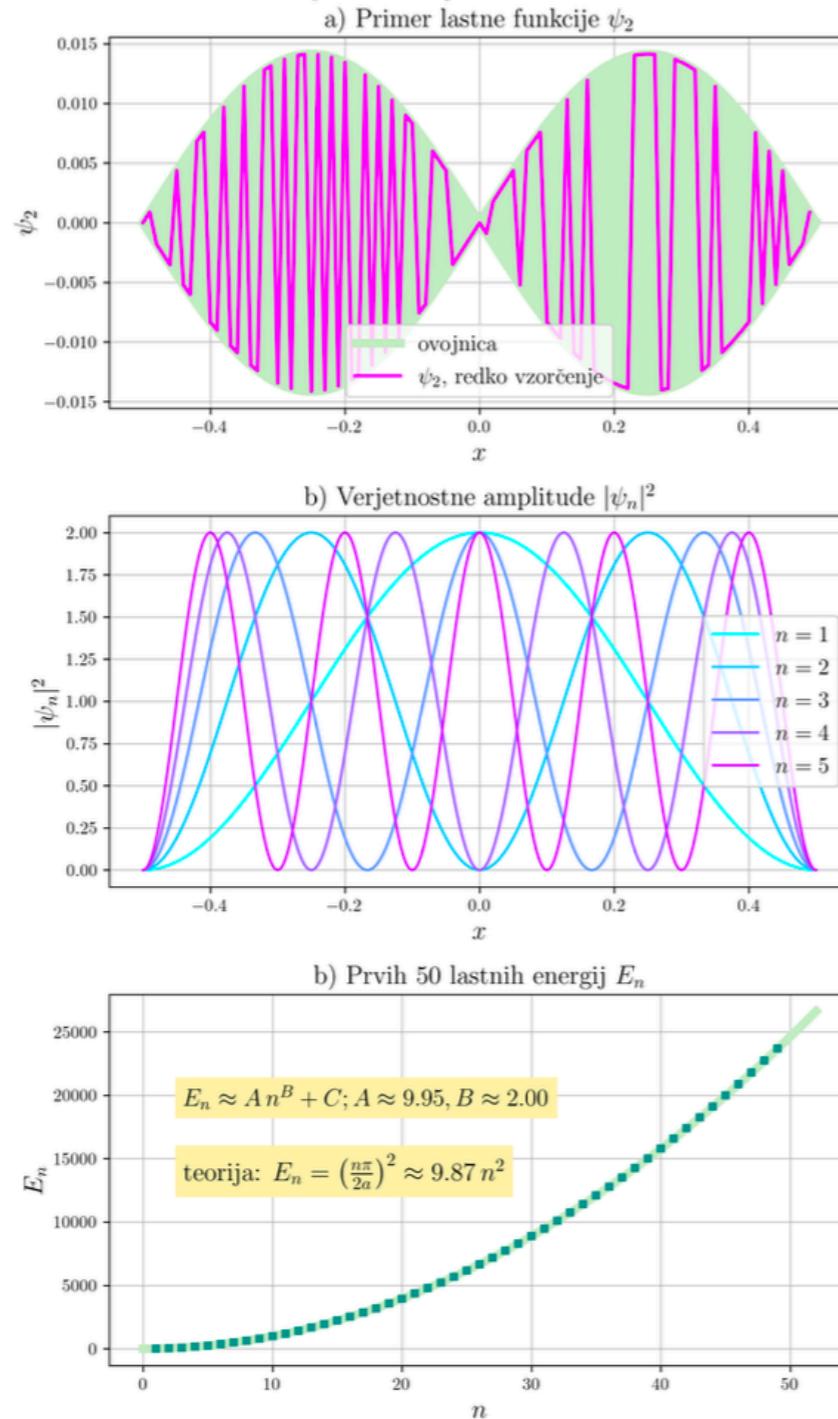
Slika 4: Slika a) prikazuje obliko tridiagonalne matrike, ki jo diagonaliziramo pri metodi končnih differenc za iskanje lastnih funkcij in vrednosti delca v neskončni potencialni jami. Na sliki b) si od zgoraj navzdol sledijo verjetnostne gostote prvih 30 lastnih funkcij. Lepo se vidi, da se v spektru izmenjujejo sode in lihe funkcije ter da ima  $n$ -to stanje  $n$  vozlov.



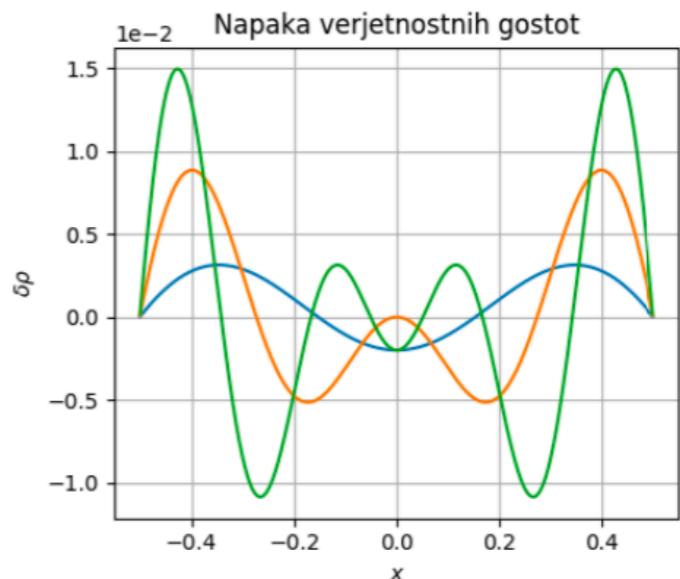
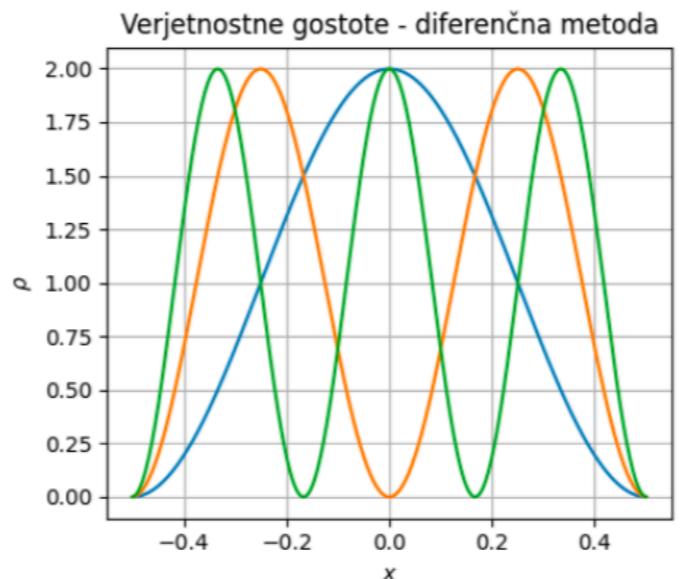
# Neskončna jama

- Končne difference: zgledni prikazi...**

Rešitev neskončne potencialne jame s končnimi diferencami

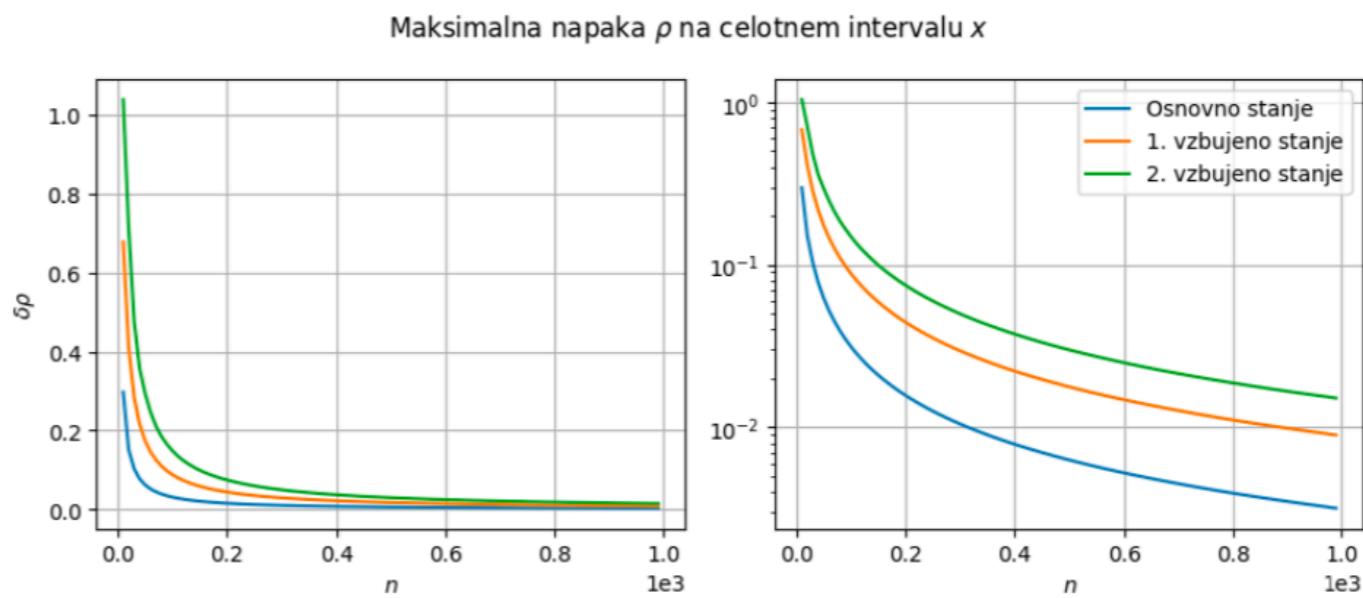


Slika 6: Graf a) pokaže, da se z metodo končnih differenc izračunane lastne funkcije samo po absolutni vrednosti ujemajo s pravimi rešitvami. Verjetnostne gostote  $|\psi_n|^2$  pa so torej pravilne. Za prvih 5 lastnih stanj so slednje prikazane na grafu b). Izračunane lastne energije se dobro ujemajo z dejanskimi, kot kaže graf c).



Slika 1: Ker gre za reševanje simetrične matrike, je pričakovano, da bo tudi napaka simetrična.

Pogledal sem si tudi, kako je maksimalna napaka odvisna od števila delilnih intervalov (slika 2).

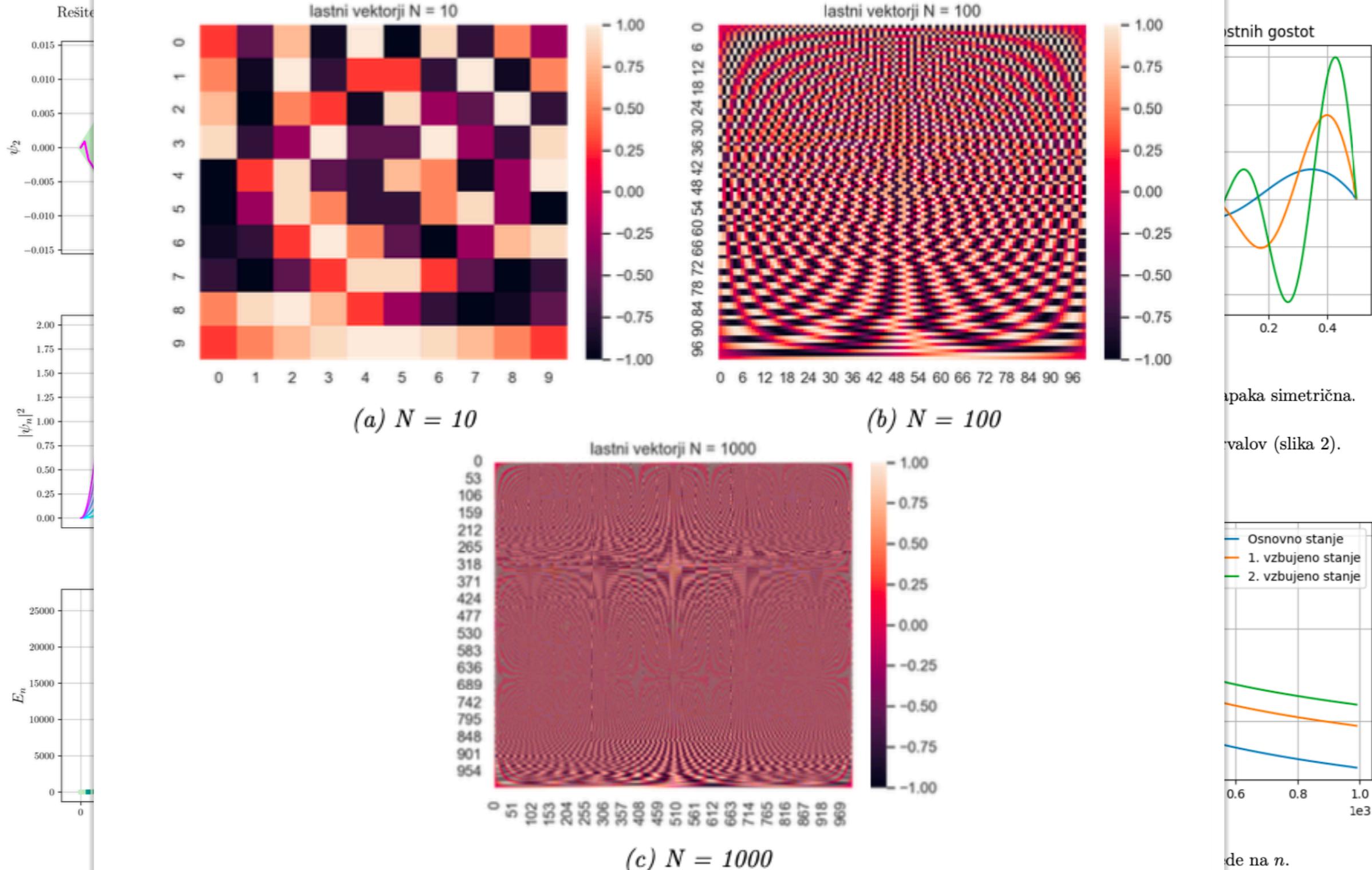


Slika 2: Vidimo, da imajo stanja z večjo energijo večjo napako, ne glede na  $n$ .



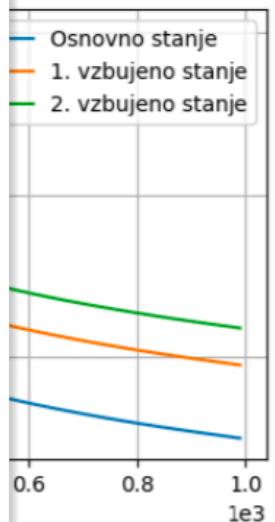
# Neskončna jama

- Končne diference - zgodni prikazi:



Slika 6: Graf a) pokaže, po absolutni vrednosti u pravilne. Za prvih 5 lastnih vektorjev je dobro ujemajo z dejanskimi, kot kaže graf c).

upaka simetrična.  
valov (slika 2).



de na  $n$ .

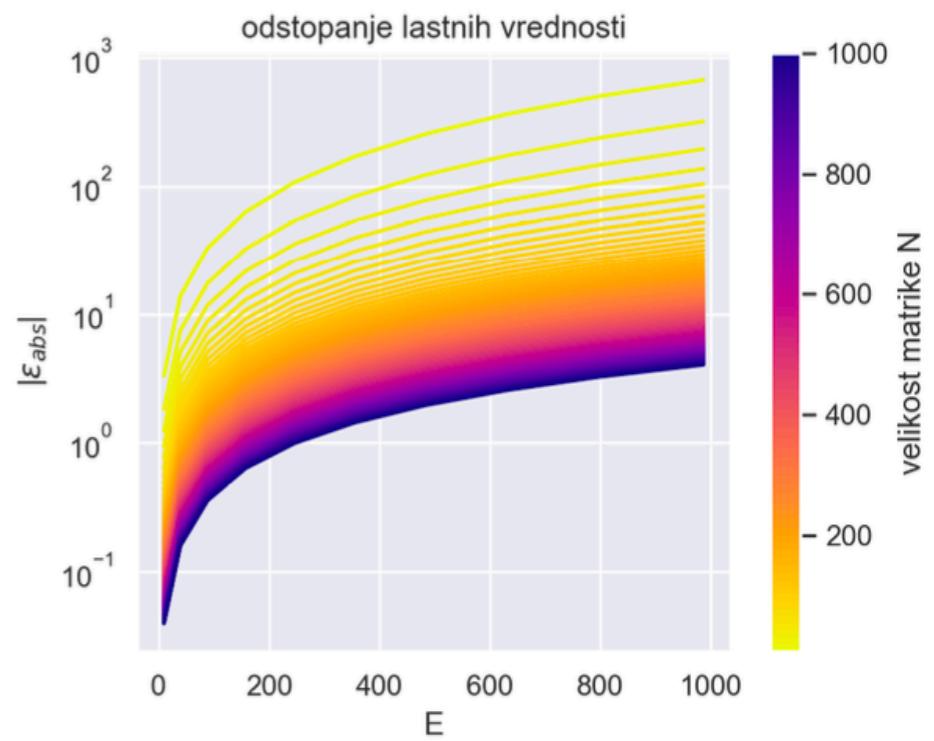
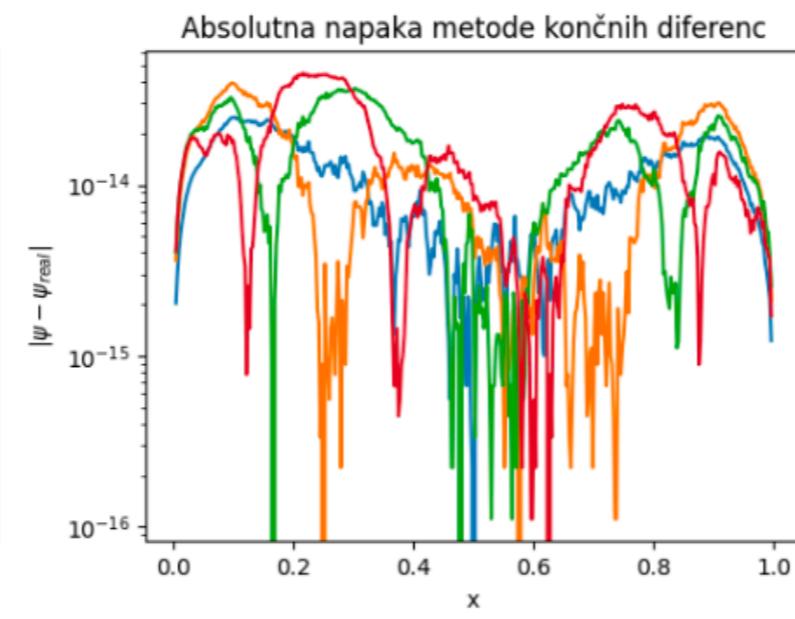
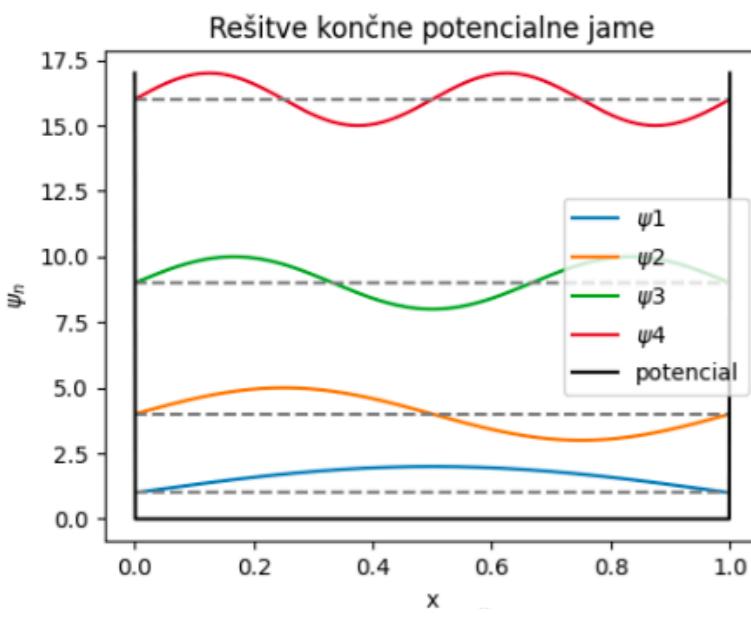
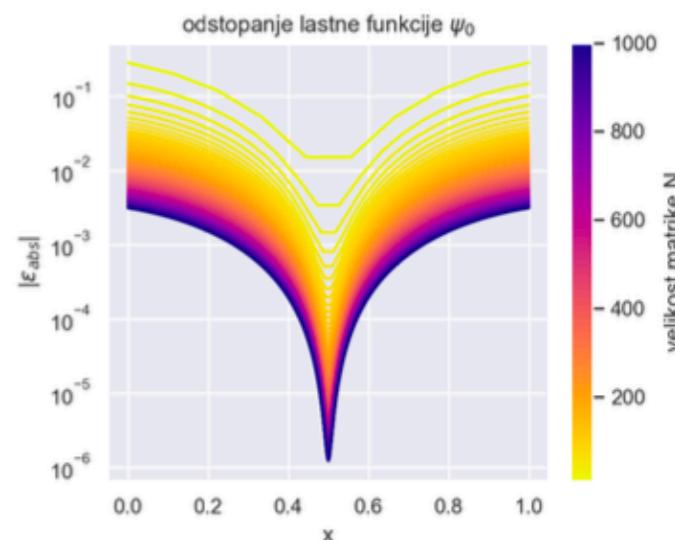
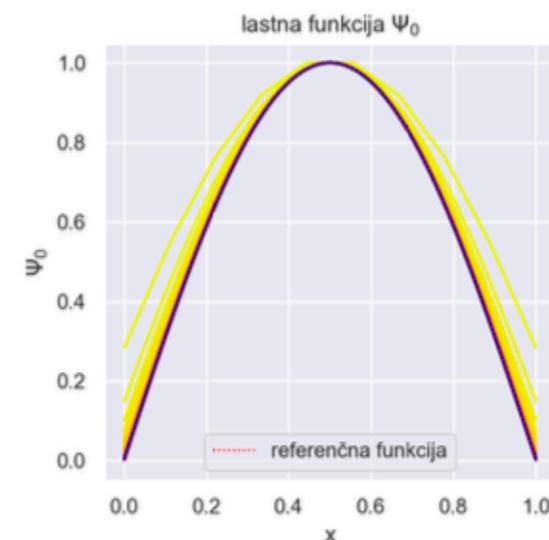
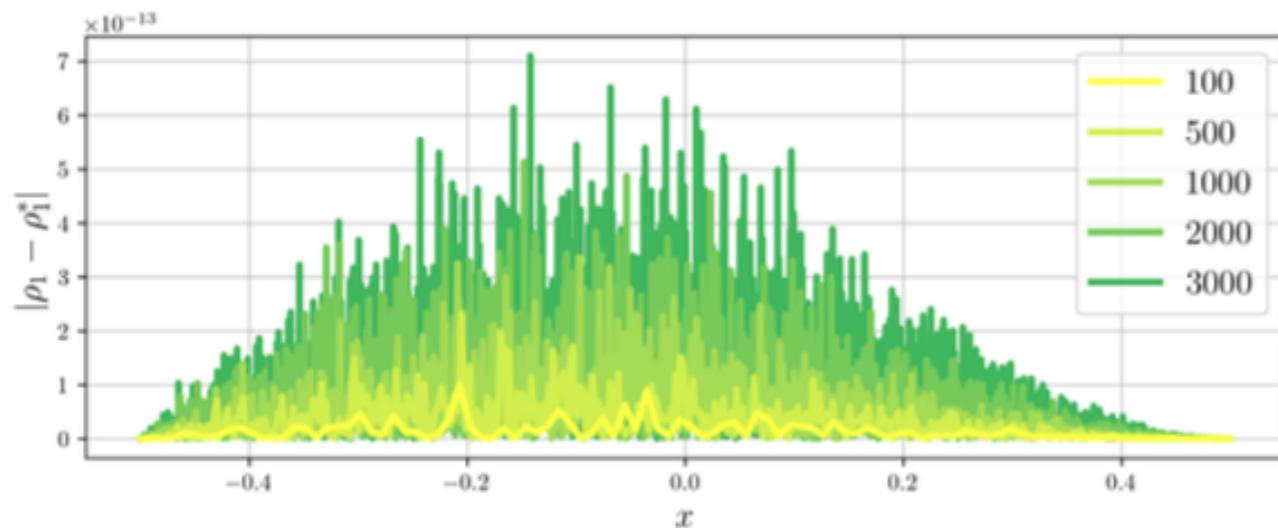


# Neskončna jama

- Končne diference: lepe študije napak, velikosti mreže ipd...

Lepo!

Napaka verjetnostne gostote 1. lastne funkcije  
kot funkcija velikosti matrike  $N$

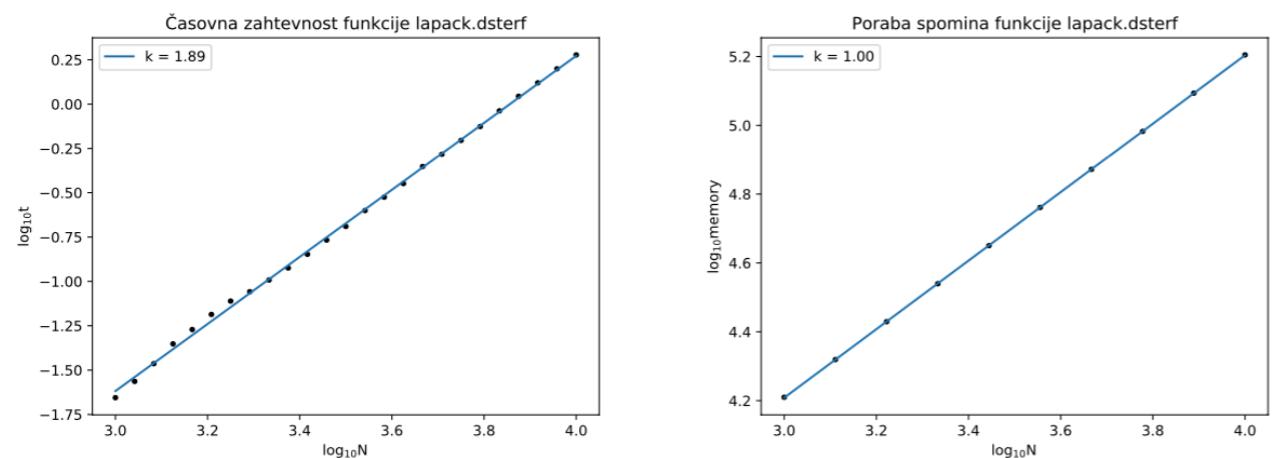




# Računska zahtevnost

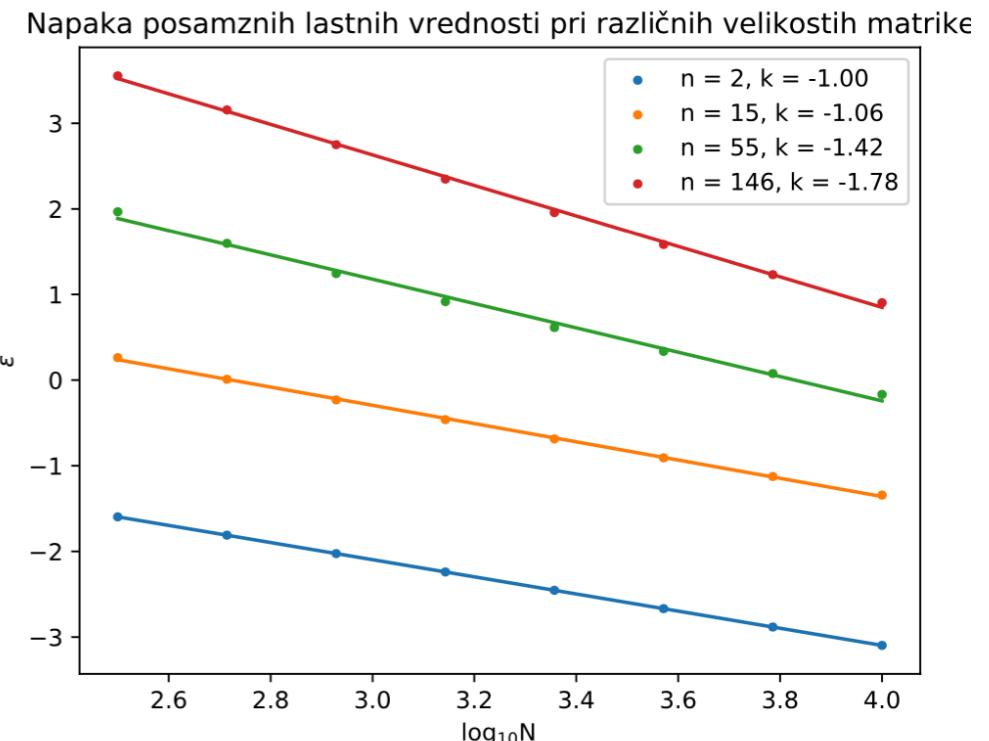
- Lani... Kot vedno pravim, naj se računalnik spoti...

Za iskanje lastnih vrednosti, sem se odločil uporabiti knjižnico LAPACK, ki je sicer napisana v Fortran-u 90, ampak jo najdemo tudi v modulu SciPy. Uporabil sem funkcijo `scipy.linalg.lapack.dsterf`. Nisem se odločil za to, da bi poskušal sam spisati funkcijo, saj je problem standarden in je ta funkcija hitrejša od česar koli bi implementiral sam. Izmeril sem časovno zahtevnost in porabo delovnega spomina te implementacije.

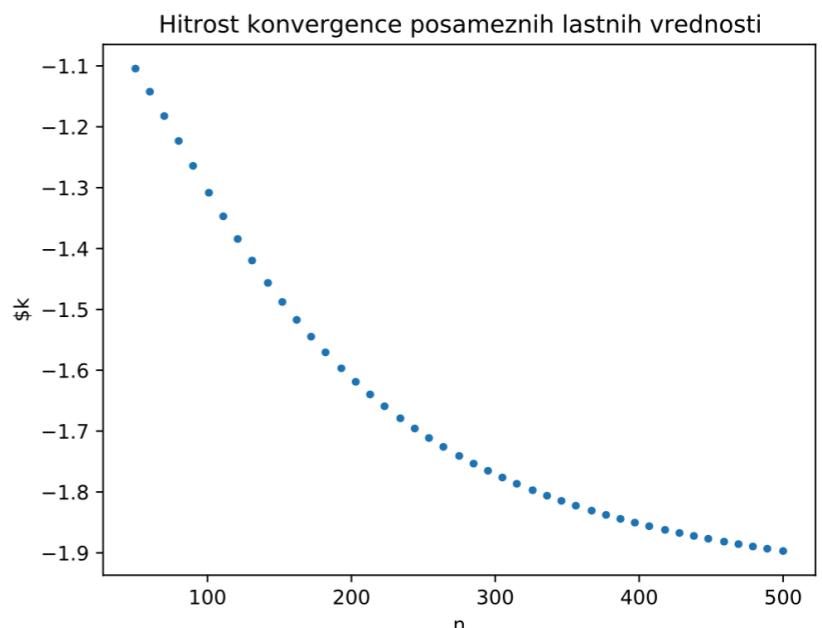


Slika 2: Časovna zahtevnost in poraba spomina uporabljeni funkcije

Bolj kot časovna zahtevnost je tu pomembna poraba spomina. Ključna je tu linearna odvisnost, saj nam omogoča obravnavo veliko večjih matrik. Če uporabimo standardno funkcijo iz SciPy-ja se na mojem računalniku s 16GB RAM-a izračun sesuje pri približno  $N=10\ 000$ , saj ima tista funkcija kvadratično odvisnost. Poglejmo si kako se spreminja napaka posamezne lastne vrednosti v odvisnosti od velikosti matrike.



Slika 3: Konvergenca posameznih lastnih vrednosti



Slika 4: Konvergenca posameznih lastnih vrednosti

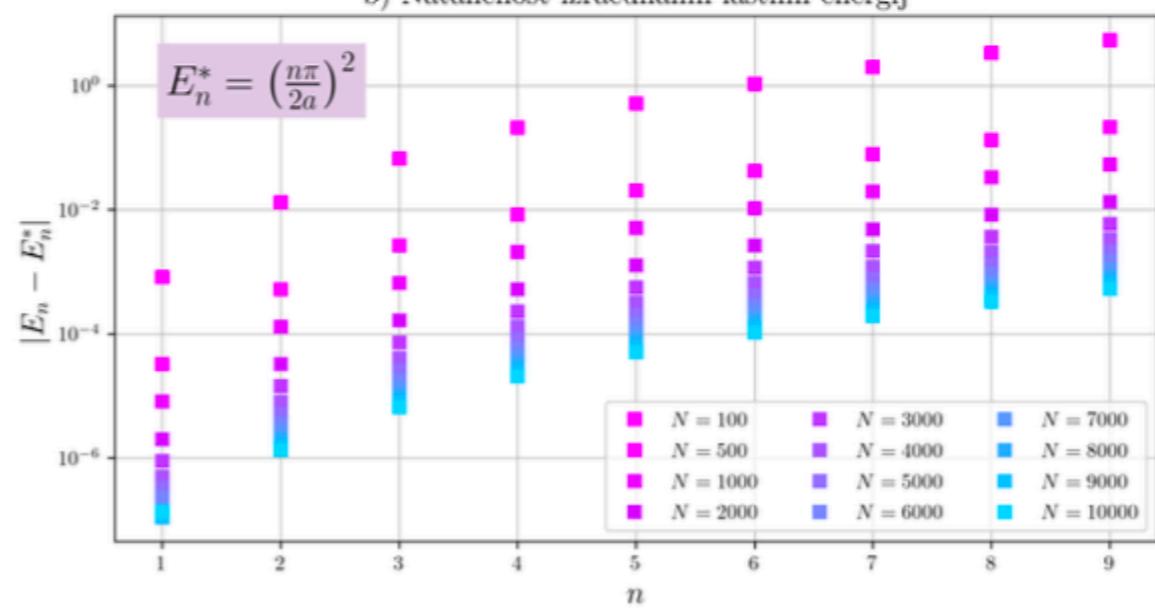
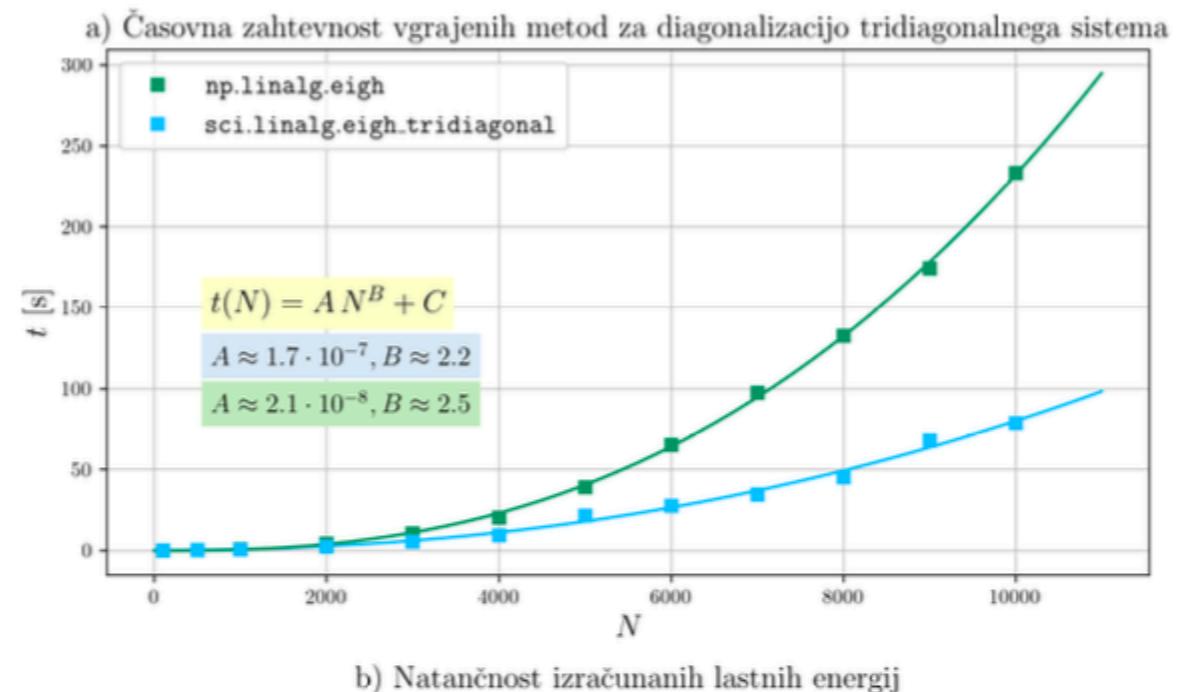
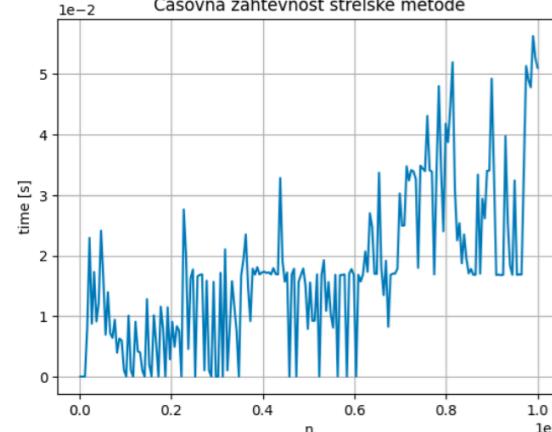
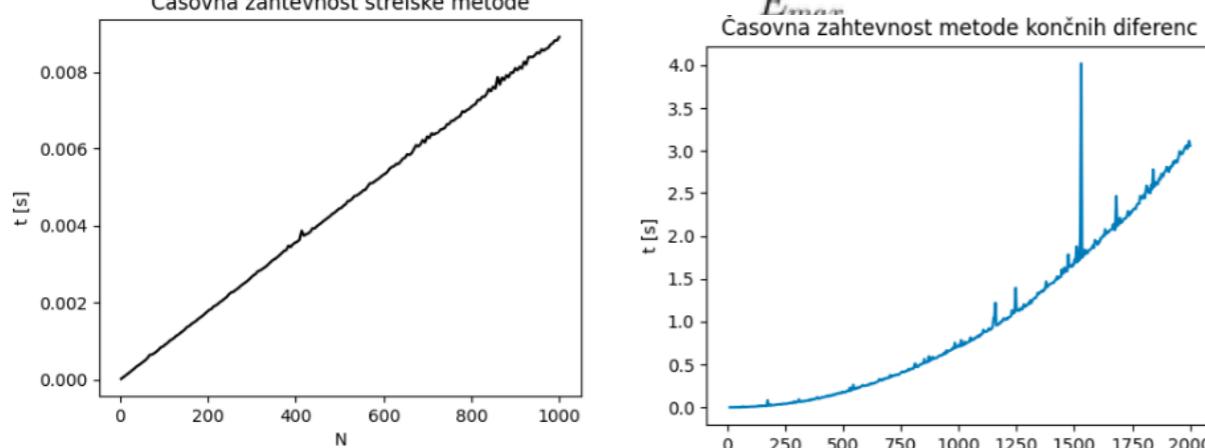
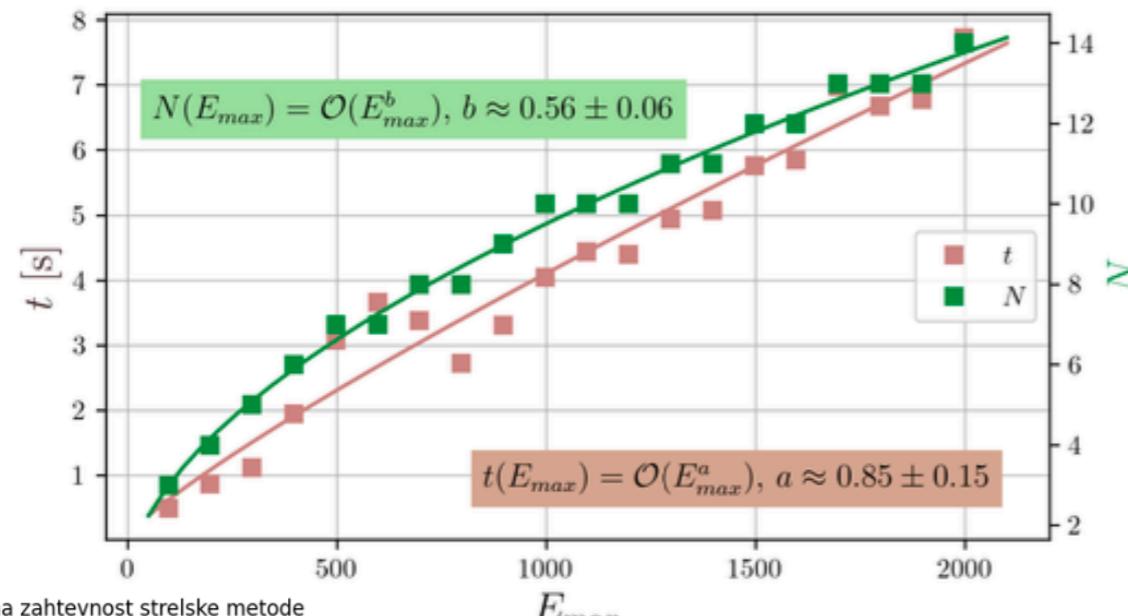


# Računska zahtevnost

- Letos pre-redki ...

Lepo!

Časovna zahtevnost in število dobljenih lastnih stanj  $N$   
kot funkcija  $E_{max}$  pri strelskej metodi



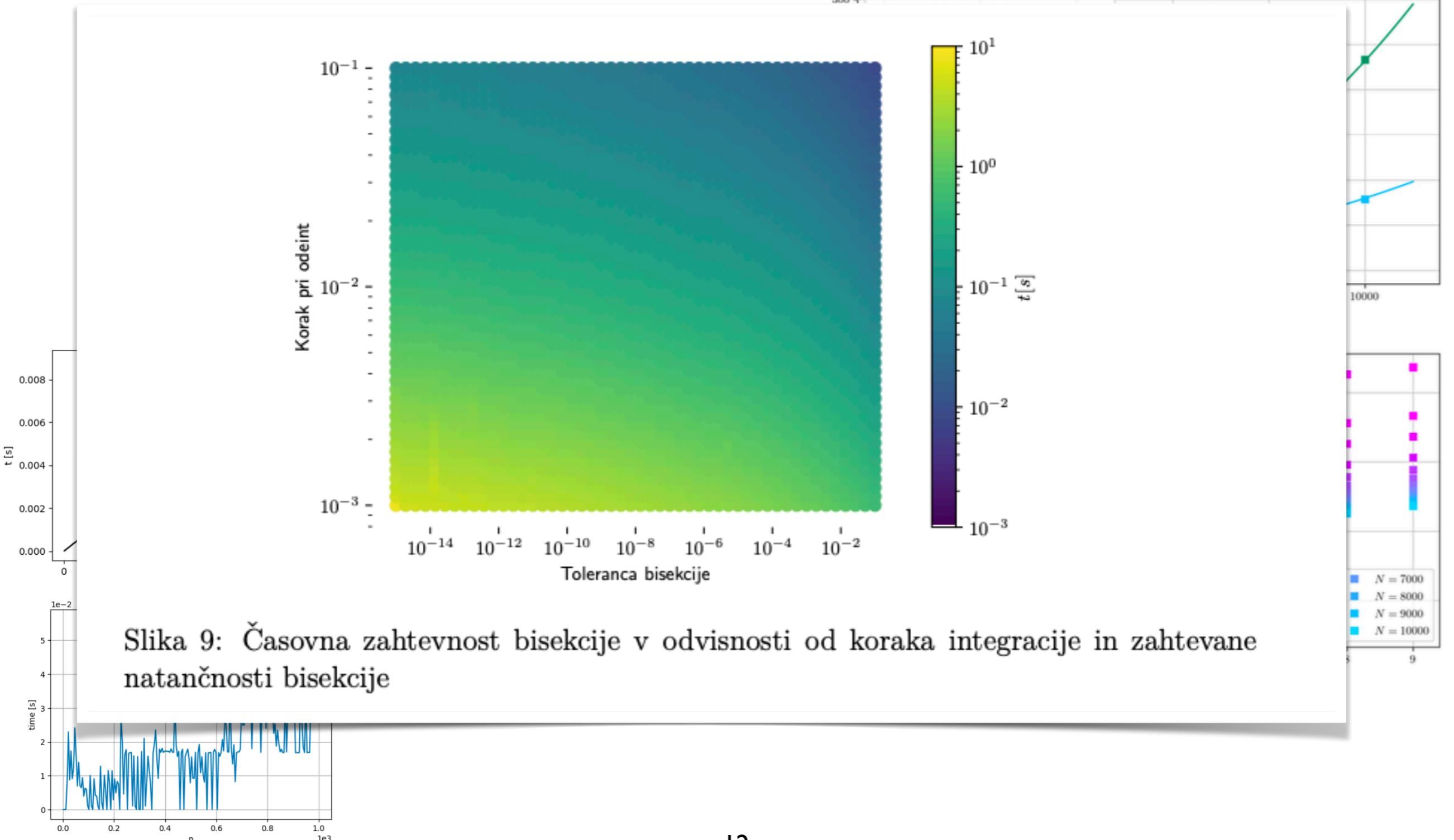


# Računska zahtevnost

- Letos pre-redki ...

**Lepo!**

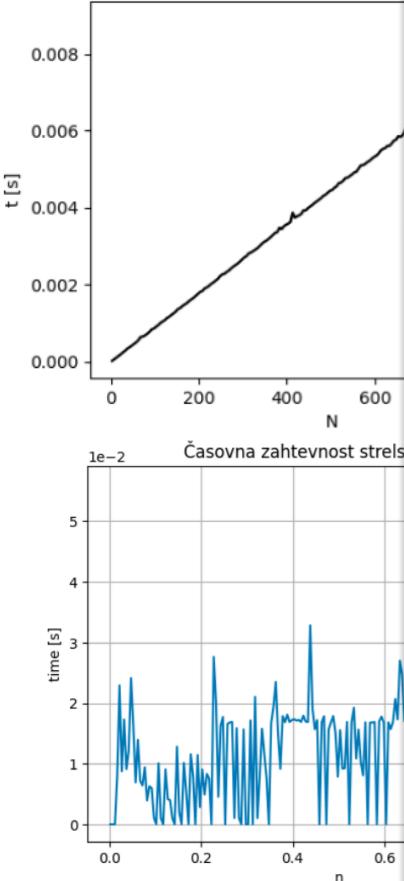
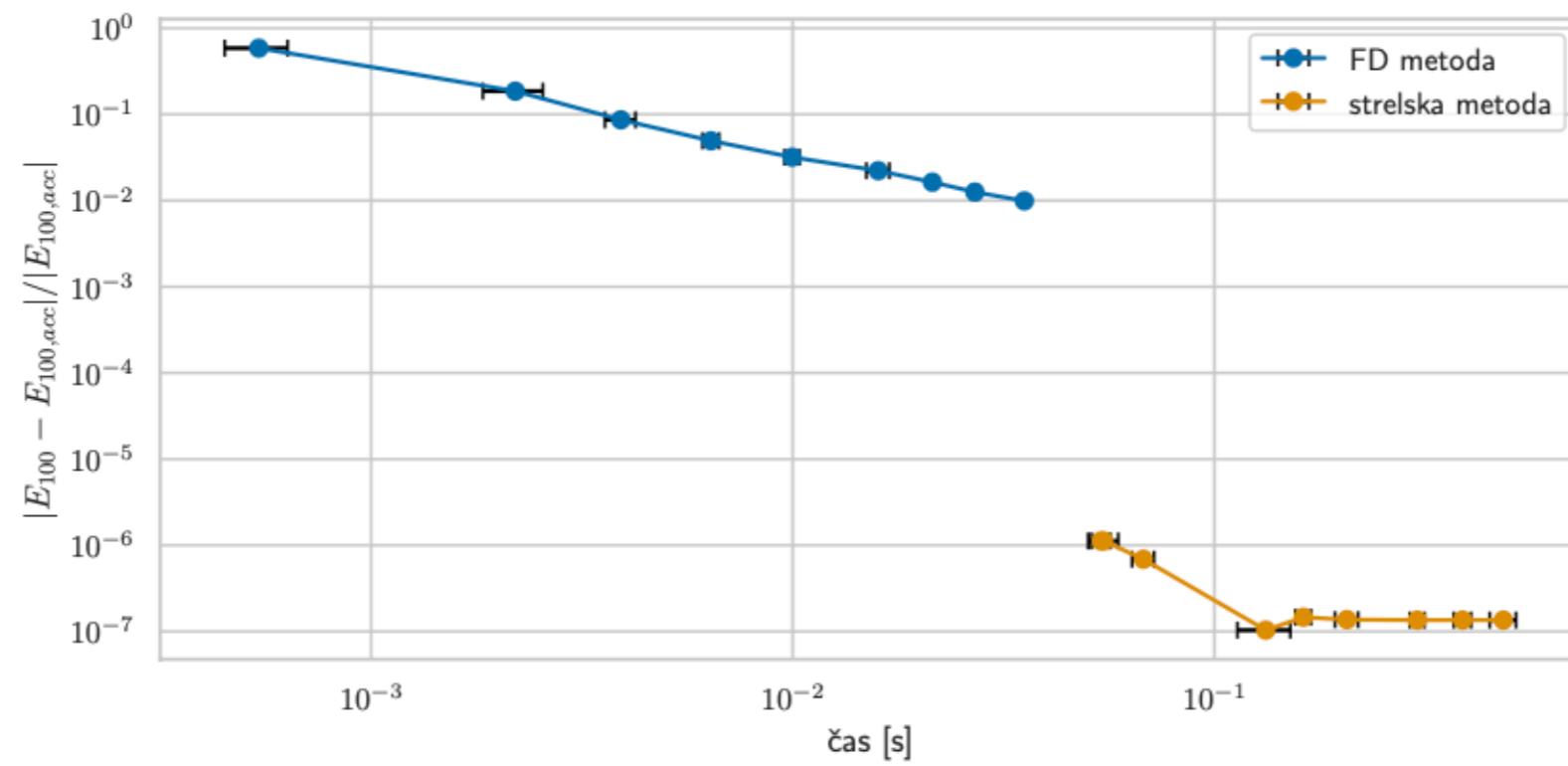
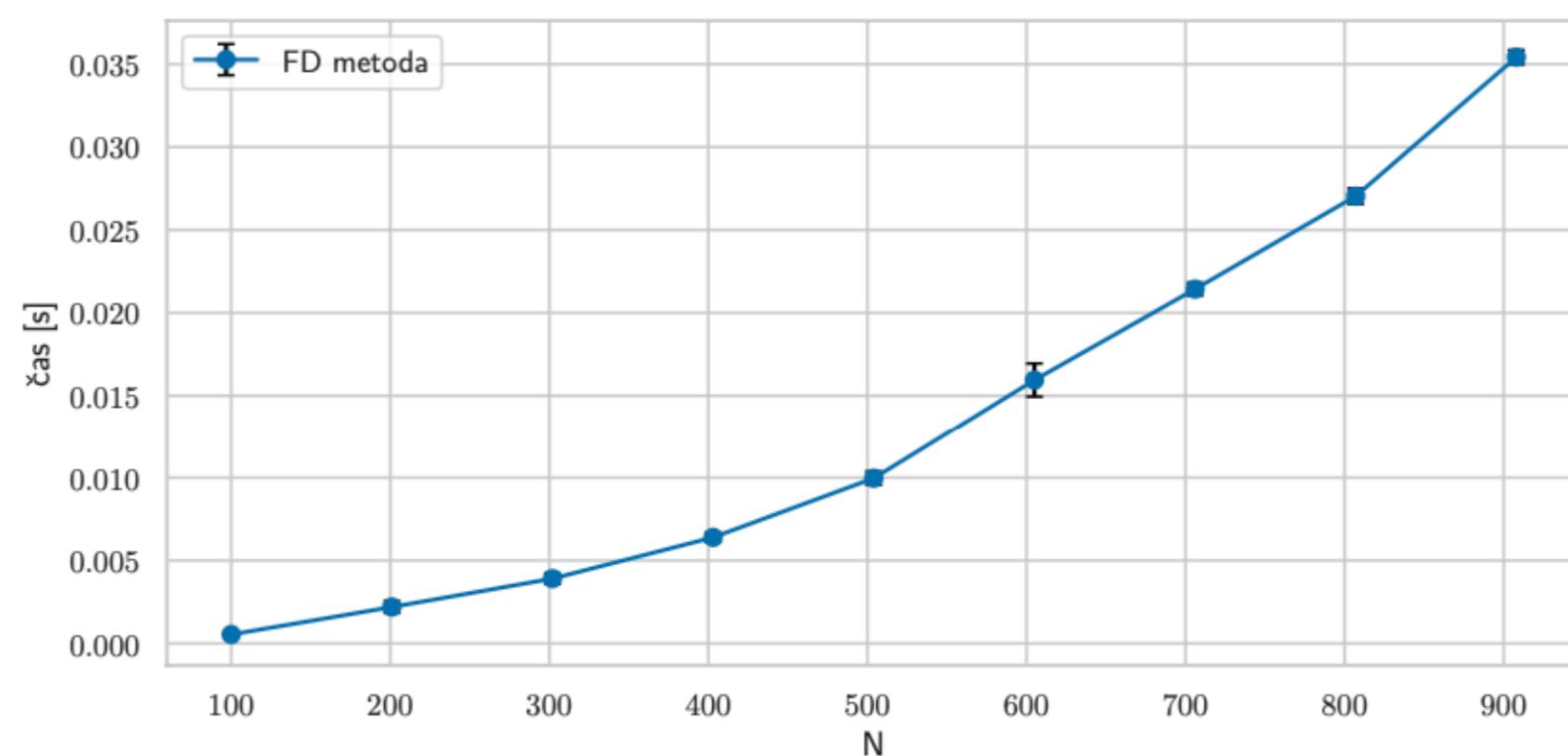
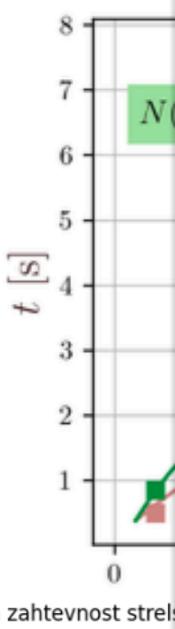
Časovna zahtevnost in število dobljenih lastnih stanj  $N$   
kot funkcija  $E_{max}$  pri strelski metodi



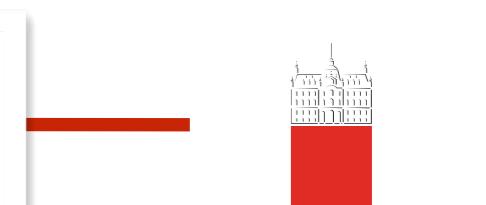
## • Letos pre- naredili

Lepo!

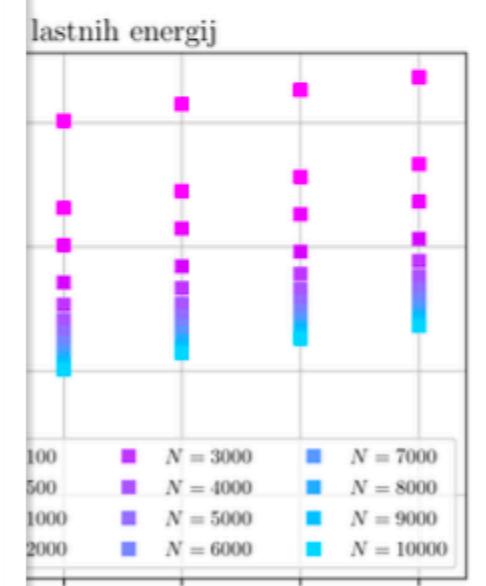
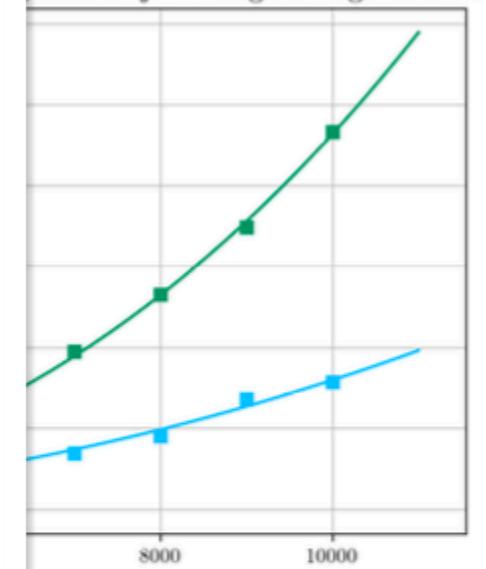
Časovna zahtevnost



Slika 8: Strelska metoda, v obliki kot sem jo napisal ja, je ocitno mrejsa od numerenc.



onalizacijo tridiagonalnega sistema



Slika 4: Odvisnost časa izvajanja diferenčne metode od velikosti matrike  $N$  (zgoraj). Za vsako točko je izvedenih 20 ponovitev meritev časa. Odvisnost relativne napake 100. lastne energije od časa izvajanja (spodaj). Pri strelški metodi spremojamo toleranco algoritma bisekcije, pri diferenčni metodi pa  $N$ , velikost tridiagonale matrike.



# Končna jama

- Uspešno ste se spopadali tudi s tem...
  - V principu lahko vse prevedete tudi na transcendentno enačbo, kot jo dobite analitično in rešite le-to ...

## Dopolnilo s predavanj...

$$\psi'' = -k^2\psi, \quad k^2 = E \quad (\text{znotraj=in})$$

$$\psi'' = \kappa^2\psi, \quad \kappa^2 = V_0 - E = V_0 - k^2 \quad (\text{zunaj=out})$$

$$\psi_{\text{out}}(x = -\frac{a}{2}) = \psi_{\text{in}}(x = -\frac{a}{2})$$

$$\psi'_{\text{out}}(x = -\frac{a}{2}) = \psi'_{\text{in}}(x = -\frac{a}{2})$$

$$\psi'_{\text{out}}(x = -\frac{a}{2}) = \pm \kappa \psi_{\text{out}}(x = -\frac{a}{2}) \quad (\text{eksponenti})$$

$$\pm \kappa \psi_{\text{out}}(x = -\frac{a}{2}) = \psi'_{\text{in}}(x = -\frac{a}{2})$$

$$\mp \kappa \psi_{\text{out}}(x = -\frac{a}{2}) = \mp \kappa \psi_{\text{in}}(x = -\frac{a}{2})$$

$$0 = \psi'_{\text{in}}(x = -\frac{a}{2}) \mp \kappa \psi_{\text{in}}(x = -\frac{a}{2})$$



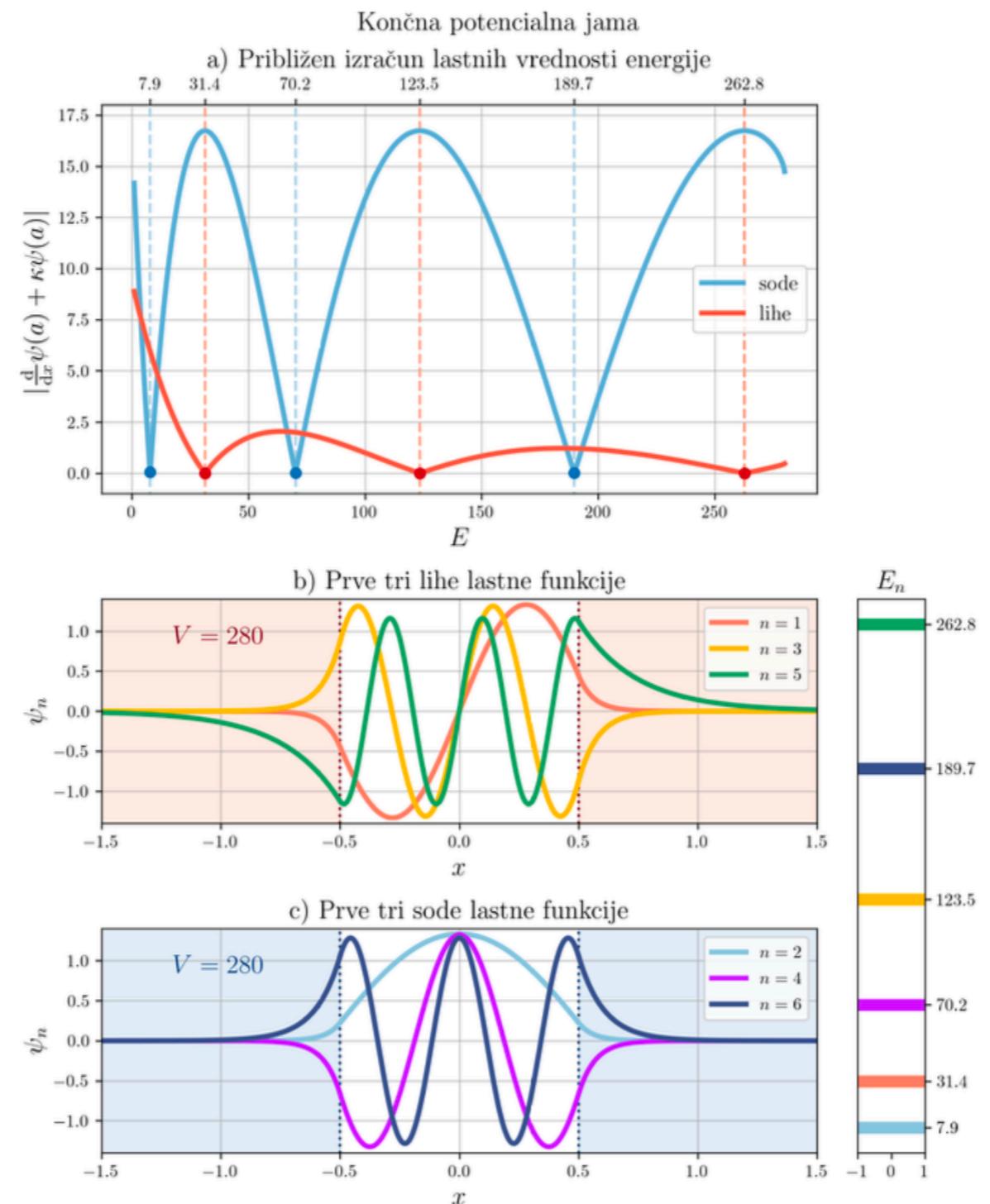
# Končna jama

- Uspešno ste se spopadali tudi s tem...
  - V principu lahko vse prevedete tudi na transcendentno enačbo, kot jo dobite analitično in rešite le-to ...

## Zgleden prikaz!

$$\tan u = \sqrt{\left(\frac{u}{u_0}\right)^2 - 1}$$

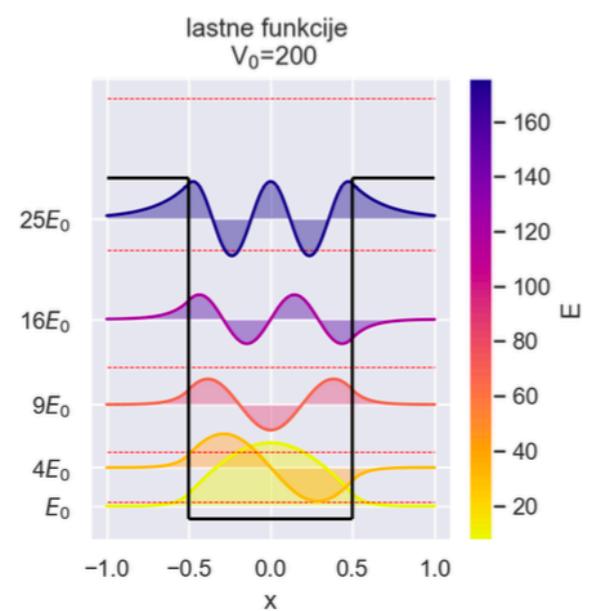
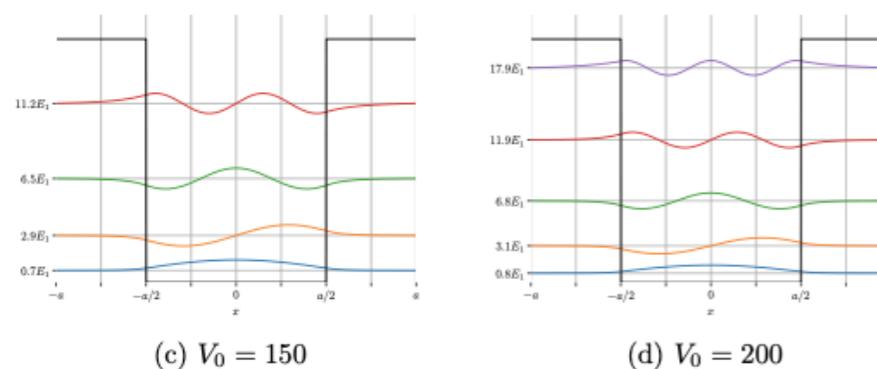
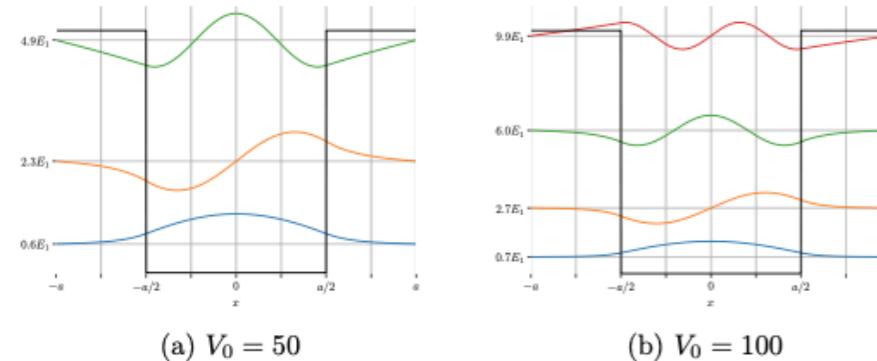
$$\cot u = -\sqrt{\left(\frac{u}{u_0}\right)^2 - 1}$$



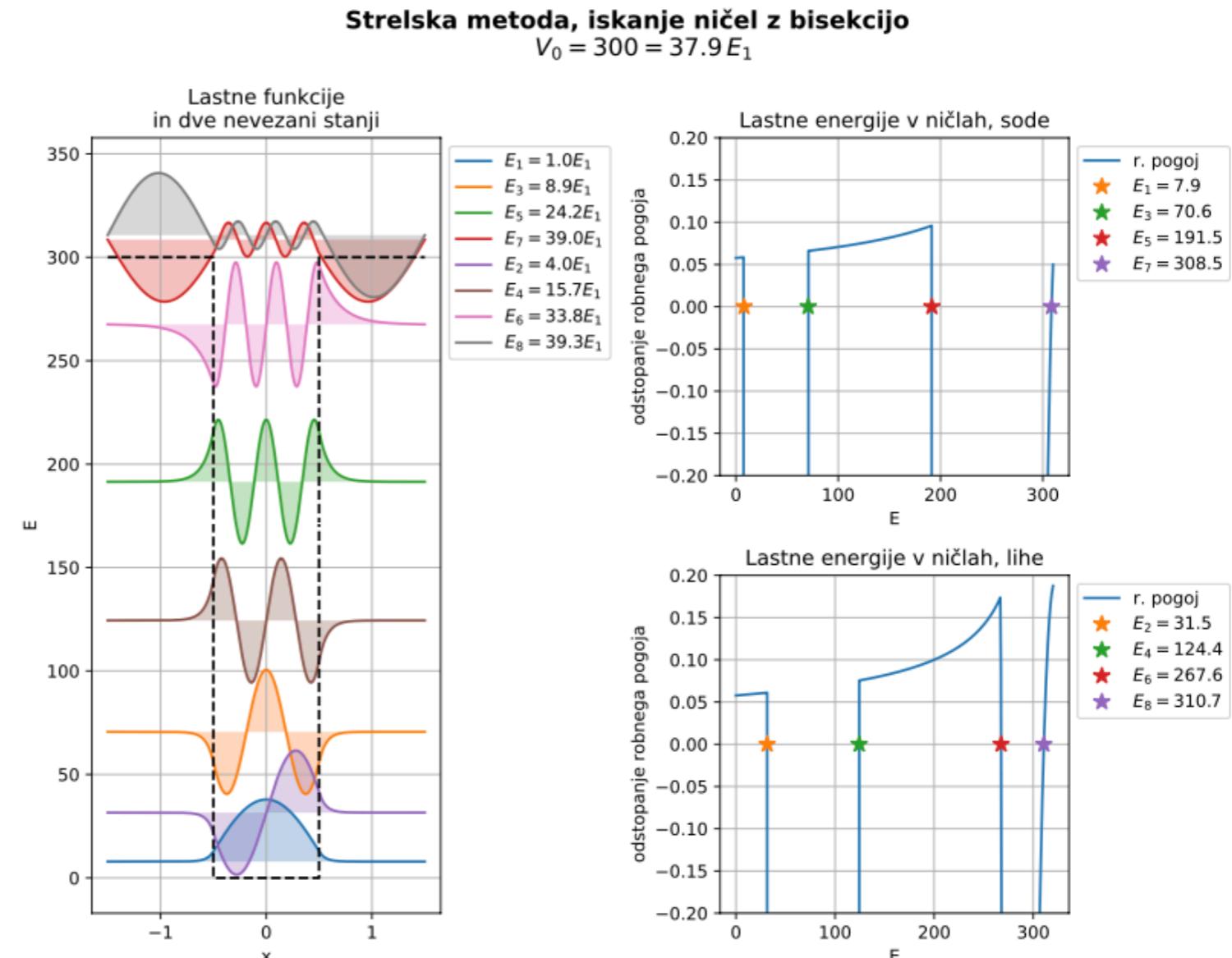


# Končna jama

- **Strelska metoda:** Enostavno rešljivo, samo po uspešnem strelu morate tudi preveriti, če so r.p. pogoji izpolnjeni...
  - Z drugimi besedami, tudi r.p. je odvisen od lastne vrednosti...



Slika 9: Lastne funkcije končne potencialne jame.

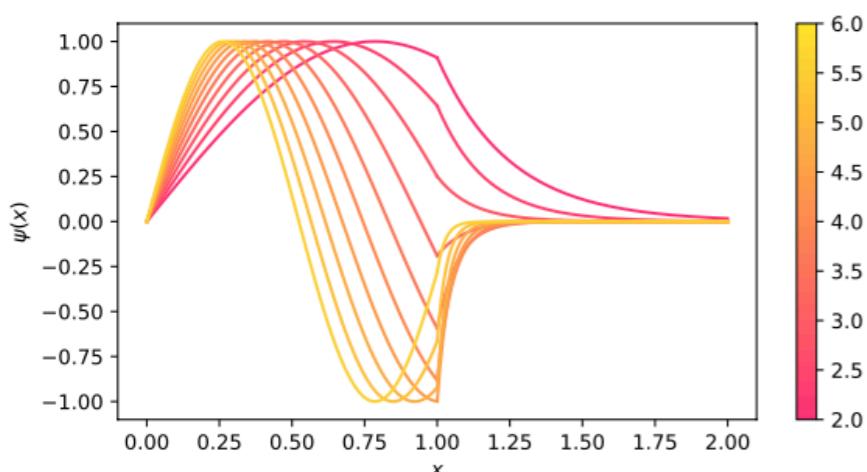


Slika 2: Iskane lastne funkcije in energije s strelsko metodo. Vidimo tudi dve nevezani stanji z energijo večjo od  $V_0$ , ki tudi izpolnita robne pogoje, čeprav je to v bistvu prosti val. Število korakov = 200.

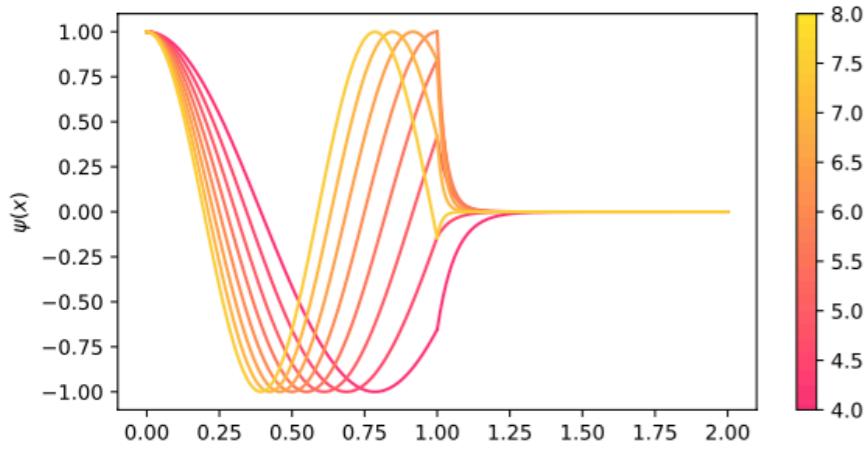


# Končna jama

- **Strelska metoda:** Enostavno rešljivo, samo po **uspešnem strelu morate tudi preveriti, če so r.p. pogoji izpolnjeni...**
  - Z drugimi besedami, tudi r.p. je odvisen od lastne vrednosti...

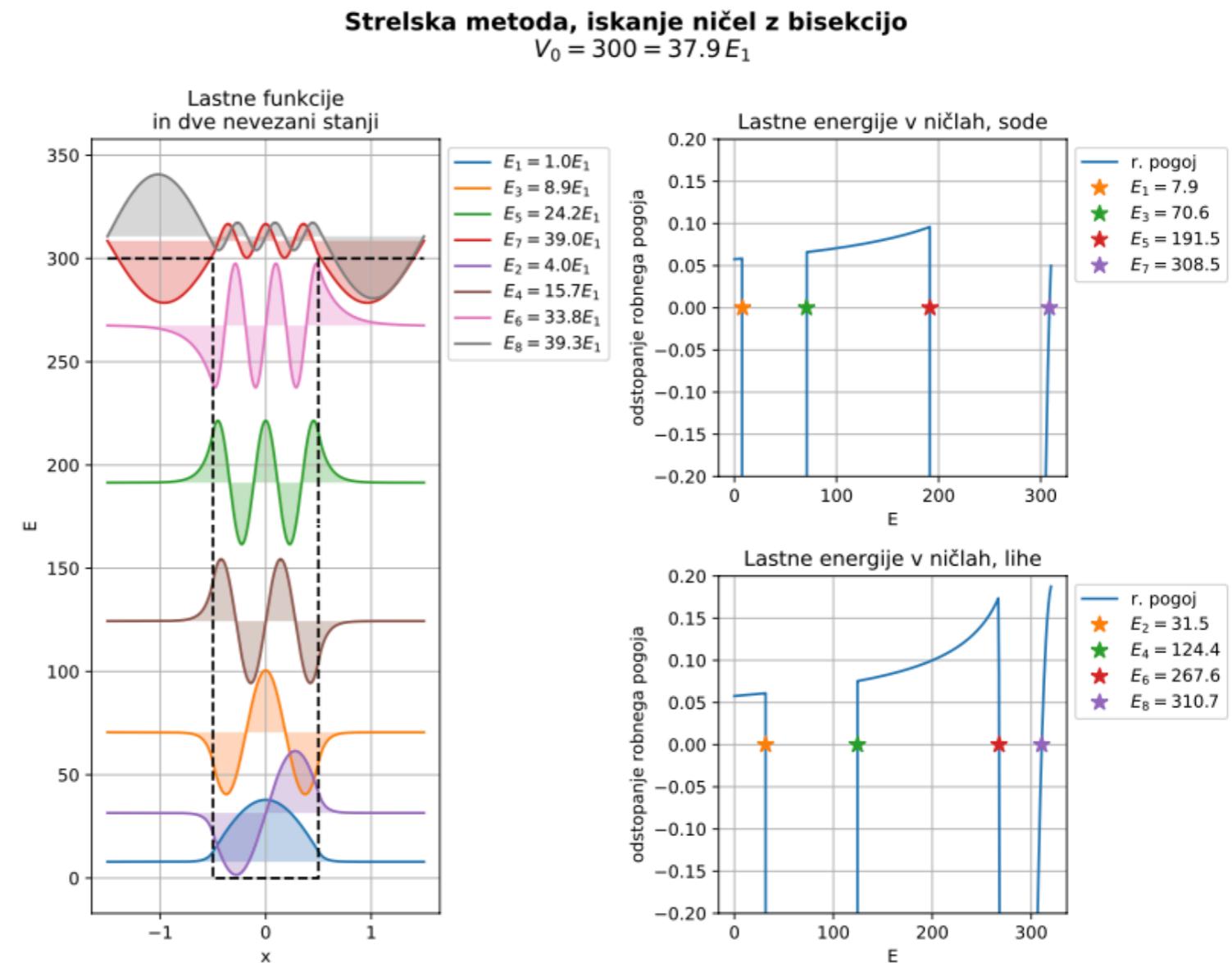


Slika 8: Streljanje s sinusnim začetnim pogojem.



Slika 9: Streljanje s kosinusnim začetnim pogojem.

$E_n$	Izračunana vrednost	Strelska metoda	Diferenčna metoda
$E_0$	2.03790408	2.03790408	2.03789473
$E_1$	8.13585428	8.13585428	8.13583136
$E_2$	18.2422553	18.318399	18.24218035
$E_3$	32.2534011	32.1489	32.2532773
$E_4$	49.9692233	49.96922332	49.96901751



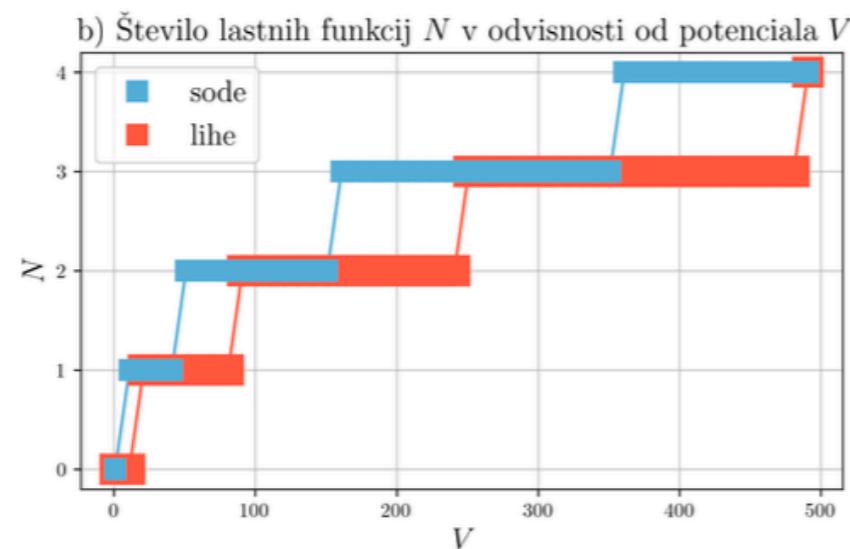
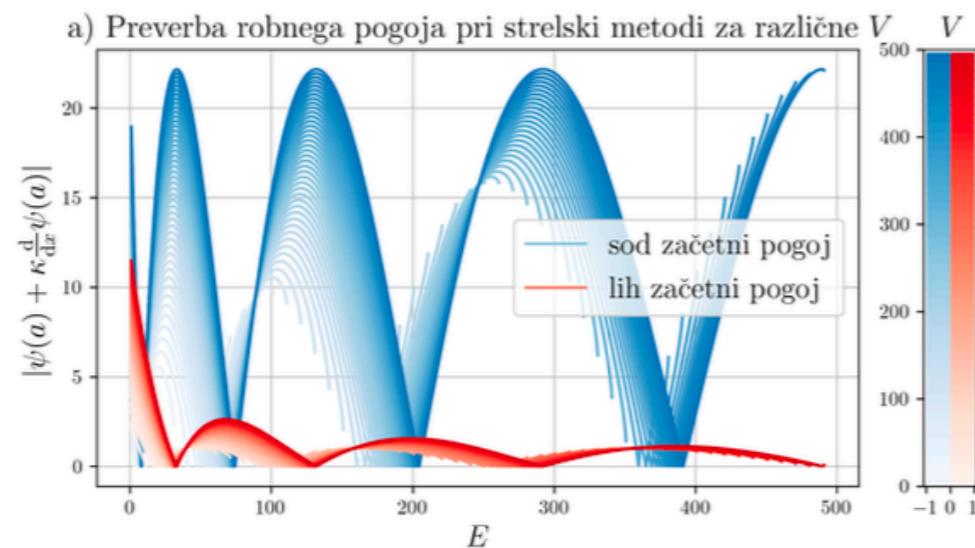
Slika 2: Iskane lastne funkcije in energije s strelsko metodo. Vidimo tudi dve nevezani stanji z energijo večjo od  $V_0$ , ki tudi izpolnita robne pogoje, čeprav je to v bistvu prosti val. Število korakov = 200.



# Končna jama

- Strelska metoda: Enostavno rešljivo, samo po **uspešnem strelu morate tudi preveriti, če so r.p. pogoji izpolnjeni...**
  - Z drugimi besedami, tudi r.p. je odvisen od lastne vrednosti...

Bravo!



Na sliki 5 je prikazanih nekaj lastnih funkcij vezanih stanj končne potencialne jame z globino  $V_0 = 70$ . Poglejmo si še odvisnost natančnosti energij od števila integracijskih točk  $N$  (problem rešujemo na intervalu  $[0, 5]$ ). Transcedentni enačbi za izračun energij sta

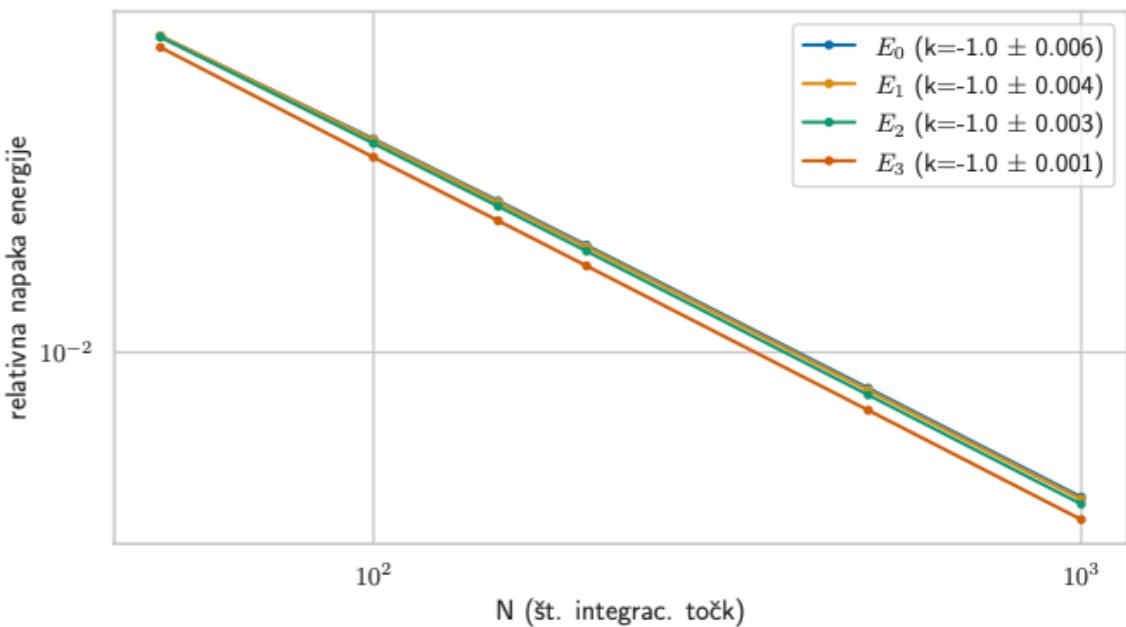
$$\tan(\sqrt{E/2}) = \sqrt{\frac{V_0 - E}{E}}$$

za sode funkcije in

$$-\tan(\sqrt{E/2})^{-1} = \sqrt{\frac{V_0 - E}{E}}$$

za lihe funkcije. Iz teh enačb (rešimo jih z metodo `scipy.optimize.fsolve`) dobimo rezultat, proti kateremu primerjamo energije, dobljene s strelske metodo. Tako izračunane lastne energije so  $E_0 = 3.60176823$ ,  $E_1 = 31.60928991$ ,  $E_2 = 14.28796013$ ,  $E_3 = 54.22601445$ .

S slike 6 opazimo zanimiv rezultat: relativna napaka pada s prvo potenco  $N$ .



Slika 9: Število lastnih vezanih stanj končne potencialne jame širine  $2a = 1$  narašča s potencialom  $V$ .

Slika 6: Odvisnost relativne napake lastnih energij od števila integracijskih točk  $N$ .



# Končna jama

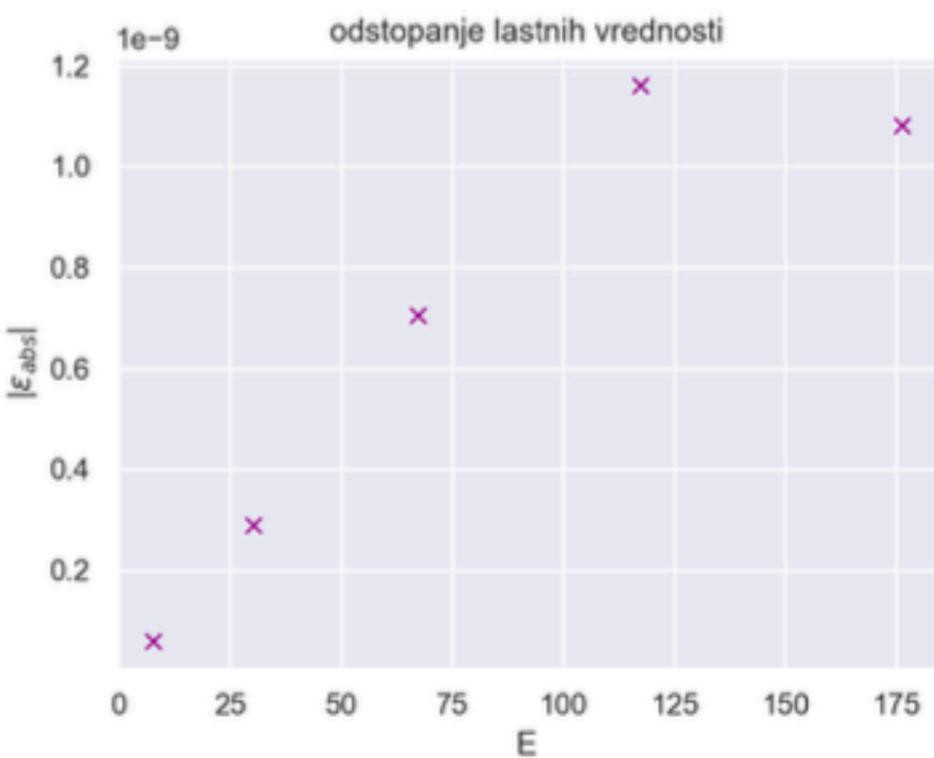
Bravo

## 4.1 STRELSKA METODA

Začenmo podobno kot pri neskončni jami, le da tu za začetni pogoj postavimo  $\psi(-1/2) = \frac{1}{\sqrt{V_0-E}}$ ,  $\psi'(-1/2) = 1$ . V tem primeru predstavljajo rešitve naše enačbe vse rešitve, ki ob robu zadostujejo pogoju  $\psi(1/2)\sqrt{V_0-E} + \psi'(1/2) = 0$ . Ponovno kot prej sem zapisala funkcijo, ki izpiše vrednosti ob  $x = 1/2$  in izračunala ničle te funkcije.



(a) Funkcija za obnašanje roba.



(b) Odstopanje ničel funkcije roba od analitičnih rešitev.

Slika 8: Postopek iskanja lastnih vrednosti.

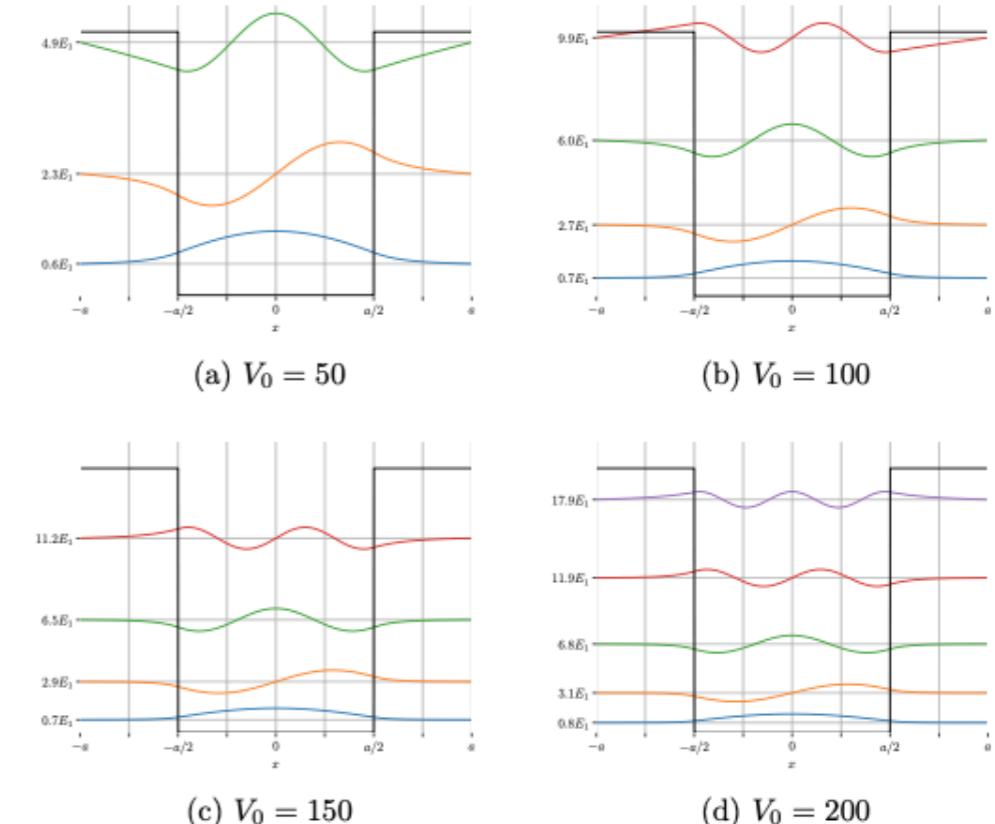
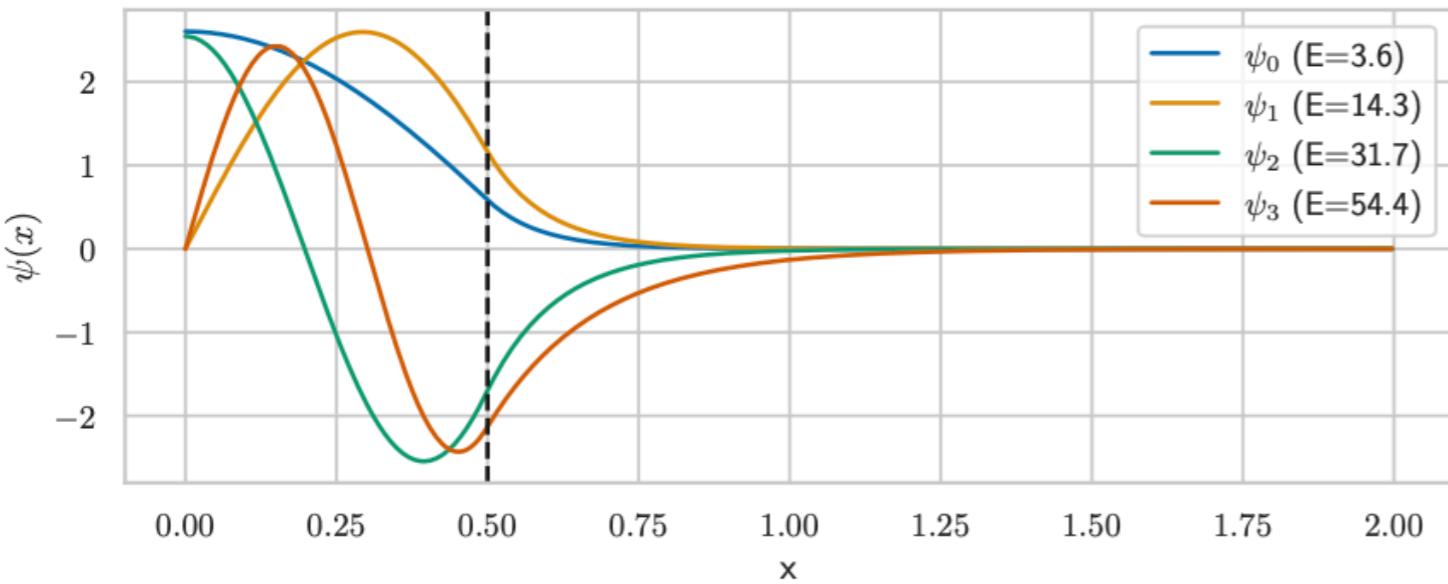
Slika 9: Število vezanih stanj končne potencialne jame širine  $2a = 1$  narašča s potencialom  $V$ .

Slika 6: Odvisnost relativne napake lastnih energij od števila integracijskih točk  $N$ .



# Končna jama

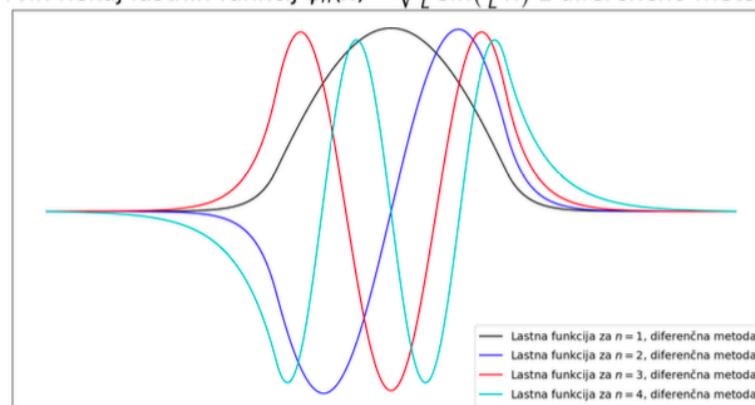
- Diferenčna metoda: za končno jamo imate matrični sistem, ki je odvisen od lastne vrednosti ...  $(A(\lambda) - I\lambda) \vec{\psi} = 0$



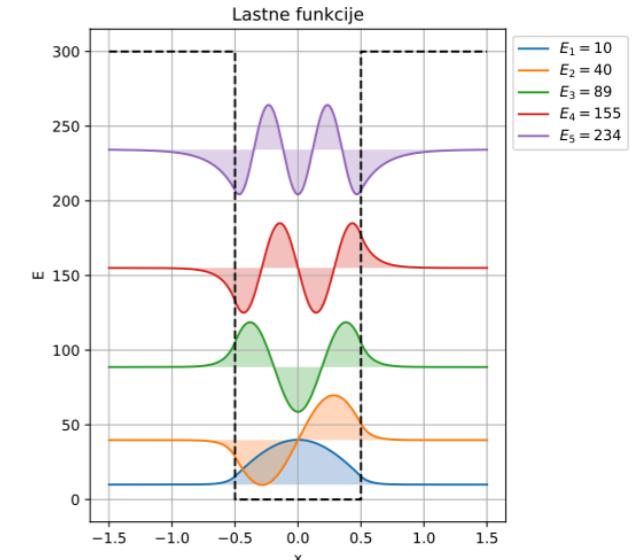
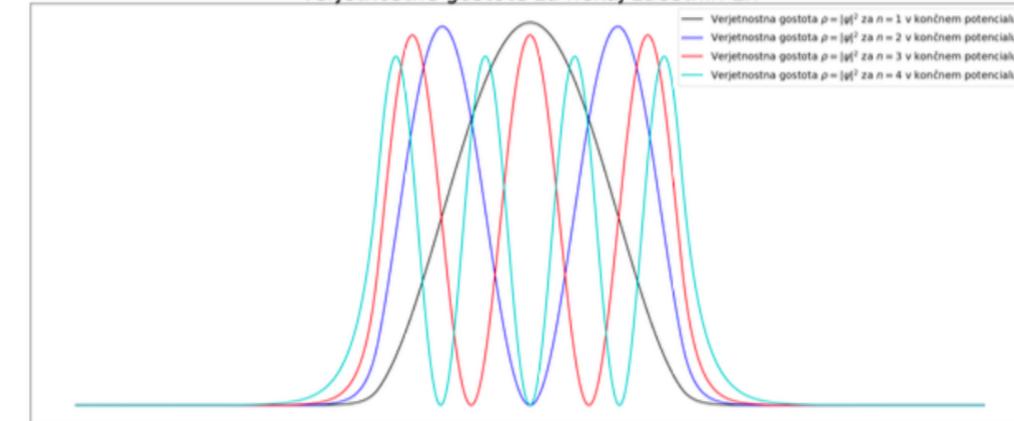
Slika 6: Strelska metoda za končno potencialno jamo

## Diferenčna metoda

Prvih nekaj lastnih funkcij  $\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$  z diferenčno metodo.



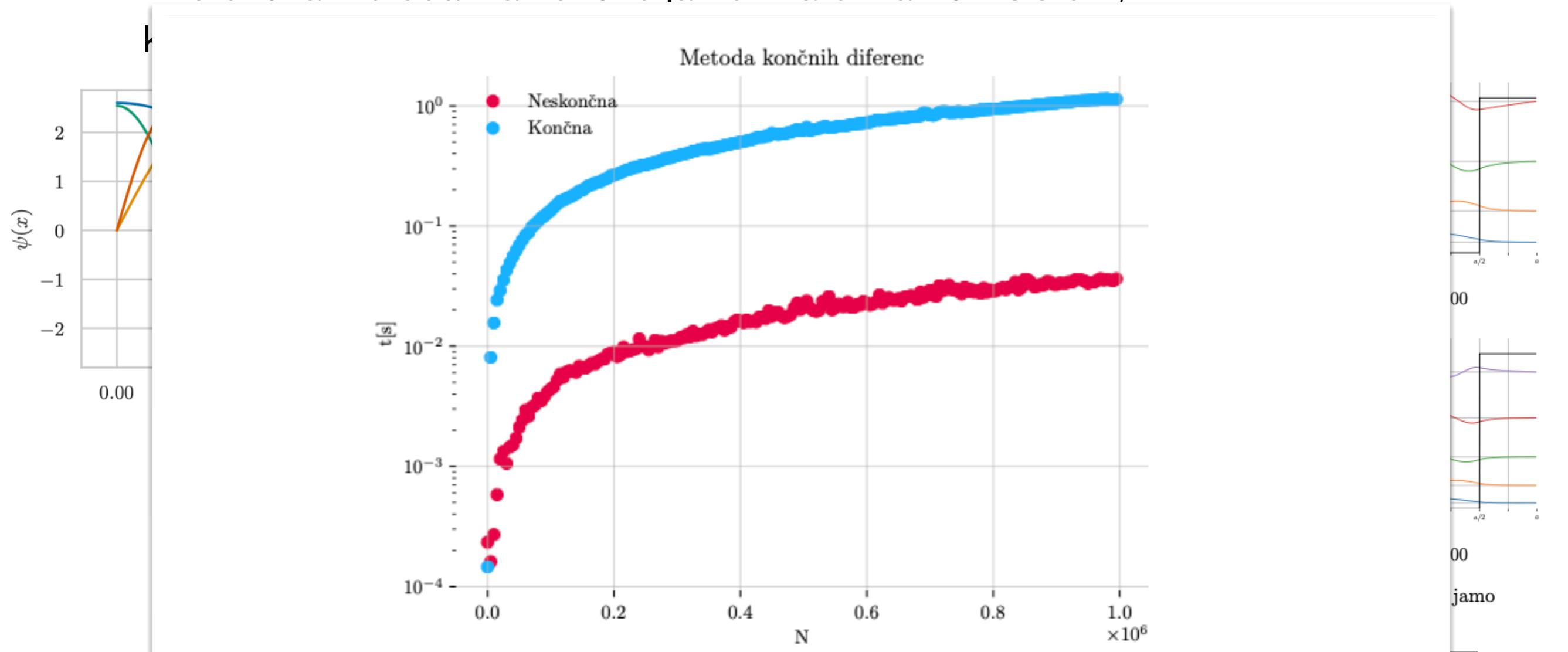
## Verjetnostne gostote za nekaj začetnih LF.



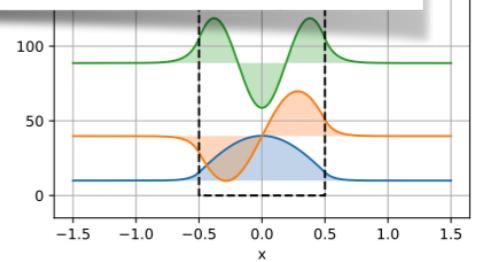
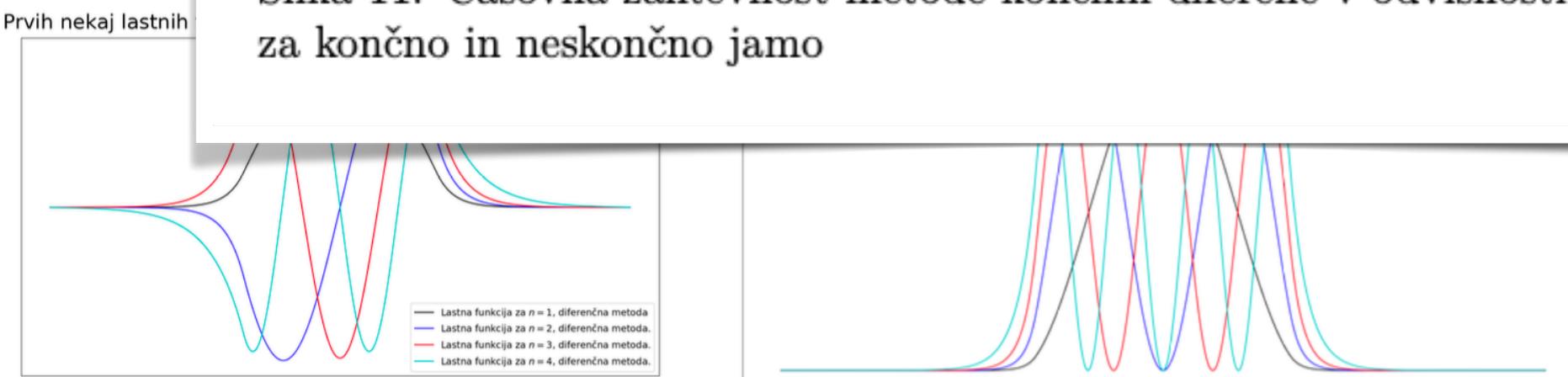
Slika 4: Iskane lastne funkcije in energije z diferenčno metodo. N = 200.

# Končna jama

- Diferenčna metoda: za končno jamo imate matrični sistem,



Slika 11: Časovna zahtevnost metode končnih differenc v odvisnosti od velikosti matrike za končno in neskončno jamo



Slika 4: Iskane lastne funkcije in energije z diferenčno metodo.  $N = 200$ .



# Končna jama

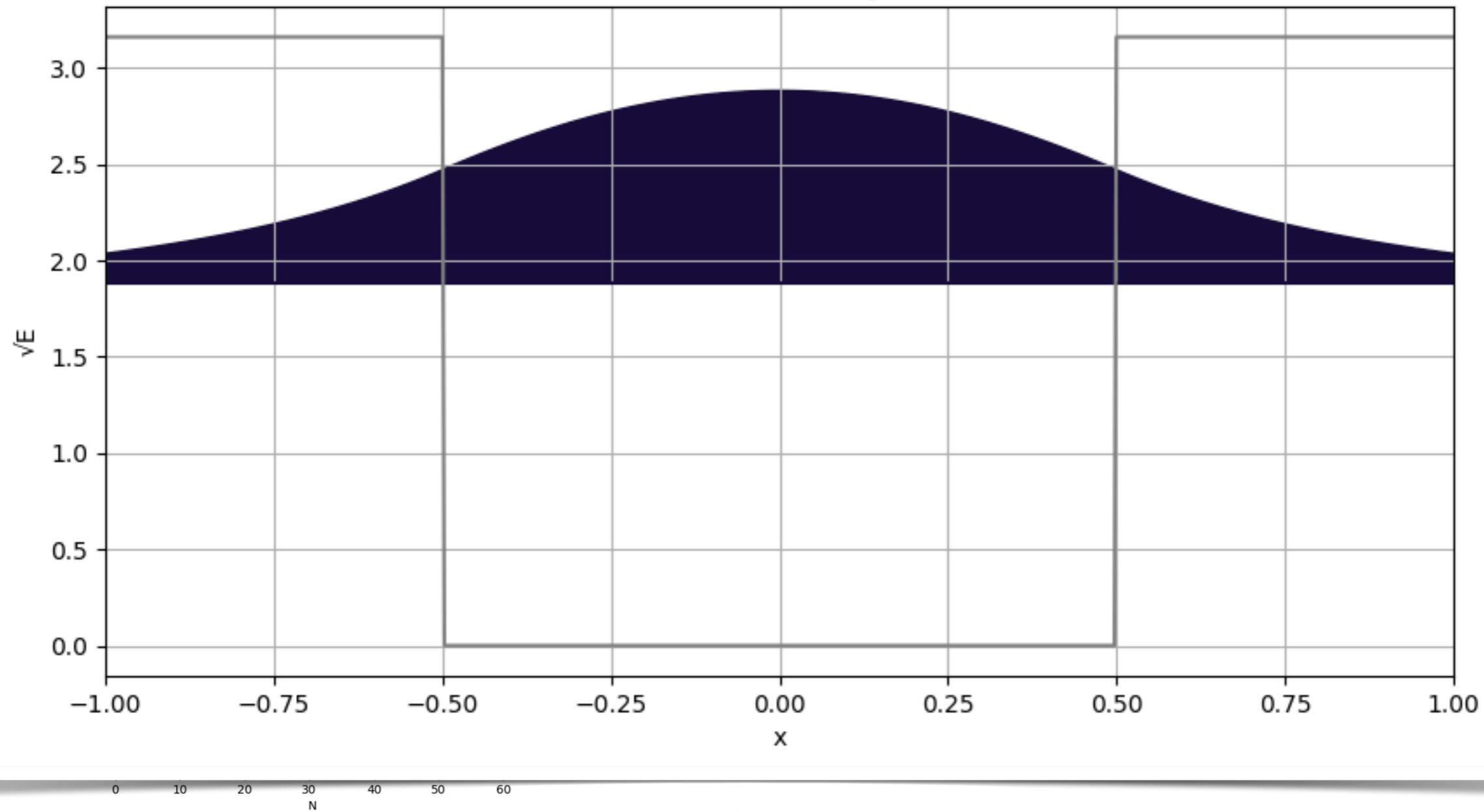
- Diferenčna metoda: za končno jamo imate matrični sistem, ki je odvisen od lastne vrednosti ...  $(A(\lambda) - I\lambda) \vec{\psi} = 0$

Lastne funkcije končne potencialne jame



Lani...

Diferenčna metoda, končna jama,  $V_0 = 10.0$



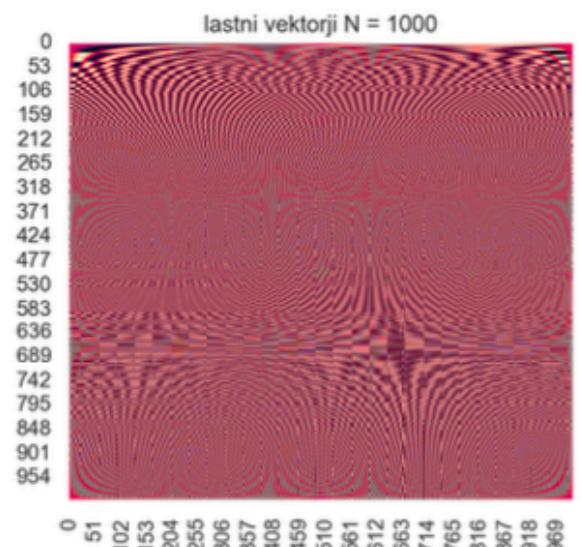
Slika 10: Lastne vrednosti v odvisnosti od zrnatosti intervala. Vidim, da je graf prcej podoben grafu 3, ki sem ga narisal za strelske metodo neskončne potencialne jame.)

Slika 15: Lastne funkcije končne potencialne jame z potencialom  $V_0 = 300$  dobljene preko diferenčne metode z  $N = 10000$ .

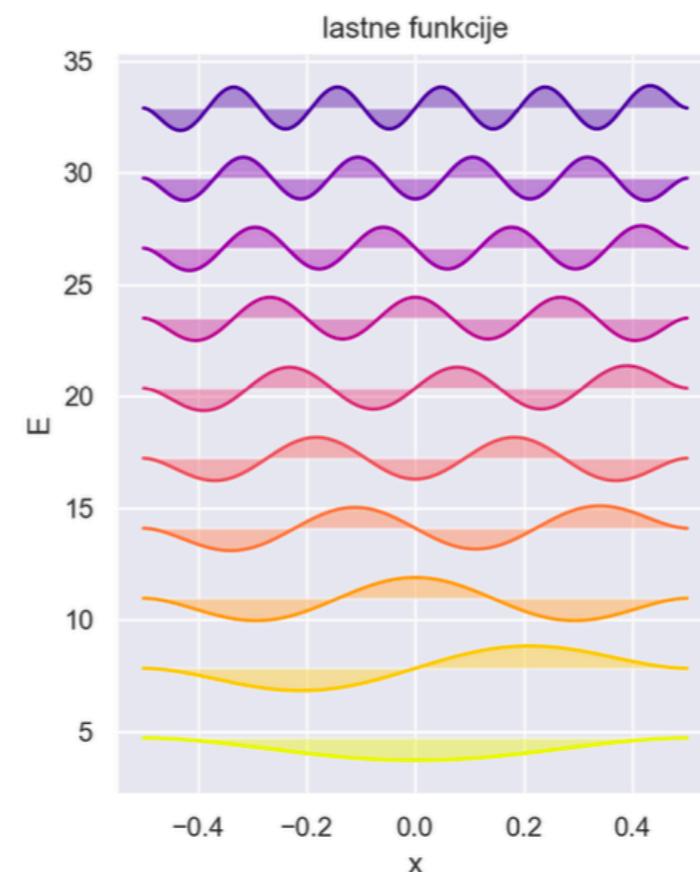


# Dodatna naloga

- Nekateri ste imeli dovolj volje tudi za dodatno nalogo:  
**Bravo!**

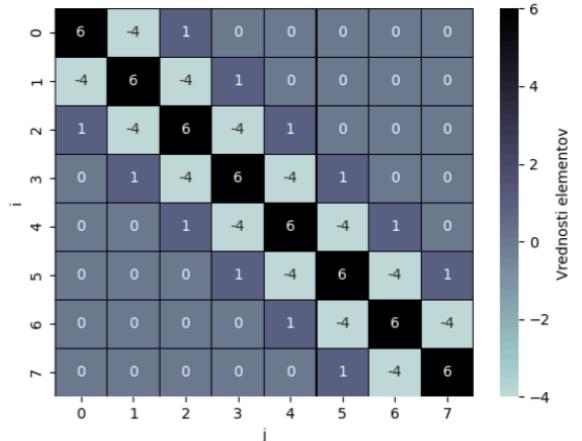


Slika 10: Lastni vektorji za diferencialno enačbo iz dodatne naloge.



$$\frac{d^4\psi}{dx^4} - E\psi = 0$$

$$\sqrt[4]{E} = k$$



liko 9: Matrika diferenčne metode za diferencialno enačbo 4. reda



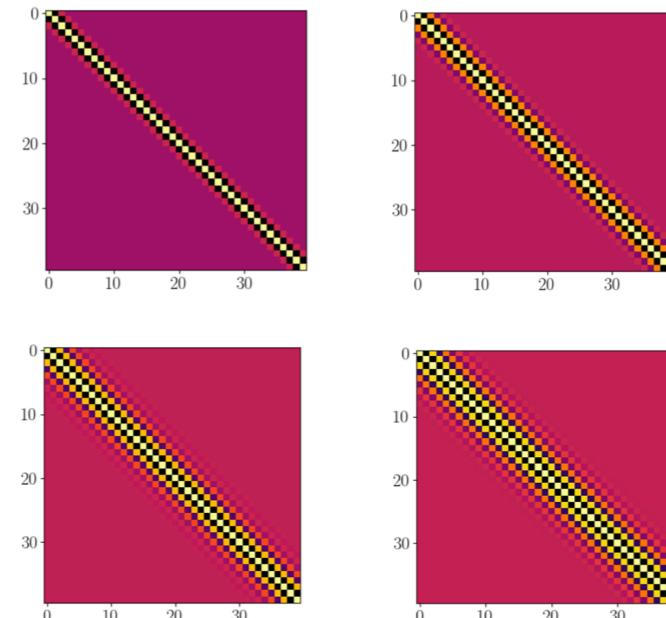
# Dodatna naloga

- Nekateri ste imeli dovolj volje tudi za dodatno nalogo:

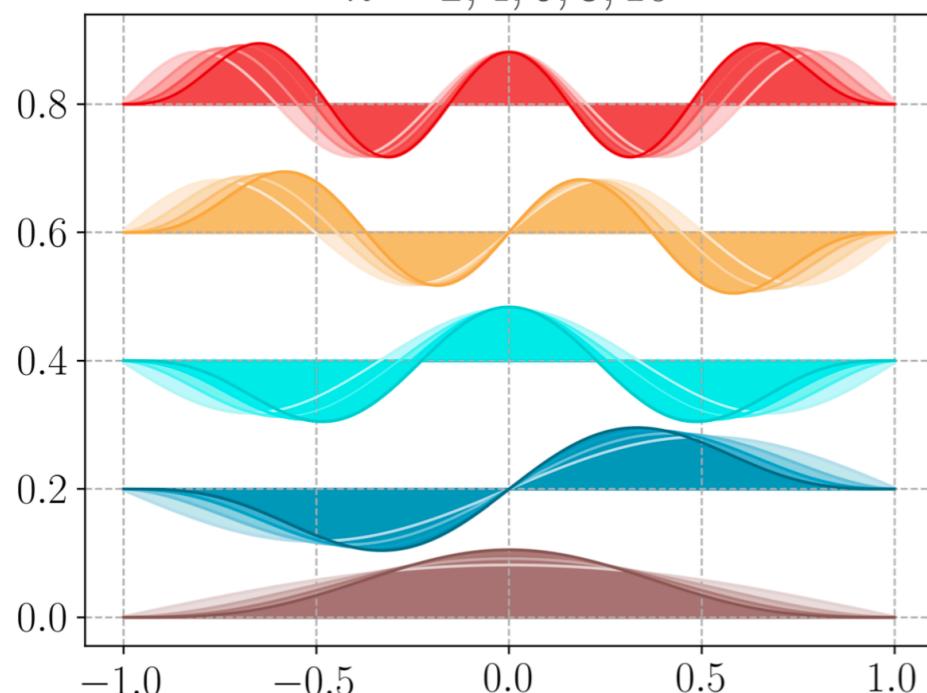
Lani!

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{k-n/2} \binom{n}{k} \psi_{i+k-n/2} = \lambda \psi_i, \quad \frac{d^n \psi}{du^n} = \lambda \psi \quad (23)$$

z robnimi pogoji  $\psi(1) = \psi^{(n)}(1) = \psi(-1) = \psi^{(n)}(-1) = 0$ . Izrišimo nekaj pripadajočih matrik za  $n = 4, 12, 24, 38$ :



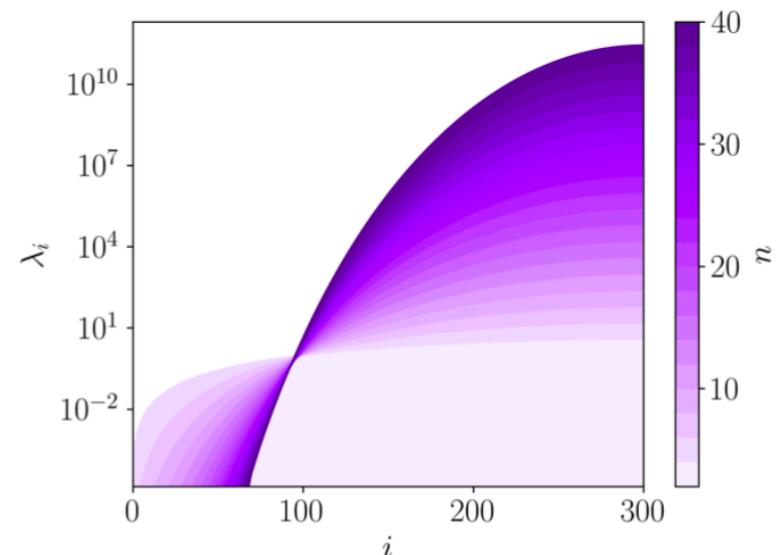
$n = 2, 4, 6, 8, 10$



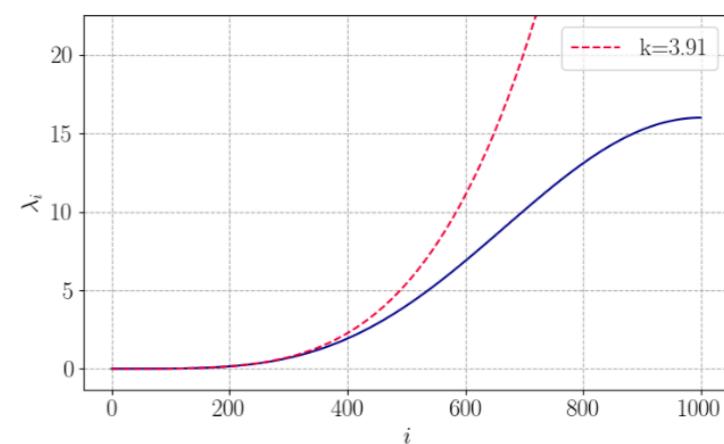
24

$$\frac{d^4 \psi}{dx^4} - E \psi = 0$$

Delovanje metode smo podrobno opisali že prej. Zato se raje osredotočimo na rezultate; Izrišimo, kako izgledajo energije:



Napake se torej ravnajo s potenčno odvisnostjo. Ko pridemo do, recimo,  $n = 40$ , so vse skoraj lastne energije do neke točke ranga  $10^{-10}$ , nato pa eksplodirajo (kot funkcionalno zaporedje  $x^n$ ). Pobliže si poglejmo energije za  $n = 4$  in na prvih 100-200 njenosti prilagodimo potenčno krivuljo:



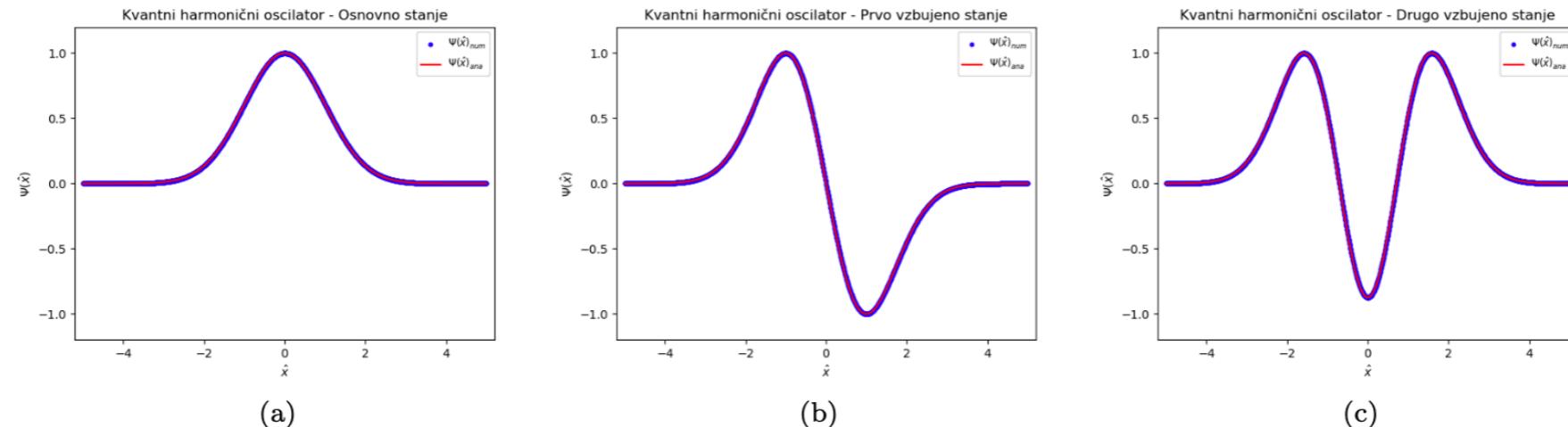
Prilagoditev podá potenco 4; kakršen je red enačbe. Iz tega in kvadratne odvisnosti lastne energije pri  $n = 2$  najbrž lahko sklepamo, da je podobno pri ostalih d.e. takega tipa.



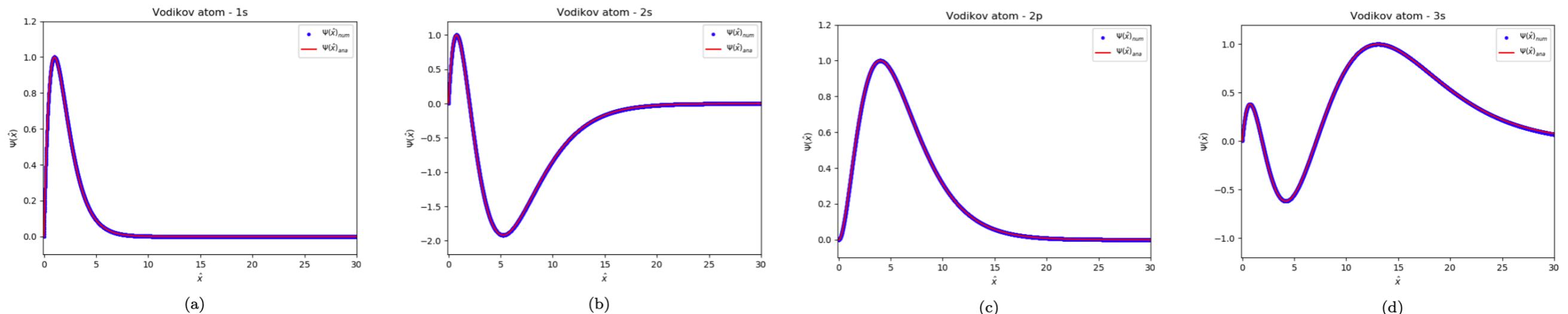
# Samoiniciativnost

- Če ste se seznanili z ‘streli v neskončnost’, zakaj pa ne bi rešili še kaj Lani... drugega ... Bravo!

Ker je bila ta naloga zame nekoliko zahtevnejša od preteklih sem v njej tudi veliko več časa posvetil opisu metode in težav oz. pojavov, s katerimi sem se srečal pri reševanju. Ker sem zaradi tega proizvedel nekoliko manj končnih numeričnih rezultatov sem se odločil za konec izračunati še nekaj lastnih funkcij za harmonični oscilator in vodikov atom z enako strelske metodo kot za jamo, da pokažem njen uporabnost. Namesto RK 4 sem uporabil odeint za vodikov atom. Tu je tudi potrebna že večja previdnost pri izbiri mreže energij.



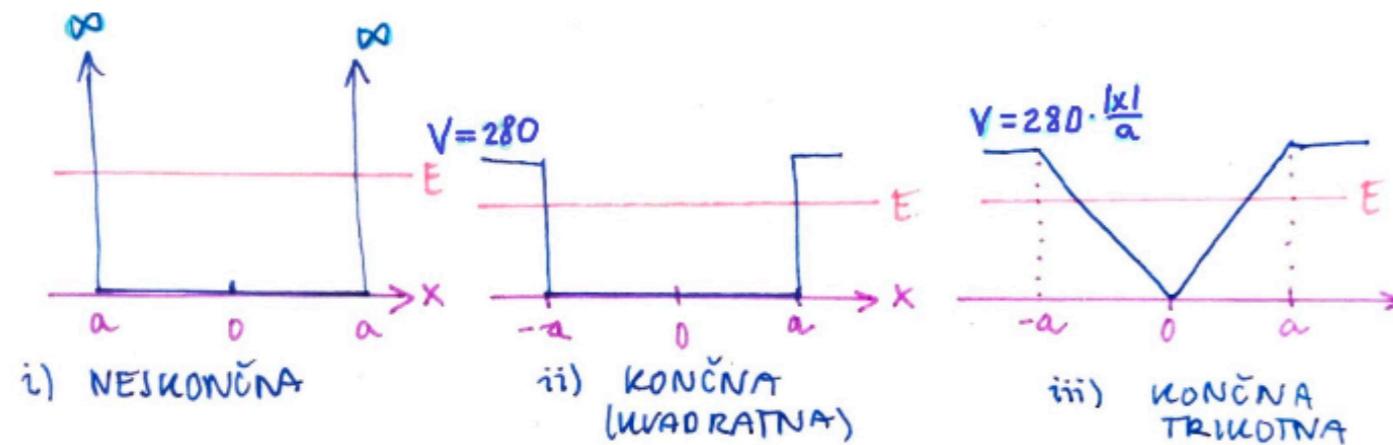
Slika 13: Prikazana so osnovno in prvi dve vzbujeni stanji za harmonični oscilator.



Slika 14: Prikazana so stanja vodikovega atoma 1s, 2s, 2p, 3s.



# Samoiniciativnost



### 3.3 Trikotna potencialna jama

Nazadnje sem poskusila poiskati še vezana stanja v trikotni potencialni jami širine  $2a$ , kjer je  $V(x) = 280|x|/a$  za  $|x| < a$  in  $V(x) = 280$  sicer (slika 1, c)). Pravih rešitev tega problema ne poznam, zato pravilnosti svojih izračunov ne morem preveriti, lahko pa opišem potek reševanja in lahko bralec sam presodi, ali je postopek smiseln in posledično tudi rešitve.

Podobno kot pri kvadratni jami je tudi tu zaradi sodosti potenciala vsaka lastna funkcija ali soda ali liha in lahko rešujemo na  $x > 0$ , začenši s sodima oz. lihima začetnima pogo-jema. Nastavek zunaj jame je  $\psi(x > a) \sim e^{-\kappa x}$ . Vrednosti  $\psi, \psi'$  na naslednjem koraku sem iz vrednosti na prejšnjem izračunala kar z Eulerjevo metodo, kjer sem na vsakem koraku spremenila reševano Schrödingerjevo enačbo, kakor se pač spreminja potencial, tj. sorazmerno s korakom.

Kakšen robni pogoj imamo sedaj? Rešitev na  $0 < x < a$  izračunamo numerično,  $\psi_1$ , za  $x > a$  pa je nastavek za rešitev  $\psi_2(x) = Be^{-\kappa x}$ ,  $\kappa = \sqrt{2m(280 - E)/\hbar}$ . Na robu  $x = a$  veljata

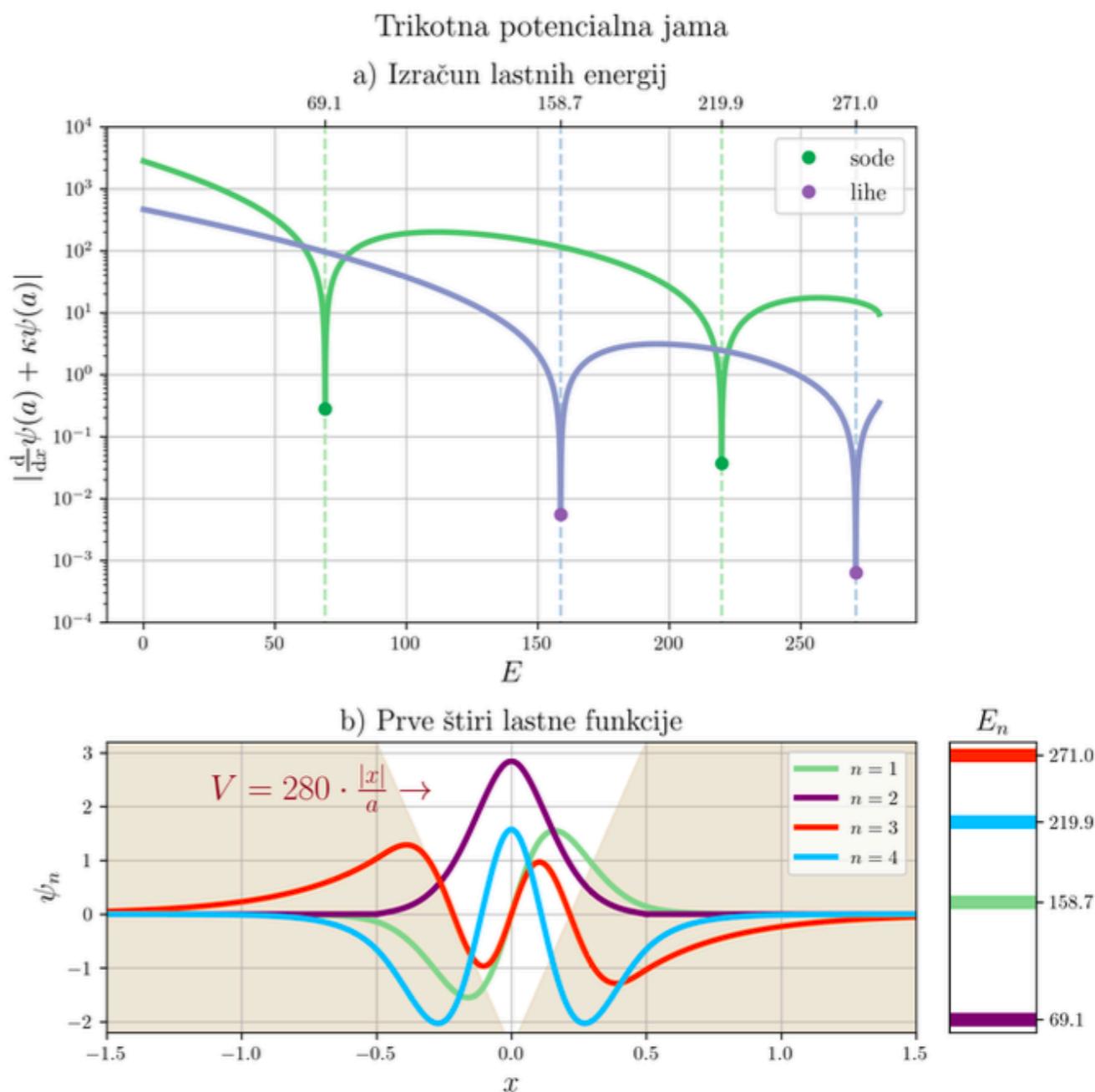
$$Be^{-\kappa a} = \psi_1(a) \quad \text{in} \quad -\kappa B e^{-\kappa a} = \psi'_1(a).$$

Enačbi zdelimo in dobimo pogoj

$$\psi'_1(a) + \kappa \psi_1(a) = 0, \quad (7)$$

torej enako kot v primeru kvadratne potencialne jame.

Na sliki 10 je prikazan postopek preverjanja robnega pogoja za različne energije med 0 in 280, od koder sem iz minimumov določila lastne energije. Spomnimo se, da je imela kvadratna potencialna jama šest vezanih lastnih stanj. Smiselno je, da je v primeru trikotne jame stanj manj – natančneje, štiri –, saj je število nekako sorazmerno  $Va$  ali  $Va^2$  ... Lahko pa si preprosto mislimo, da globlja in večja kot je potencialna jama, več je stanj, ki lahko ‘živijo’ v njej.



Slika 10: Trikotna potencialna jama ima štiri lastna stanja.



# Zaključki

## 4 Zaključek

Ogledali smo si strelsko metodo in metodo končnih diferenc. Primerjali smo metodi na primeru končne potencialne jame. Nato smo izračunali lastne energije in lastne funkcije še za končno potencialno jamo in harmonski oscilator. S tem smo numerično pokrili tečaj kvantne mehanike primeren za začetnike na tem področju (samo za tiste, ki še vedno pišejo ^ nad operatorji). Za tiste malo bolj napredne bomo naslednjič vključili še vodikov atom.

## 3 Zaključek

Implementirali smo strelsko metodo in diferenčno metodo za reševanje robnega problema lastnih vrednosti. Metodi smo preskusili na problemu končne in neskončne potencialne jame.

Opravičujem se za pozno oddajo. Imel sem manjšo "pisateljsko blokado", literatura [3] pa pri reševanju tega ni pomagala.

## Literatura

- [1] Ernst Hairer in Gerhard Wanner. *Solving Ordinary Differential Equations II. Stiff and Differential-Algebraic Problems*. Zv. 14. Jan. 1996. DOI: [10.1007/978-3-662-09947-6](https://doi.org/10.1007/978-3-662-09947-6).
- [2] Richard P. Brent. *Algorithms for Minimization without Derivatives*. 1st. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1973.
- [3] Dennis Uppen. "The unsuccessful self-treatment of a case of "writer's block"1". V: *Journal of Applied Behavior Analysis* 7.3 (1974), str. 497–497. DOI: [10.1901/jaba.1974.7-497a](https://doi.org/10.1901/jaba.1974.7-497a). URL: <https://doi.org/10.1901/jaba.1974.7-497a>.