

UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

NALOGA 11: REŠEVANJE PDE Z METODO GALERKINA

MATEMATIČNO-FIZIKALNI PRAKTIKUM

KRIŠTOF ŠPENKO
VPISNA ŠTEVILKA: 28151078
PREDAVATELJ: PROF. DR. BORUT PAUL KERŠEVAN

Kazalo

1	Teorija	2
2	Naloga	3
3	Testne funkcije	3
4	Izpeljava in izračun rešitve	4
5	Koeficient C in napake	5

1 Teorija

Pri opisu enakomernega laminarnega toka viskozne, nestisljive tekočine po dolgi ravni cevi pod vplivom stalnega tlačnega gradienta p' se Navier-Stokesova enačba poenostavi v Poissonovo enačbo

$$\nabla^2 v = -\frac{p'}{\eta},$$

kjer je v vzdolžna komponenta hitrosti, odvisna samo od koordinat preseka cevi, η pa je viskoznost tekočine. Enačbo rešujemo v notranjosti preseka cevi, medtem ko je ob stenah hitrost tekočina enaka nič. Za pretok velja Poiseuillov zakon

$$\Phi = \int v dS = C \frac{p' S^2}{8\pi\eta},$$

kjer je koeficient C odvisen samo od oblike preseka cevi ($C = 1$ za okroglo cev). Določili bomo koeficient za polkrožno cev z radijem R . V novih spremenljivkah $x = r/R$ in $u = v\eta/(p'R^2)$ se problem glasi

$$\nabla^2 u(x, \varphi) = -1, \quad u(x = 1, \varphi) = u(x, 0) = u(x, \varphi = \pi) = 0,$$

$$C = 8\pi \iint \frac{u(x, \varphi) x dx d\varphi}{(\pi/2)^2}.$$

Če poznamo lastne funkcije diferencialnega operatorja za določeno geometrijo (Spomni se na primer na vodikov atom v sferični geometriji, kjer smo imeli $\widehat{L}^2 Y_{lm}(\theta, \phi) = \hbar^2 l(l+1) Y_{lm}(\theta, \phi)$ in $\widehat{L}_z Y_{lm}(\theta, \phi) = m\hbar Y_{lm}(\theta, \phi)$), se reševanje parcialnih diferencialnih enačb včasih lahko prevede na razvoj po lastnih funkcijah. Da bi se izognili računanju lastnih (za ta primer Besselovih) funkcij in njihovih ničel, ki jih potrebujemo v razvoju, lahko zapišemo aproksimativno rešitev kot linearno kombinacijo nekih poskusnih (*trial*) funkcij

$$\tilde{u}(x, \varphi) = \sum_i a_i \Phi_i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (1)$$

za katere ni nujno, da so ortogonalne, pač pa naj zadoščajo robnim pogojem, tako da jim bo avtomatično zadoščala tudi vsota (1). Ta pristop nam pride prav v kompleksnejših geometrijah, ko je uporabnost lastnih funkcij izključena in potrebujemo robustnejši pristop. Približna funkcija \tilde{u} seveda ne zadosti Poissonovi enačbi: preostane majhna napaka ε

$$\nabla^2 \tilde{u}(x, \varphi) + 1 = \varepsilon(x, \varphi).$$

Pri metodi Galerkina zahtevamo, da je napaka ortogonalna na vse poskusne funkcije Φ_i ,

$$\langle \varepsilon, \Phi_i \rangle = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

(V splošnem bi lahko zahtevali tudi ortogonalnost ε na nek drug sistem utežnih (*weight*) oziroma testnih (*test*) funkcij Ψ_i . Metoda Galerkina je poseben primer takih metod (*Methods of Weighted Residuals*) z izbiro $\Phi_i = \Psi_i$.) Omenjena izbira vodi do sistema enačb za koeficiente a_i

$$\sum_i A_{ij} a_i = b_j, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (2)$$

$$A_{ij} = \langle \nabla^2 \Phi_i, \Phi_j \rangle, \quad b_j = \langle -1, \Phi_j \rangle,$$

tako da je koeficient za pretok enak

$$C = -\frac{32}{\pi} \sum_{ij} b_i A_{ij}^{-1} b_j.$$

Za kotni del poskusne funkcije obdržimo eksaktne funkcije $\sin((2m + 1)\phi)$, Besselove funkcije za radialni del pa nadomestimo s preprostejšimi funkcijami $x^{2m+1}(1 - x)^n$. Pozor: indeks i pomeni seveda dvojni indeks (šteje obenem m in n). Zaradi ortogonalnosti po m razpade matrika A v bloke, obrneš pa jo lahko s kako pripravljeno rutino, npr. s spodnjim in zgornjim trikotnim razcepom `ludcmp` in `lubksb` iz NRC.

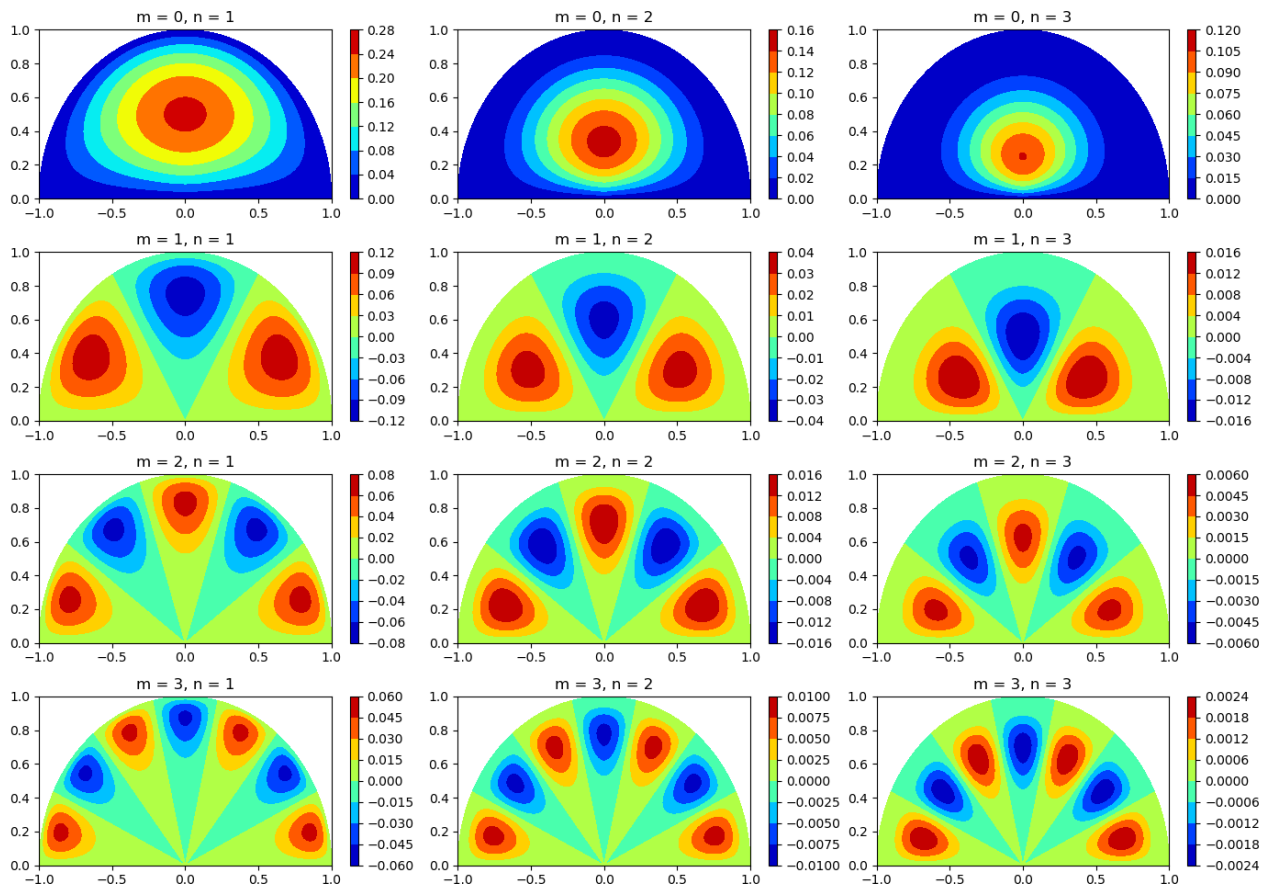
2 Naloga

Izračunaj koeficient C . V ta namen moraš dobiti matriko A in vektor b ; preuči, kako je natančnost rezultata (vsote za koeficient C) odvisna od števila členov v indeksih m in n . Zaradi ortogonalnosti po m lahko oba učinka preučuješ neodvisno.

3 Testne funkcije

Najprej si oglejmo kako izgledajo posamezni prispevki pretoku v cevi, ki jih prispeva posamezna testna funkcija. Oglejmo si grafe parih najnižjih redov testnih funkcij. Za izbor testnih funkcij smo si izbrali (za $m \geq 0$ in $n \geq 1$), ki morajo zadoščati našim robnim pogojem:

$$\Phi_{m,n}(x, \phi) = x^{2m+1}(1 + x)^n \sin((2m + 1)\phi)$$



4 Izpeljava in izračun rešitve

Na podlagi enačb (2) se nam skalarna produkta za matriko A in vektor b prepiseta v bločno obliko:

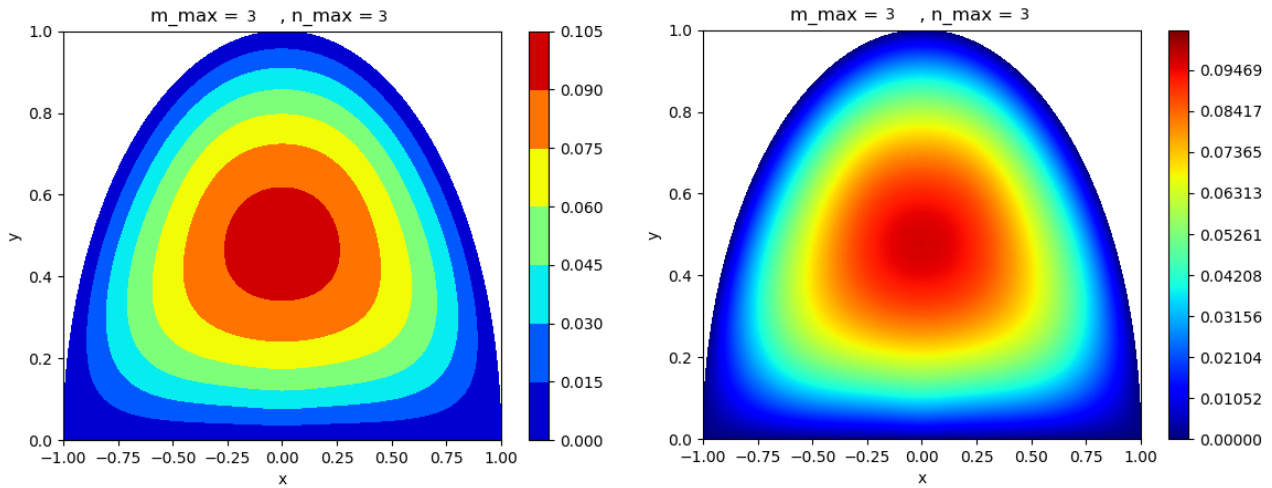
$$A_{ij} = -\delta_{mm'} \frac{\pi}{2} nn' \frac{3+4m}{2+4m+n+n'} B(n+n'-1, 3+4m)$$

$$b_j = -\frac{2}{2m'+1} B(2m'+3, n'+1)$$

kjer je B beta funkcija, ki jo lahko izračunamo z uporabo funkcije `scipy.special.beta`. Matrika A je torej bločna in simetrična kar lahko izrabimo pri implementaciji izračuna. Našo aproksimacijo rešitve dobimo z vsoto:

$$u(x, \phi) = \sum_{mn} a_{mn} \Phi_{mn}(x, \phi)$$

pri čimer dobimo vektor koeficientov a iz sistema $Aa = b$. Kot vemo, je matrika A bločna zato lahko za bolj optimalno reševanje sistema izkoristimo funkciji `scipy.sparse.block_diag` in `scipy.sparse.linalg.spsolve`. Seveda je naš izbor testnih funkcij neskončen, zato se bomo morali omejiti na končno število funkcij. Tolažimo se lahko z argumentom, da bodo funkcije višjih redov prispevale vedno manj k naši aproksimaciji. Za primer $m_{max} = 3$ in $n_{max} = 3$ dobimo kot graf rešitve spodnji sliki.



5 Koeficient C in napake

Koeficient C lahko izrazimo in dobimo iz enačbe:

$$C = -\frac{32}{\pi} b^T (A^{-1} b) = -\frac{32}{\pi} b^T a$$

pri čimer je vektor a že znani vektor koeficientov za testne funkcije. V našem primeru dobimo za polkrožno cev C 0.7577. Ogledamo si še lahko kako je odvisna napaka izračunanega koeficienta od maksimalnih dimenzij izbora testnih funkcij m_{max} in n_{max} . Za referenčno vrednost lahko izberemo vrednost koeficienta C pri $m_{max} = 100$ in $n_{max} = 100$. Iz spodnjega grafa lahko hitro opazimo, da bo vrednost koeficienta hitreje konvergirala, če bomo povečali dimenzijo m_{max} .

