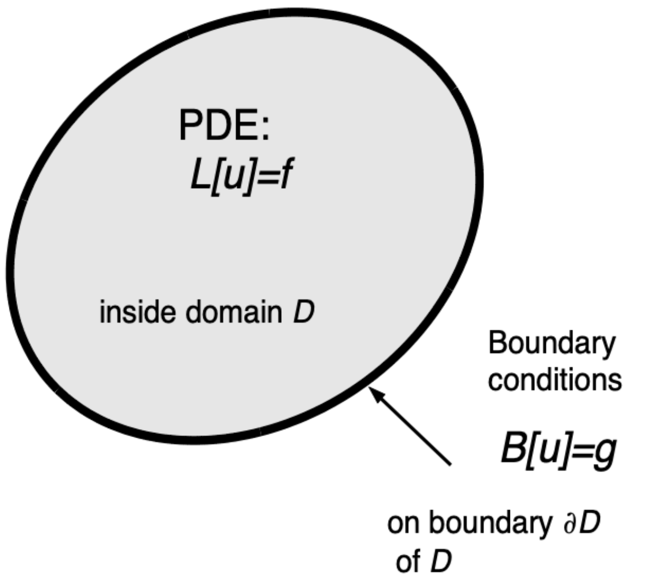
University of Ljubljana
Faculty of Mathematics and Physics

# 11. naloga
# Reševanje PDE z metodo Galerkina

Ma-Fi praktikum 2022/23

# Eliptične PDE z RP

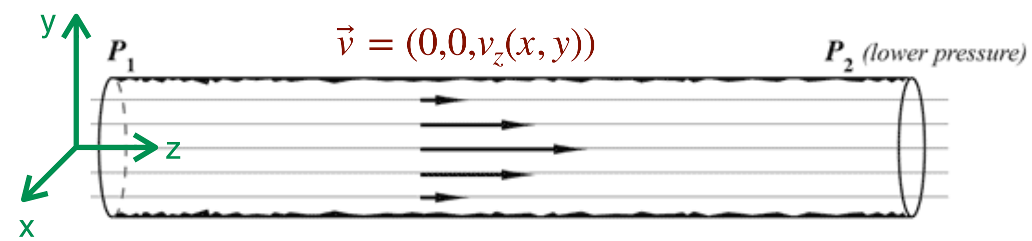
- Danes bomo nabor naših metod za reševanje PDE razširili še **na PDE eliptičnega tipa z robnimi pogoji:**
  - Med te spadata Poissonova $\Delta u = f(\vec{r})$ in Laplaceova enačba $\Delta u = 0$ ter še  na primer Helmholzova PDE $\Delta u = \lambda u$.
    - Vsekakor se bomo zdaj omejili na stacionarne primere (časovno neodvisne).
    - Za domačo nalogo boste dobili problem pretoka skozi cev…
  - Konkretneje si bomo pogledali **metodo Galerkina** za reševanje tovrstnih problemov.
    - Obstaja cel kup drugih metod (npr običajne diferenčne), ki pa jih ne bomo eksplicitno obravnavali (ali se ponavljajo, ali pa so bolj zahtevne) - lep pregled je v prispevku na spletni učilnici …



# Poissonova enačba

- Naš današnji zgled za PDE z BVP bo tok tekočin:
  - Natančneje laminarni tok nestisljive, viskozne tekočine po cevi s konstantnim tlačnim gradientom $p'$.
  - V tem primeru se Navier-Stokesova enačba poenostavi v Poissonovo enačbo:

$$\nabla^2 v = \Delta v = -\frac{p'}{\eta} \; ,$$




kjer je v tem konkretnem primeru relevantno samo hitrostno polje v eni smeri $v = v_z(x,y)$ , odvisno od prečnih koordinat glede na tok…

  - Zaradi viskoznosti je hitrost tekočine na stenah cevi enaka nič (Dirichletov r.p.)

- Za pretok velja **Poiseuillov zakon:**

$$\Phi = \int_S v \, \mathrm{d}S = C \, \frac{p' S^2}{8\pi\eta} \; ,$$

ki opisuje pretok po takšni cevi.

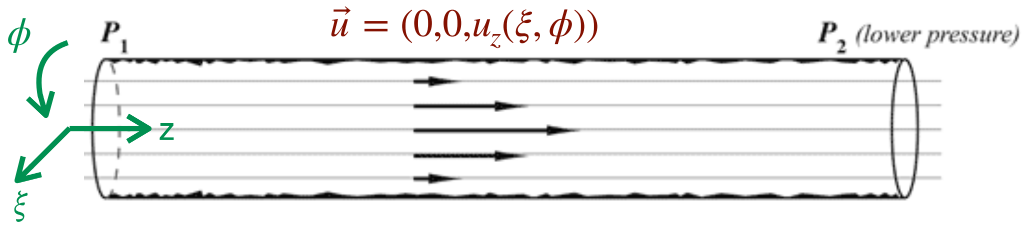
C odvisen od oblike preseka cevi, C=1 za krožno cev…

University *of Ljubljana*
Faculty *of Mathematics and Physics*

# Poissonova enačba

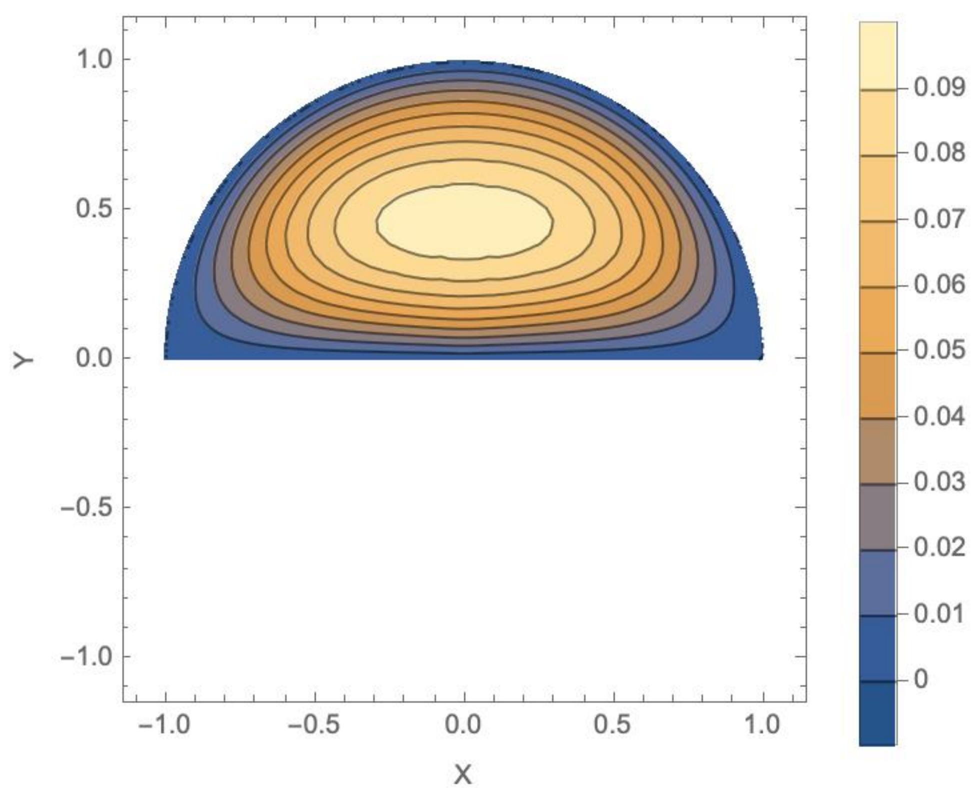
- V naši nalogi bomo določili koeficient C za **polkrožno** cev.
  - Kot prvi korak bomo tokrat spremenljivke zapisali malo bolj zgledno:

$$\left.\begin{array}{l} \xi = \dfrac{r}{R}\,, \qquad \xi \in [0,1] \\ \phi \in [0,\pi] \\ u = \dfrac{v\eta}{p' R^2} \end{array}\right\} \Delta u(\xi,\phi) = -1$$

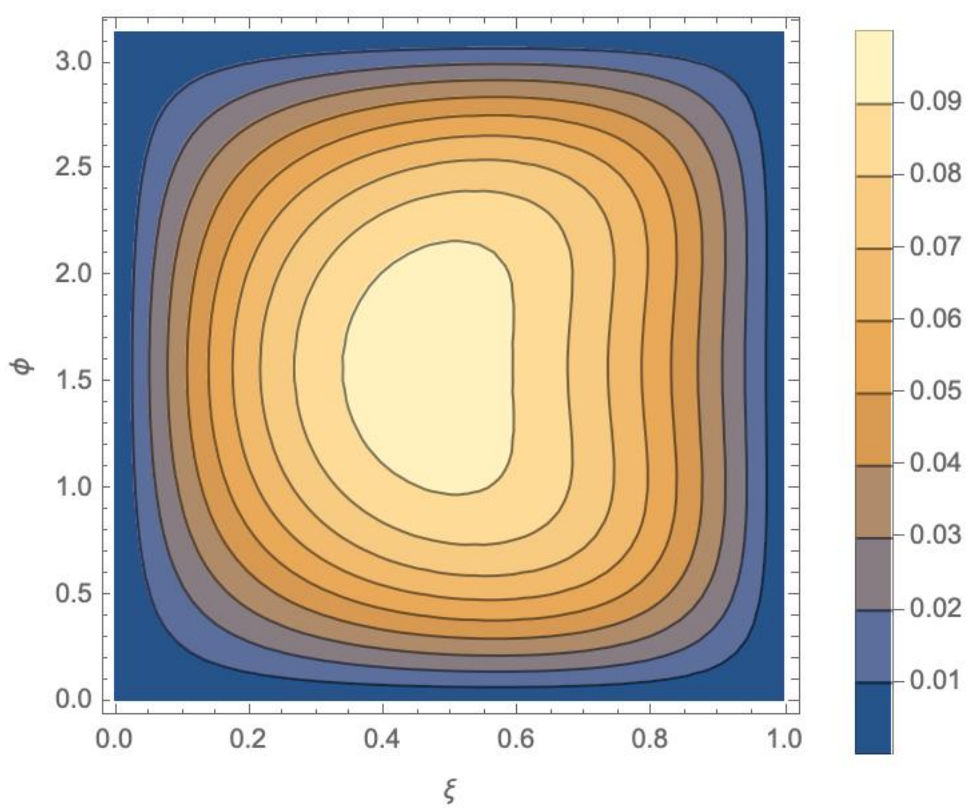



kjer smo uvedli cilindrične koordinate in nekaj (re)skaliranja…

  - Hitrostni profil seveda ne bo več preprosta parabola (!)





# Poissonova enačba

- V naši nalogi bomo določili koeficient C za **polkrožno** cev.
  - Kot prvi korak bomo tokrat spremenljivke zapisali malo bolj zgledno:

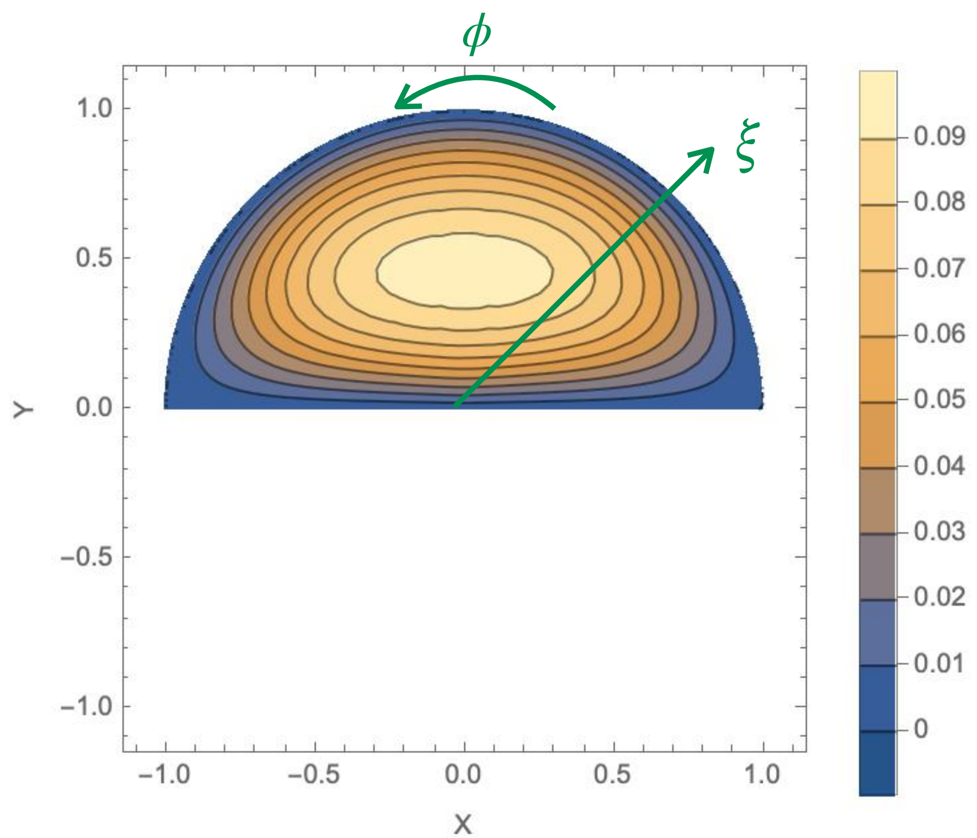
$$\left.\begin{aligned} &\xi = \frac{r}{R}\,, \quad \xi \in [0,1] \\ &\phi \in [0,\pi] \\ &u = \frac{v\eta}{p' R^2} \end{aligned}\right\} \Delta u(\xi,\phi) = -1$$

$$u(\xi = 1, \phi) = 0, \qquad \phi \in [0,\pi]$$

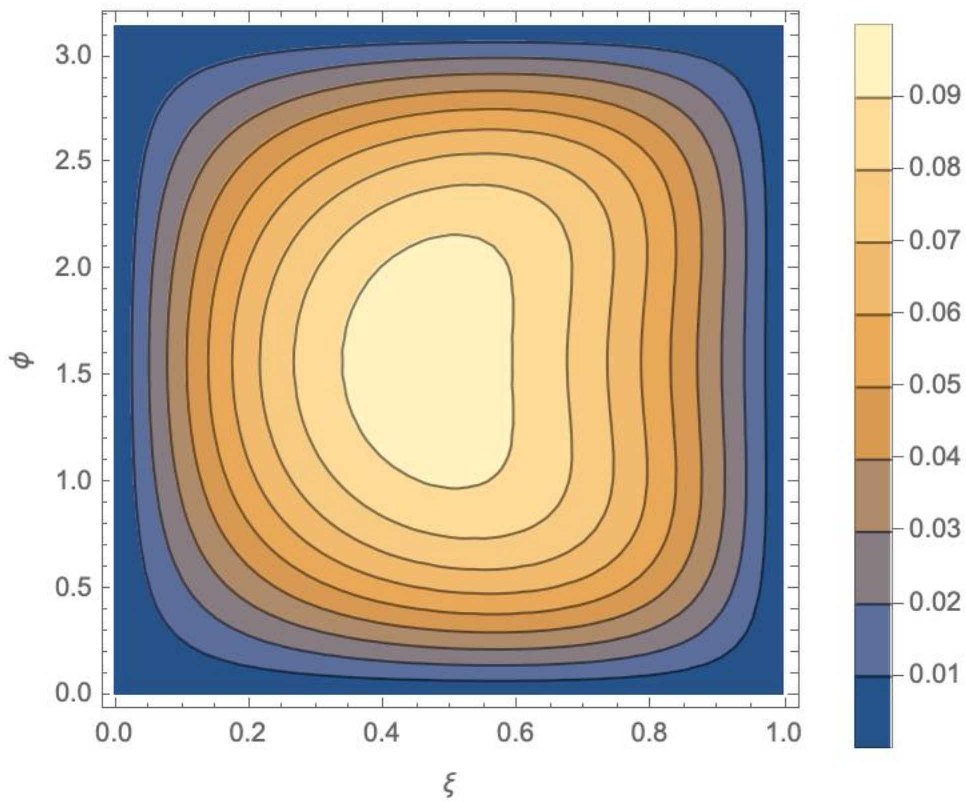
$$\left.\begin{aligned} u(\xi, \phi = 0) = 0, \\ u(\xi, \phi = \pi) = 0, \end{aligned}\right\} \quad \xi \in [0,1]$$

kjer smo uvedli cilindrične koordinate in nekaj (re)skaliranja…

  - Hitrostni profil seveda ne bo več preprosta parabola (!)





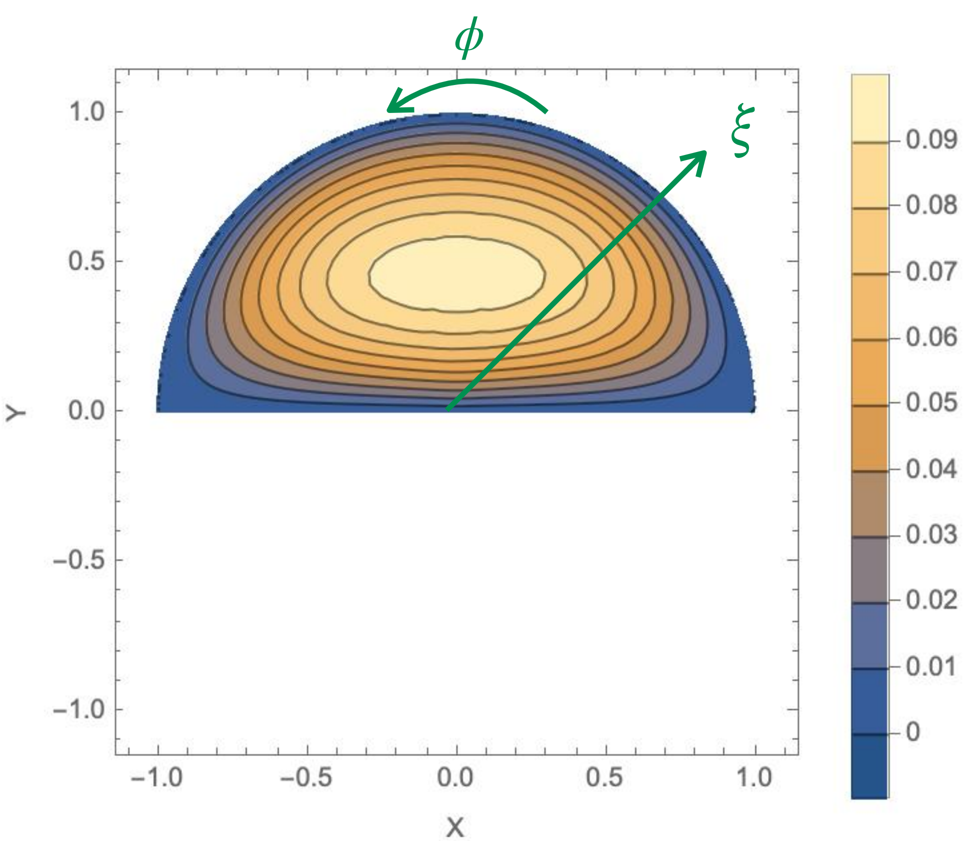



# Poissonova enačba

- V naši nalogi bomo določili koeficient C za **polkrožno** cev.
  - Kot prvi korak bomo tokrat spremenljivke zapisali malo bolj zgledno:

$$\left.\begin{aligned} &\xi = \frac{r}{R}, \quad \xi \in [0,1] \\ &\phi \in [0,\pi] \\ &u = \frac{v\eta}{p' R^2} \end{aligned}\right\} \Delta u(\xi,\phi) = -1 \qquad \begin{aligned} &u(\xi = 1, \phi) = 0, \quad \phi \in [0,\pi] \\ &\left.\begin{aligned} &u(\xi, \phi = 0) = 0, \\ &u(\xi, \phi = \pi) = 0, \end{aligned}\right\} \xi \in [0,1] \end{aligned}$$

  - Koeficient C s Poiseuillovim zakonom zdaj zapišemo z:




$$C = 8\pi \int_0^1 \int_0^\pi \frac{u(\xi,\varphi)\,\xi\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\varphi}{(\pi/2)^2}\,.$$

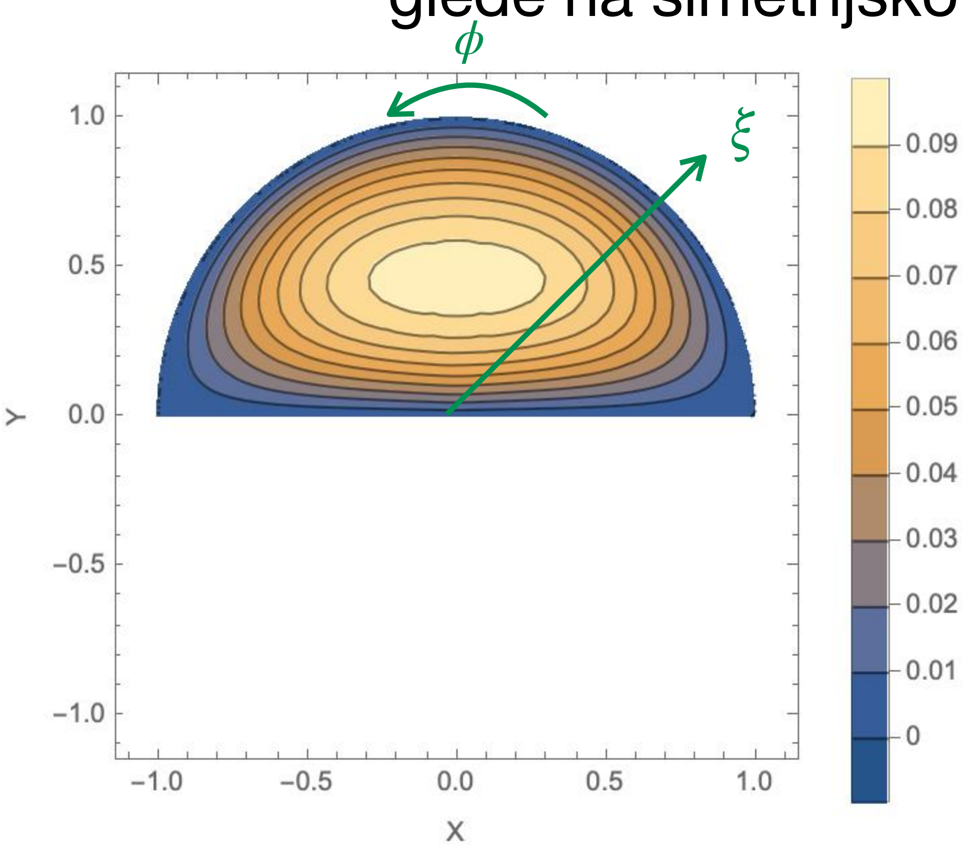
Preostali faktor od $S^2$

# Poissonova enačba

- V naši nalogi bomo določili koeficient C za **polkrožno** cev.
  - Kot prvi korak bomo tokrat spremenljivke zapisali malo bolj zgledno:

$$\left.\begin{array}{l} \xi = \dfrac{r}{R}, \quad \xi \in [0,1] \\ \phi \in [0,\pi] \\ u = \dfrac{v\eta}{p' R^2} \end{array}\right\} \Delta u(\xi,\phi) = -1 \qquad \begin{array}{ll} u(\xi=1,\phi)=0, & \phi \in [0,\pi] \\ \left.\begin{array}{l} u(\xi,\phi=0)=0, \\ u(\xi,\phi=\pi)=0, \end{array}\right\} & \xi \in [0,1] \end{array}$$

  - Analitična rešitev je podana z vsoto Besselovih funkcij in ‘**sodih’** sinusov glede na simetrijsko os pri $\pi/2$:




koeficienti, dobimo iz razvoja ‘$f = -1$’ v zgornji DE po teh funkcijah.

$$u(\xi,\phi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} c_{ms}\, J_{2m+1}\left(y_{(2m+1)s}\xi\right) \sin\big((2m+1)\phi\big)$$

dvojna vsota

s-te ničle Besselovih f.

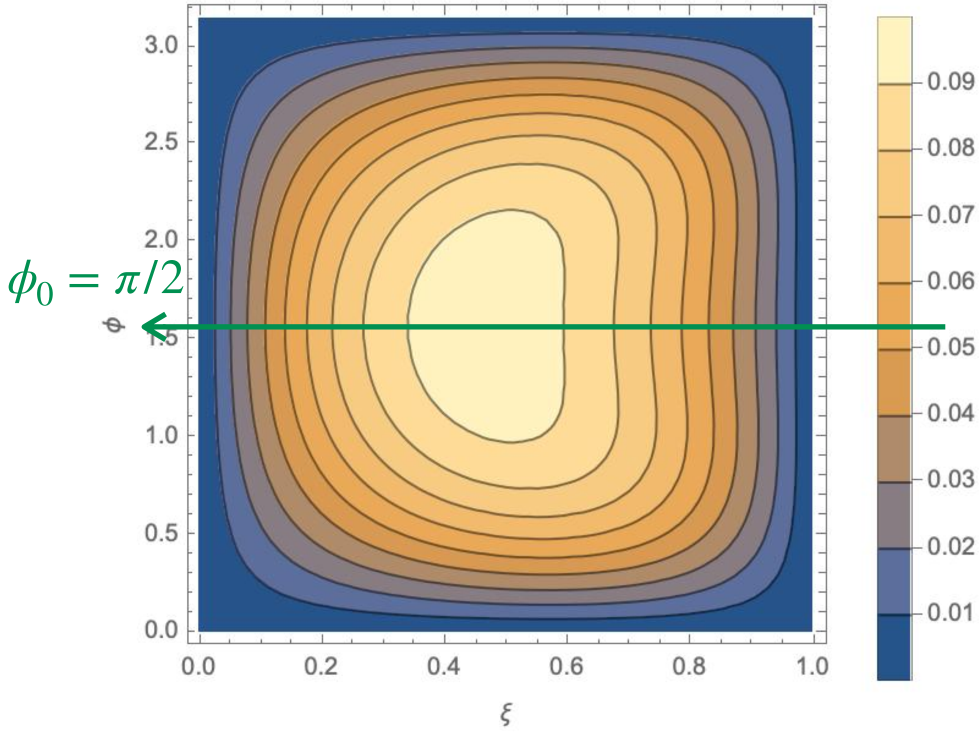
‘sodi sinusi’ glede na $\phi_0 = \pi/2$

# Poissonova enačba

- V naši nalogi bomo določili koeficient C za **polkrožno** cev.
  - Kot prvi korak bomo tokrat spremenljivke zapisali malo bolj zgledno:

$$\left.\begin{aligned} &\xi = \frac{r}{R}, \quad \xi \in [0,1] \\ &\phi \in [0,\pi] \\ &u = \frac{v\eta}{p' R^2} \end{aligned}\right\} \Delta u(\xi,\phi) = -1 \qquad \begin{aligned} &u(\xi=1,\phi)=0, \quad \phi \in [0,\pi] \\ &\left.\begin{aligned} &u(\xi,\phi=0)=0, \\ &u(\xi,\phi=\pi)=0, \end{aligned}\right\} \xi \in [0,1] \end{aligned}$$

  - Analitična rešitev je podana z vsoto Besselovih funkcij in ‘**sodih’** sinusov glede na simetrijsko os pri $\pi/2$:




koeficienti, dobimo iz razvoja ‘$f = -1$’ v zgornji DE po teh funkcijah.

$$u(\xi,\phi) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty} c_{ms}\, J_{2m+1}\left(y_{(2m+1)s}\xi\right) \sin\left((2m+1)\phi\right)$$

dvojna vsota

s-te ničle Besselovih f.

‘sodi sinusi’ glede na $\phi_0 = \pi/2$

- Rešitev sestavljena iz funkcij, ki izpolnijo r.p. (in simetrijo).
  - Lastne funkcije DE: $\Delta \varphi_k = \lambda_k \varphi_k$

# Poissonova enačba

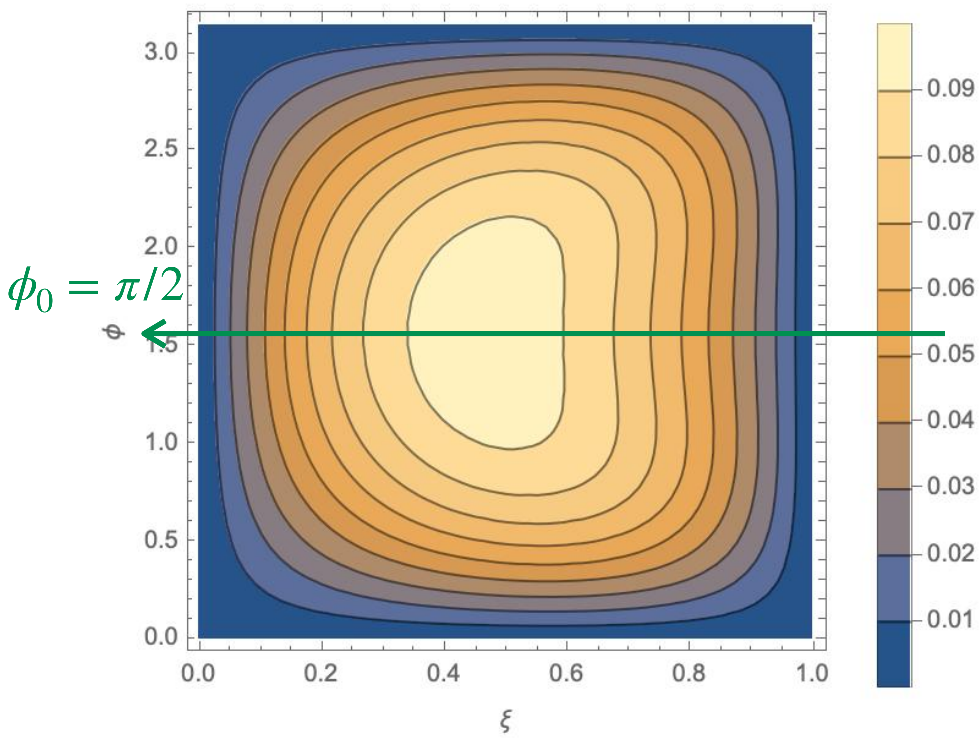
- V naši nalogi bomo določili koeficient C za **polkrožno** cev.
  - Kot prvi korak bomo tokrat spremenljivke zapisali malo bolj zgledno:

$$\left.\begin{array}{l} \xi = \dfrac{r}{R}, \quad \xi \in [0,1] \\ \phi \in [0,\pi] \\ u = \dfrac{v\eta}{p' R^2} \end{array}\right\} \Delta u(\xi,\phi) = -1$$

$$u(\xi = 1, \phi) = 0, \qquad \phi \in [0,\pi]$$

$$\left.\begin{array}{l} u(\xi, \phi = 0) = 0, \\ u(\xi, \phi = \pi) = 0, \end{array}\right\} \quad \xi \in [0,1]$$

  - Analitična rešitev je podana z vsoto Besselovih funkcij in **'sodih'** sinusov glede na simetrijsko os pri $\pi/2$:




koeficienti, dobimo iz razvoja '$f = -1$' v zgornji DE po teh funkcijah.

$$u(\xi,\phi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} c_{ms} \, J_{2m+1}\left(y_{(2m+1)s}\xi\right) \sin\big((2m+1)\phi\big)$$

dvojna vsota

s-te ničle Besselovih f.

'sodi sinusi' glede na $\phi_0 = \pi/2$

- **Predpostavljam, da ste te veščine dobili drugje…**

# Spet spektralne (FEM) metode

- Seveda nam tovrstne analitične rešitve takoj nakažejo smer implementacije ustreznih numeričnih metod:
  - Močno spominjajo na spektralne metode oziroma metode končnih elementov (Finite Element Method, FEM).
- V 1D smo to spoznali kot:

$$y(x) = \sum_{k=1}^{M} c_k \Psi_k(x)$$

- Z razmislekom, da je smiselno, da imajo funkcije $\Psi_k(x)$ nekaj koristnih lastnosti, kot so:
  - So **linearno neodvisne**,
    - odlično, če tvorijo ortogonalno bazo glede na nek dobro definiran skalarni produkt ( takoj lahko pomislimo na (D)FT … ).
  - Imamo **dovolj gradnikov, da funkcijo poljubno natančno opišemo** ( alternativna 'definicija' baze ) ….
  - **Ustrezajo robnim pogojem** 'avtomatsko' (lastne funkcije danega problema…).

# Galerkinova metoda

- Za naš problem v  več dimenzijah potem lahko zapišemo naš približek rešitve z nastavkom:

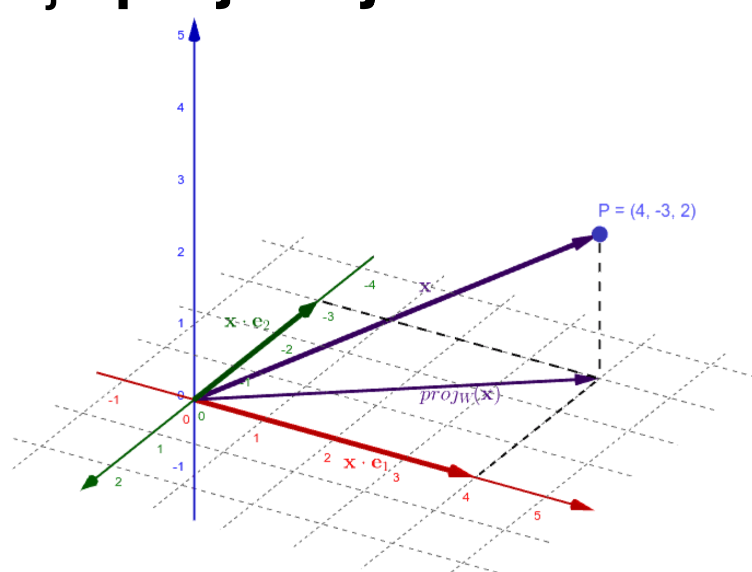
$$\tilde{u}(\xi,\phi) = \sum_{i=1}^{N} a_i \Psi_i(\xi,\phi),$$

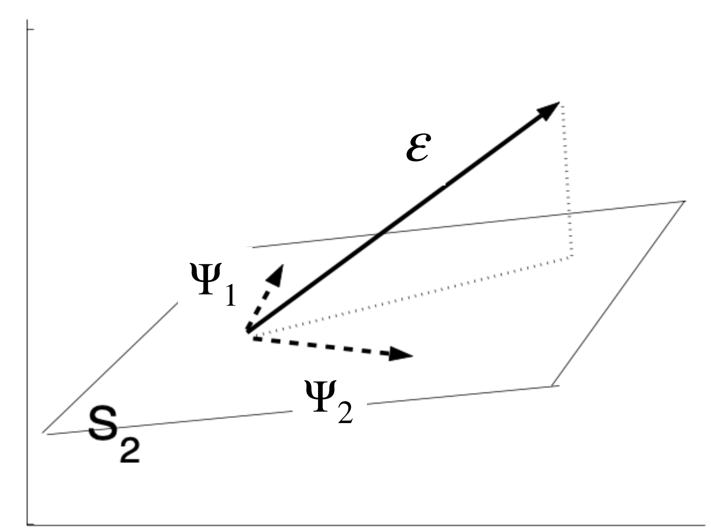
izpolnijo robne pogoje, a preproste …

kar nam seveda ne reši naše Poissonove enačbe popolnoma točno, temveč ostane majhen ostanek (residual) $\varepsilon(\xi,\phi)$:

$$\Delta\tilde{u}(\xi,\phi) + 1 = \varepsilon(\xi,\phi)$$

- Cilj naše numerične metode je spraviti ta ostanek čim bližje ničli….
- Ideja **Galerkina** je bila **geometrijska**: definirati najmanjši možni ostanek s pomočjo **projekcij**.



# Galerkinova metoda

- Ob predpostavki, da so naši gradniki $\Psi_i$ ortogonalne funkcije z definiranim skalarnim produktom:

$$(\Psi_i, \Psi_k) = \int_V \Psi_i \, \Psi_k \, \mathrm{d}V = \delta_{ik}$$

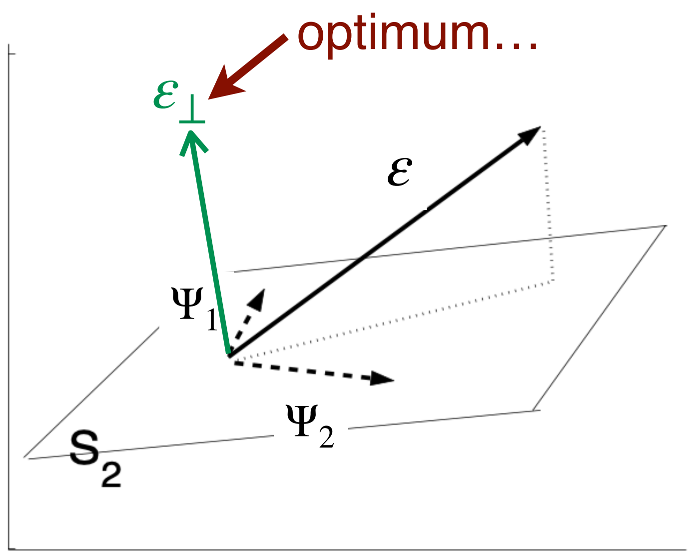
realni funkciji v skalarnem produktu

- To pomeni, da nam teh N funkcij razpenja nek funkcijski (pod)prostor. Kar lahko izberemo (optimiziramo) je, da je $\varepsilon(\xi, \phi)$ ortogonalen na ta podprostor (v samem podprostoru ni napak…):

$$(\varepsilon, \Psi_i) = 0 \, , \qquad i = 1, 2, \ldots, N \, .$$

- S tem smo zmanjšali napako v danem podprostoru funkcij na minimum…

- To je samo ena možnost iz razreda metod **Weighted Residuals Methods.**
  - Lahko bi izbrali druge funkcije $\Omega_k$ z $(\varepsilon, \Omega_k) = 0, \quad k = 1,M$
  - … je pa Galerkinova metoda elegantna..



# Galerkinova metoda

- Za rešitev naše PDE torej vstavimo poskusno funkcijo v PDE:

$$\Delta\tilde{u}(\xi,\phi)+1=\sum_{j=1}^{N}a_j\,\Delta\Psi_j+1=\varepsilon(\xi,\phi)\ .$$

- Da uvedemo Galerkinov pogoj, zgornji izraz skalarno množimo z funkcijo $\Psi_i$ ter zapišemo:

$$\sum_{j=1}^{N}a_j\,(\Delta\Psi_j,\Psi_i)+(1,\Psi_i)=(\varepsilon,\Psi_i),\quad i=1,\ldots,N$$

$(\varepsilon,\Psi_i)=0!$

- Izraz lahko (spet) zapišemo matrično:

$$\sum_{j=1}^{N}A_{ij}a_j=b_i\ ,\qquad i=1,2,\ldots,N$$

$A\vec{a}=\vec{b}$

$$A_{ij}=(\Delta\Psi_j,\Psi_i)\ ,\qquad b_i=(-1,\Psi_i)$$

$N\times N$ matrika

$N$-dim vektor

# Galerkinova metoda

- Seveda se pojavi vprašanje, zakaj je ta metoda dobra v primerjavi z drugimi FEM (npr kolokacijsko/B-splines ipd..).
  - Tako kot pri kolokacijski metodi lahko numerično močno ‘profitiramo’, če so naše ‘bazne’ funkcije **lokalizirane.** Potem postane sistem

$$\sum_{j=1}^{N} A_{ij} a_j = b_i \ , \qquad i = 1, 2, \ldots, N$$

$A\vec{a} = \vec{b}$

$$A_{ij} = (\Delta\Psi_j, \Psi_i) \ , \qquad b_i = (-1, \Psi_i)$$

tri (ali nekaj) diagonalen - in zahtevnosti reda N za reševanje.

- Dodatna prednost proti kolokacijski metodi pa je je v (nekoliko skriti) lastnosti:
  - Zapišimo skalarni produkt v $A_{ij}$ z integralom in uporabimo znane zveze:

$$A_{ij} = (\Delta\Psi_j, \Psi_i) = \int_V \Delta\Psi_j \, \Psi_i \, \mathrm{d}V = \int_V \nabla \cdot \left[\nabla\Psi_j \, \Psi_i\right] \mathrm{d}V - \int_V \left[\nabla\Psi_j \cdot \nabla\,\Psi_i\right] \mathrm{d}V$$

Površinski člen, funkcija $\Psi_i$ je na robu nič!

$$\int_{\partial V} (\nabla\Psi_j)\,\Psi_i \, \mathrm{d}S$$

  - Tako dobimo:

$$A_{ij} = (\Delta\Psi_j, \Psi_i) = -\int_V \left[\nabla\Psi_j \cdot \nabla\,\Psi_i\right] \mathrm{d}V$$

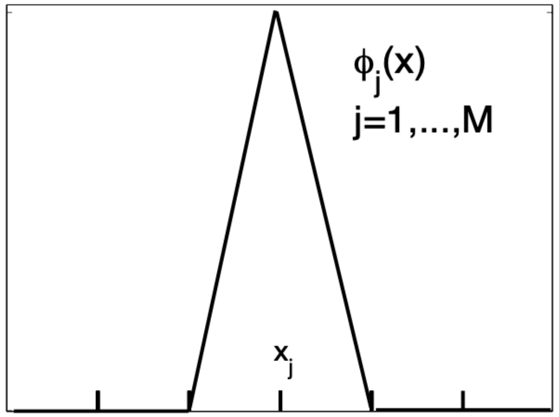
# Galerkinova metoda

- Dobljena zveza:

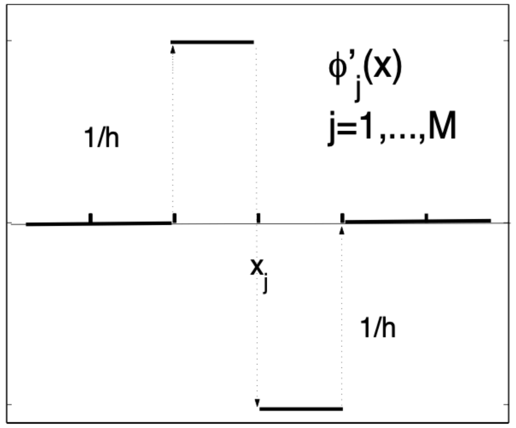
$$A_{ij} = (\Delta\Psi_j, \Psi_i) = -\int_V \left[\nabla\Psi_j \cdot \nabla\,\Psi_i\right] \mathrm{d}V$$

- ima več **dobrodošlih** pomenov:
  - očitno je matrika simetrična,
    - .. uporabimo lahko močne metode numeričnega reševanja…
  - narediti nekaj-diagonalno matriko je preprosto,
    - …poznati moramo samo prve odvode funkcij $\Psi_i$!
  - funkcije $\Psi_i$ so lahko celo nezvezne, morajo biti le integrabilne…
- Metoda torej lahko uporabi preprostejše funkcije od kolokacijske, kar je sploh dobrodošlo v več dimenzijah!
  - Tipična uporaba različnih ‘trikotnih’ funkcij:

$$\phi_j(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|\Delta x_j|}{h}, & x_{j-1} \le x \le x_{j+1} \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$




$$\int_0^1 \phi_j'(x)\phi_k'(x)\,dx = \begin{cases} -\dfrac{1}{h}, & k = j \pm 1 \\ \dfrac{2}{h}, & k = j \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

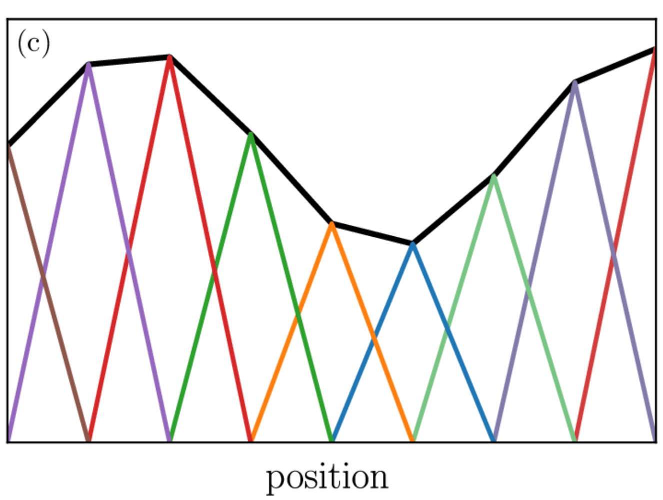


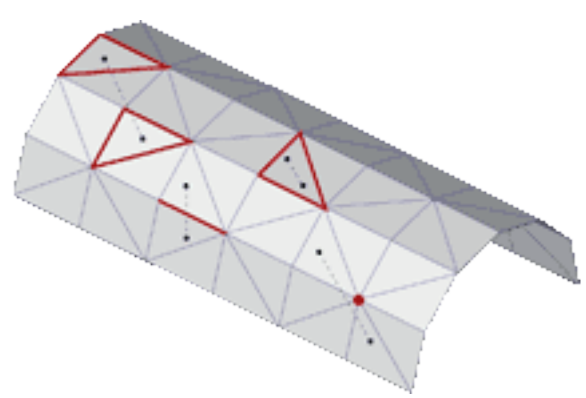
# Galerkinova metoda

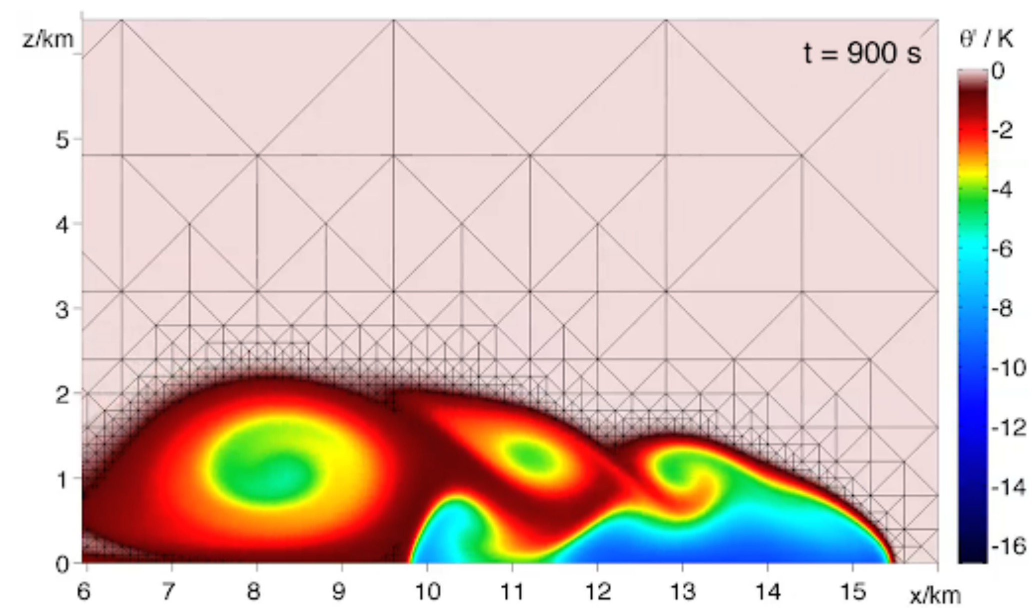
- Dobljena zveza:

$$A_{ij} = (\Delta\Psi_j, \Psi_i) = -\int_V \left[\nabla\Psi_j \cdot \nabla\,\Psi_i\right] \mathrm{d}V$$

- ima več **dobrodošlih** pomenov:
  - očitno je matrika simetrična,
    - .. uporabimo lahko močne metode numeričnega reševanja…
  - narediti nekaj-diagonalno matriko je preprosto,
    - …poznati moramo samo prve odvode funkcij $\Psi_i$!
  - funkcije $\Psi_i$ so lahko celo nezvezne, morajo biti le integrabilne…
- Metoda torej lahko uporabi preprostejše funkcije od kolokacijske, kar je sploh dobrodošlo v več dimenzijah!
  - Tipična uporaba različnih ‘trikotnih’ funkcij:





# Naloga

- S pomočjo Galerkinove metode tako dobimo za naš iskani parameter C:

$$C = -\frac{32}{\pi}\sum_{ij} b_i A_{ij}^{-1} b_j = -\frac{32}{\pi}\,\vec{b}\cdot\left(A^{-1}\,\vec{b}\right) = -\frac{32}{\pi}\,\vec{b}\cdot\vec{a}$$

- V praksi lahko pogledamo le zadnji zapis, pa ugotovimo, da nam **ni potrebno** obračati matrike A, temveč le **rešimo sistem** $A\vec{a} = \vec{b}$ (ceneje)!
- Kar nam še preostane, je izbrati ustrezne bazne funkcije za naš nastavek.
  - Zgledujmo se po analitični rešitvi, pa zapišimo ($m \geq 0$,$n \geq 1$):

$$\Psi_{mn}(\xi,\phi) = \xi^{2m+1}(1-\xi)^n \sin\big((2m+1)\phi\big)$$

Dvojni indeks!

  - Funkcije so ortogonalne po indeksu m, skalarni produkt nam da:

$$(\Psi_{m'n'},\Psi_{mn}) = \int_0^1\int_0^\pi \Psi_{m'n'}\Psi_{mn}\,\xi\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\phi = \frac{\pi}{2}\delta_{m'm}B\left(4+4m,1+n+n'\right)$$

Beta funkcija: scipy.special.beta

$$B(p,q) = \int_0^1 \xi^{p-1}(1-\xi)^{q-1}\mathrm{d}\xi = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

# Naloga

- Analogno lahko poračunamo tudi ostala dva skalarna produkta:

$$A_{(m'n')(mn)} = (\Delta\Psi_{mn}, \Psi_{m'n'}) = -\frac{\pi}{2}\delta_{m'm}\frac{n\,n'(3+4m)}{2+4m+n+n'}B\,(n+n'-1, 3+4m)$$

ortogonalnost po m!

ter:

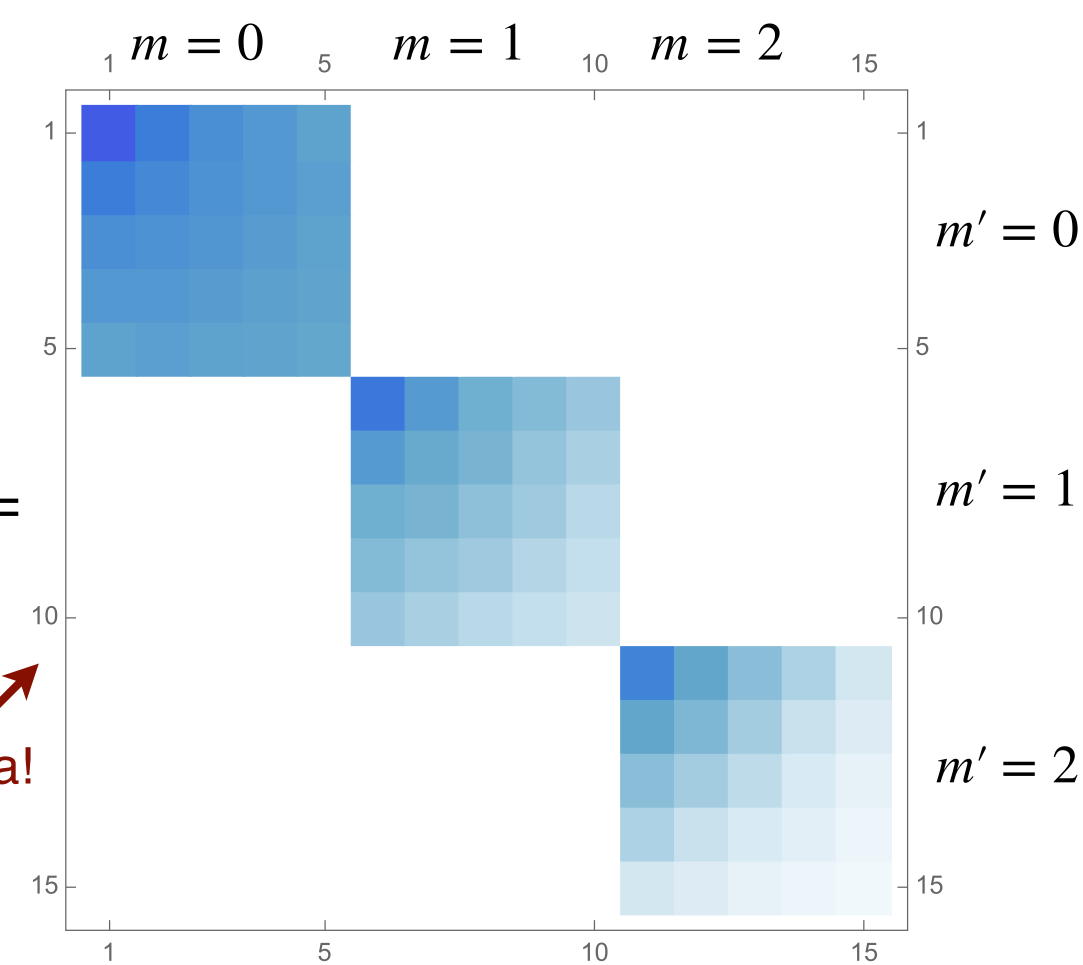
$$b_{(m'n')} = (-1, \Psi_{m'n'}) = -\frac{2}{2m'+1}B\,(2m'+3, n'+1)$$

- Sedaj previdno uredimo indekse v eno-dimenzionalne parametre:

$$(mn) \mapsto j, (m'n') \mapsto i \quad (m \geq 0, n \geq 1)$$

$$\vec{b} = [b_i] = [b_{(mn)}] = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} n=1 \\ \vdots \\ n=N \end{bmatrix} m=0 \\ \begin{bmatrix} n=1 \\ \vdots \\ n=N \end{bmatrix} m=1 \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} n=1 \\ \vdots \\ n=N \end{bmatrix} m=M-1 \end{bmatrix}_{i=M\times N}^{i=1}$$

$$A = A_{ij} = A_{(m'n')(mn)} =$$




blok-diagonalna!
(za vsak m)

# Naloga

- Analogno lahko poračunamo tudi ostala dva skalarna produkta:

$$A_{(m'n')(mn)} = (\Delta\Psi_{mn}, \Psi_{m'n'}) = -\frac{\pi}{2}\delta_{m'm}\frac{n\,n'(3+4m)}{2+4m+n+n'}B\,(n+n'-1, 3+4m)$$

ortogonalnost po m!

ter:

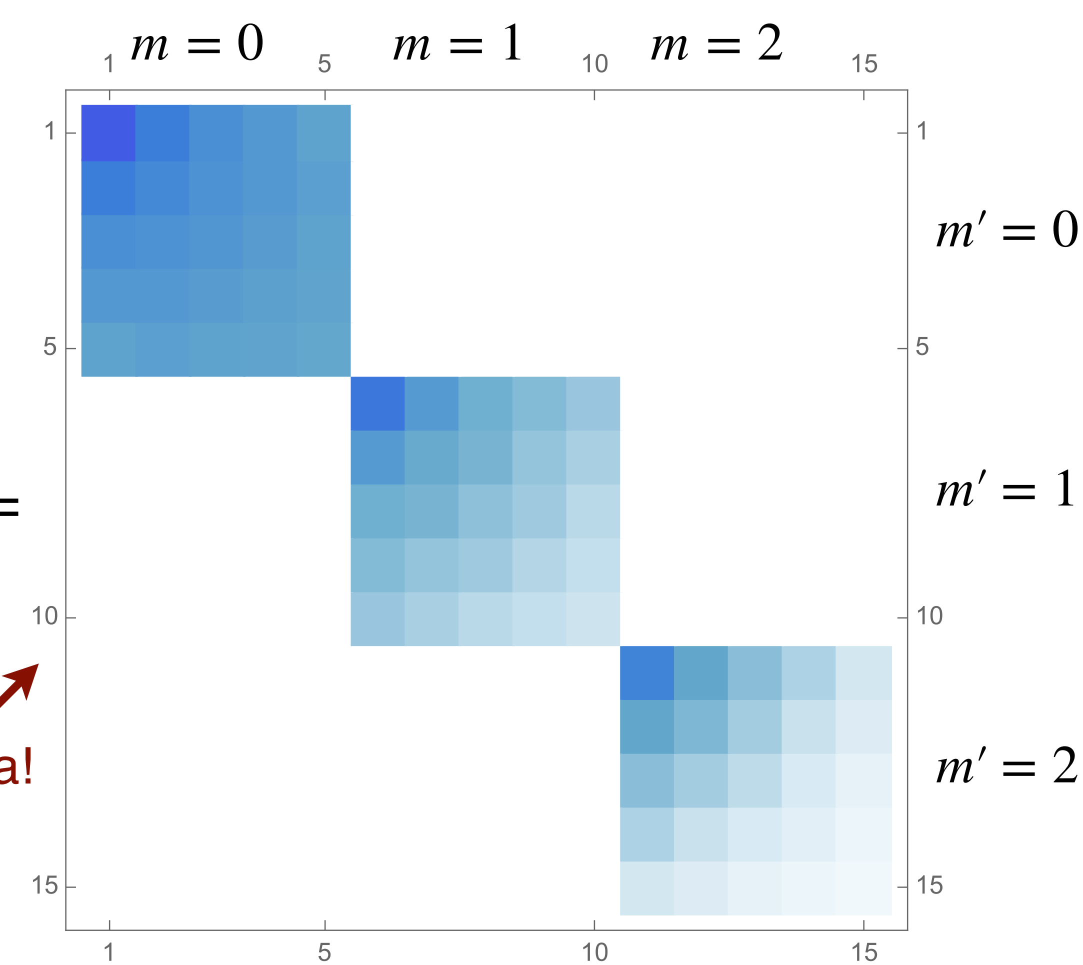
$$b_{(m'n')} = (-1, \Psi_{m'n'}) = -\frac{2}{2m'+1}B\,(2m'+3, n'+1)$$

- Sedaj previdno uredimo indekse v eno-dimenzionalne parametre:

$$(mn) \mapsto j, (m'n') \mapsto i \quad (m \geq 0, n \geq 1)$$

$$\vec{b} = [b_i] = [b_{(m'n')}] = \left[\begin{array}{c} \begin{bmatrix} b_{01} \\ \vdots \\ b_{0N} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{1N} \end{bmatrix} \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} b_{(M-1)1} \\ \vdots \\ b_{(M-1)N} \end{bmatrix} \end{array}\right]_{i=1}^{i=M\times N}$$

$$A = A_{ij} = A_{(m'n')(mn)} =$$




blok-diagonalna!
(za vsak m)

# Opomba

- Za eliptični (Poissonov) tip PDE, lahko učinkovito **razdelimo** problem na:
  - reševanje laplaceove enačbe ob nehomogenih robnih pogojih in
  - reševanje Poissonove enačbe ob homogenih robnih pogojih.
- Če PDE in RP zapišemo v 2D malo splošneje:

$$\Delta u(x,y) \equiv u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = f(x,y), (x,y) \in \Omega$$

$$\mathcal{B}u(x,y) \equiv \alpha(x,y)\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x,y) + \beta(x,y)u(x,y) = g(x,y), \quad (x,y) \in \partial\Omega$$

von Neumannov člen ($\vec{n} \cdot \nabla u$)

- Lahko razdelimo problem na:
  - Homogena PDE (Laplace) z nehomogenimi r.p. :

$$\Delta v(x,y) = 0, \quad (x,y) \in \Omega$$

$$\mathcal{B}\, v(x,y) = g(x,y), \quad (x,y) \in \partial\Omega$$

  - Nehomogena PDE (Poisson) s homogenimi r.p.:

$$\Delta w(x,y) = f(x,y), \quad (x,y) \in \Omega$$
$$\mathcal{B}\, w(x,y) = 0, \quad (x,y) \in \partial\Omega$$

  - S končno rešitvijo $u(x,y) = v(x,y) + w(x,y)$ ! (Pač LDE)

# Dodatna naloga

- Za dodatno nalogo je reševanje linearne hiperbolične valovne enačbe v 1D, ki ga rešujete z Galerkinovo metodo (lahko primerjate še s čim drugim…).

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0$$

- Začetni pogoj naj bo $u(\xi,0) = \sin(\pi\cos\xi)$ za $\xi \in [0,2\pi]$ in s periodičnimi robnimi pogoji.
- Analitična rešitev enačbe je $u(\xi,t) = \sin(\pi\cos(\xi+t))$.
- Nastavek za rešitev je kar končen nabor ravnih valov po kraju (analogno interpretiramo kot DFT):

$$\widetilde{u}(\xi,t) = \sum_{j=-N/2}^{N/2} a_j(t)\Psi_j(\xi), \quad \Psi_j(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ij\xi}$$

- S skalarnim produktom:

$$(\Psi_k,\Psi_j) = \int_0^{2\pi} \Psi_k^*(\xi)\Psi_j(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ik\xi}e^{ij\xi}\,\mathrm{d}\xi = \delta_{jk}$$

dobimo tudi Galerkinov pogoj:

$$\int_0^{2\pi}\left[\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial t} - \frac{\partial\widetilde{u}}{\partial\xi}\right]\Psi_k^*(\xi)\,\mathrm{d}\xi = 0$$

# Dodatna naloga

- Iz Galerkinovega pogoja s pomočjo ortonormalnosti takoj dobimo DE za koeficiente $a_k(t)$, ki so preprosto rešljivi:

$$\frac{\mathrm{d}a_k}{\mathrm{d}t} - \mathrm{i}k a_k = 0\,, \qquad k = -N/2, \ldots, N/2\,.$$

- Začetni pogoj inkorporiramo v zgornjo enačbo iz razvoja/projekcije:

$$a_k(0) = \int_0^{2\pi} u(\xi, 0)\Psi_k^*(\xi)\,\mathrm{d}\xi\,.$$

- Slednjo lahko izračunaš numerično, končna analitična rešitev pa je:

$$a_k(t) = \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) J_k(\pi)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\,.$$

Besselovi funkciji 1. vrste … in 2. vrste

- Za negativne indekse Besselovih funkcij uporabi: $J_{-\nu} = \cos(\nu\pi)J_\nu - \sin(\nu\pi)Y_\nu$

- Dobljeni rezultat lahko primerjaš tudi s kakšnim diferenčnim pristopom, na primer kar:

$$\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{k} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{h}$$

$$u_{i+1,j} = u_{i,j} + (k/h)(u_{i,j+1} - u_{i,j})$$