



ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

Κεραίες και Διαδοση Αναφορά

Εργασία 1

Διακολουκάς Δημήτριος
ΑΕΜ 10642

Email: ddiakolou@ece.auth.gr

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή στην Εργασία	3
2	Διδιάστατες Στοιχειοκεραίες	4
2.1	Περιγραφή Προβλήματος	4
2.2	Οριζόντια και Κατακόρυφα Διαγράμματα Ακτινοβολίας	4
2.2.1	Θεωρητική ανάλυση	4
2.2.2	Πίνακας εξισώσεων για κάθε ζεύγος γωνιών	7
2.2.3	Υλοποίηση σε MATLAB	8
2.2.4	Αποτελέσματα και Συμπεράσματα	8
2.3	Τρισδιάστατο Στερεό Ακτινοβολίας	11
2.3.1	Υλοποίηση σε MATLAB	11
2.3.2	Αποτελέσματα Οπτικοποίησης	12
2.4	Υπολογισμός Κατευθυντικότητας	13
2.4.1	Θεωρητική ανάλυση της κατευθυντικότητας	13
2.4.2	Υπολογιστική κατευθυντικότητα από τον ορισμό	16
2.4.3	Υλοποίηση σε MATLAB	16
2.4.4	Αποτελέσματα και Σύγκριση	17
2.5	Αχροπυροδοτική Στοιχειοκεραία και Στοιχειοκεραία Hansen-Woodyard	18
2.5.1	Θεωρητική ανάλυση αχροπυροδοτικών διατάξεων	18
2.5.2	Υπολογιστική κατευθυντικότητα από τον ορισμό	20
2.5.3	Υλοποίηση σε MATLAB	21
2.5.4	Αποτελέσματα οπτικοποίησης	22
2.5.5	Αποτελέσματα κατευθυντικότητας και σύγκριση	22
3	Κατευθυντικότητα γραμμικής ανομοιόμορφης στοιχειοκεραίας	24
3.1	Περιγραφή Προβλήματος	24
3.2	Απόδειξη της κατευθυντικότητας μη ομοιόμορφης γραμμικής στοιχειοκεραίας	24
3.2.1	Συντελεστής στοιχειοκεραίας	25
3.2.2	Διάγραμμα ακτινοβολίας	25
3.2.3	Ολική ακτινοβολούμενη ισχύς	25
3.2.4	Υπολογισμός του ολοκληρώματος	26
3.2.5	Ολική ισχύς σε τελική μορφή	26
3.2.6	Κατευθυντικότητα	26
4	Σχεδίαση ανομοιόμορφης στοιχειοκεραίας με τεχνικές βελτιστοποίησης	28
4.1	Περιγραφή προβλήματος	28
4.2	Μεθοδολογία Βελτιστοποίησης για τη Σχεδίαση Ανομοιόμορφης Στοιχειοκεραίας	28

4.2.1	Βήματα Προσέγγισης του Προβλήματος	29
4.2.2	Ρύθμιση και Εκτέλεση του Αλγορίθμου GA	31
4.2.3	Βέλτιστα Ρεύματα που Προέκυψαν	33
4.2.4	Ανάλυση των Διαγραμμάτων Ακτινοβολίας	34
4.2.5	Συγκριτική Ανάλυση Διαφορετικών Κατανομών Ρευμάτων	36
4.3	Υπολογισμός κατευθυντικότητας βέλτιστων κατανομών ρευμάτων	38
4.3.1	Θεωρητικό υπόβαθρο	38
4.3.2	Υλοποίηση της σχέσης κατευθυντικότητας σε MATLAB	39
4.3.3	Αποτελέσματα	40
4.3.4	Παρατηρήσεις και συμπεράσματα	40
4.4	Multi-Objective Optimization για Σχεδίαση Ανομοιόμορφης Στοιχειοκεραίας	41
4.4.1	Διατύπωση των δύο αντικειμενικών συναρτήσεων	41
4.4.2	Ρύθμιση του gamultiobj και Υπολογισμός του Μετώπου Pareto	43
4.4.3	Επιλογή Αντιπροσωπευτικών Λύσεων από το Μέτωπο Pareto	46
4.4.4	Ερμηνεία του Μετώπου Pareto	46
5	Σχεδίαση στοιχειοκεραίας με υπολογισμό της αντίστασης εισόδου	48

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή στην Εργασία

Η παρούσα εργασία έχει ως αντικείμενο τη μελέτη, ανάλυση και σχεδίαση στοιχειοκεραιών με τη χρήση υπολογιστικών εργαλείων. Στόχος είναι η κατανόηση της συμπεριφοράς γραμμικών και διδιάστατων στοιχειοκεραιών, η διερεύνηση της κατευθυντικότητάς τους, καθώς και η εφαρμογή τεχνικών βελτιστοποίησης και υπολογιστικών μεθόδων για τον έλεγχο της ακτινοβολίας και της αντίστασης εισόδου. Η εργασία συνδυάζει θεωρητική ανάλυση και αριθμητικούς υπολογισμούς, με έμφαση στη σύνδεση μεταξύ ρευματικής κατανομής, γεωμετρίας και τελικού διαγράμματος ακτινοβολίας.

Πρακτικά, η εργασία απαιτεί:

- υπολογισμό και σχεδίαση διαγραμμάτων ακτινοβολίας (2D και 3D) για διαφορετικές γωνίες μεγίστου,
- αριθμητικό και αναλυτικό υπολογισμό κατευθυντικότητας και σύγκρισή τους,
- ανάπτυξη κώδικα για τη μελέτη της αντίστασης εισόδου και των αμοιβαίων αντιστάσεων μεταξύ διπόλων,
- εφαρμογή βελτιστοποίησης για τον έλεγχο πλευρικών λοβών σε ανομοιόμορφες στοιχειοκεραίες,
- παραμετρική διερεύνηση της προσαρμογής σε γραμμή $50\ \Omega$ μέσω του συντελεστή ανάκλασης.

Η αναφορά οργανώνεται ως εξής:

- Στο Κεφάλαιο 2 μελετάται μια διδιάστατη στοιχειοκεραία, υπολογίζονται τα οριζόντια, κατακόρυφα και τρισδιάστατα διαγράμματα ακτινοβολίας και εξετάζεται η κατευθυντικότητα τόσο αναλυτικά όσο και υπολογιστικά.
- Στο Κεφάλαιο 3 παρουσιάζεται η θεωρητική εξαγωγή της κατευθυντικότητας για ανομοιόμορφη γραμμική στοιχειοκεραία, αναδεικνύοντας τη σημασία της κατανομής ρεύματος.
- Στο Κεφάλαιο 4 εφαρμόζονται τεχνικές βελτιστοποίησης για τον έλεγχο των πλευρικών λοβών και συγκρίνονται τα αποτελέσματα με την ομοιόμορφη στοιχειοκεραία.
- Στο Κεφάλαιο 5 μελετάται η αντίσταση εισόδου στοιχειοκεραιών με πραγματικά δίπολα, εξετάζονται διατάξεις με παρασιτικά στοιχεία και πραγματοποιείται παραμετρική ανάλυση της προσαρμογής σε γραμμή $50\ \Omega$.

Κεφάλαιο 2

Διδιάστατες Στοιχειοκεραίες

2.1 Περιγραφή Προβλήματος

Στο παρόν κεφάλαιο εξετάζεται μια διδιάστατη στοιχειοκεραία αποτελούμενη από 24×12 κατακόρυφα δίπολα $\lambda/2$, διατεταγμένα στους άξονες x και z με ίσες αποστάσεις d .

Στόχος είναι να διερευνηθεί πώς η κατεύθυνση του μέγιστου της ακτινοβολίας (θ_m, ϕ_m) επηρεάζει το οριζόντιο και το κατακόρυφο διάγραμμα, καθώς και το συνολικό στερεό ακτινοβολίας της κεραίας. Για τον σκοπό αυτό αναπτύσσεται κώδικας που υπολογίζει τα αντίστοιχα διαγράμματα για διάφορους συνδυασμούς γωνιών μεγίστου, ενώ στη συνέχεια υπολογίζεται η κατευθυντικότητα τόσο αναλυτικά (με δύο διαφορετικές μεθόδους) όσο και υπολογιστικά μέσω αριθμητικής ολοκλήρωσης.

Τέλος, εξετάζεται η λειτουργία της κεραίας ως ακροπυροδοτικής, με μέγιστο ακτινοβολίας προς τον άξονα x , καθώς και η ειδική περίπτωση σχεδίασης Hansen-Woodyard. Οι δύο αυτές υλοποιήσεις επιτρέπουν τη μελέτη της επίδρασης της φασικής διάταξης των στοιχείων στην κατευθυντικότητα και στη διαμόρφωση του στερεού ακτινοβολίας.

2.2 Οριζόντια και Κατακόρυφα Διαγράμματα Ακτινοβολίας

Στο ερώτημα (α) ζητείται η σχεδίαση του οριζόντιου διαγράμματος ακτινοβολίας (συναρτήσει του ϕ για σταθερό θ) και του κατακόρυφου διαγράμματος (συναρτήσει του θ στο επίπεδο του μεγίστου) για μια διδιάστατη στοιχειοκεραία 24×12 διπόλων $\lambda/2$ με αποστάσεις $d = \lambda/2$ και μέγιστη εκπομπή προς διάφορες διευθύνσεις (θ_m, ϕ_m) .

2.2.1 Θεωρητική ανάλυση

Θεωρούμε διδιάστατη στοιχειοκεραία με

- $N_x = 24$ στοιχεία κατά τον άξονα x ,
- $N_z = 12$ στοιχεία κατά τον άξονα z ,
- ίσες αποστάσεις d μεταξύ γειτονικών στοιχείων και στους δύο άξονες,
- συχνότητα f και μήκος κύματος $\lambda = c/f$,

- κυματικό αριθμό $k = \frac{2\pi}{\lambda}$.

Η ένταση του πεδίου (πλάτος) στην κατεύθυνση (θ, ϕ) γράφεται ως *απόλυτη τιμή* του γινομένου διαγράμματος στοιχείου και παραγόντων στοιχειοκεραίας (array factors):

$$E(\theta, \phi) = |E_0(\theta, \phi) AF_x(\theta, \phi) AF_z(\theta, \phi)|.$$

Για ιδανικό κατακόρυφο δίπολο $\lambda/2$, το διάγραμμα του στοιχείου ως προς τη γωνία θ (πλάτος πεδίου) λαμβάνεται όπως στον κώδικα:

$$E_0(\theta) = \left| \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} \right|,$$

με κατάλληλη αντιμετώπιση της ιδιαιτερότητας στο $\theta = 0$ (στον κώδικα τίθεται $E_0(0) = 0$).

Ο παράγοντας της στοιχειοκεραίας μιας ορθογωνικής διάταξης μπορεί να γραφεί ως γινόμενο δύο μονοδιάστατων παραγόντων, ενός κατά x και ενός κατά z :

$$AF(\theta, \phi) = AF_x(\theta, \phi) AF_z(\theta, \phi).$$

Για τον άξονα x θεωρούμε N_x στοιχεία σε αποστάσεις d και προοδευτική φασική διαφορά δ_x μεταξύ γειτονικών στοιχείων. Τότε:

$$AF_x(\theta, \phi) = \sum_{n=0}^{N_x-1} e^{jn[kd \sin \theta \cos \phi + \delta_x]}.$$

Ορίζοντας

$$\psi_x(\theta, \phi) = kd \sin \theta \cos \phi + \delta_x,$$

η κλειστή μορφή για το πλάτος (απόλυτη τιμή) του παράγοντα κατά x είναι

$$|AF_x(\theta, \phi)| = \left| \frac{\sin\left(\frac{N_x \psi_x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\psi_x}{2}\right)} \right|.$$

Ανάλογα, για τον άξονα z με N_z στοιχεία και προοδευτική φασική διαφορά δ_z :

$$AF_z(\theta, \phi) = \sum_{m=0}^{N_z-1} e^{jm[kd \cos \theta + \delta_z]},$$

με

$$\psi_z(\theta) = kd \cos \theta + \delta_z,$$

οπότε το πλάτος του παράγοντα κατά z δίνεται από

$$|AF_z(\theta, \phi)| = \left| \frac{\sin\left(\frac{N_z \psi_z}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\psi_z}{2}\right)} \right|.$$

Για να επιτευχθεί μέγιστο στο διάγραμμα ακτινοβολίας σε συγκεκριμένες γωνίες, απαιτείται οι φασικές συνιστώσες ψ_x και ψ_z να μηδενίζονται στη διεύθυνση (θ_m, ϕ_m) . Λύνοντας τις σχέσεις

$$\psi_x(\theta_m, \phi_m) = kd \sin \theta_m \cos \phi_m + \delta_x = 0, \quad \psi_z(\theta_m) = kd \cos \theta_m + \delta_z = 0,$$

ως προς τις προοδευτικές φάσεις δ_x και δ_z , προκύπτουν οι εκφράσεις

$$\delta_x = -kd \sin \theta_m \cos \phi_m, \quad \delta_z = -kd \cos \theta_m,$$

οι οποίες υλοποιούνται στον κώδικα μέσω των μεταβλητών `delta_x` και `delta_z` για κάθε ζεύγος γωνιών στόχευσης (θ_m, ϕ_m) .

Στο ερώτημα (α) εξετάζονται δύο τύποι τομών:

- **Οριζόντιο διάγραμμα ακτινοβολίας:** σταθεροποιούμε $\theta = \theta_{\text{cut}} = 90^\circ$ και μεταβάλλουμε το $\phi \in [0, 360^\circ]$. Στην περίπτωση αυτή:

$$\psi_x(\phi) = kd \cos \phi + \delta_x, \quad \psi_z = \delta_z,$$

ενώ το διάγραμμα στοιχείου στη γωνία θ_{cut} είναι

$$E_0(\theta_{\text{cut}}) = \left| \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta_{\text{cut}}\right)}{\sin \theta_{\text{cut}}} \right|.$$

Το πλάτος του οριζόντιου διαγράμματος, όπως υπολογίζεται και στον κώδικα, είναι:

$$E_{\text{hor}}(\phi) = |E_0(\theta_{\text{cut}})| |AF_x(\theta_{\text{cut}}, \phi)| |AF_z(\theta_{\text{cut}}, \phi)|.$$

- **Κατακόρυφο διάγραμμα ακτινοβολίας:** σταθεροποιούμε το επίπεδο ως προς το ϕ (π.χ. $\phi = \phi_m$ για την «μπροστινή» κατεύθυνση και $\phi = \phi_m + 180^\circ$ για την «πίσω») και μεταβάλλουμε το $\theta \in [0, 180^\circ]$. Έτσι:

$$\psi_x(\theta) = kd \sin \theta \cos \phi_{\text{plane}} + \delta_x, \quad \psi_z(\theta) = kd \cos \theta + \delta_z,$$

και το διάγραμμα στοιχείου είναι

$$E_0(\theta) = \left| \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} \right|.$$

Το πλάτος του κατακόρυφου διαγράμματος δίνεται από

$$E_{\text{vert}}(\theta) = |E_0(\theta)| |AF_x(\theta, \phi_{\text{plane}})| |AF_z(\theta, \phi_{\text{plane}})|.$$

Τέλος, τα διαγράμματα κανονικοποιούνται ως προς τη μέγιστη τιμή του μέτρου, ώστε

$$\tilde{E}(\theta, \phi) = \frac{E(\theta, \phi)}{\max_{\theta, \phi} E(\theta, \phi)},$$

όπου $E(\theta, \phi) \geq 0$ είναι ήδη το πλάτος (απόλυτη τιμή) του πεδίου.

2.2.2 Πίνακας εξισώσεων για κάθε ζεύγος γωνιών

Με δεδομένο ότι $d = \lambda/2$ και $k = 2\pi/\lambda$, ισχύει $kd = \pi$ και οι προοδευτικές φάσεις προκύπτουν από

$$\delta_x = -\pi \sin \theta_m \cos \phi_m, \quad \delta_z = -\pi \cos \theta_m.$$

Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται οι τιμές των δ_x , δ_z και οι αντίστοιχοι φασικοί όροι για το οριζόντιο και το κατακόρυφο διάγραμμα (εμπρόσθια τομή) για κάθε ζεύγος (θ_m, ϕ_m) που χρησιμοποιείται στον κώδικα.

Πίνακας εξισώσεων για οριζόντιο διάγραμμα

Πίνακας 2.1: Φασικοί όροι και προοδευτικές φάσεις για το οριζόντιο διάγραμμα ($\theta = 90^\circ$).

*	(θ_m, ϕ_m)	Προοδευτικές φάσεις	Οριζόντιο διάγραμμα
1	$(90^\circ, 90^\circ)$	$\delta_x = 0 \quad \delta_z = 0$	$\psi_x = \pi \cos \phi \quad \psi_z = 0$
2	$(90^\circ, 60^\circ)$	$\delta_x = -\frac{\pi}{2} \quad \delta_z = 0$	$\psi_x = \pi \cos \phi - \frac{\pi}{2} \quad \psi_z = 0$
3	$(90^\circ, 30^\circ)$	$\delta_x = -\frac{\sqrt{3}\pi}{2} \quad \delta_z = 0$	$\psi_x = \pi \cos \phi - \frac{\sqrt{3}\pi}{2} \quad \psi_z = 0$
4	$(60^\circ, 90^\circ)$	$\delta_x = 0 \quad \delta_z = -\frac{\pi}{2}$	$\psi_x = \pi \cos \phi \quad \psi_z = -\frac{\pi}{2}$
5	$(60^\circ, 60^\circ)$	$\delta_x = -\frac{\sqrt{3}\pi}{4} \quad \delta_z = -\frac{\pi}{2}$	$\psi_x = \pi \cos \phi - \frac{\sqrt{3}\pi}{4} \quad \psi_z = -\frac{\pi}{2}$
6	$(60^\circ, 30^\circ)$	$\delta_x = -\frac{3\pi}{4} \quad \delta_z = -\frac{\pi}{2}$	$\psi_x = \pi \cos \phi - \frac{3\pi}{4} \quad \psi_z = -\frac{\pi}{2}$

Πίνακας εξισώσεων για κατακόρυφο διάγραμμα (εμπρόσθια τομή)

Πίνακας 2.2: Φασικοί όροι και προοδευτικές φάσεις για το κατακόρυφο διάγραμμα ($\phi = \phi_m$).

*	(θ_m, ϕ_m)	Προοδευτικές φάσεις	Κατακόρυφο διάγραμμα (μπροστά)
1	$(90^\circ, 90^\circ)$	$\delta_x = 0 \quad \delta_z = 0$	$\psi_x = 0 \quad \psi_z = \pi \cos \theta$
2	$(90^\circ, 60^\circ)$	$\delta_x = -\frac{\pi}{2} \quad \delta_z = 0$	$\psi_x = \pi \sin \theta \cos 60^\circ - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}(\sin \theta - 1) \quad \psi_z = \pi \cos \theta$
3	$(90^\circ, 30^\circ)$	$\delta_x = -\frac{\sqrt{3}\pi}{2} \quad \delta_z = 0$	$\psi_x = \pi \sin \theta \cos 30^\circ - \frac{\sqrt{3}\pi}{2} = \frac{\sqrt{3}\pi}{2}(\sin \theta - 1) \quad \psi_z = \pi \cos \theta$
4	$(60^\circ, 90^\circ)$	$\delta_x = 0 \quad \delta_z = -\frac{\pi}{2}$	$\psi_x = 0 \quad \psi_z = \pi \cos \theta - \frac{\pi}{2}$
5	$(60^\circ, 60^\circ)$	$\delta_x = -\frac{\sqrt{3}\pi}{4} \quad \delta_z = -\frac{\pi}{2}$	$\psi_x = \pi \sin \theta \cos 60^\circ - \frac{\sqrt{3}\pi}{4} = \frac{\pi}{4}(2 \sin \theta - \sqrt{3}) \quad \psi_z = \pi \cos \theta - \frac{\pi}{2}$
6	$(60^\circ, 30^\circ)$	$\delta_x = -\frac{3\pi}{4} \quad \delta_z = -\frac{\pi}{2}$	$\psi_x = \pi \sin \theta \cos 30^\circ - \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{4}(2\sqrt{3} \sin \theta - 3) \quad \psi_z = \pi \cos \theta - \frac{\pi}{2}$

2.2.3 Υλοποίηση σε MATLAB

Η παραπάνω θεωρητική ανάλυση υλοποιείται σε MATLAB με τα εξής βασικά βήματα:

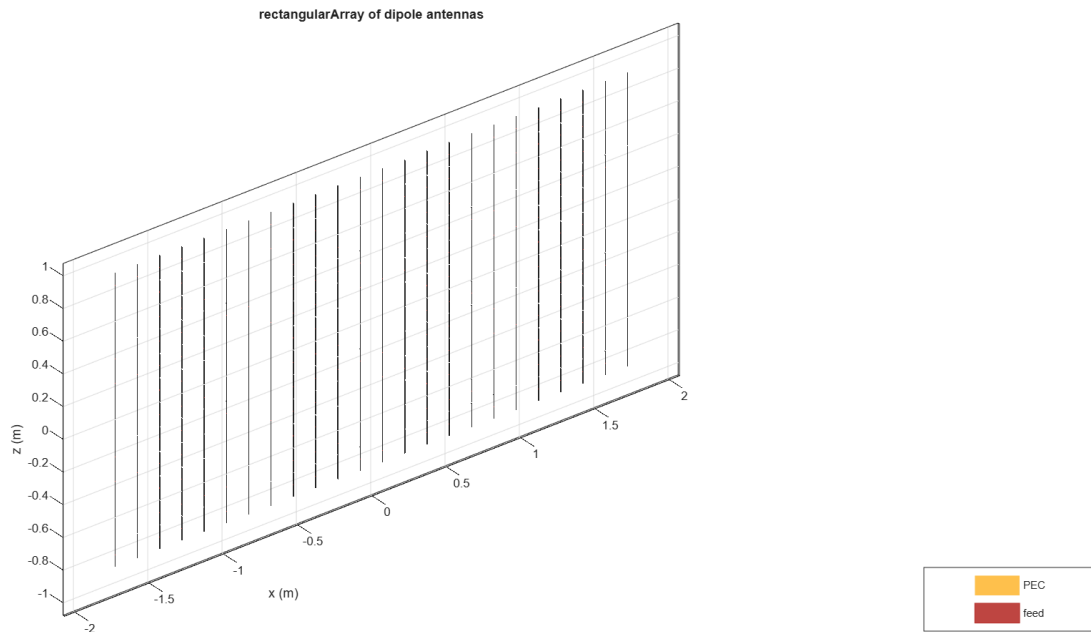
- Ορίζονται τα φυσικά μεγέθη f , $\lambda = c/f$, $d = \lambda/2$ και $k = 2\pi/\lambda$.
- Δημιουργείται αντικείμενο `rectangularArray` με στοιχείο δίπολο $\lambda/2$.
- Ορίζονται τα πλέγματα σάρωσης `phi_scan` και `theta_scan`.
- Υπολογίζονται οι προοδευτικές φασικές διαφορές `delta_x` και `delta_z` σύμφωνα με τις θεωρητικές σχέσεις.
- Υπολογίζονται οι `psi_x` και `psi_z` και στη συνέχεια οι `AF_x` και `AF_z` μέσω της συνάρτησης `get_AF`.
- Υπολογίζεται το διάγραμμα του στοιχείου $E_0(\theta)$.
- Προκύπτουν τα ολικά διαγράμματα οριζόντιας και κατακόρυφης τομής και κανονικοποιούνται.
- Τα αποτελέσματα απεικονίζονται με `polarplot` σε διαγράμματα 2×3 .

Με αυτόν τον τρόπο, το ερώτημα (α) υλοποιεί πλήρως τη θεωρία του παράγοντα στοιχειοκεραίας για διδιάστατη διάταξη, επιτρέποντας την οπτική σύγκριση των διαγραμμάτων ακτινοβολίας για διαφορετικές διευθύνσεις μέγιστου (θ_m, ϕ_m).

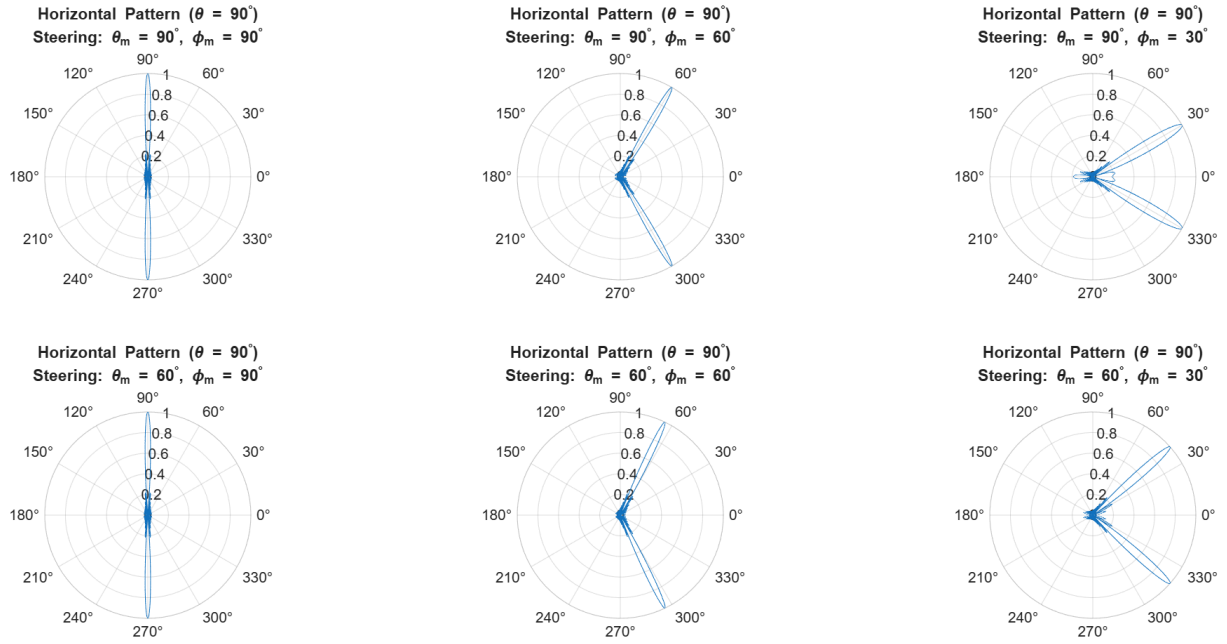
2.2.4 Αποτελέσματα και Συμπεράσματα

Αποτελέσματα Οπτικοποίησης

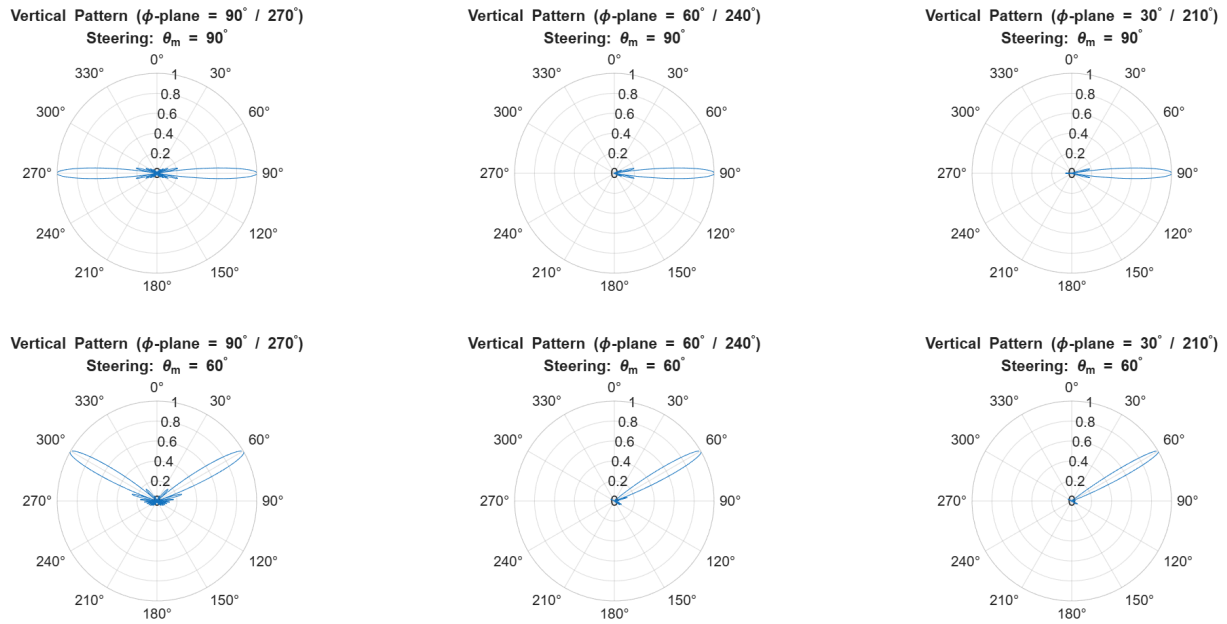
Στο πλαίσιο του ερωτήματος (α) παρήχθησαν τα ακόλουθα διαγράμματα οπτικοποίησης των αποτελεσμάτων του κώδικα.



Σχήμα 2.1: Γεωμετρία της διδιάστατης στοιχειοκεραίας 24×12 κατακόρυφων διπόλων $\lambda/2$ στο επίπεδο $x-z$.



Σχήμα 2.2: Οριζόντια διαγράμματα ακτινοβολίας για $\theta = 90^\circ$ και για όλους τους συνδυασμούς γωνιών μεγίστου $(\theta_m, \phi_m) \in \{90^\circ, 60^\circ\} \times \{90^\circ, 60^\circ, 30^\circ\}$.



Σχήμα 2.3: Κατακόρυφα διαγράμματα ακτινοβολίας για επίπεδα $\phi = \phi_m$ και $\phi = \phi_m + 180^\circ$ και για όλους τους συνδυασμούς γωνιών μεγίστου $(\theta_m, \phi_m) \in \{90^\circ, 60^\circ\} \times \{90^\circ, 60^\circ, 30^\circ\}$.

Παρατηρήσεις και Συμπεράσματα

Με βάση τα παραπάνω διαγράμματα και τις θεωρητικές σχέσεις για τους φασικούς όρους ψ_x , ψ_z και τις προοδευτικές φάσεις δ_x , δ_z , προκύπτουν οι εξής παρατηρήσεις:

Οριζόντιο διάγραμμα ακτινοβολίας ($\theta = 90^\circ$):

- Το οριζόντιο διάγραμμα δείχνει σαφώς τον λοβό μεγίστου να στρέφεται προς τη γωνία ϕ_m για κάθε περίπτωση.
- Για $(\theta_m = 90^\circ, \phi_m = 90^\circ)$, ο μέγιστος λοβός εμφανίζεται στις 90° , όπως αναμένεται.
- Για $\phi_m = 60^\circ$ και $\phi_m = 30^\circ$, ο κύριος λοβός στρέφεται επίσης στις αντίστοιχες κατευθύνσεις, όπως επιβάλλουν οι φασικές μετατοπίσεις δ_x .
- Η συμμετρία του διαγράμματος είναι εμφανής ως προς τον άξονα z , λόγω της διάταξης των διπόλων και της ομοιόμορφης απόστασης d .

Κατακόρυφο διάγραμμα ακτινοβολίας:

- Το κατακόρυφο διάγραμμα υπολογίζεται για επίπεδα $\phi = \phi_m$ (εμπρόσθια περιοχή) και $\phi = \phi_m + 180^\circ$ (οπίσθια περιοχή), τα οποία ενώνονται ώστε να σχηματίζεται πλήρης μεταβολή γωνίας 0° – 360° .
- Για $\theta_m = 90^\circ$, η μέγιστη ακτινοβολία βρίσκεται στο οριζόντιο επίπεδο, όπως αναμένεται για κατακόρυφα δίπολα.
- Για $\theta_m = 60^\circ$, παρατηρείται καθαρή μετατόπιση του κύριου λοβού προς μικρότερες τιμές θ , που σημαίνει ότι το διάγραμμα στρέφεται ανηφορικά, όπως προβλέπουν οι εξισώσεις διεύθυνσης μέσω των φάσεων δ_x και δ_z .
- Το οπίσθιο διάγραμμα ($\phi = \phi_m + 180^\circ$) εμφανίζει λοβούς με μικρό πλάτος, ως αποτέλεσμα της κατανομής ρευμάτων που προκύπτει από την προοδευτική φασική μετατόπιση.

Συνολικά, τα αποτελέσματα επιβεβαιώνουν ότι η επιλογή των προοδευτικών φάσεων

$$\delta_x = -kd \sin \theta_m \cos \phi_m, \quad \delta_z = -kd \cos \theta_m$$

οδηγεί πράγματι σε μέγιστο ακτινοβολίας στη ζητούμενη διεύθυνση (θ_m, ϕ_m) και ότι η διαδικασία στοιχειοκεραία μπορεί να στρέψει τη δέσμη της με μεγάλη ακρίβεια, όπως προβλέπεται από τη θεωρία του παράγοντα στοιχειοκεραίας.

2.3 Τρισδιάστατο Στερεό Ακτινοβολίας

Στο ερώτημα (β) ζητείται η τρισδιάστατη απεικόνιση του στερεού ακτινοβολίας της ίδιας διδιάστατης στοιχειοκεραίας για όλους τους συνδυασμούς γωνιών μεγίστου (θ_m, ϕ_m) του ερωτήματος (α).

2.3.1 Υλοποίηση σε MATLAB

Για την παραγωγή του 3D στερεού ακτινοβολίας χρησιμοποιείται ο ίδιος παράγοντας στοιχειοκεραίας και το ίδιο διάγραμμα στοιχείου όπως στο (α), αλλά πλέον σε πλήρες σφαιρικό πλέγμα γωνιών:

- Ορίζεται σφαιρικό πλέγμα γωνιών

$$\theta \in (0, \pi), \quad \phi \in [0, 2\pi),$$

μέσω των thetaGrid, phiGrid και της meshgrid, αποφεύγοντας τα $\theta = 0, \pi$ για αριθμητικούς λόγους.

- Για κάθε ζεύγος γωνιών στόχευσης (θ_m, ϕ_m) υπολογίζονται οι φασικές μετατοπίσεις δ_x και δ_z όπως στο (α) και οι φασικοί όροι

$$\psi_x = kd \sin \theta \cos \phi + \delta_x, \quad \psi_z = kd \cos \theta + \delta_z.$$

- Υπολογίζονται οι μονοδιάστατοι παράγοντες AF_x, AF_z μέσω της get_AF συνάρτησης όπως ακριβώς και στο ερώτημα (α) και το διάγραμμα στοιχείου

$$EF(\theta) = \left| \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} \right|.$$

- Το συνολικό πλάτος πεδίου δίνεται από

$$E(\theta, \phi) = |AF_x| |AF_z| EF,$$

και κανονικοποιείται ως

$$E_{\text{norm}}(\theta, \phi) = \frac{E(\theta, \phi)}{\max_{\theta, \phi} E(\theta, \phi)}.$$

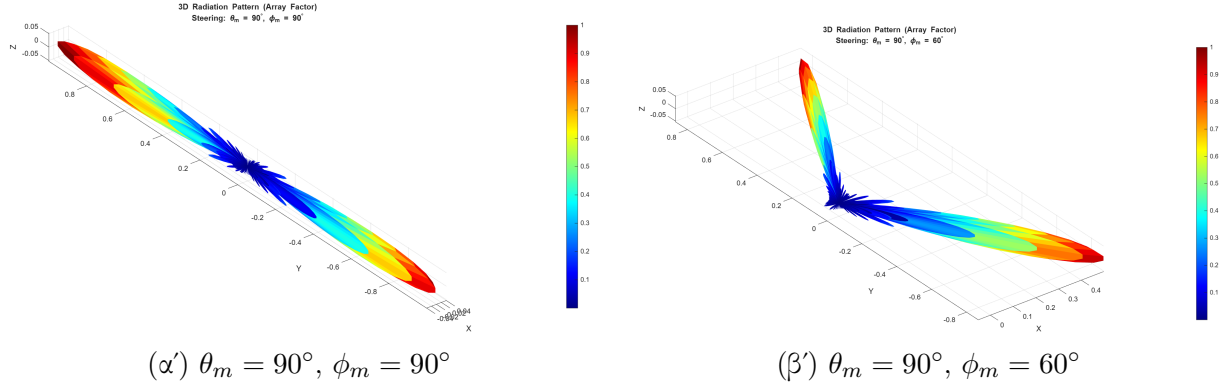
- Για την τρισδιάστατη απεικόνιση, οι τιμές E_{norm} προβάλλονται σε καρτεσιανές συντεταγμένες:

$$X = E_{\text{norm}} \sin \theta \cos \phi, \quad Y = E_{\text{norm}} \sin \theta \sin \phi, \quad Z = E_{\text{norm}} \cos \theta,$$

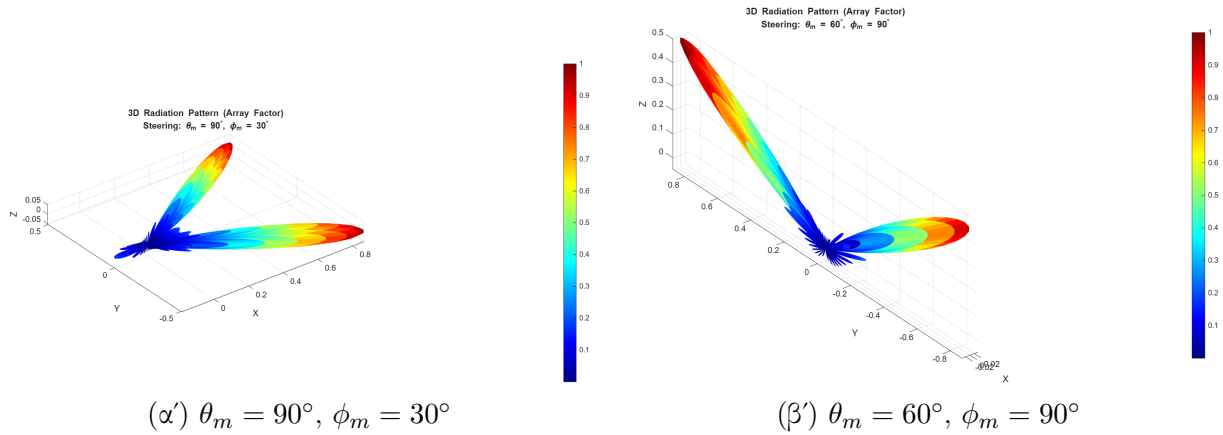
και σχεδιάζονται με surf ως επιφάνεια με χρωματική κωδικοποίηση του πλάτους.

2.3.2 Αποτελέσματα Οπτικοποίησης

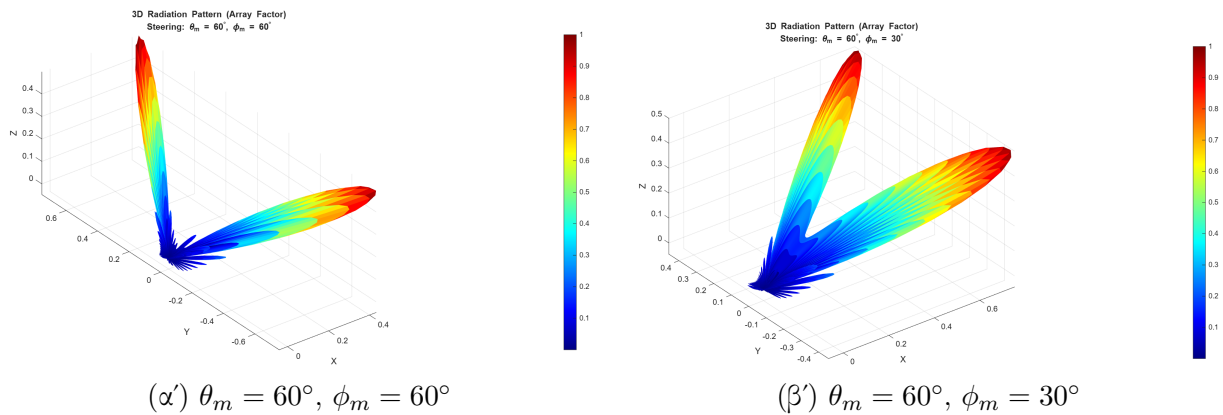
Για κάθε συνδυασμό (θ_m, ϕ_m) παράγεται ένα 3D διάγραμμα ακτινοβολίας. Ενδεικτικά παρατίθενται τα έξι αποτελέσματα που αντιστοιχούν σε όλους τους συνδυασμούς που χρησιμοποιούνται στον κώδικα.



Σχήμα 2.4: 3D στερεό ακτινοβολίας για $\theta_m = 90^\circ$ και διαφορετικές τιμές ϕ_m .



Σχήμα 2.5: 3D στερεό ακτινοβολίας για διαφορετικούς συνδυασμούς (θ_m, ϕ_m) .



Σχήμα 2.6: 3D στερεό ακτινοβολίας για $\theta_m = 60^\circ$ και διαφορετικές τιμές ϕ_m .

Σύντομες Παρατηρήσεις

- Σε κάθε διάγραμμα ο κύριος λοβός του στερεού ακτινοβολίας κατευθύνεται στη ζητούμενη διεύθυνση (θ_m, ϕ_m) , όπως προδιαγράφεται από τις φασικές μετατοπίσεις δ_x και δ_z .
- Το στερεό είναι συμμετρικό ως προς το επίπεδο που ορίζει τη διάταξη, με εμφανείς πλευρικούς λοβούς χαμηλότερου πλάτους, όπως αναμένεται για μεγάλη ομοιόμορφη στοιχειοκεραία.
- Η μείωση της θ_m από 90° σε 60° «ανεβάζει» τη δέσμη (ο κύριος λοβός μετατοπίζεται σε μεγαλύτερες τιμές Z), ενώ η μεταβολή της ϕ_m περιστρέφει το στερεό ως προς τον άξονα z , κάτι που φαίνεται καθαρά στις διαφορετικές προβολές $X-Y$ των επιφανειών.

2.4 Υπολογισμός Κατευθυντικότητας

Στα ερωτήματα (γ) και (δ) ζητείται ο υπολογισμός της κατευθυντικότητας της διδιάστατης στοιχειοκεραίας για όλες τις διευθύνσεις μεγίστου (θ_m, ϕ_m) που εξετάστηκαν στο ερώτημα (α), με τρεις τρόπους:

1. αναλυτικά, με βάση το αποτελεσματικό άνοιγμα (*effective aperture*) (*scaling*),
2. αναλυτικά, με βάση τα ημικατευθύνσια πλάτη (*half-power beamwidths*) (HPBW),
3. υπολογιστικά, από τον ορισμό της κατευθυντικότητας, μέσω αριθμητικής ολοκλήρωσης στο στερεό γωνιακό πεδίο (Riemann sum).

2.4.1 Θεωρητική ανάλυση της κατευθυντικότητας

Ορισμός κατευθυντικότητας

Θεωρούμε το συνολικό πεδίο $E(\theta, \phi)$ που έχει ήδη υπολογιστεί στο ερώτημα (α):

$$E(\theta, \phi) = |E_0(\theta) AF_x(\theta, \phi) AF_z(\theta, \phi)|,$$

όπου $E_0(\theta)$ είναι το διάγραμμα του στοιχείου (διπόλου) και AF_x , AF_z οι παράγοντες στοιχειοκεραίας κατά x και z αντίστοιχα.

Η πυκνότητα ισχύος στην κατεύθυνση (θ, ϕ) είναι ανάλογη του $|E(\theta, \phi)|^2$. Ορίζουμε την ένταση ακτινοβολίας (*radiation intensity*)

$$U(\theta, \phi) \propto |E(\theta, \phi)|^2.$$

Η συνολική εκπεμπόμενη ισχύς είναι

$$P_{\text{rad}} = \iint_{4\pi} U(\theta, \phi) d\Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi U(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi.$$

Η κατευθυντικότητα ορίζεται ως

$$D = \frac{4\pi U_{\max}}{P_{\text{rad}}}, \quad U_{\max} = \max_{\theta, \phi} U(\theta, \phi),$$

και εκφράζεται σε dBi ως

$$D_{\text{dBi}} = 10 \log_{10} D.$$

Μετασχηματισμός γωνιών στο σύστημα των αξόνων της κεραίας

Λόγω της γεωμετρίας της διάταξης και της ανασήμανσης των αξόνων στον κώδικα, η διεύθυνση μεγίστου (θ_m, ϕ_m) μεταφέρεται σε ένα νέο σύστημα (θ', ϕ') που είναι δεμένο με τους κύριους άξονες της επιφάνειας της κεραίας.

Ξεκινώντας από τα συνημίτονα διεύθυνσης στο αρχικό σύστημα

$$x_{\text{old}} = \sin \theta_m \cos \phi_m, \quad y_{\text{old}} = \sin \theta_m \sin \phi_m, \quad z_{\text{old}} = \cos \theta_m,$$

εφαρμόζεται η ανασήμανση (όπως στον κώδικα `get_transformed_angles`)

$$x' = z_{\text{old}}, \quad y' = x_{\text{old}}, \quad z' = y_{\text{old}}.$$

Οι νέες σφαιρικές γωνίες (θ', ϕ') προκύπτουν από

$$\theta' = \arccos(z'), \quad \phi' = \text{atan2}(y', x'),$$

με κατάλληλη αναγωγή της ϕ' στο διάστημα $[0, 2\pi)$.

Οι ποσότητες θ' , ϕ' είναι αυτές που χρησιμοποιούνται στη θεωρητική προσέγγιση για το scaling και τα HPBW.

Μέθοδος 1: Προσέγγιση μέσω αποτελεσματικού ανοίγματος

Για μια μεγάλη ορθογωνική στοιχειοκεραία με διαστάσεις D_x , D_y (σε μήκη κύματος) και διάταξη στο επίπεδο x - z , η κατευθυντικότητα κοντά στην κατεύθυνση μεγίστου μπορεί να προσεγγιστεί από τη γνωστή σχέση

$$D \approx \frac{4\pi A_{\text{eff}}}{\lambda^2},$$

όπου A_{eff} είναι το αποτελεσματικό άνοιγμα.

Αν συμβολίσουμε με $D_{x'}$, $D_{y'}$ τις αποτελεσματικές διαστάσεις (σε μήκη κύματος) στο νέο σύστημα αξόνων, τότε για $d = \lambda/2$ και για λοβό που σχηματίζει γωνία θ' ως προς το κάθετο στην επιφάνεια, η κατευθυντικότητα κατά προσέγγιση γράφεται

$$D_1 = \pi \cos \theta' D_{x'} D_{y'}.$$

Οι βασικές «γεωμετρικές» διαστάσεις της κεραίας στο επίπεδο x' - y' είναι

$$D_{x'}^{(0)} = 2N_z \frac{d}{\lambda}, \quad D_{y'}^{(0)} = 2N_x \frac{d}{\lambda},$$

δηλαδή είναι ανάλογες του μήκους της διάταξης κατά z και κατά x αντίστοιχα.

Όταν ο λοβός στρέφεται μακριά από το broadside, τα ημικατευθύνσια πλάτη κατά μήκος των αξόνων x' , y' αυξάνονται. Για να ληφθεί υπόψη αυτή η διεύρυνση, στον κώδικα εφαρμόζεται scaling των αποτελεσματικών διαστάσεων με βάση τον λόγο των HPBW:

$$D_{x'} = D_{x'}^{(0)} \frac{\Theta_{x'}^{(90^\circ)}}{\Theta_{x'}^{(\theta', \phi')}}, \quad D_{y'} = D_{y'}^{(0)} \frac{\Theta_{y'}^{(90^\circ)}}{\Theta_{y'}^{(\theta', \phi')}},$$

όπου $\Theta_{x'}^{(90^\circ)}$, $\Theta_{y'}^{(90^\circ)}$ είναι τα ημικατευθύνσια πλάτη για broadside και $\Theta_{x'}^{(\theta', \phi')}$, $\Theta_{y'}^{(\theta', \phi')}$ είναι οι αντίστοιχες HPBW στις λοξές διευθύνσεις που έχουν εξαχθεί από τα διαγράμματα του ερωτήματος (α) (στον κώδικα με μεταβλητές όπως HPBW60_x_dot, HPBW40_9_x_dot, HPBW25_7_y_dot).

Συνοψίζοντας, η εξίσωση που υλοποιείται είναι

$$D_1(\theta_m, \phi_m) = \pi \cos \theta' D_{x'}^{(0)} \frac{\Theta_{x'}^{(90^\circ)}}{\Theta_{x'}^{(\theta', \phi')}} D_{y'}^{(0)} \frac{\Theta_{y'}^{(90^\circ)}}{\Theta_{y'}^{(\theta', \phi')}}.$$

Μέθοδος 2: Προσέγγιση μέσω HPBW (τύπος Kraus)

Μια κλασική προσεγγιστική σχέση για την κατευθυντικότητα, όταν ο κύριος λοβός μπορεί να θεωρηθεί περίπου ορθογώνιος με ημικατευθύνσια πλάτη Θ_{HPBW} και Ψ_{HPBW} σε δύο κάθετα επίπεδα, είναι

$$D \approx \frac{4\pi}{\Theta_{\text{HPBW}} \Psi_{\text{HPBW}}},$$

με τις γωνίες σε ακτίνια.

Στην παρούσα υλοποίηση, επειδή ο κύριος λοβός δεν είναι πάντοτε ευθυγραμμισμένος με τους κύριους άξονες x' , y' , εισάγουμε ισοδύναμα ημικατευθύνσια πλάτη $\Theta_{h'}$ και $\Psi_{h'}$ τα οποία προκύπτουν από τα ημικατευθύνσια πλάτη κατά x' , y' .

Για broadside κατά μήκος των κύριων αξόνων χρησιμοποιείται η κλασική προσέγγιση

$$\Theta_{x'}^{(90^\circ)} \approx \frac{48.4^\circ \lambda}{N_z d}, \quad \Theta_{y'}^{(90^\circ)} \approx \frac{48.4^\circ \lambda}{N_x d},$$

η οποία στον κώδικα μετατρέπεται σε ακτίνια μέσω deg2rad. Για τις λοξές διευθύνσεις χρησιμοποιούνται οι HPBW που έχουν ήδη μετρηθεί όπως

$$\Theta_{y'}^{(60^\circ)} = \text{HPBW60_y_dot}, \quad \Theta_{y'}^{(30^\circ)} = \text{HPBW30_y_dot}, \quad \text{κ.λ.π.}$$

Από τις γωνίες $\Theta_{x'}$, $\Theta_{y'}$ και τη διεύθυνση (θ', ϕ') υπολογίζονται τα ισοδύναμα HPBW στον οριζόντιο και κατακόρυφο προσανατολισμό του κύριου λοβού:

$$\Theta_{h'} = \frac{1}{\cos \theta' \sqrt{\frac{\cos^2 \phi'}{\Theta_{x'}^2} + \frac{\sin^2 \phi'}{\Theta_{y'}^2}}},$$

$$\Psi_{h'} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\sin^2 \phi'}{\Theta_{x'}^2} + \frac{\cos^2 \phi'}{\Theta_{y'}^2}}}.$$

Η κατευθυντικότητα με μέθοδο HPBW δίνεται τελικά από

$$D_2 = \frac{\pi^2}{\Theta_{h'} \Psi_{h'}}, \quad D_{2,\text{dBi}} = 10 \log_{10} D_2.$$

2.4.2 Υπολογιστική κατευθυντικότητα από τον ορισμό

Για κάθε ζεύγος γωνιών (θ_m, ϕ_m) υπολογίζουμε την κατευθυντικότητα και από τον ορισμό, με αριθμητική ολοκλήρωση της έντασης ακτινοβολίας σε ολόκληρη τη σφαίρα.

Πλέγμα γωνιών και Riemann sum

Στον κώδικα ορίζεται ένα πυκνό πλέγμα σφαιρικών γωνιών, με βήμα 1° τόσο κατά θ όσο και κατά ϕ :

$$\theta_i \in [0.5^\circ, 179.5^\circ], \quad \phi_j \in [0^\circ, 360^\circ],$$

με βήμα $\Delta\theta = \Delta\phi = 1^\circ$. Για κάθε σημείο του πλέγματος υπολογίζεται το συνολικό πεδίο

$$E_{\text{tot}}(\theta_i, \phi_j) = |E_0(\theta_i)| |AF_x(\theta_i, \phi_j)| |AF_z(\theta_i, \phi_j)|,$$

από τις ίδιες εξισώσεις με το ερώτημα (α), αλλά με τις προοδευτικές φάσεις δ_x, δ_z που αντιστοιχούν στην υπό εξέταση διεύθυνση μεγίστου.

Η ένταση ακτινοβολίας λαμβάνεται ανάλογη του τετραγώνου:

$$U(\theta_i, \phi_j) \propto |E_{\text{tot}}(\theta_i, \phi_j)|^2.$$

Η ολική ισχύς προκύπτει με άθροισμα τύπου Riemann:

$$P_{\text{rad}} \approx \sum_i \sum_j U(\theta_i, \phi_j) \sin \theta_i \Delta\theta \Delta\phi.$$

Το μέγιστο

$$U_{\text{max}} = \max_{i,j} U(\theta_i, \phi_j)$$

χρησιμοποιείται στον ορισμό:

$$D_3 = \frac{4\pi U_{\text{max}}}{P_{\text{rad}}}, \quad D_{3,\text{dBi}} = 10 \log_{10} D_3.$$

2.4.3 Υλοποίηση σε MATLAB

Η παραπάνω διαδικασία έχει υλοποιηθεί σε MATLAB με τα εξής βήματα:

- Ορίζονται τα φυσικά μεγέθη $f, \lambda, d = \lambda/2, k = 2\pi/\lambda$ και τα πλήθη στοιχείων $N_x = 24, N_z = 12$.

- Ορίζεται πλέγμα γωνιών (THETA, PHI) με βήμα 1° .

- Για κάθε ζεύγος (θ_m, ϕ_m) :

- Υπολογίζονται οι φάσεις δ_x, δ_z σύμφωνα με

$$\delta_x = -kd \sin \theta_m \cos \phi_m, \quad \delta_z = -kd \cos \theta_m.$$

- Υπολογίζονται τα

$$\Psi_x = kd \sin \theta \cos \phi + \delta_x, \quad \Psi_z = kd \cos \theta + \delta_z,$$

και στη συνέχεια οι παράγοντες στοιχειοκεραίας

$$AF_x = \left| \frac{\sin(N_x \Psi_x/2)}{\sin(\Psi_x/2)} \right|, \quad AF_z = \left| \frac{\sin(N_z \Psi_z/2)}{\sin(\Psi_z/2)} \right|.$$

- Υπολογίζεται ο παράγοντας στοιχείου

$$EF(\theta) = \left| \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} \right|$$

(με κατάλληλη αντιμετώπιση της ιδιαιτερότητας στις $\theta = 0^\circ, 180^\circ$).

- Προκύπτει το συνολικό πεδίο

$$E_{\text{tot}}(\theta, \phi) = AF_x(\theta, \phi) AF_z(\theta, \phi) EF(\theta),$$

η ένταση ακτινοβολίας

$$U(\theta, \phi) \propto |E_{\text{tot}}(\theta, \phi)|^2,$$

και κατόπιν η κατευθυντικότητα D_3 από τον ορισμό.

- Παράλληλα, για το ίδιο (θ_m, ϕ_m) , υπολογίζονται οι D_1 και D_2 από τις σχέσεις της μεθόδου scaling και της μεθόδου HPBW.

- Τα αποτελέσματα συγκεντρώνονται σε πίνακα, ώστε να συγκριθούν ποσοτικά οι τρεις μέθοδοι.

2.4.4 Αποτελέσματα και Σύγκριση

Πίνακας 2.3: Κατευθυντικότητα στοιχειοκεραίας για όλες τις διευθύνσεις μέγιστου (θ_m, ϕ_m) με τις τρεις μεθόδους υπολογισμού.

θ_m [deg]	ϕ_m [deg]	D_1 Scaling [dBi]	D_2 HPBW [dBi]	D_3 Integral [dBi]	$ D_3 - D_2 $ [dB]
90	90	29.57	29.98	26.55	3.43
90	60	28.15	27.63	25.91	1.73
90	30	23.54	23.03	23.28	0.25
60	90	28.48	28.42	25.96	2.47
60	60	25.03	25.43	25.31	0.12
60	30	20.72	19.75	22.90	3.15

Παρατηρήσεις και Συμπεράσματα

Από τον Πίνακα προκύπτει:

- Πολύ καλή συμφωνία των μεθόδων σε αρκετές διευθύνσεις, ιδίως για $(90^\circ, 30^\circ)$ και $(60^\circ, 60^\circ)$.
- Μεγαλύτερες αποκλίσεις εμφανίζονται όταν η δέσμη είναι πιο λοξή ως προς την επιφάνεια της κεραίας.
- Η μέθοδος HPBW έχει γενικά καλύτερη ακρίβεια από τη μέθοδο scaling.
- Η υπολογιστική μέθοδος (διπλό ολοκλήρωμα) αποτελεί την πιο αξιόπιστη αναφορά.

2.5 Ακροπυροδοτική Στοιχειοκεραία και Στοιχειοκεραία Hansen-Woodyard

Στα ερωτήματα (ε) και (στ) ζητείται η σχεδίαση της ίδιας διδιάστατης στοιχειοκεραίας 24×12 διπόλων ώστε να λειτουργεί ως ακροπυροδοτική κατά τον άξονα x , τόσο στην απλή (ordinary end-fire) περίπτωση όσο και στην παραλλαγή Hansen–Woodyard end-fire. Αφού σχεδιαστεί το στερεό ακτινοβολίας, ζητείται ο αναλυτικός και υπολογιστικός υπολογισμός της κατευθυντικότητας.

2.5.1 Θεωρητική ανάλυση ακροπυροδοτικών διατάξεων

Θεωρούμε ότι η διάταξη παραμένει ορθογωνική $N_x \times N_z$ με βήμα $d = \lambda/2$, με διπολικά στοιχεία κατά τον άξονα z . Το διάγραμμα πεδίου γράφεται, όπως και στο ερώτημα (α), ως γινόμενο διαγράμματος στοιχείου και παραγόντων στοιχειοκεραίας:

$$E(\theta, \phi) = |E_0(\theta) AF_x(\theta, \phi) AF_z(\theta, \phi)|.$$

Μονοδιάστατος παράγοντας στοιχειοκεραίας κατά x

Για ομοιόμορφη γραμμική στοιχειοκεραία N_x στοιχείων με απόσταση d και προοδευτική φάση α_x κατά τον άξονα x , ο παράγοντας στοιχειοκεραίας είναι

$$AF_x(\theta, \phi) = \sum_{n=0}^{N_x-1} e^{jn\psi_x}, \quad \psi_x(\theta, \phi) = kd \sin \theta \cos \phi + \alpha_x.$$

Το πλάτος του παράγοντα γράφεται

$$|AF_x(\theta, \phi)| = \left| \frac{\sin\left(\frac{N_x\psi_x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\psi_x}{2}\right)} \right|.$$

Ανάλογα, κατά τον άξονα z :

$$AF_z(\theta, \phi) = \sum_{m=0}^{N_z-1} e^{jm\psi_z}, \quad \psi_z(\theta) = kd \cos \theta + \alpha_z,$$

$$|AF_z(\theta, \phi)| = \left| \frac{\sin\left(\frac{N_z \psi_z}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\psi_z}{2}\right)} \right|.$$

Για τα κατακόρυφα δίπολα μήκους $\lambda/2$ χρησιμοποιείται, όπως και πριν,

$$E_0(\theta) = \left| \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} \right|.$$

Απλή ακροπυροδοτική στοιχειοκεραία (ordinary end-fire)

Θέλουμε μέγιστη ακτινοβολία κατά μήκος του άξονα x , δηλαδή για $\theta = 90^\circ$, $\phi = 0^\circ$ (και συμμετρικά προς $-x$). Στην απλή ακροπυροδοτική διάταξη επιλέγεται προοδευτική φάση

$$\alpha_x^{(\text{EF})} = -kd$$

που, για $d = \lambda/2$, ισοδυναμεί με $\alpha_x^{(\text{EF})} = -\pi$. Η επιλογή αυτή μηδενίζει τον παρονομαστή του AF_x κοντά στη διεύθυνση τέλους γραμμής, δημιουργώντας κύριο λοβό ακτινοβολίας κατά τον άξονα x . Κατά z δεν εφαρμόζεται προοδευτική φάση

$$\alpha_z^{(\text{EF})} = 0,$$

ώστε η διάταξη να παραμένει περίπου broadside ως προς τον άξονα z .

Ακροπυροδοτική Hansen-Woodyard

Στη διαμόρφωση Hansen-Woodyard προστίθεται μικρή επιπλέον προοδευτική φάση ώστε να αυξηθεί το effective aperture της στοιχειοκεραίας και να στενέψει ο κύριος λοβός. Μια κλασική προσέγγιση είναι

$$\alpha_x^{(\text{HW})} = -kd - \Delta\alpha,$$

όπου η διόρθωση $\Delta\alpha$ είναι της τάξης π/N_x . Στην παρούσα υλοποίηση λαμβάνεται

$$\Delta\alpha \approx \frac{2.92}{N_x},$$

οπότε

$$\alpha_x^{(\text{HW})} = -kd - \frac{2.92}{N_x}.$$

Και εδώ η φάση κατά z λαμβάνεται μηδενική,

$$\alpha_z^{(\text{HW})} = 0.$$

Η πρόσθετη φάση μετατοπίζει ελαφρά τη διεύθυνση μέγιστου και οδηγεί σε στενότερο κύριο λοβό κατά μήκος του άξονα x , με αυξημένη κατευθυντικότητα σε σχέση με την απλή ακροπυροδοτική διάταξη.

Αναλυτικές προσεγγίσεις κατευθυντικότητας

Και στις δύο διαμορφώσεις η κατευθυντικότητα εκτιμάται αναλυτικά με προσέγγιση τύπου Kraus, μέσω των ημικατευθύνσιων πλατών (HPBW) στους δύο κύριους άξονες της δέσμης.

Για την απλή ακροπυροδοτική διάταξη χρησιμοποιούνται οι προσεγγιστικές σχέσεις

$$\Theta_z^{(\text{EF})} \simeq \frac{48.4^\circ \lambda}{N_z d}, \quad \Theta_x^{(\text{EF})} \simeq 105.4^\circ \sqrt{\frac{\lambda}{N_x d}},$$

όπου $\Theta_z^{(\text{EF})}$ είναι το HPBW στο επίπεδο που «κόβει» τη διάταξη κατά z , ενώ $\Theta_x^{(\text{EF})}$ το αντίστοιχο κατά τον άξονα x για απλή ακροπυροδοτική διάταξη. Μετατρέποντας σε ακτίνια, η κατευθυντικότητα προσεγγίζεται από

$$D_{\text{EF}}^{(\text{an})} = \frac{\pi^2}{\Theta_x^{(\text{EF})} \Theta_z^{(\text{EF})}}.$$

Για τη διάταξη Hansen–Woodyard θεωρούμε ότι το HPBW κατά z παραμένει ουσιαστικά το ίδιο,

$$\Theta_z^{(\text{HW})} \approx \Theta_z^{(\text{EF})},$$

ενώ το HPBW κατά x μειώνεται με βάση τη γνωστή σχέση

$$\Theta_x^{(\text{HW})} = 2 \arccos \left(1 - 0.1398 \frac{\lambda}{N_x d} \right),$$

όπου το επιχείρημα της \arccos είναι αδιάστατο. Η αντίστοιχη αναλυτική κατευθυντικότητα είναι

$$D_{\text{HW}}^{(\text{an})} = \frac{\pi^2}{\Theta_x^{(\text{HW})} \Theta_z^{(\text{HW})}}.$$

Σε dBi:

$$D_{\text{EF,an}}^{(\text{dBi})} = 10 \log_{10} D_{\text{EF}}^{(\text{an})}, \quad D_{\text{HW,an}}^{(\text{dBi})} = 10 \log_{10} D_{\text{HW}}^{(\text{an})}.$$

2.5.2 Υπολογιστική κατευθυντικότητα από τον ορισμό

Για ακριβέστερη εκτίμηση, η κατευθυντικότητα υπολογίζεται αριθμητικά από τον ορισμό, όπως και στο ερώτημα (δ), αλλά τώρα με τις φάσεις $\alpha_x^{(\text{EF})}$ ή $\alpha_x^{(\text{HW})}$.

Ορίζεται πυκνό πλέγμα γωνιών

$$\theta_i \in (0, \pi), \quad \phi_j \in [0, 2\pi),$$

με βήμα 1° τόσο σε θ όσο και σε ϕ . Για κάθε σημείο (θ_i, ϕ_j) υπολογίζονται

$$\psi_x = kd \sin \theta_i \cos \phi_j + \alpha_x, \quad \psi_z = kd \cos \theta_i + \alpha_z,$$

$$AF_x(\theta_i, \phi_j) = \left| \frac{\sin\left(\frac{N_x \psi_x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\psi_x}{2}\right)} \right|, \quad AF_z(\theta_i, \phi_j) = \left| \frac{\sin\left(\frac{N_z \psi_z}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\psi_z}{2}\right)} \right|,$$

και το διάγραμμα στοιχείου

$$EF(\theta_i) = \left| \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta_i\right)}{\sin \theta_i} \right|.$$

Το συνολικό πεδίο είναι

$$E_{\text{tot}}(\theta_i, \phi_j) = AF_x(\theta_i, \phi_j) AF_z(\theta_i, \phi_j) EF(\theta_i),$$

και η ένταση ακτινοβολίας

$$U(\theta_i, \phi_j) \propto |E_{\text{tot}}(\theta_i, \phi_j)|^2.$$

Η ολική ακτινοβολούμενη ισχύς προσεγγίζεται με άθροισμα τύπου Riemann:

$$P_{\text{rad}} \approx \sum_i \sum_j U(\theta_i, \phi_j) \sin \theta_i \Delta \theta \Delta \phi,$$

ενώ

$$U_{\text{max}} = \max_{i,j} U(\theta_i, \phi_j).$$

Η αριθμητική κατευθυντικότητα προκύπτει από

$$D^{(\text{num})} = \frac{4\pi U_{\text{max}}}{P_{\text{rad}}}, \quad D_{\text{dBi}}^{(\text{num})} = 10 \log_{10} D^{(\text{num})}.$$

2.5.3 Υλοποίηση σε MATLAB

Η παραπάνω διαδικασία έχει υλοποιηθεί σε MATLAB ως εξής:

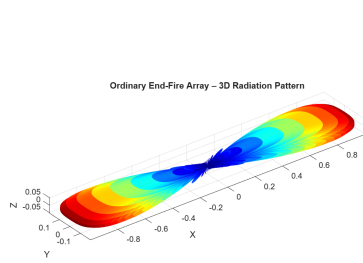
- Ορίζονται τα φυσικά μεγέθη f , λ , $d = \lambda/2$, $k = 2\pi/\lambda$ και τα μεγέθη της διάταξης $N_x = 24$, $N_z = 12$.
- Ορίζεται ανώνυμη συνάρτηση `arrayFactor1D(N,psi)` που υλοποιεί τον μονοδιάστατο παράγοντα στοιχειοκεραίας.
- Δημιουργείται πλέγμα γωνιών (THETA,PHI) με βήμα 1° .
- **Απλή ακροπυροδοτική διάταξη:**
 - Θέτουμε `phaseX_endfire = -k*d`, `phaseZ_endfire = 0`.
 - Υπολογίζονται `psiX`, `psiZ`, στη συνέχεια `AFx`, `AFz`, ο παράγοντας στοιχείου `elemFactor` και το συνολικό πεδίο `E_field`.
 - Για το στερεό ακτινοβολίας, το πεδίο κανονικοποιείται (`E_norm`) και προβάλλεται σε καρτεσιανές συντεταγμένες (`X,Y,Z`) με τη συνάρτηση `surf`.
 - Η αναλυτική κατευθυντικότητα $D_{\text{EF}}^{(\text{an})}$ υπολογίζεται με τις σχέσεις για $\Theta_x^{(\text{EF})}$, $\Theta_z^{(\text{EF})}$ (τύπος Kraus).
 - Η αριθμητική κατευθυντικότητα $D_{\text{EF}}^{(\text{num})}$ προκύπτει από το διπλό άθροισμα Riemann πάνω στο πλέγμα, χρησιμοποιώντας `U_rad = E_field.^2` και βάρος `sin(THETA)`.

- **Διάταξη Hansen–Woodyard:**

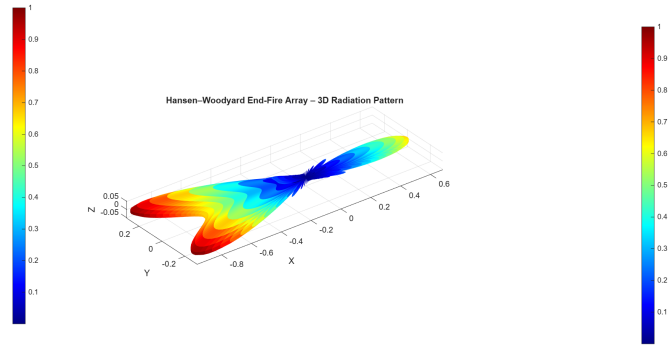
- Θέτουμε $\text{phaseX_HW} = -k \cdot d - 2.92/Nx$, $\text{phaseZ_HW} = 0$.
- Επαναλαμβάνονται τα ίδια βήματα υπολογισμού AFx , AFz , E_{field} , στερεού ακτινοβολίας και αριθμητικής κατευθυντικότητας.
- Η αναλυτική κατευθυντικότητα $D_{\text{HW}}^{(\text{an})}$ υπολογίζεται με τις σχέσεις για $\Theta_x^{(\text{HW})}$, $\Theta_z^{(\text{HW})}$.

- Τέλος, εκτυπώνεται συνοπτικός πίνακας με τις αναλυτικές και αριθμητικές τιμές κατευθυντικότητας για τις δύο διαμορφώσεις.

2.5.4 Αποτελέσματα οπτικοποίησης



Σχήμα 2.7: 3D στερεό ακτινοβολίας για την απλή ακροπυροδοτική στοιχειοκεραία (ordinary end-fire array).



Σχήμα 2.8: 3D στερεό ακτινοβολίας για τη στοιχειοκεραία Hansen–Woodyard end-fire.

2.5.5 Αποτελέσματα κατευθυντικότητας και σύγκριση

Ο παρακάτω πίνακας συνοψίζει τις τιμές κατευθυντικότητας που προέκυψαν αναλυτικά (μέσω HPBW) και αριθμητικά (μέσω του ορισμού) για τις δύο εκδοχές της ακροπυροδοτικής διάταξης, όπως υπολογίστηκαν από τον κώδικα.

Πίνακας 2.4: Σύγκριση αναλυτικής και αριθμητικής κατευθυντικότητας για την απλή και τη Hansen–Woodyard ακροπυροδοτική στοιχειοκεραία.

Array Type	$D_{\text{analytical}}$ [dBi]	$D_{\text{numerical}}$ [dBi]	$ D_{\text{num}} - D_{\text{an}} $ [dB]
Ordinary end-fire	21.21	18.76	2.45
Hansen–Woodyard end-fire	23.61	20.06	3.54

Παρατηρήσεις και συμπεράσματα

Από τα στερεά ακτινοβολίας (Σχ. 2.7, 2.8) και τις τιμές του Πίνακα 2.4 προκύπτουν τα εξής:

- Και στις δύο περιπτώσεις, η κύρια δέσμη κατευθύνεται κατά μήκος του άξονα x (ακροπυροδοτική λειτουργία), όπως απαιτείται από την εκφώνηση.

- Η διάταξη Hansen–Woodyard παρουσιάζει στενότερο κύριο λοβό κατά τον άξονα x και αυξημένη κατευθυντικότητα σε σχέση με την απλή ακροπυροδοτική: η αναλυτική τιμή αυξάνεται από περίπου 21.2 dBi σε 23.6 dBi (διαφορά $\simeq 2.4$ dB), ενώ και η αριθμητική τιμή αυξάνεται από 18.8 dBi σε 20.1 dBi (διαφορά $\simeq 1.3$ dB).
- Οι αποκλίσεις μεταξύ αναλυτικής και αριθμητικής κατευθυντικότητας (της τάξης 2.5–3.5 dB) οφείλονται αφενός στη χρήση εμπειρικών προσεγγίσεων για τα HPBW (τύποι Kraus, προσεγγιστικές σταθερές 48.4, 105.4, 0.1398 κ.λπ.), αφετέρου στην πεπερασμένη διακριτοποίηση του στερεού γωνιακού πεδίου (βήμα 1° σε θ και ϕ).
- Παρά τις αποκλίσεις, οι δύο μέθοδοι συμφωνούν ποιοτικά: επιβεβαιώνουν ότι η διάταξη Hansen–Woodyard end-fire προσφέρει υψηλότερη κατευθυντικότητα από την απλή ordinary end-fire για την ίδια γεωμετρία, με τίμημα ελαφρώς αυξημένη πολυπλοκότητα στη φασική τροφοδοσία.

Οι αντίστοιχοι κώδικες MATLAB για την υλοποίηση των παραπάνω υπολογισμών και απεικονίσεων για την άσκηση αυτή είναι διαθέσιμοι και είναι οι εξής: `Ex1_1_PartA.m`, `Ex1_1_PartB.m`, `Ex1_1_PartC_D_plusComparison.m`, `Ex1_1_PartE_ST.m`.

Κεφάλαιο 3

Κατευθυντικότητα γραμμικής ανομοιομορφης στοιχειοκεραίας

3.1 Περιγραφή Προβλήματος

Θεωρούμε γραμμική στοιχειοκεραία κατά μήκος ευθείας, η οποία αποτελείται από N στοιχεία σε αποστάσεις d μεταξύ τους. Το πλάτος του ρεύματος του n -στού στοιχείου είναι γενικά διαφορετικό και συμβολίζεται με I_n , ενώ μεταξύ δύο διαδοχικών στοιχείων επιβάλλεται σταθερή διαφορά φάσης δ . Το μιγαδικό ρεύμα στο n -στό στοιχείο γράφεται

$$I_n e^{jn\delta}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1.$$

Η διάταξη αυτή αποτελεί γενίκευση της ομοιομορφης στοιχειοκεραίας, καθώς επιτρέπει ελεύθερη επιλογή του πλάτους I_n (π.χ. για έλεγχο των πλευρικών λοβών), διατηρώντας όμως σταθερή προοδευτική φάση δ για να μπορεί να στραφεί ο κύριος λοβός σε επιθυμητή διεύθυνση.

Σκοπός του κεφαλαίου είναι να υπολογιστεί αναλυτικά η κατευθυντικότητα της συγκεκριμένης ανομοιομορφης γραμμικής στοιχειοκεραίας. Συγκεκριμένα, ζητείται να αποδειχθεί ότι η κατευθυντικότητα δίνεται από τη σχέση

$$D = \frac{kd \left(\sum_{n=0}^{N-1} I_n \right)^2}{\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} I_n I_m e^{j(n-m)\delta} \frac{\sin[(n-m)kd]}{n-m}},$$

όπου $k = 2\pi/\lambda$ είναι ο κυματικός αριθμός και η έκφραση $\sin[(n-m)kd]/(n-m)$ ερμηνεύεται κατάλληλα για $n = m$ μέσω του ορίου $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x/x = 1$.

3.2 Απόδειξη της κατευθυντικότητας μη ομοιομορφης γραμμικής στοιχειοκεραίας

Για την γραμμική, λοιπόν, στοιχειοκεραία N στοιχείων, με απόσταση d και μιγαδικά ρεύματα

$$I_n e^{jn\delta}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1.$$

3.2.1 Συντελεστής στοιχειοκεραίας

Η γεωμετρική φάση για διεύθυνση θ είναι $nk d \cos \theta$, άρα ο συντελεστής στοιχειοκεραίας είναι

$$F(\theta) = \sum_{n=0}^{N-1} I_n e^{jn(kd \cos \theta + \delta)}.$$

Ορίζουμε

$$\psi(\theta) = kd \cos \theta + \delta,$$

οπότε

$$F(\theta) = \sum_{n=0}^{N-1} I_n e^{jn\psi}.$$

3.2.2 Διάγραμμα ακτινοβολίας

Το διάγραμμα είναι

$$|F(\theta)|^2 = \left(\sum_{n=0}^{N-1} I_n e^{jn\psi} \right) \left(\sum_{m=0}^{N-1} I_m e^{-jm\psi} \right) = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} I_n I_m e^{j(n-m)\psi}.$$

Η μέγιστη ακτινοβολία προκύπτει όταν

$$\psi(\theta_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad kd \cos \theta_0 + \delta = 0,$$

οπότε

$$F(\theta_0) = \sum_{n=0}^{N-1} I_n, \quad |F(\theta_0)|^2 = \left(\sum_{n=0}^{N-1} I_n \right)^2.$$

3.2.3 Ολική ακτινοβολούμενη ισχύς

Η ολική ισχύς είναι

$$P_{\text{rad}} = C \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |F(\theta)|^2 \sin \theta d\theta d\phi = C \cdot 2\pi \int_0^\pi |F(\theta)|^2 \sin \theta d\theta.$$

Με χρήση της ανάπτυξης

$$|F(\theta)|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} I_n I_m e^{j(n-m)\psi},$$

προκύπτει

$$P_{\text{rad}} = C \cdot 2\pi \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} I_n I_m \int_0^\pi e^{j(n-m)\psi} \sin \theta d\theta.$$

3.2.4 Υπολογισμός του ολοκληρώματος

Αφού $\psi = kd \cos \theta + \delta$, έχουμε

$$e^{j(n-m)\psi} = e^{j(n-m)\delta} e^{j(n-m)kd \cos \theta}.$$

Το ολοκλήρωμα γίνεται

$$I_{nm} = e^{j(n-m)\delta} \int_0^\pi e^{j(n-m)kd \cos \theta} \sin \theta d\theta.$$

Θέτουμε $u = \cos \theta$, $du = -\sin \theta d\theta$:

$$I_{nm} = e^{j(n-m)\delta} \int_{-1}^1 e^{j(n-m)kdu} du.$$

Το ολοκλήρωμα είναι

$$\int_{-1}^1 e^{j(n-m)kdu} du = \frac{e^{j(n-m)kd} - e^{-j(n-m)kd}}{j(n-m)kd} = \frac{2 \sin[(n-m)kd]}{(n-m)kd}.$$

Άρα

$$I_{nm} = e^{j(n-m)\delta} \frac{2 \sin[(n-m)kd]}{(n-m)kd}.$$

3.2.5 Ολική ισχύς σε τελική μορφή

$$P_{\text{rad}} = C \cdot 4\pi \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} I_n I_m e^{j(n-m)\delta} \frac{\sin[(n-m)kd]}{(n-m)kd}.$$

3.2.6 Κατευθυντικότητα

Ο ορισμός της κατευθυντικότητας είναι:

$$D = \frac{4\pi U_{\text{max}}}{P_{\text{rad}}}.$$

Η μέγιστη πυκνότητα ισχύος είναι

$$U_{\text{max}} = C \left(\sum_{n=0}^{N-1} I_n \right)^2.$$

Άρα

$$D = \frac{4\pi C \left(\sum_{n=0}^{N-1} I_n \right)^2}{C \cdot 4\pi \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} I_n I_m e^{j(n-m)\delta} \frac{\sin[(n-m)kd]}{(n-m)kd}}.$$

Απλοποιώντας:

$$D = \frac{\left(\sum_{n=0}^{N-1} I_n \right)^2}{\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} I_n I_m e^{j(n-m)\delta} \frac{\sin[(n-m)kd]}{(n-m)kd}}.$$

Πολλαπλασιάζοντας αριθμητή και παρονομαστή με kd :

$$D = \frac{kd \left(\sum_{n=0}^{N-1} I_n \right)^2}{\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} I_n I_m e^{j(n-m)\delta} \frac{\sin[(n-m)kd]}{n-m}}$$

με το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{για } n = m.$$

Κεφάλαιο 4

Σχεδίαση ανομοιόμορφης στοιχειοκεραίας με τεχνικές βελτιστοποίησης

4.1 Περιγραφή προβλήματος

Στο κεφάλαιο αυτό εξετάζουμε τη σχεδίαση γραμμικής ανομοιόμορφης στοιχειοκεραίας N ισотροπικών στοιχείων, με ίσες αποστάσεις d και σταθερή διαφορά φάσης δ μεταξύ γειτονικών στοιχείων, αλλά με διαφορετικά πλάτη ρευμάτων I_n , $n = 0, \dots, N - 1$. Στόχος είναι η κατανομή των ρευμάτων έτσι ώστε να επιτύχουμε προκαθορισμένο ύψος πλευρικών λοβών (side-lobe level, SLL) π.χ. -20 , -30 ή -40 dB ως προς τον κύριο λοβό, μεγιστοποιώντας παράλληλα, όσο είναι δυνατό, την κατευθυντικότητα της στοιχειοκεραίας.

Αντί για κλειστή αναλυτική λύση (τύπου Dolph–Chebyshev), η προσέγγιση εδώ βασίζεται σε αριθμητικές τεχνικές optimization, μέσω MATLAB Live Script. Κατασκευάζεται κατάλληλη συνάρτηση σφάλματος (SLL_error) που μετρά την απόκλιση των πλευρικών λοβών από το επιθυμητό επίπεδο, και χρησιμοποιούνται αλγόριθμοι μονοκριτηριακής και πολυκριτηριακής βελτιστοποίησης (μείωση SLL και ταυτόχρονη μεγιστοποίηση κατευθυντικότητας) για τον προσδιορισμό των βέλτιστων τιμών I_n . Στη συνέχεια, συγκρίνουμε τα παραγόμενα διαγράμματα ακτινοβολίας και τις κατευθυντικότητες με την περίπτωση ομοιόμορφης τροφοδοσίας.

4.2 Μεθοδολογία Βελτιστοποίησης για τη Σχεδίαση Ανομοιόμορφης Στοιχειοκεραίας

Στο ερώτημα (α) ζητείται να σχεδιαστεί μια γραμμική ανομοιόμορφη στοιχειοκεραία $N = 10$ στοιχείων με συμμετρική διέγερση

$$I = [1, I_1, I_2, I_3, I_4, I_4, I_3, I_2, I_1, 1],$$

έτσι ώστε το ύψος των πλευρικών λοβών (SLL) να λάβει συγκεκριμένες προκαθορισμένες τιμές -20 dB, -30 dB και -40 dB. Η διαδικασία βασίζεται σε τεχνικές βελτιστοποίησης, καθώς δεν υπάρχει κλειστή αναλυτική λύση για τα ρεύματα $\{I_1, I_2, I_3, I_4\}$.

Σκοπός της βελτιστοποίησης είναι να προσεγγιστεί μια κατανομή ρευμάτων που να εξισορροπεί όλους τους πλευρικούς λοβούς στο επιθυμητό SLL.

4.2.1 Βήματα Προσέγγισης του Προβλήματος

Η διαδικασία που ακολουθήθηκε είναι η εξής:

1. **Μείωση των αγνώστων μέσω συμμετρίας:** Λόγω συμμετρίας, η στοιχειοκεραία διαθέτει μόνο τέσσερις ανεξάρτητες παραμέτρους:

$$p = [I_1, I_2, I_3, I_4]^T.$$

2. **Ορισμός του συντελεστή στοιχειοκεραίας:** Ο παράγοντας στοιχειοκεραίας υπολογίζεται από

$$AF(\theta) = \sum_{n=0}^{N-1} I_n e^{j(n-1)\psi(\theta)}, \quad \psi(\theta) = kd \cos \theta.$$

3. **Ορισμός της συνάρτησης κόστους `SLL_error(p, dBTarget)`:** Η συνάρτηση αυτή υλοποιεί σε MATLAB έναν αριθμητικό ορισμό του σφάλματος SLL για δοσμένο διάνυσμα ρευμάτων $p = [I_1, I_2, I_3, I_4]^T$ και επιθυμητή στάθμη πλευρικών λοβών $dBTarget$ (σε dB). Τα βήματα είναι:

- **Συμμετρική διέγερση:** Από το διάνυσμα p σχηματίζεται πλήρης συμμετρική κατανομή ρευμάτων

$$I = [1, I_1, I_2, I_3, I_4, I_4, I_3, I_2, I_1, 1],$$

όπου τα άκρα κανονικοποιούνται σε μονάδα (πρώτο και τελευταίο στοιχείο).

- **Πλέγμα γωνιών και υπολογισμός του παράγοντα στοιχειοκεραίας:** Το διάγραμμα ακτινοβολίας υπολογίζεται για $\theta \in [0^\circ, 90^\circ]$ σε βήμα 1° :

$$\theta_i = i^\circ, \quad i = 0, 1, \dots, 90,$$

και ο αντίστοιχος όρος φάσης είναι

$$\psi_i = kd \cos \theta_i + \delta, \quad (k = 2\pi/\lambda, \quad d = \lambda/2, \quad \delta = 0).$$

Ο παράγοντας στοιχειοκεραίας γράφεται

$$AF(\theta_i) = \sum_{n=1}^N I_n e^{j(n-1)\psi_i}, \quad N = 10,$$

- **Κανονικοποίηση ως προς τον κύριο λοβό:** Χρησιμοποιείται η κανονικοποίηση πλάτους

$$AF_{\text{norm}}(\theta_i) = \frac{|AF(\theta_i)|}{\max_i |AF(\theta_i)|},$$

- **Εντοπισμός λοβών μέσω findpeaks:** Οι τοπικές μέγιστες τιμές του $AF_{\text{norm}}(\theta)$ (κύριος και πλευρικοί λοβοί) εντοπίζονται με `[peaks, ~] = findpeaks(AF_norm);`. Στη συνέχεια αφαιρείται ο κύριος λοβός (παγκόσμιο μέγιστο):

$$\begin{aligned} \text{έστω } \max_k \{\text{peaks}_k\} &= \text{peaks}_{k^*}, \\ \text{αν } \text{peaks}_{k^*} &> 0.98, \text{ τότε διαγράφεται ο } k^*. \end{aligned}$$

ώστε στο διάνυσμα `peaks` να παραμένουν μόνο οι πλευρικοί λοβοί.

- **Μετατροπή του στόχου SLL σε γραμμική κλίμακα:** Ο στόχος $dBTarget$ (π.χ. -20 dB, -30 dB, -40 dB) μετατρέπεται σε γραμμική μορφή

$$SLL_{\text{target,lin}} = 10^{\frac{dBTarget}{20}},$$

- **Ορισμός της συνάρτησης σφάλματος:** Αν στο διάνυσμα `peaks` έχουν βρεθεί K πλευρικοί λοβοί με τιμές `peaks_1, ..., peaks_K` (σε γραμμική κλίμακα), τότε η συνάρτηση κόστους ορίζεται ως μέσο τετραγωνικό σφάλμα από την επιθυμητή στάθμη:

$$\text{error} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K (\text{peaks}_k - SLL_{\text{target,lin}})^2.$$

Σε περίπτωση που, αριθμητικά, δεν εντοπιστεί κανένας πλευρικός λοβός (`isempty(peaks)`), η συνάρτηση επιστρέφει μια πολύ μεγάλη τιμή

$$\text{error} = 10^6,$$

ώστε η βελτιστοποίηση να τιμωρεί τέτοιες λύσεις.

- **Συνοπτικά:** Η τελική τιμή που επιστρέφει η `SLL_error` είναι

$$\text{error_value} = \begin{cases} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K (\text{peaks}_k - SLL_{\text{target,lin}})^2, & K \geq 1, \\ 10^6, & K = 0. \end{cases}$$

Η ελαχιστοποίηση της παραπάνω ποσότητας μέσω του αλγορίθμου βελτιστοποίησης οδηγεί τους πλευρικούς λοβούς να συγκλίνουν στην επιθυμητή στάθμη SLL, εξασφαλίζοντας παράλληλα συμμετρική και ομαλή κατανομή ρευμάτων.

4. **Επιλογή αλγορίθμου βελτιστοποίησης:** Επιλέχθηκε ο αλγόριθμος γενετικής εξέλιξης (Genetic Algorithm, GA) λόγω:

- της μη γραμμικότητας του προβλήματος,
- της ύπαρξης πολλαπλών τοπικών ακροτάτων,
- της απουσίας κλειστής μορφής για το βέλτιστο ρεύμα,
- της ανάγκης χειρισμού μη ομαλών συναρτήσεων σφάλματος.

5. **Ορισμός ορίων και αρχικής περιοχής αναζήτησης:** Τα ρεύματα περιορίζονται στο διάστημα:

$$1 \leq I_k \leq 10,$$

ώστε να αποφευχθούν ακραίες μη φυσικές τιμές.

6. **Οπτικοποίηση των αποτελεσμάτων μέσω της συνάρτησης SLL_plot.** Η συνάρτηση:

- υπολογίζει το κανονικοποιημένο AF σε dB,
- επισημαίνει τους πλευρικούς λοβούς,
- προσθέτει γραμμή της επιθυμητής στάθμης SLL,
- παρουσιάζει την επίτευξη ή μη του στόχου.

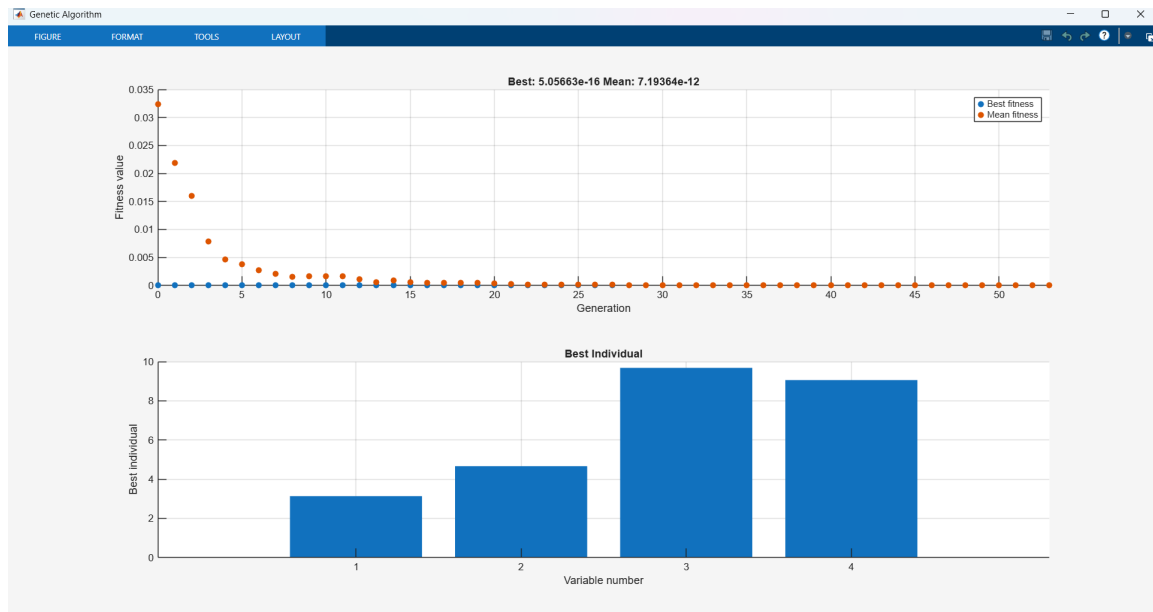
4.2.2 Ρύθμιση και Εκτέλεση του Αλγορίθμου GA

Για κάθε στόχο SLL χρησιμοποιήθηκε το περιβάλλον Optimize Live Script, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.1. Οι παράμετροι βελτιστοποίησης ορίστηκαν ώστε ο αλγόριθμος να επιτύχει σταθερή σύγκλιση και ελαχιστοποίηση της συνάρτησης κόστους.

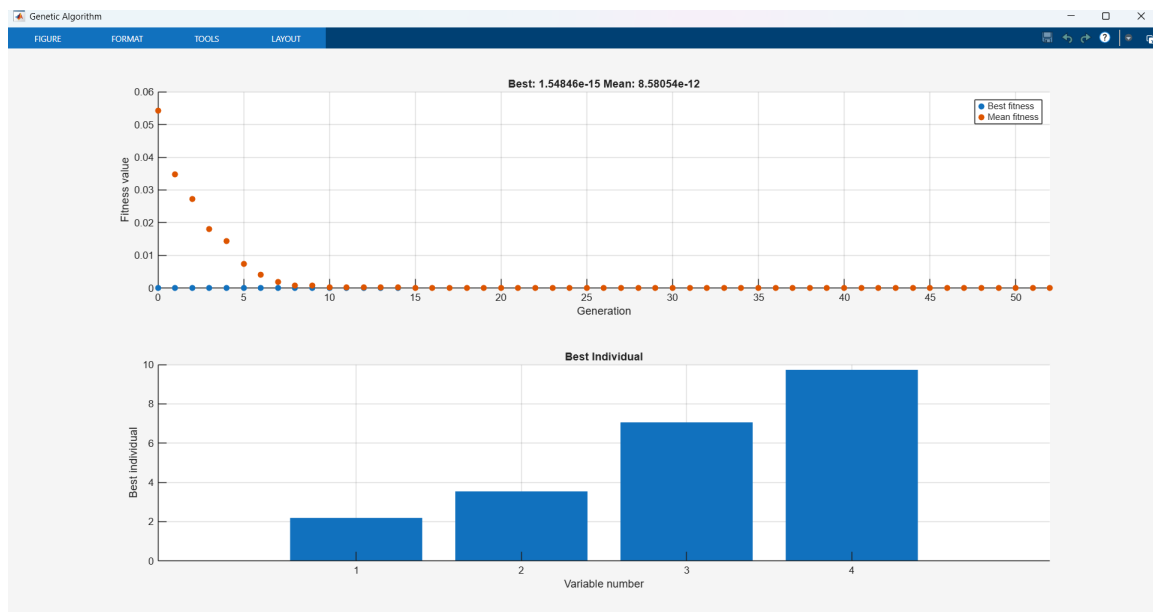
The screenshot shows the 'Optimize' interface in MATLAB Live Script. The problem is defined as 'Minimize problem objective subject to constraints'. The optimization variable 'p' is a 4x1 continuous vector with lower bound 1 and upper bound 10, starting at 'p0'. The goal is to 'Minimize' the 'SLL_error' function, which takes 'p' and 'dBTarget' as inputs. A constraint 'x^2 + y^2 <= 4' is defined on one line. The solver is set to 'ga' (Genetic Algorithm). Under 'Specify problem-dependent solver options', the 'Options' button is visible. Under 'Display progress', 'Text display' is set to 'Final output', and 'Plot' options include 'Best individual' (checked), 'Best fitness' (checked), and 'Range'. Under 'Display results', 'Problem', 'Solution', 'Reason solver stopped', and 'Objective value' are all checked. At the bottom, the 'Solve problem' button is highlighted.

Σχήμα 4.1: Ρύθμιση του προβλήματος βελτιστοποίησης στο Optimize Live Script.

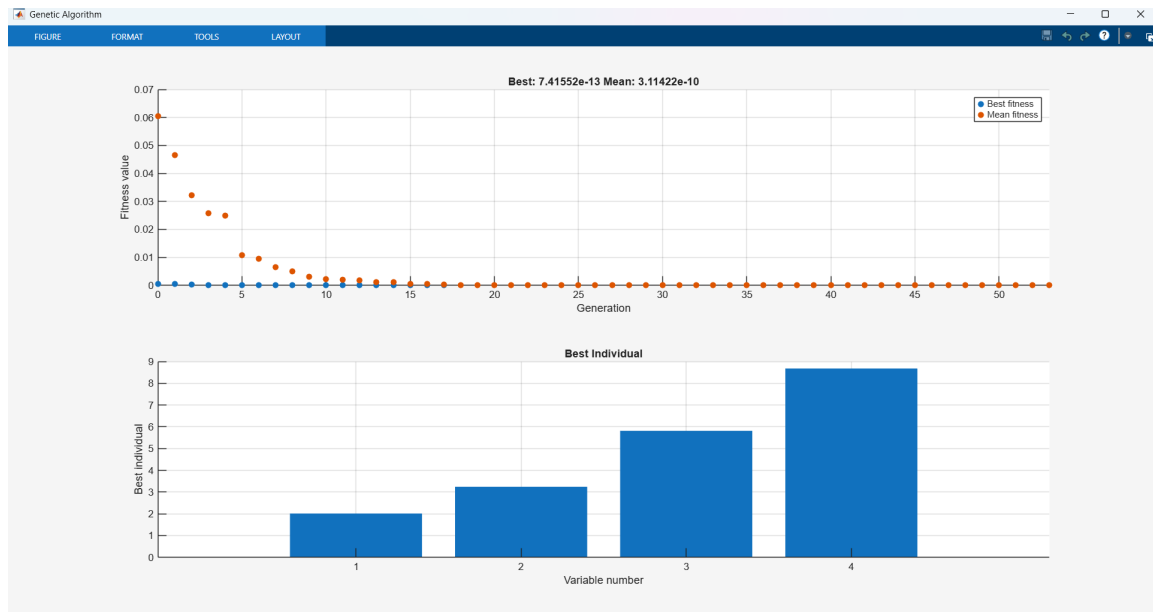
Το GA εκτελέστηκε ξεχωριστά για τους στόχους -20 , -30 και -40 dB. Η πορεία σύγκλισης παρουσιάζεται στα Σχήματα 4.2, 4.3 και 4.4.



Σχήμα 4.2: Πορεία σύγκλισης του GA για στόχο SLL = -20 dB.



Σχήμα 4.3: Πορεία σύγκλισης του GA για στόχο SLL = -30 dB.



Σχήμα 4.4: Πορεία σύγκλισης του GA για στόχο $SLL = -40$ dB.

4.2.3 Βέλτιστα Ρεύματα που Προέκυψαν

Τα βέλτιστα ρεύματα εξήχθησαν από τα αρχεία εξόδου του κώδικα και συνοψίζονται στον Πίνακα 4.1. Οι αρνητικές τιμές επαληθεύονται από το αρχείο ResultsPartA.txt.

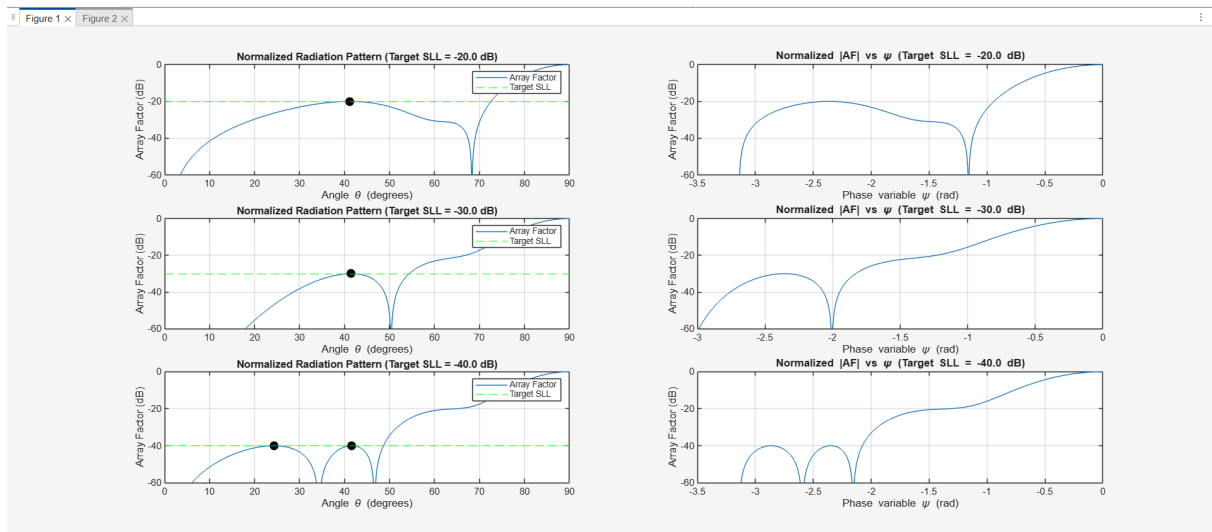
Πίνακας 4.1: Βέλτιστα ρεύματα για τους στόχους -20 , -30 και -40 dB.

SLL Target	I_1	I_2	I_3	I_4
-20 dB	3.1354	4.6654	9.6867	9.0605
-30 dB	2.1951	3.5438	7.0602	9.7362
-40 dB	2.0162	3.2458	5.8185	8.6826

4.2.4 Ανάλυση των Διαγραμμάτων Ακτινοβολίας

Στο Σχήμα 4.5 παρουσιάζονται τα κανονικοποιημένα διαγράμματα ακτινοβολίας της γραμμικής ανομοιόμορφης στοιχειοκεραίας για τους στόχους πλευρικών λοβών $SLL = -20, -30$ και -40 dB. Κάθε διάγραμμα περιλαμβάνει:

- το κανονικοποιημένο μέτρο του παράγοντα στοιχειοκεραίας,
- την απαιτούμενη στάθμη πλευρικών λοβών (πράσινη διακεκομμένη γραμμή),
- τα τοπικά μέγιστα των πλευρικών λοβών (μαύροι δείκτες).



Σχήμα 4.5: Διαγράμματα ακτινοβολίας και παράγοντα στοιχειοκεραίας για $SLL = -20, -30, -40$ dB.

Συμπεριφορά για στόχο $SLL = -20$ dB: Η βέλτιστη λύση οδηγεί σε πλευρικούς λοβούς ελαφρώς κάτω από την τιμή στόχο. Παρατηρείται ότι:

- η κατανομή των πλευρικών λοβών είναι σχετικά ομοιόμορφη,
- ο κυρίαρχος πλευρικός λοβός εμφανίζεται περίπου στη γωνία $\theta \approx 42^\circ$,
- ο κύριος λοβός παραμένει στενός, δηλαδή η κατευθυντικότητα δεν επηρεάζεται σημαντικά.

Η επίτευξη του στόχου -20 dB απαιτεί μικρή μόνο μείωση των ρευμάτων, οπότε το διάγραμμα παραμένει κοντά σε εκείνο της ομοιόμορφης στοιχειοκεραίας.

Συμπεριφορά για στόχο $SLL = -30$ dB: Για χαμηλότερο επιθυμητό ΣΛΛ η μορφή του παραγόντα μεταβάλλεται πιο έντονα:

- οι πλευρικοί λοβοί μειώνονται σημαντικά και πλησιάζουν τη γραμμή στόχο,
- απαιτείται μεγαλύτερη διαφοροποίηση μεταξύ ρευμάτων κεντρικών και άκρων στοιχείων,

- εμφανίζονται δύο σχεδόν ισοπίεδοι πλευρικοί λοβοί, συνέπεια της εξίσωσης των λοβών που επιβάλλει η συνάρτηση κόστους.

Η συμπεριφορά αυτή προσεγγίζει χαρακτηριστικά κατανομής τύπου Dolph–Chebyshev, όπου όλοι οι πλευρικοί λοβοί έχουν ίση στάθμη.

Συμπεριφορά για στόχο SLL = −40 dB: Η απαίτηση για ακόμη χαμηλότερο ΣΛΛ οδηγεί σε εντονότερη αναδιαμόρφωση των ρευμάτων και του διαγράμματος:

- όλοι οι πλευρικοί λοβοί συγκλίνουν κοντά στα −40 dB,
- εμφανίζεται μεγαλύτερος αριθμός μικρών πλευρικών λοβών (ripple),
- ο κύριος λοβός πλαταίνει αισθητά, μειώνοντας την κατευθυντικότητα.

Το αποτέλεσμα είναι χαρακτηριστικό των βαρύτερων κατανομών, όπου η καταστολή πλευρικών λοβών επιτυγχάνεται με κόστος την αύξηση του beamwidth.

Παρατηρήσεις στο πεδίο της μεταβλητής ψ : Η αναπαράσταση του παράγοντα στοιχειοκεραίας ως συνάρτηση της φασικής μεταβλητής

$$\psi = kd \cos \theta$$

αποκαλύπτει:

- τις μετατοπίσεις των μηδενικών (nulls),
- την προοδευτική εξίσωση του περιβλήματος των πλευρικών λοβών,
- ότι το παγκόσμιο μέγιστο παραμένει στη θέση $\psi = 0$, όπως προβλέπει η θεωρία.

Φαινόμενα λόγω στοχαστικής βελτιστοποίησης: Ο γενετικός αλγόριθμος (GA) είναι στοχαστικός, επομένως:

- η αρχική πληθυσμιακή κατανομή είναι τυχαία,
- οι τελεστές crossover και mutation εισάγουν μεταβλητότητα,
- οι λύσεις που προκύπτουν μπορεί να διαφέρουν ελαφρώς από run σε run.

Αν και τα βέλτιστα ρεύματα

$$I = [1, I_1, I_2, I_3, I_4, I_4, I_3, I_2, I_1, 1]$$

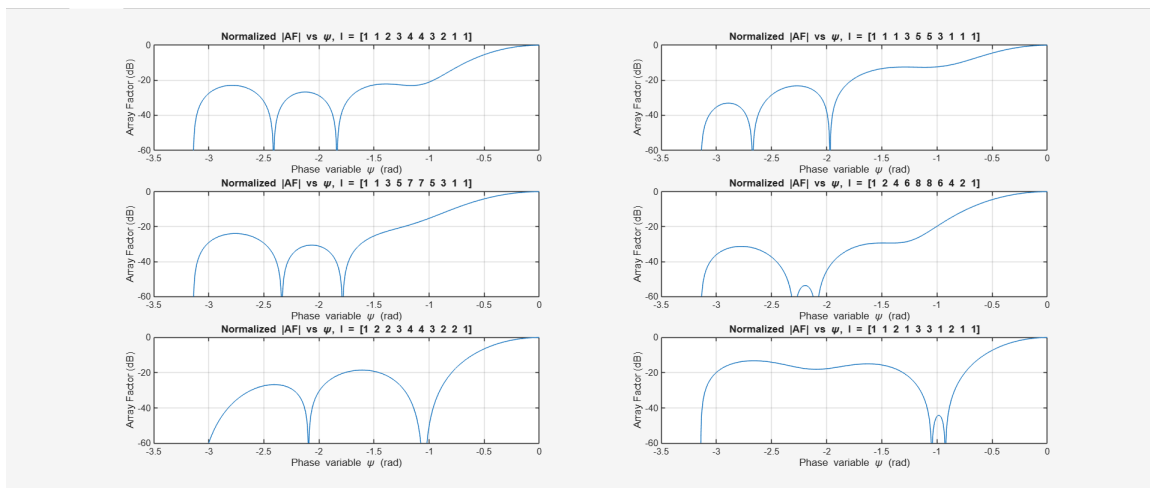
μεταβάλλονται από εκτέλεση σε εκτέλεση, τα διαγράμματα ακτινοβολίας παραμένουν ποιοτικά ίδια και πετυχαίνουν το επιθυμητό SLL με μεγάλη ακρίβεια. Το γεγονός αυτό επιβεβαιώνει ότι το πρόβλημα σύνθεσης έχει πολλές σχεδόν ισοδύναμες λύσεις, όπως είναι γνωστό στη θεωρία των ανομοιόμορφων στοιχειοκεραιών.

Συνολικά συμπεράσματα:

- Η συνάρτηση κόστους SLL_error εξισώνει επιτυχώς τους πλευρικούς λοβούς στην επιθυμητή στάθμη.
- Η αύξηση της καταστολής SLL οδηγεί σε:
 - υψηλότερη ανομοιομορφία ρευμάτων,
 - πλατύτερο κύριο λοβό,
 - χαμηλότερη κατευθυντικότητα.
- Τα αποτελέσματα συμφωνούν πλήρως με την κλασική θεωρία κατανομών τύπου Chebyshev και με τη θεωρητική σχέση μεταξύ SLL και beamwidth.

4.2.5 Συγκριτική Ανάλυση Διαφορετικών Κατανομών Ρευμάτων

Για λόγους κατανόησης παρουσιάζεται στο Σχήμα 4.6 σύγκριση διαφόρων προκαθορισμένων (hard-coded) κατανομών ρευμάτων και του αντίστοιχου παράγοντα στοιχειοκεραίας στο πεδίο της μεταβλητής φάσης ψ .



Σχήμα 4.6: Σύγκριση διαφορετικών κατανομών ρευμάτων και της επίδρασής τους στο διάγραμμα ακτινοβολίας.

Οι έξι χαρακτηριστικές περιπτώσεις που απεικονίζονται προκύπτουν από διαφορετικά προφίλ ρευμάτων (I_1, I_2, I_3, I_4) και επιτρέπουν να εξεταστεί καθαρά η επίδραση της κλίσης ρεύματος στη μορφή και στον αριθμό των πλευρικών λοβών.

Ομοιόμορφα ρεύματα: $I = [1, 1, \dots, 1]$. Η περίπτωση αυτή λειτουργεί ως γραμμή αναφοράς:

- το διάγραμμα παρουσιάζει το **μέγιστο πλήθος πλευρικών λοβών**, συμμετρικά κατανεμημένων,
- ο κύριος λοβός είναι σχετικά **στενός**,

- δεν υπάρχει καταστολή πλευρικών λοβών, καθώς όλα τα στοιχεία ακτινοβολούν με ίδια ένταση.

Η μορφή αυτή αποτελεί την «καθαρή» συμπεριφορά μιας στοιχειοκεραίας χωρίς βελτιστοποίηση.

Ήπια κατανομή ρεύματος: $I = [1, 1, 2, 3, 4, 4, 3, 2, 1, 1]$. Η σταδιακή αύξηση προς τα κεντρικά στοιχεία μειώνει ομαλά το πλάτος των πλευρικών λοβών. Παρατηρείται ότι:

- ο συνολικός αριθμός πλευρικών λοβών παραμένει ίδιος,
- το ύψος των πλευρικών λοβών μειώνεται,
- το διάγραμμα είναι πιο «ομαλό» σε σχέση με την ομοιόμορφη περίπτωση.

Εντονότερη κλιμάκωση ρεύματος: $I = [1, 2, 2, 3, 4, 4, 3, 2, 2, 1]$. Η μεγαλύτερη μεταβολή ρευμάτων προκαλεί:

- περαιτέρω μείωση των πλευρικών λοβών,
- ελαφρά διεύρυνση του κύριου λοβού—αναμενόμενο, καθώς όσο εντονότερη είναι η ανομοιομορφία τόσο μειώνεται η κατευθυντικότητα.

Πολύ ισχυρή κατανομή ρεύματος: $I = [1, 2, 4, 6, 8, 8, 6, 4, 2, 1]$. Σε αυτή την περίπτωση:

- η ενίσχυση των κεντρικών στοιχείων είναι πολύ μεγάλη,
- οι πλευρικοί λοβοί καταστέλλονται σημαντικά,
- ο κύριος λοβός διευρύνεται περαιτέρω.

Το διάγραμμα μοιάζει πολύ με Chebyshev-optimized μορφές.

Μη συμμετρικό ή ήπια παραμορφωμένο προφίλ ρευμάτων: $I = [1, 1, 2, 1, 3, 3, 1, 2, 1, 1]$. Η ασυμμετρία στα ρεύματα προκαλεί:

- μικρή μετατόπιση των πλευρικών λοβών,
- μη ιδανική συμμετρία του διαγράμματος,
- αύξηση των ενδιάμεσων μικρών κυματώσεων (ripples).

Ερμηνεία της επίδρασης των ρευμάτων (I_1, I_2, I_3, I_4)

Από τη σύγκριση των παραπάνω προφίλ προκύπτει ότι:

- Όσο περισσότερο αυξάνεται η ενίσχυση των κεντρικών ρευμάτων, τόσο περισσότερο καταστέλλονται οι πλευρικοί λοβοί.
- Η καταστολή αυτή έχει ως αντίτιμο τη διεύρυνση του κύριου λοβού και συνεπώς μείωση της κατευθυντικότητας.

- Η ισχυρή ανομοιομορφία οδηγεί σε μικρότερο αριθμό ορατών πλευρικών λοβών, καθώς τα πιο απομακρυσμένα μηδενικά μετατοπίζονται ή εξαφανίζονται.
- Τα ήπια προφίλ (π.χ. $[1, 2, 3, 4]$) μειώνουν τους πλευρικούς λοβούς χωρίς να διαταράσσουν σημαντικά το σχήμα του κύριου λοβού.
- Τα πολύ απότομα προφίλ (π.χ. $[1, 2, 4, 6, 8]$) τείνουν να παράγουν Chebyshev τύπου διαγράμματα με σχεδόν ισοϋψείς πλευρικούς λοβούς.

Συνολικά, η σύγκριση δείχνει ότι η κατανομή ρευμάτων αποτελεί το βασικό εργαλείο για τη διαμόρφωση του διαγράμματος ακτινοβολίας και ότι η βελτιστοποίηση που εφαρμόστηκε στην προηγούμενη ενότητα προκύπτει ως φυσική συνέχεια της θεωρητικής συμπεριφοράς που παρατηρούμε στα παραπάνω χειροκίνητα παραδείγματα.

4.3 Υπολογισμός κατευθυντικότητας βέλτιστων κατανομών ρευμάτων

Στο ερώτημα (B) ζητείται ο υπολογισμός της κατευθυντικότητας της γραμμικής ανομοιομορφής στοιχειοκεραίας για τις τρεις βέλτιστες κατανομές ρευμάτων που προέκυψαν στο ερώτημα (A), δηλαδή για στόχους πλευρικών λοβών $SLL = -20, -30$ και -40 dB, και η σύγκρισή τους με την κατευθυντικότητα της αντίστοιχης ομοιόμορφης στοιχειοκεραίας ίσου πλήθους στοιχείων.

4.3.1 Θεωρητικό υπόβαθρο

Από την ανάλυση του Κεφαλαίου 3 (1.2 τύπος) της αναφοράς για γραμμική ανομοιόμορφη στοιχειοκεραία με ρεύματα

$$I_n e^{jn\delta}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1,$$

η κατευθυντικότητα δίνεται από τη σχέση

$$D = \frac{kd \left(\sum_{n=0}^{N-1} I_n \right)^2}{\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} I_n I_m e^{j(n-m)\delta} \frac{\sin[(n-m)kd]}{(n-m)}},$$

με την κατανόηση ότι για $n = m$ ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin[(n-m)kd]}{(n-m)} \Big|_{n=m} = kd.$$

Στο συγκεκριμένο πρόβλημα θεωρούμε *πραγματικά* ρεύματα και μηδενική επιπλέον φασική διαφορά μεταξύ των στοιχείων, δηλαδή $\delta = \phi = 0$. Τα ρεύματα είναι συμμετρικά ως προς το κέντρο της διάταξης και γράφονται

$$\mathbf{I} = [1, I_1, I_2, I_3, I_4, I_4, I_3, I_2, I_1, 1],$$

όπου τα I_1, \dots, I_4 είναι τα πλάτη που βρέθηκαν από τη βελτιστοποίηση του ερωτήματος (A) για κάθε στόχο SLL.

4.3.2 Υλοποίηση της σχέσης κατευθυντικότητας σε MATLAB

Η παραπάνω θεωρία υλοποιείται με τη συνάρτηση `dir_full(p)`, όπου το διάνυσμα $\mathbf{p} = [I_1 \ I_2 \ I_3 \ I_4]$ περιέχει τα τέσσερα ανεξάρτητα ρεύματα (τα υπόλοιπα προκύπτουν από συμμετρία).

Αριθμητής: Αρχικά υπολογίζεται το άθροισμα όλων των ρευμάτων

$$S = \sum_{n=0}^{N-1} I_n$$

και ο αριθμητής της κατευθυντικότητας

$$\text{num} = kd S^2.$$

Παρονομαστής: Ο παρονομαστής υπολογίζεται ως διπλό άθροισμα

$$\text{den} = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} I_n I_m e^{j(n-m)\phi} s_{nm},$$

όπου για $\phi = 0$ παίρνουμε

$$s_{nm} = \begin{cases} kd, & n = m, \\ \frac{\sin[(n-m)kd]}{(n-m)}, & n \neq m. \end{cases}$$

Η τελική κατευθυντικότητα προκύπτει ως

$$D_{\text{non-unif}} = \frac{\text{num}}{\Re\{\text{den}\}}.$$

Ομοιόμορφη περίπτωση: Για λόγους σύγκρισης υπολογίζεται και η κατευθυντικότητα της ομοιόμορφης στοιχειοκεραίας δύο τρόπων:

- με τον ίδιο διακριτό τύπο (ίση διέγερση, $I_n = 1$) μέσω `dir_full([1 1 1 1])`,
- με τον κλειστό τύπο της παραγράφου 1.1 (Κεφάλαιο αναφοράς 2) (ομοιόμορφη στοιχειοκεραία) μέσω της συνάρτησης `dir_uniform(k,N,d,phi)`, όπου εισάγεται η `sine integral Si(x)` με αριθμητικό ολοκλήρωμα.

Τέλος, όλες οι τιμές κατευθυντικότητας μετατρέπονται σε dBi:

$$D_{\text{dBi}} = 10 \log_{10} D.$$

Μαθηματική ερμηνεία και περαιτέρω επεξήγηση της συνάρτησης `dir_uniform`.

Η `dir_uniform` υλοποιεί τον κλειστό αναλυτικό τύπο κατευθυντικότητας για την ειδική περίπτωση ομοιόμορφης τροφοδοσίας ($I_n = 1$). Η ύπαρξη συμμετρίας επιτρέπει την απλοποίηση του διπλού αθροίσματος σε έκφραση που περιλαμβάνει το *sine integral*:

$$\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt.$$

Χρησιμοποιούνται οι βοηθητικές μεταβλητές

$$a = \frac{N(-kd + \phi)}{2}, \quad b = \frac{N(kd + \phi)}{2},$$

οπότε η κατευθυντικότητα υπολογίζεται από:

$$D = \frac{Nkd}{\frac{\sin^2 a}{a} - \frac{\sin^2 b}{b} + \text{Si}(2b) - \text{Si}(2a)}.$$

Ο κώδικας χειρίζεται και την ειδική περίπτωση $b \approx 0$ ώστε να αποφευχθούν αριθμητικές αστάθειες. Η συνάρτηση αυτή αποτελεί ακριβή αναλυτική λύση και χρησιμοποιείται ως σημείο αναφοράς για τη σύγκριση με τις βελτιστοποιημένες ανομοιόμορφες κατανομές ρευμάτων.

4.3.3 Αποτελέσματα

Χρησιμοποιώντας τα βέλτιστα ρεύματα από το ερώτημα (A) για $\text{SLL} = -20, -30$ και -40 dB, προκύπτουν οι κατευθυντικότητες που συνοψίζονται στον Πίνακα 4.2.

Πίνακας 4.2: Κατευθυντικότητα βέλτιστων ανομοιόμορφων κατανομών και σύγκριση με ομοιόμορφη στοιχειοκεραία ($N = 10, d = \lambda/2$).

SLL Target	$D_{\text{non-unif}}$ [dBi]	D_{unif} (τύπος 1.2) [dBi]	D_{unif} (τύπος 1.1) [dBi]
-20 dB	8.62	10.00	10.09
-30 dB	8.32	10.00	10.09
-40 dB	8.39	10.00	10.09

4.3.4 Παρατηρήσεις και συμπεράσματα

Από τα αριθμητικά αποτελέσματα προκύπτουν τα εξής:

- Η ομοιόμορφη στοιχειοκεραία ($I_n = 1$) παρουσιάζει κατευθυντικότητα περίπου $D \simeq 10$ dBi, τόσο όταν υπολογίζεται από τον διακριτό τύπο (θέμα 1.2) όσο και από τον κλειστό τύπο (θέμα 1.1). Η πολύ μικρή διαφορά ≈ 0.09 dB οφείλεται καθαρά σε αριθμητικές προσεγγίσεις (ολοκλήρωμα sine integral).
- Οι ανομοιόμορφες, βελτιστοποιημένες κατανομές ρευμάτων για $\text{SLL} = -20, -30, -40$ dB έχουν κατευθυντικότητα περίπου 8.3–8.6 dBi, δηλαδή 1.4–1.8 dB μικρότερη από την ομοιόμορφη περίπτωση. Η μείωση αυτή είναι αναμενόμενη, καθώς η ισχυρή διαβάθμιση των ρευμάτων κλιμάκωσης πλαταίνει τον κύριο λοβό για να κατασταλούν οι πλευρικοί.

- Η διαφορά κατευθυντικότητα ανάμεσα στις τρεις περιπτώσεις SLL είναι σχετικά μικρή: η μετάβαση από στόχο -20 σε -40 dB δεν αλλάζει δραματικά το D . Αυτό συμβαίνει επειδή, παρότι τα ρεύματα στα κεντρικά στοιχεία αυξάνονται όσο απαιτούμε χαμηλότερο SLL, το συνολικό άθροισμα S και ο βαθμός διασποράς τους δεν διαφοροποιούνται τόσο ώστε να προκύψει μεγάλη μεταβολή στην κατευθυντικότητα.
- Συνολικά επιβεβαιώνεται ο κλασικός συμβιβασμός (trade-off) μεταξύ κατευθυντικότητας και καταστολής πλευρικών λοβών: όσο πιο έντονη είναι η διαβάθμιση των ρευμάτων για να επιτευχθεί χαμηλό SLL, τόσο μειώνεται η κατευθυντικότητα σε σχέση με την ομοιόμορφη διάταξη ίδιου πλήθους στοιχείων.

Τέλος, σημειώνεται ότι επειδή ο γενετικός αλγόριθμος που χρησιμοποιήθηκε στο ερώτημα (Α) είναι στοχαστικός, οι βέλτιστες τιμές των (I_1, I_2, I_3, I_4) (και άρα οι τιμές κατευθυντικότητας) μπορεί να διαφέρουν ελαφρά από εκτέλεση σε εκτέλεση. Ωστόσο, η συνολική τάση που αποτυπώνει ο Πίνακας 4.2 παραμένει η ίδια: η ανομοιόμορφη τροφοδοσία μειώνει την κατευθυντικότητα σε σχέση με την ομοιόμορφη, με αντάλλαγμα την σημαντική βελτίωση του SLL.

4.4 Multi-Objective Optimization για Σχεδίαση Ανομοιόμορφης Στοιχειοκεραίας

Στο ερώτημα (γ) ζητείται να πραγματοποιηθεί multiobjective optimization με δύο ταυτόχρονους στόχους:

- **Ελαχιστοποίηση** του σφάλματος πλευρικών λοβών (SLL_error),
- **Μεγιστοποίηση** της κατευθυντικότητας D της γραμμικής στοιχειοκεραίας $N = 10$, $d = \lambda/2$.

Η βελτιστοποίηση πραγματοποιήθηκε με τον αλγόριθμο `gamultiobj` (γενετικός αλγόριθμος πολλαπλών στόχων), ο οποίος δεν επιστρέφει μία μόνο λύση, αλλά ένα σύνολο μη-κυριαρχούμενων λύσεων που σχηματίζουν το μέτωπο *Pareto* (Pareto front).

4.4.1 Διατύπωση των δύο αντικειμενικών συναρτήσεων

Η νέα συνάρτηση κόστους `SLL_error_and_D` επιστρέφει ένα διάνυσμα δύο συνιστωσών

$$\mathbf{f}(p) = [f_1(p), f_2(p)] = [\text{SLL_error}(p), -D(p)],$$

όπου $p = [I_1, I_2, I_3, I_4]^T$ είναι οι άγνωστες παράμετροι της συμμετρικής κατανομής ρευμάτων

$$I = [1, I_1, I_2, I_3, I_4, I_4, I_3, I_2, I_1, 1].$$

Πρώτος στόχος - σφάλμα πλευρικών λοβών $f_1(p)$: Το πρώτο σκέλος της συνάρτησης είναι ουσιαστικά ίδιο με την `SLL_error` του ερωτήματος (α):

1. Υπολογίζεται ο παράγοντας στοιχειοκεραίας

$$AF(\theta_i) = \sum_{n=1}^N I_n e^{j(n-1)\psi_i}, \quad \psi_i = kd \cos \theta_i + \phi, \quad \theta_i \in [0^\circ, 90^\circ].$$

2. Κανονικοποιείται το μέτρο ως προς τον κύριο λοβό

$$AF_{\text{norm}}(\theta_i) = \frac{|AF(\theta_i)|}{\max_i |AF(\theta_i)|}.$$

3. Εντοπίζονται με `findpeaks` όλα τα τοπικά μέγιστα του AF_{norm} , διαγράφεται ο κύριος λοβός (αν είναι > 0.98) και απομένουν K πλευρικοί λοβοί με τιμές $\text{peaks}_1, \dots, \text{peaks}_K$ (σε γραμμική κλίμακα).

4. Ο στόχος SLL σε dB μετατρέπεται σε γραμμική μορφή

$$\text{SLL}_{\text{target,lin}} = 10^{\frac{dB_{\text{Target}}}{20}}.$$

5. Το σφάλμα ορίζεται ως μέσο τετραγωνικό σφάλμα

$$f_1(p) = \text{SLL_error}(p) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K (\text{peaks}_k - \text{SLL}_{\text{target,lin}})^2,$$

με ποινή $f_1(p) = 10^6$ όταν δεν εντοπίζονται πλευρικοί λοβοί.

Δεύτερος στόχος - κατευθυντικότητα $f_2(p) = -D(p)$: Η κατευθυντικότητα $D(p)$ εκτιμάται με την κλειστή μορφή που προέκυψε στο Κεφάλαιο 2 για γραμμική (μη απαραίτητα ομοιόμορφη) στοιχειοκεραία:

$$D(p) = \frac{kd \left(\sum_{n=0}^{N-1} I_n \right)^2}{\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} I_n I_m e^{j(n-m)\phi} \frac{\sin[(n-m)kd]}{n-m}},$$

με κατάλληλο χειρισμό του ορίου $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x / x = 1$ για $n = m$.

Στον κώδικα `SLL_error_and_D` η παραπάνω σχέση υλοποιείται με διπλό βρόχο ως εξής:

- το γινόμενο ρευμάτων και φάσης

$$I_{nm} = I_n I_m e^{j(n-m)\phi},$$

- ο όρος

$$s_{nm} = \begin{cases} kd, & n = m, \\ \frac{\sin[(n-m)kd]}{n-m}, & n \neq m, \end{cases}$$

- ο παρονομαστής D είναι

$$\text{den} = \sum_{n,m} I_{nm} s_{nm}, \quad D = \frac{kd \left(\sum_n I_n \right)^2}{\Re\{\text{den}\}}.$$

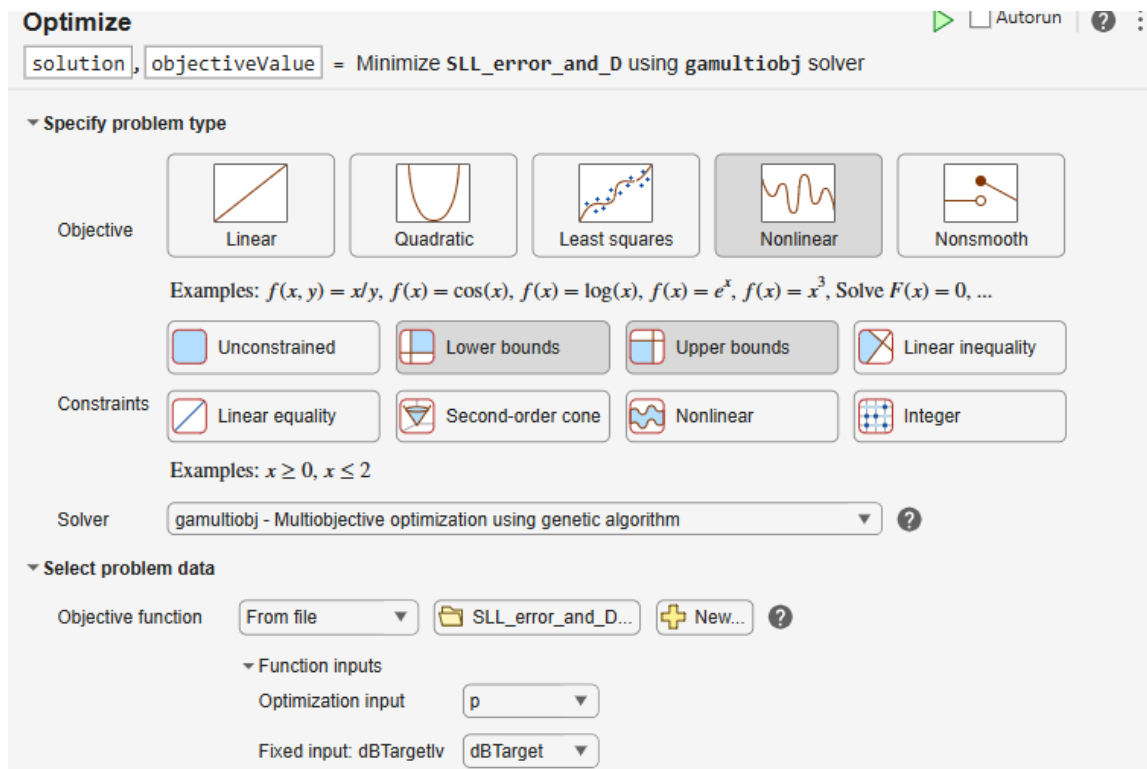
Επειδή ο `gamultiobj` ελαχιστοποιεί όλες τις συνιστώσες της \mathbf{f} , ως δεύτερος στόχος λαμβάνεται $f_2(p) = -D(p)$. Έτσι, μικρές τιμές του f_2 αντιστοιχούν σε μεγάλη κατευθυντικότητα.

4.4.2 Ρύθμιση του gamultiobj και Υπολογισμός του Μετώπου Pareto

Η βελτιστοποίηση πραγματοποιήθηκε στο Optimize Live Script της MATLAB, επιλέγοντας ως solver τον gamultiobj (γενετικός αλγόριθμος πολλαπλών στόχων). Οι βασικές ρυθμίσεις ήταν:

- Αριθμός μεταβλητών: 4 (ρεύματα I_1, \dots, I_4).
- Όρια: $1 \leq I_k \leq 10$ για κάθε k .
- Population size: 70 άτομα.
- Pareto set fraction: 0.8 (μεγάλο ποσοστό ατόμων διατηρείται πάνω στο μέτωπο Pareto).
- Ενεργοποίηση της επιλογής Plot Pareto front για on-line απεικόνιση των λύσεων.

Στο Σχήμα 4.7 φαίνεται η βασική διαμόρφωση του προβλήματος στο Optimize Live Script: επιλέγεται ως objective function η SLL_error_and_D, η οποία επιστρέφει το διάνυσμα $\mathbf{f}(p) = [\text{SLL_error}(p), -D(p)]$, ενώ ως μεταβλητές βελτιστοποίησης ορίζονται τα ρεύματα $p = [I_1, I_2, I_3, I_4]^T$. Ο στόχος του gamultiobj είναι η ταυτόχρονη ελαχιστοποίηση των δύο συνιστωσών, δηλαδή η μείωση του σφάλματος SLL και η μεγιστοποίηση της κατευθυντικότητας μέσω του $-D$.



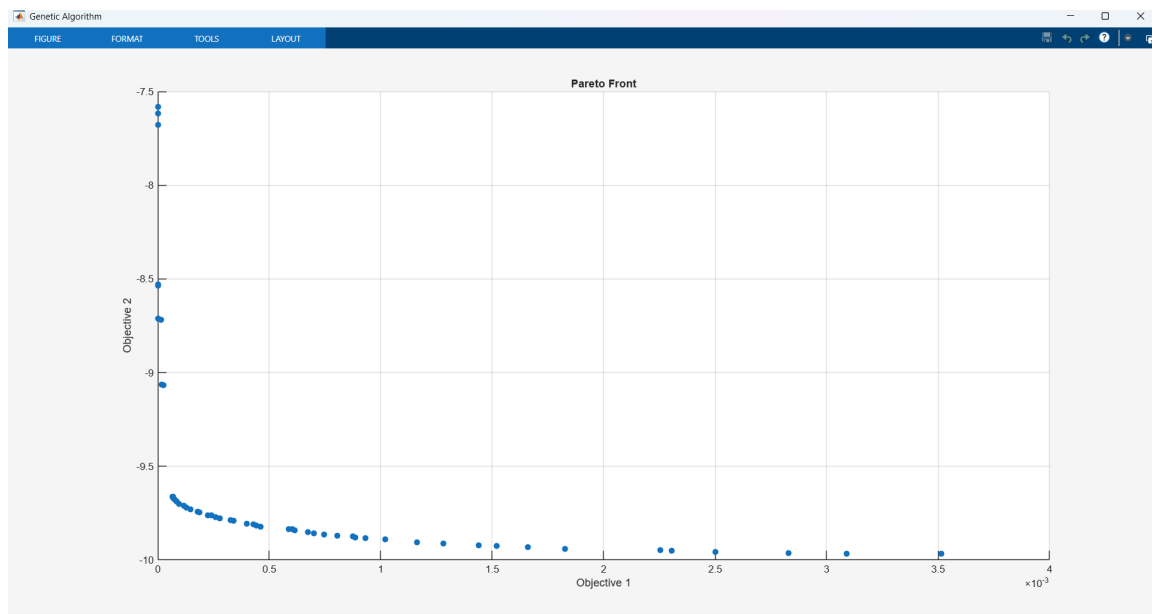
Σχήμα 4.7: Ρύθμιση της αντικειμενικής συνάρτησης και των μεταβλητών στο Optimize Live Script για το πρόβλημα πολλαπλών στόχων.

Στο Σχήμα 4.8 παρουσιάζονται οι κυριότερες παράμετροι του αλγορίθμου gamultiobj: αριθμός μεταβλητών ($\text{NUM} = 4$), τα κάτω και άνω όρια (LB και UB), το population size και

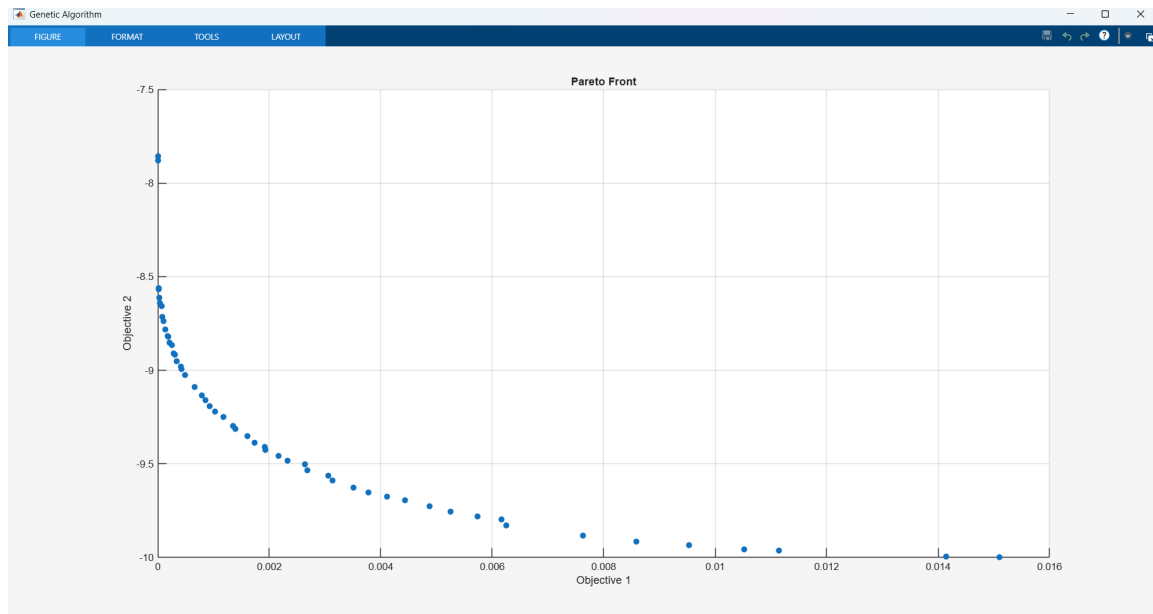
το Pareto set fraction. Η επιλογή Pareto front στο τμήμα Display progress επιτρέπει την συνεχή οπτικοποίηση της προσέγγισης του μετώπου Παρετο καθώς εξελίσσεται ο πληθυσμός του GA.

Σχήμα 4.8: Ρύθμιση των παραμέτρων του gamultiobj (όρια ρευμάτων, μέγεθος πληθυσμού, Pareto set φραξτιον και επιλογή απεικόνισης του Pareto front).

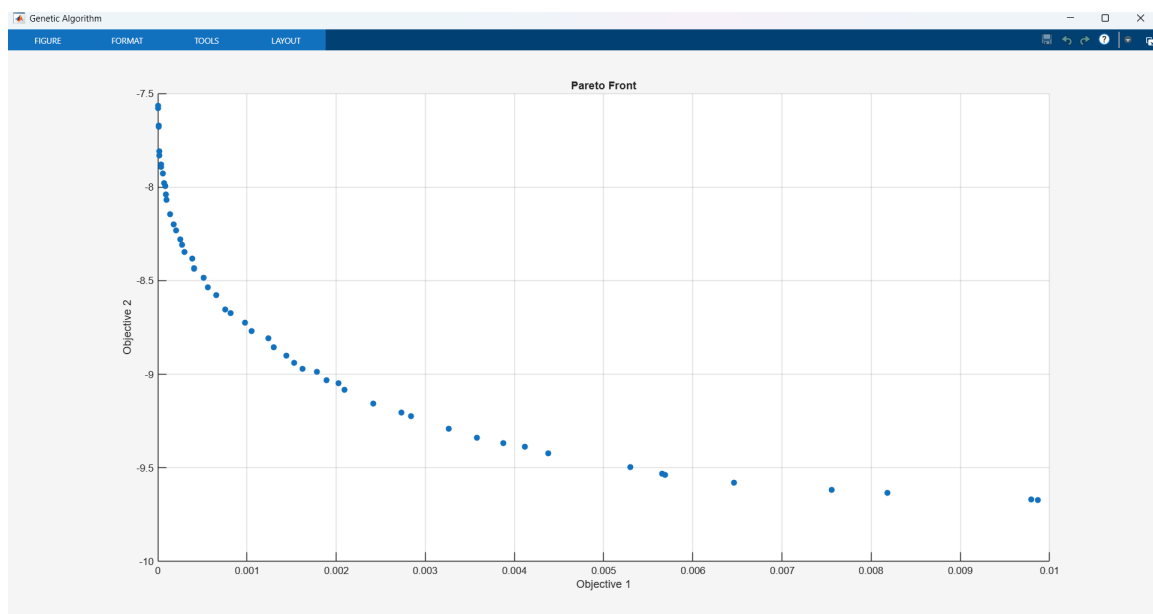
Για κάθε στόχο SLL (-20 , -30 , -40 dB) ο αλγόριθμος παρήγαγε ένα σύνολο σημείων στο επίπεδο $(f_1, f_2) = (\text{SLL_error}, -D)$, το οποίο σχηματίζει την αντίστοιχη καμπύλη Pareto. Ενδεικτικά, φαίνονται τα μέτωπα Pareto για τις τρεις περιπτώσεις στόχου:



Σχήμα 4.9: Μέτωπο Pareto για στόχο SLL = -20 dB.



Σχήμα 4.10: Μέτωπο Pareto για στόχο $SLL = -30$ dB.



Σχήμα 4.11: Μέτωπο Pareto για στόχο $SLL = -40$ dB.

Κάθε σημείο πάνω σε αυτές τις καμπύλες αντιπροσωπεύει μία διαφορετική κατανομή ρευμάτων p , για την οποία δεν υπάρχει άλλη λύση που να έχει ταυτόχρονα μικρότερο σφάλμα SLL και μεγαλύτερη κατευθυντικότητα. Η καμπύλη Pareto περιγράφει λοιπόν όλους τους βέλτιστους συμβιβασμούς ανάμεσα στους δύο αντικρουόμενους στόχους.

4.4.3 Επιλογή Αντιπροσωπευτικών Λύσεων από το Μέτωπο Pareto

Για κάθε στόχο SLL αποθηκεύτηκαν τα αποτελέσματα του `gamultiobj` σε αρχεία `results_SLLxx_objectivePareto.xlsx` (τιμές των f_1, f_2) και `results_SLLxx_currentsPareto.xlsx` (αντίστοιχα ρεύματα) όπου xx αντιστοιχεί σε abs(dB) κάθε φορά. Στη συνέχεια, μέσω MATLAB επιλέχθηκε, για κάθε στόχο, το σημείο του μετώπου με ελάχιστο σφάλμα SLL_error.

Οι τελικές επιλεγμένες λύσεις και οι τιμές κατευθυντικότητας που αντιστοιχούν σε αυτές συνοψίζονται στον Πίνακα 4.2.

Πίνακας 4.3: Ενδεικτικές λύσεις από το μέτωπο Pareto για κάθε στόχο SLL.

SLL Target	SLL_error	D [dBi]	I_1	I_2	I_3	I_4
−20 dB	1.37×10^{-10}	8.80	3.232	5.117	5.806	9.291
−30 dB	4.90×10^{-7}	8.95	2.584	4.767	5.726	7.263
−40 dB	1.01×10^{-6}	8.79	2.604	4.779	6.938	8.262

Παρατηρούμε ότι, παρά το πολύ μικρό σφάλμα SLL_error (της τάξης 10^{-10} – 10^{-6}), η κατευθυντικότητα παραμένει σχετικά υψηλή (≈ 8.8 – 9 dBi), ελαφρώς βελτιωμένη σε σχέση με τις μονοκριτηριακές λύσεις του ερωτήματος (B). Οι αντίστοιχες κατανομές ρευμάτων είναι πιο έντονα κλιμακωμένες προς τα κεντρικά στοιχεία, όπως αναμένεται για συνδυασμένη απαίτηση χαμηλού SLL και μεγάλης D .

4.4.4 Ερμηνεία του Μετώπου Pareto

Από τα Σχήματα 4.9–4.11 προκύπτουν τα εξής:

- Το μέτωπο Pareto εμφανίζει σαφώς *φθίνουσα* μορφή: καθώς το SLL_error (άξονας x) μειώνεται και επιτυγχάνεται πιο ακριβής καταστολή των πλευρικών λοβών, η ποσότητα $-D$ (άξονας y) αυξάνεται προς το μηδέν. Επειδή ο δεύτερος στόχος ορίζεται ως $f_2 = -D$, η αύξηση του $-D$ αντιστοιχεί σε μείωση της πραγματικής κατευθυντικότητας D . Το γεγονός αυτό εκφράζει τον φυσικό συμβιβασμό της σχεδίασης: ισχυρή καταστολή των πλευρικών λοβών οδηγεί σε πλατύτερο κύριο λοβό και συνεπώς σε μειωμένη κατευθυντικότητα.
- Για μικρές τιμές SLL_error (δεξιό άκρο της καμπύλης) επιτυγχάνεται σχεδόν ιδανική εξίσωση πλευρικών λοβών γύρω από τη στάθμη στόχο, με κατευθυντικότητα περίπου 8.8–9 dBi.
- Πηγαίνοντας προς μεγαλύτερες τιμές SLL_error (αριστερό άκρο της καμπύλης) παρατηρούνται λύσεις με ελαφρώς χειρότερο έλεγχο πλευρικών λοβών, αλλά με μεγαλύτερη κατευθυντικότητα.

Συνεπώς, ο χρήστης μπορεί να επιλέξει μετά τη βελτιστοποίηση ποια λύση εξυπηρετεί καλύτερα τις ανάγκες της εφαρμογής: είτε σχεδόν ιδανικό SLL με μέτρια κατευθυντικότητα, είτε λίγο υψηλότερους πλευρικούς λοβούς με κέρδος σε D . Η ύπαρξη του μετώπου Pareto αναδεικνύει καθαρά τον συμβιβασμό μεταξύ των δύο κριτηρίων και δείχνει ότι το πρόβλημα σύνθεσης της στοιχειοκεραίας δεν έχει μία μοναδική βέλτιστη λύση, αλλά μια οικογένεια ισοδύναμων βελτίστων λύσεων.

Οι αντίστοιχοι κώδικες MATLAB που χρησιμοποιήθηκαν για τους υπολογισμούς και τις απεικονίσεις της άσκησης είναι οι εξής:

- `Ex1_3_PartA.m`
- `Ex1_3_PartA_Optimized.mlx`
- `Ex1_3_PartB.m`
- `Ex1_3_PartC.m`
- `Ex1_3_PartC_Optimized.mlx`
- `SLL_error.m`
- `SLL_error_and_D.m`
- `SLL_plot.m`

Κεφάλαιο 5

Σχεδίαση στοιχειοκεραίας με υπολογισμό της αντίστασης εισόδου

Βιβλιογραφία

- [1] Elearning Ασκήσεις και Θεωρία 058 Κεραίες και Διάδοση