



ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

Τεχνικές Βελτιστοποίησης Αναφορά FINAL PROJECT

Διακολουκάς Δημήτριος
AEM 10642

Email: ddiakolou@ece.auth.gr

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή και επίδειξη προβλήματος	2
2	Μαθηματική Διατύπωση του Προβλήματος	3
3	Υλοποίηση Γενετικού Αλγορίθμου	6
4	Γενετικός Αλγόριθμος - Μεταβλητός Ρυθμός Εισερχόμενων Οχημάτων	10

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή και επίδειξη προβλήματος

Στην αναφορά αυτή θα αναλυθεί το πρόβλημα της ελαχιστοποίησης μιας συνάρτησης πολλών μεταβλητών, με την εφαρμογή γενετικών αλγορίθμων. Το πρόβλημα βασίζεται σε ένα οδικό δίκτυο, όπου οι κόμβοι αναπαριστούν διασταυρώσεις και οι ακμές κυκλοφοριακές κατευθύνσεις. Συγκεκριμένα, κάθε ακμή του γράφου χαρακτηρίζεται από σταθερές και δυναμικές παραμέτρους που επηρεάζουν το χρόνο διέλευσης των οχημάτων. Στόχος είναι να βρεθεί ο αριθμός των οχημάτων που ελαχιστοποιεί το συνολικό χρόνο διέλευσης στο δίκτυο, διατηρώντας ισορροπία στη ροή οχημάτων ανά κόμβο.

Στην αναφορά αυτή εξετάζονται τα παρακάτω:

- Δίνεται η μαθηματική διατύπωση του προβλήματος.
- Υλοποιείται ένας γενετικός αλγόριθμος σε περιβάλλον Matlab.
- Εξετάζεται η ευαισθησία της λύσης σε μεταβολές της εισερχόμενης ροής οχημάτων.

Κεφάλαιο 2

Μαθηματική Διατύπωση του Προβλήματος

Το πρόβλημα πραγματεύεται την ελαχιστοποίηση του συνολικού χρόνου διέλευσης σε ένα οδικό δίκτυο. Το δίκτυο απεικονίζεται στο Σχήμα 2.1, όπου οι κόμβοι αντιπροσωπεύουν διασταυρώσεις και οι ακμές κυκλοφοριακές κατευθύνσεις.

Περιγραφή του Προβλήματος

Οι ακμές του δικτύου έχουν χαρακτηριστικά που επηρεάζουν τον χρόνο διέλευσης των οχημάτων:

- t_i : ο σταθερός χρόνος που απαιτείται για την κίνηση στο δρόμο i όταν η κίνηση είναι ασθενής.
- x_i : ο ρυθμός διέλευσης των οχημάτων στο δρόμο i .
- c_i : ο μέγιστος δυνατός ρυθμός διέλευσης οχημάτων στο δρόμο i .
- a_i : μία σταθερά που εξαρτάται από το δρόμο i .

Ο χρόνος κίνησης σε κάθε δρόμο i δίνεται από τη σχέση:

$$T_i(x_i) = t_i + a_i \frac{x_i}{1 - \frac{x_i}{c_i}}, \quad (2.1)$$

με:

$$\lim_{x_i \rightarrow 0} T_i(x_i) = t_i, \quad \text{και} \quad \lim_{x_i \rightarrow c_i} T_i(x_i) = +\infty.$$

Στόχος

Σκοπός είναι η ελαχιστοποίηση του συνολικού χρόνου διέλευσης T στο δίκτυο:

$$T = f(x_i) = \sum_{i=1}^{17} T_i(x_i), \quad (2.2)$$

υπό τις εξής συνθήκες:

1. Ο ρυθμός εισερχόμενων οχημάτων είναι ίσος με V .
2. Η κατανομή των οχημάτων στους κόμβους είναι τέτοια ώστε όσα οχήματα εισέρχονται σε κάθε κόμβο, τόσα να εξέρχονται.

Να σημειωθεί ότι στα παρακάτω ερωτήματα επιλέχθηκε η μεγιστοποίηση της $\frac{1}{f(x_i)}$ ως fitness function για την ελαχιστοποίηση του T στον γενετικό αλγόριθμο που υλοποιήθηκε.

Οι παράμετροι του προβλήματος δίνονται ως εξής:

- Οι τιμές του c_i για τις ακμές του δικτύου είναι:

$$\begin{bmatrix} 54.13 & 21.56 & 34.08 & 49.19 & 33.03 & 21.84 & 29.96 \\ 24.87 & 47.24 & 33.97 & 26.89 & 32.76 & 39.98 & 37.12 \\ 53.83 & 61.65 & 59.73 & & & & \end{bmatrix}$$

- Οι τιμές του a_i είναι:

$$a_i = \begin{cases} 1.25, & i = 1, \dots, 5, \\ 1.5, & i = 6, \dots, 10, \\ 1, & i = 11, \dots, 17. \end{cases}$$

- Ο συνολικός ρυθμός εισερχόμενων οχημάτων:

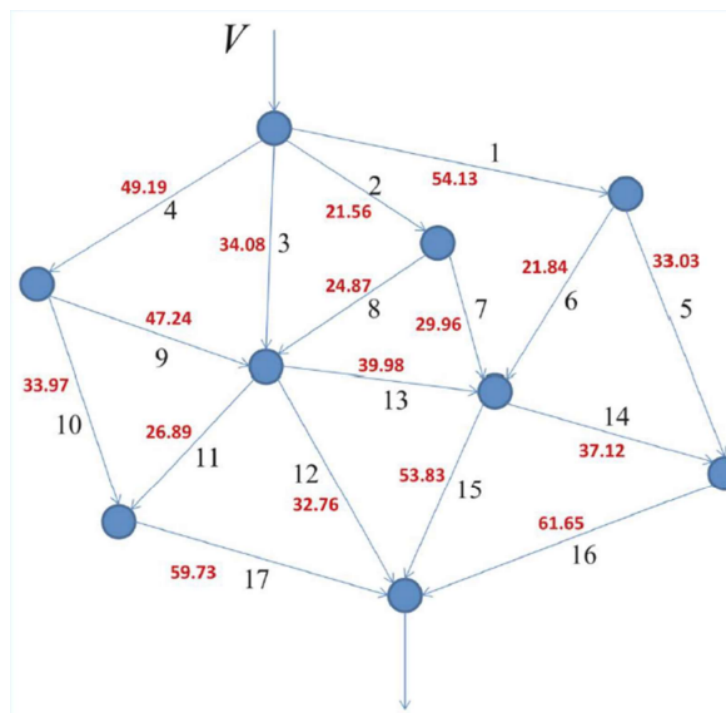
$$V = 100.$$

- Τυχαία επιλογή σταθεράς t_i :

$$t_i = 3, \quad i = 1, \dots, 5.$$

Σχήμα Δικτύου, Εξισώσεις και Περιορισμοί

Το δίκτυο φαίνεται στο Σχήμα 2.1, όπου αναγράφονται οι τιμές c_i για κάθε ακμή.



Σχήμα 2.1: Το οδικό δίκτυο.

Όσον αφορά τις εξισώσεις επειδή ο ρυθμός εισόδου ισούται με τον ρυθμό εξόδου εύκολα απορρέει το συμπέρασμα ότι με βάση και τις ακμές c_i και τα βέλη:

- $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = V$
- $x_1 = x_5 + x_6$
- $x_2 = x_7 + x_8$
- $x_4 = x_9 + x_{10}$
- $x_3 + x_8 + x_9 = x_{11} + x_{12} + x_{13}$
- $x_{13} + x_7 + x_6 = x_{14} + x_{15}$
- $x_{14} + x_5 = x_{16}$
- $x_{11} + x_{10} = x_{17}$
- $x_{17} + x_{12} + x_{15} + x_{16} = V$

Επιπλέον ζητώ να ισχύουν:

- $x_i \geq 0, \quad \forall i$
- $x_i - c_i \leq 0, \quad \forall i$

Χρειάζομαι αυτούς τους δύο περιορισμούς ώστε να εξασφαλίζεται η φυσική λογική του προβλήματος, ότι οι δρόμοι δεν μπορούν να υποστηρίξουν ροή μεγαλύτερη από τη χωρητικότητά τους και ότι δεν υπάρχει αρνητική ροή οχημάτων.

Κεφάλαιο 3

Υλοποίηση Γενετικού Αλγορίθμου

Η υλοποίηση του γενετικού αλγορίθμου πραγματοποιείται με στόχο την ελαχιστοποίηση του συνολικού χρόνου διέλευσης (μεγιστοποίηση της συνάρτησης καταλληλότητας που έχει οριστεί ως $\frac{1}{f(x_i)}$ στο δίκτυο (γράφο) υπό τους περιορισμούς που ορίζονται στο πρόβλημα και αναλύθηκαν παραπάνω στην Μαθηματική Διατύπωση. Παρακάτω περιγράφονται τα κύρια στάδια του αλγορίθμου.

Δημιουργία Αρχικού Πληθυσμού (Initial Population)

Η αρχική φάση του αλγορίθμου περιλαμβάνει τη δημιουργία ενός αρχικού πληθυσμού, δηλαδή μιας συλλογής πιθανών λύσεων. Η κάθε λύση αναπαρίσταται από έναν πίνακα που περιέχει τις ροές x_i σε κάθε δρόμο του δικτύου. Οι ροές αυτές πρέπει να ικανοποιούν βασικούς περιορισμούς όπως υποδείχτηκαν και παραπάνω:

- Κάθε ροή x_i είναι μη αρνητική ($x_i \geq 0$).
- Κάθε ροή x_i δεν υπερβαίνει τη χωρητικότητα του δρόμου ($x_i \leq c_i$).
- Οι ροές συνδέονται μέσω εξισώσεων ισορροπίας στους κόμβους.

Η τυχαιότητα στην αρχική κατανομή των ροών διασφαλίζει τη διαφορετικότητα στον πληθυσμό, κάτι που είναι απαραίτητο για την αποφυγή τοπικών ελαχίστων.

Συνάρτηση Καταλληλότητας (Fitness Function)

Η καταλληλότητα κάθε λύσης αξιολογείται μέσω της συνάρτησης:

$$f = \frac{1}{T},$$

όπως άλλωστε αναλύσαμε και παραπάνω όπου T είναι ο συνολικός χρόνος διέλευσης:

$$T = \sum_{i=1}^{17} \left(t_i + a_i \frac{x_i}{1 - \frac{x_i}{c_i}} \right).$$

Η συνάρτηση καταλληλότητας μεγιστοποιεί το αντίστροφο του συνολικού χρόνου, προκειμένου οι λύσεις με μικρότερο χρόνο διέλευσης να έχουν μεγαλύτερη πιθανότητα επιλογής.

Επιλογή Γονέων (Τροχός της Τύχης)

Η επιλογή των γονέων βασίζεται στη μέθοδο ρουλέτας (Roulette Method). Η πιθανότητα επιλογής μιας λύσης είναι ανάλογη της καταλληλότητάς της:

$$p_i = \frac{f_i}{\sum_j f_j}.$$

Αυτή η διαδικασία προσομοιώνει τη φυσική επιλογή, δίνοντας προτεραιότητα στις λύσεις με καλύτερες επιδόσεις, ενώ ταυτόχρονα επιτρέπει την επιλογή λιγότερο καλών λύσεων για τη διατήρηση της ποικιλομορφίας.

Διασταύρωση (Crossover)

Η διασταύρωση επιτρέπει τη δημιουργία νέων λύσεων (απογόνων) μέσω του συνδυασμού δύο γονέων. Οι απόγονοι δημιουργούνται λαμβάνοντας τον μέσο όρο των ρών των γονέων:

$$x_i^{\text{offspring}} = \frac{x_i^{\text{parent1}} + x_i^{\text{parent2}}}{2}.$$

Η διασταύρωση στοχεύει στην εκμετάλλευση των καλών χαρακτηριστικών των γονέων, με την ελπίδα οι απόγονοι να έχουν ακόμα καλύτερη απόδοση. Εάν οι απόγονοι δεν ικανοποιούν τους περιορισμούς, αντικαθίστανται από τους αρχικούς γονείς.

Μετάλλαξη (Mutation)

Η μετάλλαξη εισάγει τυχαιότητα στον πληθυσμό (δηλαδή εφαρμόζεται σε τυχαία επιλεγμένα βάρη του χρωμοσώματος), μεταβάλλοντας επιλεγμένες ροές x_i τυχαία. Αυτή η διαδικασία διασφαλίζει την εξερεύνηση νέων περιοχών του χώρου αναζήτησης και μειώνει την πιθανότητα παγίδευσης σε τοπικά ελάχιστα. Εξασφαλίζεται επίσης ότι οι μεταβολές δεν παραβιάζουν τους περιορισμούς του προβλήματος. Στην αντίστοιχη συνάρτηση όπου υλοποιώ την μέθοδο μετάλλαξης (Mutation) θα παρατηρήσετε ότι μεταβάλλονται τα βάρη τυχαία με βάση κανονική κατανομή:

$$x_i^{\text{new}} = x_i + \text{RAND} \cdot \sigma,$$

όπου σ είναι η τυπική απόκλιση της μετάλλαξης.

Κριτήριο Τερματισμού

Ο αλγόριθμος τερματίζει όταν η βελτίωση στις τιμές καταλληλότητας μεταξύ των γενεών γίνει αμελητέα, είναι δηλαδή μικρότερη από ένα προκαθορισμένο κατώφλι. Συγκεκριμένα, η αλλαγή υπολογίζεται ως:

$$\Delta f = \frac{\|f_{\text{new}} - f_{\text{old}}\|}{\|f_{\text{old}}\|}.$$

Αν $\Delta f < \epsilon$, όπου ϵ είναι ένα πολύ μικρό κατώφλι π.χ. 10^{-20} , ο αλγόριθμος θεωρείται ότι έχει πλέον συγχλίνει.

Γενική Μεθοδολογία που ακολουθήθηκε

Ο γενετικός αλγόριθμος λειτουργεί επαναληπτικά με τα εξής στάδια:

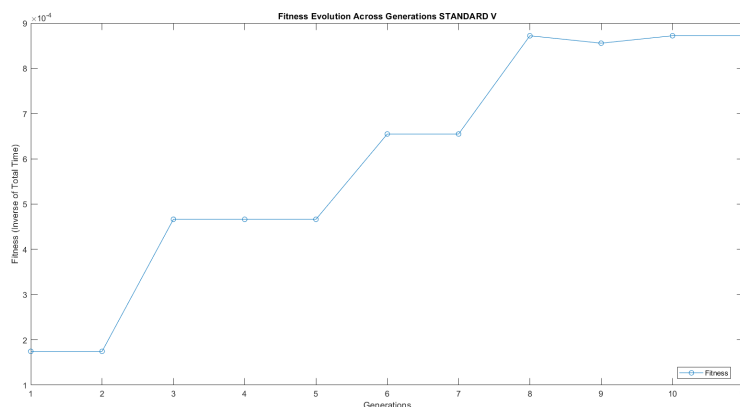
1. Δημιουργία αρχικού πληθυσμού.
2. Υπολογισμός καταλληλότητας (μέσω fitness function) για κάθε λύση.
3. Επιλογή γονέων μέσω της μεθόδου του τροχού της τύχης.
4. Δημιουργία νέου πληθυσμού μέσω διασταύρωσης και μετάλλαξης.
5. Έλεγχος τερματισμού και επανάληψη της διαδικασίας αν χρειάζεται.

Συμπεράσματα και Παρατηρήσεις

Η μέθοδος των γενετικών αλγορίθμων είναι αποτελεσματική για την επίλυση προβλημάτων βελτιστοποίησης δικτύου, καθώς εξισορροπεί την εξερεύνηση νέων λύσεων και την εκμετάλλευση των ήδη καλών λύσεων. Μέσω της εφαρμογής αυτής της μεθοδολογίας, επιτυγχάνεται η ελαχιστοποίηση του συνολικού χρόνου διέλευσης, ικανοποιώντας όλους τους περιορισμούς. Όπως θα παρατηρήσετε και στο διάγραμμα (για τυχαίους αναπαραγωγίσιμους αριθμούς) είναι εμφανής η αύξηση του Fitness όσο αυξάνονται τα Generations δηλαδή ο γενετικός αλγόριθμος βρίσκει λύσεις που βελτιώνουν την απόδοση του συστήματος, δηλαδή μειώνουν τον συνολικό χρόνο διέλευσης. Επίσης παρατηρείται ότι το πρόβλημα συγκλίνει σχετικά γρήγορα, κάτι που δείχνει ότι οι περιορισμοί και η φύση της συνάρτησης ελαχιστοποίησης επιτρέπουν την αποτελεσματική εύρεση του χώρου λύσεων. Η αύξηση της καταλληλότητας δείχνει ότι ο αλγόριθμος είναι αποδοτικός στη βελτίωση της λύσης με κάθε γενιά. Ο γενετικός αλγόριθμος συγκλίνει σε μια λύση που ελαχιστοποιεί τον συνολικό χρόνο διέλευσης του δικτύου, ενώ τηρεί όλους τους περιορισμούς.

Αποτελέσματα και Plot

Ορισμένα αποτελέσματα αλλά και το Plot που αναπαριστά την εξέλιξη της καταλληλότητας σε διαδοχικές γενιές αναπαρίστανται παρακάτω.



Σχήμα 3.1: Εξέλιξη Καταλληλότητας σε Διαδοχικές Γενιές.

Εχουμε λοιπόν:

- Number of generations until convergence is 11
- Final Chromosome (NEW POPULATION) is: [39.54 11.36 24.20 24.90 23.66 15.88 3.43 7.93 14.20 10.70 7.95 6.41 31.97 15.37 35.91 39.03 18.65]
- Total time is 1146.79
- PASSED. (Σημαίνει ότι πληρούνται οι περιορισμοί που επιδείχτηκαν στην μαθηματική ανάλυση δοσμένου όμως ενός κατωφλίου 10^{-6} καθώς προέκυπτε floating point precision error και δυσκολία σύγκλισης.)

Ο αντίστοιχος κώδικας με ολόκληρη την υλοποίηση του γενετικού αλγορίθμου σε *MATLAB* βρίσκεται στο αρχείο *Part1.m*.

Κεφάλαιο 4

Γενετικός Αλγόριθμος - Μεταβλητός Ρυθμός Εισερχόμενων Οχημάτων

Στο Θέμα 3 εξετάζεται η περίπτωση όπου ο ρυθμός εισερχόμενων οχημάτων V μπορεί να μεταβάλλεται έως και κατά $\pm 15\%$ της αρχικής του τιμής $V_0 = 100$. Η νέα υλοποίηση διατηρεί τη βασική μεθοδολογία του γενετικού αλγορίθμου, με την προσθήκη της δυναμικής τροποποίησης του V .

Τροποποίηση του Ρυθμού Εισερχόμενων Οχημάτων

Ο νέος V υπολογίζεται ως εξής:

$$V = V_0 \cdot (0.85 + 0.30 \cdot \text{RAND}),$$

όπου RAND είναι τυχαίος αριθμός στο διάστημα $[0, 1]$. Αυτό διασφαλίζει ότι το V κυμαίνεται μεταξύ $0.85V_0$ και $1.15V_0$.

Δημιουργία Αρχικού Πληθυσμού (Initial Population)

Η δημιουργία του αρχικού πληθυσμού ακολουθεί την ίδια διαδικασία όπως περιγράφηκε στο Θέμα 2, με τις παραμέτρους να προσαρμόζονται στον νέο ρυθμό εισερχόμενων οχημάτων V .

Συνάρτηση Καταλληλότητας (Fitness Function)

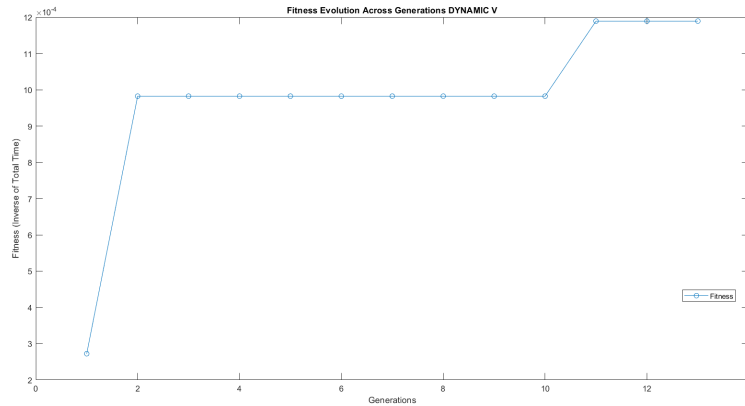
Η συνάρτηση καταλληλότητας παραμένει ίδια, αλλά ο συνολικός χρόνος διέλευσης υπολογίζεται με βάση τον νέο V . Αυτό διασφαλίζει ότι οι λύσεις αξιολογούνται υπό διαφορετικές συνθήκες ροής, προσδίδοντας ανθεκτικότητα στον αλγόριθμο.

Εξέλιξη του Πληθυσμού

Η διαδικασία της επιλογής γονέων, της διασταύρωσης και της μετάλλαξης παραμένει ίδια. Ωστόσο, κάθε γενιά προσαρμόζεται στις νέες συνθήκες του V , κάτι που επιτρέπει στον αλγόριθμο να ανταποκρίνεται σε δυναμικές αλλαγές.

Συμπεράσματα, Αποτελέσματα και Παρατηρήσεις

Το διάγραμμα που προκύπτει από την εξέλιξη της καταλληλότητας απεικονίζεται παρακάτω:



Σχήμα 4.1: Εξέλιξη Καταλληλότητας σε Διαδοχικές Γενιές με Δυναμικό Ρυθμό Εισερχόμενων Οχημάτων V .

Για μια τυχαία τιμή του V , το αποτέλεσμα του γενετικού αλγορίθμου είναι:

- The value of V is now 88.40
- Number of generations until convergence is 13
- Final Chromosome (NEW POPULATION) is: [22.60 12.10 20.85 32.85 14.37 8.23 10.67 1.42 20.28 12.57 16.74 21.30 4.52 17.96 5.46 32.33 29.31]
- Total time is 763.47
- PASSED. (Σημαίνει ότι πληρούνται οι περιορισμοί που επιδείχτηκαν στην μαθηματική ανάλυση δοσμένου όμως ενός κατωφλίου 10^{-6} καθώς προέκυπτε floating point precision error και δυσκολία σύγκλισης.)

Ο γενετικός αλγόριθμος αποδεικνύεται ανθεκτικός στις μεταβολές του V . Οι δυναμικές αλλαγές στον ρυθμό εισερχόμενων οχημάτων δεν επηρεάζουν τη σύγκλιση του αλγορίθμου, ενώ ο συνολικός χρόνος διέλευσης προσαρμόζεται στις νέες συνθήκες. Η προσέγγιση αυτή επιβεβαιώνει την ευελιξία και την αποτελεσματικότητα των γενετικών αλγορίθμων σε προβλήματα δυναμικής βελτιστοποίησης. Επίσης για το συγκεκριμένο Run (Παράδειγμα) μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι έτυχε το V να είναι 88.40 δηλαδή μικρότερο από την τιμή 100 που είχε πριν και ο συνολικός χρόνος είναι μικρότερος από ότι πριν όπου το V ήταν ίσο με 100 πράγμα που είναι και το επιθυμητό καθώς όσο μειώνεται η κυκλοφοριακή συμφόρηση μειώνεται και ο χρόνος. Τέλος αξίζει να σημειωθεί ότι τόσο στο Θέμα 3 όσο και στο Θέμα 2 πολλές φορές ανάλογα με τις τυχαίες μεταβλητές από το *rand* σε πολλά Runs ενδέχεται να εγκλωβιστούμε σε τοπικό ελάχιστο και να δυσκολέψει η σύγκλιση και να αυξηθεί ο χρόνος ή τα iterations. Για την αντιμετώπιση αυτού ίσως χρειάζεται περαιτέρω fine-tuning ορισμένων παραμέτρων.

Ο αντίστοιχος κώδικας με ολόκληρη την υλοποίηση του γενετικού αλγορίθμου σε *MATLAB* βρίσκεται στο αρχείο *Part2.m*.

Βιβλιογραφία

- [1] Γεώργιος Α. Ροβιθιάκης, *Τεχνικές Βελτιστοποίησης*. Εκδόσεις ΤΖΙΟΛΑ.
- [2] <https://www.baeldung.com/cs/genetic-algorithms-roulette-selection>
- [3] <https://stackoverflow.com/questions/27756477/mutation-step-size-in-genetic-algorithm>