ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

Τεχνικές Βελτιστοποίησης Αναφορά

Εργασία 1

Διακολουκάς Δημήτριος
ΑΕΜ 10642

Email: ddiakolou@ece.auth.gr

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Ορισμός συναρτήσεων (Εισαγωγή)

Ο στόχος της εργασίας είναι να μειωθούν στο ελάχιστο οι τρεις συγκεκριμένες συναρτήσεις που μας έχουν δωθεί $f_1(x)$, $f_2(x)$ και $f_3(x)$, δεδομένου του αρχικού διαστήματος $[-1, 3]$:

- $f_1(x) = (x-2)^2 + x \cdot \ln(x+3)$
- $f_2(x) = e^{-2x} + (x-2)^2$
- $f_3(x) = e^x \cdot (x^3 - 1) + (x-1) \cdot \sin(x)$

Οι μέθοδοι που θα χρησιμοποιηθούν διακρίνονται σε δύο κατηγορίες:

1. **Μέθοδοι χωρίς παραγώγους:**
   - Μέθοδος της Διχοτόμου
   - Μέθοδος του Χρυσού Τομέα
   - Μέθοδος Fibonacci
2. **Μέθοδοι με χρήση παραγώγων:**
   - Μέθοδος της Διχοτόμου με χρήση παραγώγων

Κάθε μέθοδος θα εφαρμοστεί και θα συγκριθεί με τις άλλες, με στόχο την εξαγωγή συμπερασμάτων σχετικά με την αποδοτικότητα και ακρίβειά τους. Η σύγκριση θα γίνει βάσει του πλήθους επαναλήψεων και της ακρίβειας του αποτελέσματος.

Κεφάλαιο 2

Μέθοδος της Διχοτόμου

Η μέθοδος της διχοτόμου, που χρησιμοποιείται για την εύρεση του ελαχίστου μιας κυρτής συνάρτησης, περιγράφεται στη θεωρία και βασίζεται σε δύο κύριες παραμέτρους: το ϵ (η απόσταση από το κέντρο) και το l (το μήκος του διαστήματος αναζήτησης). Οι σχετικοί υπολογισμοί και τα διαγράμματα για τη μέθοδο αυτή βρίσκονται στο αρχείο `Part1.m` .

Αρχικά, εξετάζεται πώς μεταβάλλονται οι υπολογισμοί της κάθε αντικειμενικής συνάρτησης όταν το εύρος αναζήτησης παραμένει σταθερό με $l = 0.01$, ενώ το ϵ λαμβάνει τιμές στο διάστημα $[0.0001, 0.007]$. Τα αποτελέσματα απεικονίζονται στα αντίστοιχα διαγράμματα παρακάτω.

Σχόλια για τον Κώδικα
Ο κώδικας περιλαμβάνει την κύρια συνάρτηση `dichotomy_method`, η οποία υπολογίζει το ελάχιστο για μια δοσμένη συνάρτηση και επιστρέφει τον αριθμό επαναλήψεων και τα όρια του διαστήματος. Στον κώδικα περιέχονται οι συναρτήσεις $f_1(x)$, $f_2(x)$ και $f_3(x)$, που ελαχιστοποιούνται στο διάστημα $[-1, 3]$ όπως αναφέρθηκε και στην εισαγωγή. Η υλοποίηση του αλγορίθμου της διχοτόμου αναπαρίσταται στο Algorithm 1.

Algorithm 1 Μέθοδος Διχοτόμου για την Εύρεση του Ελαχίστου μιας Συνάρτησης

Input: Μια συνάρτηση f, τα άκρα του διαστήματος a, b, η ακρίβεια l, και η παράμετρος ϵ

Result: Ο αριθμός των επαναλήψεων k, οι λίστες a_{vals} και b_{vals}, και η προσεγγιστική ελάχιστη τιμή

Αρχικοποίηση: $k = 0$, $a_{\text{vals}} = []$, $b_{\text{vals}} = []$

while $|b - a| \geq l$ **do**

  $k \leftarrow k + 1$

  Υπολογισμός των σημείων:

$$x_1 = \frac{a+b}{2} - \epsilon, \quad x_2 = \frac{a+b}{2} + \epsilon$$

  if $f(x_1) < f(x_2)$ **then**

    Θέσε $b \leftarrow x_2$

  else

    Θέσε $a \leftarrow x_1$

  end

  Πρόσθεσε το a στο a_{vals} και το b στο b_{vals}

end

$$\min = \frac{a_{\text{vals}} + b_{\text{vals}}}{2}$$

Αρχικά, εξετάζεται πώς η μεταβολή της παραμέτρου ϵ επηρεάζει τον αριθμό των υπολογισμών και τα αποτελέσματα φαίνονται στο Σχήμα 2.1.

Στη συνέχεια, με σταθερό $\epsilon = 0.001$, μελετάται η επίδραση της αλλαγής του l στο διάστημα $[0.001, 0.01]$ στον αριθμό των υπολογισμών όπως αναπαρίσταται στο Σχήμα 2.2.

Στο τέλος, δημιουργούνται διαγράμματα που δείχνουν την εξέλιξη των ορίων a_k και b_k συναρτήσει του δείκτη επαναλήψεων k, για διάφορες τιμές του l και πιο συγκεκριμένα αυτές που ορίστηκαν για τα επόμενα διαγράμματα όπως άλλωστε φαίνεται και στο Σχήμα 2.3 είναι οι $[0.1, 0.05, 0.01, 0.005]$, κατά την εφαρμογή της μεθόδου διχοτόμου για καθεμία από τις συναρτήσεις.

Μέσα από αυτούς τους υπολογισμούς και τα διαγράμματα, αναλύεται ο ρυθμός σύγκλισης της μεθόδου σε συνάρτηση με τις παραμέτρους ϵ και l, προσφέροντας έτσι μια σαφή εικόνα για την απόδοση της μεθόδου διχοτόμου.

Παρατηρήσεις

- Το διάγραμμα δείχνει πανομοιότυπο και για τις τρεις συναρτήσεις, τόσο για το υποερώτημα 1 όσο και για το 2 (Σχήμα 2.1 και Σχήμα 2.2 αντίστοιχα) κάτι που είναι λογικό, καθώς και στις τρεις περιπτώσεις οι υπολογισμοί της αντικειμενικής συνάρτησης επηρεάζονται από τους ίδιους παράγοντες – συγκεκριμένα το l, το ϵ, και το εύρος του διαστήματος αναζήτησης.

- Στο Σχήμα 2.1 (υποερώτημα 1) παρατηρούμε εύκολα ότι όταν αυξάνεται το e, βλέπουμε ότι ο αριθμός των υπολογισμών της αντικειμενικής συνάρτησης επίσης αυξάνεται. Αυτό είναι σωστό καθώς για να επιτευχθεί σύγκλιση, πρέπει να ισχύει η συνθήκη $e \leq$

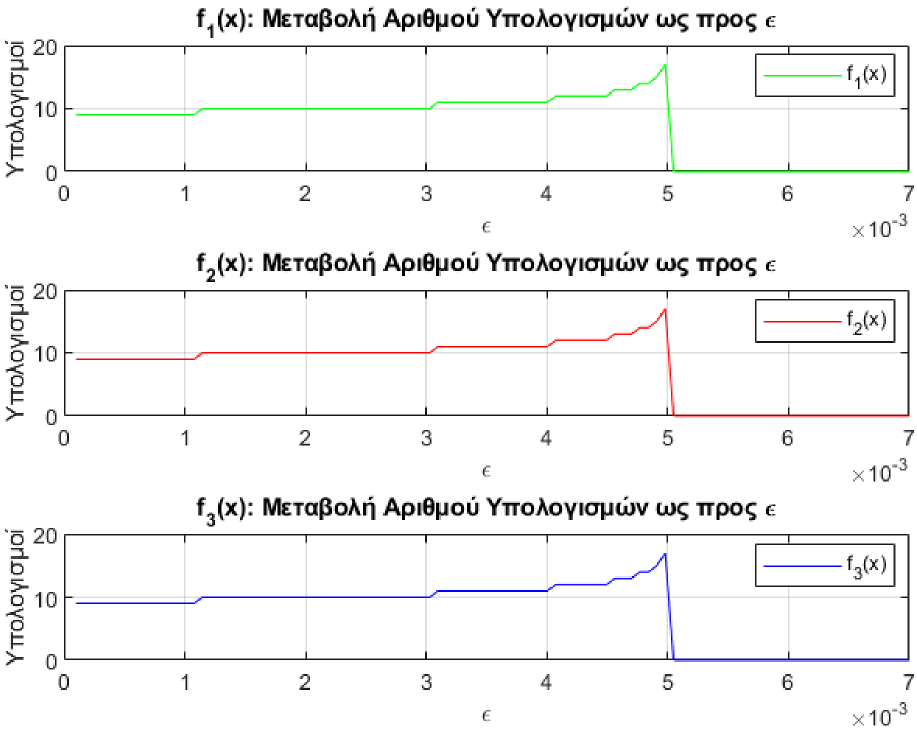
$l/2$. Με την αύξηση του e, η μέθοδος να σταθεροποιείται στο επιθυμητό εύρος του διαστήματος αναζήτησης.

- Στο Σχήμα 2.2 (υποερώτημα 2) παρατηρούμε εύκολα ότι όσο αυξάνεται το l, παρατηρείται μείωση στον αριθμό των υπολογισμών της αντικειμενικής συνάρτησης. Λογικά, αυτό συμβαίνει επειδή, καθώς μειώνουμε τους περιορισμούς, απαιτούνται λιγότερες επαναλήψεις για την ολοκλήρωση της αναζήτησης.

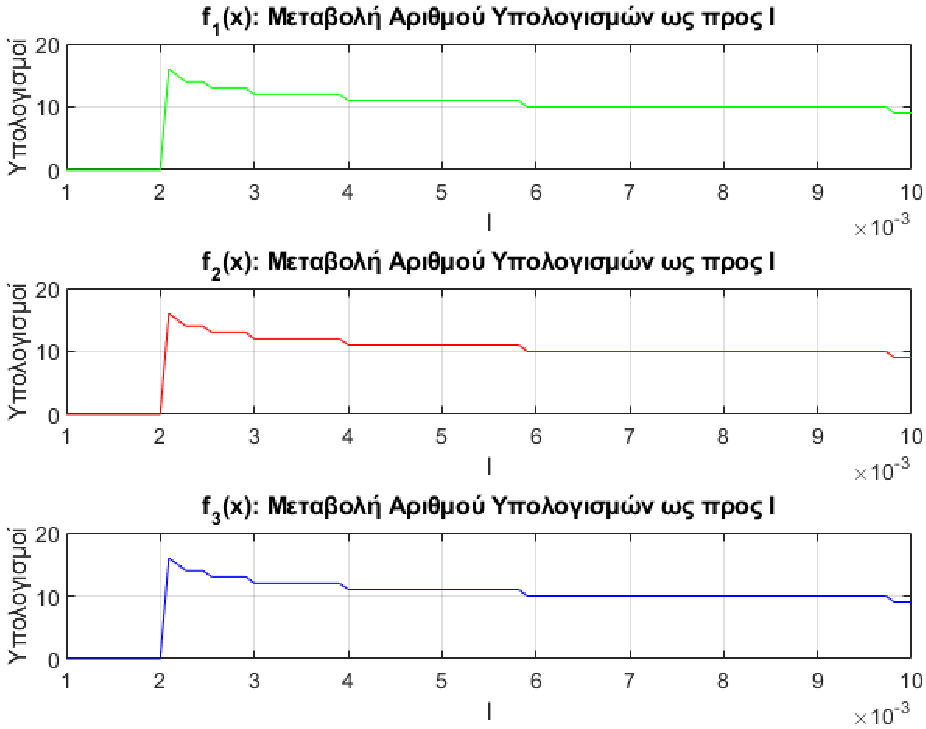
- Στο Σχήμα 2.3 (υποερώτημα 3) παρατηρούμε σύγκλιση και των τριών συναρτήσεων $f_1(x)$, $f_2(x)$ και $f_3(x)$ στις τιμές 1.15, 2 και 0.5 αντίστοιχα, ενώ για τις διάφορες τιμές l τα διαγράμματα συμπίπτουν.

- Παρατηρούμε ότι στην μέθοδο της διχοτόμου επαληθεύεται ο τύπος:

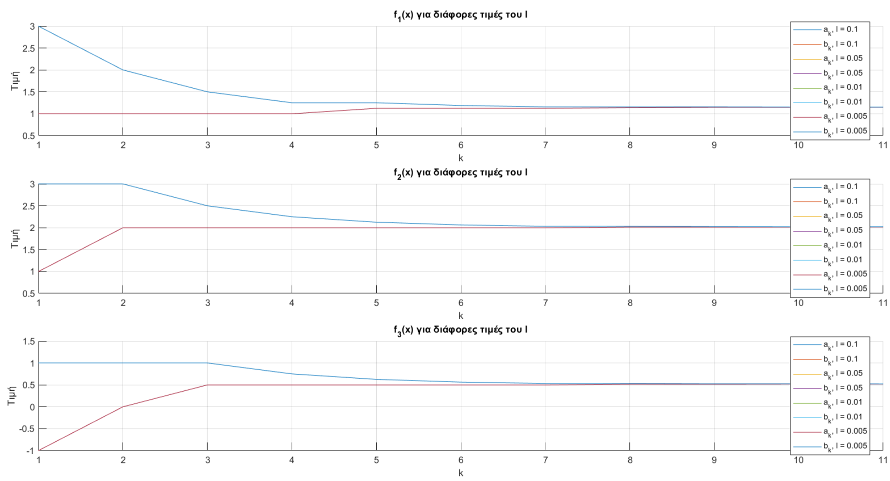
$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \leq \frac{l}{b-a}$$



Σχήμα 2.1: Μεταβολή Αριθμού Υπολογισμών ως προς ε (για εύρος τιμών $[0.0001, 0.007]$).



Σχήμα 2.2: Μεταβολή Αριθμού Υπολογισμών ως προς l (για εύρος τιμών $[0.001, 0.01]$).



Σχήμα 2.3: Παρουσίαση σύγκλισης συναρτήσεων για διάφορες τιμές του l (για εύρος τιμών $[0.1, 0.05, 0.01, 0.005]$).

Κεφάλαιο 3

Μέθοδος του Χρυσού Τομέα

Όπως ακριβώς και η μέθοδος της διχοτόμου έτσι και η μέθοδος του χρυσού τομέα χρησιμοποιείται για την ανεύρεση του ελαχίστου σε μια κυρτή συνάρτηση. Σε αυτήν τη μέθοδο υπάρχει μία σημαντική παράμετρος, το l, που αντιπροσωπεύει το εύρος του διαστήματος αναζήτησης. Οι υπολογισμοί και τα διαγράμματα για την εφαρμογή αυτής της μεθόδου βρίσκονται στο αρχείο `Part2.m`.

Η ανάλυση εξετάζει την επίδραση της τιμής του l στους υπολογισμούς της αντικειμενικής συνάρτησης, μεταβάλλοντας το l σε συγκεκριμένο εύρος τιμών. Σε αυτήν την περίπτωση, το l λαμβάνει τιμές στο διάστημα $[0.001, 0.01]$. Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στο παρακάτω διάγραμμα.

Σχόλια για τον Κώδικα

Ο κώδικας περιλαμβάνει την κύρια συνάρτηση `golden_section_method`, η οποία υπολογίζει το ελάχιστο για μια δοσμένη συνάρτηση και επιστρέφει τον αριθμό επαναλήψεων και τα όρια του διαστήματος. Στον κώδικα περιέχονται οι συναρτήσεις $f_1(x)$, $f_2(x)$ και $f_3(x)$, που ελαχιστοποιούνται στο διάστημα $[-1, 3]$ ακριβώς όπως και στην μέθοδο της διχοτόμου. Η υλοποίηση του αλγορίθμου του χρυσού τομέα αναπαρίσταται στο Algorithm 2.

Όπως και στην μέθοδο της διχοτόμου έτσι και εδώ στη μέθοδο του χρυσού τομέα πρόκειται να μελετηθεί η επίδραση της αλλαγής του l στο διάστημα $[0.001, 0.01]$ και για τις 3 αντικειμενικές συναρτήσεις στον αριθμό των υπολογισμών όπως αναπαρίσταται στο Σχήμα 3.1.

Επιπλέον και εδώ ζητάται να δημιουργηθούν τα διαγράμματα που δείχνουν την εξέλιξη των ορίων a_k και b_k συναρτήσει του δείκτη επαναλήψεων k, για διάφορες τιμές του l και πιο συγκεκριμένα αυτές που ορίστηκαν για τα επόμενα διαγράμματα όπως άλλωστε φαίνεται και στο Σχήμα 3.2 είναι οι $[0.1, 0.05, 0.01, 0.005]$, κατά την εφαρμογή της μεθόδου του χρυσού τομέα για καθεμία από τις συναρτήσεις.

Και σε αυτή την περίπτωση από τους υπολογισμούς και τα διαγράμματα, αναλύεται ο ρυθμός σύγκλισης της μεθόδου σε συνάρτηση με τις παραμέτρους l, προσφέροντας έτσι μια σαφή εικόνα για την απόδοση της μεθόδου χρυσού τομέα.

Algorithm 2 Μέθοδος Χρυσού Τομέα για την Εύρεση του Ελαχίστου μιας Συνάρτησης

Input: Μια συνάρτηση f, τα άκρα του διαστήματος a, b, και η ακρίβεια l

Result: Ο αριθμός των επαναλήψεων k, οι λίστες a_{vals} και b_{vals}, και η προσεγγιστική ελάχιστη τιμή

Αρχικοποίηση: $k = 0$, $a_{\text{vals}} = []$, $b_{\text{vals}} = []$, $\gamma = 0.618$

Υπολογισμός των αρχικών σημείων:

$$x_1 = a + (1 - \gamma) \cdot (b - a), \quad x_2 = a + \gamma \cdot (b - a)$$

και των τιμών $f_1 = f(x_1)$ και $f_2 = f(x_2)$.

while $|b - a| > l$ **do**

  $k \leftarrow k + 1$

  Αποθήκευση των τιμών a και b:

$$a_{\text{vals}} = [a_{\text{vals}}, a], \quad b_{\text{vals}} = [b_{\text{vals}}, b]$$

  if $f_1 < f_2$ **then**

    Θέσε $b \leftarrow x_2$, $x_2 \leftarrow x_1$, και $f_2 \leftarrow f_1$

    Επανυπολόγισε το x_1:

$$x_1 = a + (1 - \gamma) \cdot (b - a), \quad f_1 = f(x_1)$$

  end

  else

    Θέσε $a \leftarrow x_1$, $x_1 \leftarrow x_2$, και $f_1 \leftarrow f_2$

    Επανυπολόγισε το x_2:

$$x_2 = a + \gamma \cdot (b - a), \quad f_2 = f(x_2)$$

  end

end

Η προσεγγιστική ελάχιστη τιμή είναι:

$$\min = \frac{a_{\text{vals}} + b_{\text{vals}}}{2}$$

Παρατηρήσεις

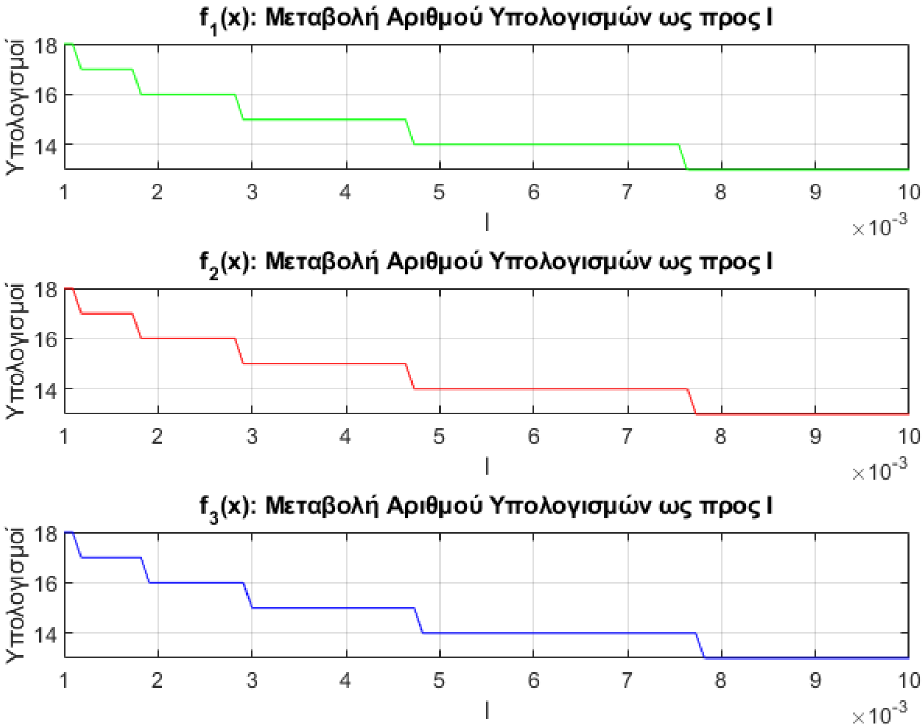
- Το διάγραμμα φαίνεται να είναι ίδιο και για τις τρεις συναρτήσεις, τόσο για το υποερώτημα 1 (Σχήμα 3.1) κάτι που είναι λογικό, καθώς και στις τρεις περιπτώσεις οι υπολογισμοί της αντικειμενικής συνάρτησης επηρεάζονται από τους ίδιους παράγοντες, συγκεκριμένα το l.

- Στο Σχήμα 3.1 (υποερώτημα 1) παρατηρούμε εύκολα ότι όσο αυξάνεται το l, παρατηρείται μείωση στον αριθμό των υπολογισμών της αντικειμενικής συνάρτησης. Λογικά, αυτό συμβαίνει επειδή, καθώς μειώνουμε τους περιορισμούς, απαιτούνται λιγότερες επαναλήψεις για την ολοκλήρωση της αναζήτησης.

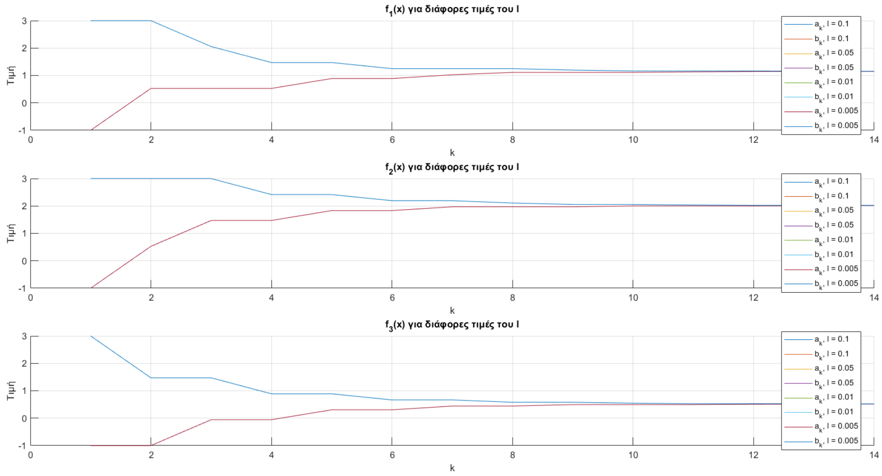
- Στο Σχήμα 3.2 (υποερώτημα 2) παρατηρούμε σύγκλιση και των τριών συναρτήσεων $f_1(x)$, $f_2(x)$ και $f_3(x)$ στις τιμές 1.15, 2 και 0.5 αντίστοιχα, ενώ για τις διάφορες τιμές l τα διαγράμματα συμπίπτουν.

- Και σε αυτή την περίπτωση φαίνεται να επαληθεύεται ο τύπος:

$$0.618^{(n-1)} \leq \frac{l}{b-a}$$



Σχήμα 3.1: Μεταβολή Αριθμού Υπολογισμών ως προς l (για εύρος τιμών $[0.001, 0.01]$).



Σχήμα 3.2: Παρουσίαση σύγκλισης συναρτήσεων για διάφορες τιμές του l (για εύρος τιμών $[0.1, 0.05, 0.01, 0.005]$).

Κεφάλαιο 4

Μέθοδος Fibonacci

Σε αυτό το θέμα καλούμαστε να επαναλάβουμε το θέμα της μεθόδου του χρυσού τομέα αλλά αυτή την φορά χρησιμοποιώντας την μέθοδο Fibonacci . Σε αυτήν την περίπτωση πάλι έχουμε μία παράμετρο l δηλαδή το εύρος του διαστήματος αναζήτησης. Οι υπολογισμοί και τα διαγράμματα για την μέθοδο αυτή βρίσκονται στο αρχείο `Part3.m`. Σε αυτήν την περίπτωση για μία ακόμη φορά θα αποφασίσουμε το l να λαμβάνει τιμές στο διάστημα $[0.001, 0.01]$. Η υλοποίηση του αλγορίθμου της μεθόδου του Fibonacci αναπαρίσταται στο Algorithm 3.

Σχόλια για τον Κώδικα

Όπως και στις προηγούμενες μεθόδους έτσι και εδώ στη μέθοδο του Fibonacci πρόκειται να μελετηθεί η επίδραση της αλλαγής του l στο διάστημα $[0.001, 0.01]$ και για τις 3 αντικειμενικές συναρτήσεις στον αριθμό των υπολογισμών όπως αναπαρίσταται στο Σχήμα 4.1. Ωστόσο εδώ πρέπει νε βρούμε το αριθμό υπολογισμών για την ακολουθία Fibonacci N αξιοποιώντας το l αλλά και τα a και b. Για να βρεθεί, λοιπόν, ο αριθμός αυτός των iterations , θα πρέπει πρώτα να αξιοποιήσουμε την συνθήκη της μεθόδου:

$$F_n \geq \frac{b-a}{l}$$

Επίσης όπως και στο θέμα 2, ζητάται να δημιουργηθούν τα διαγράμματα που δείχνουν την εξέλιξη των ορίων a_k και b_k συναρτήσει του δείκτη επαναλήψεων k, για διάφορες τιμές του l και πιο συγκεκριμένα αυτές που ορίστηκαν για τα επόμενα διαγράμματα όπως άλλωστε φαίνεται και στο Σχήμα 4.2 είναι οι $[0.1, 0.05, 0.01, 0.005]$, κατά την εφαρμογή της μεθόδου Fibonacci για καθεμία από τις συναρτήσεις.

Και σε αυτή την περίπτωση από τους υπολογισμούς και τα διαγράμματα, αναλύεται ο ρυθμός σύγκλισης της μεθόδου σε συνάρτηση με τις παραμέτρους l μέσω των οποίων υπολογίζω τον αριθμό υπολογισμών N, προσφέροντας έτσι μια σαφή εικόνα για την απόδοση της μεθόδου Fibonacci .

Παρατηρήσεις

- Το διάγραμμα φαίνεται να είναι ίδιο και για τις τρεις συναρτήσεις, τόσο για το υποερώτημα 1 (Σχήμα 4.1) κάτι που είναι λογικό, καθώς και στις τρεις περιπτώσεις οι υπολογισμοί της αντικειμενικής συνάρτησης επηρεάζονται από τους ίδιους παράγοντες, συγκεκριμένα το l.

- Στο Σχήμα 4.1 (υποερώτημα 1) παρατηρούμε εύκολα ότι όσο αυξάνεται το l, παρατηρείται μείωση στον αριθμό των υπολογισμών της αντικειμενικής συνάρτησης. Λογικά, αυτό συμβαίνει επειδή, καθώς μειώνουμε τους περιορισμούς, απαιτούνται λιγότερες επαναλήψεις για την ολοκλήρωση της αναζήτησης.

- Στο Σχήμα 4.2 (υποερώτημα 2) παρατηρούμε σύγκλιση και των τριών συναρτήσεων $f_1(x)$, $f_2(x)$ και $f_3(x)$ στις τιμές 1.15, 2 και 0.5 αντίστοιχα, ενώ για τις διάφορες τιμές l τα διαγράμματα συμπίπτουν.

Algorithm 3 Μέθοδος Fibonacci για την Εύρεση του Ελαχίστου μιας Συνάρτησης

Input: Μια συνάρτηση f, τα άκρα του διαστήματος a, b, η ακρίβεια ϵ, και ο αριθμός των βημάτων N

Result: Ο αριθμός των επαναλήψεων k, οι λίστες a_{vals}, b_{vals} και μιν_αλς, και η προσεγγιστική ελάχιστη τιμή

Υπολογισμός της ακολουθίας Fibonacci με N όρους:

$$\text{fib} = \text{fibonacci\_sequence}(N)$$

Αρχικοποίηση: $k = 0$, $a_{\text{vals}} = []$, $b_{\text{vals}} = []$, $\min = []$

Υπολογισμός των αρχικών σημείων:

$$x_1 = a + \frac{\text{fib}(N-2)}{\text{fib}(N)} \cdot (b-a), \quad x_2 = a + \frac{\text{fib}(N-1)}{\text{fib}(N)} \cdot (b-a)$$

και των τιμών $f_1 = f(x_1)$ και $f_2 = f(x_2)$.

for $i = 1$ ***το*** $N-1$ **do**

$$a_{\text{vals}} = [a_{\text{vals}}, a], \quad b_{\text{vals}} = [b_{\text{vals}}, b], \quad \min = [\min, \frac{a+b}{2}]$$

  if $i \neq N-2$ **then**

    if $f_1 < f_2$ **then**

      Θέσε $b \leftarrow x_2$, $x_2 \leftarrow x_1$, και $f_2 \leftarrow f_1$

      Επανυπολόγισε το x_1:

$$x_1 = a + \frac{\text{fib}(N-i-2)}{\text{fib}(N-i)} \cdot (b-a), \quad f_1 = f(x_1)$$

    end

    else

      Θέσε $a \leftarrow x_1$, $x_1 \leftarrow x_2$, και $f_1 \leftarrow f_2$

      Επανυπολόγισε το x_2:

$$x_2 = a + \frac{\text{fib}(N-i-1)}{\text{fib}(N-i)} \cdot (b-a), \quad f_2 = f(x_2)$$

    end

  end

  else

    Θέσε $x_2 \leftarrow x_1 + \epsilon$ και $f_2 = f(x_2)$

    if $f_1 < f_2$ **then**

      Θέσε $b \leftarrow x_2$

    end

    else

      Θέσε $a \leftarrow x_1$

    end

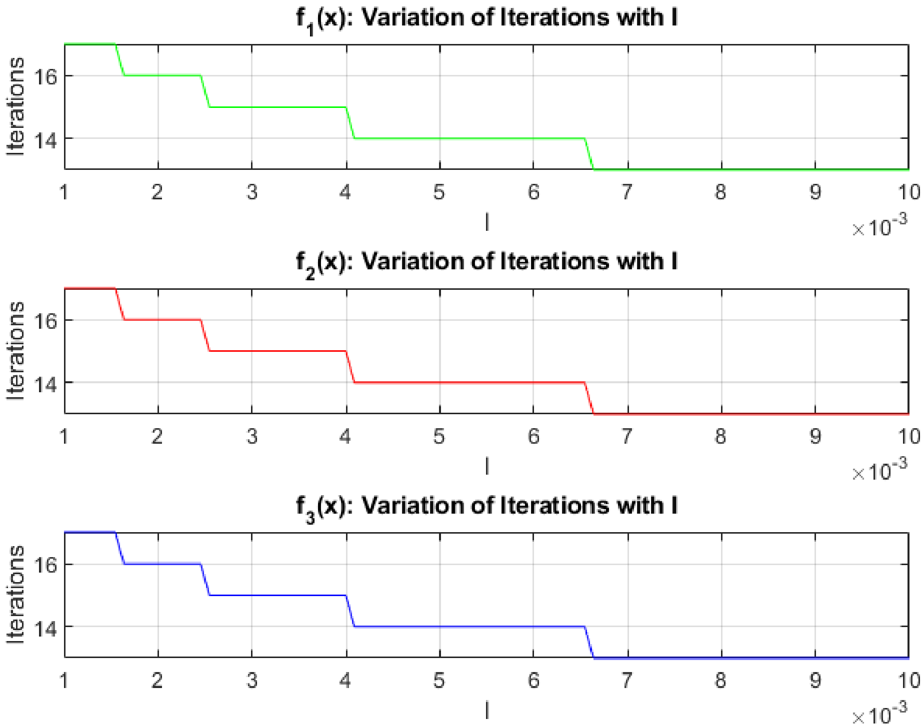
$$a_{\text{vals}} = [a_{\text{vals}}, a], \quad b_{\text{vals}} = [b_{\text{vals}}, b], \quad \min = [\min, \frac{a+b}{2}]$$

    Αύξησε το k κατά 1 και τερμάτισε το βρόχο. **break**

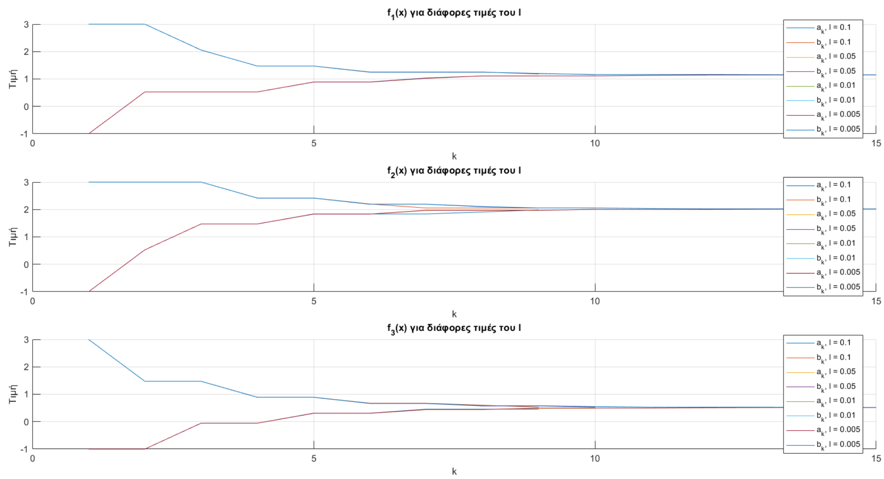
  end

  $k \leftarrow k+1$

end



Σχήμα 4.1: Μεταβολή Αριθμού Υπολογισμών ως προς l (για εύρος τιμών $[0.001, 0.01]$).



Σχήμα 4.2: Παρουσίαση σύγκλισης συναρτήσεων για διάφορες τιμές του l (για εύρος τιμών $[0.1, 0.05, 0.01, 0.005]$).

Κεφάλαιο 5

Μέθοδος της Διχοτόμου με παράγωγο

Η μέθοδος της διχοτόμου με χρήση παραγώγου στοχεύει στην εύρεση του ελαχίστου μιας συνάρτησης μέσω της παραγώγου της. Παρακάτω επισυνάπτεται και ο αλγόριθμος που αναπαρίσταται στο Algorithm 4. Οι υπολογισμοί και τα διαγράμματα για την μέθοδο αυτή βρίσκονται στο αρχείο `Part4.m`.

Σχόλια για τον Κώδικα

Όπως και στην μέθοδο Fibonacci , έτσι και σε αυτήν την περίπτωση πάλι έχουμε μία παράμετρο l δηλαδή το εύρος του διαστήματος αναζήτησης. Σε αυτήν την περίπτωση για μία ακόμη φορά θα αποφασίσουμε το l να λαμβάνει τιμές στο διάστημα $[0.001, 0.01]$, ώστε να μελετηθεί η επίδραση της αλλαγής του και για τις 3 αντικειμενικές συναρτήσεις στον αριθμό των υπολογισμών όπως αναπαρίσταται στο Σχήμα 5.1. Πάλι και στο θέμα αυτό θα πρέπει βασιζόμενοι στις τιμές των l, a και b να βρούμε τον αριθμό υπολογισμών N. Για να βρεθεί, λοιπόν, ο αριθμός αυτός των iterations , θα πρέπει πρώτα να αξιοποιήσουμε την συνθήκη της μεθόδου:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \leq \frac{l}{b-a}$$

Επίσης όπως και στο θέμα 2, ζητάται να δημιουργηθούν τα διαγράμματα που δείχνουν την εξέλιξη των ορίων a_k και b_k συναρτήσει του δείκτη επαναλήψεων k, για διάφορες τιμές του l και πιο συγκεκριμένα αυτές που ορίστηκαν για τα επόμενα διαγράμματα όπως άλλωστε φαίνεται και στο Σχήμα 5.2 είναι οι $[0.1, 0.05, 0.01, 0.005]$, κατά την εφαρμογή της μεθόδου της Διχοτόμου με χρήση παραγώγων για καθεμία από τις συναρτήσεις.

Και σε αυτή την περίπτωση από τους υπολογισμούς και τα διαγράμματα, αναλύεται ο ρυθμός σύγκλισης της μεθόδου σε συνάρτηση με τις παραμέτρους l μέσω των οποίων υπολογίζω τον αριθμό υπολογισμών N, προσφέροντας έτσι μια σαφή εικόνα για την απόδοση της μεθόδου της Διχοτόμου με χρήση παραγώγων.

Παρατηρήσεις

- Το διάγραμμα φαίνεται να είναι ίδιο και για τις τρεις συναρτήσεις, τόσο για το υποερώτημα 1 (Σχήμα 5.1) κάτι που είναι λογικό, καθώς και στις τρεις περιπτώσεις οι υπολογισμοί της αντικειμενικής συνάρτησης επηρεάζονται από τους ίδιους παράγοντες, συγκεκριμένα το l.
- Στο Σχήμα 5.1 (υποερώτημα 1) παρατηρούμε εύκολα ότι όσο αυξάνεται το l, παρατηρείται μείωση στον αριθμό των υπολογισμών της αντικειμενικής συνάρτησης. Λογικά,

αυτό συμβαίνει επειδή, καθώς μειώνουμε τους περιορισμούς, απαιτούνται λιγότερες επαναλήψεις για την ολοκλήρωση της αναζήτησης.

- Στο Σχήμα 5.2 (υποερώτημα 2) παρατηρούμε σύγκλιση και των τριών συναρτήσεων $f_1(x)$, $f_2(x)$ και $f_3(x)$ στις τιμές 1.15, 2 και 0.5 αντίστοιχα, ενώ για τις διάφορες τιμές l τα διαγράμματα συμπίπτουν.

Algorithm 4 Μέθοδος της Διχοτόμου με Παράγωγο για την Εύρεση του Ελαχίστου μιας Συνάρτησης

Input: Η παράγωγος μιας συνάρτησης df, τα άκρα του διαστήματος a, b, και ο μέγιστος αριθμός επαναλήψεων N

Result: Ο αριθμός των επαναλήψεων k, οι λίστες a_{vals} και b_{vals}, και η προσεγγιστική ελάχιστη τιμή

Αρχικοποίηση: $k = 1$, $a_{\text{vals}} = [a]$, $b_{\text{vals}} = [b]$

while $k < N$ **do**

Υπολογισμός του σημείου $x_k = \frac{a+b}{2}$ και της παραγώγου $df(x_k)$.

$$x_k = \frac{a+b}{2}, \quad df_{x_k} = df(x_k)$$

if $df_{x_k} == 0$ **then**

Διακοπή του αλγορίθμου **break**

end

if $df_{x_k} > 0$ **then**

Θέσε $b \leftarrow x_k$

end

else

Θέσε $a \leftarrow x_k$

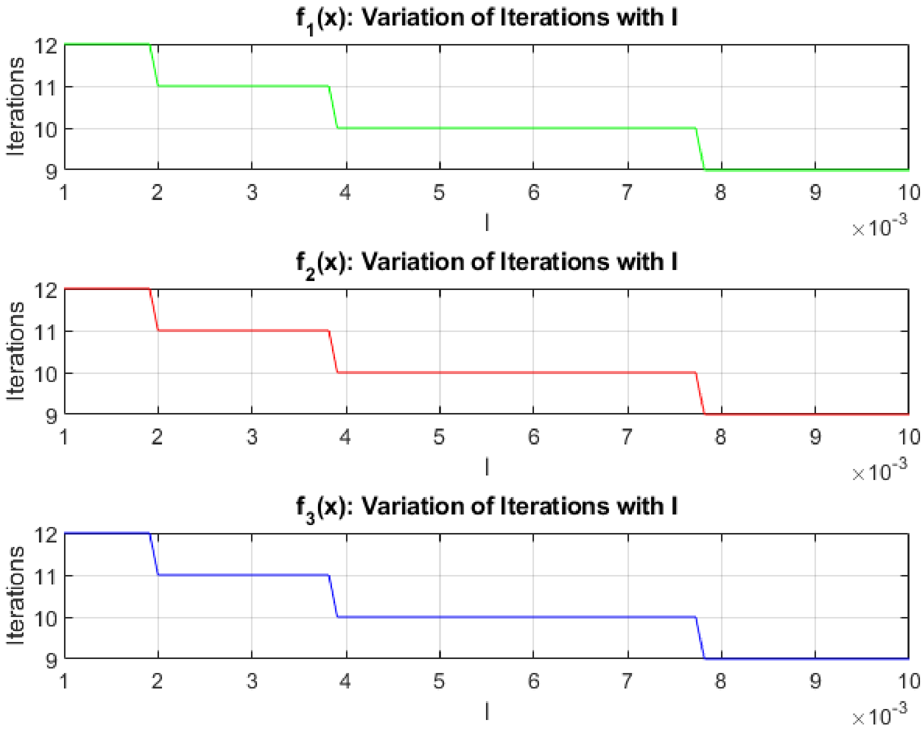
end

Ενημέρωση των λιστών:

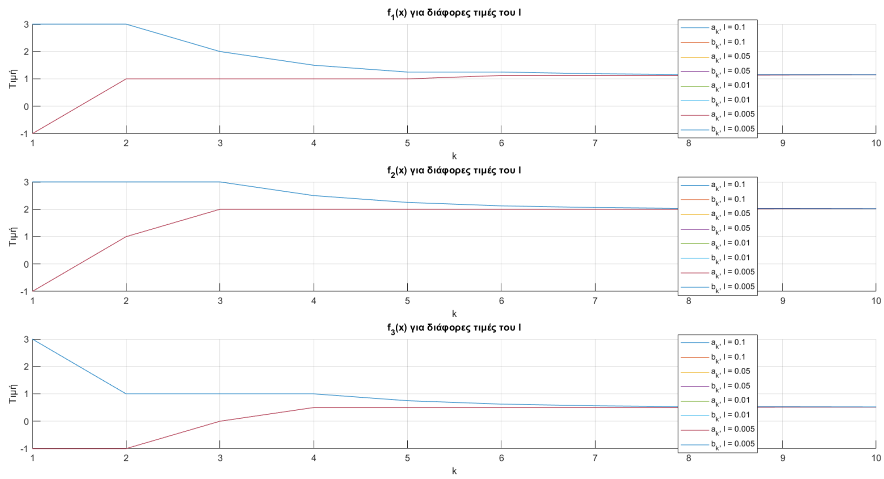
$$a_{\text{vals}} = [a_{\text{vals}}, a], \quad b_{\text{vals}} = [b_{\text{vals}}, b]$$

Αύξησε τον δείκτη επανάληψης $k \leftarrow k + 1$.

end



Σχήμα 5.1: Μεταβολή Αριθμού Υπολογισμών ως προς l (για εύρος τιμών $[0.001, 0.01]$).



Σχήμα 5.2: Παρουσίαση σύγκλισης συναρτήσεων για διάφορες τιμές του l (για εύρος τιμών $[0.1, 0.05, 0.01, 0.005]$).

Κεφάλαιο 6

Αποτελέσματα Συγκρίσεων

Είναι εμφανές ότι η πειραματική αξιολόγηση της αποδοτικότητας των μεθόδων χωρίς χρήση παραγώγου (διχοτόμου, χρυσού τομέα και Fibonacci) συμφωνεί με τη θεωρητική κατάταξη τους. Συγκεκριμένα, από την περισσότερο προς την λιγότερο αποδοτική μέθοδο, η σειρά είναι η εξής:

1. Μέθοδος Fibonacci
2. Μέθοδος Χρυσού Τομέα
3. Μέθοδος Διχοτόμου

Ωστόσο η μέθοδος Διχοτόμου με παράγωγο απαιτεί τον μικρότερο αριθμό υπολογισμών για να επιτύχει το ελάχιστο σε όλο το εύρος τιμών l και έτσι είναι η πιο αποδοτική από όλες.

Επιπλέον, καθώς το k αυξάνεται (δηλαδή όταν το l μειώνεται), παρατηρούμε ότι η και οι 4 μέθοδοι συγκλίνουν στα ίδια σημεία για κάθε συνάρτηση.

Βιβλιογραφία

[1] Γεώργιος Α. Ροβιθάκης, *Τεχνικές Βελτιστοποίησης*. Εκδόσεις ΤΖΙΟΛΑ.