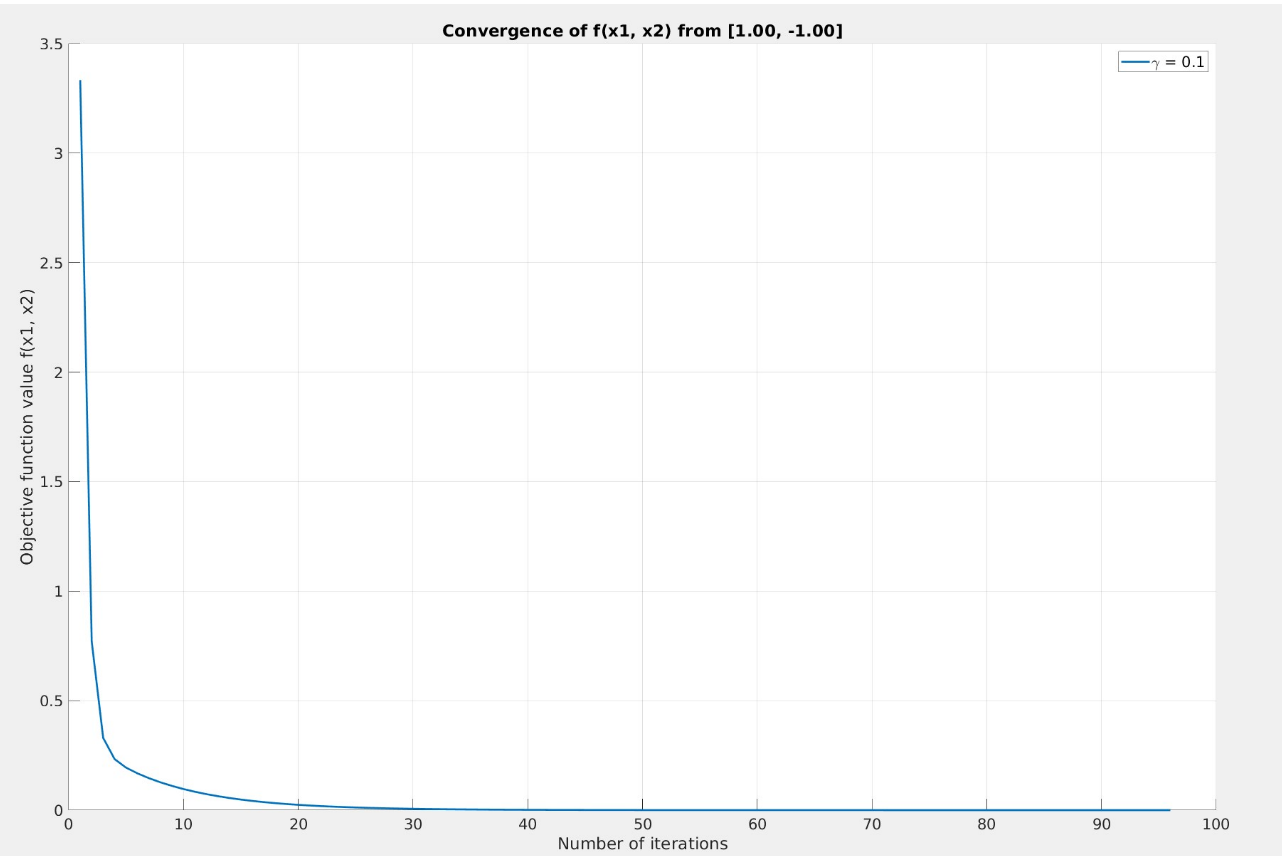
ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

<u>3η Εργαστηριακή Άσκηση</u>

Καράτης Δημήτριος 10775

<u>Θέμα 1:</u>

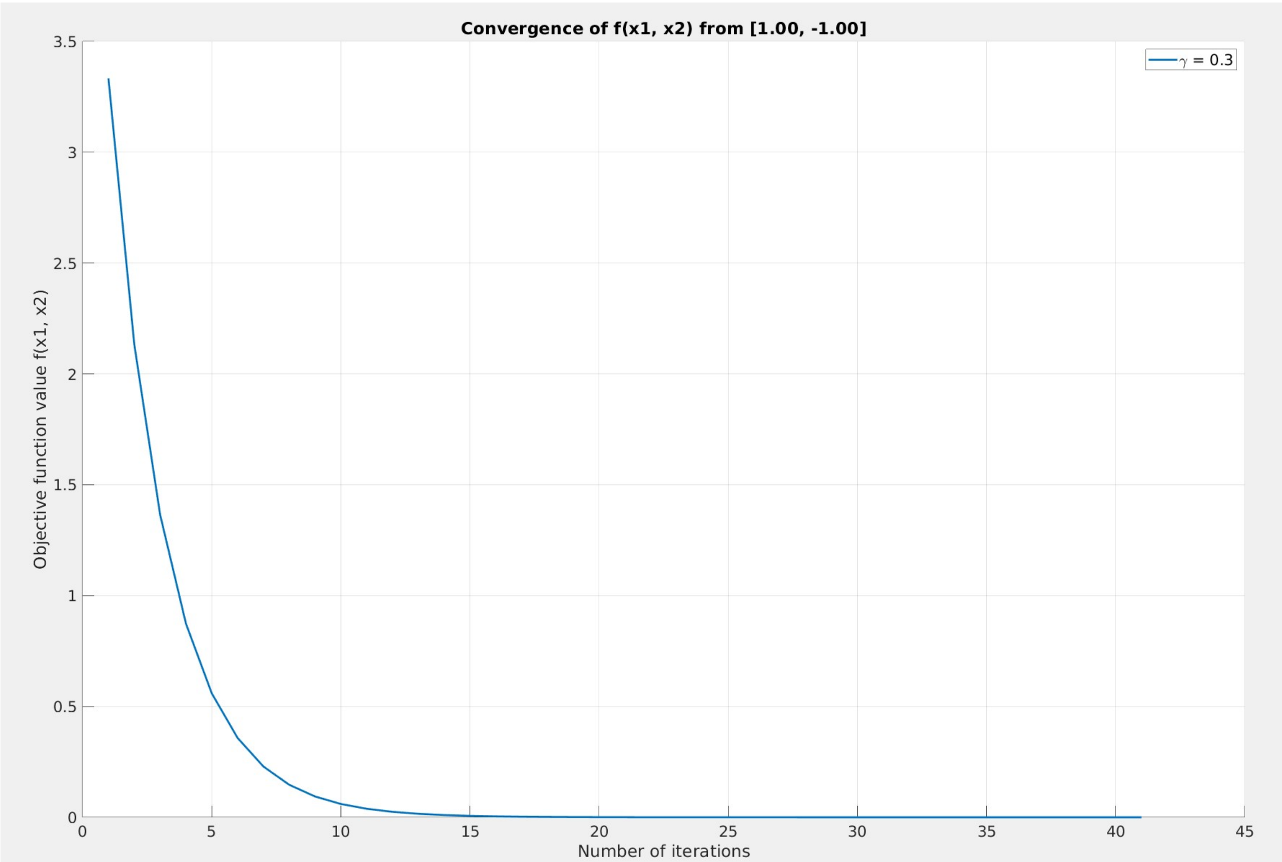
i) Έχοντας για αρχικό σημείο το (1.0, -1.0) και για $γ_κ$ = 0.1, προκύπτει η εξής γραφική παράσταση της σύγκλισης της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς τον αριθμό των επαναλήψεων που απαιτούνται μέχρι να τερματίσει ο αλγόριθμος:




```
Initial point: (1.00, -1.00), Gamma: 0.1
Minimum found at: (0.0014, -0.0000)
Final f(x1, x2) = 0.000001
Iterations: 96
```

Όπως φαίνεται και από τη γραφική παράσταση, η μέθοδος της **Μέγιστης Καθόδου για γ_κ=0.1** συγκλίνει σε αυτήν την περίπτωση και προσεγγίζει επιτυχώς το ελάχιστο σημείο της f, που είναι το (0.0, 0.0).

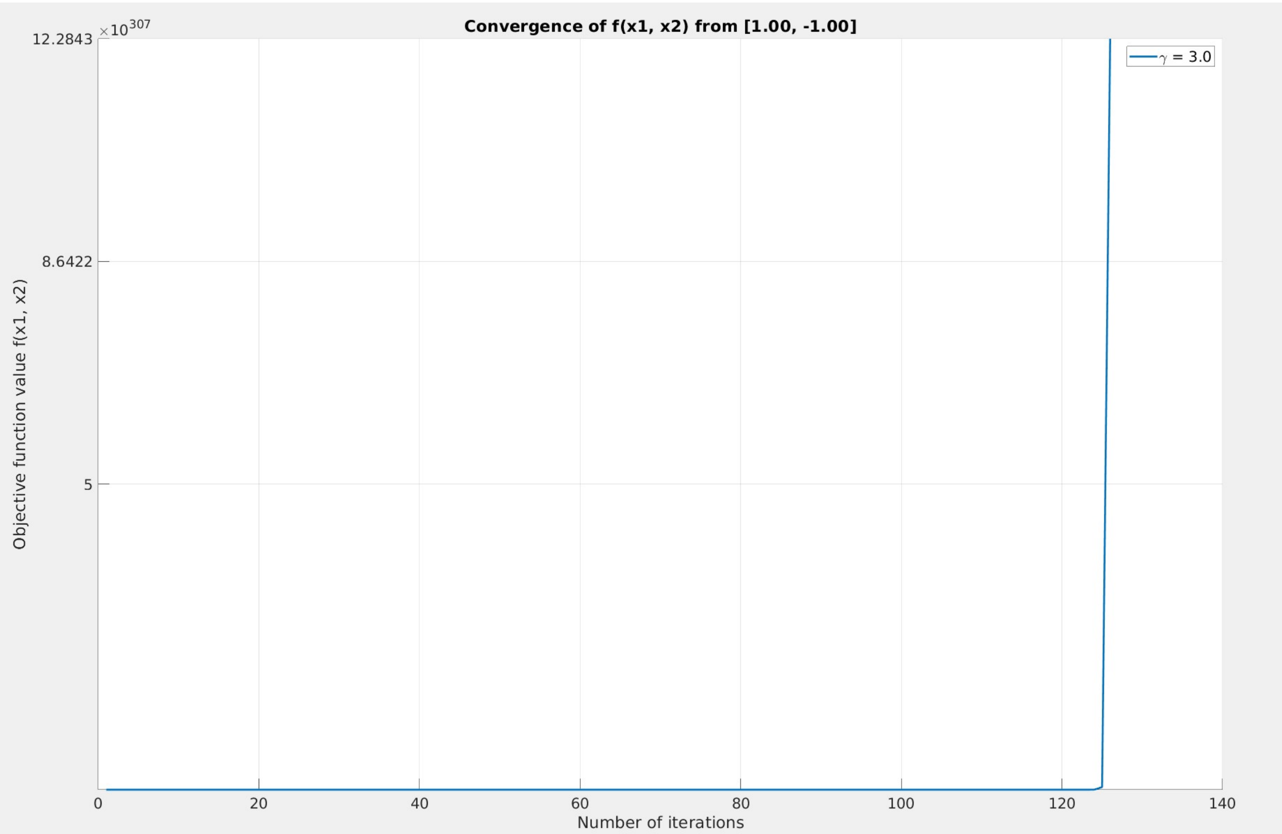
ii) Έχοντας για αρχικό σημείο το (1.0, -1.0) και για γ_κ = 0.3, προκύπτει η εξής γραφική παράσταση της σύγκλισης της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς τον αριθμό των επαναλήψεων που απαιτούνται μέχρι να τερματίσει ο αλγόριθμος:




```
Initial point: (1.00, -1.00), Gamma: 0.3
Minimum found at: (0.0001, -0.0001)
Final f(x1, x2) = 0.000000
Iterations: 41
```

Όπως φαίνεται και από τη γραφική παράσταση, η μέθοδος της **Μέγιστης Καθόδου για γ_κ=0.3** συγκλίνει σε αυτήν την περίπτωση και προσεγγίζει επιτυχώς το ελάχιστο σημείο της f, που είναι το (0.0, 0.0). Μάλιστα, το προσεγγίζει με μεγαλύτερη ακρίβεια και έχοντας κάνει περίπου τις μισές επαναλήψεις με πριν.

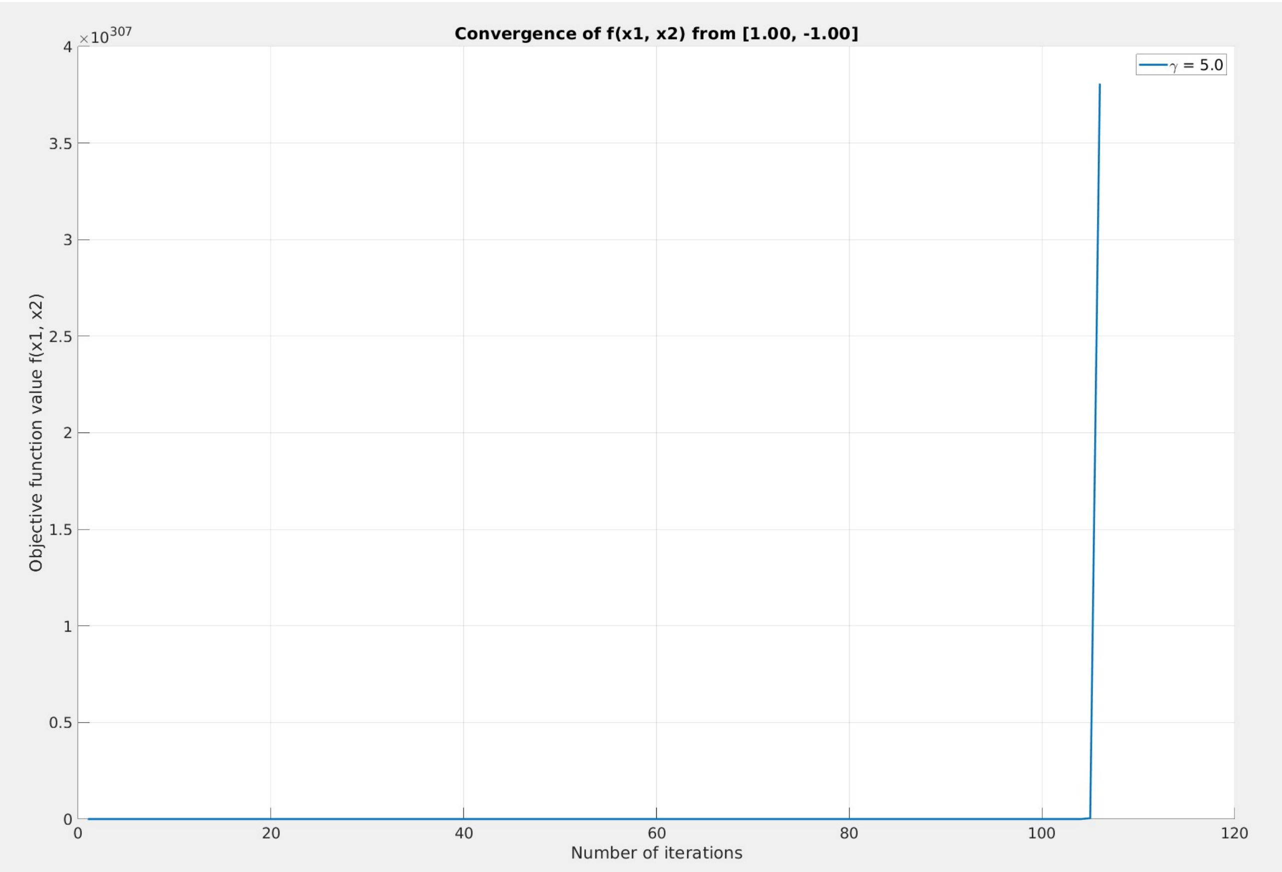
iii) Έχοντας για αρχικό σημείο το (1.0, -1.0) και για $\gamma_\kappa = 3$, προκύπτει η εξής γραφική παράσταση της σύγκλισης της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς τον αριθμό των επαναλήψεων που απαιτούνται μέχρι να τερματίσει ο αλγόριθμος:




```
Initial point: (1.00, -1.00), Gamma: 3.0
Minimum found at: (1.0000, NaN)
Final f(x1, x2) = NaN
Iterations: 1000
```

Όπως φαίνεται και από τη γραφική παράσταση, η μέθοδος της **Μέγιστης Καθόδου για γ_κ=3** δεν συγκλίνει. Παρατηρούμε ότι για 1000 επαναλήψεις προκύπτουν τιμές της f οι οποίες είναι μη διαχειρίσιμες (λόγω τάξης μεγέθους). Κάτι αντίστοιχο συμβαίνει εαν επιλέξουμε μόλις 20 επαναλήψεις.

iv) Έχοντας για αρχικό σημείο το (1.0, -1.0) και για γ_κ = 5, προκύπτει η εξής γραφική παράσταση της σύγκλισης της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς τον αριθμό των επαναλήψεων που απαιτούνται μέχρι να τερματίσει ο αλγόριθμος:




```
Initial point: (1.00, -1.00), Gamma: 5.0
Minimum found at: (NaN, NaN)
Final f(x1, x2) = NaN
Iterations: 1000
```

Όπως φαίνεται και από τη γραφική παράσταση, η μέθοδος της **Μέγιστης Καθόδου για γ_κ=5** δεν συγκλίνει. Παρατηρούμε ότι για 1000 επαναλήψεις προκύπτουν τιμές της f οι οποίες είναι μη διαχειρίσιμες (λόγω τάξης μεγέθους). Κάτι αντίστοιχο συμβαίνει εαν επιλέξουμε μόλις 20 επαναλήψεις.

Αναλυτικότερη επεξήγηση και κώδικας βρίσκεται στο αρχείο work3_ex1.m

Μαθηματική ανάλυση σύγκλισης και μη, για τις διάφορες τιμές του γ_κ, βρίσκεται στην επόμενη σελίδα.

$f(x_1,x_2) = \frac{1}{3}x_1^2 + 3x_2^2$, $x_k = [x_{1k}, x_{2k}]$ και $x_{k+1} = [x_{1k+1}, x_{2k+1}]$

<u>Μέθοδος μέγιστης καθόδου:</u>

$$\left.\begin{aligned} &\bullet\ x_{1,k+1} = x_{1,k} - \gamma_k \nabla f(x_{1,k}) \\ &\bullet\ x_{2,k+1} = x_{2,k} - \gamma_k \nabla f(x_{2,k}) \end{aligned}\right\}$$

και $\nabla f(x_{1,k}) = \frac{2}{3}x_{1,k}$, $\nabla f(x_{2,k}) = 6x_{2,k}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bullet\ x_{1,k+1} = x_{1,k} - \gamma_k \cdot \frac{2}{3}x_{1,k} \\ \bullet\ x_{2,k+1} = x_{2,k} - \gamma_k \cdot 6x_{2,k} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bullet\ x_{1,k+1} = x_{1,k}\left(1 - \gamma_k \frac{2}{3}\right) \\ \bullet\ x_{2,k+1} = x_{2,k}(1 - \gamma_k 6) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bullet\ \frac{|x_{1,k+1}|}{|x_{1,k}|} = |1 - 2/3\,\gamma_k| \\ \bullet\ \frac{|x_{2,k+1}|}{|x_{2,k}|} = |1 - 6\gamma_k| \end{cases}$$

Για να συγκλίνει η μέθοδος πρέπει: $\frac{|x_{k+1}|}{|x_k|} < 1$

άρα πρέπει

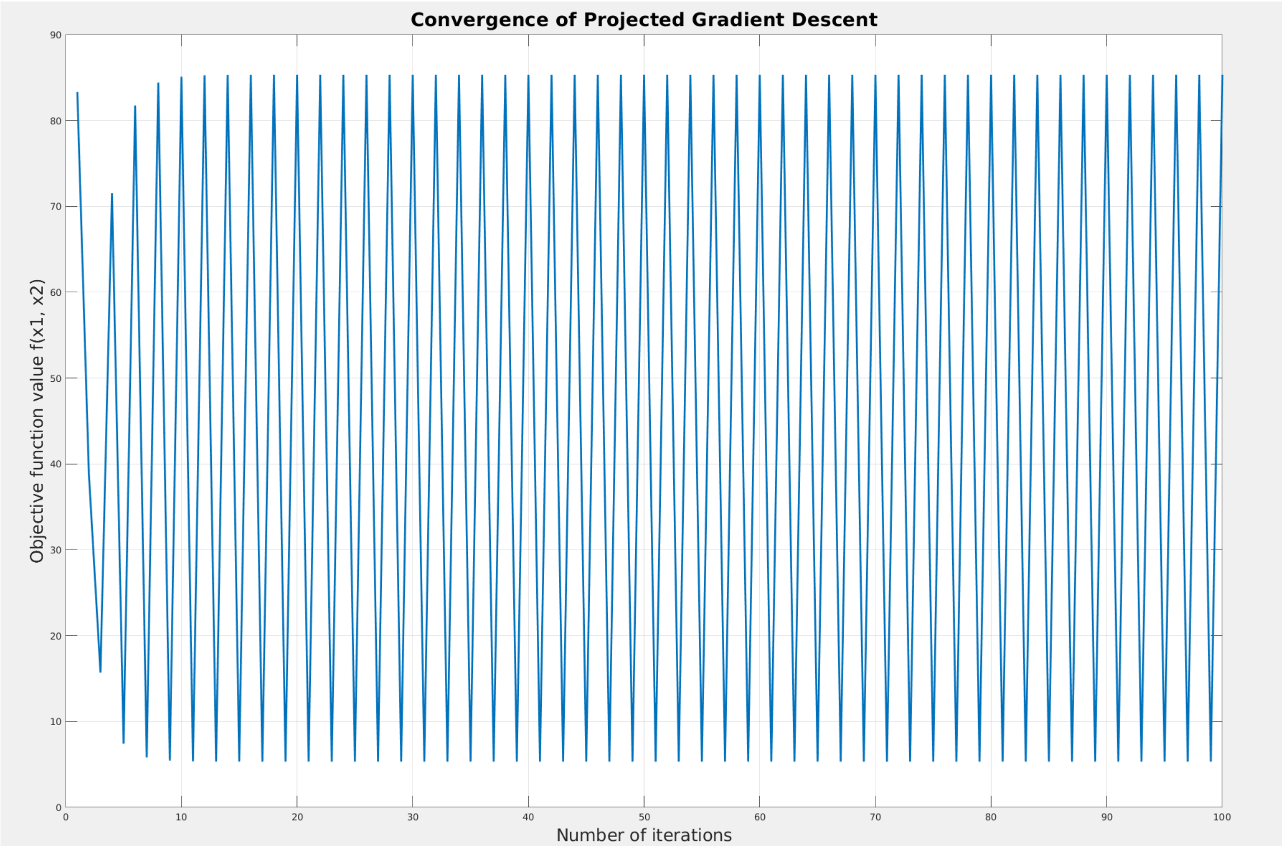
$$\begin{cases} |1 - \frac{2}{3}\gamma_k| < 1 \\ \text{και} \\ |1 - 6\gamma_k| < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 < 1 - \frac{2}{3}\gamma_k < 1 \\ \text{και} \\ -1 < 1 - 6\gamma_k < 1 \end{cases} \ldots \Rightarrow \begin{cases} 0 < \gamma_k < 3 \\ \text{και} \\ 0 < \gamma_k < \frac{1}{3} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Τελικά, πρέπει: $\boxed{\gamma_k < \frac{1}{3}}$ //

Επομένως, βλέπουμε ότι για να συγκλίνει ο αλγόριθμος θα πρέπει το γ_κ να είναι μικρότερο του 0.3333 και προφανώς μεγαλύτερο του 0, πράγμα που επιβεβαιώνεται εμπειρικά και από τις διάφορες επιλογές της τιμής του γ_κ στα ερωτήματα του Θέματος 1.

Θέμα 2:

Έχοντας για αρχικό σημείο το (5, -5), ακρίβεια ε=0.01, $s_κ$=5 και για $γ_κ$ = 0.5, προκύπτει η εξής γραφική παράσταση της σύγκλισης της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς τον αριθμό των επαναλήψεων που απαιτούνται μέχρι να τερματίσει ο αλγόριθμος:



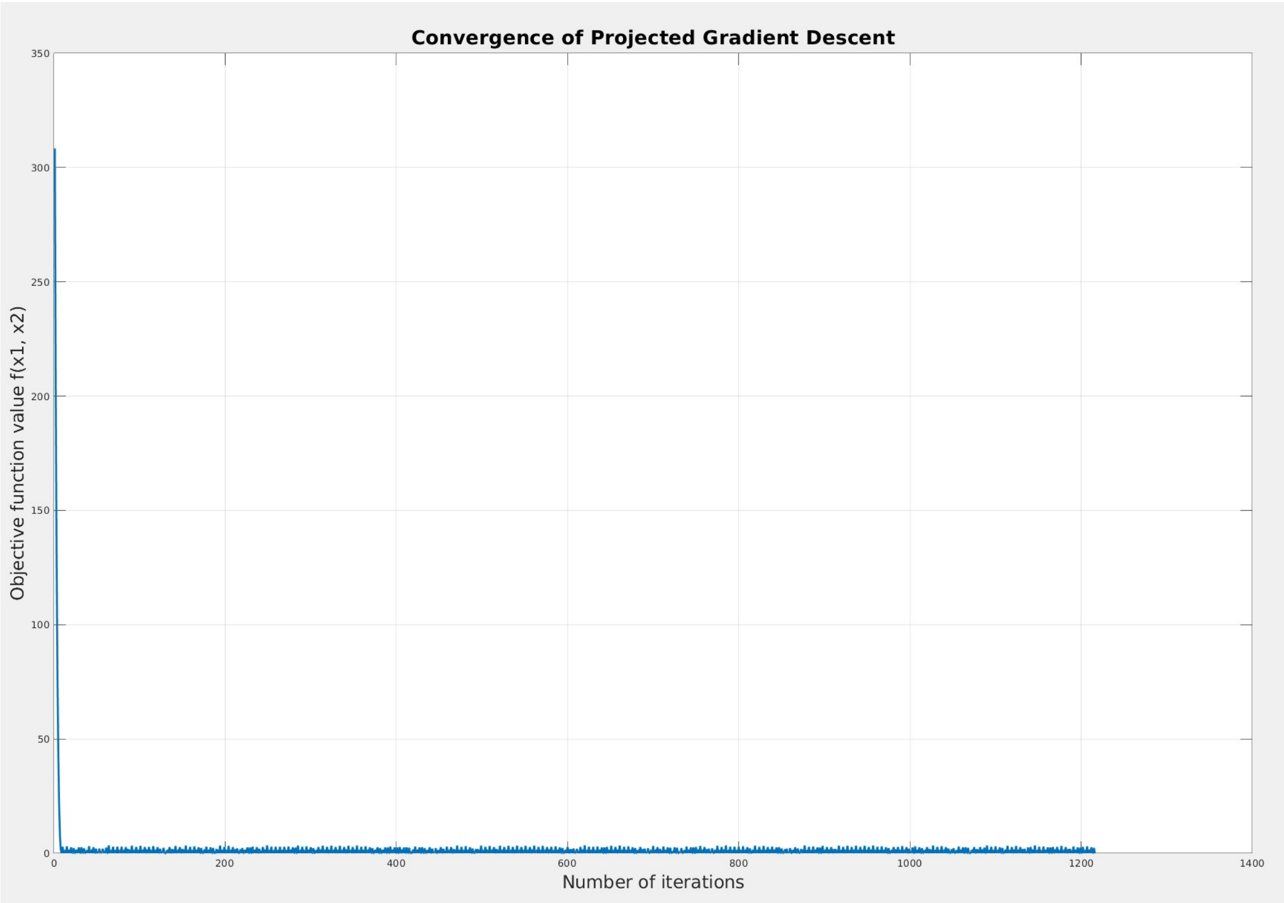

```
Initial point: (5.00, -5.00)
Minimum found at: (0.0000, -1.3333)
Final f(x1, x2) = 5.333333
Iterations: 100
```

Όπως φαίνεται και από τη γραφική παράσταση, η μέθοδος της **Μέγιστης Καθόδου με Προβολή για $γ_κ$=0.5 και $s_κ$=5** δεν συγκλίνει. Παρατηρούμε ότι για 100 επαναλήψεις προκύπτουν τιμές της f οι οποίες ταλαντεύονται μεταξύ του 5.33 και του 85.33. Κάτι αντίστοιχο συμβαίνει εαν επιλέξουμε λιγότερες ή περισσότερες επαναλήψεις. Σε σχέση με το Θέμα 1 παρατηρούμε ότι για $γ_κ$=0.5, η **Μέγιστη Καθόδος** συνέκλινε, ενώ πλέον δεν συγκλίνει.

Αναλυτικότερη επεξήγηση και κώδικας βρίσκεται στο αρχείο work3_ex2.m

Θέμα 3:

Έχοντας για αρχικό σημείο το (-5, 10), ακρίβεια ε=0.01, $s_κ$=15 και για $γ_κ$ = 0.1, προκύπτει η εξής γραφική παράσταση της σύγκλισης της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς τον αριθμό των επαναλήψεων που απαιτούνται μέχρι να τερματίσει ο αλγόριθμος:



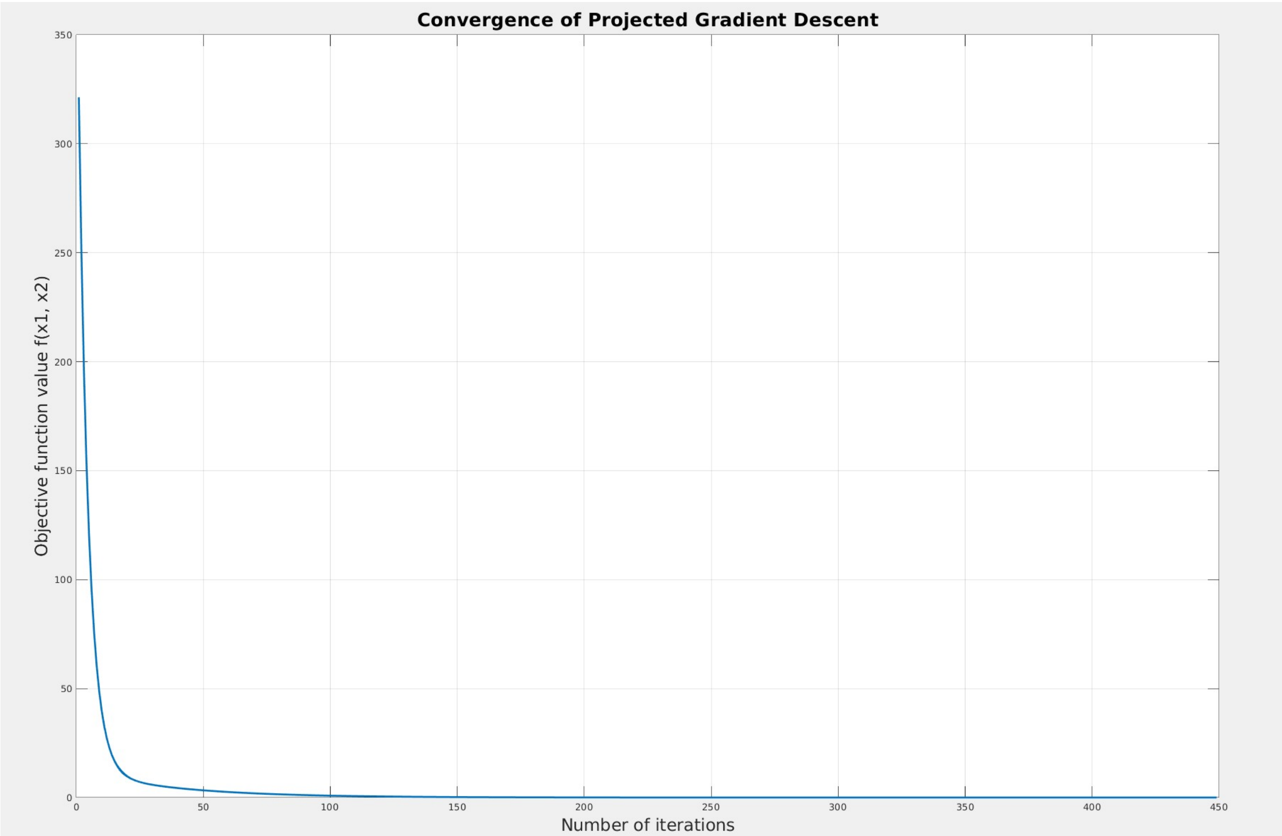
```
Initial point: (-5.00, 10.00)
Minimum found at: (0.0000, 0.0009)
Final f(x1, x2) = 0.000003
Iterations: 1216
```

Όπως φαίνεται και από τη γραφική παράσταση, η μέθοδος της **Μέγιστης Καθόδου με Προβολή για γ_{κ}=0.1 και s_{κ}=15** συγκλίνει σε αυτήν την περίπτωση και προσεγγίζει επιτυχώς το ελάχιστο σημείο της f, που είναι το (0.0, 0.0). Ωστόσο παρατηρούμε πως συνεχώς ταλαντεύεται προτού εν τέλει φτάσει στο ζητούμενο. Οπότε σε σχέση με το Θέμα 2 παρατηρώ πως και οι δυο περιπτώσεις ταλαντεύονται. Ωστόσο στη δικιά μας περίπτωση το ελάχιστο προσεγγίζεται επιτυχώς. Σε σχέση με το Θέμα 1, για γ_{κ}=0.1, και οι δυο μέθοδοι οδηγούν στο ελάχιστο. Η μέθοδος της προβολής φαίνεται ωστόσο λίγο πιο αναξιόπιστη εδώ και επίσης απαιτεί μεγαλύτερο αριθμό επαναλήψεων για να φτάσει στο ελάχιστο.

Αναλυτικότερη επεξήγηση και κώδικας βρίσκεται στο αρχείο work3_ex3.m

Θέμα 4

Έχοντας για αρχικό σημείο το (8, -10), ακρίβεια ε=0.01, $s_κ$=0.1 και για $γ_κ$ = 0.2, προκύπτει η εξής γραφική παράσταση της σύγκλισης της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς τον αριθμό των επαναλήψεων που απαιτούνται μέχρι να τερματίσει ο αλγόριθμος:




```
Initial point: (8.00, -10.00)
Minimum found at: (0.0149, -0.0000)
Final f(x1, x2) = 0.000074
Iterations: 449
```

Όπως φαίνεται και από τη γραφική παράσταση, η μέθοδος της **Μέγιστης Καθόδου με Προβολή για $γ_κ$=0.2 και $s_κ$=0.1** συγκλίνει σε αυτήν την περίπτωση και προσεγγίζει επιτυχώς το ελάχιστο σημείο της f, που είναι το (0.0, 0.0), ενώ, σε αντίθεση με πριν, δεν παρατηρούνται ταλαντώσεις. Τέλος, παρατηρώ ότι σε σχέση με το Θέμα 3 απαιτούνται σημαντικά λιγότερες επαναλήψεις προκειμένου η μέθοδος να δώσει σωστά αποτελέσματα, ενώ σε σχέση με την **Μέγιστη Κάθοδο**, χρειάζονται σημαντικά περισσότερες.

Αναλυτικότερη επεξήγηση και κώδικας βρίσκεται στο αρχείο work3_ex4.m