Report: Σετ Ασκήσεων 1

Δημήτριος Ψαρράς
AEM: 4407

Μάθημα: Υπολογιστικός Ηλεκτρομαγνητισμός και Εφαρμογές

Άσκηση 1η

Εκφώνηση

Η αριθμητική ταχύτητα φάσης στον ελεύθερο χώρο της λύσης της διακριτής μονοδιάστατης κυματικής εξίσωσης δίνεται από την σχέση

$$\bar{u}_p = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi c}{cos^{-1}\left[\frac{\Delta x^2}{(c\Delta t)^2}(cos(\omega\Delta t)-1)+1\right]}\frac{\Delta x}{\lambda} \tag{1}$$

Σχεδιάστε τον λόγο της αριθμητικής προς την αναλυτική ταχύτητα φάσης ως συνάρτηση του λόγου Δx/λ για (α) cΔt=Δx/2 (β) cΔt=Δx/4 (γ) cΔt=Δx/8. Τι τιμές παίρνει ο λόγος αυτός για τις περιπτώσεις (α), (β) και (γ), όταν Δx/λ=0.1· Υπάρχει κάποια σχέση μεταξύ αυτών των τιμών·

Επίλυση

Στις τρις περιπτώσεις (α), (β) και (γ) το γινόμενο cΔt δίνεται συναρτήσει Δx με την μορφή cΔt=Δx/a, όπου a είναι μια σταθερά η οποία λαμβάνει τιμές 2, 4 και 8 αντίστοιχα στις σχέσεις (α), (β) και (γ). Επομένως η σχέση 1 μπορεί να απλοποιηθεί στην μορφή:

$$\bar{u}_p = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi c}{cos^{-1}\left[\frac{\Delta x^2}{\frac{\Delta x^2}{a^2}}(cos(\frac{2\pi\Delta x}{a\lambda})-1)+1\right]}\frac{\Delta x}{\lambda} \tag{2}$$

και τελική η σχέση γίνεται:

$$\bar{u}_p = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi c}{cos^{-1}\left[a^2(cos(\frac{2}{a}\frac{\pi\Delta x}{\lambda})-1)+1\right]}\frac{\Delta x}{\lambda} \tag{3}$$

Έτσι για την περίπτωση (α) cΔt=Δx/2 παίρνει την μορφή:

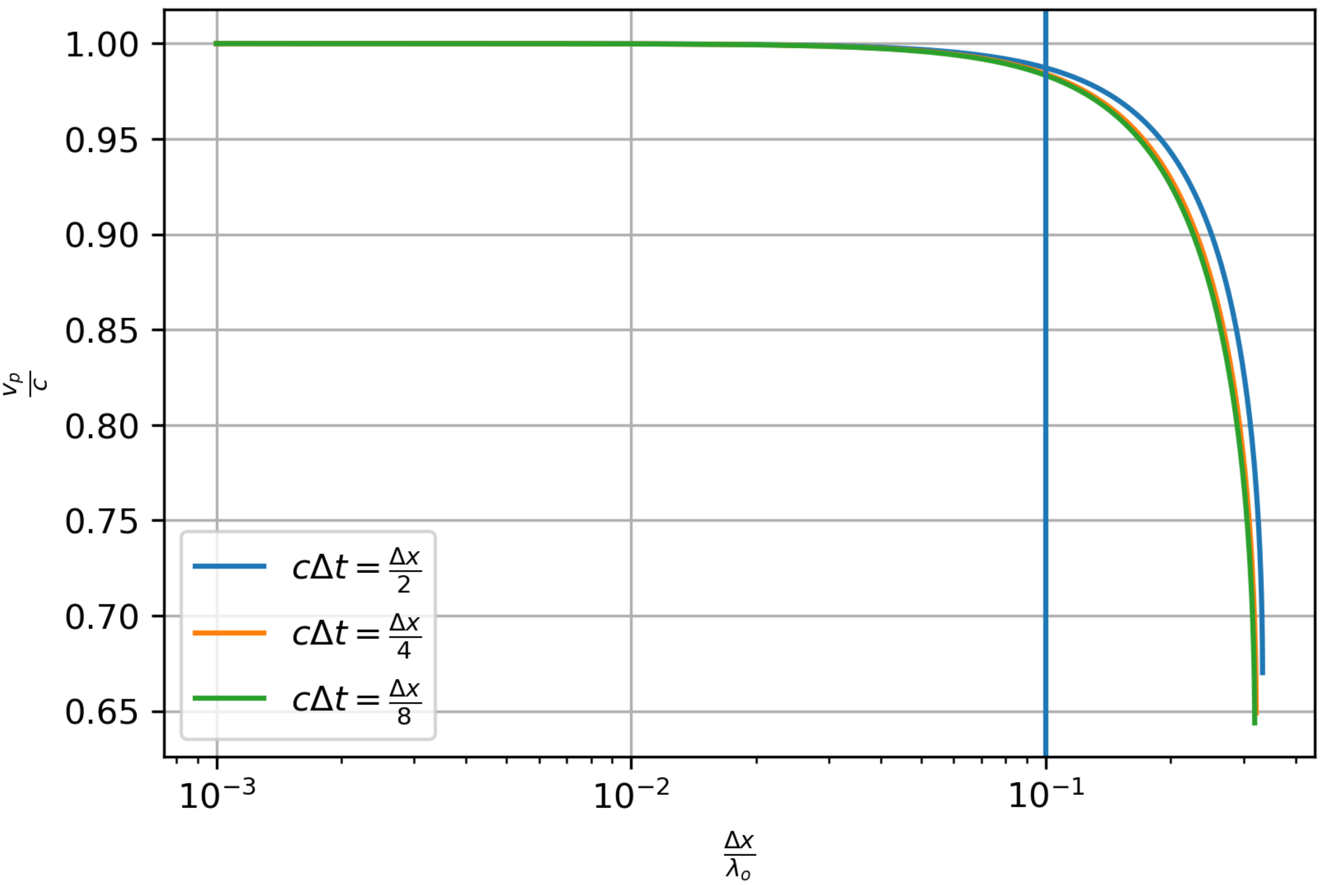
$$\bar{u}_p = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi c}{cos^{-1}\left[2(cos(\frac{\pi\Delta x}{\lambda})-1)+1\right]}\frac{\Delta x}{\lambda} \tag{4}$$

για την περίπτωση (β) cΔt=Δx/4:

$$\bar{u}_p = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi c}{cos^{-1}\left[16(cos(\frac{1}{2}\frac{\pi\Delta x}{\lambda})-1)+1\right]}\frac{\Delta x}{\lambda} \tag{5}$$

και για την περίπτωση (γ) cΔt=Δx/8:

$$\bar{u}_p = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi c}{cos^{-1}\left[64(cos(\frac{1}{4}\frac{\pi\Delta x}{\lambda})-1)+1\right]}\frac{\Delta x}{\lambda} \tag{6}$$



Σχήμα 1: Διάγραμμα του λόγου της αριθμητικής προς την αναλυτική ταχύτητα φάσης ως συνάρτηση του λόγου Δx/λ για τις περιπτώσεις (α) cΔt=Δx/2 (β) cΔt=Δx/4 (γ) cΔt=Δx/8.

Χρησιμοποιώντας, λοιπόν, την γενική σχέση 3 είναι δυνατό να συνταχθεί ένα πρόγραμμα σε γλώσσα Python μέσω του οποίου σχεδιάσθηκε ο λόγος της αριθμητικής προς την αναλυτική ταχύτητα φάσης ως συνάρτηση του λόγου Δx/λ για τις περιπτώσεις (α), (β) και (γ), όπως παρουσιάζεται στο διάγραμμα 1.

Επιπλέον, από την εκτέλεση του προγράμματος υπολογίζεται η τιμή του λόγου της αριθμητικής προς την αναλυτική ταχύτητα φάσης για τιμή Δx/λ=0.1 και για τις τρις περιπτώσεις. Έτσι για την περίπτωση (α) $\frac{u_p}{c} = 0.9872637013399767$ για την (β) $\frac{u_p}{c} = 0.9841130484351361$ και για την (γ) $\frac{u_p}{c} = 0.9833274523431658$. Οι τιμές αυτές αντιπροσωπεύονται στο διάγραμμα 1 μέσω της κάθετης μπλε γραμμής στην τιμή Δx/λ=0.1.

Όπως είναι γνωστό για το magic step cΔt=Δx τα σφάλματα εξαιτίας προσεγγίσεων κεντρικών διαφορών στο χρόνο και χώρο αλληλοαναιρούνται. Ωστόσο και στις τρις περιπτώσεις που επιλέχθηκαν η σχέση είναι cΔt<Δx, η οποία βρίσκεται εντός της σταθερής περιοχής. Επομένως ο αριθμητικός κυματάριθμος είναι διαφορετικός του αναλυτικού με αποτέλεσμα να εισάγονται σφάλματα στη λύση και επομένως να παρατηρείται το φαινόμενο του διασκεδασμού. Παρατηρείται, λοιπόν, τόσο από το διάγραμμα 1 αλλά και από τις τιμές του λόγου $\frac{u_p}{c}$ που υπολογίσθηκαν για Δx/λ=0.1 ότι το σφάλμα μειώνεται καθώς αυξάνεται το χρονικό βήμα. Συγκεκριμένα στην περίπτωση (α) για το μεγαλύτερο χρονικό βήμα cΔt=Δx/2 παρατηρείται ότι η τιμή του λόγου $\frac{u_p}{c}$ είναι πιο κοντά στη μονάδα από τις άλλες δύο περιπτώσεις. Επιπλέον, από το διάγραμμα 1 γίνεται αντιληπτό ότι το σφάλμα αυξάνεται με αύξηση του λόγου Δx/λ. Επομένως, όσο υψηλότερη είναι η συχνότητα τόσο μικρότερο θα πρέπει να λαμβάνεται το χωρικό βήμα. Τέλος, για πολύ υψηλές συχνότητες το όρισμα του αντίστροφου συνημίτονου λαμβάνει τιμή μεγαλύτερη της μονάδας και επομένως η αριθμητική ταχύτητα φάσης γίνεται μιγαδικός αριθμός. Στο πρόγραμμα οι μιγαδικοί αριθμοί δεν γίνεται να αναπαρασταθούν και επομένως σε πολύ μεγάλες τιμές του Δx/λ η αριθμητική ταχύτητα φάσης παίρνει τιμή nan (not a number).

Άσκηση 2η

Εκφώνηση

Γράψτε τον κατάλληλο κώδικα, για να μελετήσετε τη μονοδιάστατη κυματική εξίσωση $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ με ένα εξωτερικό αριθμητικό σχήμα ακρίβειας δεύτερης τάξης.

- Υποθέστε ότι c=1
- Ως αρχική συνθήκη θεωρήστε έναν ορθωγονικό παλμό με

$$u_i^{-1} = \begin{cases} 1, & i = 2..6 \\ -1, & i = 7...11 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases} \tag{7}$$

Ως u_i^0 Θεωρήστε τον ίδιο ορθογωνικό παλμό που έχει μετακινηθεί προς τα δεξιά κατά ένα χωρικό βήμα.

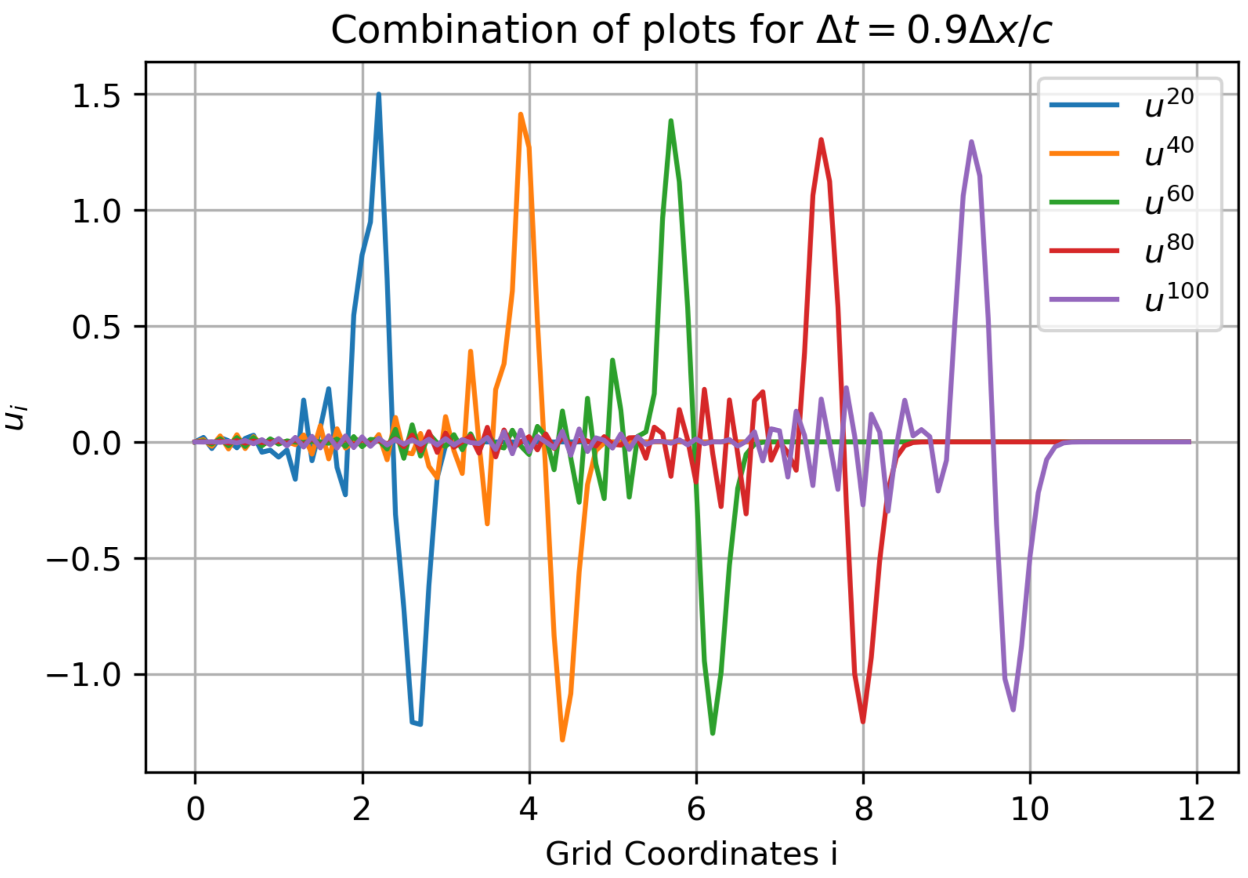
- Χρησιμοποιήστε συνοριακές συνθήκες Dirchlet στα δύο άκρα του υπολογιστικού χώρου ($u^n = 0$).
- Δείξτε στιγμιότυπα οδεύοντος κύματος (παλμού) κάθε 20 χρονικά βήματα για τα πρώτα 100 χρονικά βήματα (πάρτε τον υπολογιστικό σας χώρο αρκετά μεγάλο, ώστε να μην έχει φτάσει ο παλμός στα άκρα του χώρου μέσα στα 100 αυτά βήματα). Τα στιγμιότυπα (u_i^n για n = 20, 40, 60, 80, 100) αυτά να τα λάβετε για τρία χρονικά βήματα: Δt = 0.9Δx/c, Δt = 1.0Δx/c και Δt = 1.1Δx/c. (Το Δx αφήνεται στη δική σας επιλογή.)
- Σχολιάστε και προσπαθήστε να εξηγήσετε τι βλέπετε στα στιγμιότυπα, ως προς το σχήμα του παλμού.

Επίλυση

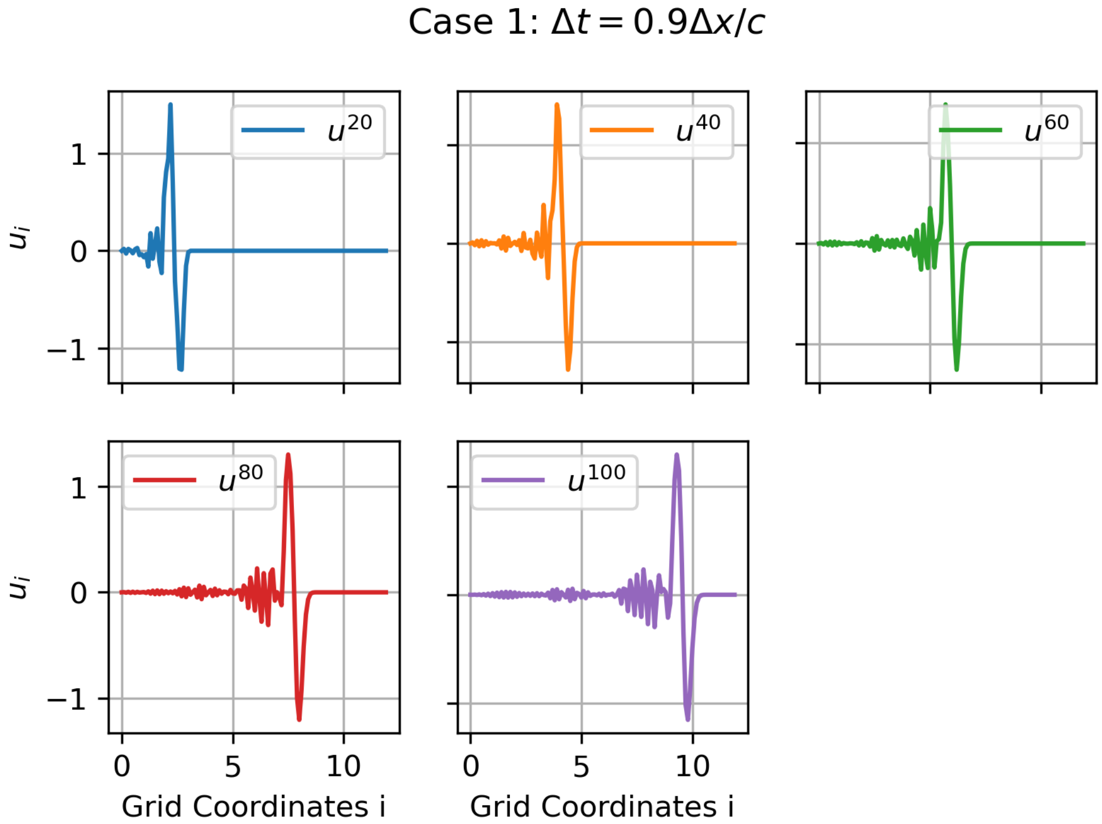
Για την επίλυση της διαφορικής συνάρτηση χρησιμοποιήθηκε εξωτερικό αριθμητικό σχήμα ακρίβειας δεύτερης τάξης. Επομένως χρησιμοποιήθηκε η ακόλουθη σχέση:

$$f_i^{n+1} = (c\Delta t)^2 \left[\frac{f_{i+1}^n - 2f_i^n + f_{i-1}^n}{(\Delta x)^2}\right] + 2f_i^n - f_i^{n-1} + O[(\Delta x)^2] + O[(\Delta t)^2] \tag{8}$$

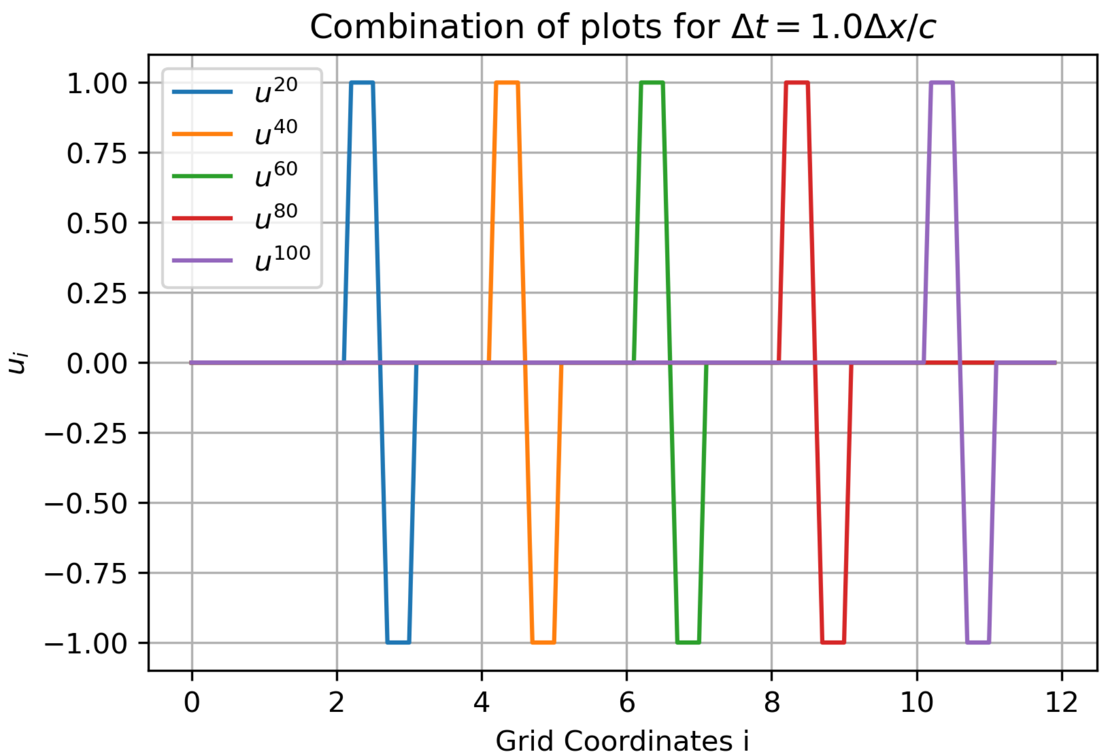
Χρησιμοποιώντας, λοιπόν, την σχέση 8 και τις αρχικές και συνοριακές συνθήκες είναι δυνατό να συνταχθεί ένα πρόγραμμα για την επίλυση της μονοδιάστατης κυματικής εξίσωσης με την μέθοδο FDTD. Από την εκτέλεση του κώδικα λήφθηκαν τα ακόλουθα σχήματα.



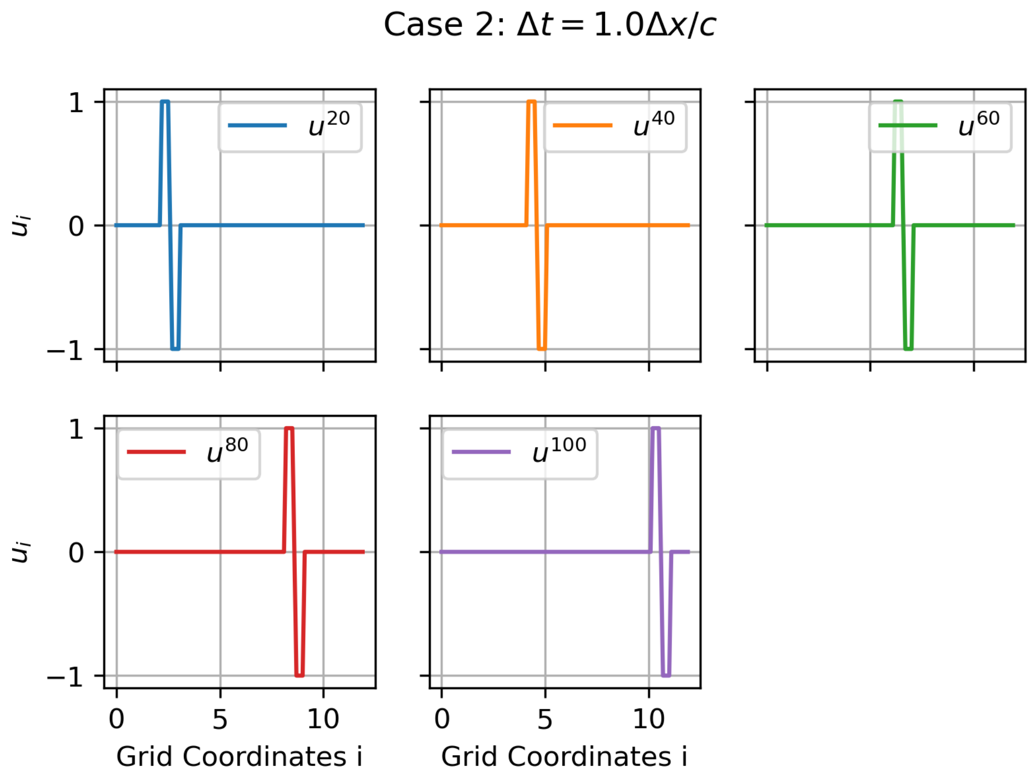
Σχήμα 2: Διάγραμμα του λόγου της αριθμητικής προς την αναλυτική ταχύτητα φάσης ως συνάρτηση του λόγου Δx/λ για τις περιπτώσεις (α) cΔt=Δx/2 (β) cΔt=Δx/4 (γ) cΔt=Δx/8.



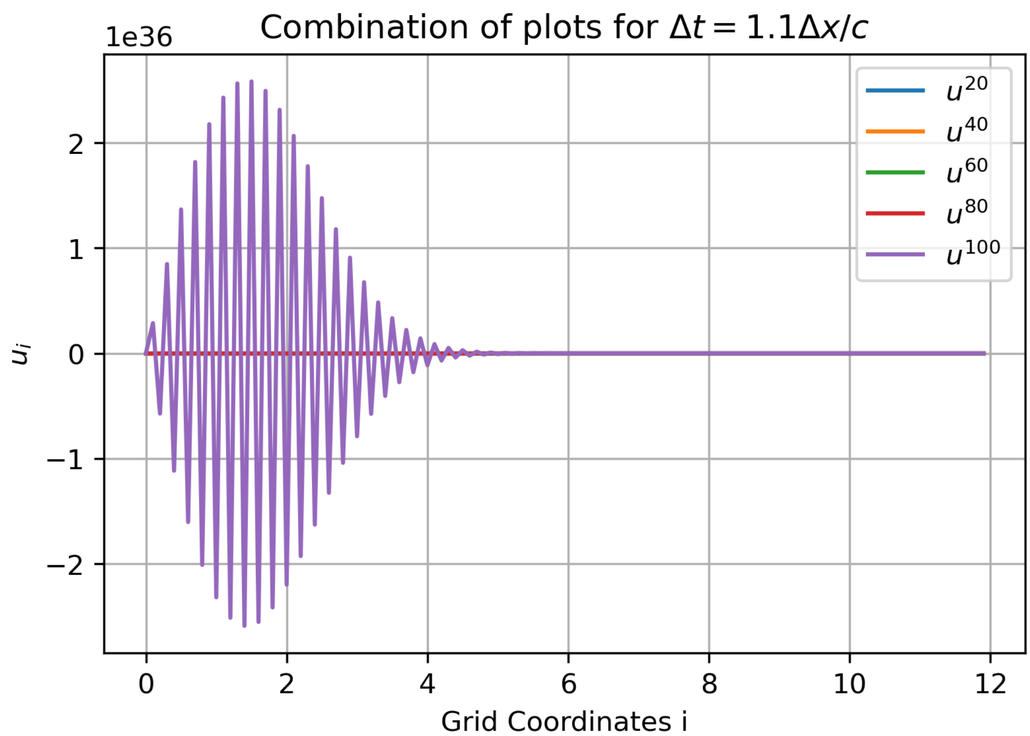
Σχήμα 3: Διάγραμμα του λόγου της αριθμητικής προς την αναλυτική ταχύτητα φάσης ως συνάρτηση του λόγου Δx/λ για τις περιπτώσεις (α) cΔt=Δx/2 (β) cΔt=Δx/4 (γ) cΔt=Δx/8.



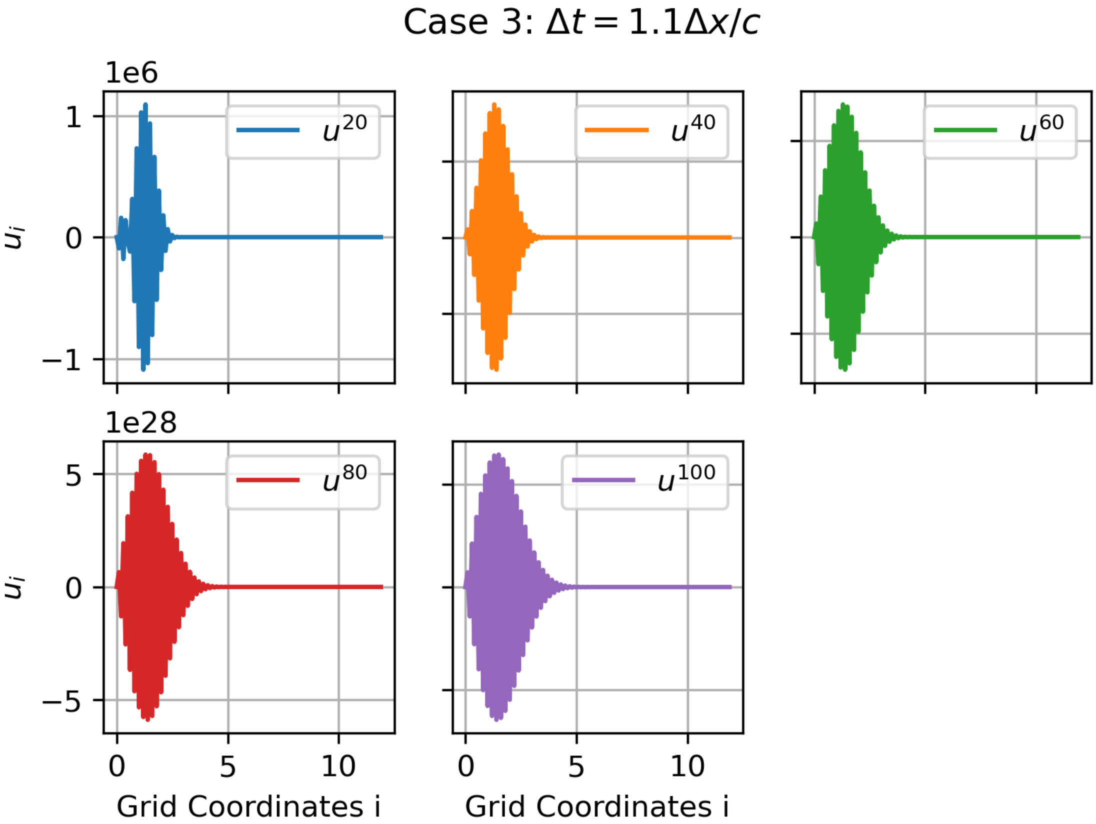
Σχήμα 4: Διάγραμμα του λόγου της αριθμητικής προς την αναλυτική ταχύτητα φάσης ως συνάρτηση του λόγου Δx/λ για τις περιπτώσεις (α) cΔt=Δx/2 (β) cΔt=Δx/4 (γ) cΔt=Δx/8.



Σχήμα 5: Διάγραμμα του λόγου της αριθμητικής προς την αναλυτική ταχύτητα φάσης ως συνάρτηση του λόγου Δx/λ για τις περιπτώσεις (α) cΔt=Δx/2 (β) cΔt=Δx/4 (γ) cΔt=Δx/8.



Σχήμα 6: Διάγραμμα του λόγου της αριθμητικής προς την αναλυτική ταχύτητα φάσης ως συνάρτηση του λόγου Δx/λ για τις περιπτώσεις (α) cΔt=Δx/2 (β) cΔt=Δx/4 (γ) cΔt=Δx/8.



Σχήμα 7: Διάγραμμα του λόγου της αριθμητικής προς την αναλυτική ταχύτητα φάσης ως συνάρτηση του λόγου Δx/λ για τις περιπτώσεις (α) cΔt=Δx/2 (β) cΔt=Δx/4 (γ) cΔt=Δx/8.

Από τα παραπάνω σχήματα παρατηρείται ότι ο παλμός διατηρεί το ορθογωνικό του σχήμα μόνο για την περίπτωση δύο, στην οποία χρησιμοποιήθηκε το magic time step $c\Delta t = \Delta x$. Έτσι για το μαγικό βήμα η αριθμητική λύση είναι ίδια με την αναλυτική διότι αλληλοαναιρούνται οι όροι Taylor ανώτερης τάξης. Επομένως οι ασυνέχειες των βημάτων μοντελοποιούνται τέλεια και ο παλμός διατηρείται. Ωστόσο για την περίπτωση 1 $c\Delta t = 0.9\Delta x$ παρατηρείται ότι ο παλμός παραμορφώνεται από το αρχικό του σχήμα. Ειδικότερα, δημιουργούνται μικρές ταλαντώσεις με διαφορά φάσης από τον αρχικό παλμό που ταξιδεύουν με μικρότερη ταχύτητα. Επομένως, παρατηρείται διασπορά στον φυσικό χώρο, δηλαδή, εισάγονται φυσικές ιδιότητες στο κενό και άρα διασκεδασμός. Τέλος για την περίπτωση τρία $c\Delta t = 1.1\Delta x$ παραβιάζεται το αριθμητικό κριτήριο σταθερότητας, σύμφωνα με το οποίο $\Delta t \leq \frac{\Delta x}{c}$. Έτσι επιλέγοντας τιμή για την οποία $c\Delta t \geq \Delta x$, η αριθμητική μέθοδος είναι ασταθής και επομένως οι τιμές της λύσης μεγαλώνουν εκθετικά οδηγώντας σε αποτελέσματα δίχως φυσική σημασία.