# Ασκήσεις Κεφαλαίου 3

1 α) Έστω τυχαίο δείγμα ανεξάρτητων παρατηρήσεων $[x_1, \dots, x_n]$ από κατανομή Poisson με άγνωστη παράμετρο $\lambda$.

Η συνάρτηση πυκνότητας της κατανομής Poisson είναι

$$f_X(x;\lambda) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$$

Η συνάρτηση πιθανοφάνειας είναι:

$$L(x_1, \dots x_n; \lambda) = \prod_{i=1}^{n}\left(e^{-\lambda}\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}\right) = e^{-n\lambda}\frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i}}{\prod_{i=1}^{n} x_i!}$$

Ο λογάριθμος της συνάρτησης πιθανοφάνειας είναι:

$$\log L(x_1, \dots, x_n; \lambda) = -n\lambda + \sum_{i=1}^{n} x_i \log\lambda - \log\prod_{i=1}^{n} x_i!$$

$$\log L(x_1, \dots, x_n; \lambda) = -n\lambda + \sum_{i=1}^{n} x_i \log\lambda - \sum_{i=1}^{n} \log x_i!$$

Ο εκτιμητής μέγιστης πιθανοφάνειας $\hat{\lambda}$ βρίσκεται μηδενίζοντας την παράγωγο της $\log L$

$$\frac{\partial \log L}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow -n + \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{1}{\lambda} = 0$$

που δίνει την λύση:

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}$$

δηλαδή είναι ο ίδιος με τον εκτιμητή $\bar{x}$ της μέσης τιμής. άρα είναι η δειγματική μέση τιμή.

# Ασκήσεις Κεφαλαίου 3

2. α) Έστω τυχαίο δείγμα ανεξάρτητων παρατηρήσεων $\{x_1, \ldots, x_n\}$ από εκθετική (exponential) κατανομή με άγνωστη παράμετρο $\tau$ και σππ:

$$f_x(x;\tau) = \frac{1}{\tau} e^{-x/\tau}$$

Η συνάρτηση πιθανοφάνειας είναι:

$$L(x_1, \ldots, x_n; \tau) = \prod_{i=1}^{n} \left( \frac{1}{\tau} e^{-x/\tau} \right) = \tau^{-n} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\tau}}$$

Ο λογάριθμος της συνάρτησης πιθανοφάνειας είναι:

$$\log L(x_1, \ldots, x_n; \tau) = -n \log \tau - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\tau}$$

Ο εκτιμητής μέγιστης πιθανοφάνειας $\hat{\tau}$ βρίσκεται μηδενίζοντας την παράγωγο της $\log L$

$$\frac{\partial \log L}{\partial \tau} = 0 \Rightarrow -\frac{n}{\tau} + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\tau^2} = 0 \Rightarrow -n + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\tau} = 0$$

που δίνει την λύση:

$$\hat{\tau} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}$$

Άρα ο εκτιμητής μέγιστης πιθανοφάνειας του $\tau$ είναι η δειγματική μέση τιμή