

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ & ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
Τομέας Επικοινωνιών, Ηλεκτρονικής & Συστημάτων Πληροφορικής
Εργαστήριο Διαχείρισης και Βέλτιστου Σχεδιασμού Δικτύων - NETMODE

Ηρώων Πολυτεχνείου 9, Ζωγράφου, 157 80, Τηλ: 210.772.2503, Fax: 210.772.1452
URL <http://www.netmode.ntua.gr/>

Γραπτή Εξέταση στο Μάθημα "ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΝΑΜΟΝΗΣ"
6ο Εξάμηνο Ηλεκτρολόγων Μηχ. & Μηχ. Υπολογιστών

28.09.2016

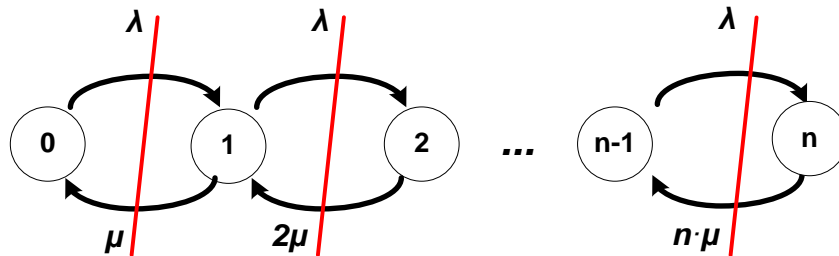
Θέματα και Λύσεις

Θέμα 1^ο

Θεωρείστε μια ουρά με άπειρο πλήθος εξυπηρετητών. Η διαδικασία άφιξης πελατών είναι Poisson με παράμετρο $\lambda=4$ πελάτες/sec, και ο χρόνος εξυπηρέτησης πελάτη μια τυχαία εκθετική μεταβλητή με μέση τιμή $1/\mu=0.25$ sec. Όλες οι τυχαίες μεταβλητές (αφίξεων και εξυπηρέτησεων) είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Βρείτε:

A) Τις εργοδικές πιθανότητες του αριθμού πελατών n .

Ακολουθεί το διάγραμμα καταστάσεων:



$$\lambda P(0) = \mu P(1), \quad \lambda P(1) = 2\mu P(2), \quad \dots, \quad \lambda P(n-1) = n\mu P(n)$$

Άρα:

$$P(n) = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P(0)}{n!} = \frac{\rho^n}{n!} P(0), \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu} \text{ (Erlangs)}$$

Ισχύει ότι: $P(0) + P(1) + P(2) + \dots = 1 \Rightarrow$

$$P(0) \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2} + \frac{\rho^3}{6} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} \right) = 1 \Rightarrow e^\rho P(0) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(0) = e^{-\rho} \text{ και } P(n) = \frac{\rho^n}{n!} e^{-\rho} \text{ (τύπος Poisson με παράμετρο } \rho)$$

Επομένως με τα $\lambda = 4, \mu = 4$ έχουμε $\rho = 1$ και $P(n)$:

$$P(n) = \frac{1}{e \cdot n!}$$

Β) Το συνολικό μέσο χρόνο συστήματος T για ένα πελάτη.

Ο συνολικός μέσος χρόνος συστήματος T ταυτίζεται με τον μέσο χρόνο εξυπηρέτησης:

$$E(T) = \frac{1}{\mu} = 0.25 \text{ sec}$$

Γ) Το μέσο αριθμό $E(n)$ και την διασπορά $\sigma^2(n)$ πελατών στο σύστημα.

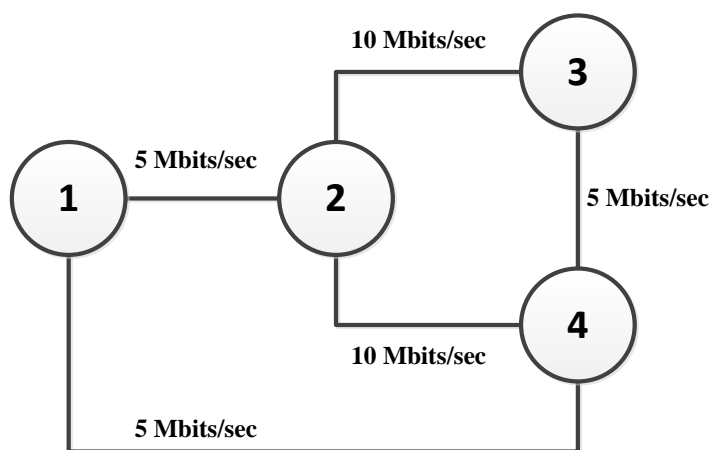
$$P(n) = \frac{\rho^n}{n!} e^{-\rho}$$

Η τυχαία μεταβλητή n ακολουθεί κατανομή Poisson με παράμετρο ρ και όπως είναι γνωστό η μέση τιμή και διασπορά είναι:

$$E(n) = \sigma^2(n) = \rho = \frac{\lambda}{\mu} = 1$$

Θέμα 2^ο

Στο δίκτυο μεταγωγής πακέτου του σχήματος οι ρυθμοί πακέτων από άκρο σε άκρο είναι ίσοι με r πακέτα/sec για όλα τα ζεύγη των κόμβων. Το μέσο μήκος πακέτου είναι 1000 bits. Οι γραμμές του δικτύου (full duplex) έχουν χωρητικότητες όπως στο σχήμα. Η δρομολόγηση πακέτων ακολουθεί τον συντομότερο δρόμο από πλευράς αριθμού ενδιάμεσων κόμβων. Σε περιπτώσεις δύο εναλλακτικών δρόμων ίσου αριθμού κόμβων, τα πακέτα ακολουθούν τον ταχύτερο δρόμο (από πλευράς ταχυτήτων γραμμών). Αν οι εναλλακτικοί δρόμοι είναι ισοδύναμοι, το φορτίο διαμερίζεται ισόποσα με τυχαία (random) απόφαση ανά πακέτο.



A) Αναφέρατε τις παραδοχές που απαιτούνται ώστε το δίκτυο να αναλύεται σαν δίκτυο ανεξαρτήτων ουρών M/M/1

- Τυχαίες εξωτερικές αφίξεις – Poisson
- Τυχαία δρομολόγηση πακέτων βάσει των πιθανοτήτων $x, 1 - x$. Στην περίπτωση μας ΔΕΝ χρειάζεται καθώς δεν υπάρχουν ισοδύναμοι εναλλακτικοί δρόμοι.
- Ανεξάρτητες εκθετικές εξυπηρετήσεις πακέτων, παραδοχή Kleinrock ανεξαρτησίας εξυπηρετήσεων
- Άπειρες ουρές FIFO, χωρίς απώλειες,

B) Βρείτε τη γραμμή συμφόρησης του δικτύου και το μέγιστο δυνατό ρυθμό $r = r(\max)$ packets/sec που μπορεί να προωθηθεί στο δίκτυο.

Όλες οι ροές πακέτων (12 συνολικά) μπορούν να προωθηθούν απευθείας, με εξαίρεση αυτή από τον κόμβο 1 στον κόμβο 3 και αντίστροφα, για την οποία χρησιμοποιείται ως ενδιάμεσος ο κόμβος 2.

Έστω $Q_{i,j}$ η ουρά M/M/1 ανάμεσα στους κόμβους i, j $i \neq j$ και $\lambda_{i,j}$, $\mu_{i,j}$ οι ρυθμοί αφίξης και εξυπηρέτησης πακέτου αντίστοιχα.

$$\lambda_{1,2} = r_{1 \rightarrow 2} + r_{1 \rightarrow 3} = 2r, \quad \lambda_{2,1} = r_{2 \rightarrow 1} + r_{3 \rightarrow 1} = 2r$$

$$\lambda_{2,3} = r_{2 \rightarrow 3} + r_{1 \rightarrow 3} = 2r, \quad \lambda_{3,2} = r_{3 \rightarrow 2} + r_{3 \rightarrow 1} = 2r$$

$$\lambda_{1,4} = r_{1 \rightarrow 4} = r, \quad \lambda_{4,1} = r_{4 \rightarrow 1} = r, \quad \lambda_{2,4} = r_{2 \rightarrow 4} = r$$

$$\lambda_{4,2} = r_{4 \rightarrow 2} = r, \quad \lambda_{3,4} = r_{3 \rightarrow 4} = r, \quad \lambda_{4,3} = r_{4 \rightarrow 3} = r$$

$$C_{1,2} = C_{2,1} = C_{3,4} = C_{4,3} = C_{1,4} = C_{4,1} = 5 \frac{Mbits}{sec}$$

$$C_{2,3} = C_{3,2} = C_{2,4} = C_{4,2} = 10 \frac{Mbits}{sec}$$

$$\mu_{i,j} = \frac{C_{i,j}}{E(L)} \Rightarrow \mu_{1,2} = \mu_{2,1} = \mu_{3,4} = \mu_{4,3} = \mu_{1,4} = \mu_{4,1} = \frac{5 \cdot 10^3 \text{ πακέτα}}{sec}$$

$$\mu_{2,3} = \mu_{3,2} = \mu_{2,4} = \mu_{4,2} = \frac{10^4 \text{ πακέτα}}{sec}$$

$$\rho_{i,j} = \frac{\lambda_{i,j}}{\mu_{i,j}} \Rightarrow \rho_{1,2} = \rho_{2,1} = \frac{2r}{5 \cdot 10^3}, \quad \rho_{1,4} = \rho_{4,1} = \frac{r}{5 \cdot 10^3}, \quad \rho_{2,3} = \rho_{3,2} = \frac{2r}{10^4}$$

$$\rho_{2,4} = \rho_{4,2} = \frac{r}{10^4}, \quad \rho_{3,4} = \rho_{4,3} = \frac{r}{5 \cdot 10^3}$$

Η γραμμή συμφόρησης είναι ανάμεσα στους κόμβους 1 και 2.

$$\frac{2r_{max}}{5 \cdot 10^3} = 1 \Rightarrow r_{max} = \frac{5 \cdot 10^3 \text{ πακέτα}}{2 \text{ sec}}$$

Γ) Με τις παραδοχές του (Α) και για ρυθμούς $r = r(\max)/2$ υπολογίστε τη μέση καθυστέρηση από τον κόμβο 1 στον κόμβο 3 και τη μέση καθυστέρηση τυχαίου πακέτου από άκρο σε άκρο.

$$\text{Για } r = \frac{r_{max}}{2} = 1250 \frac{\text{πακέτα}}{sec}$$

$$\lambda_{1,2} = \lambda_{2,1} = \lambda_{2,3} = \lambda_{3,2} = 2500 \frac{\text{πακέτα}}{sec}$$

$$\lambda_{1,4} = \lambda_{4,1} = \lambda_{2,4} = \lambda_{4,2} = \lambda_{3,4} = \lambda_{4,3} = 1250 \frac{\text{πακέτα}}{sec}$$

Μέση καθυστέρηση από το $1 \rightarrow 3$:

$$\begin{aligned} E(T_{1 \rightarrow 3}) &= E(T_{1 \rightarrow 2}) + E(T_{2 \rightarrow 3}) = \frac{1}{\mu_{1,2} - \lambda_{1,2}} + \frac{1}{\mu_{2,3} - \lambda_{2,3}} = \\ &= \frac{2}{5} 10^{-3} + \frac{2}{15} 10^{-3} \cong 0,533 \text{ msec} \end{aligned}$$

Καθυστερήση τυχαίου πακέτου $E(T)$

$$E(T) = \frac{E(n)}{\gamma},$$

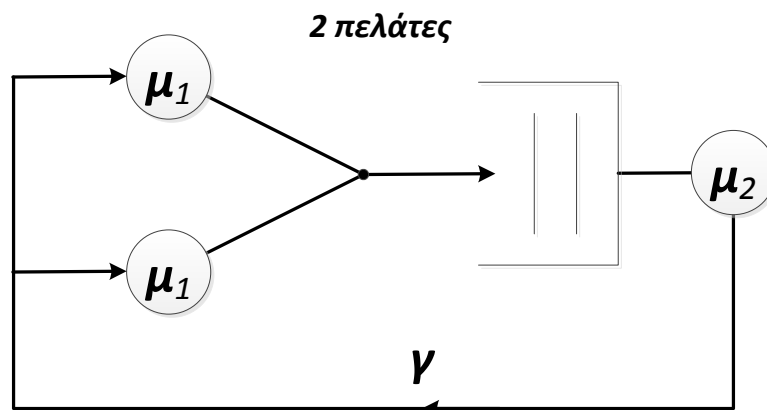
$$E(n) = E(n_{1,2}) + E(n_{2,1}) + E(n_{2,3}) + E(n_{3,2}) + E(n_{1,4}) + E(n_{4,1}) \\ + E(n_{2,4}) + E(n_{4,2}) + E(n_{3,4}) + E(n_{4,3})$$

$$E(n_{i,j}) = \frac{\rho_{i,j}}{1 - \rho_{i,j}} \Rightarrow E(n) = \frac{30}{7} \cong 4,286$$

$$\gamma = 4 \cdot 3 \cdot r \Rightarrow E(T) \cong 0,286 \text{ msec}$$

Θέμα 3^ο

Θεωρείστε ένα υπολογιστικό σύστημα που εξυπηρετεί εντολές από δυο ενεργά παράθυρα. Ένα απλό μοντέλο του συστήματος παρατίθεται στο σχήμα που ακολουθεί σαν κλειστό δίκτυο ανεξαρτήτων συστημάτων εκθετικής εξυπηρέτησης με $N = 2$ εντολές (πελάτες).

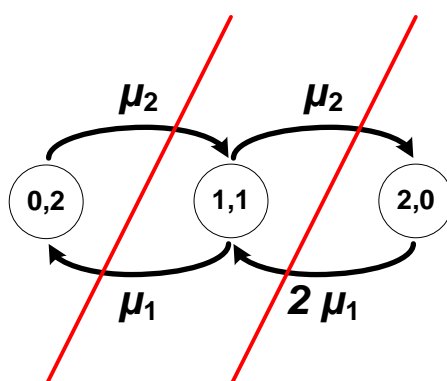


Η συνολική επεξεργασία εντολών (CPU και I/O) αναπαρίσταται με μια ουρά με ρυθμό εξυπηρέτησης $\mu_2 = 0.2$ εντολές/sec

Τα δύο ενεργά παράθυρα εισάγουν εκθετική καθυστέρηση (thinking time) $1/\mu_1 = 10$ sec κατά μέσο όρο, από την στιγμή της απόκρισης μέχρι την κατάθεση νέας εντολής. Βρείτε:

Α) Το διάγραμμα μεταβάσεων στην εργοδική κατάσταση και τις εξισώσεις ισορροπίας.

Το διάγραμμα μεταβάσεων στην σταθερή κατάσταση είναι:



Οι εξισώσεις ισορροπίας μεταβάσεων στο διάγραμμα δίνουν:

$$\mu_2 P(0,2) = \mu_1 P(1,1), \quad \mu_2 P(1,1) = 2 \mu_1 P(2,0)$$

$$\text{Επίσης ισχύει } P(0,2) + P(1,1) + P(2,0) = 1$$

Αντικαθιστώντας ως προς $P(0,2)$ και λαμβάνοντας υπ όψιν τις τιμές των μ_1, μ_2 έχουμε:

$$P(0,2) = \frac{1}{5}, \quad P(1,1) = \frac{2}{5}, \quad P(2,0) = \frac{2}{5}$$

Β) Τη ρυθμαπόδοση (throughput) του συστήματος γ (μέση διεκπεραίωση εντολών ανά sec).

$$\gamma = \mu_2(1 - P(2,0)) = \frac{3}{5}\mu_2 = 0,12 \frac{\text{εντολές}}{\text{sec}}$$

Γ) Το μέσο χρόνο που απαιτείται για την επεξεργασία μιας εντολής.

Έστω $E(T_2)$ ο μέσος χρόνος επεξεργασίας μιας εντολής.

$$E(T_2) = \frac{E(n_2)}{\gamma}, \quad E(n_2) = 0 \cdot P(2,0) + 1 \cdot P(1,1) + 2 \cdot P(0,2) = \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow E(T_2) \cong 6,67 \text{ sec}$$