ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ & ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
Τομέας Επικοινωνιών, Ηλεκτρονικής & Συστημάτων Πληροφορικής
Εργαστήριο Διαχείρισης και Βέλτιστου Σχεδιασμού Δικτύων - NETMODE

Ηρώων Πολυτεχνείου 9, Ζωγράφου, 157 80, Τηλ: 210.772.2503, Fax: 210.772.1452
URL *http://www.netmode.ntua.gr/*

Γραπτή Εξέταση στο Μάθημα "ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΝΑΜΟΝΗΣ"
6ο Εξάμηνο Ηλεκτρολόγων Μηχ. & Μηχ. Υπολογιστών

27.09.2017

Θέματα και Λύσεις

Θέμα 1ο

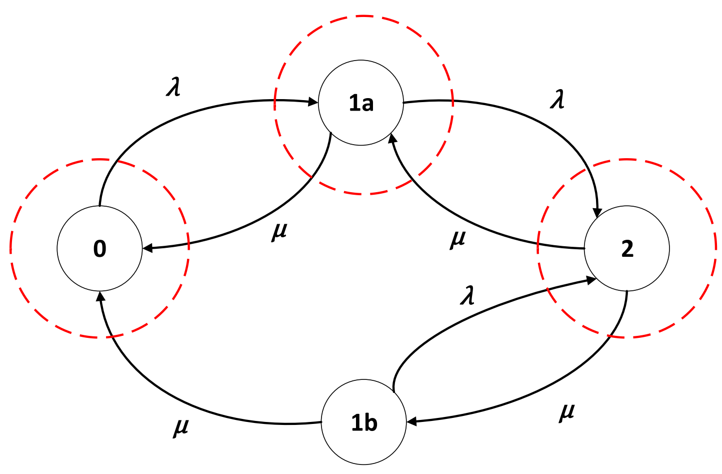
Θεωρείστε απλό τηλεφωνικό κέντρο το οποίο αποτελείται από τις δυο τηλεφωνικές γραμμές 1 και 2 χωρίς δυνατότητα αναμονής κλήσεων. Όταν και οι δύο γραμμές είναι διαθέσιμες, μια κλήση δρομολογείται πάντα στην γραμμή 1. Σε περίπτωση που η 1 είναι κατειλημμένη, επιλέγεται η 2. Σε περίπτωση που είναι και οι δυο κατειλημμένες, μια νέα κλήση απορρίπτεται. Οι κλήσεις έχουν εκθετική χρονική διάρκεια με μέση διάρκεια 3min. Οι εισερχόμενες στο σύστημα τηλεφωνικές κλήσεις ακολουθούν κατανομή Poisson με μέσο ρυθμό1/2 κλήσεις/min.

A) Σχεδιάστε το διάγραμμα καταστάσεων του συστήματος

Ισχύει:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = \frac{1}{2}\,\kappa\lambda\acute{\eta}\sigma\varepsilon\iota\varsigma/\min \quad \mu_1 = \mu_2 = \mu = \frac{1}{3}\kappa\lambda\acute{\eta}\sigma\varepsilon\iota\varsigma/\min$$

Ακολουθεί το διάγραμμα καταστάσεων:



Όπου ως 1a συμβολίζεται η κατάσταση στην οποία ένας πελάτης βρίσκεται στο σύστημα και εξυπηρετείται από την τηλεφωνική γραμμή 1, ενώ ως 1b συμβολίζεται η κατάσταση στην οποία ένας πελάτης βρίσκεται στο σύστημα και εξυπηρετείται από την τηλεφωνική γραμμή 2.

Β) Βρείτε τις εργοδικές πιθανότητες καταστάσεων

Οι εξισώσεις ισορροπίας μεταβάσεων στο διάγραμμα δίνουν:

$$\lambda P_0 = \mu P_{1a} + \mu P_{1b}$$

$$\mu P_{1a} + \lambda P_{1a} = \lambda P_0 + \mu P_2$$

$$\mu P_2 + \mu P_2 = \lambda P_{1a} + \lambda P_{1b}$$

Η συνθήκη κανονικοποίησης:

$$P_0 + P_{1a} + P_{1b} + P_2 = 1$$

Επιλύοντας το σύστημα:

$$P_0 = \frac{8}{29} = 0.2759$$

$$P_{1a} = \frac{42}{145} = 0.2896$$

$$P_{1b} = \frac{18}{145} = 0.1241$$

$$P_2 = \frac{9}{29} = 0.3103$$

Γ) Βρείτε το μέσο τηλεπικοινωνιακό φορτίο (σε Erlangs) που διεκπεραιώνεται από κάθε γραμμή και την πιθανότητα απόρριψης κλήσης

Η πιθανότητα απόρριψης κλήσης:

$$P_{blocking} = P_2 = 0.3103$$

Το μέσο τηλεπικοινωνιακό φορτίο σε Erlangs που διεκπεραιώνεται από τις γραμμές 1 και 2 αντίστοιχα είναι:

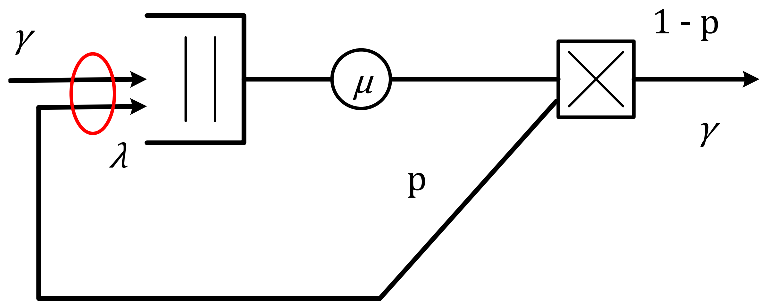
$$\rho_1 = U_1 = 1 - P_0 - P_{1b} = 0.6 \text{ Erlangs}$$

$$\rho_2 = U_2 = 1 - P_0 - P_{1a} = 0.4345 \text{ Erlangs}$$

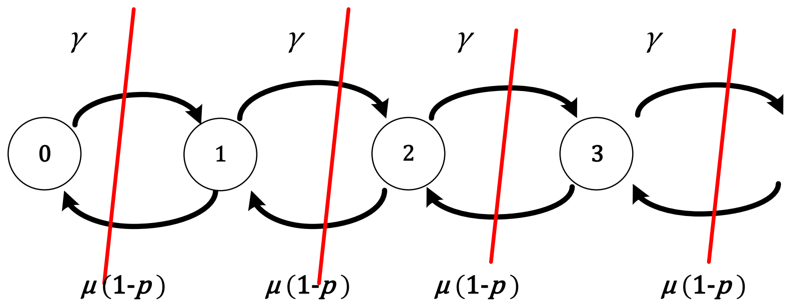
Θέμα 2ο

Θεωρείστε υπολογιστική μονάδα η οποία εξυπηρετεί εντολές που υποβάλλονται με κατανομή Poisson μέσου ρυθμού γ εντολές/sec και εξυπηρετούνται σε κύκλους εξυπηρέτησης. Η υπολογιστική μονάδα αναπαρίσταται από την ουρά αναμονής του σχήματος. Μετά από κάθε κύκλο εξυπηρέτησης μια εντολή επιστρέφει στην μονάδα επεξεργασίας με πιθανότητα ¼ ή ολοκληρώνει την επεξεργασία με πιθανότητα ¾ .

Κάθε κύκλος εξυπηρέτησης εντολής στην μονάδα έχει εκθετική διάρκεια με μέση τιμή $\mu = 2$ msec^{-1}.



Α) Ορίστε την κατάσταση του συστήματος (Markov) και σχεδιάστε το διάγραμμα καταστάσεων στην σταθερή κατάσταση.



Β) Να βρεθούν οι εργοδικές πιθανότητες καταστάσεων του συστήματος.

Οι εξισώσεις ισορροπίας μεταβάσεων στο διάγραμμα δίνουν:

$\gamma\, P(0) = \mu\, (1-p)P(1)$

$\gamma\, P(1) = \mu(1-p)P(2)$

$\gamma\, P(n) = \mu(1-p)P(n+1),\ \ n = 2, 3, \dots$

Ισχύει ότι: $P(0) + P(1) + P(2) + \cdots = 1 \Rightarrow$

$$P(0)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\gamma}{\mu(1-p)}\right)^{n}\right) = 1 \ \Rightarrow\ P(0) = \frac{1500-\gamma}{1500}$$

$$P(n) = \left(\frac{\gamma}{1500}\right)^n \left(\frac{1500-\gamma}{1500}\right)$$

Γ) Να βρεθεί το γ_{max} για το οποίο το σύστημα έρχεται σε κορεσμό

Θα πρέπει $\frac{\gamma}{\mu(1-p)} < 1$, άρα το $\gamma_{max} = 1500$ εντολές/sec

Δ) Για $\gamma = \frac{\gamma_{max}}{2}$ να βρεθεί: ο μέσος χρόνος παραμονής στο σύστημα και το μέσο επεξεργασμένο φορτίο.

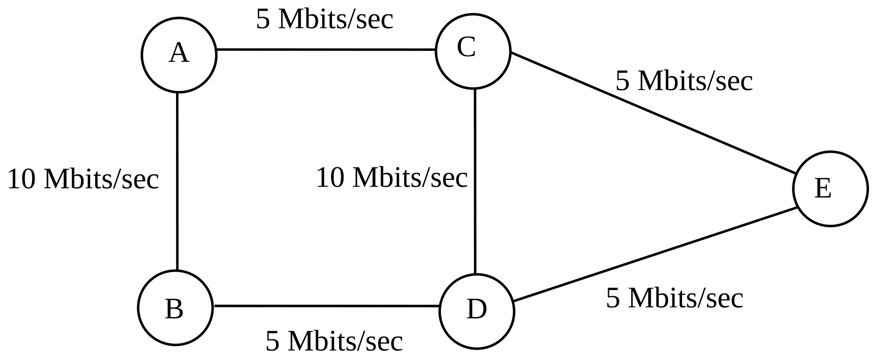
$E(n) = 0P(0) + 1P(1) + 2P(2) + \cdots = 1$

$$E(T) = \frac{E(n)}{\gamma} = \frac{1}{750} \cong 1.33\, msec$$

και το φορτίο θα είναι $\rho = \frac{\gamma}{(1-p)\mu} = 0.5\, Erlangs$

Θέμα 3ο

Στο δίκτυο μεταγωγής πακέτου του σχήματος οι ρυθμοί πακέτων από άκρο σε άκρο είναι ίσοι με r πακέτα/sec για όλα τα ζεύγη των κόμβων. Το μέσο μήκος πακέτου είναι 1000 bits. Οι γραμμές του δικτύου (full duplex) έχουν ταχύτητες όπως στο σχήμα. Η δρομολόγηση πακέτων ακολουθεί τον συντομότερο δρόμο από πλευράς αριθμού ενδιαμέσων κόμβων. Σε περιπτώσεις δύο εναλλακτικών δρόμων ίσου αριθμού κόμβων, τα πακέτα ακολουθούν τον ταχύτερο δρόμο (από πλευράς ταχυτήτων γραμμών). Αν οι εναλλακτικοί δρόμοι είναι ισοδύναμοι, το φορτίο διαμερίζεται ισόποσα με τυχαία (random) απόφαση ανά πακέτο.



A) Αναφέρατε τις παραδοχές που χρειάζονται για να θεωρηθούν οι γραμμές του δικτύου ανεξάρτητες ουρές M/M/1

- Τυχαίες εξωτερικές αφίξεις – Poisson
- Τυχαία δρομολόγηση πακέτων βάσει των πιθανοτήτων διαμοιρασμού σε ισοδύναμους δρόμους.
- Ανεξάρτητες εκθετικές εξυπηρετήσεις πακέτων, παραδοχή Kleinrock ανεξαρτησίας εξυπηρετήσεων
- Άπειρες ουρές FIFO, χωρίς απώλειες

B) Βρείτε τη γραμμή συμφόρησης του δικτύου και το μέγιστο δυνατό ρυθμό $r = r_{max}$ packets/sec που μπορεί να προωθηθεί στο δίκτυο

Έστω $Q_{i,j}$ η ουρά M/M/1 ανάμεσα στους κόμβους i, j $i \neq j$ και $\lambda_{i,j}$, $\mu_{i,j}$ οι ρυθμοί άφιξης και εξυπηρέτησης πακέτου αντίστοιχα.

$$\lambda_{A,C} = r_{A\to C} + r_{A\to E} + 0.5r_{B\to C} + 0.5r_{A\to D} = 3r$$

$$\lambda_{C,A} = r_{C\to A} + r_{E\to A} + 0.5r_{C\to B} + 0.5r_{D\to A} = 3r$$

$$\lambda_{B,D} = r_{B\to D} + r_{B\to E} + 0.5r_{B\to C} + 0.5r_{A\to D} = 3r$$

$$\lambda_{D,B} = r_{D\to B} + r_{E\to B} + 0.5r_{C\to B} + 0.5r_{D\to A} = 3r$$

$$\lambda_{A,B} = r_{A\to B} + 0.5r_{C\to B} + 0.5r_{A\to D} = 2r$$

$$\lambda_{B,A} = r_{B\to A} + 0.5r_{B\to C} + 0.5r_{D\to A} = 2r$$

$$\lambda_{C,D} = r_{C\to D} + 0.5r_{C\to B} + 0.5r_{A\to D} = 2r$$

$$\lambda_{D,C} = r_{D\to C} + 0.5r_{B\to C} + 0.5r_{D\to A} = 2r$$

$$\lambda_{C,E} = r_{A\to E} + r_{C\to E} = 2r, \qquad \lambda_{E,C} = r_{E\to A} + r_{E\to C} = 2r$$

$$\lambda_{D,E} = r_{B\to E} + r_{D\to E} = 2r, \qquad \lambda_{E,D} = r_{E\to B} + r_{E\to D} = 2r$$

$$C_{A,B} = C_{B,A} = C_{C,D} = C_{D,C} = 10\ \frac{Mbits}{sec}$$

$$C_{A,C} = C_{C,A} = C_{C,E} = C_{E,C} = C_{D,E} = C_{E,D} = C_{B,D} = C_{D,B} = 5\ \frac{Mbits}{sec}$$

$$\mu_{i,j} = \frac{C_{i,j}}{E(L)} \Rightarrow \mu_{A,B} = \mu_{B,A} = \mu_{C,D} = \mu_{D,C} = \frac{10^4\ \pi\alpha\kappa\acute{\varepsilon}\tau\alpha}{sec}$$

$$\mu_{A,C} = \mu_{C,A} = \mu_{C,E} = \mu_{E,C} = \mu_{D,E} = \mu_{E,D} = \mu_{B,D} = \mu_{D,B} = \frac{5\cdot 10^3\ \pi\alpha\kappa\acute{\varepsilon}\tau\alpha}{sec}$$

$$\rho_{i,j} = \frac{\lambda_{i,j}}{\mu_{i,j}} \Rightarrow \rho_{A,C} = \rho_{C,A} = \rho_{B,D} = \rho_{D,B} = \frac{3r}{5\cdot 10^3} = \frac{6r}{10^4},$$

$$\rho_{A,B} = \rho_{B,A} = \rho_{C,D} = \rho_{D,C} = \frac{2r}{10^4},$$

$$\rho_{C,E} = \rho_{E,C} = \rho_{D,E} = \rho_{E,D} = \frac{2r}{5\cdot 10^3} = \frac{4r}{10^4},$$

Η γραμμή συμφόρησης είναι ανάμεσα στους κόμβους A-C, B-D.

$$\frac{6\cdot r_{max}}{10^4} = 1 \Rightarrow\ r_{max} = \frac{10^4}{6}\frac{\pi\alpha\kappa\acute{\varepsilon}\tau\alpha}{sec}$$

Γ) Για ρυθμούς $r = \frac{r_{max}}{2}$ υπολογίστε τη μέση καθυστέρηση από τον κόμβο A στον κόμβο D καθώς και τη μέση καθυστέρηση τυχαίου πακέτου από άκρο σε άκρο. Υποθέστε ανεξάρτητες ουρές M/M/1

Μέση καθυστέρηση από το $A \to D$ για $r = \frac{r_{max}}{2} = \frac{10^4}{12}\frac{\pi\alpha\kappa\acute{\varepsilon}\tau\alpha}{sec}$:

$$E(T_{A\to D}) = E(T_{A\to C}) + E(T_{C\to D}) = \frac{1}{\mu_{A,C} - \lambda_{A,C}} + \frac{1}{\mu_{C,D} - \lambda_{C,D}}$$
$$= 4\cdot 10^{-4} + 1.2\cdot 10^{-4} = 0.52\ msec$$

Καθυστέρηση τυχαίου πακέτου $E(\boldsymbol{T})$

$$E(\boldsymbol{T}) = \frac{E(\boldsymbol{n})}{\boldsymbol{\gamma}},$$

$$E(\boldsymbol{n}) = E(n_{A,C}) + E(n_{C,A}) + E(n_{C,E}) + E(n_{E,C}) + E(n_{C,D}) + E(n_{D,C}) + E(n_{D,E}) + E(n_{E,D}) + E(n_{B,D}) + E(n_{D,B}) + E(n_{A,B}) + E(n_{B,A})$$

$$E\left(n_{i,j}\right) = \frac{\rho_{i,j}}{1-\rho_{i,j}} \Rightarrow E(\boldsymbol{n}) = 6.8$$

$$\boldsymbol{\gamma} = 5 \cdot 4 \cdot r \Rightarrow E(\boldsymbol{T}) = 0.408\ msec$$