ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ & ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
Τομέας Επικοινωνιών, Ηλεκτρονικής & Συστημάτων Πληροφορικής
Εργαστήριο Διαχείρισης και Βέλτιστου Σχεδιασμού Δικτύων - NETMODE

Ηρώων Πολυτεχνείου 9, Ζωγράφου, 157 80, Τηλ: 210.772.2503, Fax: 210.772.1452
URL *http://www.netmode.ntua.gr/*

Γραπτή Εξέταση στο Μάθημα "ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΝΑΜΟΝΗΣ"
6ο Εξάμηνο Ηλεκτρολόγων Μηχ. & Μηχ. Υπολογιστών

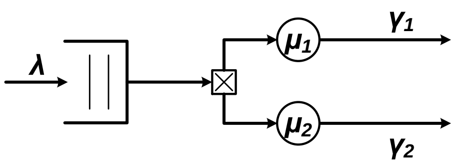
10.06.2016

Θέματα και Λύσεις

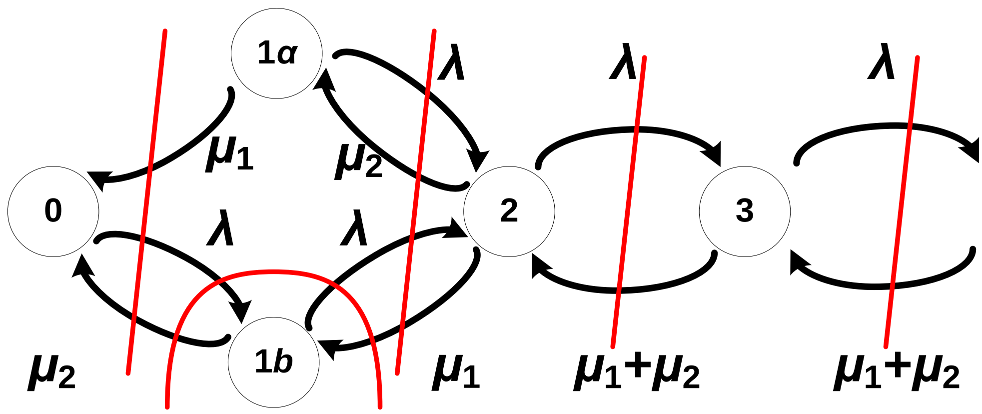
Θέμα 1ο

1)

Θεωρείστε την ουρά άπειρης χωρητικότητας με δύο εξυπηρετητές του σχήματος με εισόδους Poisson ρυθμού $\boldsymbol{\lambda}$=1 πακέτα/sec και εκθετικούς ρυθμούς $\boldsymbol{\mu}_1$=1 πακέτα/sec και $\boldsymbol{\mu}_2$=2 πακέτα/sec. Όταν και οι δύο εξυπηρετητές είναι ανενεργοί, το πακέτο δρομολογείται πάντα στον δεύτερο εξυπηρετητή. Ένας εξυπηρετητής δεν παραμένει ανενεργός αν υπάρχει πακέτο στην ουρά αναμονής.



Α) Σχεδιάστε το διάγραμμα καταστάσεων του συστήματος.



Β) Βρείτε τις εργοδικές πιθανότητες καταστάσεων.

Οι εξισώσεις ισορροπίας μεταβάσεων μεταξύ καταστάσεων στο διάγραμμα δίνουν:

$\lambda\, P(0) = \mu_2 P(1b) + \mu_1 P(1a)$ (1)

$\lambda\, [P(1b) + P(1a)] = (\mu_1 + \mu_2)\, P(2)$ (2)

$\lambda\, P(0) + \mu_1\, P(2) = (\mu_2 + \lambda)\, P(1b)$ (3)

$\lambda\, P(n) = (\mu_1 + \mu_2)\, P(n+1),\ \ n = 2, 3, \ldots$ (4)

Από τις εξισώσεις (1) έως (3) με $\lambda = 1,\ \mu_1 = 1,\ \mu_2 = 2$ πακέτα/sec προκύπτει ότι:

$2P(1b) + P(1a) + P(2) = 3P(1b)\ \Rightarrow P(1a) + P(2) = P(1b)$ (5)

$P(1a) + P(1a) + P(2) = 3P(2) \Rightarrow P(1a) = P(2)$ (6)

$P(1b) = 2P(2)$ (7)

$P(0) = 5P(2)$ (8)

Επιπρόσθετα από την (4): $P(2) = 3P(3),\ P(3) = 3P(4)$ κ.ο.κ. (9)

Επίσης ισχύει: $P(0) + P(1a) + P(1b) + P(2) + \cdots = 1$ (10)

Η εξίσωση (10) ως προς P(2) είναι:

$$5P(2) + P(2) + 2P(2) + P(2)\left[1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \cdots\right] = 1$$

Σημείωση: $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$

Τελικά: $P(2) = \frac{2}{19},\ P(0) = \frac{10}{19},\ P(1a) = \frac{2}{19},\ P(1b) = \frac{4}{19}$

Γ) Βρείτε τους μέσους ρυθμούς εξόδου ***γ**₁* και ***γ**₂*, και τον μέσο χρόνο παραμονής πακέτου στο σύστημα (Sojourn Time).

$\gamma_1 = \mu_1(1 - P(0) - P(1b)) = 5/19$ πακέτα/sec

$\gamma_2 = \mu_2(1 - P(0) - P(1a)) = 14/19$ πακέτα/sec

Παρατηρούμε πως ισχύει ότι $\gamma_1 + \gamma_2 = \lambda$ όπως ήταν αναμενόμενο.

$$E(N) = 0P(0) + 1\big(P(1a) + P(1b)\big) + 2P(2) + 3P(3) + \cdots$$

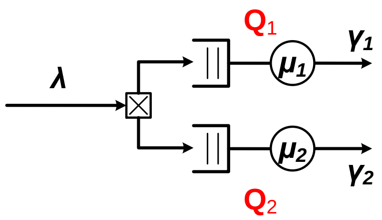
$$E(N) = P(1a) + P(1b) + P(2)[2 + 3\tfrac{1}{3} + 4\left(\tfrac{1}{3}\right)^2 + 5\left(\tfrac{1}{3}\right)^3 + \cdots]$$

$$E(N) = P(1a) + P(1b) + 9\, P(2)\left[-\frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{1}{3}\right)^n\right] = \frac{27}{38}\ \text{πακέτα}$$

Σημείωση: $\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{\frac{1}{3}}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{3}{4}$

$$E(T) = \frac{E(N)}{\lambda} = \frac{27}{38} = 0{,}71 \text{ sec}$$

2) Εναλλακτικά, θεωρείστε το σύστημα του παρακάτω σχήματος με 2 παράλληλες ουρές και παραμέτρους $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{\mu}_1$, $\boldsymbol{\mu}_2$ όπως στο προηγούμενο ερώτημα. Οι ρυθμοί εισόδου στις ουρές διαμορφώνονται με τυχαία επιλογή ώστε οι μέσοι ρυθμοί εξόδου να παραμένουν ίδιοι με τους αντίστοιχους του προηγούμενου ερωτήματος.



Βρείτε το μέσο χρόνο παραμονής και συγκρίνετε με τον αντίστοιχο της 1ης περίπτωσης.

$\gamma_1 = \frac{5}{19}$ πακέτα/sec, $\gamma_2 = \frac{14}{19}$ πακέτα/sec, $E(T_i) = \frac{1}{\mu_i - \gamma_i}$ (Τύπος M/M/1)

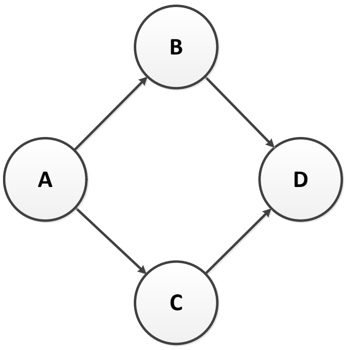
$$E(T_1) = \frac{19}{14} \text{ sec}, \qquad E(T_2) = \frac{19}{24} \text{ sec}, \qquad E(T) = \frac{5}{19}E(T_1) + \frac{14}{19}E(T_2) = 0{,}94\text{sec}$$

Παρατηρούμε πως το σύστημα M/M/2 έχει καλύτερη επίδοση από δυο ανεξάρτητες ουρές M/M/1 για την ίδια δρομολόγηση πακέτων σε δυο εναλλακτικές διαδρομές.

Θέμα 2^{o}

Θεωρείστε το δίκτυο μεταγωγής πακέτου στο σχήμα. Τα πακέτα έχουν εκθετικό μήκος με μέσο όρο 1000 bits. Οι ταχύτητες των γραμμών του δικτύου $C_{AB}=C_{BD}=1$ Gbit/sec, και $C_{AC}=C_{CD}=2$ Gbits/sec. Θέλουμε να προωθήσουμε ροή πακέτων με ρυθμό $\lambda_{AD} = 1{,}5\text{x}10^6$ πακέτα/sec από τον κόμβο A στον κόμβο D ελαχιστοποιώντας το μέσο χρόνο καθυστέρησης πακέτου στο σύστημα.

Υποθέτουμε ότι ποσοστό x των πακέτων δρομολογείται από το μονοπάτι A→B→D και ποσοστό 1- x δρομολογείται από το μονοπάτι A→C→D. Θεωρείστε πως δεν υπάρχουν άλλες ροές πακέτων πλην της A→D και πως το δίκτυο δεν έχει απώλειες.



A) Τι παραδοχές απαιτούνται ώστε το δίκτυο να αναλύεται σαν δίκτυο ανεξαρτήτων ουρών M/M/1

- Τυχαίες εξωτερικές αφίξεις – Poisson
- Τυχαία δρομολόγηση πακέτων βάσει των πιθανοτήτων $\boldsymbol{x}$, $1-\boldsymbol{x}$
- Ανεξάρτητες εκθετικές εξυπηρετήσεις πακέτων, παραδοχή ανεξαρτησίας Kleinrock
- Άπειρες ουρές FIFO, χωρίς απώλειες,

B) Με τις παραδοχές του (A) βρείτε την τιμή του $\boldsymbol{x}$ που ελαχιστοποιεί τον μέσο χρόνο καθυστέρησης τυχαίου πακέτου από άκρο σε άκρο στο σύστημα και υπολογίστε την τιμή του.

$\mu_{AB} = \mu_{BD} = \frac{C_{AB}}{E(L)} = 10^6$ πακέτα/sec, $\rho_1 = \rho_2 = \frac{x \cdot \lambda_{AD}}{\mu_{AB}} = 1{,}5\boldsymbol{x}\frac{10^6}{10^6} = 1{,}5\boldsymbol{x}$

$\mu_{AC} = \mu_{CD} = \frac{C_{AC}}{E(L)} = 2 \cdot 10^6$ πακέτα/sec, $\rho_3 = \rho_4 = \frac{(1-x)\cdot\lambda_{AD}}{\mu_{AC}} = \frac{1{,}5(1-x)10^6}{2\cdot 10^6} = \frac{3}{4}(1-\boldsymbol{x})$

$E(n_i) = \frac{\rho_i}{1-\rho_i}$ (τύπος M/M/1)

$$E(n_1) = E(n_2) = \frac{3\boldsymbol{x}}{2-3\boldsymbol{x}}, \qquad E(n_3) = E(n_4) = \frac{\frac{3}{4}(1-\boldsymbol{x})}{1-\frac{3}{4}(1-\boldsymbol{x})} = \frac{3-3\boldsymbol{x}}{1+3\boldsymbol{x}}$$

$$E[T_{AD}(\boldsymbol{x})] = \frac{2\left[\left(\frac{3\boldsymbol{x}}{2-3\boldsymbol{x}}\right)+\left(\frac{3-3\boldsymbol{x}}{1+3\boldsymbol{x}}\right)\right]}{\lambda_{AD}}$$

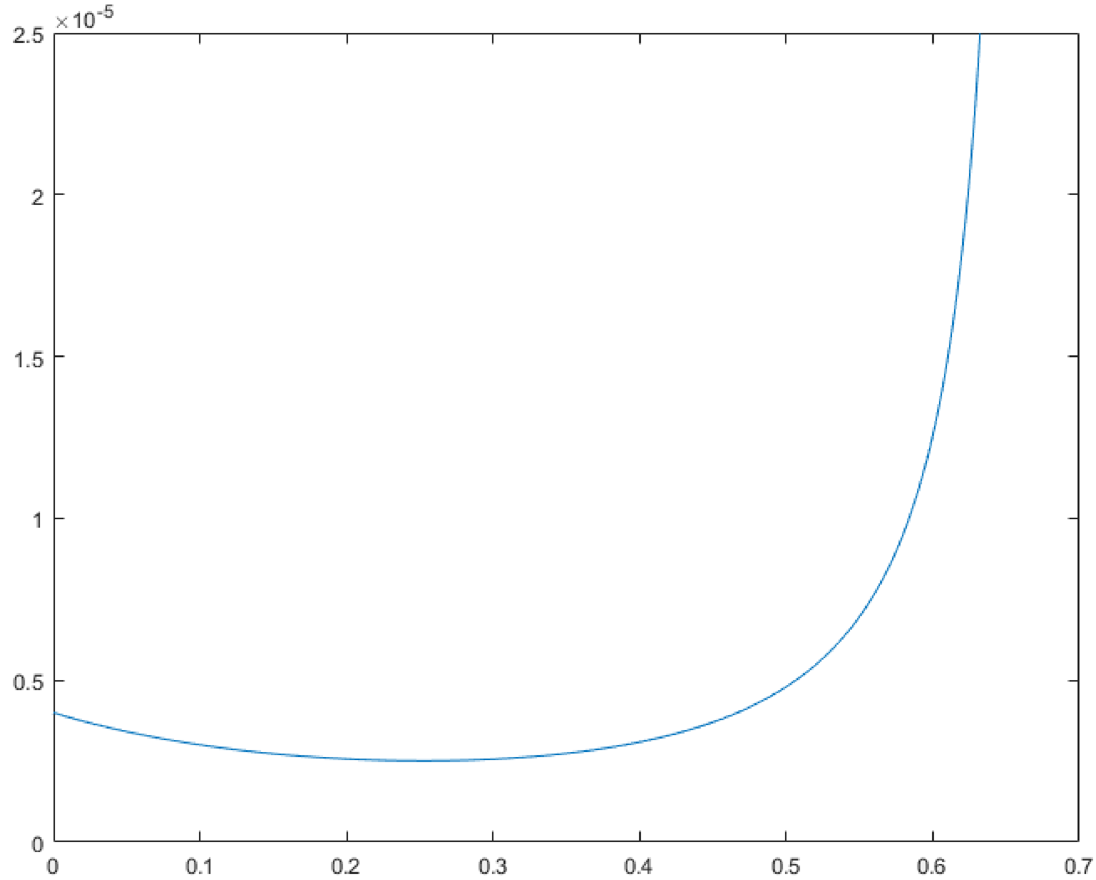
Θέλουμε να βρούμε το x ώστε $\frac{dE[T_{AD}(x)]}{dx} = 0$

$$\frac{d\left[\left(\frac{3x}{2-3x}\right)+\left(\frac{3-3x}{1+3x}\right)\right]}{dx} = 0 \;\Rightarrow\; 9x^2 - 30x + 7 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{5}{3} \pm \sqrt{2}$$

Επειδή $0 \le \boldsymbol{x} \le 1$ προκύπτει $\boldsymbol{x} = \frac{5}{3} - \sqrt{2} \cong 0{,}252$

Τελικά ο μέσος χρόνος καθυστέρησης είναι: $E(T_{AD}) = 2{,}515 \cdot 10^{-6}$ sec

Παρατίθεται γράφημα που δείχνει την μεταβολή του $E(T_{AD})$ συναρτήσει του $\boldsymbol{x}$

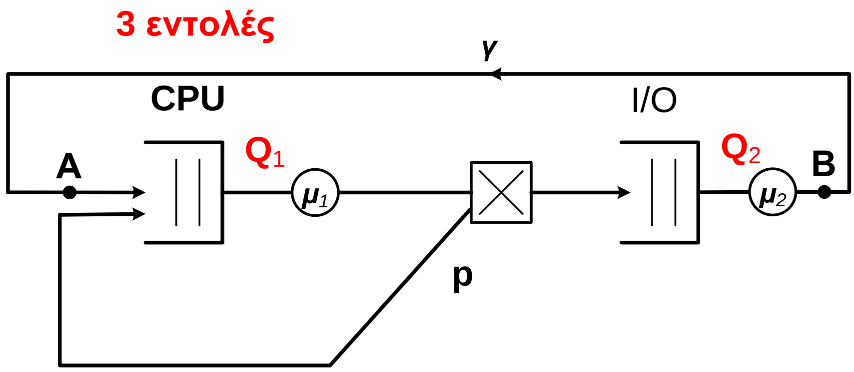


Εικόνα 1 ***$E(T_{AD})$* συναρτήσει του *x***

Θέμα 3^{ο}

Θεωρείστε υπολογιστικό σύστημα το οποίο εξυπηρετεί 3 εντολές και αποτελείται από μια μονάδα επεξεργασίας (CPU) και από μια μονάδα I/O. Η CPU αναπαρίσταται από ουρά αναμονής Q1. Κάθε εντολή εξυπηρετείται κατά μέσο όρο σε 3 κύκλους μέχρι να βγει από τη CPU. Σε επόμενο στάδιο μεταβαίνει στο υποσύστημα I/O που αναπαρίσταται από ουρά αναμονής Q2

Κάθε κύκλος στην CPU απαιτεί 1 msec εξυπηρέτησης κατά μέσο όρο. Αντίστοιχα για κάθε κλήση στο υποσύστημα I/O απαιτούνται 5 msec εξυπηρέτησης. Θεωρείστε πως οι εξυπηρετήσεις στις 2 ουρές είναι ανεξάρτητες εκθετικές τυχαίες μεταβλητές.



A) Ορίστε την κατάσταση του συστήματος και σχεδιάστε το διάγραμμα καταστάσεων στην σταθερή κατάσταση:

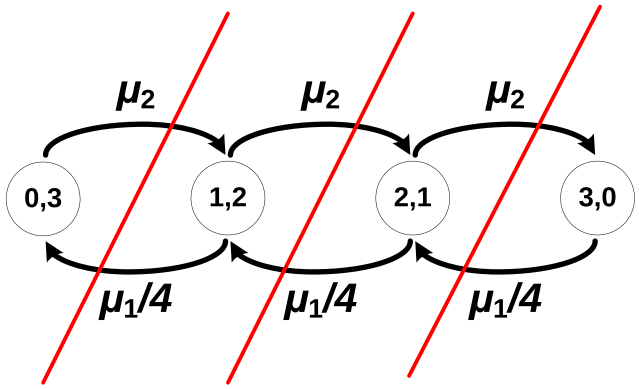
Κάθε εντολή κάνει κατά μέσο όρο N κύκλους μέχρι να βγει από το υποσύστημα CPU.

Αν $\mathbf{p}$ είναι η πιθανότητα η εντολή να επιστρέψει στο υποσύστημα CPU και $1 - \mathbf{p}$ η πιθανότητα η εντολή να συνεχίσει στο υποσύστημα I/O τότε $\mathbf{p} = \frac{N}{N+1}$.

Με $N = 3$: $\mathbf{p} = \frac{3}{4}$, $1 - \mathbf{p} = \frac{1}{4}$

Οι καταστάσεις ορίζονται σαν ζεύγη ($\mathbf{n}_{\mathrm{CPU}}$, $\mathbf{n}_{\mathrm{I/O}}$) όπου $\mathbf{n}_{\mathrm{CPU}} + \mathbf{n}_{\mathrm{I/O}} = 3$.

Το διάγραμμα καταστάσεων στην σταθερή κατάσταση είναι:



B) Υπολογίστε τις εργοδικές πιθανότητες καταστάσεων του συστήματος:

Οι εξισώσεις ισορροπίας μεταβάσεων στο διάγραμμα δίνουν:

$$\mu_2 \, P(0{,}3) = \frac{\mu_1}{4} \, P(1{,}2)$$

$$\mu_2 \, P(1{,}2) = \frac{\mu_1}{4} \, P(2{,}1)$$

$$\mu_2 \, P(2{,}1) = \frac{\mu_1}{4} \, P(3{,}0)$$

Επίσης ισχύει $P(0,3) + P(1,2) + P(2,1) + P(3,0) = 1$

Αντικαθιστώντας ως προς $P(0,3)$ και λαμβάνοντας υπ όψιν τις τιμές των μ_1, μ_2 έχουμε:

$$P(0,3) = \frac{125}{369}, \qquad P(1,2) = \frac{100}{369}, \qquad P(2,1) = \frac{80}{369}, \qquad P(3,0) = \frac{64}{369}$$

Γ) Βρείτε το υποσύστημα που αποτελεί στενωπό (bottleneck):

Η χρησιμοποίηση της CPU είναι: $1 - P(0,3) = \frac{244}{369}$ και του I/O: $1 - P(3,0) = \frac{305}{369}$

Η στενωπός είναι το υποσύστημα που έχει την μεγαλύτερη χρησιμοποίηση, δηλαδή το υποσύστημα I/O.

Δ) Υπολογίστε το μέσο αριθμό πελατών στο σύστημα επεξεργασίας CPU και στο σύστημα I/O:

$E(n_1) = 0 \cdot P(0,3) + 1 \cdot P(1,2) + 2 \cdot P(2,1) + 3 \cdot P(3,0) = \frac{452}{369} \cong 1{,}225$ πελάτες

$E(n_2) = N - E(n_1) \cong 1{,}775$ πελάτες

Ε) Υπολογίστε τη μέση ρυθμαπόδοση (throughput) $\boldsymbol{\gamma}$ του συστήματος και το μέσο χρόνο παραμονής μιας εντολής στο σύστημα (Sojourn Time) από το σημείο **A** στο **B** :

$\gamma = \mu_2(1 - P(3,0) \cong 165{,}31$ πελάτες/sec

$E(T) = \frac{N}{\gamma} = \frac{3}{\gamma} \cong 0{,}018$ sec