

# Μονετελοποίηση και Προσομοίωση Δυναμικών Συστημάτων

## Εργασία 2η

Παύλου Δημήτριος 10315

Απρίλιος 2025

## 1 Θέμα 1

Μας δίνεται το σύστημα

$$m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + kx(t) = u(t) \quad (1)$$

όπου οι παράμετροι  $m, k, b$  είναι άγνωστες και προς εκτίμηση. Στόχος μας είναι να σχεδιάσουμε εκτιμητές πραγματικού χρόνου με τις μεθόδους κλίσης και Lyapunov.

### 1.1 Ερώτημα 1

#### 1.1.1 Θεωρητική Ανάλυση

Θα κατασκευάσουμε τον εκτίμητη με βάση την μέθοδο κλίσης. Αρχικά θα φέρουμε το σύστημα σε γραμμικά παραμετροποιημένη μορφή. Από την (1) έχουμε

$$\begin{aligned} m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + kx(t) &= u(t) \Rightarrow \\ \ddot{x}(t) &= -\frac{b}{m}\dot{x}(t) - \frac{k}{m}x(t) + \frac{1}{m}u(t) \Rightarrow \\ \ddot{x}(t) &= -\theta_1^*\dot{x}(t) - \theta_2^*x(t) + \theta_3^*u(t) \end{aligned} \quad (2)$$

Παίρνοντας τον μετασχηματισμό Laplace και θέτοντας παράλληλα  $x = x_1, \dot{x} = x_2$  παίρνουμε

$$\begin{aligned} s^2X(s) &= -\theta_1^*X_2(s) - \theta_2^*X_1(s) + \theta_3^*U(s) \Rightarrow \\ (s^2 + \lambda_1s + \lambda_2)X(s) &= (\lambda_1 - \theta_1^*)X_2(s) + (\lambda_2 - \theta_2^*)X_1(s) + \theta_3^*U(s) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$X(s) = (\theta^*)^T \Phi(s) \quad (3)$$

όπου

$$\theta^* = [(\theta_1^* - \lambda_1) \quad (\theta_2^* - \lambda_2) \quad \theta_3^*]^T \quad (4)$$

και

$$\Phi(s) = [-X_2(s)/\Lambda(s) \quad -X_1(s)/\Lambda(s) \quad U(s)/\Lambda(s)]^T \quad (5)$$

και  $\Lambda(s) = s^2 + \lambda_1s + \lambda_2$  είναι ένα δευτεροβάθμιο ευσταθές φίλτρο αυθαίρετης επιλογής.

Από την (4) μπορούμε να βρούμε τα δυναμικά συστήματα που καθορίζουν τα  $\phi_i(t)$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Συγκεκριμένα ,

$$\begin{aligned} \Phi_1(s) &= -\frac{X_2(s)}{\Lambda(s)} \Rightarrow \\ s^2\Phi_1(s) + \lambda_1s\Phi_1(s) + \lambda_2\Phi_1(s) &= -X_2(s) \Rightarrow \\ \ddot{\phi}_1(t) + \lambda_1\dot{\phi}_1(t) + \lambda_2\phi_1 &= -x_2(t) \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned}\Phi_2(s) &= -\frac{X_1(s)}{\Lambda(s)} \Rightarrow \\ s^2\Phi_2(s) + \lambda_1 s\Phi_2(s) + \lambda_2\Phi_2(s) &= -X_1(s) \Rightarrow \\ \ddot{\phi}_2(t) + \lambda_1\dot{\phi}_2(t) + \lambda_2\phi_2 &= -x_1(t)\end{aligned}\tag{7}$$

$$\begin{aligned}\Phi_3(s) &= \frac{U(s)}{\Lambda(s)} \Rightarrow \\ s^2\Phi_3(s) + \lambda_1 s\Phi_3(s) + \lambda_2\Phi_3(s) &= U(s) \Rightarrow \\ \ddot{\phi}_3(t) + \lambda_1\dot{\phi}_3(t) + \lambda_2\phi_3 &= u(t)\end{aligned}\tag{8}$$

Είμαστε τώρα σε θέση να εφαρμόσουμε την μέθοδο κλίσης. Ορίζουμε την συνάρτηση κόστους

$$K(\hat{\theta}) = \frac{1}{2}(x - \hat{x})^2 = \frac{1}{2}(x(t) - \hat{\theta}^T \phi(t))^2$$

η οποία είναι γνήσιως κυρτή συνάρτηση ως τετραγωνική. Παραγωγίζοντας ως προς  $\hat{\theta}$  παίρνουμε

$$\nabla K(\hat{\theta}) = -(x - \hat{\theta}^T \phi)\phi$$

Θεωρούμε τον πίνακα κερδών

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3 \end{bmatrix}$$

Σύμφωνα με την μέθοδο κλίσης η διαφορική εξίσωση για την εκτίμηση του διανύσματος  $\hat{\theta}$  δίνεται από

$$\dot{\hat{\theta}} = -\Gamma \nabla K(\hat{\theta}) = (x - \hat{\theta}^T \phi)\Gamma \phi\tag{9}$$

Αναλύοντας την παραπάνω εξίσωση παίρνουμε

$$\dot{\hat{\theta}}_1 = \gamma_1 \phi_1 (x - \hat{\theta}_1 \phi_1 - \hat{\theta}_2 \phi_2 - \hat{\theta}_3 \phi_3)\tag{10}$$

$$\dot{\hat{\theta}}_2 = \gamma_2 \phi_2 (x - \hat{\theta}_1 \phi_1 - \hat{\theta}_2 \phi_2 - \hat{\theta}_3 \phi_3)\tag{11}$$

$$\dot{\hat{\theta}}_3 = \gamma_3 \phi_3 (x - \hat{\theta}_1 \phi_1 - \hat{\theta}_2 \phi_2 - \hat{\theta}_3 \phi_3)\tag{12}$$

Σε αυτό το σημείο έχουμε εκφράσει το αρχικό σύστημα, τις συναρτήσεις  $\phi_i$  και τις συναρτήσεις  $\hat{\theta}_i$  μέσω δυναμικών συστημάτων. Δημιουργούμε το διάνυσμα κατάστασης  $z \in \mathbb{R}^{11}$  για το οποίο

$$\begin{aligned}x_1 &= z_1, \quad x_2 = z_2 \\ \phi_1 &= z_3, \quad \dot{\phi}_1 = z_4 \\ \phi_2 &= z_5, \quad \dot{\phi}_2 = z_6 \\ \phi_3 &= z_7, \quad \dot{\phi}_3 = z_8 \\ \hat{\theta}_1 &= z_9, \quad \hat{\theta}_2 = z_{10}, \quad \hat{\theta}_3 = z_{11}\end{aligned}\tag{13}$$

Οπότε παίρνοντας τις παραγώγους των μεταβλητών αυτών και κάνοντας τις πράξεις παίρνουμε το τελικό συνολικό σύστημα το οποίο είναι της μορφής

$$\begin{aligned}
\dot{z}_1 &= z_2 \\
\dot{z}_2 &= -\frac{b}{m}z_1 - \frac{k}{m}z_2 + \frac{1}{m}u \\
\dot{z}_3 &= z_4 \\
\dot{z}_4 &= -\lambda_2 z_3 - \lambda_1 z_4 - z_2 \\
\dot{z}_5 &= z_6 \\
\dot{z}_6 &= -\lambda_2 z_5 - \lambda_1 z_6 - z_1 \\
\dot{z}_7 &= z_8 \\
\dot{z}_8 &= -\lambda_2 z_7 - \lambda_1 z_8 + u \\
\dot{z}_9 &= \gamma_1 z_3 (z_1 - z_{10} z_5 - z_{11} z_7) \\
\dot{z}_{10} &= \gamma_1 z_5 (z_1 - z_{10} z_5 - z_{11} z_7) \\
\dot{z}_{11} &= \gamma_1 z_7 (z_1 - z_{10} z_5 - z_{11} z_7)
\end{aligned} \tag{14}$$

Λύνοντας το σύστημα αυτό με την ode45 συνάρτηση του Matlab μπορούμε να καταλήξουμε στην λύση του συστήματος.

Έχοντας το  $\hat{\theta}(t)$  μετά από λίγες πράξεις βρίσκουμε ότι

$$\hat{m}(t) = \frac{1}{\hat{\theta}_3(t)} \tag{15}$$

$$\hat{k}(t) = \frac{\lambda_2 + \hat{\theta}_2(t)}{\hat{\theta}_3(t)} \tag{16}$$

$$\hat{b}(t) = \frac{\lambda_1 + \hat{\theta}_1(t)}{\hat{\theta}_3(t)} \tag{17}$$

### 1.1.2 Πειραματικά Αποτελέσματα

Για τις δύο διαφορετικές εισόδους που μας δίνονται παρουσιάζουμε παρακάτω τα αποτελέσματα από τα πειράματα στο Matlab. Σημειώνουμε ότι έχουμε θέσει τις παραμέτρους του φίλτρου  $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$  και στις 2 περιπτώσεις.

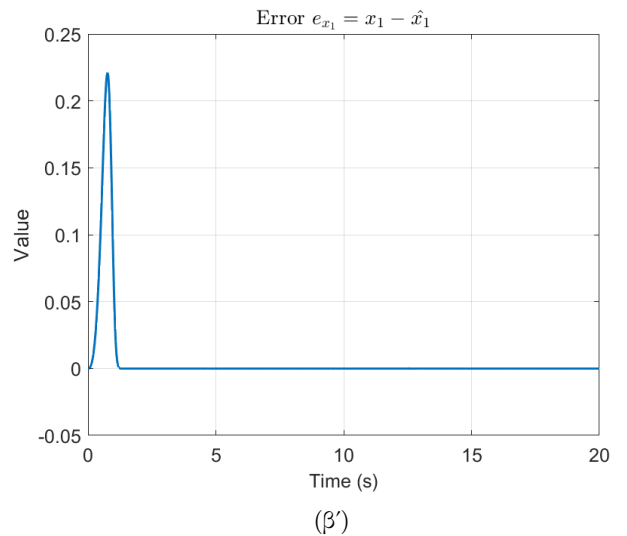
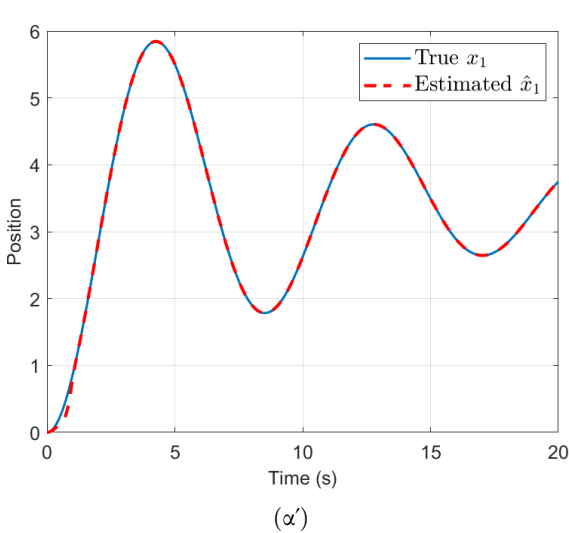
#### 1. Περίπτωση $u(t) = 2.5$

Για την περίπτωση αυτή θέτουμε τον πίνακα κερδών  $\Gamma$  ως  $\Gamma = \text{diag}(335, 1800, 1.58)$  και αρχικές συνθήκες

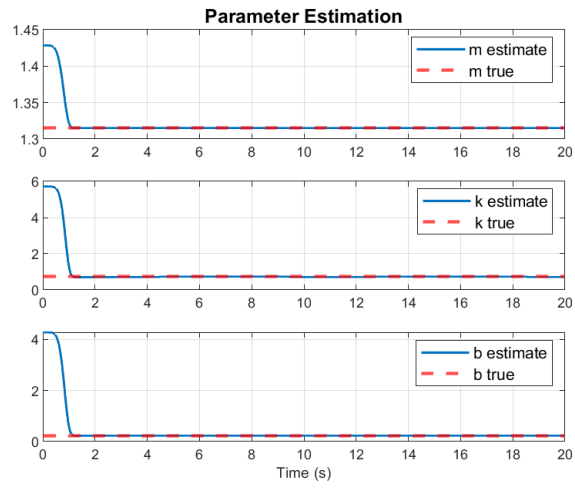
$$z_{1:8}(0) = 0$$

$$z_{9:11}(0) = [1 \quad 1 \quad 0.7]$$

Με αυτές τις παραμέτρους και αρχικές συνθήκες καταφέρνουμε να κάνουμε τις εκτιμήσεις των παραμέτρων να συγκλίνουν στις επιθυμητές τιμές καθώς και  $e(t) \rightarrow 0$ .



Σχήμα 1



Σχήμα 2

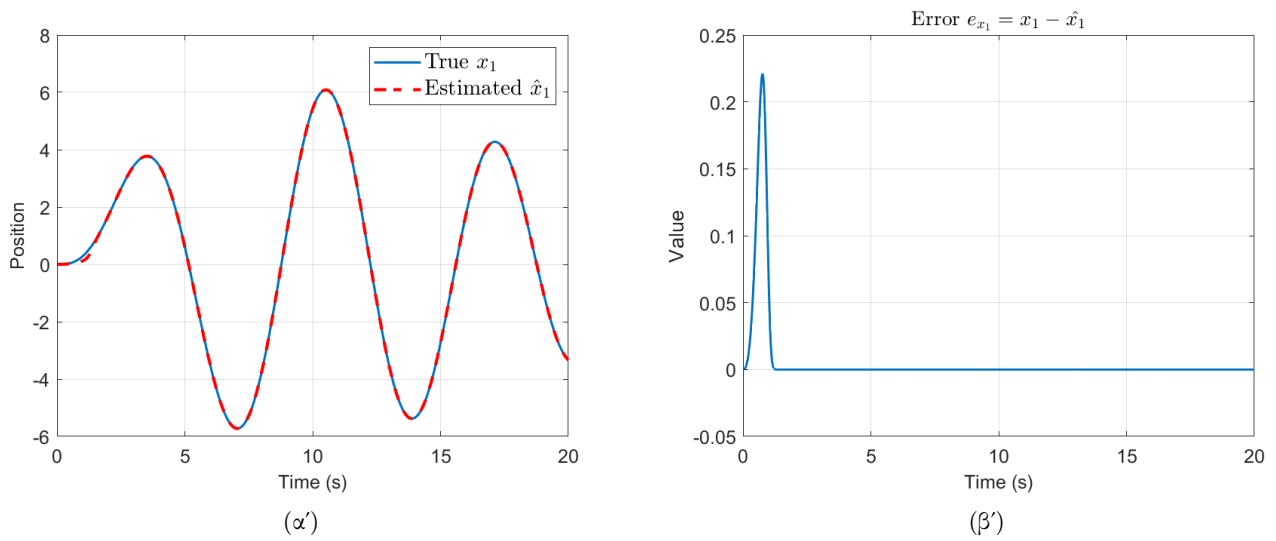
## 2. Περίπτωση $u(t) = 2.5 \sin(t)$

Για την περίπτωση αυτή θέτουμε τον πίνακα κερδών  $\Gamma$  ως  $\Gamma = \text{diag}(310, 1300, 1.7)$  και αρχικές συνθήκες

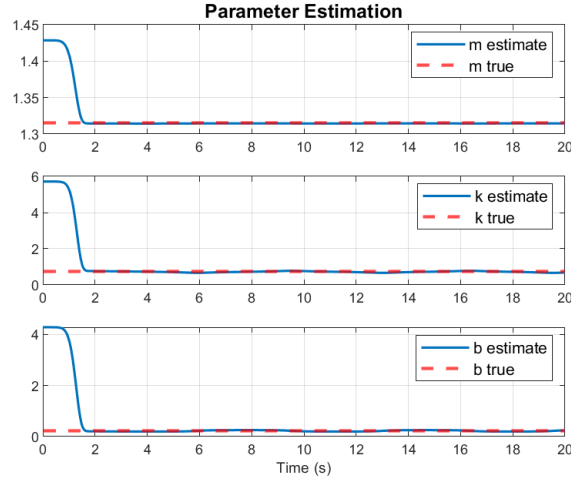
$$z_{1:8}(0) = 0$$

$$z_{9:11}(0) = [1 \quad 1 \quad 0.7]$$

Με αυτές τις παραμέτρους και αρχικές συνθήκες καταφέρνουμε και πάλι να κάνουμε τις εκτιμήσεις των παραμέτρων να συγκλίνουν στις επιθυμητές τιμές καθώς και  $e(t) \rightarrow 0$ .



Σχήμα 3



Σχήμα 4

## 1.2 Ερώτημα 2

### 1.2.1 Μέθοδοι Lyapunov

Θα επιλύσουμε το ίδιο πρόβλημα με την χρήση της μεθόδου Lyapunov. Αρχικά φέρνουμε το σύστημα σε μορφή εξισώσεων κατάστασης. Θέτουμε  $x_1 = x, x_2 = \dot{x}$  και παίρνουμε το σύστημα

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_0 \end{bmatrix} u \quad (18)$$

όπου  $a_1 = -\frac{k}{m}, a_2 = -\frac{b}{m}$  και  $b_0 = \frac{1}{m}$ . Σε αυτό το σημείο να τονίσουμε το γεγονός ότι ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix}$$

είναι ευσταθής αλλά δεν είναι θετικά ορισμένος. Για τον λόγο αυτό η ανάλυση της παράλληλης δομής έχει θέματα οπότε θα την τροποποιήσουμε ώστε να εγγυηθούμε κάποιου είδους σύγκλιση.

**Παράλληλη Τοπολογία** Θεωρούμε το μοντέλο

$$\dot{\hat{x}}_2 = \hat{a}_1 x_1 + \hat{a}_2 \hat{x}_2 + \hat{b}_0 u \quad (19)$$

Είναι εμφανές πως δεν θυμίζει την κλασική δομή της παράλληλης τοπολογίας διότι χρησιμοποιούμε τις μετρήσεις  $x_1$  από το σύστημα και εφόσον είναι μετρήσιμο μπορούμε να το κάνουμε. Ωστόσο μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ως προς το  $x_2$  το μοντέλό είναι τύπου παράλληλης τοπολογίας αφού το μοντέλο συσχετίζει το  $\dot{\hat{x}}_2$  μόνο με το  $\hat{x}_2$  και όχι το  $x_2$ . Μπορούμε να θεωρήσουμε το  $x_1$  ως εξωτερική είσοδο για το μοντέλο του  $\hat{x}_2$ .

Θεωρούμε το σφάλμα εκτίμησης  $e_2 = x_2 - \hat{x}_2$  και τα παραμετρικά σφάλματα  $e_{a_1} = \hat{a}_1 - a_1, e_{a_2} = \hat{a}_2 - a_2, e_{b_0} = \hat{b}_0 - b_0$ . Για τα σφάλματα αυτά έχουμε

$$\begin{aligned} \dot{e}_2 &= \dot{x}_2 - \dot{\hat{x}}_2 \\ &= a_1 x_1 + a_2 x_2 + b_0 u - \hat{a}_1 x_1 - \hat{a}_2 \hat{x}_2 - \hat{b}_0 u \\ &= a_1 x_1 + a_2 x_2 + b_0 u - \hat{a}_1 x_1 - \hat{a}_2 \hat{x}_2 + a_2 \hat{x}_2 - a_2 x_2 - \hat{b}_0 u \\ &= a_2 e_2 - x_1 e_{a_1} - \hat{x}_2 e_{a_2} - e_{b_0} u \end{aligned} \quad (20)$$

$$\dot{e}_{a_1} = \dot{\hat{a}}_1 \quad (21)$$

$$\dot{e}_{a_2} = \dot{\hat{a}}_2 \quad (22)$$

$$\dot{e}_{b_0} = \dot{\hat{b}}_0 \quad (23)$$

Θεωρούμε την συνάρτηση Lyapunov

$$V = \frac{1}{2}e_2^2 + \frac{1}{2\gamma_1}e_{a_1}^2 + \frac{1}{2\gamma_2}e_{a_2}^2 + \frac{1}{2\gamma_3}e_{b_0}^2 \quad (24)$$

Παραγωγίζοντας ως προς χρόνο παίρνουμε

$$\begin{aligned} \dot{V} &= e_2\dot{e}_2 + e_{a_1}\dot{e}_{a_1} + e_{a_2}\dot{e}_{a_2} + e_{b_0}\dot{e}_{b_0} \\ &= e_2(a_2e_2 - x_1e_{a_1} - \hat{x}_2e_{a_2} - e_{b_0}u) + \frac{1}{\gamma_1}e_{a_1}\dot{a}_1 + \frac{1}{\gamma_2}e_{a_2}\dot{a}_2 + \frac{1}{\gamma_3}e_{b_0}\dot{b}_0 \\ &= a_2e_2^2 + e_{a_1}\left(\frac{1}{\gamma_1}\dot{a}_1 - e_2x_1\right) + e_{a_2}\left(\frac{1}{\gamma_2}\dot{a}_2 - e_2\hat{x}_2\right) + e_{b_0}\left(\frac{1}{\gamma_3}\dot{b}_0 - e_2u\right) \end{aligned} \quad (25)$$

Αν θεωρήσουμε ότι

$$\begin{aligned} \dot{a}_1 &= \gamma_1 e_2 x_1 \\ \dot{a}_2 &= \gamma_2 e_2 \hat{x}_2 \\ \dot{b}_0 &= \gamma_3 e_2 u \end{aligned} \quad (26)$$

Τότε

$$\dot{V} = a_2 e_2^2 \leq 0 \quad (27)$$

Άρα  $V \leq V(0)$  οπότε  $e_2, e_{a_1}, e_{a_2}, e_{b_0} \in \mathcal{L}_\infty$ . Επιπλέον υπάρχει το όριο  $\lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = V_\infty$  καθώς  $V \geq 0$  και φθίνουσα αφού  $\dot{V} \leq 0$ . Ολοκληρώνοντας τα δύο μέρη της (27) παίρνουμε

$$\dot{V} = a_2 e_2^2 \Rightarrow \int_0^\infty e_2^2(t)dt = \frac{1}{a_1} \int_0^\infty \dot{V}(t)dt = \frac{1}{a_1}[V_\infty - V(0)] < \infty$$

Άρα  $e_2 \in \mathcal{L}_2$  δηλαδή  $e_2 \in L_2 \cap L_\infty$ . Γνωρίζουμε από υπόθεση ότι  $u \in \mathcal{L}_\infty$  οπότε και  $x_2 \in \mathcal{L}_\infty$ . Επειδή  $e_2 \in \mathcal{L}_\infty$  τότε και  $\hat{x}_2 \in \mathcal{L}_\infty$  οπότε  $\dot{e}_2 \in \mathcal{L}_\infty$ . Από λήμμα Barbalat  $\lim_{t \rightarrow \infty} e_2(t) = 0$ . Ακολουθώντας την μεθοδολογία της θεωρίας μπορούμε να δείξουμε επίσης ότι  $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{a}_i(t) = 0, i = 1, 2$  και  $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{b}_0(t) = 0$

Παρατηρήστε ότι αν θέταμε και μοντέλο για το  $x_1$  της μορφής  $\dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2$  θα ήμασταν αναγκασμένοι να προσθέσουμε στην συνάρτηση Lyapunov τον όρο  $\frac{1}{2}e_1^2 = \frac{1}{2}(x_1 - \hat{x}_1)^2$  όμως μετά από πράξεις θα παίρναμε την εξής έκφραση για την  $\dot{V}$

$$\dot{V} = e_1 e_2 + a_2 e_2^2 \quad (28)$$

Εδώ παρόλο που γνωρίζουμε ότι  $a_2 e_2^2 \leq 0$  δεν έχουμε καμία γνώση για το πρόσημο του  $e_1 e_2$  οπότε δεν γνωρίζουμε το πρόσημο της  $\dot{V}$  οπότε η ανάλυση δεν μπορεί να προχωρήσει. Κανείς θα μπορούσε να τροποποιήσει την συνάρτηση Lyapunov και να την κάνει

$$V = \frac{1}{2}e^T P e + \frac{1}{2\gamma_1}e_{a_1}^2 + \frac{1}{2\gamma_2}e_{a_2}^2 + \frac{1}{2\gamma_3}e_{b_0}^2 \quad (29)$$

με  $P = P^T > 0$ . Από εδώ μπορούμε να ακολουθήσουμε 2 δρόμους. Ο πρώτος είναι κάνοντας πράξεις στην  $\dot{V}$  να εμφανιστεί ο όρος  $A^T P + P A$ . Θέτοντας αυτό τον όρο ίσο με  $-Q$  για  $Q > 0$  γνωστό και λύνοντας την εξίσωση Lyapunov (έχει μοναδική λύση διότι ο πίνακας  $A$  του συστήματος είναι Hurwitz πίνακας) θα βρίσκαμε τον πίνακα  $P$  ο οποίος θα συμπεριλαμβανόταν προφανώς στις διαφορικές εξισώσεις για την εκτίμηση των παραμέτρων. Ωστόσο στην πράξη ο πίνακας  $A$  είναι άγνωστος, οπότε παρόλο το θεωρητικό ενδιαφέρον η προσέγγιση αυτή δεν είναι υλοποιήσιμη. Ο δεύτερος δρόμος είναι να κάνουμε τις πράξεις με τον πίνακα  $P$  χωρίς να λύσουμε την εξίσωση Lyapunov και να προσπαθήσουμε να βρούμε αναλυτικά τα κατάλληλα στοιχεία του  $P$ . Ωστόσο κι αυτή η προσέγγιση δεν είναι καρποφόρα διότι θα έπρεπε να ικανοποιούνται πολλές συνθήκες ταυτόχρονα ώστε να εγγυηθούμε αρνητικότητα της  $\dot{V}$  κάτι το οποίο απαιτεί εξαντλητική αναζήτηση παραμέτρων  $p_1, p_2, p_3$  και μερικές υποθέσεις για τις παραμέτρους  $a_1, a_2$ . Οπότε ούτε αυτή η προσέγγιση είναι ελκυστική. Για τους λόγους αυτούς προτιμήθηκε η απλή προσέγγιση με ένα μοντέλο μόνο για το  $x_2$  όπως αναλύθηκε παραπάνω το οποίο έφερε και τα επιθυμητά αποτελέσματα.

**Μεικτή Τοπολογία** Στην μεικτή τοπολογία δεν μας απασχολεί αν ο πίνακας  $A$  είναι ή όχι αρνητικά ημιορισμένος. Θεωρούμε το μοντέλο

$$\dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{b}u + \theta_m(x - \hat{x}) \quad (30)$$

όπου

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \hat{a}_1 & \hat{a}_2 \end{bmatrix} \quad (31)$$

και

$$\hat{b} = [0 \quad \hat{b}_0]^T \quad (32)$$

Τα σφάλματα εκτίμησης είναι  $e_1 = x_1 - \hat{x}_1$ ,  $e_2 = x_2 - \hat{x}_2$  και τα παραμετρικά σφάλματα  $e_{a_1} = \hat{a}_1 - a_1$ ,  $e_{a_2} = \hat{a}_2 - a_2$ ,  $e_{b_0} = \hat{b}_0 - b_0$ . Για τα σφάλματα αυτά έχουμε

$$\dot{e}_1 = \dot{x}_1 - \dot{\hat{x}}_1 = x_2 - x_2 - \theta_m(x_1 - \hat{x}_1) = -\theta_m(x_1 - \hat{x}_1) = -\theta_m e_1 \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \dot{e}_2 &= \dot{x}_2 - \dot{\hat{x}}_2 \\ &= a_1 x_1 + a_2 x_2 + b_0 u - \hat{a}_1 x_1 - \hat{a}_2 x_2 - \hat{b}_0 u - \theta_m(x_2 - \hat{x}_2) \\ &= -\theta_m e_2 - e_{a_1} x_1 - e_{a_2} x_2 - e_{b_0} u \end{aligned} \quad (34)$$

$$e_{a_1} = \dot{\hat{a}}_1 \quad (35)$$

$$e_{a_2} = \dot{\hat{a}}_2 \quad (36)$$

$$e_{b_0} = \dot{\hat{b}}_0 \quad (37)$$

Θεωρούμε την συνάρτηση Lyapunov

$$V = \frac{1}{2}e_1^2 + \frac{1}{2}e_2^2 + \frac{1}{2\gamma_1}e_{a_1}^2 + \frac{1}{2\gamma_2}e_{a_2}^2 + \frac{1}{2\gamma_3}e_{b_0}^2 \quad (38)$$

Παραγωγίζοντας ως προς χρόνο

$$\begin{aligned} \dot{V} &= e_1 \dot{e}_1 + e_2 \dot{e}_2 + e_{a_1} \dot{e}_{a_1} + e_{a_2} \dot{e}_{a_2} + e_{b_0} \dot{e}_{b_0} \\ &= -\theta_m e_1^2 + e_2(-\theta_m e_2 - e_{a_1} x_1 - e_{a_2} x_2 - e_{b_0} u) + \frac{1}{\gamma_1} e_{a_1} \dot{\hat{a}}_1 + \frac{1}{\gamma_2} e_{a_2} \dot{\hat{a}}_2 + \frac{1}{\gamma_3} e_{b_0} \dot{\hat{b}}_0 \\ &= -\theta_m e^T e + e_{a_1} \left( \frac{1}{\gamma_1} \dot{\hat{a}}_1 - e_2 x_1 \right) + e_{a_2} \left( \frac{1}{\gamma_2} \dot{\hat{a}}_2 - e_2 x_2 \right) + e_{b_0} \left( \frac{1}{\gamma_3} \dot{\hat{b}}_0 - e_2 u \right) \end{aligned} \quad (39)$$

Αν θεωρήσουμε ότι

$$\begin{aligned} \dot{\hat{a}}_1 &= \gamma_1 e_2 x_1 \\ \dot{\hat{a}}_2 &= \gamma_2 e_2 x_2 \\ \dot{\hat{b}}_0 &= \gamma_3 e_2 u \end{aligned} \quad (40)$$

Τότε

$$\dot{V} = -\theta_m e^T e \leq 0 \quad (41)$$

Ακολουθώντας την ίδια ανάλυση με προηγουμένως μπορούμε να δείξουμε ότι  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$  και  $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\hat{a}}_i(t) = 0$ ,  $i = 1, 2$  και  $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\hat{b}}_0(t) = 0$

### 1.2.2 Πειραματικά Αποτελέσματα

Για τις δύο τοπολογίες παρουσιάζουμε παρακάτω τα αποτελέσματα από τις προσομοιώσεις.

#### 1. Παράλληλη Τοπολογία

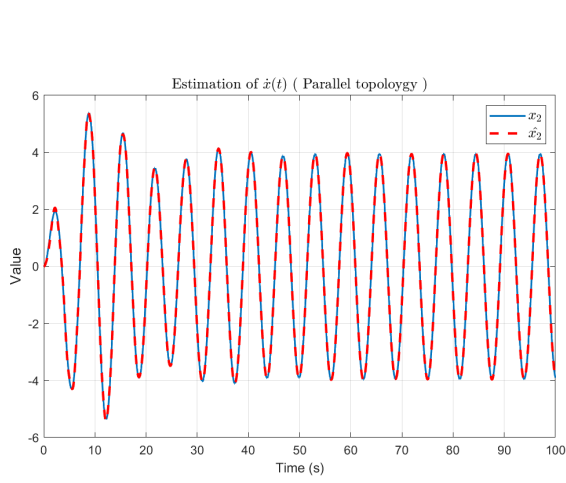
Θέτουμε τα κέρδη  $\gamma_i = 1$ ,  $i = 1, 2, 3$  και τις εξής αρχικές συνθήκες

$$x(0) = 0$$

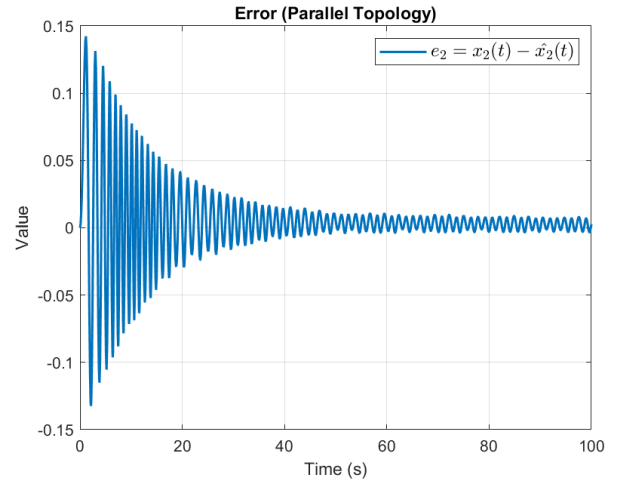
$$\hat{x}_2(0) = 0$$

$$\hat{a}_1(0) = -0.58, \quad \hat{a}_2(0) = -0.15, \quad \hat{b}_0(0) = 0.6$$

Επίσης θέτουμε το συνολικό χρόνο προσομοίωσης σε  $T = 100s$  για να μπορέσουμε να διακρίνουμε κάποιου είδους σύγκλιση. Σε αυτό το σημείο να σημειώσουμε ότι η σύγκλιση των παραμέτρων δεν είναι πολύ καλή (παρατηρούμε ότι οι παράμετροι ταλαντώνονται γύρω από τις πραγματικές τιμές ωστόσο με μικρό πλάτος) και πως αυτή η επιλογή υπερπαραμέτρων ήταν αυτή που έδωσε τα καλύτερα αποτελέσματα. Τα σχετικά γραφήματα δίνονται παρακάτω.

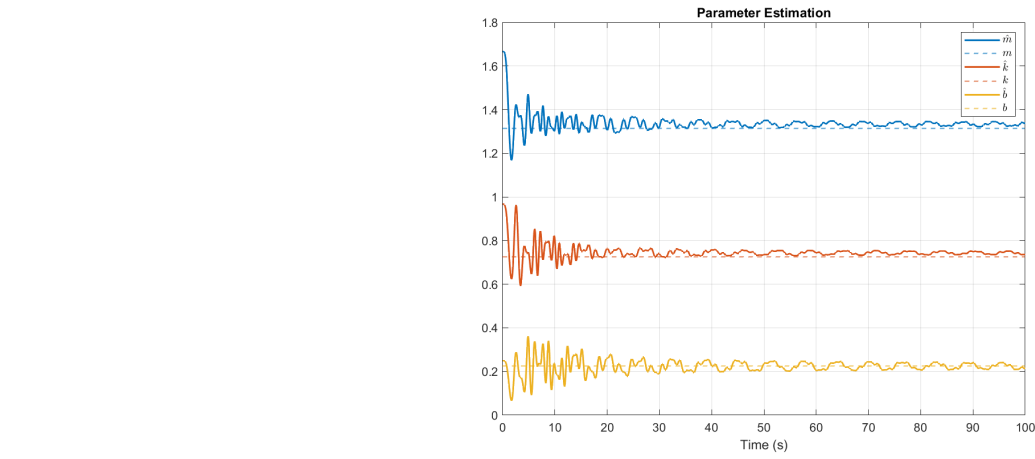


(α')



(β')

Σχήμα 5



Σχήμα 6

## 2. Μεικτή Τοπολογία

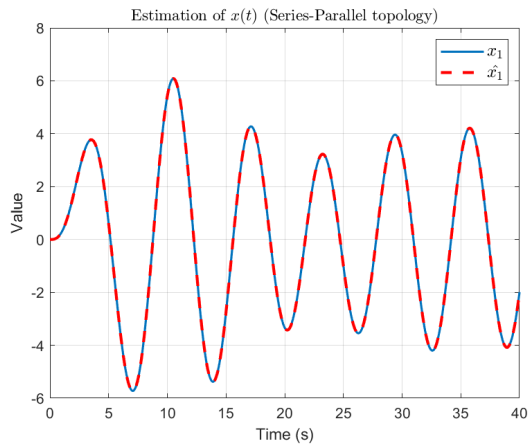
Στην μεικτή τοπολογία θέτουμε τα κέρδη  $\gamma_1 = \gamma_2 = 12, \gamma_3 = 4$  και την παράμετρο  $\theta_m = 5$ . Επίσης θέτουμε αρχικές συνθήκες

$$x(0) = 0$$

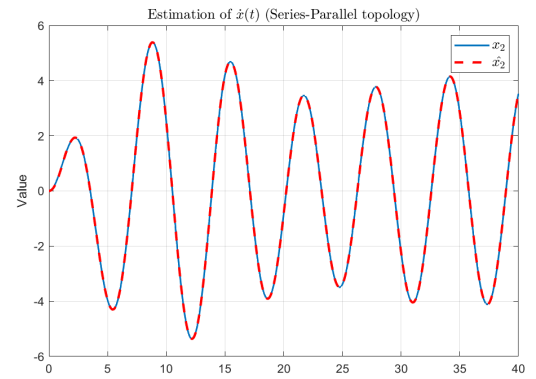
$$\hat{x}(0) = 0$$

$$\hat{a}_1(0) = -0.6, \hat{a}_2(0) = -0.3, \hat{b}_0(0) = 0.6$$

Επίσης θέτουμε τον συνολικό χρόνο προσομοίωσης ίσο με  $T = 40s$ . Τα αποτελέσματα συγκριτικά με την παράλληλη τοπολογία είναι καλύτερα και από από την άποψη της ταχύτητας σύγκλισης αλλά και από την ποιότητα των κυματομορφών που παράγονται. Τα σχετικά διαγράμματα φαίνονται παρακάτω.

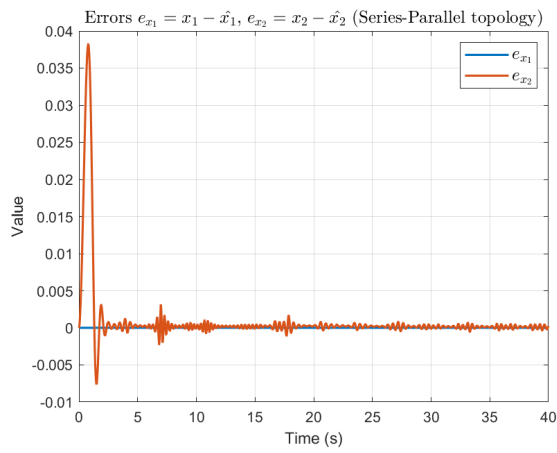


(α')

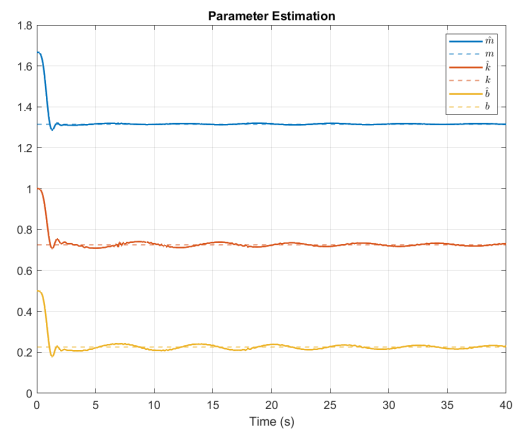


(β')

Σχήμα 7



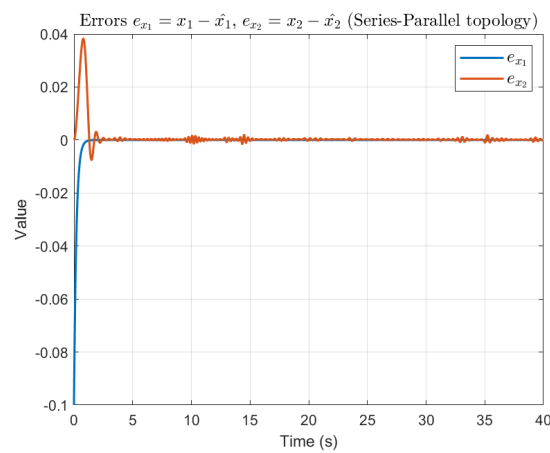
(α'')



(β'')

Σχήμα 8

Παρατηρούμε επίσης ότι  $e_{x_1}(t) = 0, \forall t$ . Αυτό γίνεται διότι  $e_{x_1}(0) = 0$  και  $\dot{e}_{x_1}(0) = 0$ . Αν επιβάλλουμε μη μηδενικές αρχικές συνθήκες στο μοντέλο τότε θα είναι  $e_{x_1}(t) \neq 0$ , όμως  $e_{x_1}(t) \rightarrow 0$  αρκετά γρήγορα όπως φαίνεται και στο παρακάτω γράφημα όπου έχουμε θέσει  $\hat{x}_1(0) = 0.1$



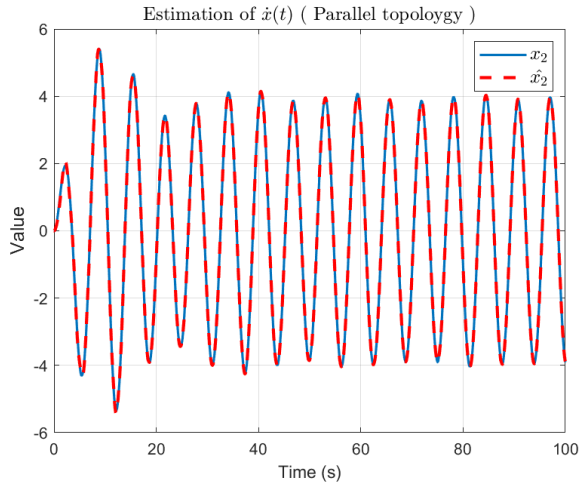
Σχήμα 9

### 1.3 Ερώτημα 3

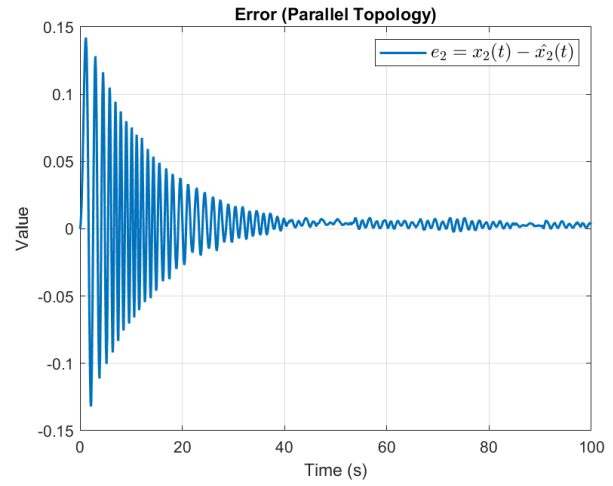
Θα μελετήσουμε την επίδραση που έχει ο προσθετικός θόρυβος κατά την μέτρηση της εξόδου στα αποτελέσματα μας. Θεωρούμε θόρυβο  $\eta(t) = \eta_0 \sin(2\pi f_0 t)$ . Πριν παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα να σημειώσουμε ότι η επίδραση του θορύβου υπεισέρχεται στο σύστημα μόνο κατά την μέτρηση  $x(t)$ . Αυτό σημαίνει ότι εφόσον δεν έχουμε πουθενά στις διαφορικές εξισώσεις των εκτιμήσεων των παραμέτρων την μεταβλητή  $e_{x_1}$  δεν περιμένουμε οι εκτιμήσεις να επηρεαστούν πολύ (εως καθόλου όπως θα δούμε). Αυτό που περιμένουμε να επηρεαστεί είναι οι εκτιμήσεις  $\hat{x}_1, \hat{x}_2$ .

Αρχικά λύνουμε το πρόβλημα υπό την παρουσία του θορύβου  $\eta(t) = \eta_0 \sin(2\pi f_0 t)$  με  $\eta_0 = 0.25$  και  $f_0 = 20$  με υπερπαραμέτρους και αρχικές συνθήκες όπως τις παρουσιάσαμε στο προηγούμενο ερώτημα. Παρακάτω δίνονται τα σχετικά διαγράμματα.

#### 1. Παράλληλη Τοπολογία

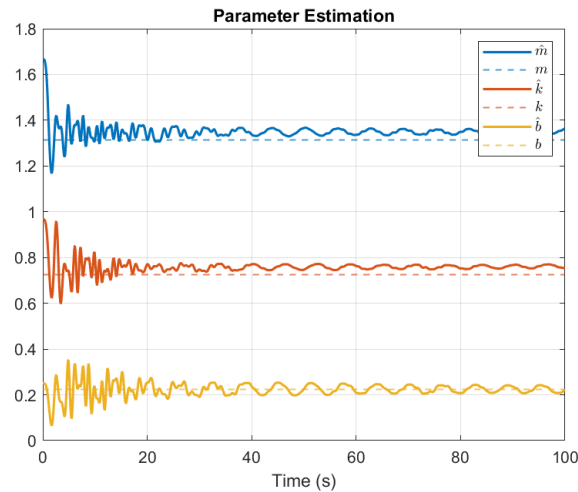


(α')



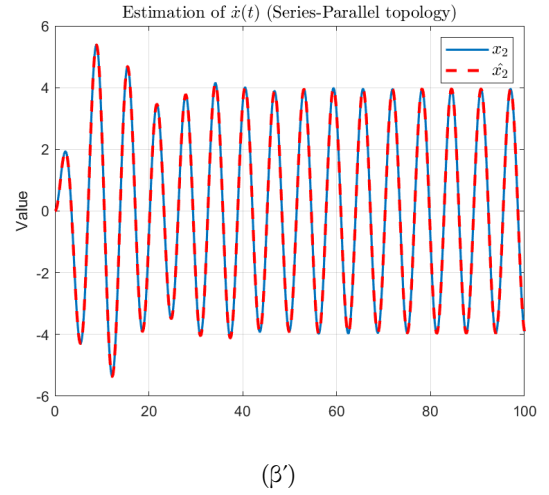
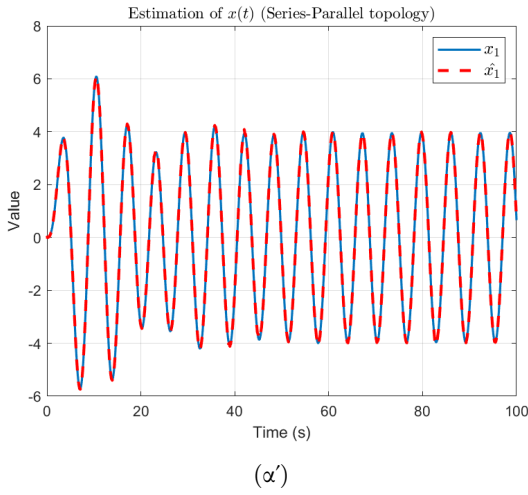
(β')

Σχήμα 10

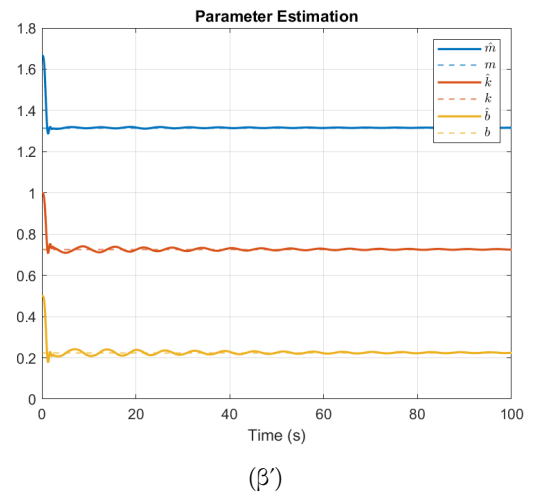
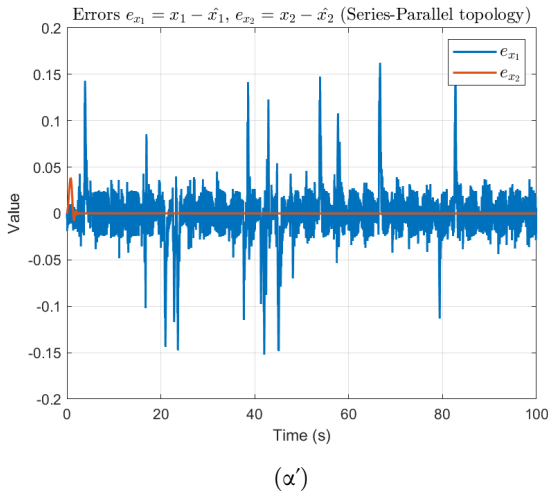


Σχήμα 11

#### 2. Μεικτή Τοπολογία



Σχήμα 12



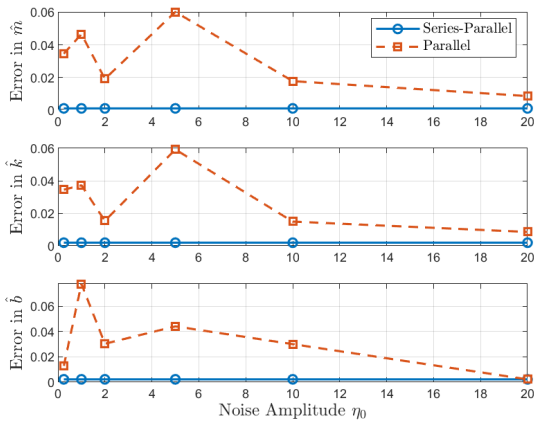
Σχήμα 13

Παρατηρούμε παρόμοια αποτελέσματα σε σχέση με το 2ο ερώτημα με την μόνη διαφορά ότι στην μεικτή τοπολογία η εκτίμηση του  $x_1$  έχει μεγαλύτερο σφάλμα από προηγουμένως (το οποίο αυξάνεται κατά μέσο όρο με αύξηση του πλάτους του θορύβου)

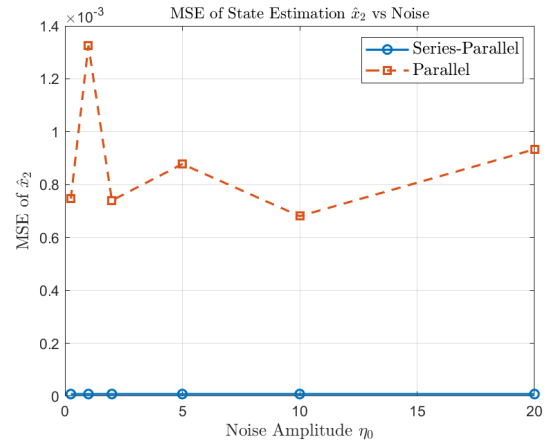
Καθώς αυξάνουμε το πλάτος του θορύβου για να συγκρίνουμε τα αποτελέσματα υπολογίζουμε το  $MSE(x, \hat{x})$  μεταξύ του μετρούμενου σήματος και του μοντέλου (στην περίπτωση της παράλληλης τοπολογίας  $MSE(x_2, \hat{x}_2)$  και στην περίπτωση της μεικτής  $MSE(x_2, \hat{x}_2)$  αλλά και  $MSE(x_1, \hat{x}_1)$ ). Όσον αφορά των εκτιμήσεων των παραμέτρων για να χρησιμοποιήσουμε μια αντικειμενική μετρική του σφάλματος παίρνουμε την εξής

$$e(\xi, \hat{\xi}) = \frac{1}{N/2} \sum_{i=N/2}^N |\hat{\xi}(t_i) - \xi|$$

όπου  $N$  ο συνολικός αριθμός βημάτων που χρησιμοποιούμε για την επίλυση των διαφορικών,  $\xi$  η πραγματική τιμή μιας παραμέτρου,  $\hat{\xi}(t_i)$  η εκτίμηση την στιγμή  $t_i$

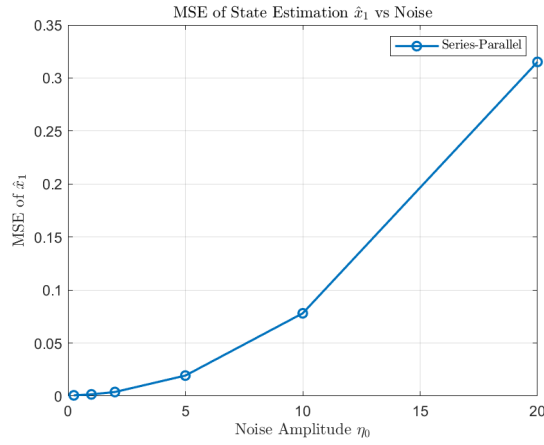


(α')



(β')

Σχήμα 14



(α')

Σχήμα 15

## 2 Θέμα 2

Μας δίνεται το μη γραμμικό σύστημα

$$\ddot{r}(t) = -a_1 \dot{r}(t) - a_2 \sin(r(t)) + a_3 \dot{r}^2(t) \sin(2r(t)) + bu(t) + d(t) \quad (42)$$

όπου  $a_i > 0$ ,  $i = 1, 2, 3$  και  $b > 0$  άγνωστες σταθερές,  $u(t)$  η είσοδος ελέγχου και  $d(t)$  εξωτερικές διαταραχές. Για την ανάλυση μας στα επόμενα ερωτήματα θα χρειαστεί να φέρουμε το σύστημα σε μορφή εξισώσεων κατάστασης. Θέτουμε  $r_1 = r$ ,  $r_2 = \dot{r}$  και παίρνουμε

$$\begin{aligned} \dot{r}_1 &= r_2 \\ \dot{r}_2 &= -a_1 r_2 - a_2 \sin(r_1) + a_3 r_2^2 \sin(2r_1) + bu(t) + d(t) \end{aligned} \quad (43)$$

### 2.1 Ερώτημα 1

Ο στόχος ελέγχου είναι η ρύθμιση της γωνίας  $r(t)$  από το 0 στο  $r_d = \frac{\pi}{10}$  και πίσω στο 0. Για την επίτευξη αυτού του στόχου κατασκευάζουμε την ομαλή τροχιά αναφοράς

$$r_d(t) = \frac{\pi}{20} \left( 1 - \cos\left(\frac{\pi t}{10}\right) \right), \quad t \in [0, 20] \text{ sec} \quad (44)$$

η οποία για  $t = 10s$  είναι  $r_d(10) = \frac{\pi}{10}$  rad. Ο ελεγκτής που επιλέγουμε είναι ο ακόλουθος

$$\begin{aligned} z_1(t) &= \frac{r(t) - r_d(t)}{\phi(t)}, \quad a(t) = -k_1 T(z_1(t)) \\ z_2(t) &= \frac{\dot{r}(t) - a(t)}{\rho}, \quad u(t) = -k_2 T(z_2(t)) \end{aligned} \quad (45)$$

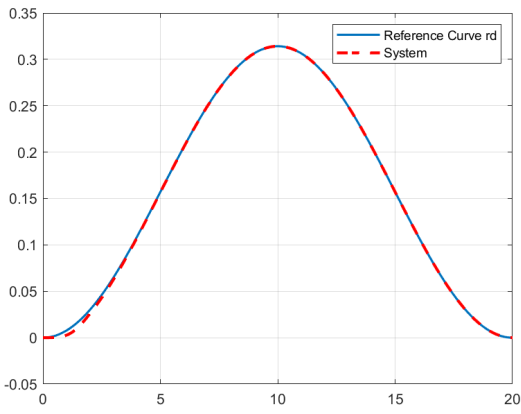
με  $\phi(t) = (\phi_0 - \phi_\infty)e^{-\lambda t} + \phi_\infty$ . Για τα πειράματα μας έχουμε θέσει το παρακάτω σετ υπερ-παραμέτρων:

$$\begin{aligned} \phi_0 &= 100, \quad \phi_\infty = 0.01, \quad \rho = 100 \\ k_1 &= 100, \quad k_2 = 100, \quad \lambda = 1 \end{aligned} \quad (46)$$

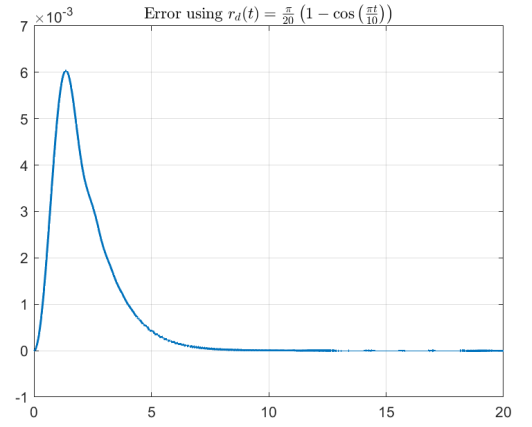
Όμως με την επιλογή αυτή της  $r_d(t)$  δεν καταφέρνουμε να πετύχουμε σύγκλιση των παραμέτρων του συστήματος. Βρέθηκε μέσω trial and error ότι η παρακάτω Gaussian συνάρτηση  $r_d(t)$  μας επιτρέπει να πετύχουμε σύγκλιση των παραμέτρων.

$$r_d(t) = \bar{r}_d e^{-\beta(t-10)^2}, \quad t \in [0, 20] \text{sec} \quad (47)$$

όπου πάλι για  $t = 10s$ ,  $r_d(10) = \bar{r}_d = \frac{\pi}{10}$ . Η καμπύλη είναι προφανώς ομαλή. Το αρνητικό της επιλογής αυτής είναι ότι στα άκρα 0 και 20 η  $r_d$  δεν είναι ακριβώς 0 όπως η προηγούμενη. Ωστόσο είναι επαρκώς κοντά στο 0 (της τάξης το  $10^{-6}$ ). Για τα πειράματα μας χρησιμοποιήθηκε  $\beta = 8$ . Δίνουμε παρακάτω τα διαγράμματα

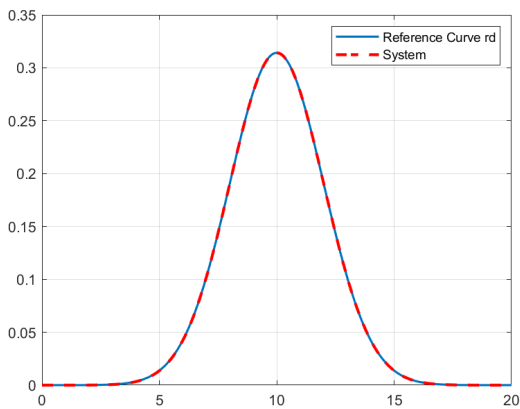


(α')

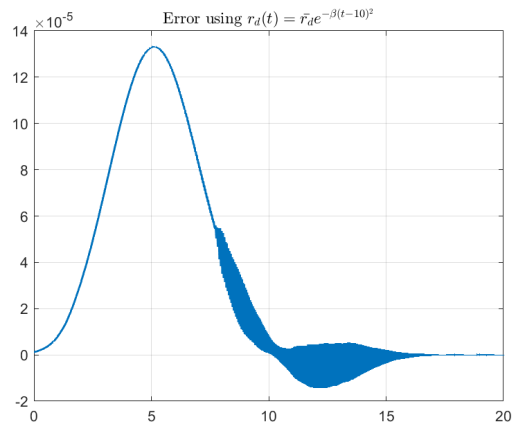


(β')

Σχήμα 16

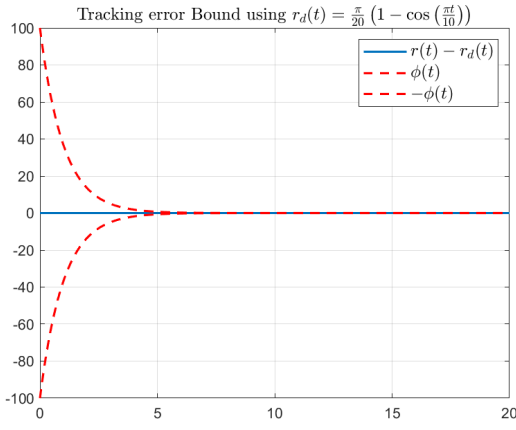


(α')

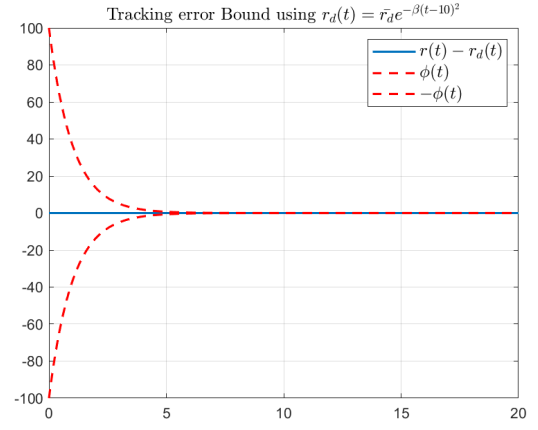


(β')

Σχήμα 17



(α')



(β')

Σχήμα 18

## 2.2 Ερώτημα 2

### 2.2.1 Θεωρητική Ανάλυση

θεωρούμε το διάνυσμα κατάστασης  $r(t)$  μετρήσιμο. Θα σχεδιάσουμε εκτιμητή πραγματικού χρόνου με την μέθοδο Lyapunov βασισμένο στην μεικτή τοπολογία. Αρχικά θεωρούμε το διάνυσμα άγνωστων παραμέτρων

$$\theta = [a_1 \quad a_2 \quad a_3]^T \quad (48)$$

και το αντίστοιχο διάνυσμα εκτίμησης

$$\hat{\theta} = [\hat{a}_1 \quad \hat{a}_2 \quad \hat{a}_3]^T \quad (49)$$

Επίσης θεωρούμε το την συνάρτηση  $f(r)$  η οποία ορίζεται ως

$$f(r) = [-r_2 \quad -\sin(r_1) \quad r_2^2 \sin(2r_1)]^T \quad (50)$$

Οπότε μπορούμε να γράψουμε το σύστημα σε μια πιο συμπαγή μορφή

$$\begin{aligned} \dot{r}_1 &= r_2 \\ \dot{r}_2 &= \theta^T f(r) + bu(t) + d(t) \end{aligned} \quad (51)$$

Στην ανάλυση μας θεωρούμε  $d(t) = 0$ .

Θεωρούμε τώρα το μοντέλο

$$\begin{aligned} \dot{\hat{r}}_1 &= r_2 + \theta_m(r_1 - \hat{r}_1) \\ \dot{\hat{r}}_2 &= \hat{\theta}^T f(r) + \hat{b}u(t) + \theta_m(r_2 - \hat{r}_2) \end{aligned} \quad (52)$$

Ορίζουμε και τα σφάλματα εκτίμησης  $e_1 = r_1 - \hat{r}_1$ ,  $e_2 = r_2 - \hat{r}_2$  και τα παραμετρικά σφάλματα  $e_\theta = \hat{\theta} - \theta$ ,  $e_b = \hat{b} - b$ . Για τα σφάλματα ισχύει

$$\dot{e}_1 = \dot{r}_1 - \dot{\hat{r}}_1 = r_2 - r_2 - \theta_m(r_1 - \hat{r}_1) = -\theta_m e_1 \quad (53)$$

$$\dot{e}_2 = \dot{r}_2 - \dot{\hat{r}}_2 = \theta^T f(r) + bu - \hat{\theta}^T f(r) - \hat{b}u - \theta_m(r_2 - \hat{r}_2) = -\theta_m e_2 - e_\theta^T f(r) - e_b u \quad (54)$$

$$\dot{e}_\theta = \dot{\hat{\theta}} \quad (55)$$

$$\dot{e}_b = \dot{\hat{b}} \quad (56)$$

Θεωρούμε την συνάρτηση Lyapunov

$$V = \frac{1}{2}e_1^2 + \frac{1}{2}e_2^2 + \frac{1}{2}e_\theta^T \Gamma^{-1} e_\theta + \frac{1}{2\gamma_4} e_b^2 \quad (57)$$

όπου  $\Gamma = \text{diag}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$  πίνακας κερδών.  
Παραγωγίζοντας ως προς χρόνο παίρνουμε

$$\begin{aligned}\dot{V} &= e_1 \dot{e}_1 + e_2 \dot{e}_2 + \frac{1}{2} \dot{e}_\theta^T \Gamma^{-1} e_\theta + \frac{1}{2} e_\theta^T \Gamma^{-1} \dot{e}_\theta + \frac{1}{\gamma_4} e_b \dot{e}_b \\ &= -\theta_m e_1^2 + e_2 (-\theta_m e_2 - e_\theta^T f(r) - e_b u) + \frac{1}{2} \dot{\theta}^T \Gamma^{-1} e_\theta + \frac{1}{2} e_\theta^T \Gamma^{-1} \dot{\theta} + \frac{1}{\gamma_4} e_b \dot{b} \\ &= -\theta_m (e_1^2 + e_2^2) + e_\theta^T (\Gamma^{-1} \dot{\theta} - e_2 f(r)) + e_b (\frac{1}{\gamma_4} \dot{b} - e_2 u)\end{aligned}$$

αν θεωρήσουμε

$$\dot{\theta} = \Gamma f(r) e_2 \quad (58)$$

και

$$\dot{b} = \gamma_4 u e_2 \quad (59)$$

Τότε

$$\dot{V} = -\theta_m (e_1^2 + e_2^2) \leq 0 \quad (60)$$

Ακολουθώντας την ίδια μεθοδολογία με την γραμμική περίπτωση του θέματος 1 μπορούμε να αποδείξουμε ότι  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$  και πως  $\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{a}_i(t) = 0, i = 1, 2, 3, \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{b}(t) = 0$ .

### 2.2.2 Πειραματικά Αποτελέσματα

θα μελετήσουμε μόνο την περίπτωση της Γκαουσιανής  $r_d$  καθώς όπως αναφέρθηκε μόνο με αυτή καταφέραμε να πετύχουμε την σύγκλιση των παραμέτρων στις επιθυμητές τιμές. Για την Γκαουσιανή  $r_d(t)$  με υπερ-παραμέτρους του μοντέλου

$$\Gamma = \text{diag}(545, 18, 1755)$$

$$\gamma_4 = 64$$

$$\theta_m = 4$$

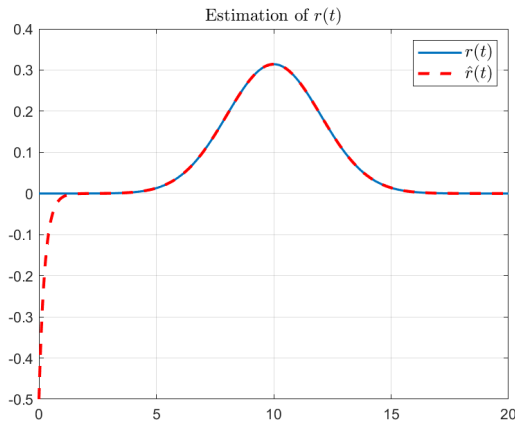
και αρχικές συνθήκες

$$r(0) = 0$$

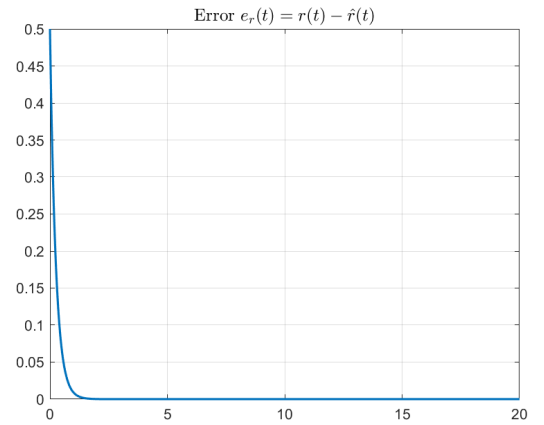
$$\hat{r}(0) = (-0.5, 0)$$

$$\hat{a}_1(0) = 2, \hat{a}_2(0) = 1, \hat{a}_3(0) = 0, \hat{b}(0) = 0.5$$

παίρνουμε τα εξής αποτελέσματα

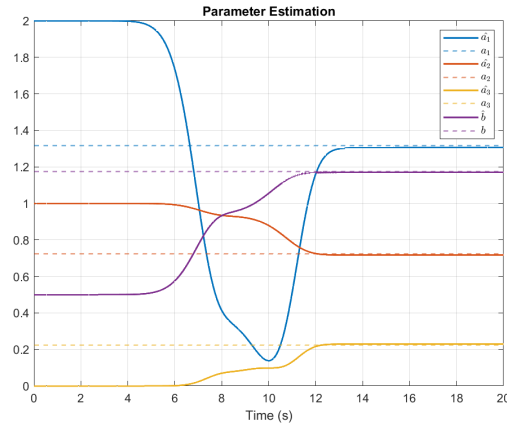


(α')



(β')

Σχήμα 19



(α')

Σχήμα 20

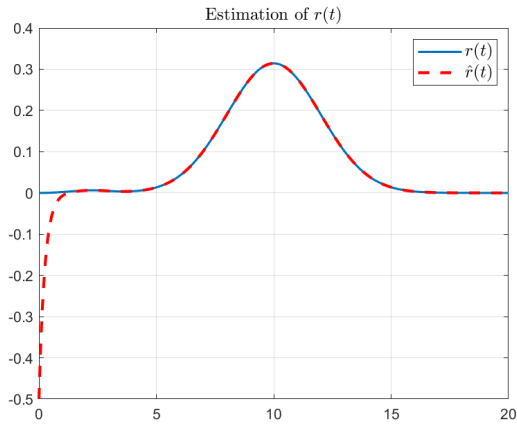
Παρατηρούμε ότι και το σφάλμα έχει συγχλίνει στο 0 και οι παράμετροι στις επιθυμητές άγνωστες τιμές.

### 2.3 Ερώτημα 3

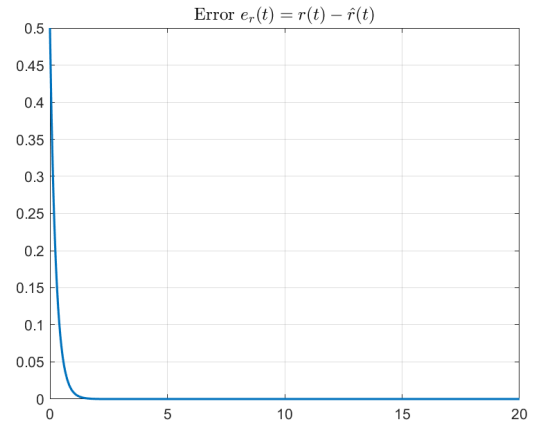
Τώρα θεωρούμε  $d(t) = 0.15 \sin(0.5t)$  οπότε το αρχικό σύστημα γίνεται τώρα

$$\begin{aligned} \dot{r}_1 &= r_2 \\ \dot{r}_2 &= -a_1 r_2 - a_2 \sin(r_1) + a_3 r_2^2 \sin(2r_1) + bu(t) + 0.15 \sin(0.5t) \end{aligned} \quad (61)$$

Προφανώς το μοντέλο μας μένει ίδιο με το προηγούμενο ερώτημα. Εκτελώντας το ίδιο πείραμα με τις ίδιες ακριβώς παραμέτρους παίρνουμε τας εξής αποτελέσματα

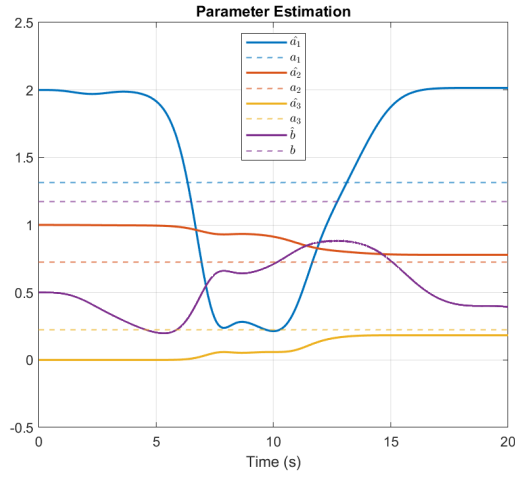


(α')



(β')

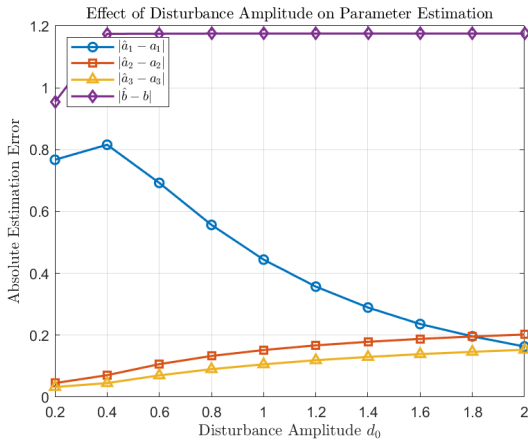
Σχήμα 21



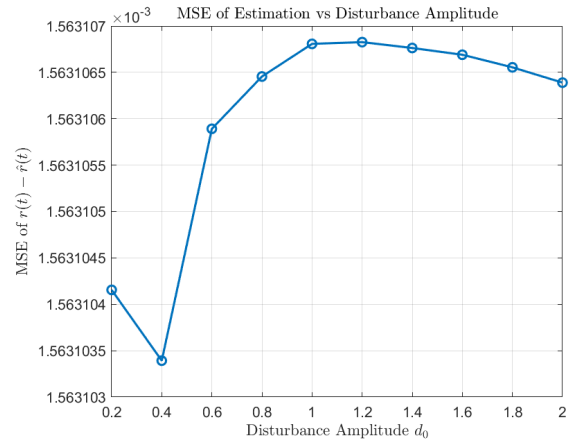
(α')

Σχήμα 22

Παρατηρούμε ότι με τις διαταραχές τώρα οι παράμετροι δεν συγχλίνουν στις επιθυμητές τιμές ωστόσο συγχλίνει η παράγωγος τους. Επίσης και πάλι το μοντέλο καταφέρνει να ακολουθήσει την τροχιά του συστήματος. Μελετούμε επίσης για διάφορες τιμές του πλάτους των διαταραχών και βρίσκουμε ότι το σφάλμα της εκτίμησης της  $r(t)$  παραμένει χαμηλό ωστόσο το σφάλμα των παραμέτρων μεγάλωσε.



(α')



(β')

Σχήμα 23