

Προσομοίωση και Μοντελοποίηση Δυναμικών Συστημάτων

Παύλου Δημήτριος ΑΕΜ: 10315

Ιούνιος 2025

1 Θέμα 1

Μας δίνεται γραμμικό σύστημα της μορφής

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (1)$$

όπου τα $A \in \mathbb{R}^{2x2}$, $B \in \mathbb{R}^{2x1}$ στάθεροι άγνωστοι πίνακες με

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad (2)$$

για τον οποίο γνωρίζουμε ότι $-3 \leq a_{11} \leq -1$ και

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

για τον οποίο γνωρίζουμε ότι $b_2 \geq 1$. Για τις επακόλουθες προσομοιώσεις θα θεωρήσουμε ότι οι πίνακες είναι

$$A = \begin{bmatrix} -2.15 & 0.25 \\ -0.75 & -2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.5 \end{bmatrix} \quad (5)$$

1.1 Ερώτημα A

1.1.1 Θεωρητική ανάλυση

Θέλουμε να σχεδιάσουμε έναν εκτιμητή πραγματικού χρόνου ο οποίος θα εκτιμά σε πραγματικό χρόνο τους πίνακες A, B . Λόγω της μορφής του συστήματος επιλέγουμε το μοντέλο μεικτής δομής της κατά Lyapunov σχεδίασης. Συγκεκριμένα επιλέγουμε το μοντέλο

$$\dot{\hat{x}}_1 = \hat{a}_{11}x_1 + \hat{a}_{12}x_2 + \hat{b}_1u + \theta_m(x_1 - \hat{x}_1) \quad (6)$$

$$\dot{\hat{x}}_2 = \hat{a}_{11}x_1 + \hat{a}_{12}x_2 + \hat{b}_2u + \theta_m(x_2 - \hat{x}_2) \quad (7)$$

όπου $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{a}_{ij}, \hat{b}_i$ είναι οι εκτιμήσεις των x_1, x_2, a_{ij}, b_{ij} αντίστοιχα. Ορίζουμε τα σφάλματα μοντελοποίησης

$$e_1 = x_1 - \hat{x}_1 \quad (8)$$

$$e_2 = x_2 - \hat{x}_2 \quad (9)$$

και τα παραμετρικά σφάλματα

$$\tilde{a}_{ij} = \hat{a}_{ij} - a_{ij}, \quad \tilde{b}_i = \hat{b}_i - b_i, \quad i, j = 1, 2 \quad (10)$$

Οπότε το μοντέλο γράφεται

$$\dot{\hat{x}}_1 = \hat{a}_{11}x_1 + \hat{a}_{12}x_2 + \hat{b}_1u + \theta_m e_1 \quad (11)$$

$$\dot{\hat{x}}_2 = \hat{a}_{11}x_1 + \hat{a}_{12}x_2 + \hat{b}_2u + \theta_m e_2 \quad (12)$$

Προς στιγμήν θα θεωρήσουμε το πρόβλημα εκτίμησης απουσία περιορισμών και θα αποδείξουμε την ευστάθεια του συστήματος και του μοντέλου και στην συνέχεια θα εφαρμόσουμε αλγόριθμο προβολής στις παραμέτρους που οφείλουν να υπακούουν περιορισμούς και θα δείξουμε ότι δεν επηρεάζεται το αποτελέσμα.

Ξεκινούμε την ανάλυση μας, επιλέγοντας την συνάρτηση Lyapunov

$$V = \frac{1}{2}e_1^2 + \frac{1}{2}e_2^2 + \sum_{i,j} \frac{1}{2\gamma_{ij}}\tilde{a}_{ij}^2 + \sum_i \frac{1}{2\mu_i}\tilde{b}_i^2 \quad (13)$$

όπου $\gamma_{ij}, \mu_i > 0$ κέρδη. Παραγωγίζοντας ως προς χρόνο

$$\dot{V} = e_1\dot{e}_1 + e_2\dot{e}_2 + \sum_{i,j} \frac{1}{\gamma_{ij}}\tilde{a}_{ij}\dot{\tilde{a}}_{ij} + \sum_i \frac{1}{\mu_i}\tilde{b}_i\dot{\tilde{b}}_i \quad (14)$$

Για τις εκφράσεις $\dot{e}_i, \dot{\tilde{a}}_{ij}, \dot{\tilde{b}}_i$ έχουμε

$$\dot{e}_1 = \dot{x}_1 - \dot{\hat{x}}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1u - \hat{a}_{11}x_1 - \hat{a}_{12}x_2 - \hat{b}_1u - \theta_m e_1 = -\theta_m e_1 - \tilde{a}_{11}x_1 - \tilde{a}_{12}x_2 - \tilde{b}_1u \quad (15)$$

$$\dot{e}_2 = \dot{x}_2 - \dot{\hat{x}}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2u - \hat{a}_{21}x_1 - \hat{a}_{22}x_2 - \hat{b}_2u - \theta_m e_2 = -\theta_m e_2 - \tilde{a}_{21}x_1 - \tilde{a}_{22}x_2 - \tilde{b}_2u \quad (16)$$

$$\dot{\tilde{a}}_{ij} = \dot{\tilde{a}}_{ij} \quad (17)$$

$$\dot{\tilde{b}}_i = \dot{\tilde{b}}_i \quad (18)$$

Αντικαθιστώντας στην (14) παίρνουμε

$$\begin{aligned} \dot{V} &= e_1(-\theta_m e_1 - \tilde{a}_{11}x_1 - \tilde{a}_{12}x_2 - \tilde{b}_1u) + e_2(-\theta_m e_2 - \tilde{a}_{21}x_1 - \tilde{a}_{22}x_2 - \tilde{b}_2u) + \sum_{i,j} \frac{1}{\gamma_{ij}}\tilde{a}_{ij}\dot{\tilde{a}}_{ij} + \sum_i \frac{1}{\mu_i}\tilde{b}_i\dot{\tilde{b}}_i \\ &= -\theta_m e_1^2 - \theta_m e_2^2 - e_1\tilde{a}_{11}x_1 - e_1\tilde{a}_{12}x_2 - e_1\tilde{b}_1u - e_2\tilde{a}_{21}x_1 - e_2\tilde{a}_{22}x_2 - e_2\tilde{b}_2u + \sum_{i,j} \frac{1}{\gamma_{ij}}\tilde{a}_{ij}\dot{\tilde{a}}_{ij} + \sum_i \frac{1}{\mu_i}\tilde{b}_i\dot{\tilde{b}}_i \end{aligned} \quad (19)$$

Στόχος μας είναι να απαλείψουμε τους όρους που περιέχουν $\tilde{a}_{ij}, \tilde{b}_i$. Έτσι σχεδιάζουμε:

$$\dot{\tilde{a}}_{11} = \gamma_{11}e_1x_1 \quad (20)$$

$$\dot{\tilde{a}}_{12} = \gamma_{12}e_1x_2 \quad (21)$$

$$\dot{\tilde{a}}_{21} = \gamma_{21}e_2x_1 \quad (22)$$

$$\dot{\tilde{a}}_{22} = \gamma_{22}e_2x_2 \quad (23)$$

$$\dot{\tilde{b}}_1 = \mu_1e_1u \quad (24)$$

$$\dot{\tilde{b}}_2 = \mu_2e_2u \quad (25)$$

Έτσι παίρνουμε

$$\dot{V} = -\theta_m \|e\|^2 \leq 0 \quad (26)$$

Οπότε έχουμε αποδείξει ότι $e_1, e_2, \tilde{a}_{ij}, \tilde{b}_i \in \mathcal{L}_\infty$. Εφόσον $V \geq 0$ και $\dot{V} \leq 0$ η V είναι φθίνουσα συνάρτηση του χρόνου και άρα υπάρχει το όριο της στο άπειρο, έστω $\lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = V_\infty$. Ολοκληρώνοντας τα δύο μέρη της (26)

$$\theta_m \int_0^\infty \|e\|^2 d\tau = - \int_0^\infty \dot{V} d\tau = V(0) - V_\infty \quad (27)$$

Συνεπώς $e \in \mathcal{L}_2$. Υποθέτουμε ότι $u \in \mathcal{L}_\infty$ και τότε $x \in \mathcal{L}_\infty$. Επειδή $e = x - \hat{x} \in \mathcal{L}_\infty$ τότε και $\hat{x} \in \mathcal{L}_\infty$. Από τις (11), (12) συνεπάγεται ότι $\dot{e} \in \mathcal{L}_\infty$. Από λήμμα Barbalat επειδή $e \in \mathcal{L}_\infty \cap \mathcal{L}_2$ και $\dot{e} \in \mathcal{L}_\infty$ συνεπάγεται ότι

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$$

Επιπλέον

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\hat{a}}_{ij}(t) = 0, \quad i, j = 1, 2$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\hat{b}}_i(t) = 0, \quad i = 1, 2$$

ως γινόμενα ομοιόμορφα φραγμένων συνάρτησεων με συνάρτηση που έχει όριο το 0. Δεν υπάρχει εγγύηση και για τα παραμετρικά σφάλματα να τείνουν στο 0. Εφόσον όμως η είσοδος ικανοποιεί μια ΣΕΔ τότε μπορούμε να εγγυηθούμε και τέτοιου είδους σύγκλιση.

Εφόσον έχουμε αποδείξει την ευστάθεια του μοντέλου θα ενσωματώσουμε τώρα και τους περιορισμούς που δίνονται για τα a_{11}, b_2 .

Έστω

$$p_1 = \gamma_{11} e_1 x_1$$

και

$$p_2 = \mu_2 e_2 u$$

Θεωρούμε τις σχεδιάσεις

$$\dot{\hat{a}}_{11} = \begin{cases} p_1, & \text{if } (-3 < a_{11} < -1) \vee (a_{11} = -3 \wedge p_1 > 0) \vee (a_{11} = -1 \wedge p_2 < 0) \\ 0, & \text{else} \end{cases} \quad (28)$$

$$\dot{\hat{b}}_2 = \begin{cases} p_2, & \text{if } (b_2 > 0) \vee (b_2 = 1 \wedge p_2 > 0) \\ 0, & \text{else} \end{cases} \quad (29)$$

Θα αποδείξουμε ότι με αυτές τις σχεδιάσεις η \dot{V} γίνεται ακόμα πιο αρνητική. Θα το δείξουμε για τον έναν περιορισμό του a_{11} και οι άλλες περιπτώσεις αποδεικνύονται ομοίως.

Έστω λοιπόν ότι $\hat{a}_{11} = -3$ και ότι απομακρύνομαστε από το σύνορο άρα $p_1 < 0$. Τότε $\dot{\hat{a}}_{11} = 0$. Σε αυτή την περίπτωση θα εμφανιστεί στην έκφραση της \dot{V} ο επιπλέον όρος $\tilde{a}_{11}p_1$.

$$\dot{V} = -\theta_m \|e\|^2 - \tilde{a}_{11}p_1 \quad (30)$$

Αναλύοντας τον όρο αυτόν, γνωρίζουμε ότι $p_1 < 0$ και ότι $\hat{a}_{11} = -3$. Επειδή $a_{11} \geq -3$ έπεται ότι $\tilde{a}_{11}p_1 \geq 0$ και άρα $-\tilde{a}_{11}p_1 \leq 0$. Άρα εξακολουθεί να ισχύει ότι $\dot{V} \leq 0$.

Για περιστότερες λεπτόμερεις επί του θέματος βλέπε Ioannou & Sun, Robust Adaptive Control, 1996 — Chapter 4, Projected Adaptive Laws. Στο ίδιο κεφάλαιο υπάρχει και θεώρημα (με απόδειξη) το οποίο αναφέρει πως αν οι αρχικές μας συνθήκες $\hat{a}_{ij}(0), i, j = 1, 2$ και $\hat{b}_i(0), i = 1, 2$ ανήκουν στο κυρτό σύνολο Ω που ορίζουν οι κυρτοί περιορισμοί τότε η σχεδίαση δεν θα επιτρέψει τις παραμέτρους να ξεφύγουν από αυτό το σύνολο.

1.1.2 Πειραματικά Αποτελέσματα

Για να επιβεβαιώσουμε τα θεωρητικά αποτελέσματα της προηγουμένης παραγράφου, θα εκτελέσουμε προσομοίωση με είσοδο $u(t) = 2.5 \sin(t) + 2 \sin(2t) \in \mathcal{L}_\infty$. Θέτουμε τον συνολικό χρόνο προσομοίωσης ίσο με $T = 40s$ με βήμα ολοκλήρωσης $\Delta t = 10^{-4}s$ και χρησιμοποιούμε τους εξής πίνακες κερδών:

$$\Gamma_A = \begin{bmatrix} 110.4 & 100 \\ 278 & 50 \end{bmatrix}$$

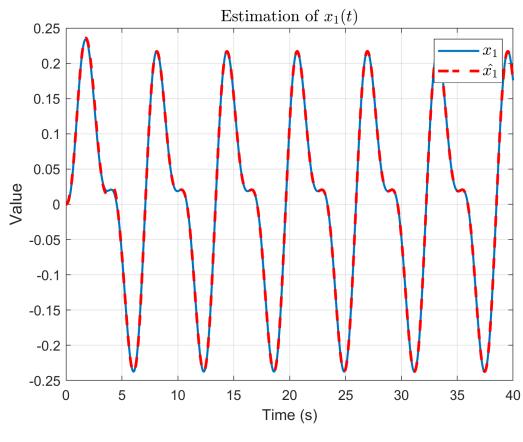
$$M_B = \begin{bmatrix} 100 \\ 100 \end{bmatrix}$$

Θέτουμε την τιμή της παράμετρου $\theta_m = 50$. Όσον αφορά τις αρχικές συνθήκες, φροντίζουμε αυτές να ανήκουν στο σύνολο Ω που ορίζουν οι περιορισμοί του προβλήματος και θέτουμε

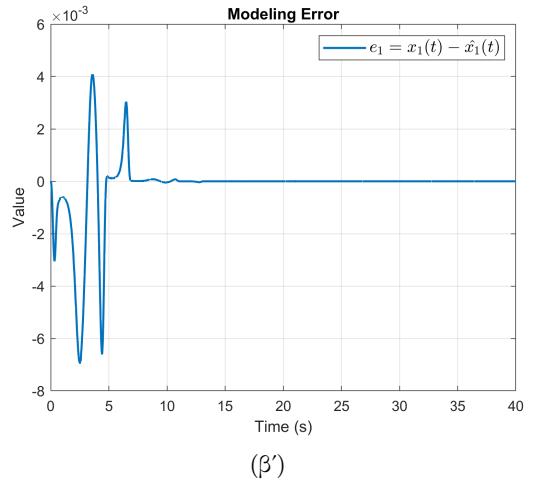
$$\hat{A}(0) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{B}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Τα αποτελέσματα συνοψίζονται στις παρακάτω γραφικές.

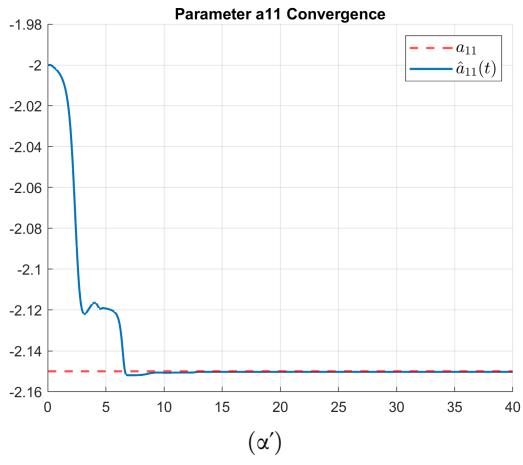


(α')

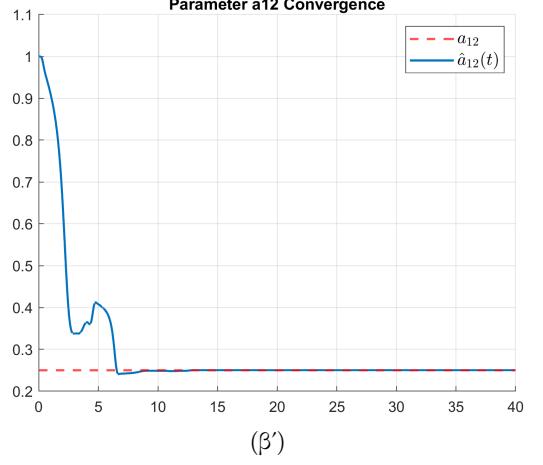


(β')

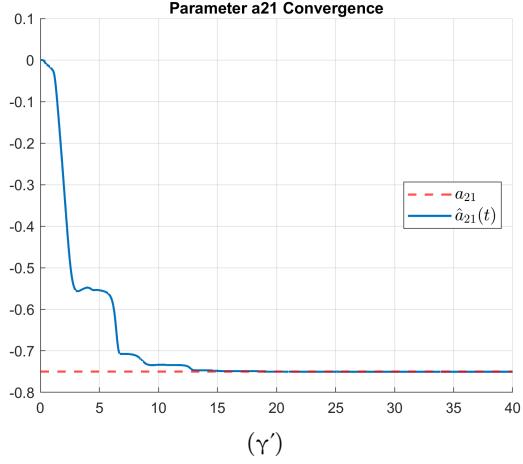
$\Sigma\chi\eta\mu\alpha 1:$ Εκτίμηση x_1 και σφάλμα μοντελοποίησης e_{x_1}



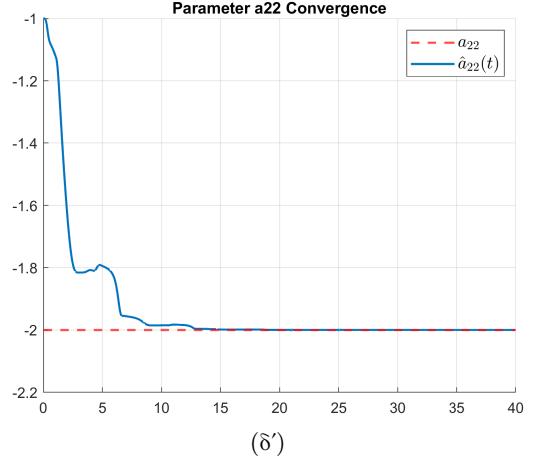
(α')



(β')

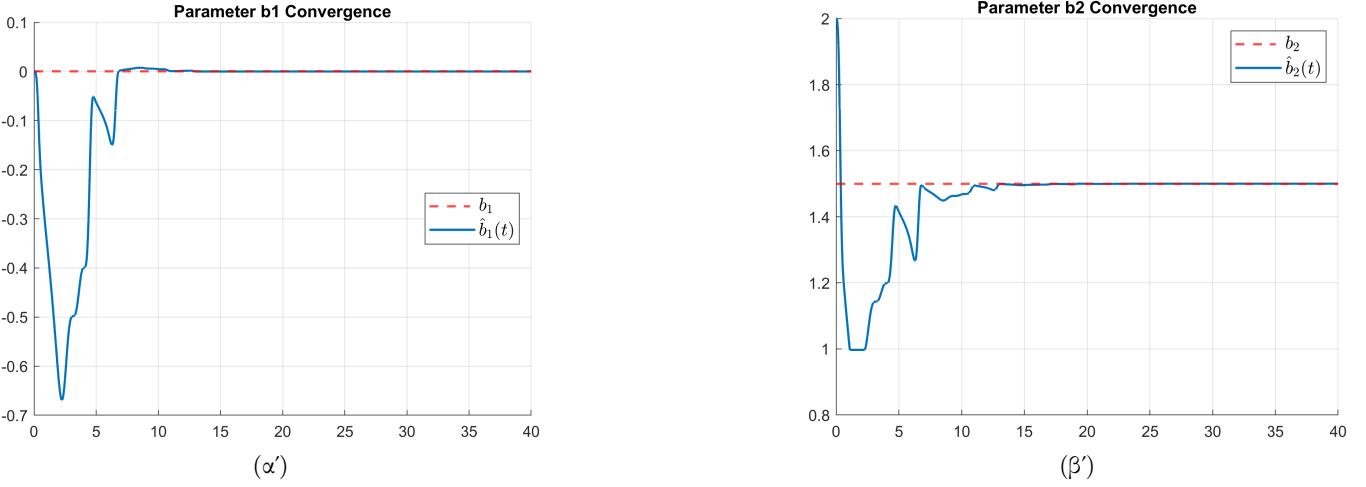


(γ')



(δ')

$\Sigma\chi\eta\mu\alpha 2:$ Παράμετροι πίνακα A



Σχήμα 3: Παράμετροι πίνακα B

Παρατηρούμε συνολικά μια άριστη επίλυση του προβλήματος, που επιβεβαιώνει τα θεωρητικά αποτελέσματα καθώς το σφάλμα μοντελοποίησης τείνει στο 0 και οι παράμετροι συγχλίνουν στις επιμυητές τιμές. Από τις γραφικές παραστάσεις μπορεί να συμπεράνει κανείς ότι ο αλγόριθμος συγχλίνει και σχετικά γρήγορα.

Αυτό που δεν γνωρίζαμε εκ των προτέρων είναι αν η επιλεγμένη είσοδος ικανοποιεί την ΣΕΔ ώστε να συγχλίνουν και οι παράμετροι, εκτός από το διάνυσμα κατάστασης. Ωστόσο με trial and error για την κατάλληλη επιλογή κερδών καταφέραμε και αυτή την συγχλιση.

Για την επιλογή των αρχικών συνθηκών σημειώνεται ότι η επιλογή της αρχικής σύνθηκης $\hat{b}_1(0) = 0$ είναι μια ασφαλής επίλογή καθώς δεν γνωρίζουμε κάτι για την παράμετρο αυτή και συνήθως η είσοδος u εφαρμόζεται στη τελευταία διαφορική του συστήματος. Διαφορετική επιλογή δεν θα επηρεάσει τα αποτελέσματα, παρά μόνο την επιλογή των κερδών. Μάλιστα από το σχήμα (3) βλέπουμε ότι αρχικά το \hat{b}_1 απομακρύνεται από το 0 αλλά τελικά φτάνει και πάλι στο 0. Όσον αφορά την παράμετρο a_{11} χρησιμοποιύμε ως αρχική τιμή την καλύτερη εκτίμηση που μπορούμε να κάνουμε δηλαδή το μέσο του διαστήματος $[-3, -1]$. Το $\hat{b}_2(0)$ το επιλέγουμε έτσι ώστε να είναι ικανοποιεί τον περιορισμό του. Οι αρχικές συνθήκες των υπόλοιπων παραμέτρων τέθηκαν ίσες με $-1, +1$ ή 0 για απλότητα.

Τα αποτελέσματα της προσομοίωσης παράγονται από το αρχείο ex_1a.m ενώ η σχεδίαση της μεικτής δομής με προβολή από τα αρχεία projected_lyapunov.m που σχεδιάζονται οι διαφορικές εξισώσεις του μοντέλου και των εκτιμήσεων των παραμέτρων και projection.m που εφαρμόζει την προβολή.

1.2 Ερώτημα B

1.2.1 Θεωρητική ανάλυση

Εφαρμόζεται στο σύστημα συγκέντρων πόλωσης $\omega(t) \in \mathbb{R}^2$ ως εξής:

$$\dot{x} = Ax + Bu + \omega \quad (31)$$

To $\omega \in \mathcal{L}_\infty$ αλλά έχει άγνωστο άνω όριο $\|\omega(t)\| \leq \omega_0$ οπότε η κατάλληλη σχεδίαση είναι η σ-τροποποίηση. Συγκεκριμένα τροποιούμε τις σχεδιάσεις του ερωτήματος 1 ώς εξής

$$\dot{\hat{a}}_{ij} = \gamma_{ij} e_i x_j - \gamma_{ij} \sigma \hat{a}_{ij}, \quad i, j = 1, 2 \quad (32)$$

και

$$\dot{\hat{b}}_i = \mu_i e_i u - \mu_i \sigma \hat{b}_i, \quad i = 1, 2 \quad (33)$$

Θα αποδείξουμε τώρα την ευστάθεια του τροποποιημένου αλγορίθμου. Θεωρούμε την ίδια συνάρτηση Lyapunov με το Α ερώτημα

$$V(t) = \frac{1}{2} e_1^2 + \frac{1}{2} e_2^2 + \sum_{i,j} \frac{1}{2\gamma_{ij}} \hat{a}_{ij}^2 + \sum_i \frac{1}{2\mu_i} \hat{b}_i^2 \quad (34)$$

Παραγωγίζοντας ως προς χρόνο παίρνουμε

$$\dot{V} = e_1 \dot{e}_1 + e_2 \dot{e}_2 + \sum_{i,j} \frac{1}{\gamma_{ij}} \tilde{a}_{ij} \dot{a}_{ij} + \sum_i \frac{1}{\mu_i} \tilde{b}_i \dot{b}_i \quad (35)$$

Για τους όρους \dot{e}_i ισχύει

$$\dot{e}_1 = -\theta_m e_1 - \tilde{a}_{11} x_1 - \tilde{a}_{12} x_2 - \tilde{b}_1 u + \omega_1 \quad (36)$$

$$\dot{e}_2 = -\theta_m e_2 - \tilde{a}_{21} x_1 - \tilde{a}_{22} x_2 - \tilde{b}_2 u + \omega_2 \quad (37)$$

Αντικαθιστώντας τις (32), (33), (36), (37) στην (35) παίρνουμε

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -\theta_m e_1^2 - \theta_m e_2^2 - e_1 \tilde{a}_{11} x_1 - e_1 \tilde{a}_{12} x_2 - e_1 \tilde{b}_1 u + e_1 \omega_1 - e_2 \tilde{a}_{21} x_1 - e_2 \tilde{a}_{22} x_2 - e_2 \tilde{b}_2 u + e_2 \omega_2 \\ & + \sum_{i,j} \frac{1}{\gamma_{ij}} \tilde{a}_{ij} (\gamma_{ij} e_i x_j - \gamma_{ij} \sigma \hat{a}_{ij}) - \sum_i \frac{1}{\mu_i} \tilde{b}_i (\mu_i e_i u - \mu_i \sigma \hat{b}_i) \end{aligned} \quad (38)$$

Οι όροι $e_i \tilde{a}_{ij} x_j$, $-e_1 \tilde{a}_{ij} x_j$ και $e_i \tilde{b}_i u$, $-e_i \tilde{b}_i u$ απαλούνται. Επιπλέον $\tilde{a}_{ij} = \hat{a}_{ij} - a_{ij}$. Οπότε η \dot{V} γράφεται

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -\theta_m \|e\|^2 + e^T \omega - \sum_{i,j} \sigma \tilde{a}_{ij} (\tilde{a}_{ij} + a_{ij}) - \sum_i \sigma \tilde{b}_i (\tilde{b}_i + b_i) \\ = & -\theta_m \|e\|^2 - \sum_{i,j} \sigma \tilde{a}_{ij}^2 - \sum_i \sigma \tilde{b}_i^2 + e^T \omega - \sum_{i,j} \sigma \tilde{a}_{ij} a_{ij} - \sum_i \sigma \tilde{b}_i b_i \\ \leq & -\theta_m \|e\|^2 - \sum_{i,j} \sigma \tilde{a}_{ij}^2 - \sum_i \sigma \tilde{b}_i^2 + \|e\| \|\omega\| + \sum_{i,j} \sigma |\tilde{a}_{ij}| |a_{ij}| + \sum_i \sigma |\tilde{b}_i| |b_i| \\ \leq & -(\theta_m - \frac{1}{2}) \|e\|^2 - \sum_{i,j} \sigma \tilde{a}_{ij}^2 - \sum_i \sigma \tilde{b}_i^2 + \frac{1}{2} \omega_0^2 + \sum_{i,j} \sigma |\tilde{a}_{ij}| |a_{ij}| + \sum_i \sigma |\tilde{b}_i| |b_i| \end{aligned} \quad (39)$$

Αναλύουμε τους όρους $\sigma |\tilde{a}_{ij}| |a_{ij}|$ και $\sigma |\tilde{b}_i| |b_i|$ ως εξής

$$\sigma |\tilde{a}_{ij}| |a_{ij}| \leq \frac{1}{2} \sigma \tilde{a}_{ij}^2 + \frac{1}{2} \sigma a_{ij}^2 \quad (40)$$

$$\sigma |\tilde{b}_i| |b_i| \leq \frac{1}{2} \sigma \tilde{b}_i^2 + \frac{1}{2} \sigma b_i^2 \quad (41)$$

Αντικαθιστώντας στην \dot{V} παίρνουμε

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -(\theta_m - \frac{1}{2}) \|e\|^2 - \sum_{i,j} \sigma \tilde{a}_{ij}^2 - \sum_i \sigma \tilde{b}_i^2 + \frac{1}{2} \omega_0^2 + \sum_{i,j} \sigma |\tilde{a}_{ij}| |a_{ij}| + \sum_i \sigma |\tilde{b}_i| |b_i| \\ \leq & -(\theta_m - \frac{1}{2}) \|e\|^2 - \sum_{i,j} \frac{1}{2} \sigma \tilde{a}_{ij}^2 - \sum_i \frac{1}{2} \sigma \tilde{b}_i^2 + \frac{1}{2} \omega_0^2 + \sum_{i,j} \frac{1}{2} \sigma a_{ij}^2 + \sum_i \sigma b_i^2 \end{aligned} \quad (42)$$

Για ένα $a > 0$ προσθαψαρούμε τον όρο aV

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -(\theta_m - \frac{1}{2}) \|e\|^2 - \sum_{i,j} \frac{1}{2} \sigma \tilde{a}_{ij}^2 - \sum_i \frac{1}{2} \sigma \tilde{b}_i^2 + \frac{1}{2} \omega_0^2 + \sum_{i,j} \frac{1}{2} \sigma a_{ij}^2 + \sum_i \sigma b_i^2 \\ \leq & -aV + aV - (\theta_m - \frac{1}{2}) \|e\|^2 - \sum_{i,j} \frac{1}{2} \sigma \tilde{a}_{ij}^2 - \sum_i \frac{1}{2} \sigma \tilde{b}_i^2 + \frac{1}{2} \omega_0^2 + \sum_{i,j} \frac{1}{2} \sigma a_{ij}^2 + \sum_i \sigma b_i^2 \\ \leq & -aV - (\theta_m - \frac{1}{2}) \|e\|^2 - \underbrace{\sum_{i,j} \frac{1}{2} (\sigma - \frac{\alpha}{\gamma_{ij}}) \tilde{a}_{ij}^2}_{\leq 0} - \underbrace{\sum_i \frac{1}{2} (\sigma - \frac{\alpha}{\mu_i}) \tilde{b}_i^2}_{C} + \frac{1}{2} \omega_0^2 + \sum_{i,j} \frac{1}{2} \sigma a_{ij}^2 + \sum_i \frac{1}{2} \sigma b_i^2 \\ \leq & -aV + C \end{aligned} \quad (43)$$

$\dot{V} < 0$ όταν $\theta_m > \frac{1}{2}$, $\sigma - \frac{\alpha}{\gamma_{ij}} > 0$ και $-aV + C < 0 \Rightarrow V > \frac{C}{a}$. Άρα η V είναι ομοιόμορφα τελικώς φραγμένη στο σύνολο

$$E = \{V : V \leq \frac{C}{a}\} \quad (44)$$

Δηλαδή $\exists T_f$ τέτοιο ώστε $V(t) \leq \bar{V}$, $\forall t \geq T_f$ επομένως $V \in \mathcal{L}_\infty$ και άρα $e_i, \tilde{a}_{ij}, \tilde{b}_i \in \mathcal{L}_\infty$, $i, j = 1, 2$.

Για τα πειράματα μας θα χρησιμοποιήσουμε και μια ακόμα τροποποίηση, την ϵ -τροποποίηση. Σύμφωνα με την ϵ -τροποποίηση η σχεδίαση μας γίνεται

$$\dot{\hat{a}}_{ij} = \gamma_{ij} e_i x_j - \gamma_{ij} v_0 |e_i| \hat{a}_{ij}, i, j = 1, 2 \quad (45)$$

$$\dot{\hat{b}}_i = \mu_i e_i u - \mu_i v_0 |e_i| \hat{b}_i, i = 1, 2 \quad (46)$$

όπου v_0 σχεδιαστική παράμετρος. Για την απόδειξη της ευστάθειας θα σπάσουμε το σύστημα σε 2 υποοσυστήματα. Ενδεικτικά δείχνουμε την ευστάθεια για το ένα και η απόδειξη είναι ίδια και στο δεύτερο υποσύστημα. Για απλότητα θεωρούμε $\gamma_{11} = \gamma_{12} = \mu_1 = 1$. Ξεκινάμε παίρνοντας την συνάρτηση Lyapunov

$$V(t) = \frac{1}{2} e_1^2 + \frac{1}{2} \tilde{a}_{11}^2 + \frac{1}{2} \tilde{a}_{12}^2 + \frac{1}{2} \tilde{b}_1^2 \quad (47)$$

Παραγωγίζουμε ως προς χρόνο και αντικαθιστούμε τις παραγώγους $\dot{e}_1, \dot{\tilde{a}}_{11}, \dot{\tilde{a}}_{12}, \dot{\tilde{b}}_1$ και παίρνουμε

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\theta_m e_1^2 - e_1 \tilde{a}_{11} x_1 - e_1 \tilde{a}_{12} x_2 - e_1 \tilde{b}_1 u + \tilde{a}_{11}(e_1 x_1 - v_0 |e_1| \hat{a}_{11}) + \tilde{a}_{12}(e_1 x_2 - v_0 |e_1| \hat{a}_{12}) \\ &\quad + \tilde{b}_1(e_1 u - v_0 |e_1| \hat{b}_1) + e_1 \omega_1 \\ &= -\theta_m e_1^2 - v_0 |e_1| \tilde{a}_{11} \hat{a}_{11} - v_0 |e_1| \tilde{a}_{12} \hat{a}_{12} - v_0 |e_1| \tilde{b}_1 \hat{b}_1 + e_1 \omega_1 \\ &= -\theta_m e_1^2 - v_0 |e_1| \tilde{a}_{11}^2 - v_0 |e_1| \tilde{a}_{12}^2 - v_0 |e_1| \tilde{b}_1^2 - v_0 |e_1| \tilde{a}_{11} a_{11} - v_0 |e_1| \tilde{a}_{12} a_{12} - v_0 |e_1| \tilde{b}_1 b_1 + e_1 \omega_1 \\ &\leq -\theta_m e_1^2 - \frac{1}{2} v_0 |e_1| \tilde{a}_{11}^2 - \frac{1}{2} v_0 |e_1| \tilde{a}_{12}^2 - \frac{1}{2} v_0 |e_1| \tilde{b}_1^2 + \frac{1}{2} v_0 |e_1| a_{11}^2 + \frac{1}{2} v_0 |e_1| a_{12}^2 + \frac{1}{2} v_0 |e_1| b_1^2 + |e_1| \omega_0 \\ &\leq -|e_1|(\theta_m |e_1| + \frac{1}{2} v_0 \tilde{a}_{11}^2 + \frac{1}{2} v_0 \tilde{a}_{12}^2 + \frac{1}{2} v_0 \tilde{b}_1^2 - \frac{1}{2} v_0 a_{11}^2 - \frac{1}{2} v_0 a_{12}^2 - \frac{1}{2} v_0 b_1^2 - \omega_0) \\ &= -|e_1|(\theta_m |e_1| - \frac{1}{2} v_0 e_1^2 + \underbrace{\frac{1}{2} v_0 e_1^2 + \frac{1}{2} v_0 \tilde{a}_{11}^2 + \frac{1}{2} v_0 \tilde{a}_{12}^2 + \frac{1}{2} v_0 \tilde{b}_1^2}_{v_0 V} - \underbrace{\frac{1}{2} v_0 a_{11}^2 - \frac{1}{2} v_0 a_{12}^2 - \frac{1}{2} v_0 b_1^2 - \omega_0}_{-C}) \\ &= -|e_1| \left(|e_1|(\theta_m - \frac{1}{2} v_0 |e_1|) + v_0 V - C \right) \end{aligned} \quad (48)$$

Η $\dot{V} < 0$ όταν

$$|e_1|(\theta_m - \frac{1}{2} v_0 |e_1|) + v_0 V - C > 0 \quad (49)$$

υποθέτοντας ότι $\theta_m - \frac{1}{2} v_0 |e_1| > 0$ για κατάλληλα θ_m, v_0 τότε αρκεί

$$v_0 V - C > 0 \Rightarrow V > \frac{C}{v_0} \quad (50)$$

Οπότε η V είναι ομοιόμορφα τελικώς φραγμένη στο σύνολο

$$E = \{V : V \leq C/v_0\} \quad (51)$$

Άρα $\exists T_f$ τέτοιο ώστε $0 \leq V(t) \leq \bar{V}$, $\forall t \geq T_f$ άρα $V \in \mathcal{L}_\infty \Rightarrow e_1, \tilde{a}_{11}, \tilde{a}_{12}, \tilde{b}_1 \in \mathcal{L}_\infty$

1.2.2 Πειραματικά Αποτελέσματα

Για τις προσομοιώσεις θα πρέπει αρχικά να μοντελοποιήσουμε κατάλληλα το $\omega(t)$. Θα μελετήσουμε τις εξής δύο περιπτώσεις

$$1. \omega(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \omega_0 \mathbf{1}, \mathbf{1} = [1 \ 1] \in \mathbb{R}^2$$

$$2. \omega(t) = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \omega_0 \sin(kt) \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \omega_0 \cos(kt) \right]^T \text{ με } k \text{ μια χαμηλή συχνότητα}$$

Και στις δύο περιπτώσεις ισχύει $\|\omega(t)\| \leq \omega_0$. Οπότε αρκεί να επιλέξουμε κατάλληλη τιμή για το ω_0 . Από το ερώτημα 1 φαίνεται πως για την είσοδο $u(t) = 2.5 \sin(t) + 2 \sin(2t)$ έξοδος του συστήματος παίρνει σχετικά μικρές τιμές με μέγιστη τιμή περίπου 0.25. Οπότε θα επιλέξουμε ενα κατάλληλου πλάτους ω_0 . Οι επιλογές μας είναι 0.0025, 0.0125, 0.025 και 0.15. Θα δώσουμε συγκριτικά τα αποτελέσματα για τις 2 τροποποιήσεις (e και σ) και για τις δύο περιπτώσεις εισόδων και για τις 4 περιπτώσεις ω_0 .

Για τις προσομοιώσεις που ακολουθούν, χρησιμοποιήθηκαν οι παράμετροι

1. σ -τροποποίηση

$$\Gamma_A = \begin{bmatrix} 500 & 100 \\ 278 & 50 \end{bmatrix}$$

$$M_B = \begin{bmatrix} 110 \\ 100 \end{bmatrix}$$

$$\sigma = 10^{-4}$$

$$\theta_m = 100$$

2. ϵ -τροποποίηση

$$\Gamma_A = \begin{bmatrix} 110.4 & 100 \\ 278 & 50 \end{bmatrix}$$

$$M_B = \begin{bmatrix} 110 \\ 100 \end{bmatrix}$$

$$v_0 = 10^{-4}$$

$$\theta_m = 50$$

Όσον αφορά τις αρχικές συνθήκες, είναι ίδιες με το A ερώτημα, δηλαδή

$$\hat{A}(0) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

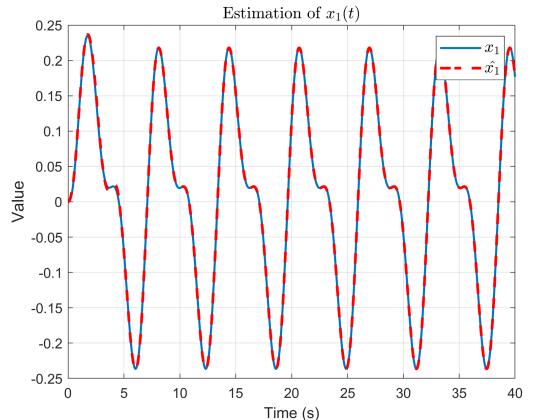
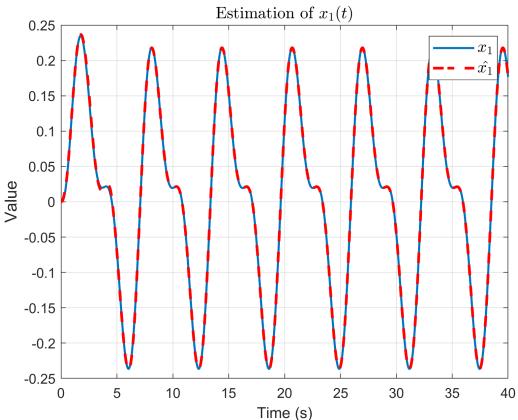
$$\hat{B}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Για την είσοδο εφαρμόσαμε την ίδια είσοδο $u(t) = 2.5 \sin(t) + 2 \sin(2t)$. Ο χρόνος προσομοίωσης είναι $T = 40s$ και το βήμα ολοκλήρωσης $\Delta t = 10^{-4}s$.

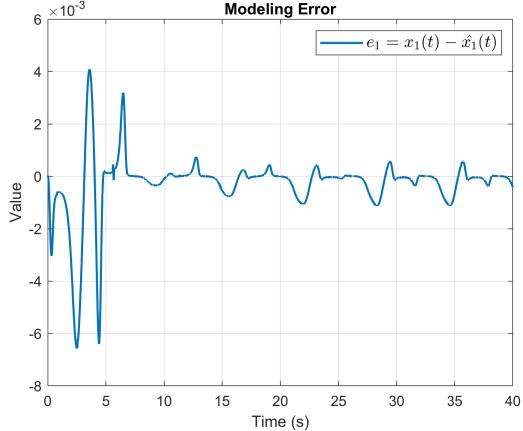
Σταθερό $\omega(t)$ Σταθερό σφάλμα πόλωσης $\omega(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\omega_0 \mathbf{1}$, $\mathbf{1} = [1 \quad 1] \in \mathbb{R}^2$

$$1. \omega_0 = 0.0025$$

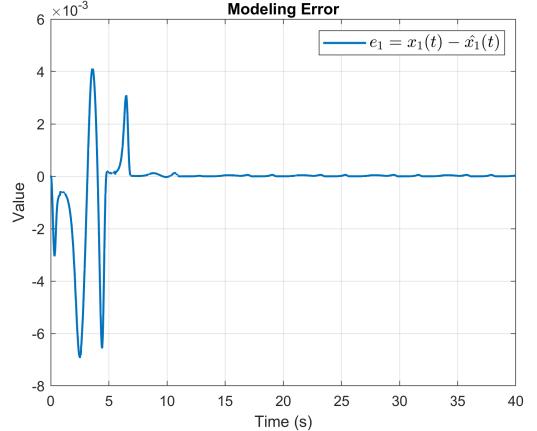
- Σύγκριση αποτελεσμάτων



Σχήμα 4: Σύγκριση εκτίμησης x_1

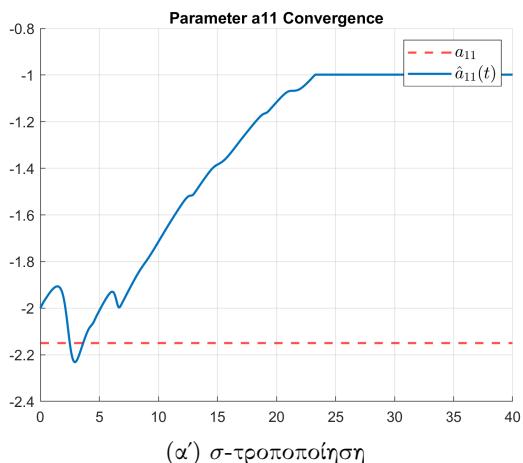


(α') σ -τροποποίηση

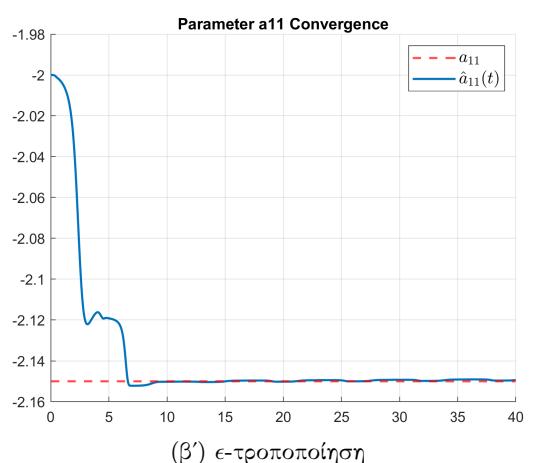


(β') ϵ -τροποποίηση

Σχήμα 5: Σύγκριση σφάλματος μοντελοποίησης e_{x_1}

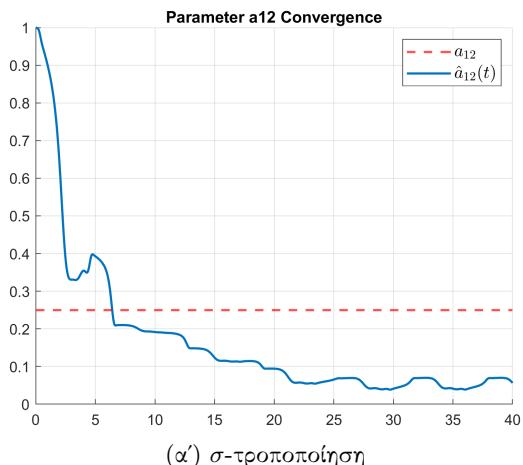


(α') σ -τροποποίηση

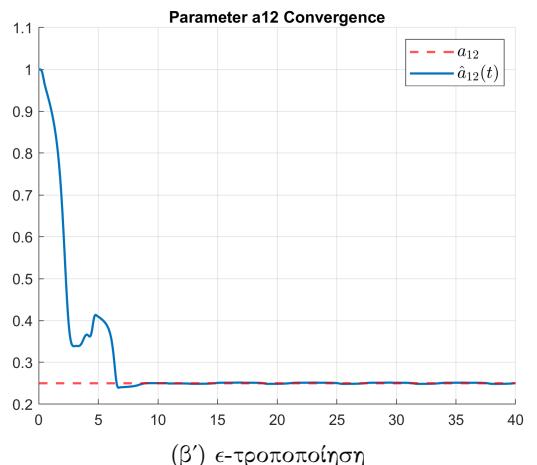


(β') ϵ -τροποποίηση

Σχήμα 6: Σύγκριση παραμέτρου a_{11}

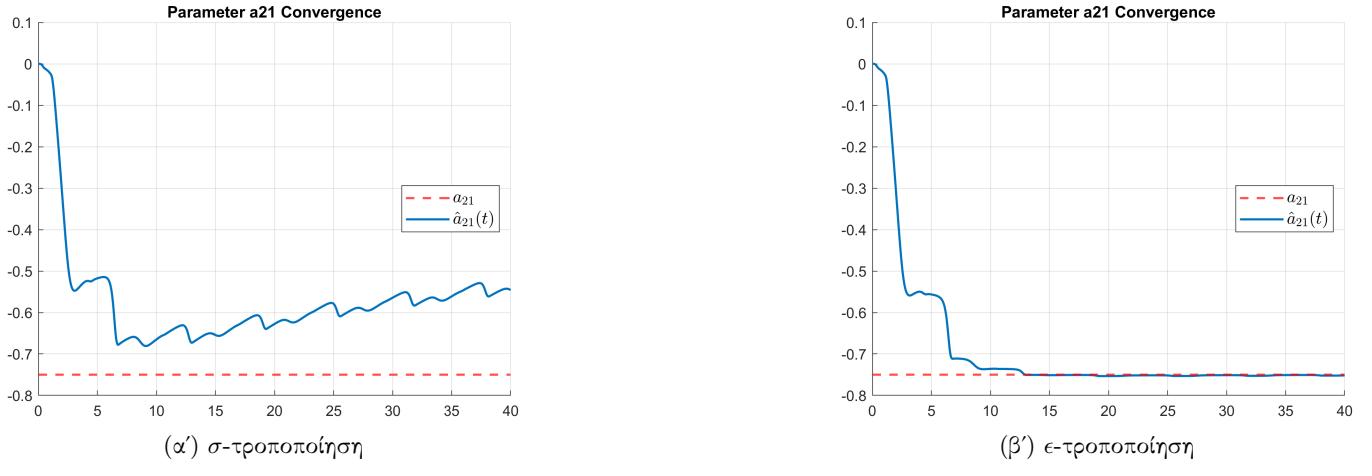


(α') σ -τροποποίηση

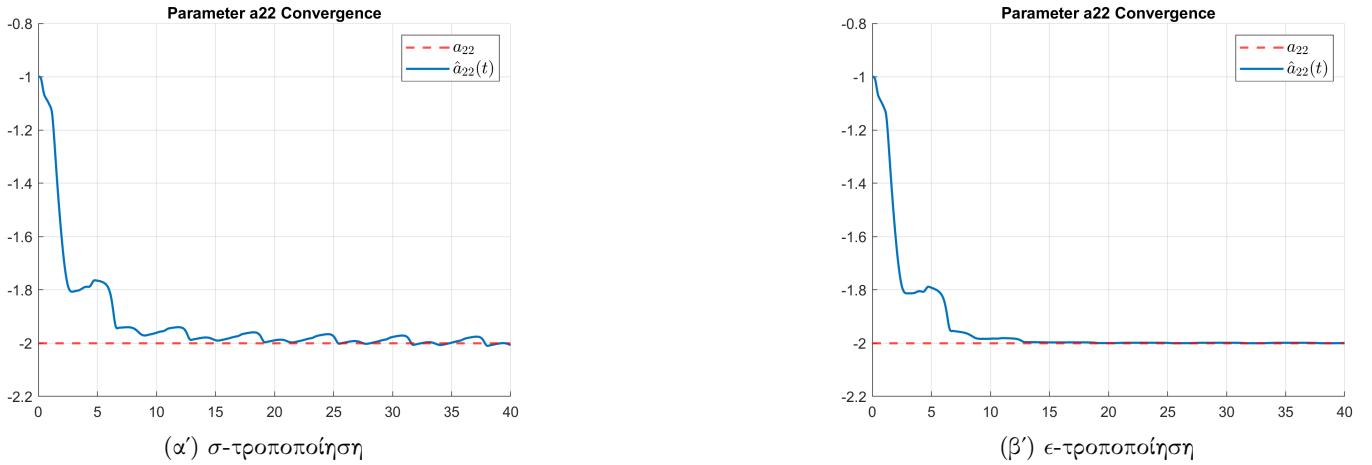


(β') ϵ -τροποποίηση

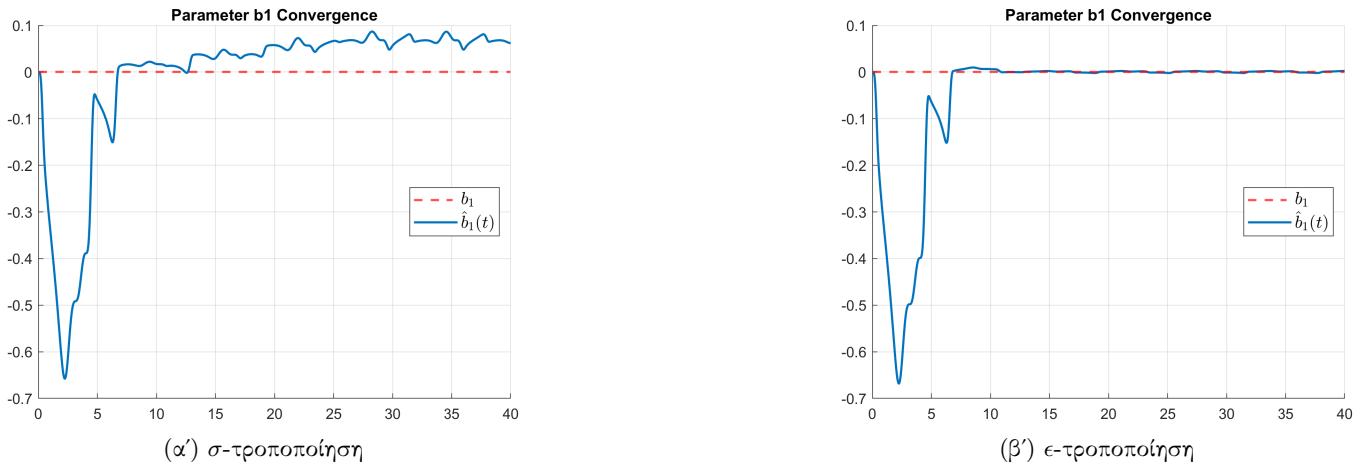
Σχήμα 7: Σύγκριση παραμέτρου a_{12}



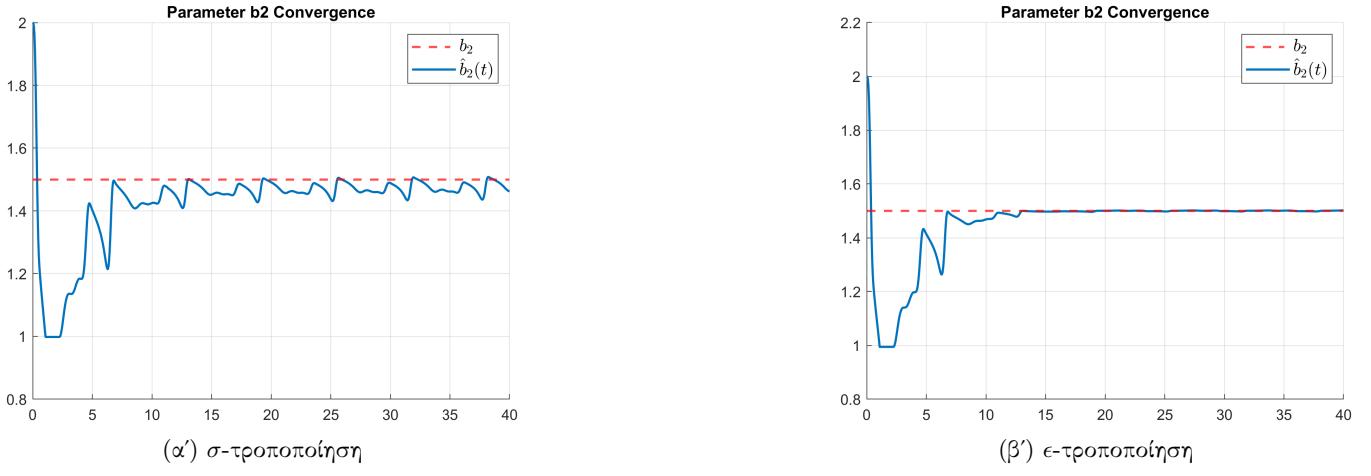
Σχήμα 8: Σύγκριση παραμέτρου a_{21}



Σχήμα 9: Σύγκριση παραμέτρου a_{22}



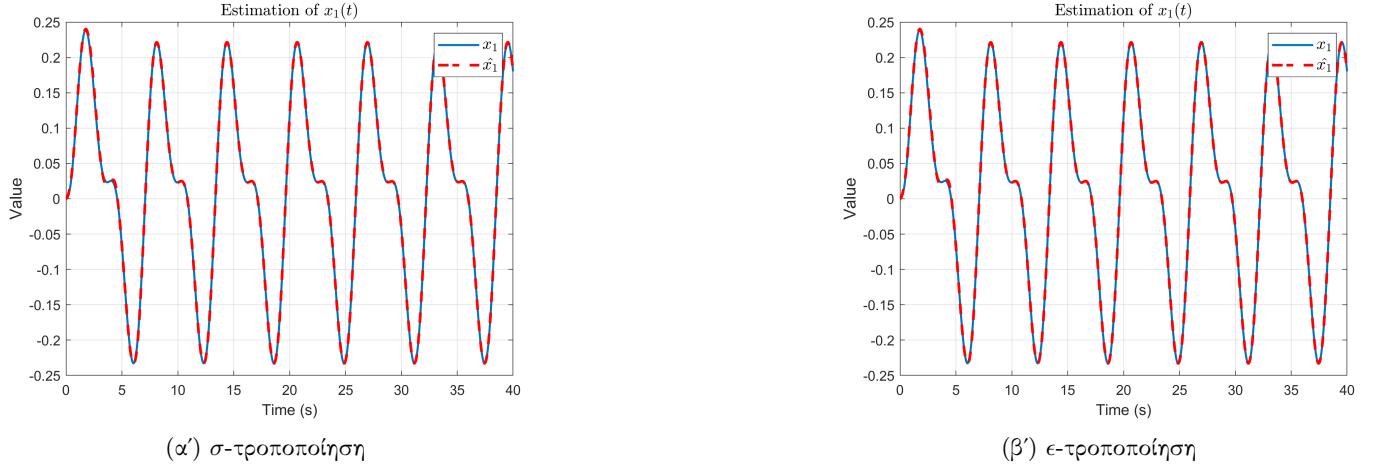
Σχήμα 10: Σύγκριση παραμέτρου b_1



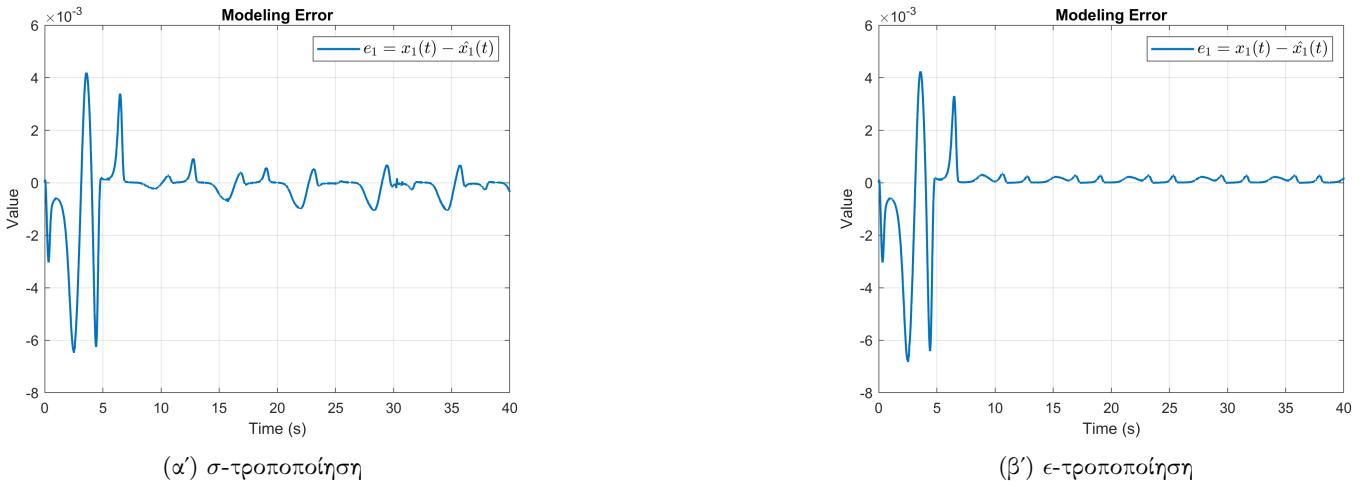
Σχήμα 11: Σύγκριση παραμέτρου b_2

2. $\omega_0 = 0.0125$

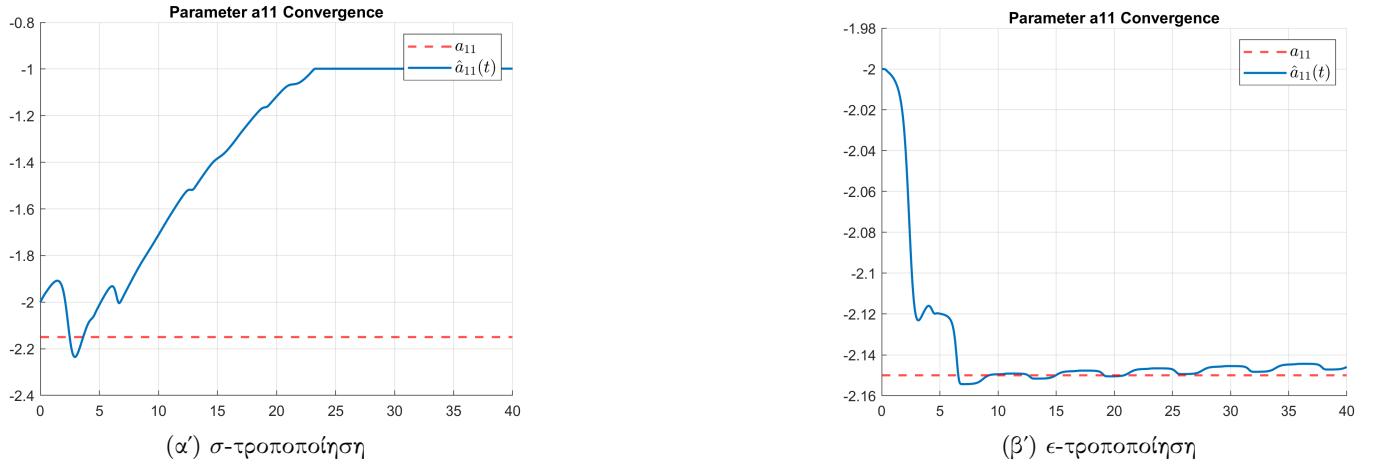
- Σύγκριση αποτελεσμάτων



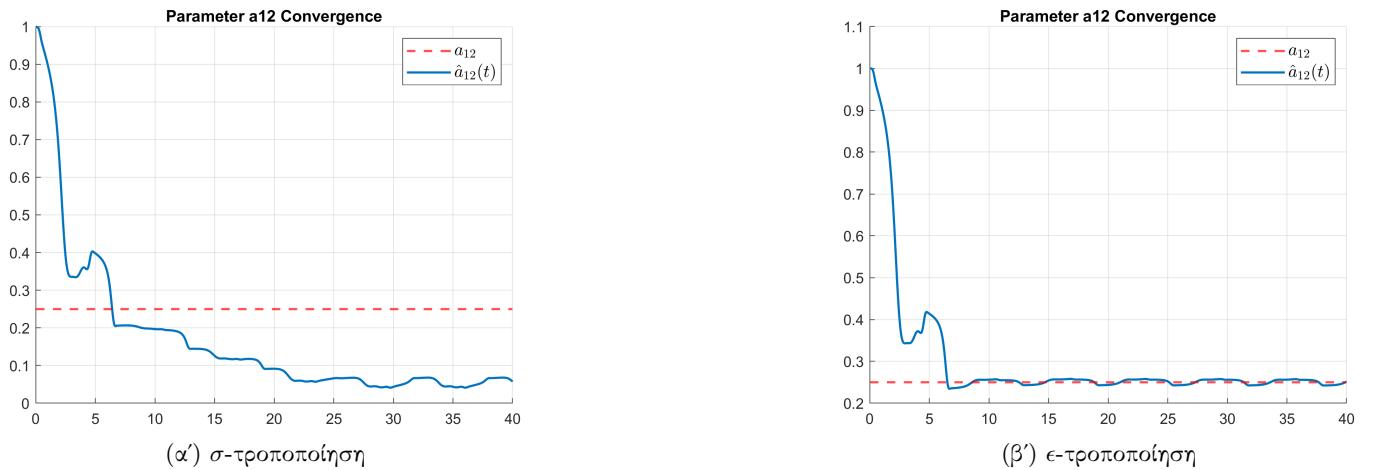
Σχήμα 12: Σύγκριση εκτίμησης x_1



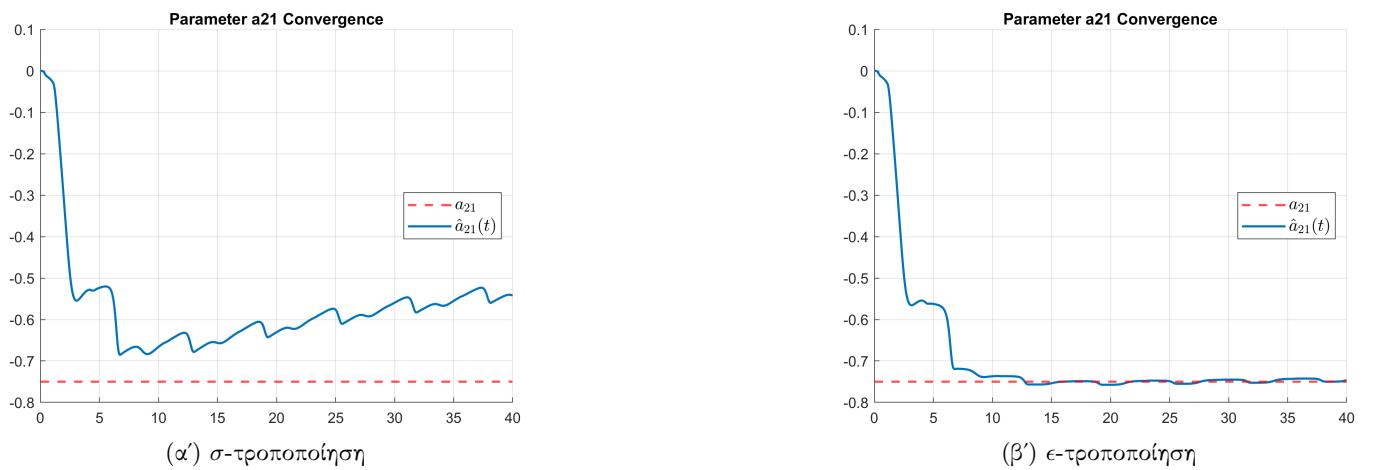
Σχήμα 13: Σύγκριση σφάλματος μοντελοποίησης e_{x_1}



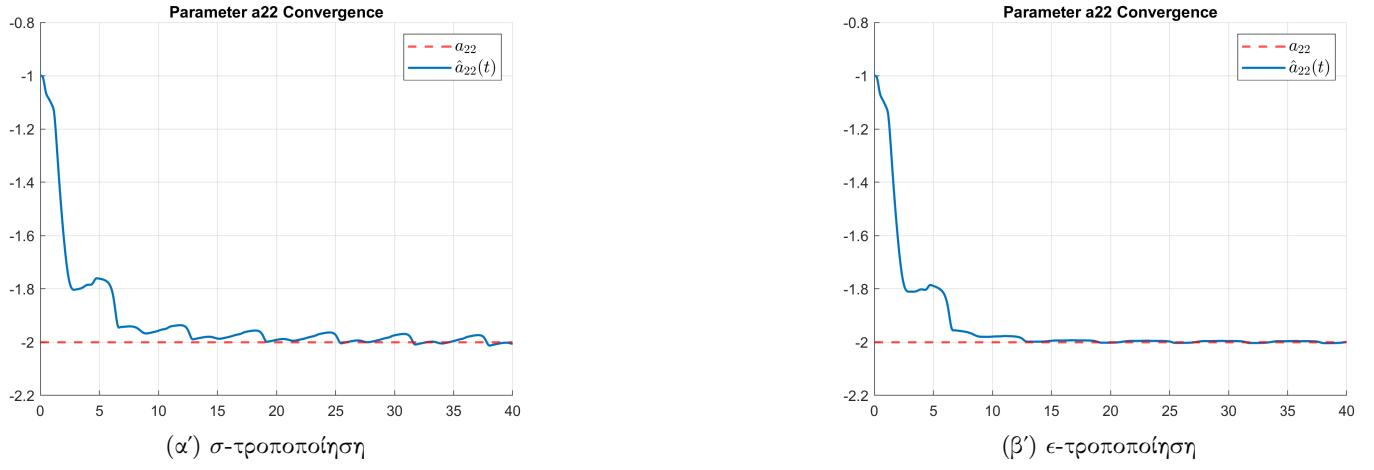
Σχήμα 14: Σύγκριση παραμέτρου a_{11}



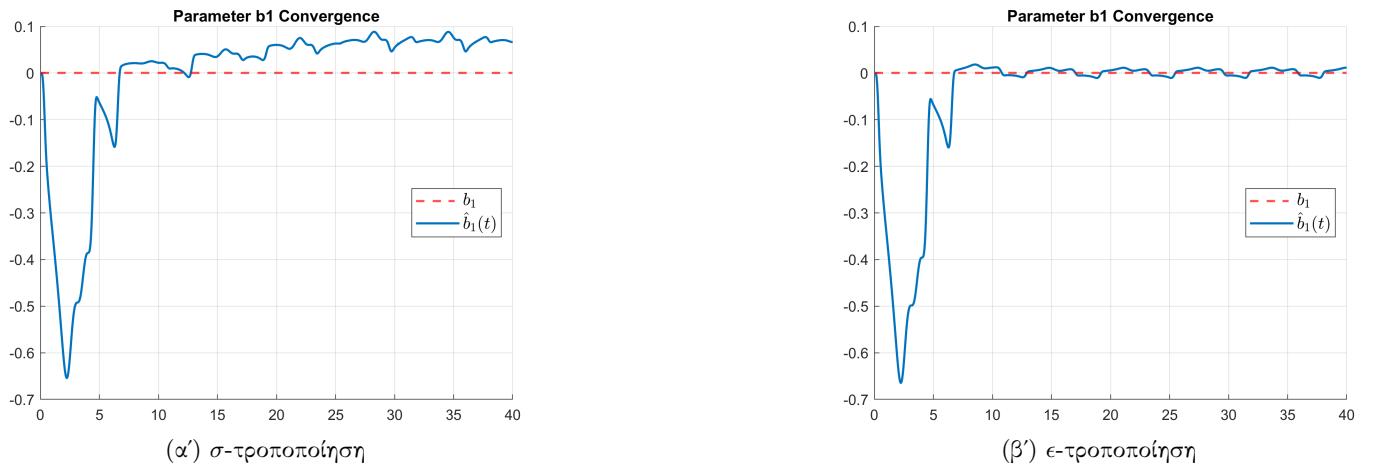
Σχήμα 15: Σύγκριση παραμέτρου a_{12}



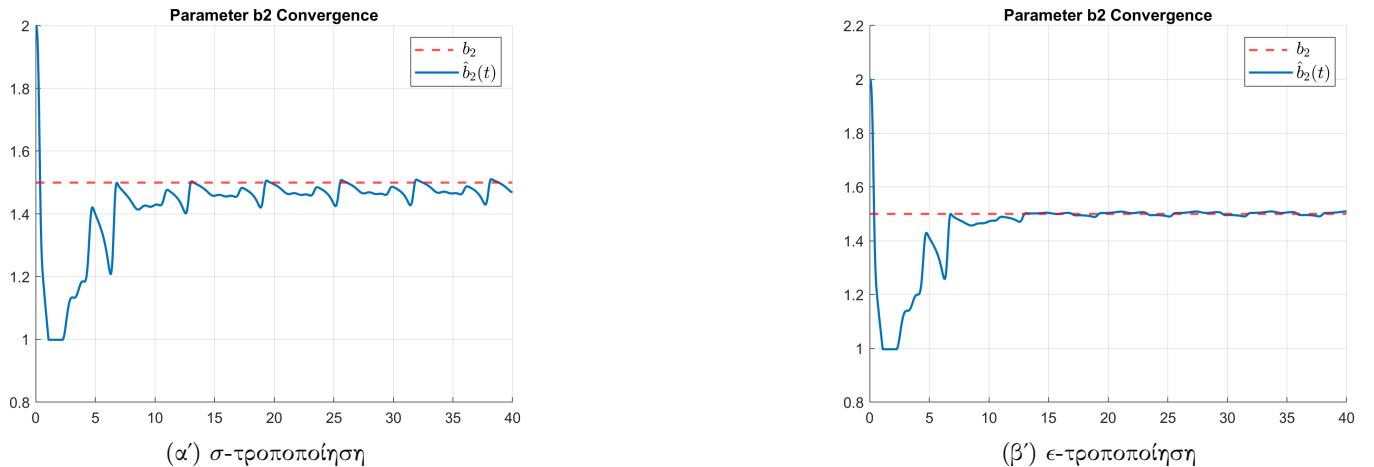
Σχήμα 16: Σύγκριση παραμέτρου a_{21}



Σχήμα 17: Σύγκριση παραμέτρου a_{22}



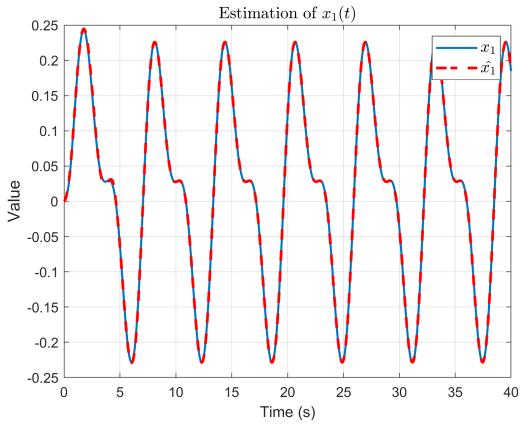
Σχήμα 18: Σύγκριση παραμέτρου b_1



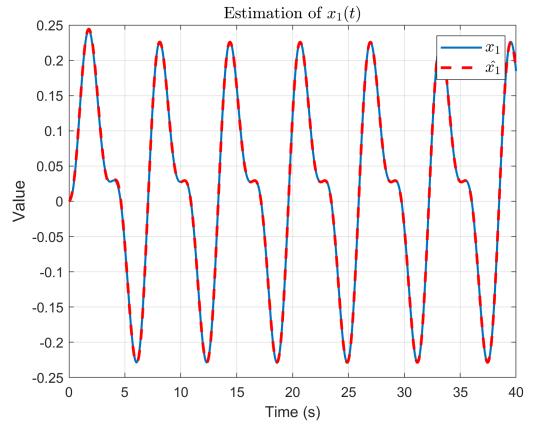
Σχήμα 19: Σύγκριση παραμέτρου b_2

3. $\omega_0 = 0.025$

- Σύγκριση αποτελεσμάτων

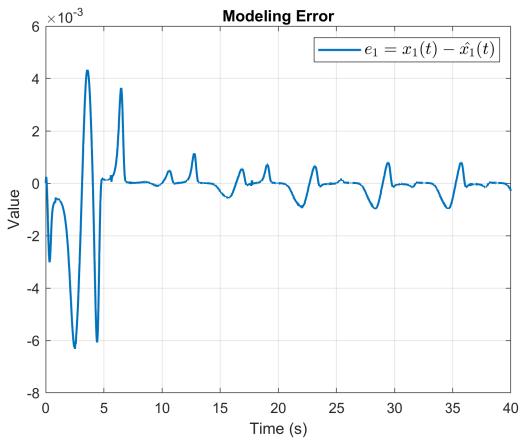


(α') σ -τροποποίηση

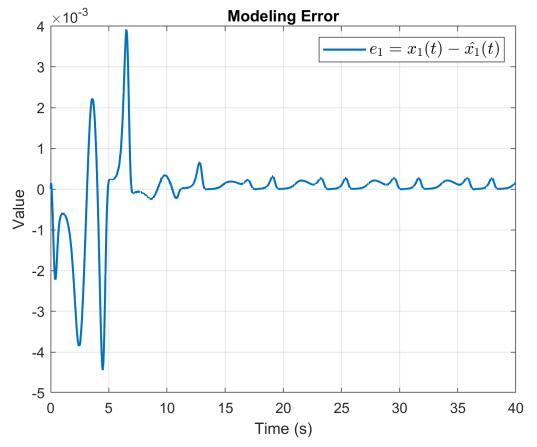


(β') ϵ -τροποποίηση

Σχήμα 20: Σύγκριση εκτίμησης x_1

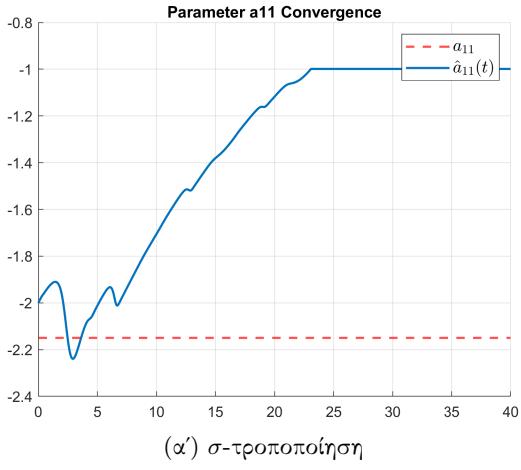


(α') σ -τροποποίηση

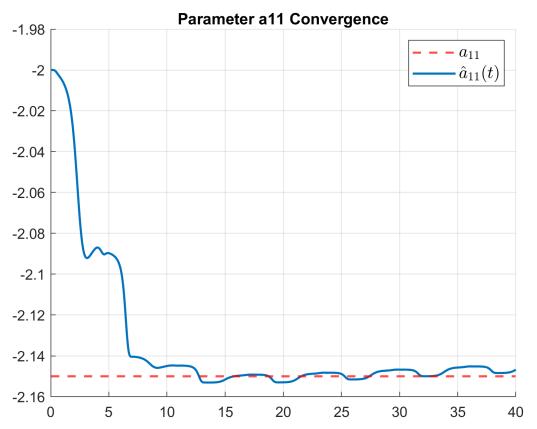


(β') ϵ -τροποποίηση

Σχήμα 21: Σύγκριση σφάλματος μοντελοποίησης e_{x_1}

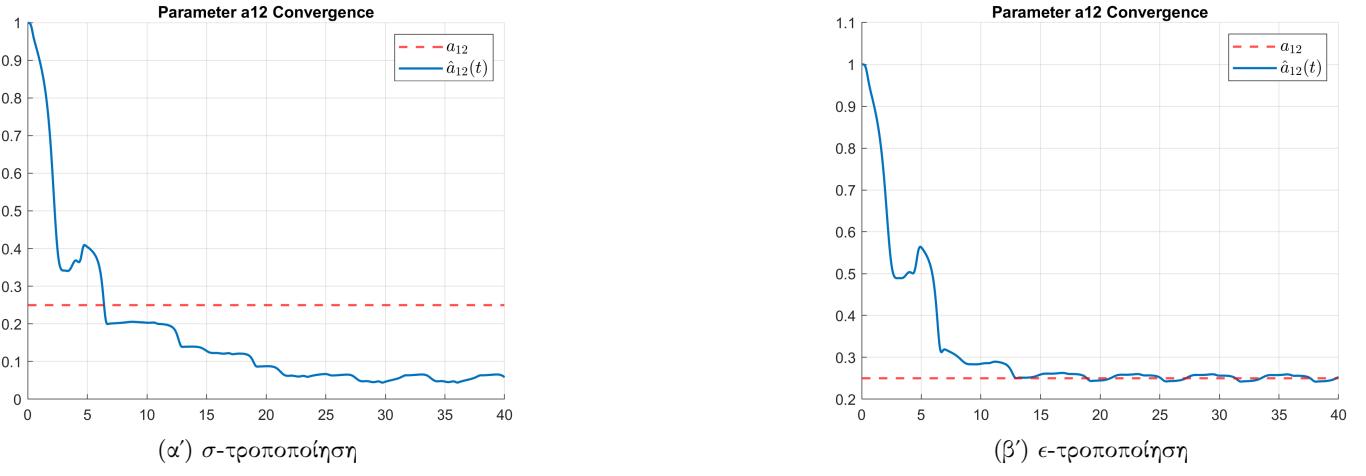


(α') σ -τροποποίηση

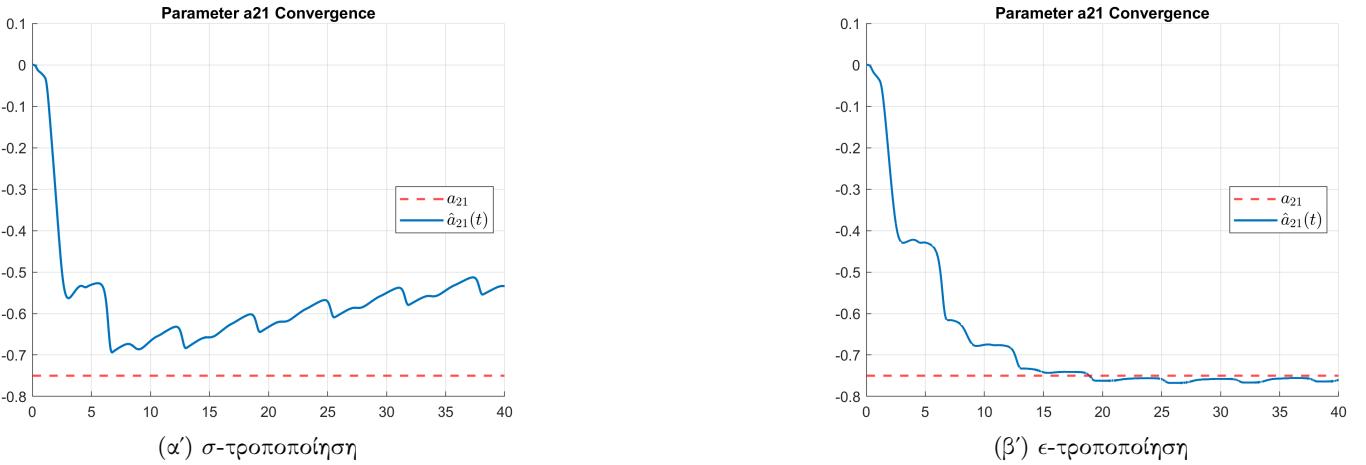


(β') ϵ -τροποποίηση

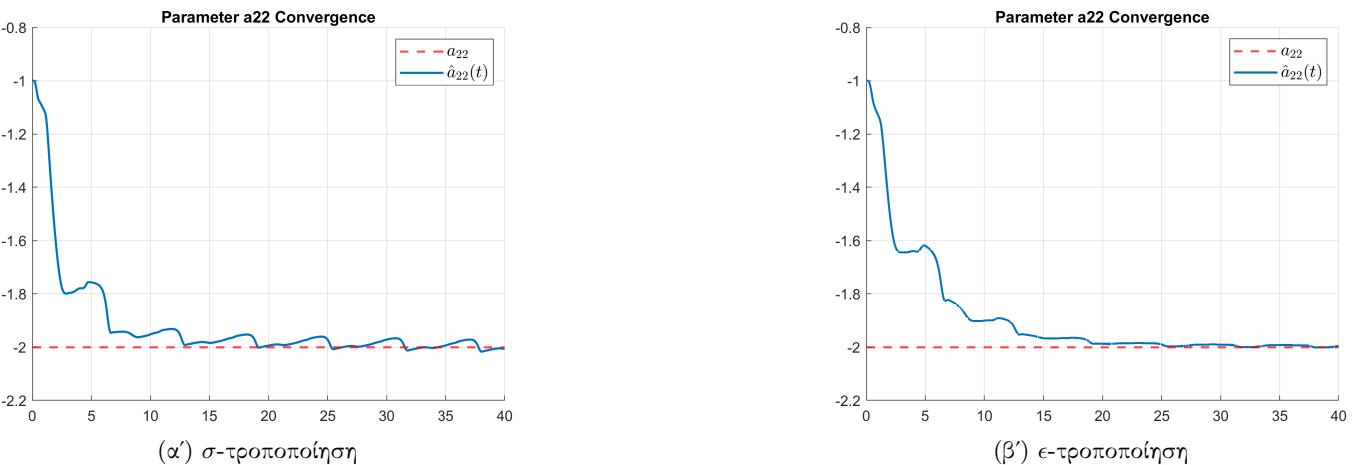
Σχήμα 22: Σύγκριση παραμέτρου a_{11}



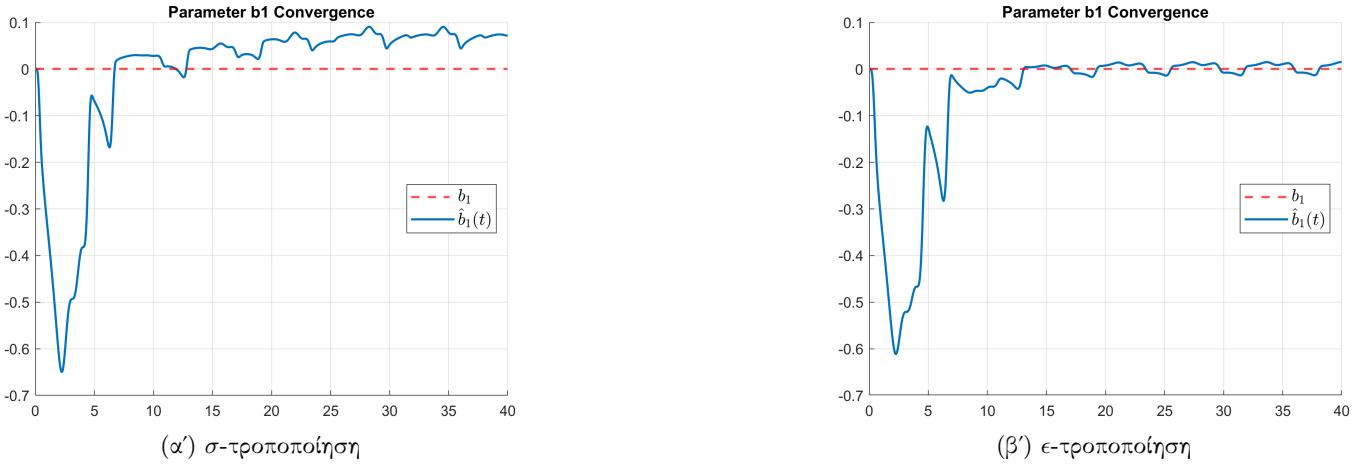
Σχήμα 23: Σύγκριση παραμέτρου a_{12}



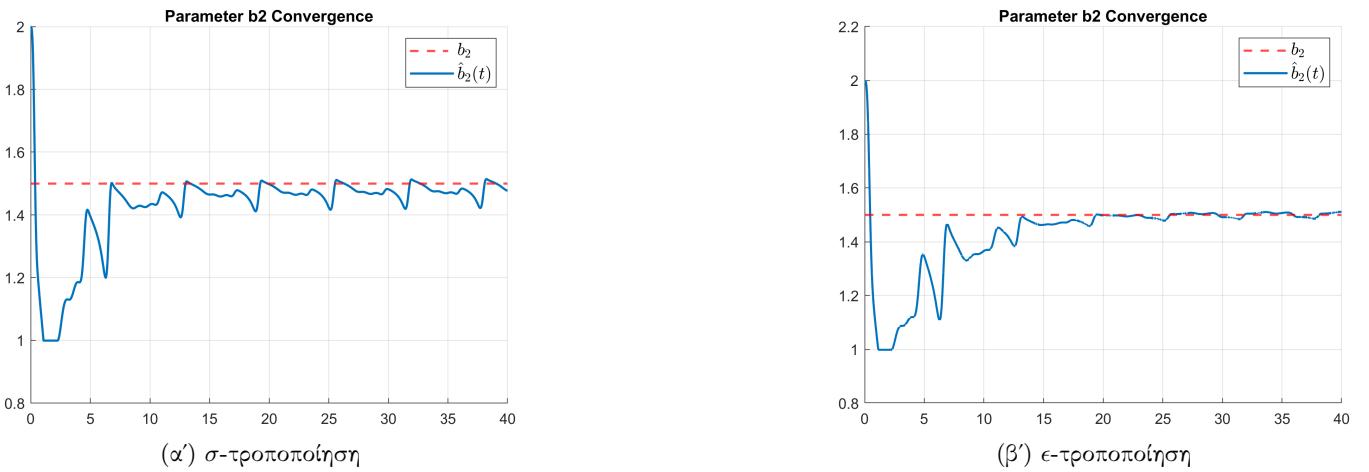
Σχήμα 24: Σύγκριση παραμέτρου a_{21}



Σχήμα 25: Σύγκριση παραμέτρου a_{22}



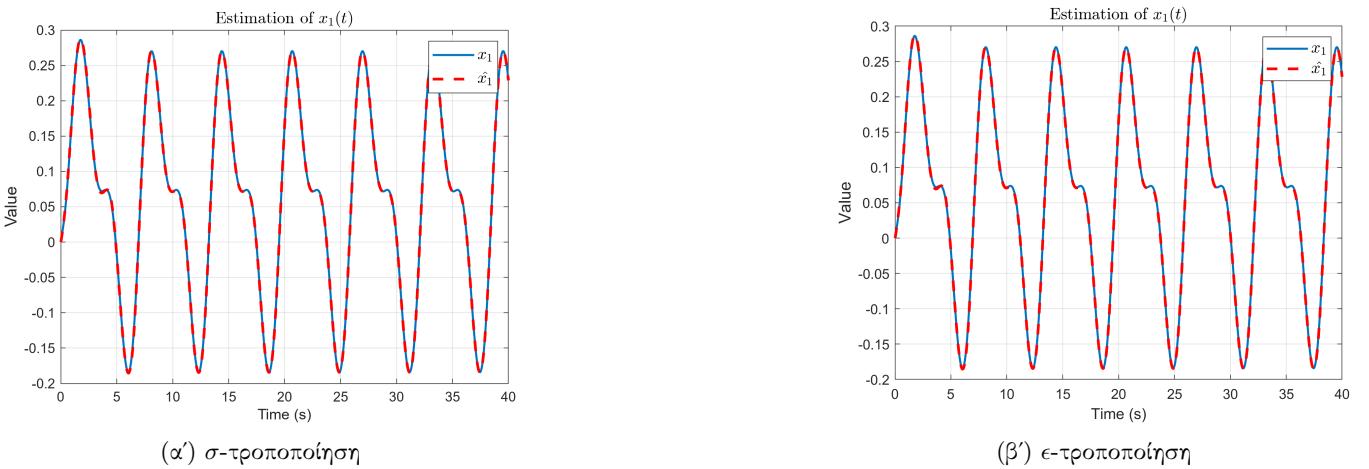
Σχήμα 26: Σύγκριση παραμέτρου b_1



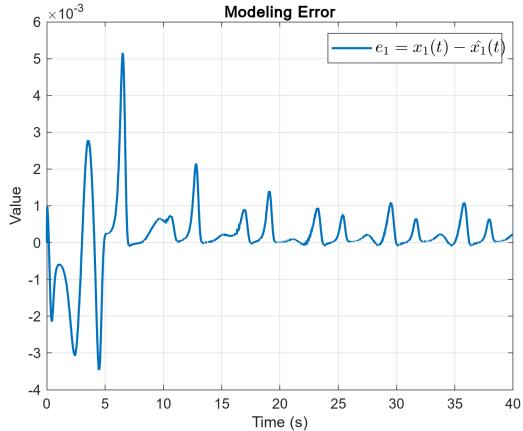
Σχήμα 27: Σύγκριση παραμέτρου b_2

4. $\omega_0 = 0.15$

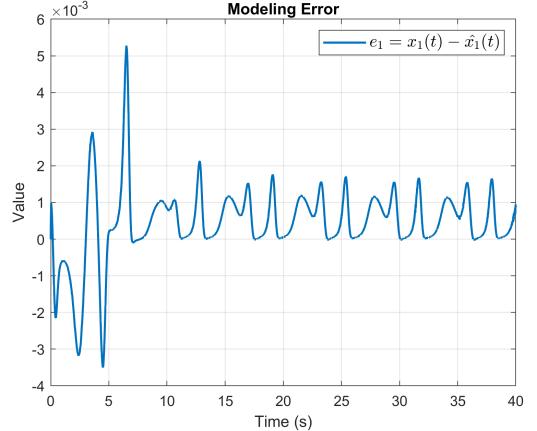
- Σύγκριση αποτελεσμάτων



Σχήμα 28: Σύγκριση εκτίμησης x_1

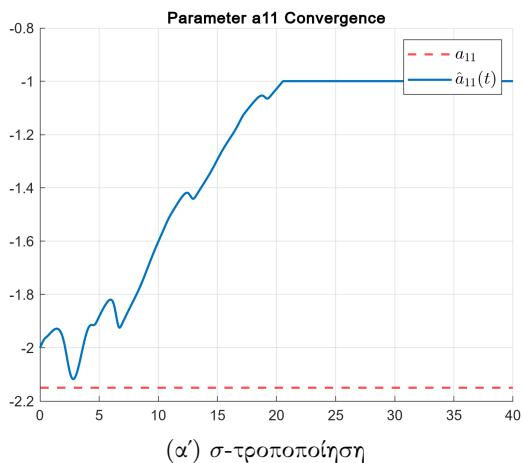


(α') σ -τροποποίηση

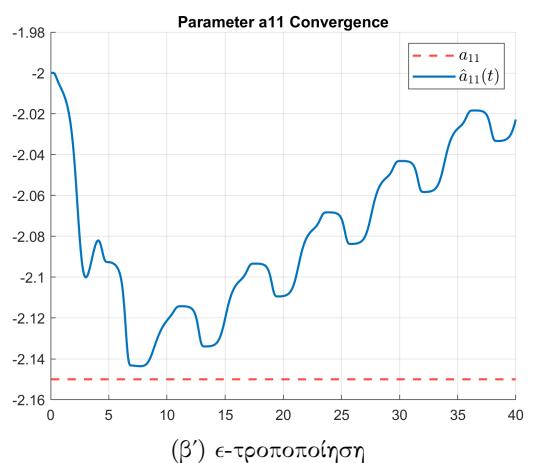


(β') ϵ -τροποποίηση

Σχήμα 29: Σύγκριση σφάλματος μοντελοποίησης e_{x_1}

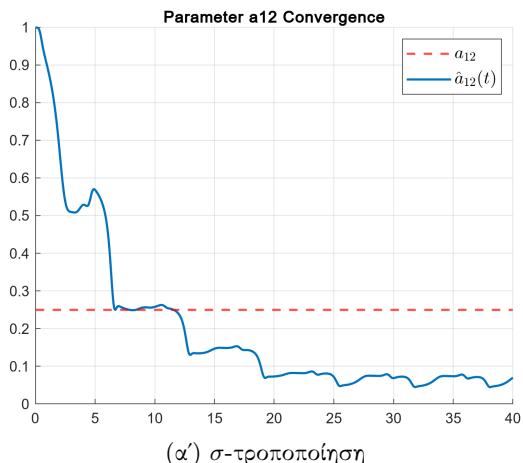


(α') σ -τροποποίηση

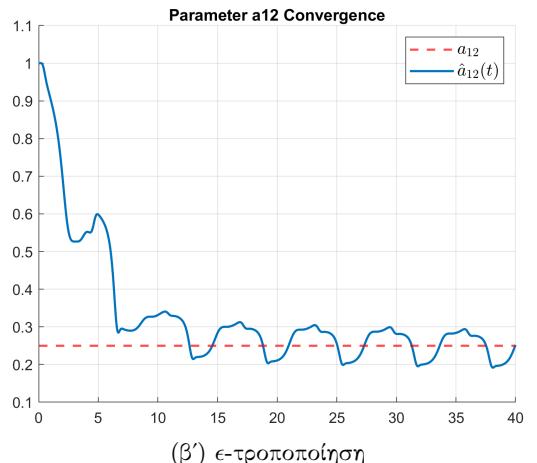


(β') ϵ -τροποποίηση

Σχήμα 30: Σύγκριση παραμέτρου a_{11}

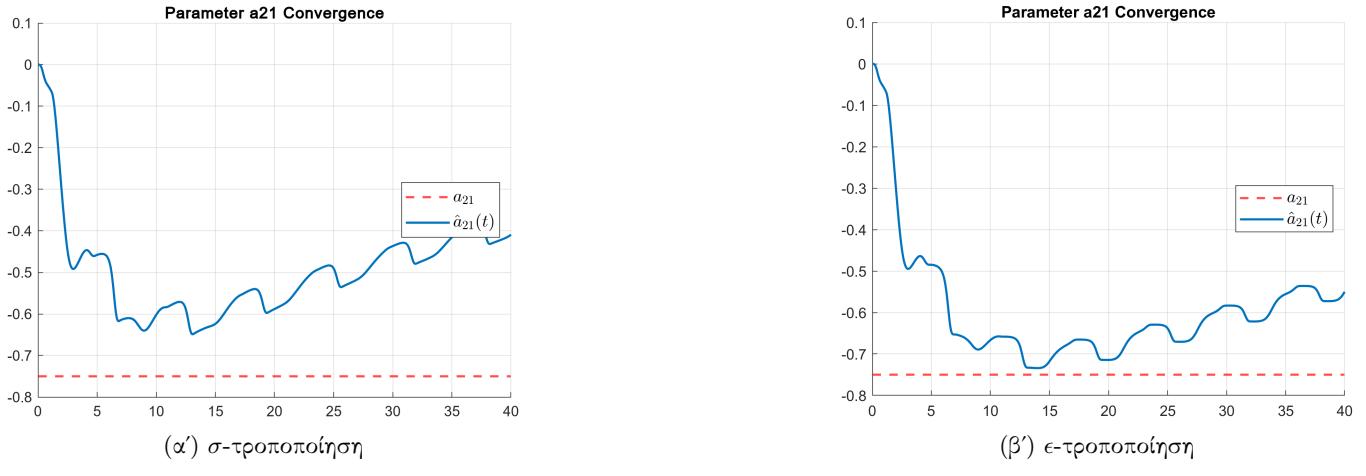


(α') σ -τροποποίηση

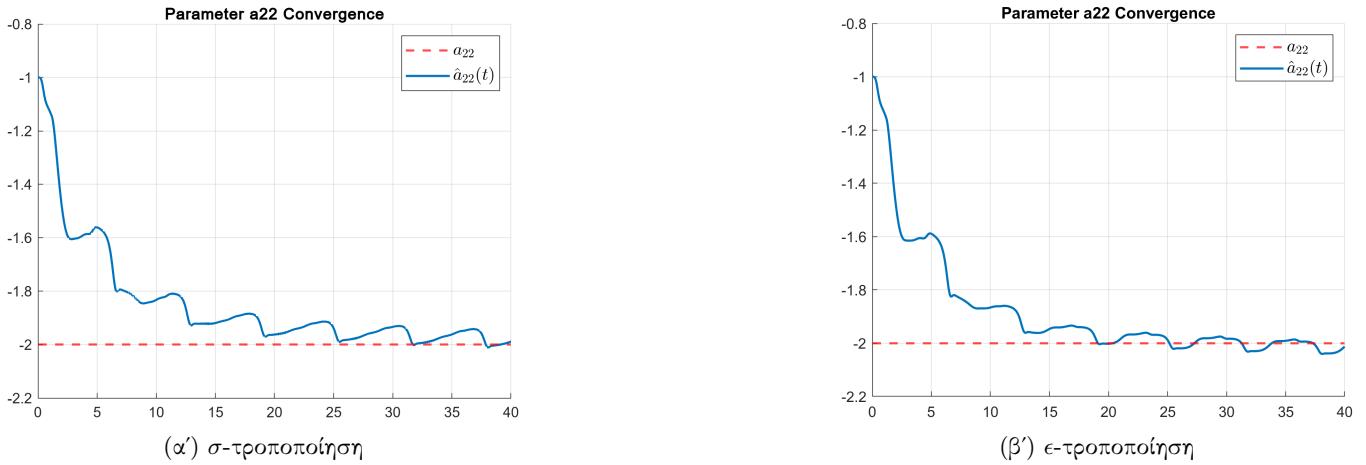


(β') ϵ -τροποποίηση

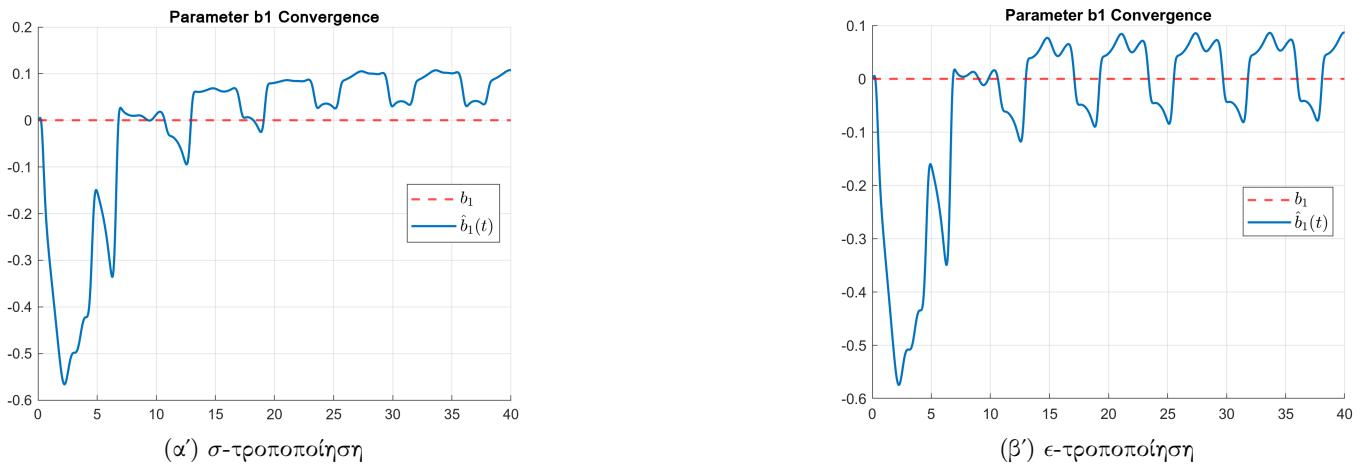
Σχήμα 31: Σύγκριση παραμέτρου a_{12}



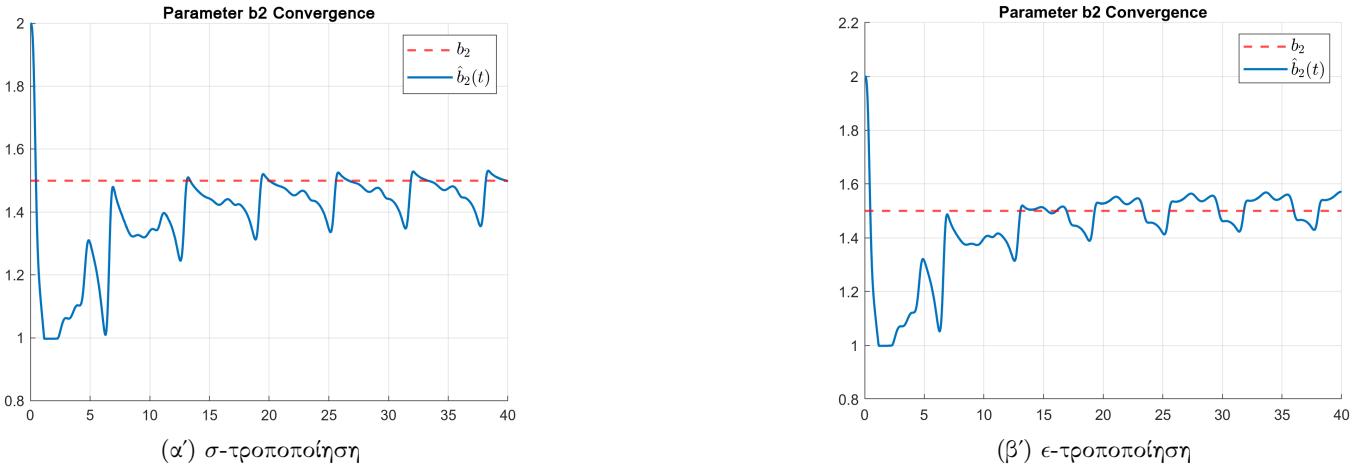
Σχήμα 32: Σύγκριση παραμέτρου a_{21}



Σχήμα 33: Σύγκριση παραμέτρου a_{22}



Σχήμα 34: Σύγκριση παραμέτρου b_1



Σχήμα 35: Σύγκριση παραμέτρου b_2

Γενικές Παρατηρήσεις Γενικά παρατηρούμε ότι:

- Αυξάνοντας την ισχύ του σφάλματος πόλωσης, οι σχεδιάσεις καταφέρνουν να κρατήσουν το σφάλμα μοντελοποίησης σε τάξη 10^{-3} .
- Οι εκτιμήσεις των παραμέτρων με σ -τροποποίηση δεν είναι καλές και μάλιστα δεν είναι ούτε σταθερές, πράγμα που σημαίνει ότι οι παράγωγοι των εκτιμήσεων δεν έχουν συγχλίνει στο 0. Αυτό το αποτέλεσμα λαμβάνουμε ανεξαρτήτως παραμέτρων και πλάτους ω_0 και δείχνει τις αδυναμίες της σ -τροποποίησης.
- Η μέθοδος της ϵ -τροποποίησης παράγει πιο σταθερά και αξιόλογα αποτελέσματα και όσον αφορά το σφάλμα μοντελοποίησης και όσον αφορά την εκτίμηση των παραμέτρων εκτός από την περίπτωσω όπου $\omega_0 = 0.15$ στην οποία και οι δύο σχεδιάσεις δεν καταφέρνουν καλή σύγκλιση των παραμέτρων, ωστόσο τα σφάλματα μοντελοποίησης παραμένουν χαμηλά.
- Στην σταθερή περίπτωση, αν και δεν είναι πολύ εμφανές διότι έχουμε εφαρμόσει μικρό πλάτος σφάλματος, η γραφική παράσταση του x_1 μετατοπίζεται προς τα επάνω.
- Για χαμηλές τιμές ω_0 η ϵ -τροποποίηση καταφέρνει να κρατήσει το σφάλμα εξαιρετικά χαμηλό (σχεδόν 0) και να συγχλίνουν οι παράμετροι στις επιθυμητές τιμές, κάτι που η σ -τροποποίηση δεν κατάφερε ακόμα και για μικρό ω_0 .

Ημιτονοειδές $\omega(t)$ Τώρα το σφάλμα πόλωσης είναι

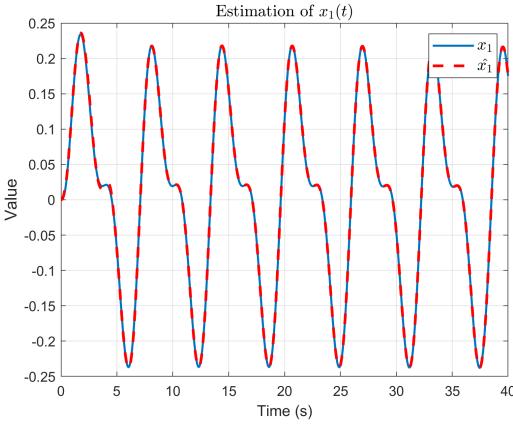
$$\omega(t) = \frac{\omega_0}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sin(0.1t) & \cos(0.1t) \end{bmatrix}^T$$

Θα παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα για την σ -τροποποίηση και την ϵ -τροποποίηση με το ημιτονοειδές σφάλμα πόλωσης.

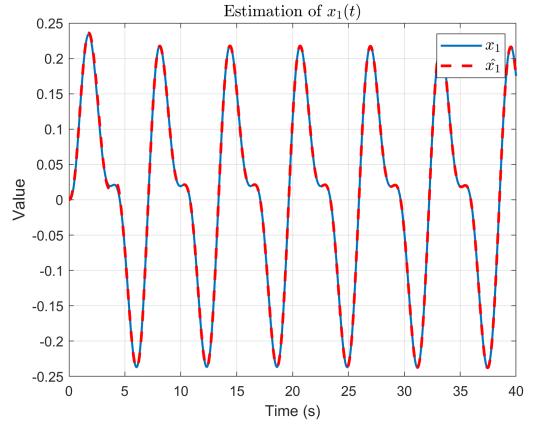
Σταθερό $\omega(t)$ Σταθερό σφάλμα πόλωσης $\omega(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\omega_0\mathbf{1}$, $\mathbf{1} = [1 \ 1] \in \mathbb{R}^2$

$$1. \omega_0 = 0.0025$$

- Σύγκριση αποτελεσμάτων

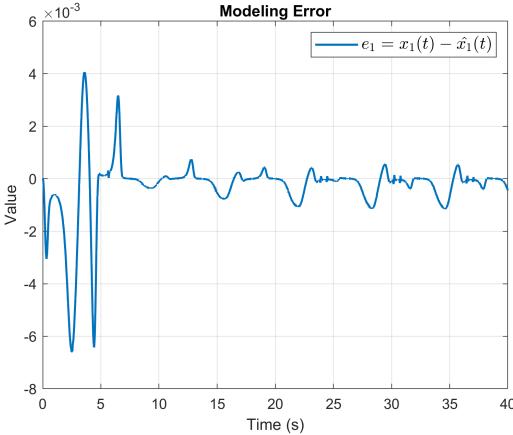


(α') σ -τροποποίηση

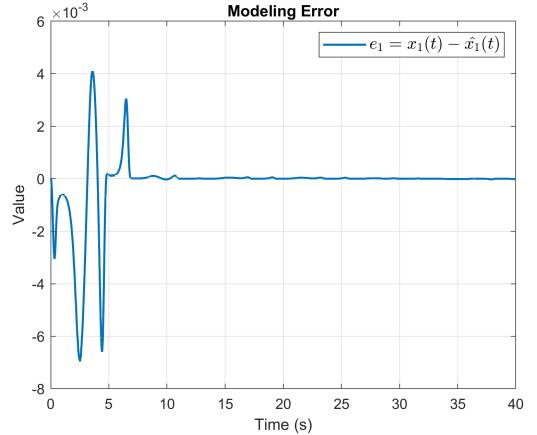


(β') ϵ -τροποποίηση

Σχήμα 36: Σύγκριση εκτίμησης x_1

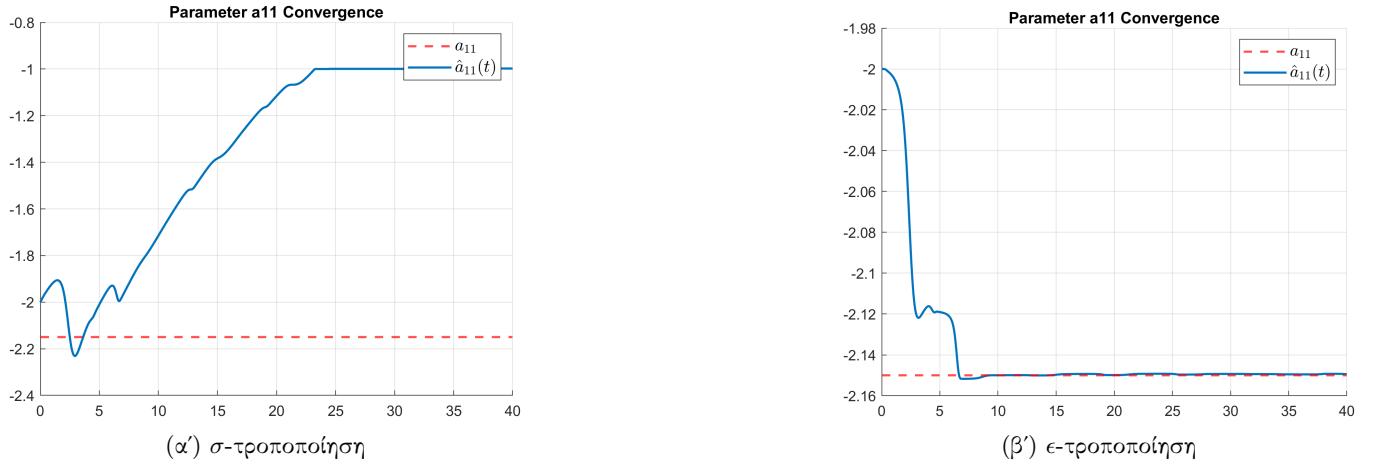


(α') σ -τροποποίηση

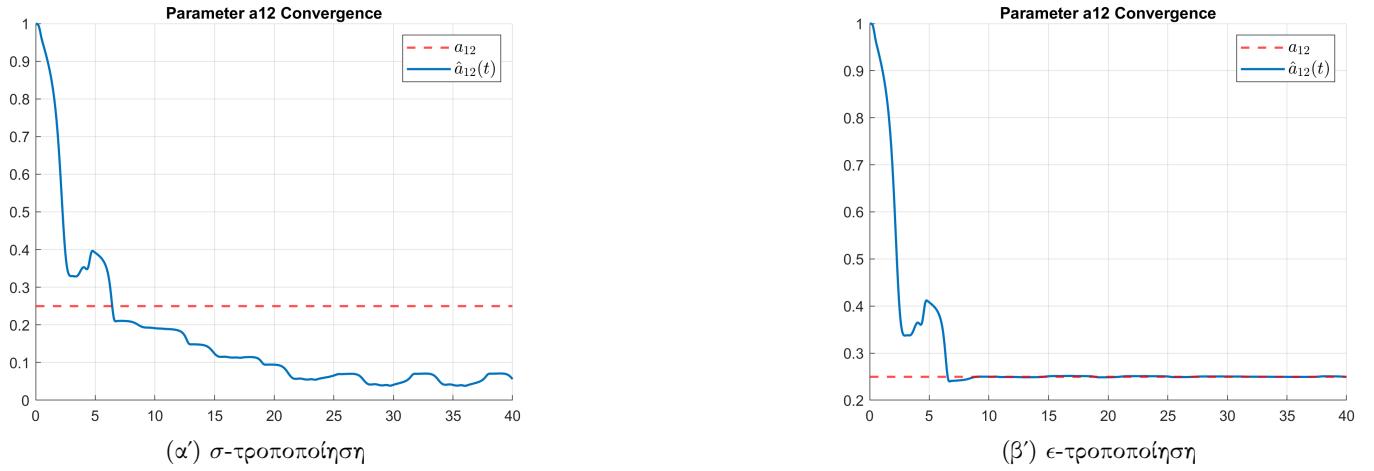


(β') ϵ -τροποποίηση

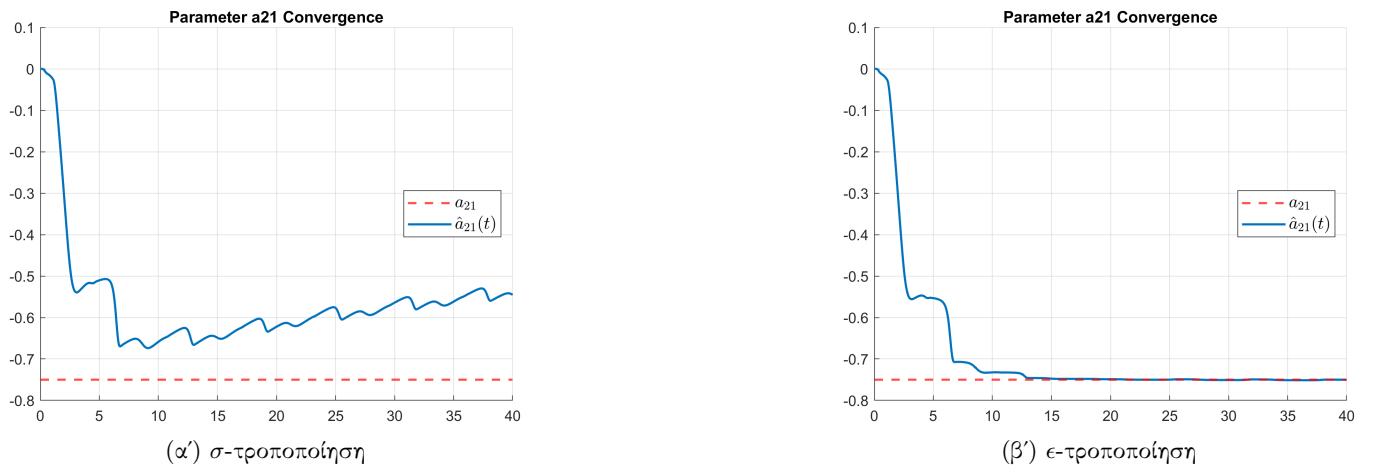
Σχήμα 37: Σύγκριση σφάλματος μοντελοποίησης e_{x_1}



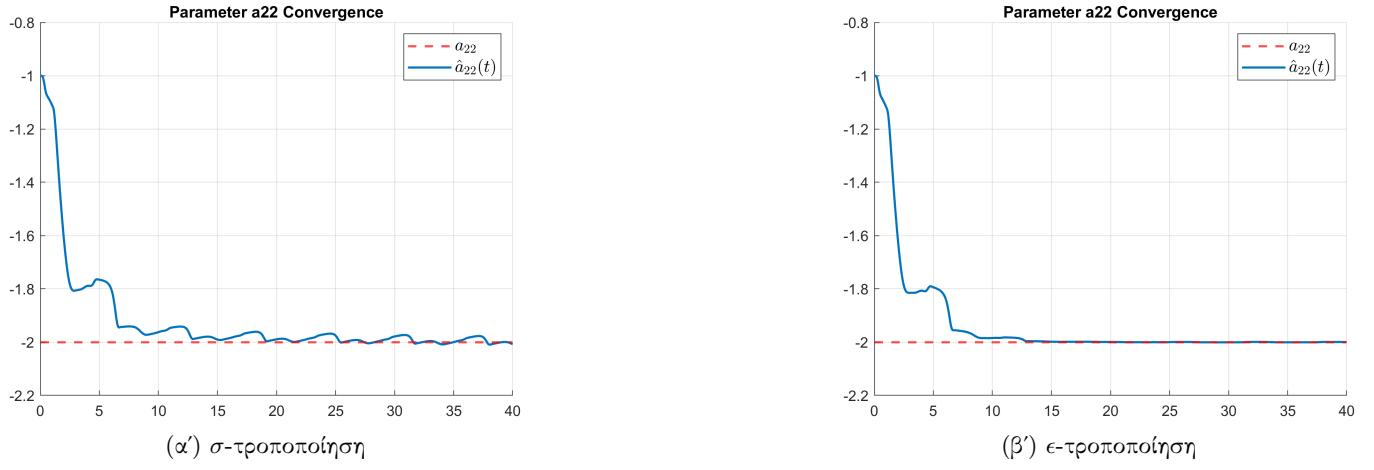
Σχήμα 38: Σύγκριση παραμέτρου a_{11}



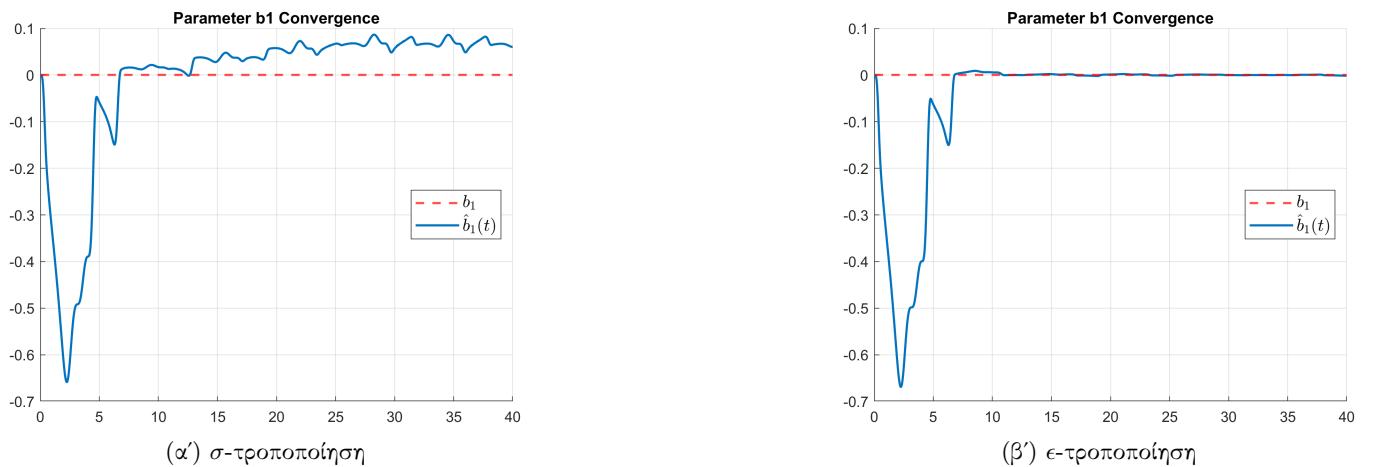
Σχήμα 39: Σύγκριση παραμέτρου a_{12}



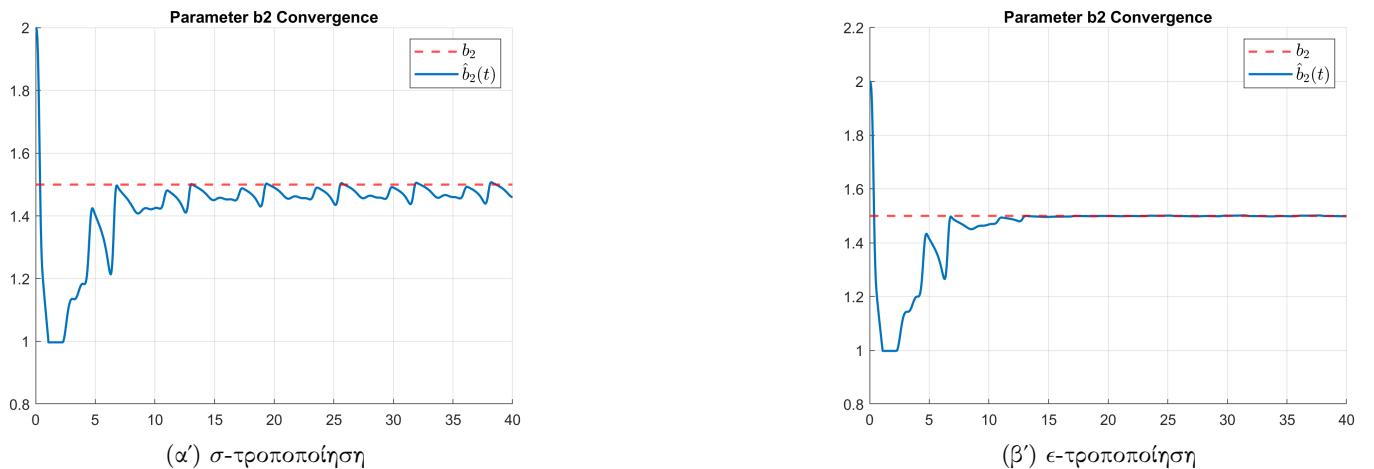
Σχήμα 40: Σύγκριση παραμέτρου a_{21}



Σχήμα 41: Σύγκριση παραμέτρου a_{22}



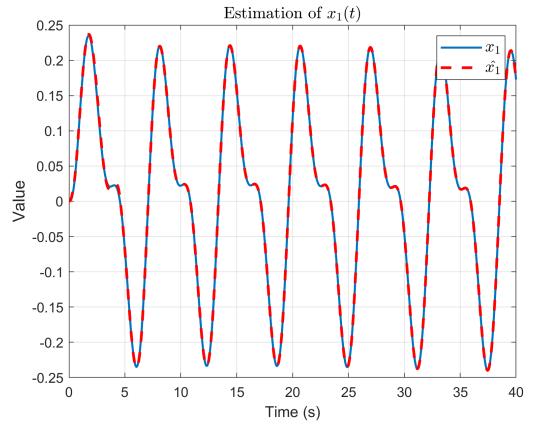
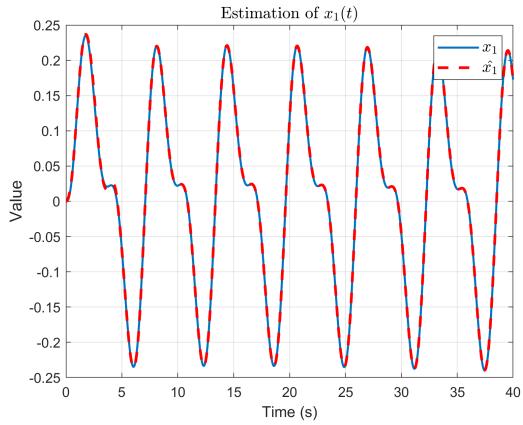
Σχήμα 42: Σύγκριση παραμέτρου b_1



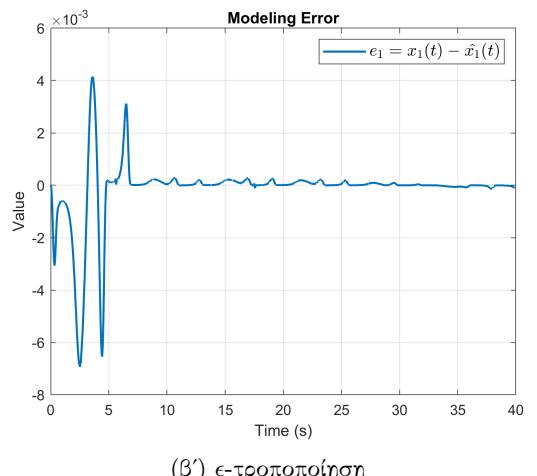
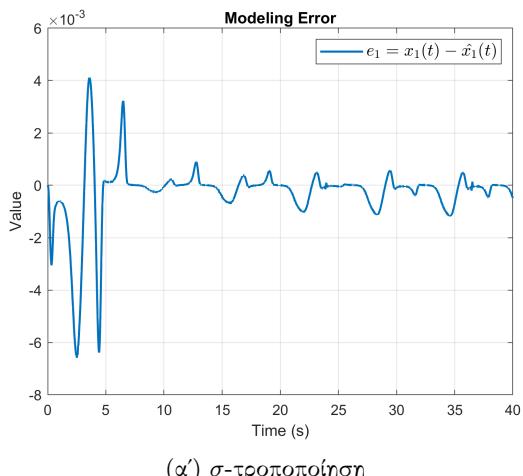
Σχήμα 43: Σύγκριση παραμέτρου b_2

2. $\omega_0 = 0.0125$

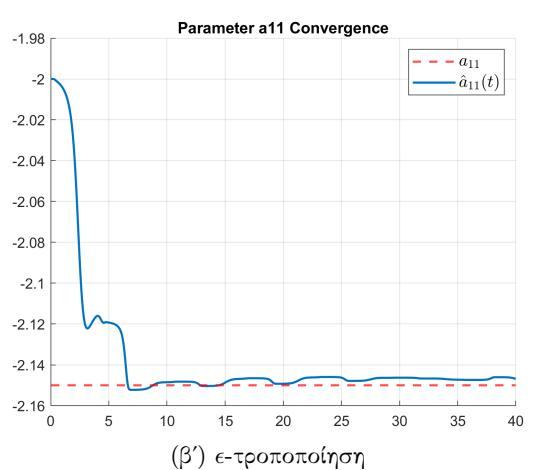
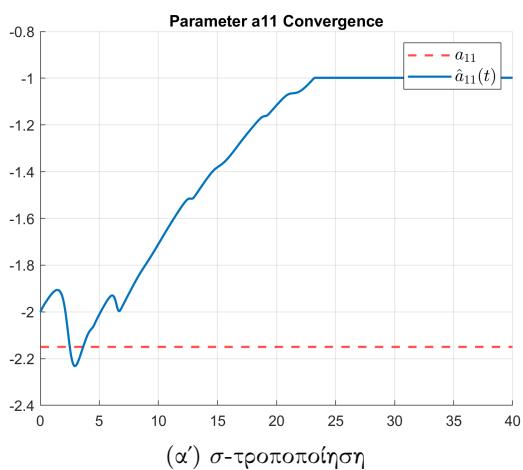
- Σύγκριση αποτελεσμάτων



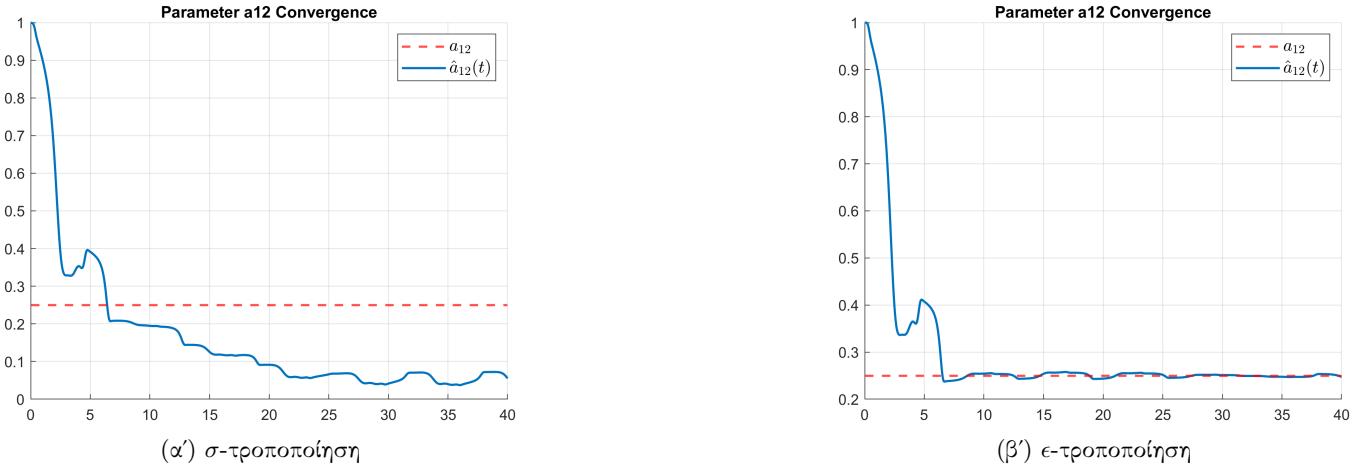
Σχήμα 44: Σύγκριση εκτίμησης x_1



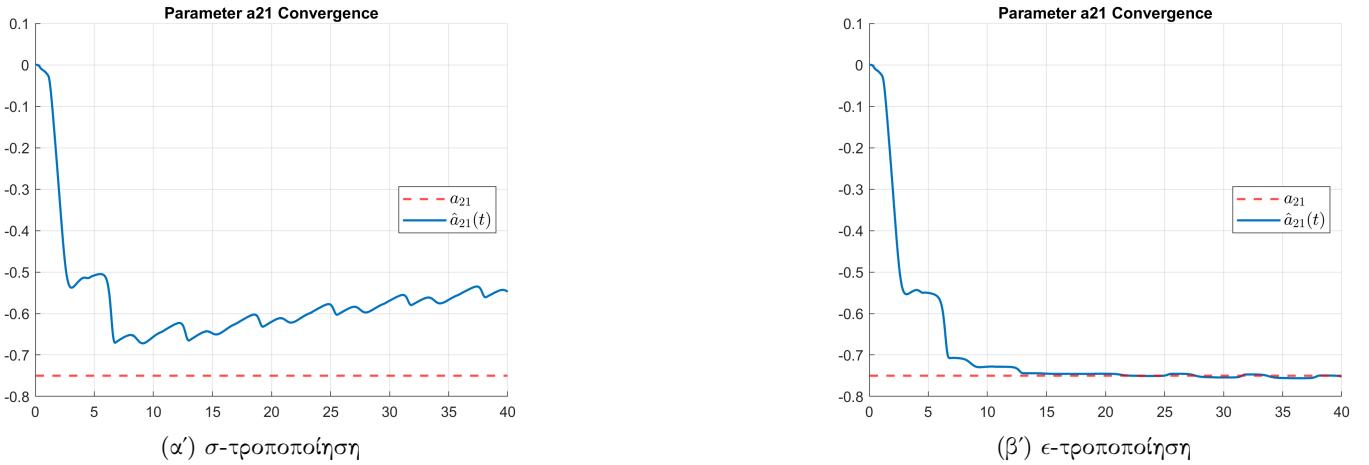
Σχήμα 45: Σύγκριση σφάλματος μοντελοποίησης e_{x_1}



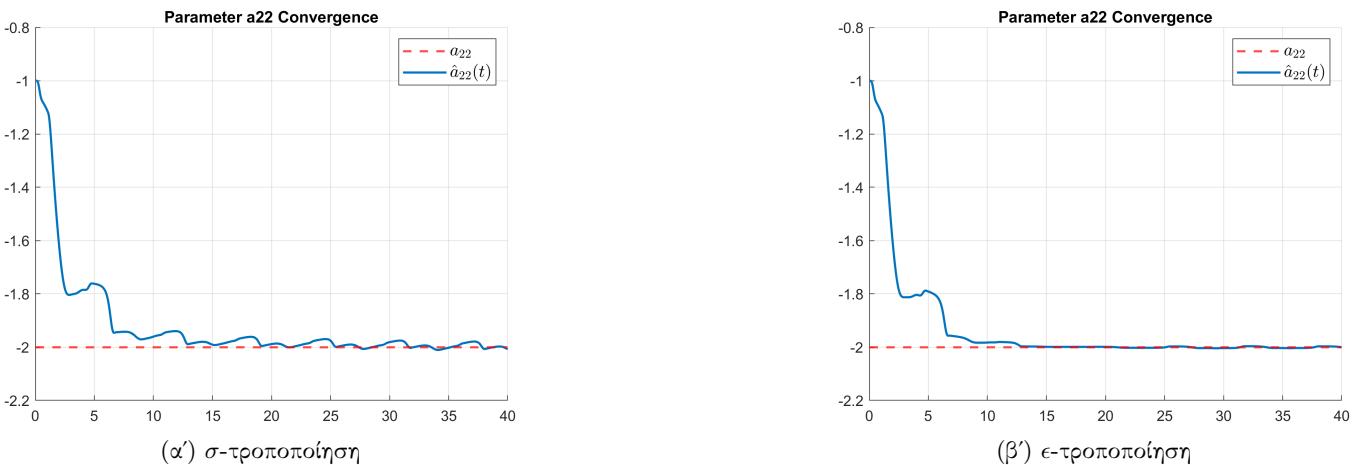
Σχήμα 46: Σύγκριση παραμέτρου a_{11}



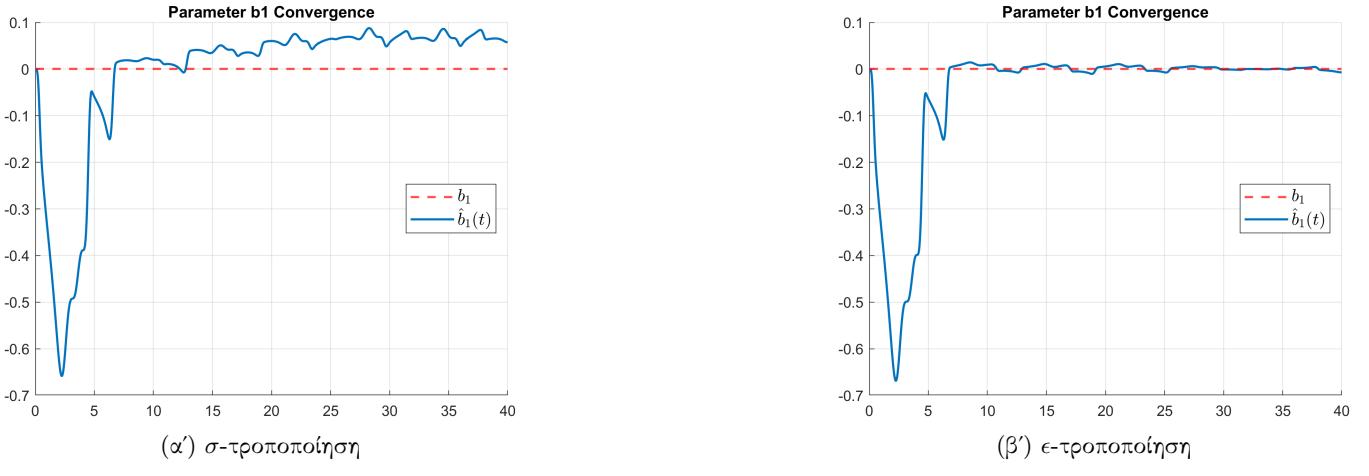
Σχήμα 47: Σύγκριση παραμέτρου a_{12}



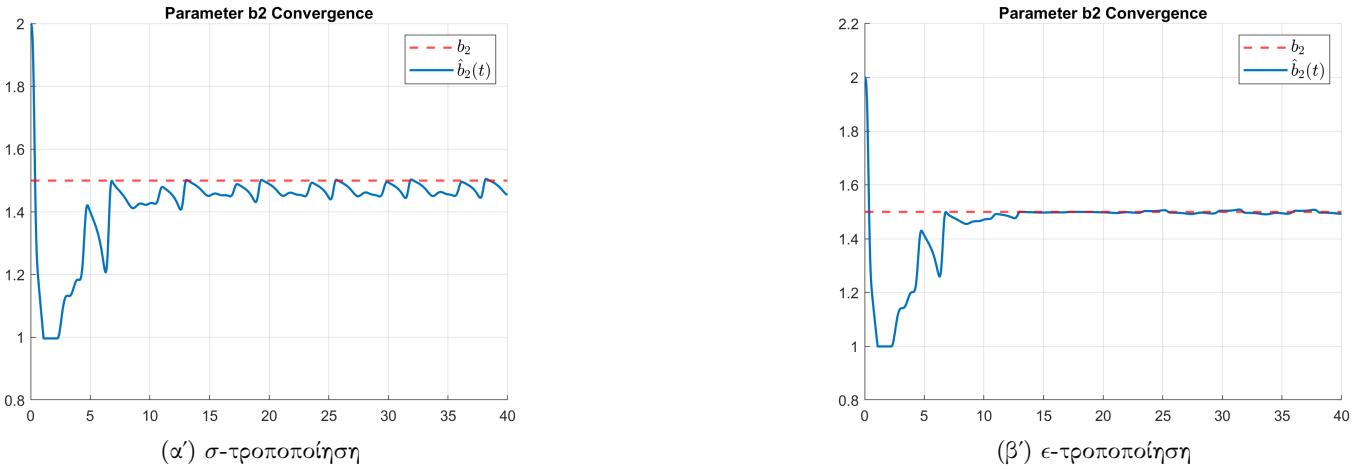
Σχήμα 48: Σύγκριση παραμέτρου a_{21}



Σχήμα 49: Σύγκριση παραμέτρου a_{22}



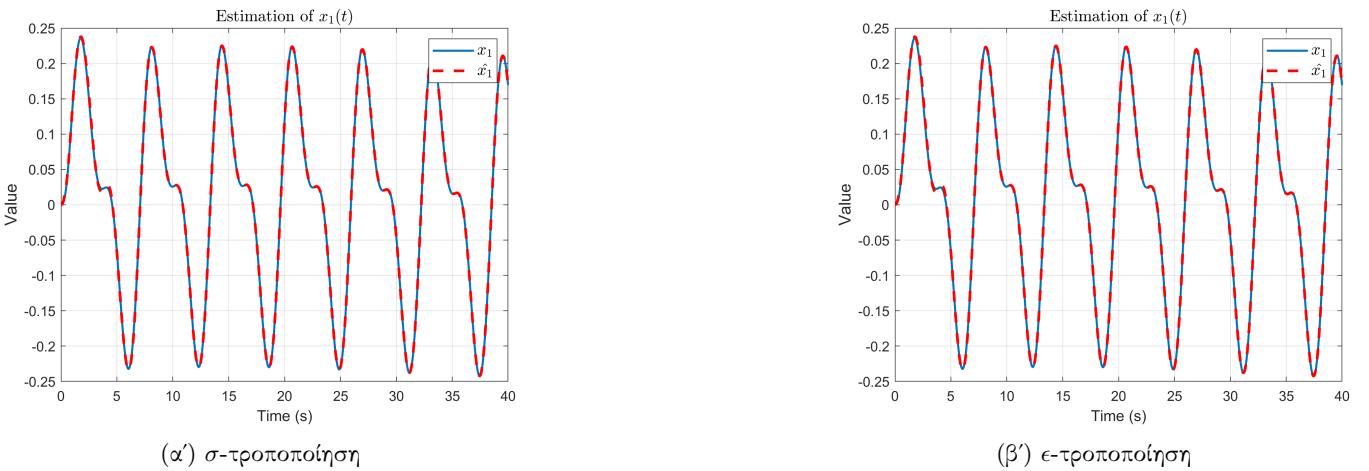
Σχήμα 50: Σύγκριση παραμέτρου b_1



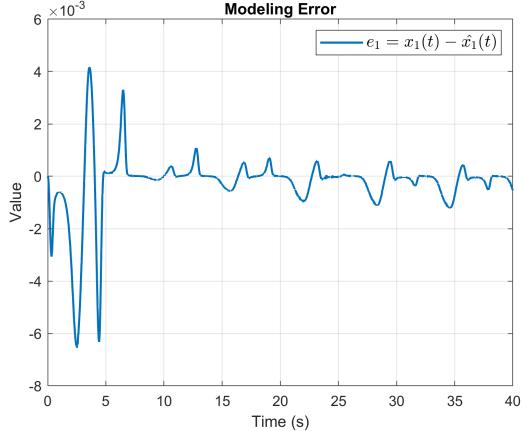
Σχήμα 51: Σύγκριση παραμέτρου b_2

3. $\omega_0 = 0.025$

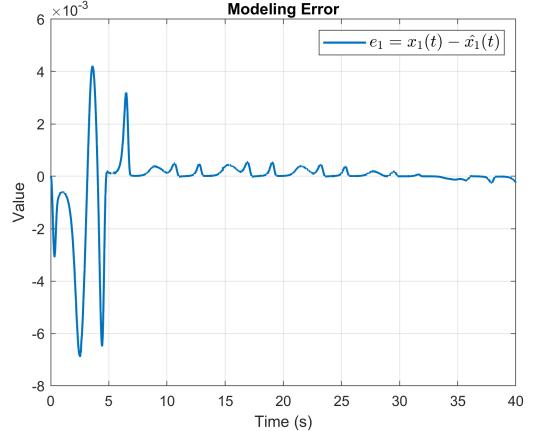
- Σύγκριση αποτελεσμάτων



Σχήμα 52: Σύγκριση εκτίμησης x_1

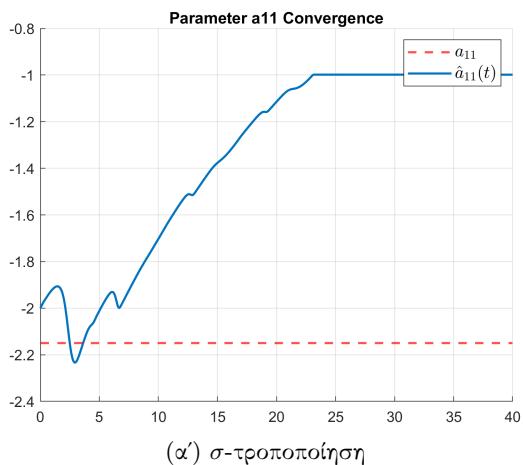


(α') σ -τροποποίηση

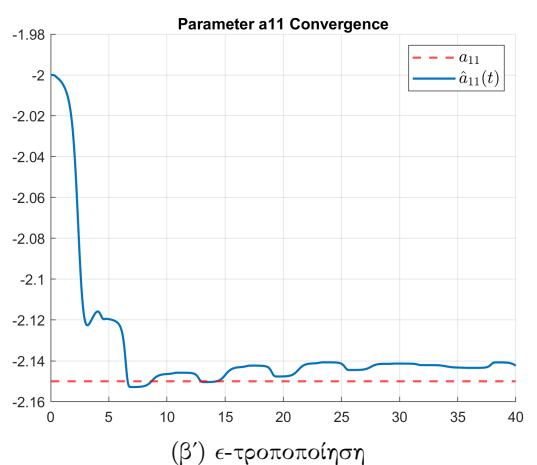


(β') ϵ -τροποποίηση

Σχήμα 53: Σύγκριση σφάλματος μοντελοποίησης e_{x_1}

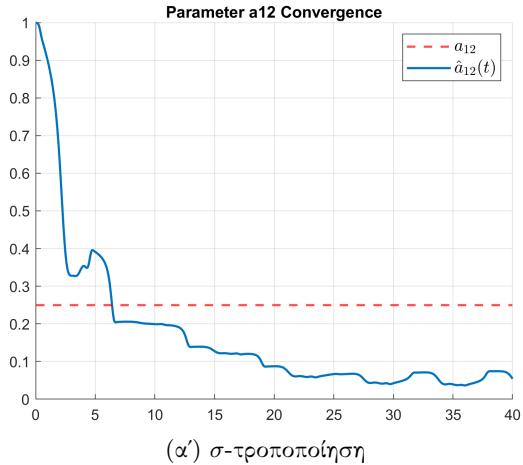


(α') σ -τροποποίηση

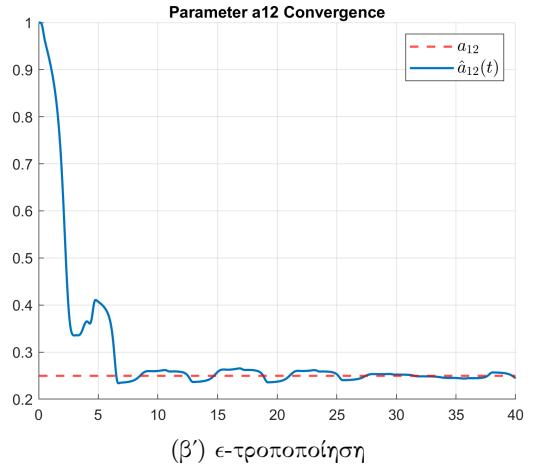


(β') ϵ -τροποποίηση

Σχήμα 54: Σύγκριση παραμέτρου a_{11}

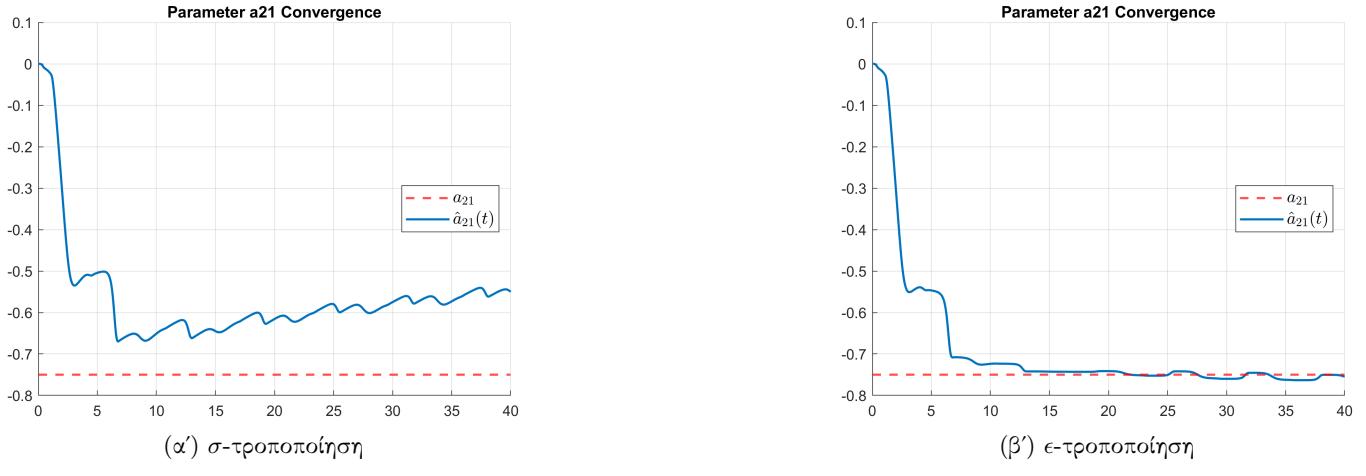


(α') σ -τροποποίηση

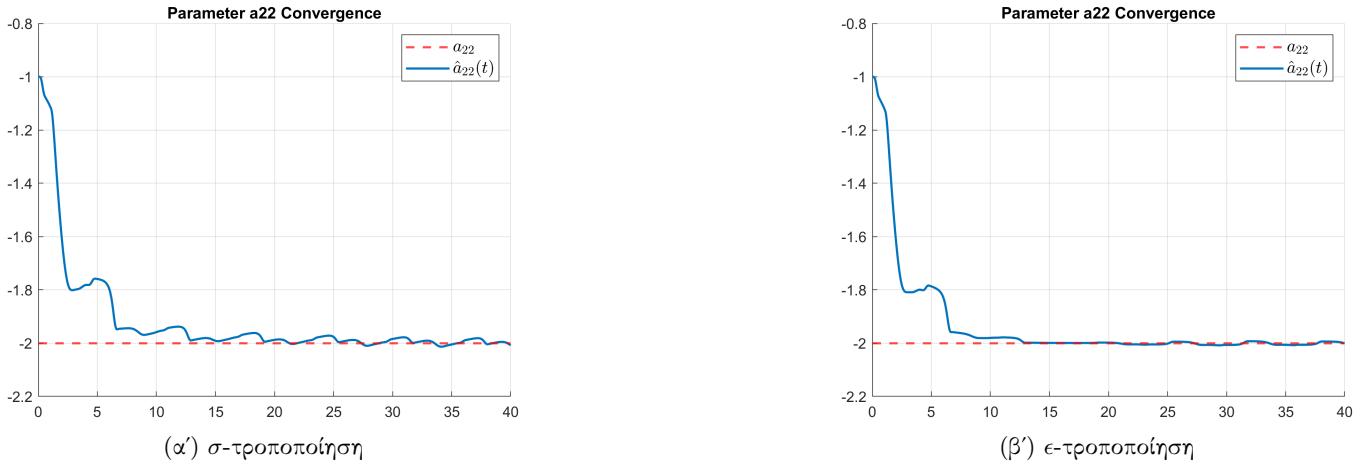


(β') ϵ -τροποποίηση

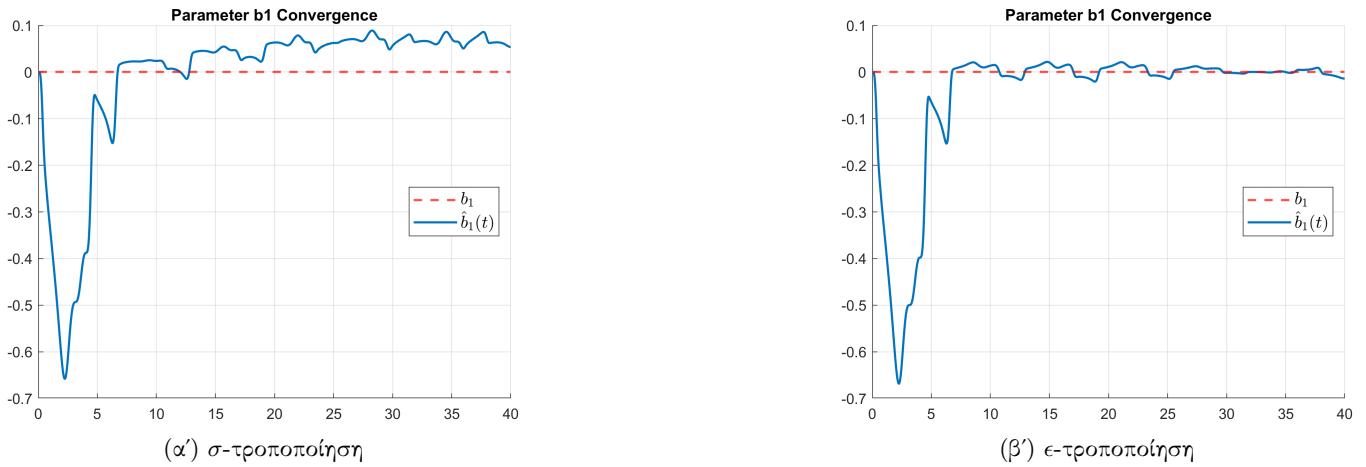
Σχήμα 55: Σύγκριση παραμέτρου a_{12}



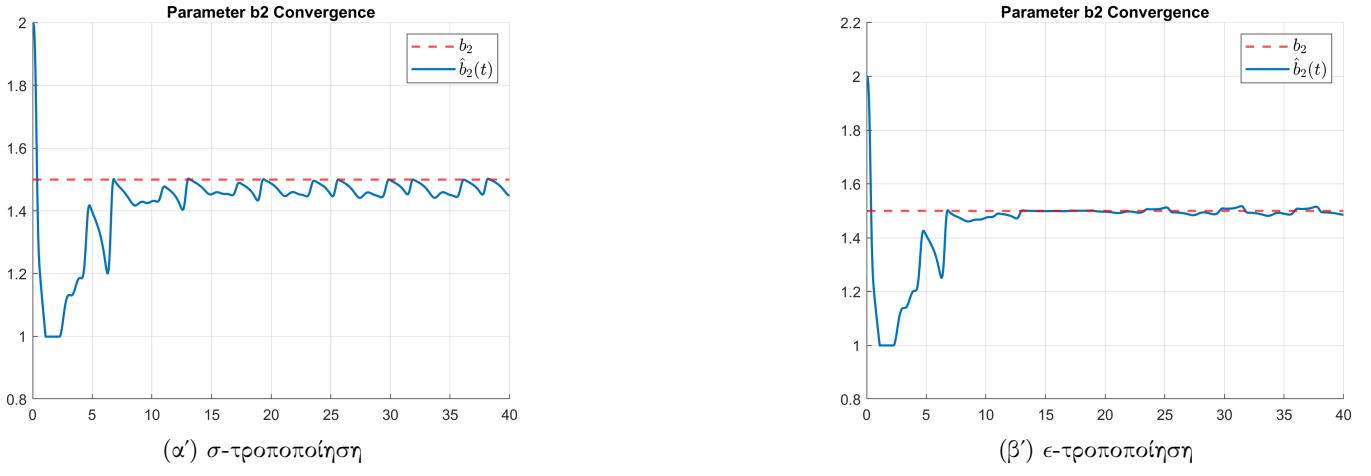
Σχήμα 56: Σύγκριση παραμέτρου a_{21}



Σχήμα 57: Σύγκριση παραμέτρου a_{22}



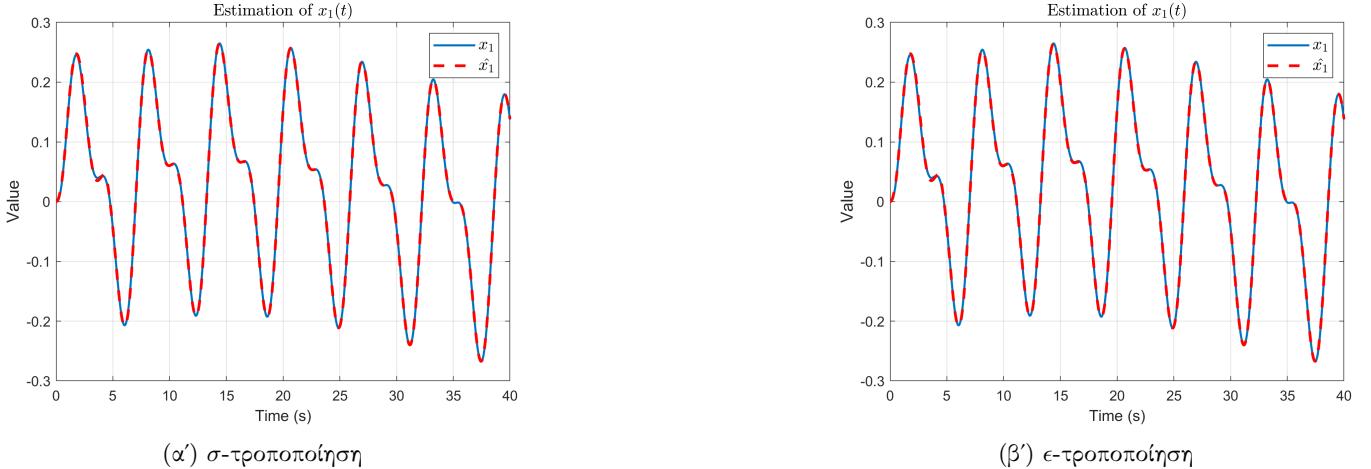
Σχήμα 58: Σύγκριση παραμέτρου b_1



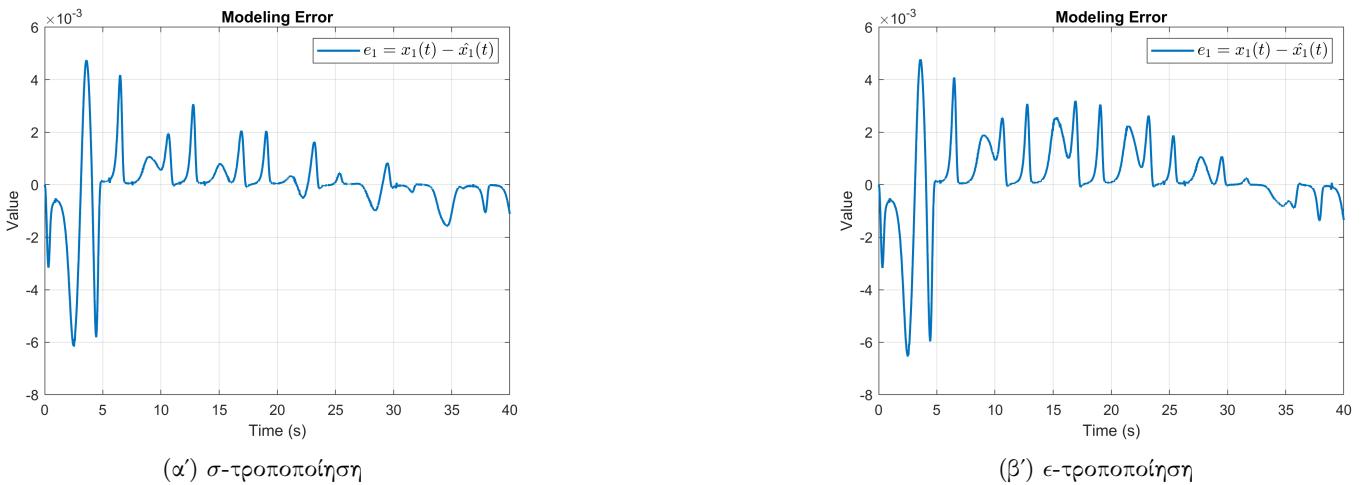
Σχήμα 59: Σύγκριση παραμέτρου b_2

4. $\omega_0 = 0.15$

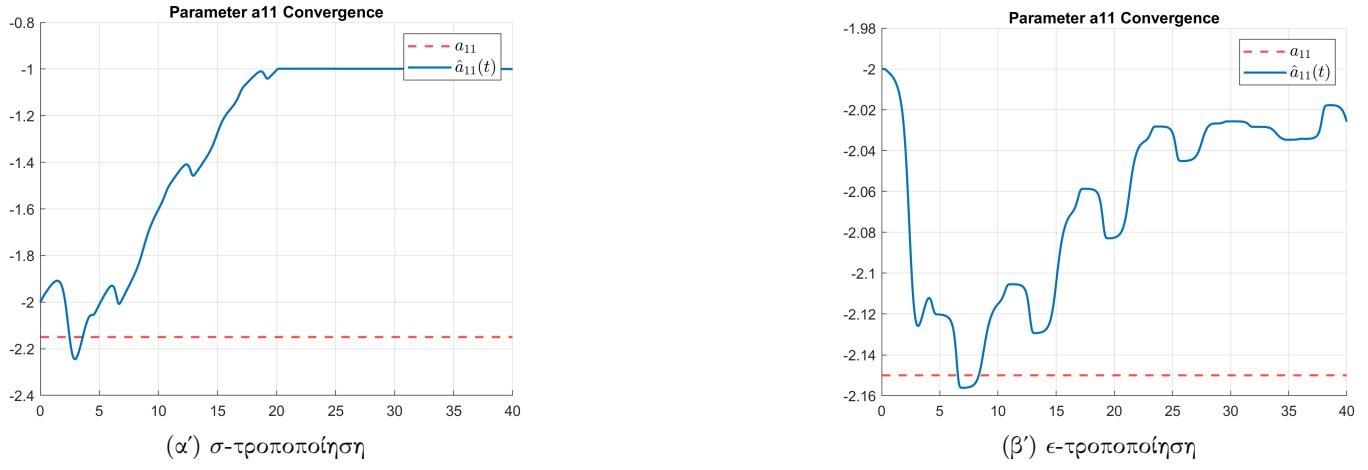
- Σύγκριση αποτελεσμάτων



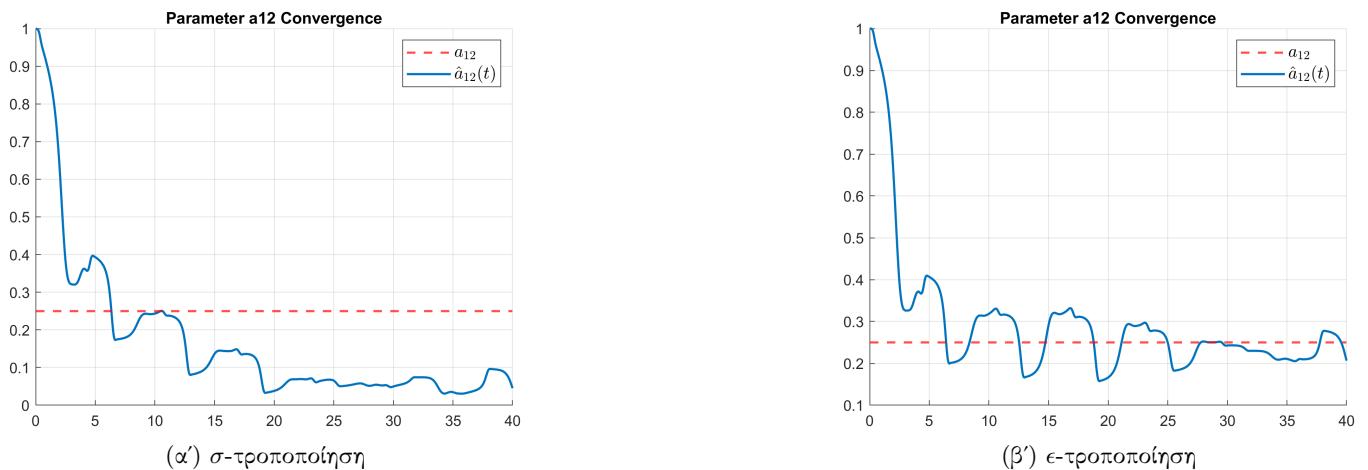
Σχήμα 60: Σύγκριση εκτίμησης x_1



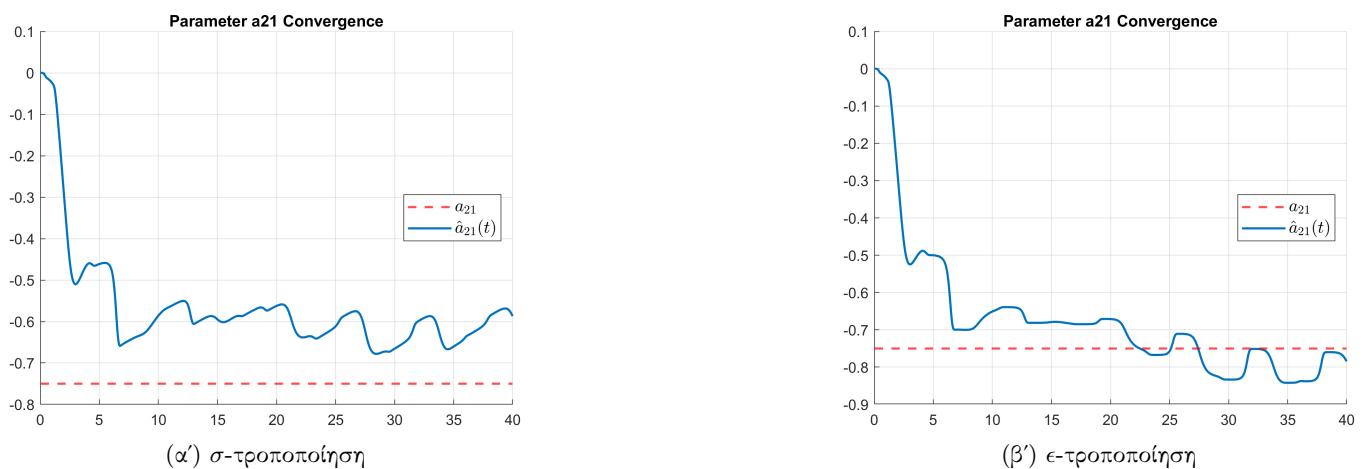
Σχήμα 61: Σύγκριση σφάλματος μοντελοποίησης e_{x_1}



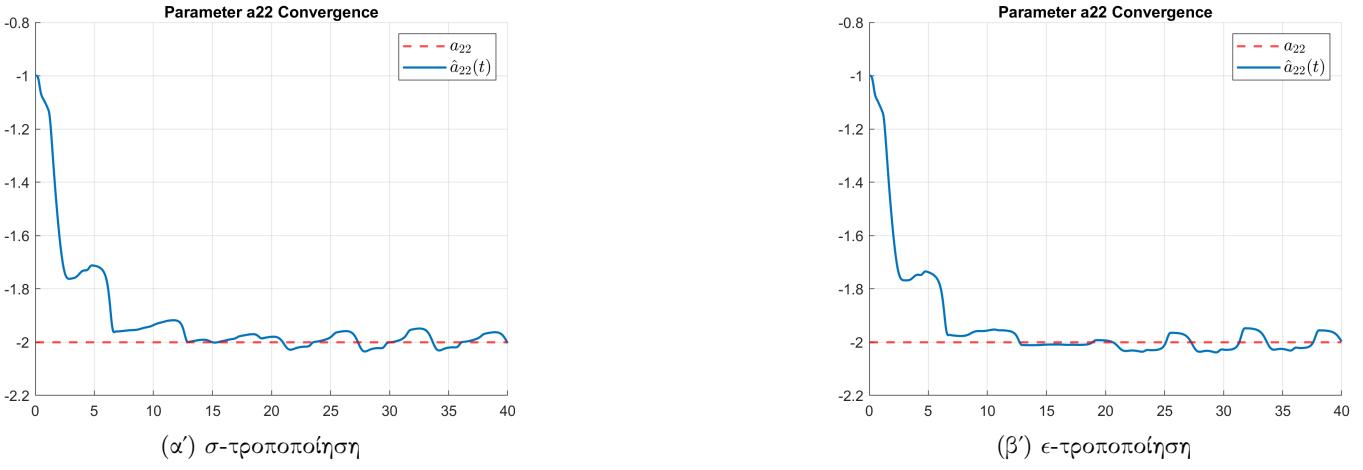
Σχήμα 62: Σύγκριση παραμέτρου a_{11}



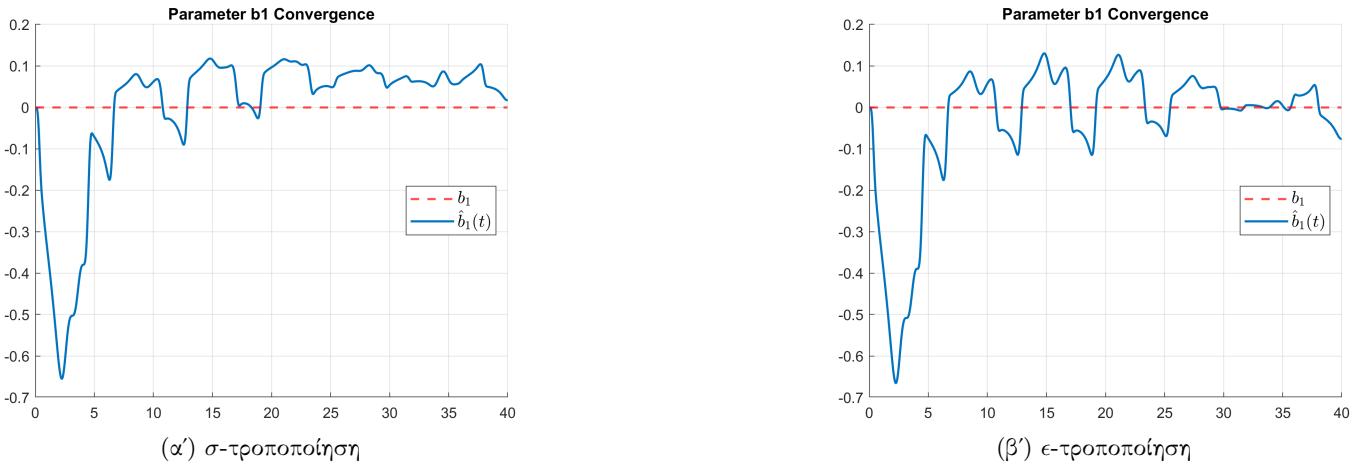
Σχήμα 63: Σύγκριση παραμέτρου a_{12}



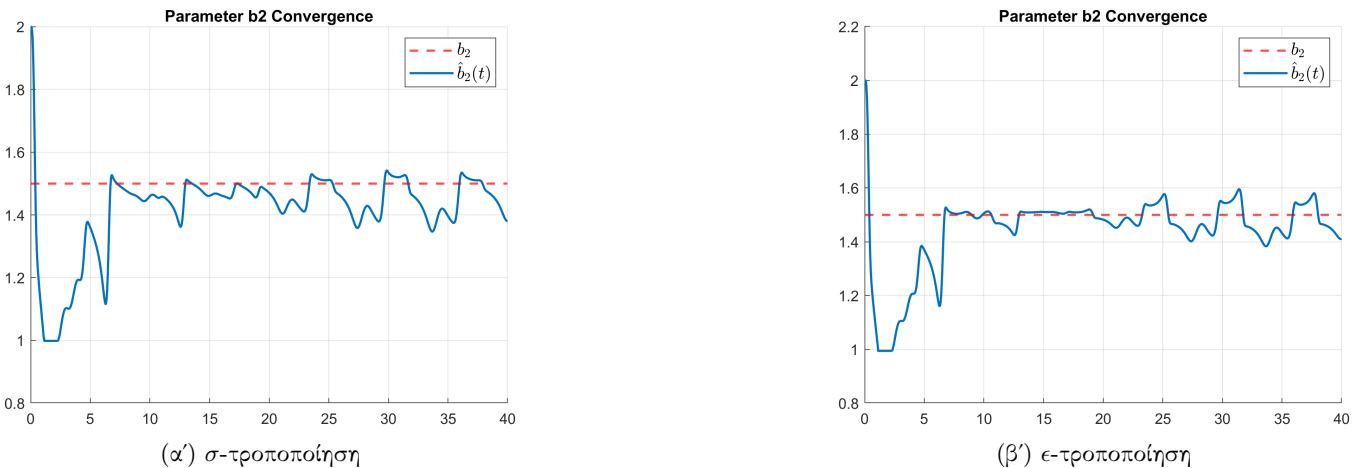
Σχήμα 64: Σύγκριση παραμέτρου a_{21}



Σχήμα 65: Σύγκριση παραμέτρου a_{22}



Σχήμα 66: Σύγκριση παραμέτρου b_1



Σχήμα 67: Σύγκριση παραμέτρου b_2

Παρατηρούμε την ίδια συμπεριφορά των δύο μεθόδων όπως και στην περίπτωση σταθερής πόλωσης. Η μόνη διαφορά είναι ότι τώρα καθώς αυξάνεται το ω_0 αντί να μετατοπίζεται κατακόρυφα η γραφική παράσταση του x_1 , γίνεται ολοένα και πιο εμφανής η συχνότητα $k = 0.1$.

Τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων παράγονται από το αρχείο ex_1b.m. Οι σχεδιάσεις για την σ και ϵ τροποποίησεις δίνονται στα αρχεία projected_lyapunov_sigma_mod.m και projected_lyapunov_eps_mod.m. Επειδή δεν είναι δυνατόν να παραχθούν τόσες γραφικές από ένα αρχείο, στο ex_1b.m δίνεται η δυνατότητα μέσω σχολίων στον κώδικα να επιλεγούν η μορφή και το πλάτος του σφάλματος πόλωσης καθώς και οι παράμετροι για τις σχεδιάσεις.