

# Μονετελοποίηση και Προσομοίωση Δυναμικών Συστημάτων

## Εργασία 1η

Πάλλου Δημήτριος 10315

Απρίλιος 2025

### 1 Θέμα 1

Το σύστημα του απλού εκκρεμούς με ροπή εισόδου που μελετούμε περιγράφεται από την διαφορική εξίσωση

$$mL^2\ddot{q}(t) + c\dot{q}(t) + mgLq(t) = u(t) \quad (1)$$

όπου  $q(t)$  η γωνία εκτροπής σε rad,  $m$  η μάζα σε kg,  $L$  το μήκος εκτροπής σε m,  $c$  ένας σταθερός συντελεστής απόσβεσης σε  $N \cdot m \cdot sec$ ,  $g$  η επιτάχυνση της βαρύτητας σε  $m/sec^2$  και  $u(t)$  είσοδος ελέγχου σε N·m.

Θα εκφράσουμε το σύστημα με εξισώσεις κατάστασης. Για αυτό θέτουμε

$$x_1(t) = q(t) \quad (2)$$

και

$$x_2(t) = \dot{q}(t) \quad (3)$$

Έχοντας θέσει κατά αυτό τον τρόπο τις μεταβλητές κατάστασης και παραγωγίζοντας ως προς τον χρόνο βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{q} = x_2 \\ \dot{x}_2 &= \ddot{q} = \frac{1}{mL^2}(u - c\dot{q} - mgLq) = \frac{1}{mL^2}(u - cx_2 - mgLx_1) \end{aligned}$$

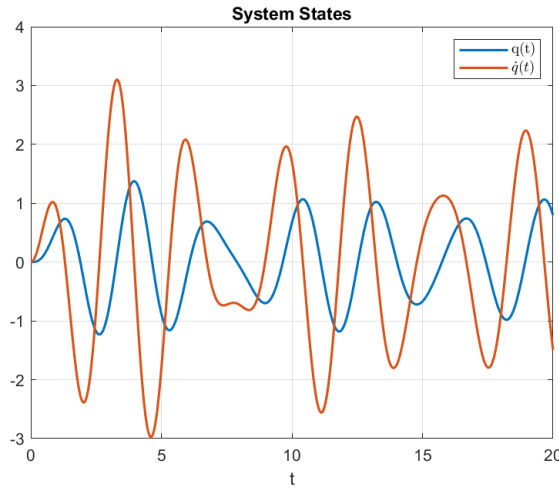
οπότε σε μορφή πινάκων

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -g/L & -c/mL^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/mL^2 \end{bmatrix} u \quad (4)$$

Υποθέτοντας μηδενικές αρχικές συνθήκες βρίσκουμε και την συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος παίρνοντας τον μετασχηματισμό Laplace της (1). Πιο αναλυτικά,

$$\begin{aligned} mL^2\ddot{q}(t) + c\dot{q}(t) + mgLq(t) &= u(t) \Rightarrow \\ mL^2s^2Q(s) + csQ(s) + mgLQ(s) &= U(s) \Rightarrow \\ Q(s)(mL^2s^2 + cs + mgL) &= U(s) \Rightarrow \\ H(s) = \frac{Q(s)}{U(s)} &= \frac{1}{mL^2s^2 + cs + mgL} \end{aligned} \quad (5)$$

Εκτελώντας προσομοίωση του συστήματος με τιμές παραμέτρων  $L = 1.25$ ,  $m = 0.75$ ,  $c = 0.15$ ,  $g = 9.81$ ,  $A_0 = 4$ ,  $\omega = 2$ , χρησιμοποιώντας την ode45 συνάρτηση του Matlab για επίλυση διαφορικών εξισώσεων με βήμα ολοκλήρωσης  $\Delta t = 10^{-4}$  παίρνουμε τις εξής γραφικές παραστάσεις για τις καταστάσεις  $q(t)$  και  $\dot{q}(t)$  του συστήματος.



Σχήμα 1

Ο κώδικας για την προσομοίωση και την παραγωγή των γραφικών παραστάσεων βρίσκεται στο αρχείο ex1.m.

## 2 Θέμα 2

### 2.1 Θεωρητική Ανάλυση

Θα υποθέσουμε τώρα ότι οι παράμετροι  $m, L$  και  $c$  είναι άγνωστες. Στόχος μας είναι να σχεδιάσουμε ένα μοντέλο το οποίο θα εκτιμά σωστά τις προαναφερθείσες παραμέτρους και θα έχει ελάχιστο σφάλμα. Θα διακρίνουμε δύο περιπτώσεις στην ανάλυση μας.

- **Περίπτωση 1**

Σε αυτή την περίπτωση θα θεωρήσουμε ότι όλο το διάνυσμα κατάστασης καθώς και η είσοδος είναι μετρήσιμα, δηλαδή ότι τα σήματα  $q(t), \dot{q}(t)$  και  $u(t)$  είναι όλα μετρήσιμα σήματα.

- **Περίπτωση 2**

Σε αυτή την περίπτωση θα θεωρήσουμε μετρήσιμα μόνο τα σήματα εισόδου και εξόδου δηλαδή τα  $q(t)$  και  $u(t)$ .

Στην ανάλυση που θα ακολουθήσει θεωρούμε  $y(t) = x_1(t) = q(t)$  και  $x_2(t) = \dot{q}(t)$  οπότε  $X_1(s) = Y(s) = Q(s)$  και  $X_2(s) = \dot{Q}(s) = sY(s) = sX_1(s)$  όπου με  $Q(s)$  έχουμε συμβολίσει τον μετασχηματισμό Laplace του σήματος  $\dot{q}(t)$  για λόγους που θα γίνουν ξεκάθαροι παρακάτω.

Πρώτο βήμα στην ανάλυση είναι να φέρουμε το σύστημα σε γραμμικά παραμετροποιημένη μορφή. Έχουμε

$$mL^2\ddot{y} + c\dot{y} + mgLy = u \Rightarrow \ddot{y} + \frac{c}{mL^2}\dot{y} + \frac{g}{L}y = \frac{1}{mL^2}u$$

Θέτουμε

$$a_1 = \frac{c}{mL^2}, a_2 = \frac{g}{L}, b_0 = \frac{1}{mL^2}$$

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_2y = b_0u \Rightarrow \ddot{y} = -a_1\dot{y} - a_2y + b_0u$$

Στο σημείο αυτό διαχωρίζουμε την ανάλυση μας στις δύο περιπτώσεις.

1. Παίρνοντας τον μετασχηματισμό Laplace της παραπάνω εξίσωσης και δεδομένου ότι  $y(t) = x_1(t), \dot{y}(t) = x_2(t)$  έχουμε

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= -a_1x_2(t) - a_2x_1(t) + b_0u(t) \Rightarrow \\ s^2Y(s) &= -a_1X_2(s) - a_2X_1(s) + b_0U(s) \Rightarrow \\ s^2Y(s) + \lambda_1sY(s) + \lambda_2Y(s) &= -(a_1 - \lambda_1)X_2(s) - (a_2 - \lambda_2)X_1(s) + b_0U(s) \Rightarrow \\ \Lambda(s)Y(s) &= (\theta^*)^T\Phi(s) \end{aligned}$$

όπου  $\Lambda(s) = s^2 + \lambda_1 s + \lambda_2$  είναι ένα ευσταθές φίλτρο αυθαίρετης επιλογής και  $\Phi(s) = [-X_2(s) \quad -X_1(s) \quad U(s)]^T$  και  $\theta^* = [a_1 - \lambda_1 \quad a_2 - \lambda_2 \quad b_0]^T$ . Έχουμε χρησιμοποιήσει επίσης το γεγονός ότι  $sY(s) = X_2(s)$  στην 3η γραμμή. Οπότε καταλήγουμε στην γραμμικά παραμετροποιημένη μορφή του συστήματος (στο πεδίο του Laplace)

$$Y(s) = (\theta^*)^T \frac{\Phi(s)}{\Lambda(s)} = (\theta^*)^T \zeta(s) \quad (6)$$

με

$$\zeta(s) = \left[ -\frac{X_2(s)}{\Lambda(s)} \quad -\frac{X_1(s)}{\Lambda(s)} \quad \frac{U(s)}{\Lambda(s)} \right]^T$$

2. Στην δεύτερη περίπτωση η ανάλυση είναι ακριβώς ίδια με την μόνη διαφορά ότι το  $X_2(s)$  δεν είναι μετρήσιμο οπότε χρησιμοποιούμε το ίσο του  $sY(s)$  και το διάνυσμα  $\zeta(s)$  γίνεται τώρα

$$\zeta(s) = \left[ -\frac{sY(s)}{\Lambda(s)} \quad -\frac{Y(s)}{\Lambda(s)} \quad \frac{U(s)}{\Lambda(s)} \right]^T$$

Λόγω της γραμμικότητας της σχέσης

$$Y(s) = (\theta^*)^T \zeta(s)$$

μπορούμε να μεταβούμε στο πεδίο του χρόνου παίρνοντας τον αντίστοιχο μετασχηματισμό Laplace και καταλήγουμε

$$y(t) = (\theta^*)^T \zeta(t)$$

με το  $\zeta(t)$  να είναι και στις δύο περιπτώσεις πλήρως μετρήσιμο σήμα. Για το μοντέλο μας έστω  $\hat{\theta}$  η εκτίμηση του  $\theta^*$  οπότε το μοντέλο μας γίνεται

$$\hat{y}(t) = \hat{\theta}^T \zeta(t)$$

Για την εκτίμηση του διανύσματος  $\theta^*$  παίρνουμε μετρήσεις από το σύστημα τις χρονικές στιγμές  $t_i, i = 1, \dots, N$  και σχηματίζουμε το διάνυσμα

$$\mathbf{y} = [y(t_1) \quad y(t_2) \quad \dots \quad y(t_N)]^T$$

και μετρήσεις του σήματος  $\zeta(t)$  και σχηματίζουμε το διάνυσμα

$$\hat{\mathbf{y}} = [\hat{y}(t_1) \quad \hat{y}(t_2) \quad \dots \quad \hat{y}(t_N)]^T$$

Επειδή  $\hat{y}(t_i) = \theta^T \zeta(t_i) = [\hat{\theta}_1 \quad \hat{\theta}_2 \quad \hat{\theta}_3] \begin{bmatrix} \zeta_1(t_i) \\ \zeta_2(t_i) \\ \zeta_3(t_i) \end{bmatrix}$  γράφουμε το  $\hat{\mathbf{y}}$  ως εξής

$$\hat{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \hat{y}(t_1) \\ \hat{y}(t_2) \\ \vdots \\ \hat{y}(t_N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \zeta_1(t_1) & \zeta_2(t_1) & \zeta_3(t_1) \\ \zeta_1(t_2) & \zeta_2(t_2) & \zeta_3(t_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \zeta_1(t_N) & \zeta_2(t_N) & \zeta_3(t_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\theta}_1 \\ \hat{\theta}_2 \\ \hat{\theta}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{H} \hat{\theta}$$

Ορίζουμε την τετραγωνική συνάρτηση προς ελαχιστοποίηση

$$\begin{aligned} V_N(\hat{\theta}) &= \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}\|^2 \\ &= \frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{H} \hat{\theta}\|^2 \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{y} - \mathbf{H} \hat{\theta})^T (\mathbf{y} - \mathbf{H} \hat{\theta}) \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{y}^T \mathbf{y} - \frac{1}{2} \mathbf{y}^T \mathbf{H} \hat{\theta} - \frac{1}{2} \hat{\theta}^T \mathbf{H}^T \mathbf{y} + \frac{1}{2} \hat{\theta}^T \mathbf{H}^T \mathbf{H} \hat{\theta} \\ &= \frac{1}{2} \|\mathbf{y}\|^2 - \hat{\theta}^T \mathbf{H}^T \mathbf{y} + \frac{1}{2} \hat{\theta}^T \mathbf{H}^T \mathbf{H} \hat{\theta} \end{aligned}$$

Η  $V_N$  είναι κυρτή συνάρτηση (ως τετραγωνική συνάρτηση του  $\hat{\theta}$  οπότε το ολικό ελάχιστο της είναι ίσο με το κρίσιμο σημείο της. Υπολογίζουμε την παράγωγο της  $V_N$  ως προς  $\hat{\theta}$

$$\nabla_{\hat{\theta}} V_N = -\mathbf{H}^T \mathbf{y} + \mathbf{H}^T \mathbf{H} \hat{\theta}$$

Εξισώνοντας την παράγωγο με το 0 παίρνουμε την λύση

$$\nabla_{\hat{\theta}} V_N = \mathbf{0} \Rightarrow -\mathbf{H}^T \mathbf{y} + \mathbf{H}^T \mathbf{H} \hat{\theta} = \mathbf{0} \Rightarrow \hat{\theta} = (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{y}$$

Έχοντας εκτιμήσει το διάνυσμα παραμέτρων  $\hat{\theta}$  μπορούμε να υπολογίσουμε εύκολα τις εκτιμήσεις  $\hat{m}$ ,  $\hat{L}$ ,  $\hat{c}$ . Είναι

$$\hat{\theta} = [\hat{\theta}_1 \quad \hat{\theta}_2 \quad \hat{\theta}_3] = [a_1 - \lambda_1 \quad a_2 - \lambda_2 \quad b_0]$$

από όπου μετά από αντικαταστάσεις των  $a_1, a_2, b_0$  και πράξεις παίρνουμε

$$\hat{L} = \frac{g}{\hat{\theta}_2 + \lambda_2}$$

$$\hat{m} = \frac{1}{\hat{\theta}_3 \hat{L}^2}$$

$$\hat{c} = \frac{\hat{\theta}_1 + \lambda_1}{\hat{\theta}_3}$$

## 2.2 Πειραματικά Αποτελέσματα

Για τις προσομοιώσεις χρησιμοποιούμε το ευσταθές φίλτρο  $\Lambda(s) = s^2 + s + 1$ .

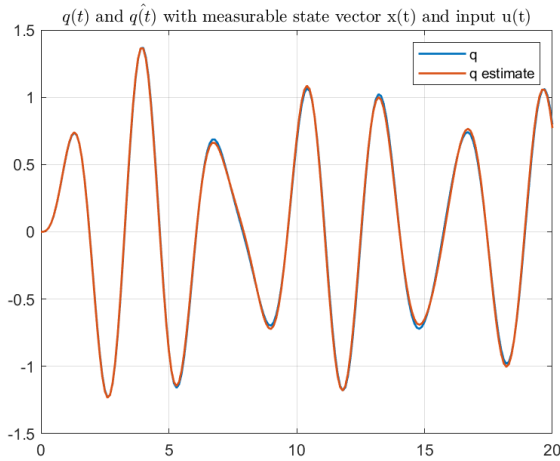
1. Στην περίπτωση όπου τα σήματα  $q(t), \dot{q}(t)$  και  $u(t)$  είναι μετρήσιμα παίρνουμε τις εξής εκτιμήσεις για τις παραμέτρους.

$$\hat{L} = 1.242569 \quad e_L = L - \hat{L} = 0.007431$$

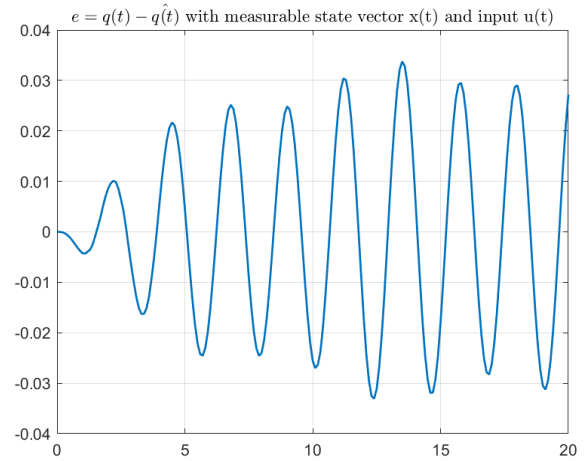
$$\hat{m} = 0.751916 \quad e_m = m - \hat{m} = -0.001916$$

$$\hat{c} = 0.145857 \quad e_c = c - \hat{c} = 0.004143$$

Παρακάτω φαίνεται η γραφική παράσταση του σήματος  $q(t)$  και της εκτίμησης  $\hat{q}(t)$  όπως προκύπτει από την επίλυση της διαφορικής του συστήματος με τις εκτιμώμενες παραμέτρους. Δίνουμε επίσης και την γραφική παράσταση του σήματος σφάλματος  $e_q(t) = q(t) - \hat{q}(t)$ .



(α')



(β')

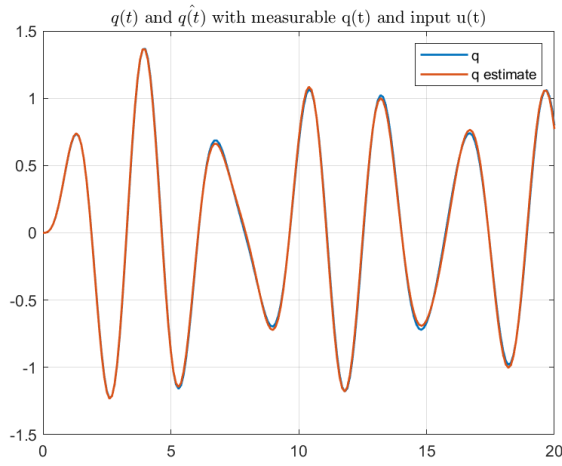
Σχήμα 2

2. Στην περίπτωση όπου μόνο τα σήματα  $q(t)$  και  $u(t)$  είναι μετρήσιμα παίρνουμε τις εξής εκτιμήσεις για τις παραμέτρους οι οποίες είναι ελάχιστα καλύτερες από την περίπτωση 1.

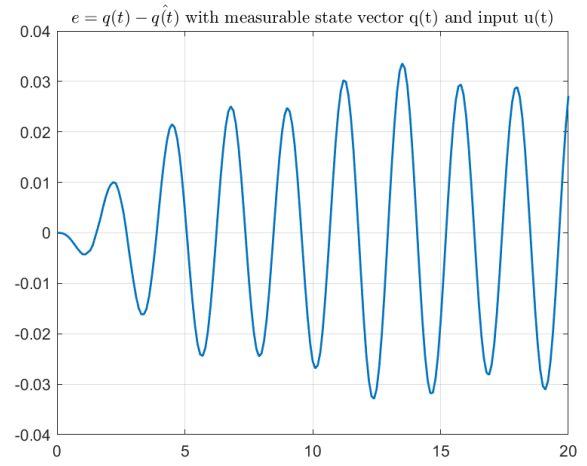
$$\hat{L} = 1.242597 \quad e_L = L - \hat{L} = 0.007403$$

$$\hat{m} = 0.751909 \quad e_m = m - \hat{m} = -0.001909$$

$$\hat{c} = 0.145957 \quad e_c = c - \hat{c} = 0.004043$$



(α')



(β')

Σχήμα 3

Παρατηρούμε γενικά μια ελάχιστα καλύτερη εκτίμηση των παραμέτρων στην περίπτωση όπου μόνο τα σήματα  $q(t)$  και  $u(t)$  είναι μετρήσιμα. Αυτό μπορούμε να το αποδώσουμε στο γεγονός ότι δειγματοληπτούμε μόνο δύο σήματα  $(q, u)$  οπότε το σφάλμα της δειγματοληψίας υπεισέρχεται μόνο δύο φορές ενώ στην περίπτωση που δειγματοληπτούμε 3 σήματα  $(\dot{q}, q, u)$  έχουμε και μια τρίτη πηγή σφάλματος.

Ο κώδικας για τα πειραματικά αποτελέσματα βρίσκεται στο `ex2.m`. Επίσης χρησιμοποιείται η συνάρτηση `estimate_params.m` η οποία αναλόγως την περίπτωση δημιουργεί τα κατάλληλα φίλτρα και εκτελεί τον αλγόριθμο ελαχίστων τετραγώνων για την εκτίμηση του διανύσματος  $\theta$ .

### 3 Θέμα 3

#### 3.1 Εκτίμηση με θορυβώδη δεδομένα

Στο ερώτημα αυτό θεωρούμε ότι υπάρχει λευκός Γκαουσιανός θόρυβος στα δεδομένα εισόδου και εξόδου. Συγκεκριμένα θεωρούμε ότι τα σήματα

$$q_N(t) = q(t) + N_q(t)$$

$$\dot{q}_N(t) = \dot{q}(t) + N_{\dot{q}}(t)$$

$$u_N(t) = u(t) + N_u(t)$$

όπου οι τυχαίες μεταβλητές  $N_q, N_{\dot{q}}, N_u$  ακολουθούν τις Γκαουσιανές κατανομές

$$N_q \sim \mathcal{N}(0, \sigma_q^2)$$

$$N_{\dot{q}} \sim \mathcal{N}(0, \sigma_{\dot{q}}^2)$$

$$N_u \sim \mathcal{N}(0, \sigma_u^2)$$

όπου θεωρούμε διαφορετικές διακυμάνσεις σε κάθε κατανομή διότι το κάθε σήμα έχει διαφορετικό εύρος τιμών. Για τον καθορισμό της τυπικής απόκλισης χρησιμοποιήθηκε ο εξής τύπος

$$\sigma_x = \frac{a}{100} \cdot \max_t |x(t)|$$

όπου στο πρόβλημα μας  $x(t)$  είναι τα σήματα  $q(t), \dot{q}(t), u(t)$ . Δηλαδή η τυπική απόκλιση του θορύβου καθορίζεται ως ποσοστό της μέγιστης τιμής του αντίστοιχου σήματος. Έγιναν προσομοιώσεις με τιμές  $a = 1, 5, 10$  δηλαδή 1%, 5% και 10% της μέγιστης τιμής των σημάτων. Προφανώς καθώς μεγαλώνει το ποσοστό οι εκτιμήσεις είναι χειρότερες καθώς αυξάνεται η τιμή του θορύβου. Σημειώνεται πως υπάρχει μια τάση, όταν μετρούμε όλα τα σήματα τα αποτελέσματα να είναι καλύτερα και αυτό το αποδίδουμε στο ότι στην περίπτωση όπου μόνο τα  $q, u$  είναι μετρήσιμα, θα πρέπει να περάσουμε τον θόρυβο από τον διαφοριστή  $s$ , δηλαδή  $sY_N(s) = s(Y(s) + N(s))$  το οποίο γενικά είναι επιφέρει αρνητικά αποτελέσματα. Ωστόσο για να πάρουμε τα καλύτερα αποτελέσματα και από τις δύο περιπτώσεις, εκτελούμε τα πειράματα παραπάνω από μια φορές. Δίνουμε τις καλύτερες εκτελέσεις από κάθε πείραμα παρακάτω.

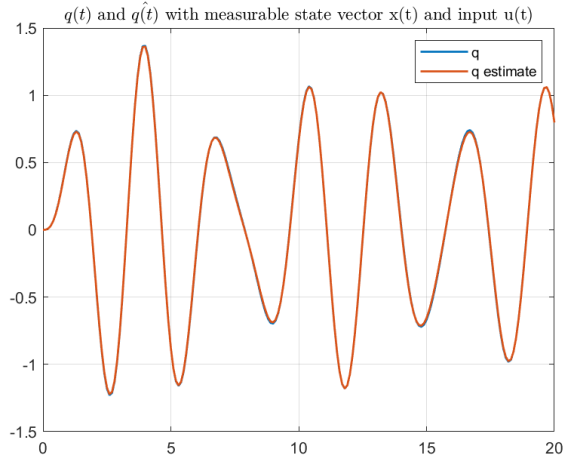
1. Για τυπικές αποκλίσεις  $\sigma_q = \frac{1}{100} \cdot \max_t |q(t)|$ ,  $\sigma_{\dot{q}} = \frac{1}{100} \cdot \max_t |\dot{q}(t)|$ ,  $\sigma_u = \frac{1}{100} \cdot \max_t |u(t)|$  έχουμε

- Μετρήσιμα όλα τα σήματα

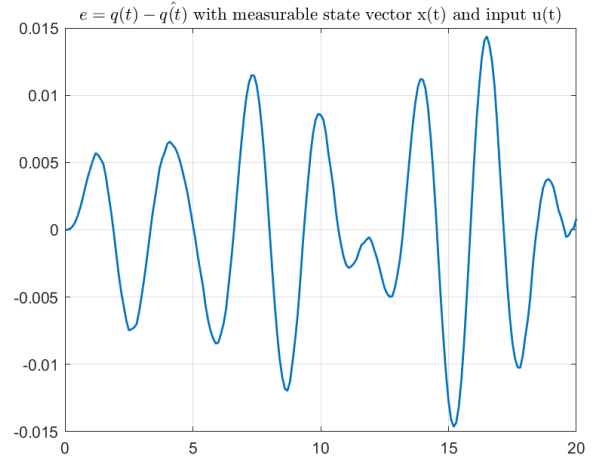
$$\hat{L} = 1.25075$$

$$\hat{m} = 0.7562$$

$$\hat{c} = 0.1456$$



(α')



(β')

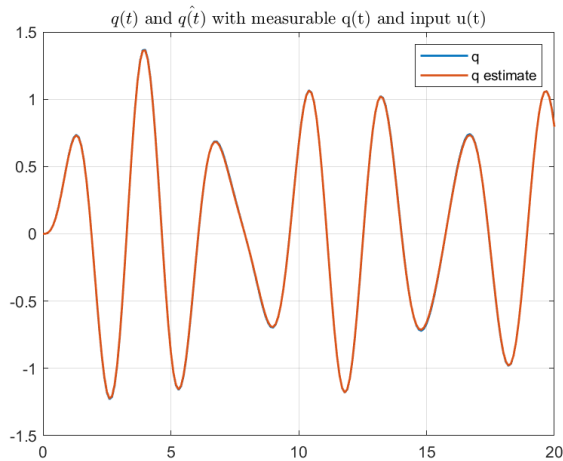
Σχήμα 4

- Μετρήσιμα μόνο τα σήματα  $q(t)$ ,  $u(t)$

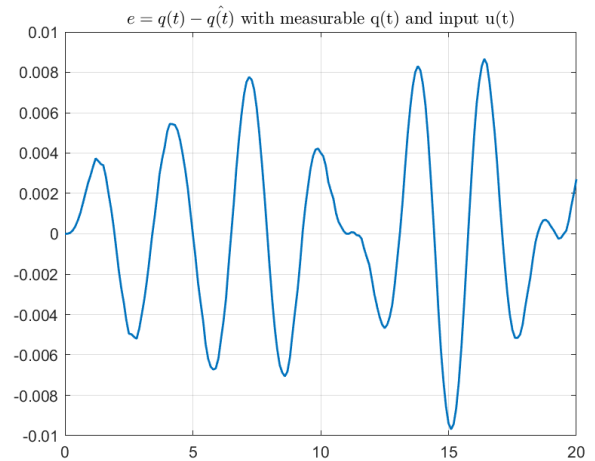
$$\hat{L} = 1.2500137$$

$$\hat{m} = 0.7544$$

$$\hat{c} = 0.1472$$



(α')



(β')

Σχήμα 5

Παρατηρούμε πολύ καλά αποτελέσματα, ακόμα καλύτερα και από την περίπτωση χωρίς θόρυβο. Αυτό μπορεί να οφείλεται στο γεγονός ότι με την πρόσθεση του θορύβου κάποιες παρατηρήσεις έγιναν ακριβέστερες παρά την σταθερή περίοδο δειγματοληψίας. Ωστόσο όπως έχει ήδη αναφερθεί αυτό είναι το καλύτερο πείραμα. Σε μία μέση περίπτωση του πειράματος τα αποτελέσματα είναι παρόμοια με αυτά χωρίς την επίδραση του θορύβου, όπως είναι λογικό, καθώς ο θόρυβος τώρα έχει πολύ μικρή ισχύ.

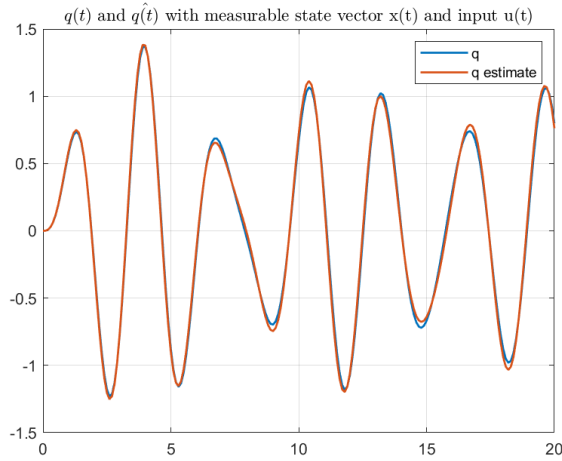
2. Για τυπικές αποκλίσεις  $\sigma_q = \frac{5}{100} \cdot \max_t |q(t)|$ ,  $\sigma_{\dot{q}} = \frac{5}{100} \cdot \max_t |\dot{q}(t)|$ ,  $\sigma_u = \frac{5}{100} \cdot \max_t |u(t)|$  έχουμε

- Μετρήσιμα όλα τα σήματα

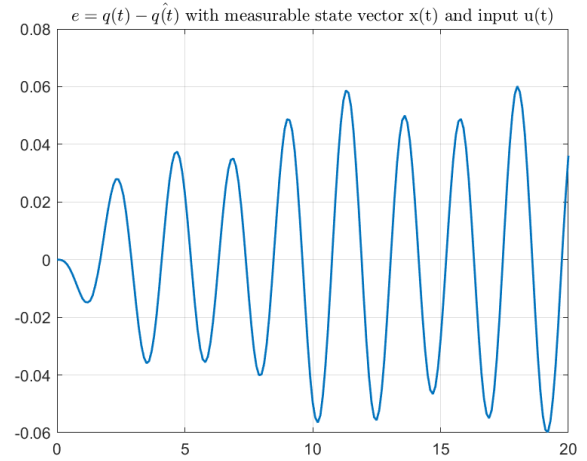
$$\hat{L} = 1.2381$$

$$\hat{m} = 0.7451$$

$$\hat{c} = 0.1373$$



(α')



(β')

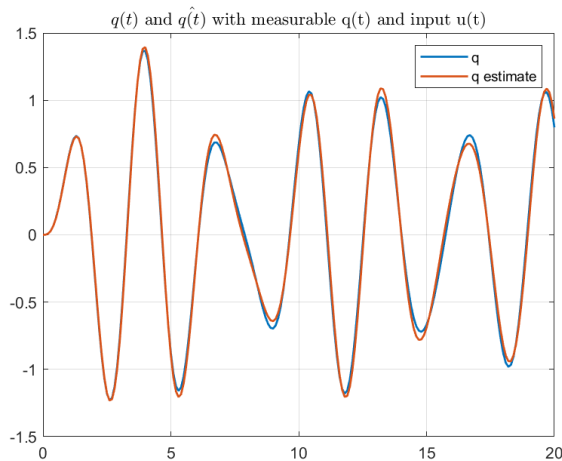
Σχήμα 6

- Μετρήσιμα μόνο τα σήματα  $q(t)$ ,  $u(t)$

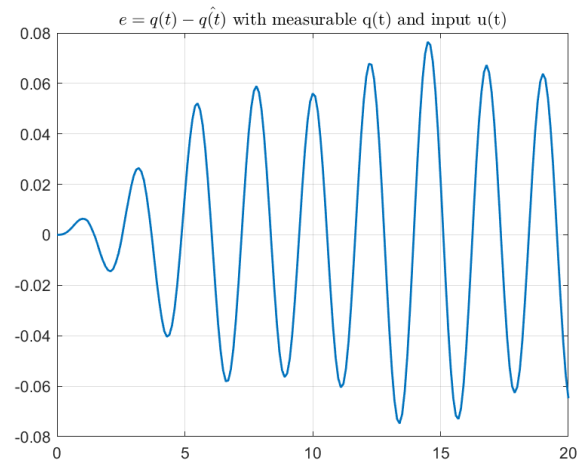
$$\hat{L} = 1.2660$$

$$\hat{m} = 0.7456$$

$$\hat{c} = 0.1388$$



(α')



(β')

Σχήμα 7

Τα αποτελέσματα είναι χειρότερα από την περίπτωση χωρίς θόρυβο, όπως είναι αναμενόμενο, καθώς έχουμε αρκετά ισχυρή παρουσία θυρύβου σε αυτό το πείραμα. Και όπως έχει ήδη αναφερθεί αυτές οι γραφικές παραστάσεις παράγονται από τα καλύτερα πειράματα.

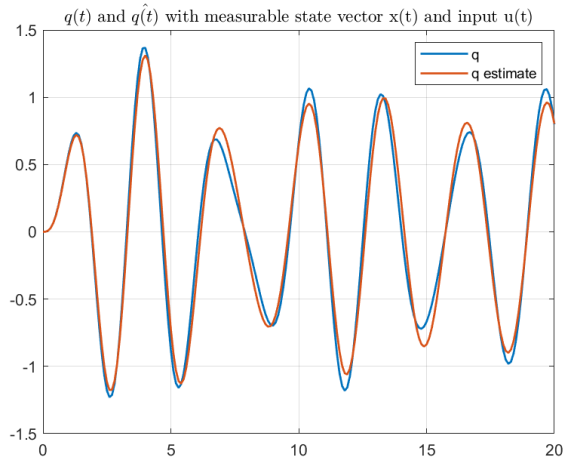
3. Για τυπικές αποκλίσεις  $\sigma_q = \frac{10}{100} \cdot \max_t |q(t)|$ ,  $\sigma_{\dot{q}} = \frac{10}{100} \cdot \max_t |\dot{q}(t)|$ ,  $\sigma_u = \frac{10}{100} \cdot \max_t |u(t)|$  έχουμε

- Μετρήσιμα όλα τα σήματα

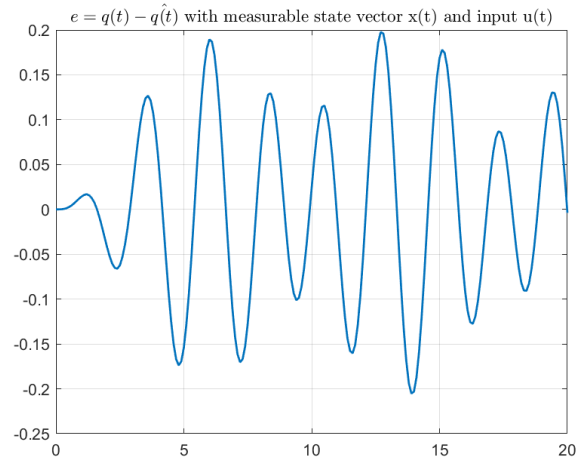
$$\hat{L} = 1.2719$$

$$\hat{m} = 0.7315$$

$$\hat{c} = 0.2745$$



(α')



(β')

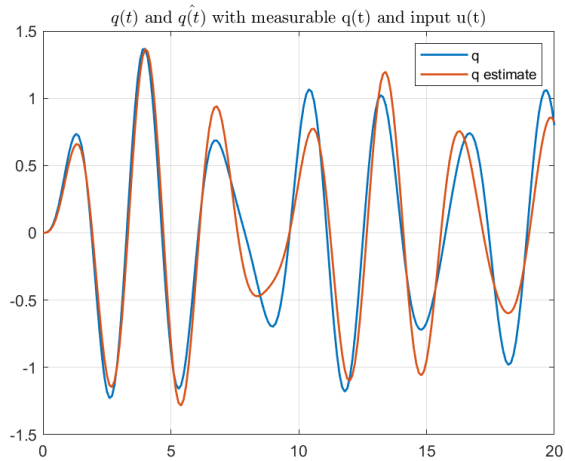
Σχήμα 8

- Μετρήσιμα μόνο τα σήματα  $q(t), u(t)$

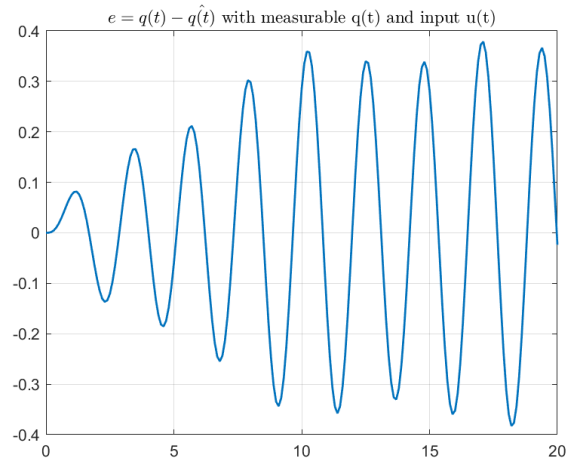
$$\hat{L} = 1.3389$$

$$\hat{m} = 0.7808$$

$$\hat{c} = 0.1295$$



(α')



(β')

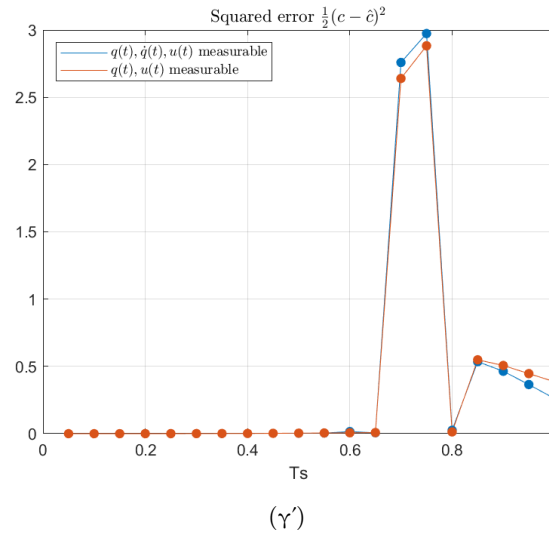
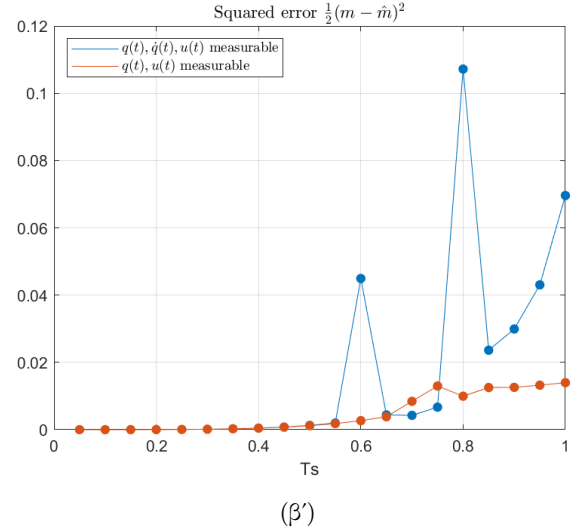
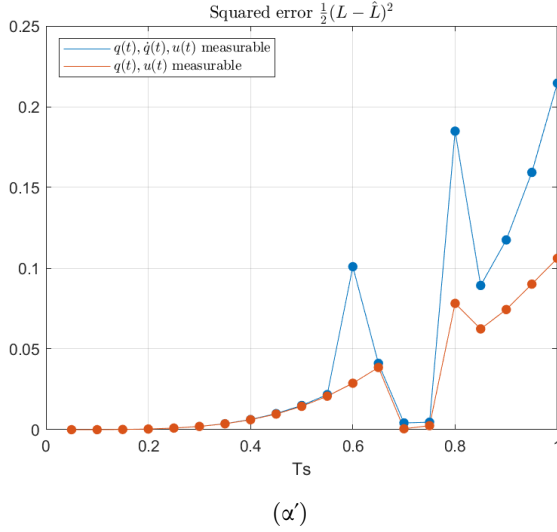
Σχήμα 9

Χειρότερα αποτελέσματα από όλες τις περιπτώσεις, καθώς έχουμε την μεγαλύτερη τιμή τυπικής απόκλισης του θορύβου.

Ο κώδικας για το ερώτημα αυτό βρίσκεται στο αρχείο ex3\_a.m. Μέσα στο script αυτό υπάρχει η παράμετρος  $a$  που αναφέρθηκε παραπάνω και είναι ελεύθερης επιλογής. Για την παράδοση της εργασίας έχει τεθεί ίση με 1, ωστόσο ο διορθωτής μπορεί να την καθορίσει όπως αυτός επιθυμεί για να εκτελέσει πειράματα.

### 3.2 Εκτίμηση για διαφορετικές περιόδους δειγματοληψίας

Μελετούμε την περίοδο δειγματοληψίας για τις εκτιμήσεις των παραμέτρων και για τις δύο περιπτώσεις  $(x(t), u(t))$  μετρήσιμα και  $(q(t), u(t))$  μετρήσιμα. Συγκεκριμένα μελετούμε το πρόβλημα για τιμές δειγματοληψίας από  $0.05s$  ως το  $1s$  με βήμα  $0.05$ . Δίνουμε για κάθε παράμετρο  $m, L, c$  γραφικές παραστάσεις των σφαλμάτων  $\frac{1}{2}(m - \hat{m})^2, \frac{1}{2}(L - \hat{L})^2, \frac{1}{2}(c - \hat{c})^2$ . Όπως ήταν αναμενόμενο για μικρές τιμές δειγματοληψίας, τα σφάλματα των εκτιμήσεων είναι μικρά και για πιο μεγάλες τιμές  $T_s$  οι εκτιμήσεις χειροτερεύουν καθώς έχουμε λιγότερα και πιο ανακριβή δεδομένα. Παρατηρούμε επίσης ότι τα αποτελέσματα για όταν μόνο τα σήματα  $q(t), u(t)$  είναι μετρήσιμα, είναι καλύτερα. Παρακάτω δίνονται οι σχετικές γραφικές παραστάσεις

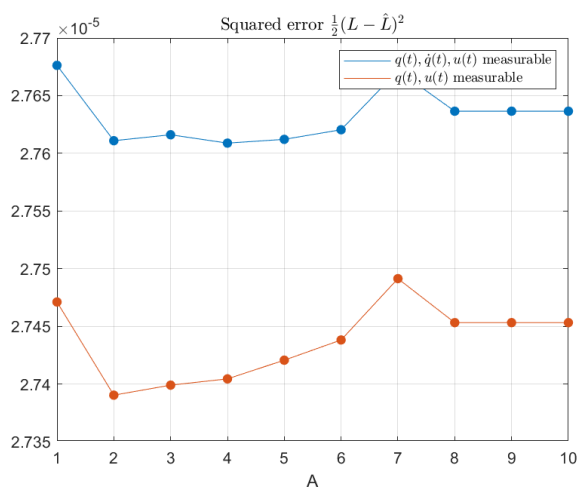


Σχήμα 10

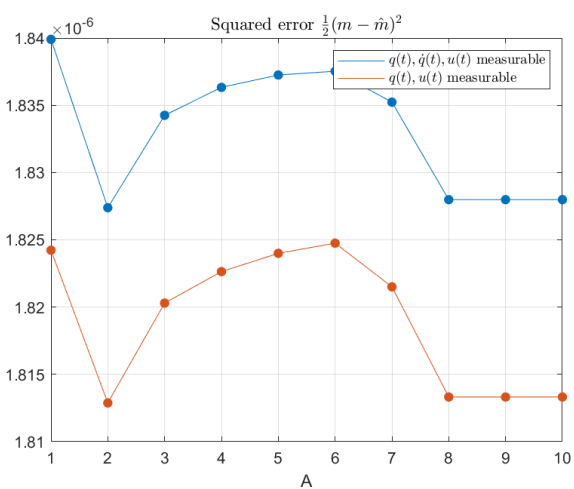
Ο κώδικας για το ερώτημα αυτό βρίσκεται στο αρχείο ex3\_b.m.

### 3.3 Εκτίμηση για διαφορετικές τιμές $A_0$

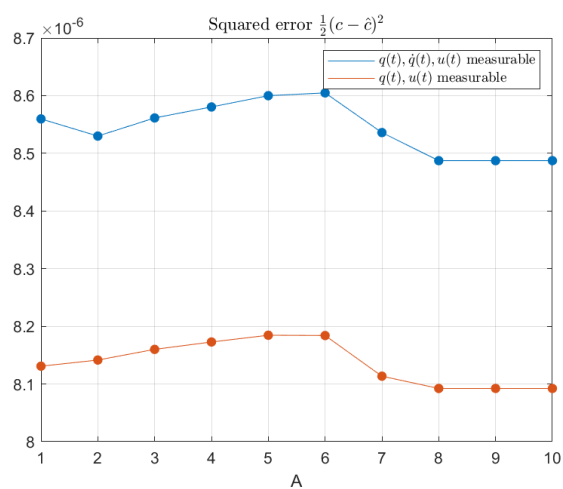
Για διαφορετικές τιμές του  $A_0$  δεν περιμένουμε να αλλάξει η εκτίμηση των παραμέτρων. Πράγματι το σφάλμα είναι πάρα πολύ μικρό οπότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι είναι σταθερή η εκτίμηση των παραμέτρων για τις διάφορες τιμές του πλάτους του σήματος εισόδου. Για τα πειράματα δοκιμάστηκαν τιμές  $A_0$  στο διάστημα  $[1, 10]$  βήμα  $1$ . Παρακάτω δίνονται τα σχετικά διαγράμματα



(α')



(β')



(γ')

Σχήμα 11

Ο κώδικας για το ερώτημα αυτό βρίσκεται στο αρχείο ex3.c.m. Απαιτείται λίγο υπομονή διότι η προσομοίωση τρέχει για 10 επαναλήψεις.