



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ  
И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»



**НГТУ  
НЭТИ** | **Факультет прикладной  
математики и информатики**

Кафедра прикладной математики  
Практическое задание № 1  
по дисциплине «Цифровые модели и оценивание параметров»

### **ЛИНЕЙНЫЕ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ**

Группа ПМ-05

Вариант 1

БОЛДЫРЕВ СЕРГЕЙ

ГРУШЕВ АНДРЕЙ

ПУЧКОВ ДМИТРИЙ

Преподаватели ВАГИН ДЕНИС ВЛАДИМИРОВИЧ

Новосибирск, 2023

## 1 Задание

Задача электроразведки. Однородное полупространство. Источник поля – заземлённая электрическая линия с постоянным значением силы тока  $I$  с координатами электродов  $A(0,0,0)$ ,  $B(100,0,0)$ . Измеряется разность потенциалов в приёмных линиях с координатами  $M_1(200,0,0)$ ,  $N_1(300,0,0)$ ;  $M_2(500,0,0)$ ,  $N_2(600,0,0)$ ;  $M_3(1000,0,0)$ ,  $N_3(1100,0,0)$ . Неизвестным является значение силы тока в источнике.

## 2 Решение

Потенциал электрического поля  $V$ , создаваемый электрической линией  $AB$  с постоянным током, расположенной на поверхности земли, в однородном полупространстве складывается из потенциалов, создаваемых её электродами  $V_{AB} = V_B(r) + V_A(r)$ . Положим, что ток течёт от электрода  $A$  к электроду  $B$ . Для электрода, по которому ток втекает в среду,  $V(r) = \frac{I}{2\pi\sigma r}$ , где  $r$  – это расстояние от точки измерения до электрода. Получаем  $V_{AB} = \frac{I}{2\pi\sigma} \left( \frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right)$ . Следовательно, разность потенциалов в линии  $MN$  будет равна  $V_{AB}^{MN} = \frac{I}{2\pi\sigma} \left[ \left( \frac{1}{r_B^M} - \frac{1}{r_A^M} \right) - \left( \frac{1}{r_B^N} - \frac{1}{r_A^N} \right) \right]$ .

Введём весовые коэффициенты  $w_i$  для каждого из синтетических значений  $\bar{V}_i$  в приёмниках, равные обратным их значениям. Функционал задачи имеет вид:

$$\Phi(I) = \sum_{i=1}^3 (w_i(V_i(I) - \bar{V}_i))^2 \rightarrow \min.$$

Решим задачу методом Гаусса-Ньютона. Так как решение прямой задачи дано в виде простой аналитической формулы, то производные по искомому параметру нет смысла считать численно. Дифференцируя по  $I$ , получаем

$$\frac{\partial V_i(I)}{\partial I} = \frac{1}{2\pi\sigma} \left[ \left( \frac{1}{r_B^M} - \frac{1}{r_A^M} \right) - \left( \frac{1}{r_B^N} - \frac{1}{r_A^N} \right) \right].$$

Таким образом единственный элемент СЛАУ обратной задачи равен

$$a_{11} = \sum_{i=1}^3 \left( w_i \frac{\partial V_i(I)}{\partial I} \right)^2.$$

Единственный элемент правой части:

$$b_1 = - \sum_{i=1}^3 \left[ w_i^2 \frac{\partial V_i(I)}{\partial I} (V_i(I) - \bar{V}_i(I)) \right].$$

Следовательно,  $\Delta I^{01} = \frac{b_1}{a_{11}}$ . И значит новое приближение  $I^1 = I^0 + \Delta I^{01}$ .

Продолжение итерационного процесса даст истинное значение искомой силы тока.

### 3 Результаты работы программы

Примем  $\sigma = 2$ .

Истинное значение силы тока – 5 А.

i	$I^i$	$\Phi(I^i)$
0	5.000000e+00	0.000000e+00
1	5.000000e+00	0.000000e+00

Истинное значение силы тока – 15 А.

i	$I^i$	$\Phi(I^i)$
0	0.000000e+00	3.000000e+00
1	1.500000e+01	0.000000e+00
2	1.500000e+01	0.000000e+00

Истинное значение силы тока – 9000 А.

i	$I^i$	$\Phi(I^i)$
0	0.000000e+00	3.000000e+00
1	9.000000e+03	0.000000e+00
2	9.000000e+03	0.000000e+00

Истинное значение силы тока – 255 А.

i	$I^i$	$\Phi(I^i)$
0	7.000000e+03	2.098963e+03
1	2.550000e+02	0.000000e+00

### 4 Вывод

Так как обратная задача линейна, то решение находится за одну итерацию, при чём неважно больше, меньше, либо равно начальное значение силы тока истинному.

### 5 Код программы

```
#define_USE_MATH_DEFINES

#include<iostream>
#include<cmath>
#include<vector>

using namespace std;

/*
 * Структура точки
 */
struct point
```

```

{
double x, y, z;
point(doublex, doubley, doublez)
{
this->x = x;
this->y = y;
this->z = z;
}
point()
{
this->x = 0.0;
this->y = 0.0;
this->z = 0.0;
}
};

/*
* Структура электрода
*/
structelectrodes
{
point A;
point B;
electrodes(pointA, pointB)
{
this->A =A;
this->B =B;
}
};

/*
* Структура линии
*/
structline
{
point M;
point N;
line(pointM, pointN)
{
this->M =M;
this->N =N;
}
};

/*
* Расстояние между точками
*/
double PointsDistance(pointa, pointb)
{
return sqrt(pow(b.x - a.x, 2) +
pow(b.y - a.y, 2) +
pow(b.z - a.z, 2));
}

/*
* Вспомогательная функция вычисления значения в больших скобках формулы разности потенциалов
*/
double brackets(pointA, pointB, pointM, pointN)
{
return ((1 / PointsDistance(B, M) - 1 / PointsDistance(A, M))
-
(1 / PointsDistance(B, N) - 1 / PointsDistance(A, N)));
}

/*
* Разность потенциалов
*/
double PD(electrodesElectrodes, lineLine, doubleamperage, doublesigma)
{
double k = amperage / (2 * M_PI * sigma);
return k * brackets(Electrodes.A, Electrodes.B, Line.M, Line.N);
}

/*
* Производная разности потенциалов по сигма
*/

```

```

double PDDerivativeBySigma(electrodesElectrodes, lineLine, doubleamperage, doublesigma)
{
    double k = (-1) * amperage / (2 * M_PI * sigma * sigma);
    return k * brackets(Electrodes.A, Electrodes.B, Line.M, Line.N);
}

/*
 * Производная разности потенциалов по силе тока
 */
double PDDerivativeByAmperage(electrodesElectrodes, lineLine, doublesigma)
{
    double k = 1 / (2 * M_PI * sigma);
    return k * brackets(Electrodes.A, Electrodes.B, Line.M, Line.N);
}

int main()
{
    cout << scientific;
    unsignedshort nLines = 3; // Кол-во линий в задаче
    unsignedshort nParams = 1; // Кол-во неизвестных параметров задачи

    unsignedint i, j, k; // Итераторы

#pragmaregion Точки по условию

    electrodes Electrodes = electrodes(point(0, 0, 0), point(100, 0, 0));

    vector<line> Lines;
    Lines.push_back(line(point(200, 0, 0), point(300, 0, 0)));
    Lines.push_back(line(point(500, 0, 0), point(600, 0, 0)));
    Lines.push_back(line(point(1000, 0, 0), point(1100, 0, 0)));

#pragmaendregion

#pragmaregion Истинные значения

    double properAmperage = 5; // Сила тока (I)
    double properSigma = 2; // Удельная электрическая проводимость

#pragmaendregion

#pragmaregion Практические данные

    vector<double> pracV;

    for (i = 0; i < nLines; i++)
        pracV.push_back(PD(Electrodes, Lines[i], properAmperage, properSigma));

#pragmaendregion

#pragmaregion Весовые коэффициенты

    vector<double> w;
    for (i = 0; i < nLines; i++)
        w.push_back(1 / pracV[i]);

#pragmaendregion

    double amperage = 5;
    double sigma = properSigma;
    double delta = 0.0;
    double eps = 1e-7;
    int iters = 0;

    double functional = 0.0;

    for (i = 0; i < nLines; i++)
        functional += pow(w[i]*(PD(Electrodes, Lines[i], amperage, sigma) - pracV[i]), 2);

    vector<vector<double>> A;
    vector<double> b;

    A.resize(nParams);
    b.resize(nParams);

    for (auto& vec : A)

```

```

vec.resize(nParams);

cout << iters << "\t" << amperage << "\t" << functional << endl;

do
{
functional = 0.0;
for (auto& vec : A)
for (auto& x : vec)
x = 0.0;

for (auto& x : b)
x = 0.0;

for (i = 0; i < nParams; i++)
for (j = 0; j < nParams; j++)
for (k = 0; k < nLines; k++)
A[i][j] += pow(w[k] * PDDerivativeByAmperage(Electrodes, Lines[k], sigma), 2);

for (i = 0; i < nParams; i++)
for (k = 0; k < nLines; k++)
b[i] -= w[k] * w[k] *
PDDerivativeByAmperage(Electrodes, Lines[k], sigma) *
(PD(Electrodes, Lines[k], amperage, sigma) - pracV[k]);

delta = b[0] / A[0][0];
amperage += delta;

for (i = 0; i < nLines; i++)
functional += pow(w[i] * (PD(Electrodes, Lines[i], amperage, sigma) - pracV[i]), 2);

iters++;

cout << iters << "\t" << amperage << "\t" << functional << endl;

} while (delta > eps);
return 0;
}

```