Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Челябинский государственный университет»

*КЛАССИЧЕСКОЕ УНИВЕРСИТЕТСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ*

**Ф. Г. Кораблёв, В. В. Кораблёва**

# Дискретная математика: комбинаторика

***Учебное пособие***

Челябинск 2017

# Предисловие

Небольшой объем часов, отводимый на изучение комбинаторики при изучении курса "Дискретная математика" обусловили потребность создания данного пособия. Данное издание, будучи первой частью пособия, включает в себя основные понятия и теоретические положения комбинаторики. При изучении комбинаторики дискретная математика рассматривается не с алгоритмических позиций, а как язык и средство формулирования и организации понятий, описывающих дискретные структуры. В тексте определений не меньше, чем методов и теорем. Определения в тексте сопровождаются примерами, а упражнения приводятся в конце пособия. Их цель — создать правильные мотивировки, побудить читателя к размышлению над обсуждаемыми понятиями и методами. Наряду с теоретическими знаниями приводятся строго обоснованные решения задач. Настоящее пособие имеет целью помочь читателям овладеть техникой решения некоторых задач комбинаторного характера.

Для понимания содержания пособия требуется знание некоторых понятий и фактов из алгебры. Материал организован следующим образом. В первой главе приводиться курс лекций по комбинаторике. В ней обсуждаются основные определения и доказываются необходимые теоремы. Вторая глава посвящена задачам, которые сопровождаются полными и подробными решениями. В ней содержатся и упражнения для самостоятельного решения. В конце пособия приводиться список литературы в котором можно найти дополнительный теоретический и практический материал по рассматриваемой тематике.

Пособие прежде всего ориентируется на студентов математических специальностей, но может быть полезно и студентам других специальностей, изучающих высшую математику и теорию вероятностей. Изучение комбинаторики также будет полезно любому заинтересованному читателю для развития самостоятельных навыков, для решения задач в области дискретной математики и применения методов дискретного анализа в своей профессиональной деятельности.

# Оглавление

# Глава 1

# Основные понятия и теоремы комбинаторики

## 1.1 Операции над множествами

**Определение 1.** *Пусть $X, Y$ — два множества. Положим*

*(1)* $X \cup Y = \{x | x \in X \text{ или } x \in Y\}$,

*(2)* $X \cap Y = \{x | x \in X \text{ и } x \in Y\}$,

*(3)* $X \setminus Y = \{x | x \in X \text{ и } x \notin Y\}$.

*Тогда $X \cup Y$ называется* объединением *множеств $X$ и $Y$, $X \cap Y$ называется* пересечением *множеств $X$ и $Y$, $X \setminus Y$ называется* разностью *множеств $X$ и $Y$. Если $Y \subseteq X$, то $\overline{Y} = X \setminus Y$ называется* дополнением *множества $Y$ в множестве $X$.*

**Определение 2.** *Пусть $X$ – множество, $Y \subseteq X$.* Характеристической функцией *подмножества $Y$ называется функция $\chi_Y \colon X \to \{0, 1\}$, заданная правилом:*

$$\chi_Y(x) = \begin{cases} 1, \text{если } x \in Y \\ 0, \text{если } x \notin Y \end{cases}.$$

**Теорема 1** (Об основных операциях над множествами)**.**

*Операции $\cup$, $\cap$ и $\setminus$ обладают следующими свойствами:*

*(1)* $X \cup Y = Y \cup X$ *и* $X \cap Y = Y \cap X$,

*(2)* $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$ *и* $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$*,*

*(3)* $(X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$ *и* $(X \cap Y) \cup Z = (X \cup Z) \cap (Y \cup Z)$*,*

*(4)* $\overline{X \cap Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$ *и* $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cap \overline{Y}$*,*

*(5)* $X \cup X = X$ *и* $X \cap X = X$*,*

*(6)* $\overline{\overline{X}} = X$*.*

*Доказательство.* Докажем третье свойство

$$(X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z).$$

Для доказательства равенства двух множеств надо показать, что множество из левой части равенства содержится в множестве из правой части равенства, и наоборот, множество из правой части равенства содержится в множестве из левой части равенства.

1. Пусть $x \in (X \cup Y) \cap Z$. Тогда $x \in X \cup Y$ и $x \in Z$. Так как $x \in X \cup Y$, то либо $x \in X$, либо $x \in Y$. Рассмотрим каждый из этих случаев отдельно.

1.1. Пусть $x \in X$. Тогда, так как $x \in Z$, то $x \in X \cap Z$. Следовательно $x \in (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$. Таким образом в этом случае, если $x \in (X \cup Y) \cap Z$, то $x \in (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$. Это означает, что $(X \cup Y) \cap Z \subseteq (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$.

1.2. Пусть $x \in Y$. Тогда, аналогично предыдущему случаю, так как $x \in Z$, то $x \in Y \cap Z$. Следовательно $x \in (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$. Снова получаем, что $(X \cup Y) \cap Z \subseteq (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$.

2. Пусть теперь $x \in (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$. Это означает, что либо $x \in X \cap Z$, либо $x \in Y \cap Z$. Снова рассмотрим каждый из этих случаев по-отдельности.

2.1. Пусть $x \in X \cap Z$. Тогда $x \in X$ и $x \in Z$. Так как $x \in X$, то $x \in X \cup Y$. Следовательно $x \in (X \cup Y) \cap Z$. Получаем, что $(X \cap Z) \cup (Y \cap Z) \subseteq (X \cup Y) \cap Z$.

2.2. Пусть $x \in Y \cap Z$. Тогда $x \in Y$ и $x \in Z$. Снова, так как $x \in Y$, то $x \in X \cup Y$. Следовательно $x \in (X \cup Y) \cap Z$. Получаем, что $(X \cap Z) \cup (Y \cap Z) \subseteq (X \cup Y) \cap Z$.

Таким образом мы получили, что $(X \cup Y) \cap Z \subseteq (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$ и $(X \cap Z) \cup (Y \cap Z) \subseteq (X \cup Y) \cap Z$. Следовательно $(X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$.

Доказательство оставшихся свойств из формулировки теоремы оставляется в качестве упражнения. $\square$

**Определение 3.** *Пусть $X$ — множество. Множество всех подмножеств множества $X$ называется* булеаном *и обозначается* $2^X$.

**Определение 4.** Мощностью *конечного множества $X$ называется число элементов в множестве $X$ и обозначается* $|X|$.

**Теорема 2** (Свойства характеристической функции).

*Пусть $A$, $B$ — подмножества множества $X$. Тогда справедливы следующий равенства:*

*(1)* $\chi_{A\cap B}(x) = \chi_A(x)\chi_B(x)$,

*(2)* $\chi_{\overline{A}}(x) = 1 - \chi_A(x)$,

*(3)* $\chi_{A\cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x)\chi_B(x)$,

*(4)* $\sum\limits_{x\in X} \chi_A(x) = |A|$.

*Доказательство.* Докажем третье равенство

$$\chi_{A\cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x)\chi_B(x).$$

Пусть $x \in X$. Возможны четыре случая: $x \in A \setminus B$, $x \in B \setminus A$, $x \in A \cap B$ и $x \in X \setminus (A \cup B)$. Покажем, что равенство справедливо во всех четырех случаях.

1. Пусть $x \in A \setminus B$. Тогда $x \in A \cup B$, $x \in A$ и $x \notin B$. Следовательно $\chi_{A\cup B}(x) = 1$, $\chi_A(x) = 1$ и $\chi_B(x) = 0$. Тогда

$$\chi_{A\cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x)\chi_B(x).$$

2. Аналогичным образом равенство справедливо в случае, когда $x \in B \setminus A$.

3. Пусть $x \in A \cap B$. Тогда $x \in A$ и $x \in B$. Следовательно

$$\chi_{A\cup B}(x) = \chi_A(x) = \chi_B(x) = 1.$$

Отсюда следует, что $\chi_{A\cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x)\chi_B(x)$.

4. Пусть, наконец, $x \in X \setminus (A \cup B)$. Тогда $x \notin A$ и $x \notin B$. Следовательно $\chi_{A\cup B}(x) = \chi_A(x) = \chi_B(x) = 0$. Отсюда следует, что

$$\chi_{A\cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x)\chi_B(x).$$

Доказательство оставшихся трех равенств из формулировки теоремы оставляется в качестве упражнения. □

**Определение 5.** *Пусть для каждого* $i \in I$ *множество* $X_i$ *является подмножеством множества* $X$*. Если* $X = \bigcup_{i \in I} X_i$*, то совокупность* $\{X_i | i \in I\}$ *подмножеств множества* $X$ *называется* покрытием *множества* $X$*.*

**Определение 6.** *Покрытие* $\{X_i | i \in I\}$ *множества* $X$ *называется* разбиением*, если*

*(1)* $X_i \cap X_j = \emptyset$*, при* $i \neq j$*,*

*(2)* $|X_i| > 0$ *для любого* $i \in I$*.*

**Пример.**

1. Пусть $X = \mathbb{N}$. Рассмотрим множества
$X_0 = \{x \in X | x \equiv 0(3)\}$, т. е. $X_0 = \{3, 6, 9, \ldots\}$,
$X_1 = \{x \in X | x \equiv 1(3)\}$, т. е. $X_1 = \{1, 4, 7, 10, \ldots\}$,
$X_2 = \{x \in X | x \equiv 2(3)\}$, т. е. $X_2 = \{2, 5, 8, 11, \ldots\}$.
Тогда $\{X_0, X_1, X_2\}$ является разбиением множества $X$.

2. Пусть $X = (0; 1) \subset \mathbb{R}$. Рассмотрим бесконечное семейство подмножеств $\{X_n = (\frac{1}{n}; 1) \subset X | n \geqslant 2\} = \{X_2 = (\frac{1}{2}; 1),\ X_3 = (\frac{1}{3}; 1), \ldots\}$.
Тогда $\{X_2, X_3, X_4, \ldots\}$ является бесконечным покрытием множества $X$.

**Теорема 3** (Правило суммы)**.**

*Если* $\{X_i | i = 1, 2, \ldots, n\}$ *– разбиение множества* $X$*, и для каждого* $i = 1, \ldots, n$ *мощность* $|X_i|$ *конечна, то*

$$|X| = \sum_{j=1}^{n} |X_j|.$$

*Доказательство.* Доказательство проведем индукцией по числу элементов $n$ в разбиении множества $X$.

*База индукции.* Пусть $n = 1$. Тогда $X = X_1$. Следовательно $|X| = |X_1|$. Пусть теперь $n = 2$. Тогда $X = X_1 \cup X_2$ и $X_1 \cap X_2 = \emptyset$. Рассмотрим характеристическую функцию $\chi_X$. С одной стороны

$$\sum_{x \in X} \chi_X(x) = |X|.$$

С другой стороны

$$\sum_{x\in X}\chi_X(x)=\sum_{x\in X}\chi_{X_1\cup X_2}(x)=\sum_{x\in X}(\chi_{X_1}(x)+\chi_{X_2}(x)-\chi_{X_1\cap X_2}(x))=$$
$$=\sum_{x\in X}\chi_{X_1}(x)+\sum_{x\in X}\chi_{X_2}(x)=|X_1|+|X_2|.$$

*Предположение индукции.* Пусть при всех $k<n$ утверждение теоремы справедливо.

*Шаг индукции.* Пусть $X=\bigcup\limits_{j=1}^{n}X_j$. Рассмотрим множество $X'=\bigcup\limits_{j=1}^{n-1}X_j$. Если $\{X_1,\dots,X_n\}$ является разбиением множества $X$, то $\{X_1,\dots,X_{n-1}\}$ является разбиением множества $X'$. Теперь по предположению индукции имеем $|X'|=\sum\limits_{j=1}^{n-1}|X_j|$.

Далее, $\{X',X_n\}$ является разбиением множества $X$. В частности, $X'\cap X_n=\emptyset$. Тогда получаем $|X|=|X'|+|X_n|=\sum\limits_{j=1}^{n-1}|X_j|+|X_n|=\sum\limits_{j=1}^{n}|X_j|$. □

**Теорема 4** (О числе всех подмножеств)**.**
*Если $X$ — конечное множество, то $|2^X|=2^{|X|}$.*

*Доказательство.* Докажем индукцией по числу элементов в множестве $X$.

*База индукции.* Пусть $|X|=0$. Тогда $X=\emptyset$ и $2^\emptyset=\{\emptyset\}$. Следовательно $|2^\emptyset|=|\{\emptyset\}|=1=2^0$.

*Предположение индукции*: пусть утверждение теоремы верно при $|X|<n$.

*Шаг индукции*: пусть $|X|=n>0$. Зафиксируем элемент $a\in X$ и положим $C_0=\{Y\in 2^X|a\notin Y\}$ и $C_1=\{Y\in 2^X|a\in Y\}$. Тогда

$$C_0\cap C_1=\emptyset \text{ и } 2^X=C_0\cup C_1.$$

Следовательно $\{C_0,C_1\}$ является разбиением множества $2^X$. По правилу суммы имеем $\left|2^X\right|=|C_0|+|C_1|$. Заметим, что мощности множеств $C_0$ и $C_1$ совпадают, и равны мощности множества всех подмножеств множества $X\setminus\{a\}$. Имеем $\left|2^X\right|=2|C_0|=2\cdot\left|2^{X\setminus\{a\}}\right|=2^{|X|}$. □

**Определение 7.** *Пусть $X_1,X_2,\dots,X_n$ — множества. Множество*

$$\{(x_1,\dots,x_n)|x_i\in X_i, i=1,\dots,n\}$$

*называется* прямым произведением *множеств* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *и обозначается* $X_1 \times \ldots \times X_n$.

**Теорема 5** (Правило произведения)**.**

*Для любых конечных множеств* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *справедливо равенство*

$$|X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n| = |X_1| \cdot |X_2| \cdot \ldots \cdot |X_n|.$$

*Доказательство.* Докажем индукцией по числу сомножителей $n$ в прямом произведении.

*База индукции.* Пусть $n = 2$. Заметим, что $X_1 \times X_2 = \bigcup\limits_{i=1}^{|X_1|} \{u_i\} \times X_2$, где $X_1 = \{u_1, u_2, \ldots, u_{|X_1|}\}$. Более того, для любых $i, j = 1, 2, \ldots, |X_1|$

$$\text{при } i \neq j: \ (\{u_i\} \times X_2) \cap (\{u_j\} \times X_2) = \emptyset, \text{ и } |\{u_i\} \times X_2| = |X_2| \neq 0.$$

Следовательно совокупность $\{\{u_1\} \times X_2, \ldots, \{u_{|X_1|}\} \times X_2\}$ является разбиением множества $X_1 \times X_2$. Теперь по правилу суммы получаем

$$|X_1 \times X_2| = \sum_{i=1}^{|X_1|} |\{u_i\} \times X_2| = \sum_{i=1}^{|X_1|} |X_2| = |X_1| \cdot |X_2|.$$

*Предположение индукции.* Пусть утверждение теоремы справедливо для прямого произведения $k < n$ сомножителей.

*Шаг индукции.* Рассмотрим множество $X' = X_1 \times \ldots \times X_{n-1}$. Тогда $X_1 \times \ldots \times X_n = X' \times X_n$. Следовательно

$$|X_1 \times \ldots \times X_n| = |X' \times X_n| = |X'| \cdot |X_n| = |X_1| \cdot \ldots \cdot |X_{n-1}| \cdot |X_n|.$$

$\square$

## 1.2 Комбинаторные числа и их рекуррентные соотношения

**Определение 8.** *Пусть $X$ — множество мощности $n > 0$, и $k \geqslant 0$. Число различных подмножеств мощности $k$ в множестве $X$ называется* числом сочетаний из $n$ по $k$ *и обозначается $C_n^k$.*

**Пример.** Рассмотрим $X = \{1, 2, 3\}$ и $k = 2$. Тогда существует ровно три различных подмножества мощности 2: $\{1, 2\}, \{2, 3\}$ и $\{1, 3\}$. Следовательно $C_3^2 = 3$.

**Теорема 6** (О рекуррентном соотношении для числа сочетаний)**.**

*(1)* $C_n^0 = C_n^n = 1$,

*(2)* $C_n^k = 0$ *при* $k > n$,

*(3)* $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$.

*Доказательство.* 1. Справедливость равенств $C_n^0 = 1$ и $C_n^n = 1$ следует из того, что единственное подмножество мощности 0 — пустое множество $\emptyset$, а единственное подмножество мощности $n$ — все множество $X$.

2. $C_n^k = 0$ при $k > n$ так как не существует подмножеств мощности $k > n$ в множестве из $n$ элементов.

3. Пусть $n, k > 0$ и $C = \{Y \subseteq X \| Y| = k\}$. Отметим, что $|C| = C_n^k$. Зафиксируем некоторый элемент $a \in X$ и рассмотрим два множества

$$C_0 = \{Y \subseteq X \| Y| = k \text{ и } a \notin Y\} \text{ и } C_1 = \{Y \subseteq X \| Y| = k \text{ и } a \in Y\}.$$

Так как $C = C_0 \cup C_1$ и $C_0 \cap C_1 = \emptyset$, то совокупность $\{C_0, C_1\}$ является разбиением множества $C$. Заметим, что

(1) Элемент $a$ не принадлежит ни одному множеству из $C_0$, и поэтому $|C_0| = C_{n-1}^k$,

(2) Любое множество из $C_1$ получается из некоторого подмножества $Y' \subseteq X \setminus \{a\}$ мощности $k - 1$ присоединением элемента $a$, и поэтому $|C_1| = C_{n-1}^{k-1}$.

По правилу суммы имеем: $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$. □

**Определение 9.** *Пусть $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Число способов образования произведений из $n+1$ упорядоченных сомножителей относительно неассоциативного умножения называется* числом Каталана *и обозначается $q_n$.*

**Пример.** Для $n = 2$ существует ровно два способа образовать произведения элементов $a_0, a_1, a_2$:

$$(a_0 \cdot a_1) \cdot a_2 \text{ и } a_0 \cdot (a_1 \cdot a_2).$$

Следовательно $q_2 = 2$.

**Замечание.** Если $a_0, a_1, \dots, a_n$ — сомножители, то $q_n$ равно числу способов расставить скобки так, чтобы на каждом шаге вычислялось произведение двух элементов.

**Теорема 7** (О рекуррентном соотношении для числа Каталана)**.**

*(1)* $q_0 = 1$,

*(2)* $q_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} q_i \cdot q_{n-i-1}$.

*Доказательство.* 1. $q_0 = 1$ следует из определения числа Каталана.

2. Разобьем всевозможные расстановки скобок на $n$ классов в зависимости от положения двух пар внешних скобок. Если первая пара скобок содержит $i+1$ множителей, то после расстановки двух пар внешних скобок, получится произведение $(a_0, a_1, \dots, a_i) \cdot (a_{i+1}, \dots, a_n)$, $i = 0, \dots, n-1$. Внутри первой пары скобок существует ровно $q_i$ способов расставить скобки, в внутри второй пары — ровно $q_{n-i-1}$ способов. Тогда общее число способов расставить скобки в этом случае по правилу произведения равно $q_i \cdot q_{n-i-1}$. Требуемое рекуррентное соотношение получается применением правила суммы. □

**Определение 10.** *Пусть $X$ — множество мощности $n$, и $k \geqslant 0$. Число неупорядоченных разбиений множества $X$ на $k$ подмножеств называется* числом Стирлинга второго рода *и обозначается $S_n^k$. Положим $S_0^0 = 1$.*

**Пример.** Рассмотрим $X = \{1, 2, 3\}$ и $k = 2$. Существует ровно три различных разбиения множества $X$ на два подмножества:

$$\{\{1\}, \{2, 3\}\}, \{\{2\}, \{1, 3\}\}, \{\{3\}, \{1, 2\}\}.$$

Следовательно $S_3^2 = 3$.

**Теорема 8** (О рекуррентном соотношении для числа Стирлинга второго рода)**.**

*(1)* $S_0^0 = 1, S_0^1 = 0$*,*

*(2)* $S_n^k = S_{n-1}^{k-1} + k \cdot S_{n-1}^k$*.*

*Доказательство.* 1. Заметим, что $S_n^k = 0$ при $k > n$, так как не существует разбиений множества из $n$ элементов на $k > n$ непустых подмножеств. В частности $S_0^1 = 0$.

2. Пусть $X$ — множество мощности $n > 0$. Зафиксируем некоторый элемент $a \in X$. Чтобы получить разбиение множества $X$ на $k$ подмножеств, можно разбить множество $X \setminus \{a\}$ на $k$ подмножеств и поместить элемент $a \in X$ в любой из них $k \cdot S_{n-1}^k$ способами или образовать отдельное одноэлементное подмножество разбиения $\{a\}$ и разбить $X \setminus \{a\}$ на $k-1$ подмножество $S_{n-1}^{k-1}$ способами. Отсюда по правилу суммы $S_n^k = S_{n-1}^{k-1} + k \cdot S_{n-1}^k$. □

**Следствие 1** (О числах $S_n^2$)**.**
$S_n^2 = 2^{n-1} - 1$ *при* $n \geqslant 2$*.*

*Доказательство.* Отметим, что по рекуррентному соотношению для числа Стирлинга второго рода для $k = 2$ имеем:

$$S_n^2 = S_{n-1}^1 + 2 \cdot S_{n-1}^2.$$

Также отметим, что $S_n^1 = 1$ при $n \geqslant 1$, так как существует только одно разбиение множества из $n$ элементов на одно подмножество.

Докажем,что $S_n^2 = 2^{n-1} - 1$, индукцией по числу элементов $n$ в множестве.

*База индукции.* Пусть $n = 2$. Тогда $S_2^2 = S_1^1 + 2 \cdot S_1^2 = 1 + 2 \cdot 0 = 1 = 2^{2-1} - 1$.

*Предположение индукции.* Пусть утверждение верно при любом $k < n$.

*Шаг индукции.* $S_n^2 = S_{n-1}^1 + 2 \cdot S_{n-1}^2 = 1 + 2 \cdot (2^{n-2} - 1) = 2^{n-1} - 1$. □

**Определение 11.** *Пусть* $n \geqslant 0$*. Число всех неупорядоченных разбиений множества мощности* $n$ *называется* числом Белла *и обозначается* $B_n$*, т.е.* $B_n = \sum\limits_{k=0}^{n} S_n^k$ *и* $B_0 = 1$*.*

**Теорема 9** (О рекуррентном соотношении для числа Белла)**.**

*Пусть* $n \geqslant 1$*. Тогда* $B_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k \cdot B_{n-k-1}$*.*

*Доказательство.* Пусть $X$ — множество мощности $n \geqslant 1$. Зафиксируем некоторый элемент $a \in X$. Пусть $Y$ — элемент разбиения множества $X$, содержащий элемент $a$, и пусть $|Y \setminus \{a\}| = k$. Тогда $0 \leqslant k \leqslant n-1$.

Множество $X \setminus Y$ можно разбить $B_{n-k-1}$ способами. Число способов выбрать подмножество $Y$ в множестве $X$ равно $C_{n-1}^{k}$, так как один элемент $a$ заведомо лежит в множестве $Y$. Следовательно число способов разбить множество $X$ так, чтобы элемент $a$ принадлежал подмножеству мощности $k+1$ равно $C_{n-1}^{k} \cdot B_{n-k-1}$. Теперь утверждение теоремы следует из правила суммы. □

## 1.3 Свойства комбинаторных чисел

**Определение 12.** *Число упорядоченных подмножеств мощности $k$ в множестве из $n$ элементов называется* числом размещений из $n$ по $k$ *и обозначается через $A_n^k$.*

**Теорема 10** (О числе размещений)**.**

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)\dots(n-k+1).$$

*Доказательство.* Справедливость теоремы следует из правила произведения. Пусть $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ — упорядоченная последовательность. Её построение осуществляется за $k$ шагов: 1-ым шагом выбираем элемент $x_1$ различными $n$ способами. Второй элемент $x_2$ выбираем $n-1$ способами, и так далее. Последний элемент $x_k$ можно выбрать $n-k+1$ различными способами. □

**Теорема 11** (О числе биекций)**.**

*Пусть $X$ — множество мощности $n$. Тогда число различных биекций $f\colon X \to X$ равно $n!$.*

*Доказательство.* Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n$ — элементы множества $X$. Каждая биекция $f\colon X \to X$ задается соответствием:

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \updownarrow & \updownarrow & \dots & \updownarrow \\ f(x_1) & f(x_2) & \dots & f(x_n) \end{array},$$

в котором все элементы $f(x_1), \dots, f(x_n)$ различны. Тогда каждая биекция однозначно определяется упорядоченной последовательностью

$$(f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)).$$

Всего таких различных последовательностей по предыдущей теореме ровно $A_n^n = n!$ штук. □

**Замечание.** Задание биекции на множестве $X$ мощности $n$ эквивалентно упорядочиванию элементов множества $X$. Тогда число всевозможных упорядоченных множеств мощности $n$ равно $n!$.

**Теорема 12** (О числе сочетаний)**.**

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

*Доказательство.* По определению $C_n^k$ равно числу подмножеств мощности $k$ в множестве из $n$ элементов. Каждому из этих подмножеств соответствует $k!$ упорядоченных подмножеств. Следовательно , по правилу произведения число упорядоченных подмножеств мощности $k$ в множестве из $n$ элементов равно $C_n^k \cdot k!$. С другой стороны эта величина равна $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$. Отсюда получаем, что

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

□

**Теорема 13** (Биномиальная формула)**.**

$$(1+t)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot t^k.$$

*Доказательство.* Докажем индукцией по числу $n$.

*База индукции.* Пусть $n = 1$. Тогда $(1+t)^1 = C_1^0 + t \cdot C_1^1$.

*Предположений индукции.* Пусть утверждение теоремы верно для любого $k < n$.

*Шаг индукции.*

$$\begin{aligned}(1+t)^n &= (1+t)^{n-1} \cdot (1+t) = \\ &= (1 + C_{n-1}^1 t + C_{n-1}^2 t^2 + \ldots + C_{n-1}^{n-1} t^{n-1}) \cdot (1+t) = \\ &= (1 + C_{n-1}^1 t + C_{n-1}^2 t^2 + \ldots + C_{n-1}^{n-1} t^{n-1}) + \\ &+ (t + C_{n-1}^1 t^2 + C_{n-1}^2 t^3 + \ldots + C_{n-1}^{n-1} t^n) = \\ &= 1 + t(C_{n-1}^1 + C_{n-1}^0) + t^2(C_{n-1}^2 + C_{n-1}^1) + \ldots + t^n C_{n-1}^{n-1}\end{aligned}$$

Используя рекуррентное соотношение для числа сочетаний

$$C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} = C_n^k$$

и равенство

$$C_{n-1}^{n-1} = 1 = C_n^n,$$

получаем требуемое в условии теоремы соотношение. □

**Теорема 14** (Свойства числа сочетаний).

*Имеют место следующие соотношения:*

*(1)* $C_n^k = C_n^{n-k}$,

*(2)* $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$,

*(3)* $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0$,

*(4)* *(Свёртка Вандермонда)* $C_{n+m}^k = \sum\limits_{s=0}^{k} C_n^s C_m^{k-s}$, $m \geqslant k$, $n \geqslant k$.

*Доказательство.* 1. Справедливость этого равенства следует из теоремы 12 о числе сочетаний $C_n^k$.

2. Справедливость этого равенства следует из биномиальной формулы (теорема 13). В самом деле: $2^n = (1+1)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \cdot 1^k$.

3. Справедливость этого равенства также следует из биномиальной формулы аналогично предыдущему случаю. В самом деле:

$$0 = (1-1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot (-1)^k.$$

4. Для доказательства этого равенства вычислим значение $(1+t)^{n+m}$ двумя разными способами. С одной стороны, по биномиальной формуле

$$(1+t)^{n+m} = \sum_{k=0}^{n+m} C_{n+m}^k t^k.$$

С другой стороны:

$$\begin{aligned}(1+t)^{n+m} &= (1+t)^n \cdot (1+t)^m = \sum_{l=0}^{n} C_n^l t^l \cdot \sum_{s=0}^{m} C_m^s t^s = \\ &= (1 + C_n^1 t + C_n^2 t^2 + \ldots + C_n^n t^n) \cdot (1 + C_m^1 t + C_m^2 t^2 + \ldots + C_m^m t^m)\end{aligned}$$

Коэффициент при слагаемом $t^k$ после раскрытия скобок равен сумме произведений вида $C_n^i \cdot C_m^j$, для которых $i + j = k$. Следовательно, коэффициент при $t^k$ равен $\sum\limits_{s=0}^{k} C_n^s \cdot C_m^{k-s}$. Сравнивая полученную величину с коэффициентом при $t^k$ в биномиальной формуле, получаем требуемое равенство. □

**Определение 13.** *Пусть $X$ — множество мощности $n$,*

$$\nu\colon X \to \mathbb{N} \cup \{0\}$$

*и* $\sum\limits_{x \in X} \nu(x) = k$. *Пара* $(X, \nu)$ *называется* мультимножеством мощности $k$ *над множеством* $X$. *Значение* $\nu(x)$ *называется* кратностью *вхождения элемента $x$ в мультимножество* $(X, \nu)$.

**Пример.** Пусть $X = \{a_1, a_2, a_3\}$. Мультимножеством мощности 3 является, например, набор элементов $\{a_1, a_1, a_1\}$, при этом $\nu(a_1) = 3$, $\nu(a_2) = 0$ и $\nu(a_3) = 0$.

Примером мультимножества мощности 6 служит набор элементов

$$\{a_1, a_2, a_2, a_3, a_3, a_3\},$$

при этом $\nu(a_1) = 1$, $\nu(a_2) = 2$ и $\nu(a_3) = 3$.

**Замечание.** Можно рассматривать упорядоченные мультимножества, которые характеризуются не только кратностью вхождения элементов множества $X$, но и порядком, в котором эти элементы образуют множество. Примерами различных упорядоченных мультимножеств мощности 5 над множеством $\{0, 1\}$ являются наборы

$$(0, 0, 1, 1, 1) \text{ и } (0, 1, 0, 1, 1).$$

Эти наборы совпадают, как мультимножества, но различаются, как упорядоченные мультимножества.

**Определение 14.** *Пусть $X$ — множество мощности $n$. Через $\overline{C_n^k}$ будем обозначать число различных мультимножеств мощности $k$ над множеством $X$.*

**Теорема 15** (О числе мультимножеств)**.**

$$\overline{C_n^k} = C_{n+k-1}^k$$

*Доказательство.* Пусть $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Набор из таких $n$ чисел

$$k_1 = \nu(x_1), k_2 = \nu(x_2), \ldots, k_n = \nu(x_n),$$

что $\sum\limits_{i=1}^{n} k_i = k$, однозначно задаёт мультимножество мощности $k$. Следовательно число $\overline{C_n^k}$ равно числу различных неотрицательных решений уравнения

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_n = k.$$

Рассмотрим прямое произведение множеств $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$, а именно

$$\mathbb{Z}_2^{n+k-1} = \underbrace{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \ldots \times \mathbb{Z}_2}_{n+k-1 \text{ раз}}.$$

Сопоставим каждому решению $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ уравнения $\sum\limits_{i=1}^{n} k_i = k$ элемент из множества $\mathbb{Z}_2^{n+k-1}$ следующим образом:

$$(k_1, k_2, \ldots, k_n) \longleftrightarrow (\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{k_1}, 0, \underbrace{1, \ldots, 1}_{k_2}, 0, \ldots, 0, \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{k_n}).$$

Тогда число решений уравнения совпадает с числом наборов длины $n + k - 1$, содержащих ровно $k$ единиц (и ровно $n - 1$ ноль). Каждый такой набор можно построить, если выбрать $k$ мест из $n + k - 1$, на которые ставим единицы, а остальные места заполнить нулями. Значит число таких наборов равно $C_{n+k-1}^k$. □

**Замечание.** Число $\overline{C_n^k}$ совпадает с числом способов разложить $k$ одинаковых шаров по $n$ различным ящикам. В самом деле, каждое разложение шаров по ящикам задаётся такой последовательностью из $n$ чисел $k_1, k_2, \ldots, k_n$, что $\sum\limits_{i=1}^{n} k_i = k$. Число $k_i$ показывает, сколько шаров лежит в $i$-ом ящике. Из доказательства теоремы следует, что число таких последовательностей в точности равно $\overline{C_n^k}$.

**Определение 15.** *Пусть $X$ — множество мощности $n$. Число упорядоченных разбиений множества $X$ на $m$ подмножеств мощностей $k_1, \ldots, k_m$ называется* полиномиальным коэффициентом *и обозначается $C_n^{k_1,\ldots,k_m}$.*

**Пример.** 1. Пусть $m = n$, и пусть $k_1 = k_2 = \ldots = k_m = 1$. Тогда упорядоченное разбиение множества $X$ мощности $n$ на столько же подмножеств мощности 1 — это упорядочивание множества $X$. Следовательно $C_n^{1,\ldots,1} = n!$.

2. Пусть $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, и пусть $m = 2$. Тогда любое упорядоченное разбиение множества $X$ на два подмножества однозначно определяется выбором

первого подмножества разбиение. Второе подмножество разбиения сдержит все оставшиеся элементы множества $X$. Следовательно $C_n^{k_1,k_2} = C_n^{k_1,n-k_1} = C_n^{k_1}$.

**Замечание.** Полиномиальный коэффициент $C_n^{k_1,\ldots,k_m}$ совпадает с числом способов разложить $n$ различных шаров (элементов множества $X$) по $m$ различным ящикам (упорядоченым подмножествам разбиения) так, чтобы в $i$-ом ящике лежало ровно $k_i$ шаров.

**Теорема 16** (О числе упорядоченных мультимножеств)**.**

*Пусть $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ — множество мощности $n$, и пусть $(X, \nu)$ — такое мультимножество мощности $k$ над множеством $X$, что $\nu(x_i) = k_i$. Тогда число таких упорядоченных мультимножеств равно $C_k^{k_1,\ldots,k_n}$.*

*Доказательство.* Рассмотрим $n$ различных ящиков, помеченных элементами множества $X$. Тогда каждое упорядоченное мультимножество мощности $k$ над множеством $X$ задает разложение $k$ различных шаров (помеченных числами $1, 2, \ldots, k$) по этим ящикам. При этом, если элемент $x_i \in X$ стоит на $j$-ом месте в упорядоченном мультимножестве, то шар с номером $j$ лежит в ящике с номером $x_i$. Наоборот, каждому разложению шаров по ящикам можно сопоставить упорядоченное мультимножество. Следовательно, число таких упорядоченных мультимножеств совпадает с числом способов разложить $k$ различных шаров по $n$ ящикам, то есть с величиной $C_k^{k_1,\ldots,k_n}$. □

**Теорема 17** (О полиномиальных коэффициентах)**.**

$$C_n^{k_1,\ldots,k_m} = \frac{n!}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_m!}.$$

*Доказательство.* Построение упорядоченного разбиения множества мощности $n$ на $m$ подмножеств $A_1, \ldots, A_m$ мощностей $k_1, \ldots, k_m$ соответственно осуществляется за $m$ шагов.

1-ый шаг. Множество $A_1$ мощности $k_1$ можно выбрать $C_n^{k_1}$ различными способами.

2-ой шаг. Множество $A_2$ мощности $k_2$ можно выбрать из оставшихся элементов множества $X \setminus A_1$ различными $C_{n-k_1}^{k_2}$ способами.

$\vdots$

$m$-ый шаг. Последнее множество $A_m$ мощности $k_m$ можно выбрать $C_{n-k_1-k_2-\ldots-k_{m-1}}^{k_m} = C_{k_m}^{k_m} = 1$ способом.

По правилу произведения получаем, что

$$
\begin{aligned}
C_n^{k_1,\dots,k_m} &= C_n^{k_1}\cdot C_{n-k_1}^{k_2}\cdot\ldots\cdot C_{n-k_1-\ldots-k_{m-2}}^{k_{m-1}}\cdot C_{n-k_1-\ldots-k_{m-1}}^{k_m} = \\
&= \frac{n!}{k_1!(n-k_1)!}\cdot\frac{(n-k_1)!}{k_2!(n-k_1-k_2)!}\cdot\ldots\cdot\frac{(n-k_1-\ldots-k_{m-1})!}{k_m!0!} = \\
&= \frac{n!}{k_1!\ldots k_m!}.
\end{aligned}
$$

□

**Следствие 2** (О числе неупорядоченных разбиений)**.**

*Число неупорядоченных разбиений множества мощности* $n$ *на* $m$ *подмножеств мощностей* $k_1,\dots,k_m$ *равно*

$$\frac{1}{m!}\cdot C_n^{k_1,\dots,k_m}.$$

*Доказательство.* В самом деле, каждое неупорядоченное разбиение на $m$ подмножеств задает $m!$ упорядоченных разбиений. □

**Следствие 3** (О числах Стирлинга второго рода)**.**

$$S_n^k = \frac{1}{k!}\cdot\sum_{n_1+\ldots+n_k=n} C_n^{n_1,\dots n_k},$$

*где суммирование ведётся по всем натуральным* $n_1,\dots,n_k$*.*

*Доказательство.* Справедливость формулы следует из комбинаторного смысла чисел Стирлинга 2-го рода: число $S_n^k$ равно числу неупорядоченных разбиений множества мощности $n$ на $k$ подмножеств таких мощностей $n_1,\dots,n_k$, что $n_1+n_2+\ldots+n_k=n$. □

**Следствие 4** (О сумме полиномиальных коэффициентов)**.**

$$\sum_{k_1+\ldots+k_m=n} C_n^{k_1,\dots,k_m} = m^n,$$

*где суммирование ведётся по всем целым неотрицательным* $k_1,\dots,k_m$*.*

*Доказательство.* В самом деле, величина $C_n^{k_1,\dots,k_m}$ совпадает с числом способов разложить $n$ различных шаров по $m$ различным ящикам так, чтобы в них лежало $k_1, \ldots, k_m$ шаров соответственно. С другой стороны, по правилу произведения, число $m^n$ совпадает с общим числом способов разложить $n$ различных шаров по $m$ различным ящикам. Теперь искомая формула следует из правила суммы. $\square$

**Теорема 18** (Полиномиальная формула)**.**

$$(x_1 + \ldots + x_m)^n = \sum_{k_1+\ldots+k_m=n} C_n^{k_1,\ldots,k_m} \cdot x_1^{k_1} \ldots x_m^{k_m},$$

*где суммирование ведётся по всем целым неотрицательным* $k_1, \ldots, k_m$.

*Доказательство.* Коэффициент при $x_1^{k_1} \ldots x_m^{k_m}$ в выражении $(x_1 + \ldots + x_m)^n$ равен числу способов выбрать слагаемое $x_1$ ровно $k_1$ раз, слагаемое $x_2$ ровно $k_2$ раз и так далее. Таким образом этот коэффициент равен числу упорядоченных разбиений множества из $n$ множителей на $m$ подмножеств, то есть числу $C_n^{k_1,\ldots,k_m}$. $\square$

## 1.4 Принцип включения-исключения

**Теорема 19** (Формула включения-исключения).

*Пусть $X_1, \dots, X_n$ — подмножества множества $X$. Тогда*

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} X_i\right| = \sum_{\{i_1,\dots,i_k\}\subseteq\{1,\dots,n\}} (-1)^{k+1}\left|\bigcap_{j=1}^{k} X_{i_j}\right|,$$

*где суммирование берётся по всем $k = 1, 2, \dots, n$ и всем возможным непустым подмножествам мощности $k$ множества $\{1, \dots, n\}$.*

**Замечание.** В развёрнутом виде формула включения-исключения имеет вид:

$$\begin{aligned}|X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n| = \sum_{i=1}^{n} |X_i| - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} |X_i \cap X_j| + \\ + \sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n} |X_i \cap X_j \cap X_k| - \ldots + \\ + (-1)^{n+1}|X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_n|.\end{aligned}$$

*Доказательство.* Заметим, что:

1. $\prod\limits_{i=1}^{n}(1-a_i) = (1-a_1)(1-a_2)\ldots(1-a_n) = 1 + \sum\limits_{\{i_1,\dots,i_k\}\subseteq\{1,\dots,n\}} (-1)^k a_{i_1}\ldots a_{i_k}$. Последнее равенство здесь получается раскрытием скобок и приведением подобных.

2. Если $Y = \bigcap\limits_{i=1}^{n} X_i$, то $\chi_Y(x) = \prod\limits_{i=1}^{n} \chi_{X_i}(x)$ по теореме 2 (пункт 1) о свойствах характеристической функции.

3. $\sum\limits_{x\in X} \chi_X(x) = |X|$ по теореме 2 (пункт 4) о свойствах характеристической функции.

4. Так как $\overline{\bigcup\limits_{i=1}^{n} X_i} = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \overline{X_i}$, то $\bigcup\limits_{i=1}^{n} X_i = \overline{\bigcap\limits_{i=1}^{n} \overline{X_i}}$.

Пусть $\widehat{X} = \bigcup\limits_{i=1}^{n} X_i$. Вычислим функцию $\chi_{\widehat{X}}(x)$:

$$\begin{aligned}\chi_{\widehat{X}}(x) &= \chi_{\overline{\bigcap\limits_{i=1}^{n}\overline{X_i}}}(x) = 1 - \chi_{\bigcap\limits_{i=1}^{n}\overline{X_i}}(x) = 1 - \prod_{i=1}^{n}\chi_{\overline{X_i}}(x) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1-\chi_{X_i}(x)) = \\ &= 1 - (1 + \sum_{\{i_1,\ldots,i_k\}\subseteq\{1,\ldots,n\}} (-1)^k \cdot \chi_{X_{i_1}}(x)\cdot\ldots\cdot\chi_{X_{i_k}}(x)) = \\ &= \sum_{\{i_1,\ldots,i_k\}\subseteq\{1,\ldots,n\}} (-1)^{k+1} \cdot \chi_{X_{i_1}}(x)\cdot\ldots\cdot\chi_{X_{i_k}}(x) = \\ &= \sum_{\{i_1,\ldots,i_k\}\subseteq\{1,\ldots,n\}} (-1)^{k+1} \cdot \chi_{X_{i_1}\cap\ldots\cap X_{i_k}}(x).\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}|\widehat{X}| &= \sum_{x\in X}\chi_{\widehat{X}}(x) = \sum_{x\in X}\sum_{\{i_1,\ldots,i_k\}\subseteq\{1,\ldots,n\}} (-1)^{k+1}\cdot\chi_{X_{i_1}\cap\ldots\cap X_{i_k}}(x) = \\ &= \sum_{\{i_1,\ldots,i_k\}\subseteq\{1,\ldots,n\}} (-1)^{k+1}\sum_{x\in X}\chi_{X_{i_1}\cap\ldots\cap X_{i_k}}(x) = \sum_{\{i_1,\ldots,i_k\}\subseteq\{1,\ldots,n\}} (-1)^{k+1}\left|\bigcap_{j=1}^{k} X_{i_j}\right|.\end{aligned}$$

□

**Определение 16.** *Подстановка* $\sigma \in S_n$ *называется* беспорядком, *если для* $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *выполняется* $\sigma(i) \neq i$.

**Пример.** Подстановка $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ является беспорядком, а подстановка $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ — нет.

**Теорема 20** (О числе беспорядков)**.**

*Число беспорядков* $d_n$ *в* $S_n$ *равно* $n! \cdot \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

*Доказательство.* Для каждого $i = 1, \ldots, n$ положим

$$X_i = \{\sigma \in S_n | \sigma(i) = i\} \subseteq S_n.$$

Тогда число беспорядков

$$d_n = |S_n| - \left|\bigcup_{i=1}^{n} X_i\right| = n! - \left|\bigcup_{i=1}^{n} X_i\right| = n! - \left(\sum_{\{i_1,\ldots,i_k\}\subseteq\{1,\ldots,n\}} (-1)^{k+1}\left|\bigcap_{j=1}^{k} X_{i_j}\right|\right).$$

Заметим, что $\bigcap\limits_{j=1}^{k} X_{i_j} = \{\sigma \in S_n | \sigma(i_j) = i_j, \forall j = 1, \ldots, k\}$. Следовательно

$$\left|\bigcap_{j=1}^{k} X_{i_j}\right| = (n-k)!$$

Тогда

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} X_i\right| = \sum_{\{i_1,\ldots,i_k\}\subseteq\{1,\ldots,n\}} (-1)^{k+1} \cdot (n-k)! = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \cdot C_n^k \cdot (n-k)!$$

Следовательно

$$d_n = n! - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \cdot C_n^k \cdot (n-k)! = n! - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot (n-k)! =$$
$$= n!(1 - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{k!}) = n! \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

□

**Теорема 21** (О числе сюръекций)**.**

*Пусть $X, Y$ — множества, $|X| = n, |Y| = m$. Тогда число $D_n^m$ различных сюръективных отображений $X \to Y$ равно*

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \cdot (m-k)^n \cdot C_m^k.$$

**Замечание.** Число $D_n^m$ называется *числом Стирлинга первого рода.*

*Доказательство.* Число сюръекций совпадает с числом разложений $n$ различных шаров по $m$ различным ящикам так, чтобы ни один ящик не был пустым. Обозначим $F$ — множество всех разложений $n$ различных шаров по $m$ ящикам, и $F_i$ — множество всех разложений, при которых $i$-ый ящик пуст. Тогда искомое число сюръекций равно

$$|F| - \left|\bigcup_{i=1}^{m} F_i\right|.$$

По формуле включения-исключения

$$\left|\bigcup_{i=1}^{m} F_i\right| = \sum_{\{i_1,\ldots,i_k\}\subseteq\{1,\ldots,n\}} (-1)^{k+1} \left|\bigcap_{j=1}^{k} F_{i_j}\right|.$$

Множество $\bigcap\limits_{j=1}^{k} F_{i_j}$ состоит из таких разложений шаров, при которых ящики с номерами $i_1, \ldots, i_k$ пусты, а остальные разложены произвольным образом. Получаем

$$\left|\bigcap_{j=1}^{k} F_{i_j}\right| = (m-k)^n.$$

Тогда

$$|F| - \left|\bigcup_{i=1}^{m} F_i\right| = m^n - \sum_{\{i_1,\ldots,i_k\}\subseteq\{1,\ldots,n\}} (-1)^{k+1} \cdot (m-k)^n =$$
$$= m^n - \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+1} \cdot C_m^k \cdot (m-k)^n = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \cdot (m-k)^n \cdot C_m^k.$$

□

**Следствие 5** (О числах Стирлинга второго рода)**.**

$$S_n^k = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \cdot (k-i)^n \cdot C_k^i.$$

*Доказательство.* Число сюръекций из множества мощности $n$ в множество мощности $k$ совпадает с числом способов разложить $n$ различных шаров по $k$ различным ящикам так, чтобы ни один ящик не был пустым. По определению число Стирлинга второго рода $S_n^k$ равно числу разбиений множества мощности $n$ на $k$ непустых подмножеств, то есть числу разложений $n$ различных шаров по $k$ одинаковым ящикам. Искомая формула следует и того, что $S_n^k \cdot k! = D_n^k$. □

## 1.5 Линейные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами

**Определение 17.** *Пусть $f\colon \mathbb{N}\cup\{0\}\to\mathbb{R}$. Соотношение вида*

$$f(n+k)=a_1\cdot f(n+k-1)+\ldots+a_k\cdot f(n),$$

*где $a_i\in\mathbb{R}$, $i=1,\ldots,k$, называется* линейным рекуррентным соотношением порядка $k$ с постоянными коэффициентами $a_1,\ldots,a_k$.

**Определение 18.** *Бесконечная последовательность $\{x_0,x_1,\ldots,x_n,\ldots\}$ называется* решением *рекуррентного соотношения $f(n+k)=\sum\limits_{i=1}^{k}a_i\cdot f(n+k-i)$, если при подстановке $f(n)=x_n$ для каждого $n=0,1,2,\ldots$ это соотношение становится тождественным.*

**Пример.** Рассмотрим рекуррентное соотношение

$$f(n+2)=3f(n+1)-2f(n).$$

Последовательность $\{1,2,4,8,16,\ldots,2^n,\ldots\}$ является его решением. В самом деле, подставим $f(n)=2^n$ и $f(n+1)=2^{n+1}$, получим:

$$3\cdot 2^{n+1}-2\cdot 2^n=2^{n+1}(3-1)=2^{n+2}=f(n+2).$$

**Лемма 1** (О линейности решений рекуррентных соотношений)**.**

*Пусть $f(n+2)=a_1f(n+1)+a_2f(n)$ — линейное рекуррентное соотношение порядка 2. Пусть две последовательности*

$$\{x_0,x_1,\ldots,x_n,\ldots\}\ \text{и}\ \{y_0,y_1,\ldots,y_n,\ldots\}$$

*являются его решениями. Тогда для $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ последовательность*

$$\{\alpha x_0+\beta y_0,\alpha x_1+\beta y_1,\ldots,\alpha x_n+\beta y_n,\ldots\}$$

*также является решением исходного рекуррентного соотношения.*

*Доказательство.* Подставим $f(n)=\alpha x_n+\beta y_n$ и $f(n+1)=\alpha x_{n+1}+\beta y_{n+1}$. Получим:

$$\begin{aligned} a_1 f(n+1) + a_2 f(n) &= a_1(\alpha x_{n+1} + \beta y_{n+1}) + a_2(\alpha x_n + \beta y_n) = \\ &= \alpha(a_1 x_{n+1} + a_2 x_n) + \beta(a_1 y_{n+1} + a_2 y_n) = \\ &= \alpha x_{n+2} + \beta y_{n+2} = f(n+2). \end{aligned}$$

□

**Замечание.** Лемма о линейности решений рекуррентных соотношений справедлива и для линейных рекуррентных соотношений порядка, большего двух.

**Определение 19.** *Пусть* $f(n+k) = \sum\limits_{i=1}^{k} a_i \cdot f(n+k-i)$ *— линейное рекуррентное соотношение порядка* $k$*.* Характеристическим многочленом *этого рекуррентного соотношения называется многочлен*

$$\mathcal{F}(\lambda) = \lambda^k - a_1\lambda^{k-1} - a_2\lambda^{k-2} - \ldots - a_{k-1}\lambda - a_k.$$

**Лемма 2** (О корнях характеристического многочлена)**.**

*Пусть* $f(n+2) = a_1 f(n+1) + a_2 f(n)$ *— линейное рекуррентное соотношение порядка 2,* $\mathcal{F}(\lambda)$ *— его характеристический многочлен,* $\rho$ *— его корень. Тогда последовательность*

$$\{1, \rho, \rho^2, \ldots, \rho^n, \ldots\}$$

*является решением исходного рекуррентного соотношения.*

*Доказательство.* Заметим, что $\mathcal{F}(\lambda) = \lambda^2 - a_1\lambda - a_2$. Тогда, так как $\rho$ — корень характеристического многочлена $\mathcal{F}(\lambda)$, то

$$\rho^2 = a_1\rho + a_2.$$

Подставим в рекуррентное соотношение $f(n) = \rho^n$, $f(n+1) = \rho^{n+1}$ и $f(n+2) = \rho^{n+2}$, получим:

$$a_1 f(n+1) + a_2 f(n) = a_1\rho^{n+1} + a_2\rho^n = \rho^{n+2} = f(n+2).$$

□

**Замечание.** Лемма о корнях характеристического многочлена справедлива и для линейных рекуррентных соотношений порядка, большего двух.

**Теорема 22** (Об общем виде решения рекуррентного соотношения).

*Пусть* $f(n+2) = a_1 f(n+1) + a_2 f(n)$ *— линейное рекуррентное соотношение порядка* 2, *причем коэффициенты* $a_1, a_2$ *не равны нулю одновременно. Пусть* $\mathcal{F}(\lambda)$ *— характеристический многочлен этого рекуррентного соотношения, и пусть* $\rho_1, \rho_2$ *— его корни. Тогда*

*(1) Если* $\rho_1 \neq \rho_2$, *то любое решение рекуррентного соотношения имеет вид* $\{x_0, \ldots, x_n, \ldots\}$, *где* $x_n = \alpha\rho_1^n + \beta\rho_2^n$;

*(2) Если* $\rho_1 = \rho_2$, *то любое решение рекуррентного соотношения имеет вид* $\{x_0, \ldots, x_n, \ldots\}$, *где* $x_n = (\alpha n + \beta)\rho_1^n$;

*Доказательство.* 1. Из леммы о линейности решений и леммы о корнях характеристического многочлена следует, что последовательность $\{x_0, \ldots, x_n, \ldots\}$, где $x_n = \alpha\rho_1^n + \beta\rho_2^n$ является решением исходного рекуррентного соотношения. Покажем, что любое решение имеет такой вид.

Заметим, что любое решение однозначно определяется первыми двумя элементами последовательности $x_0, x_1$. Поэтому решение рекуррентного соотношения представимо в нужном виде тогда и только тогда, когда для любых чисел $x_0, x_1$ система уравнений

$$\begin{cases} \alpha\rho_1^0 + \beta\rho_2^0 = x_0 \\ \alpha\rho_1^1 + \beta\rho_2^1 = x_1 \end{cases}$$

имеет решение относительно неизвестных $\alpha, \beta$.

Непосредственно вычисляется, что решением этой системы являются

$$\alpha = \frac{x_0\rho_2 - x_1}{\rho_2 - \rho_1},\ \beta = \frac{x_1 - \rho_1 x_0}{\rho_2 - \rho_1}.$$

Решение всегда существует, так как $\rho_1 \neq \rho_2$

2. Покажем, что если $\rho$ — корень кратности 2 характеристического многочлена, то последовательность $\{x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$, где $x_n = n \cdot \rho^n$, является решением исходного рекуррентного соотношения $f(n+2) = a_1 f(n+1) + a_2 f(n)$.

Так как характеристический многочлен $\mathcal{F}(\lambda)$ имеет корень $\rho$ кратности 2, то

$$\lambda^2 - a_1\lambda - a_2 = (\lambda - \rho)^2.$$

Отсюда находим, что

$$a_1 = 2\rho \text{ и } a_2 = -\rho^2$$

Подставим $f(n) = n \cdot \rho^n$ в рекуррентное соотношение и получим:

$$\begin{aligned} a_1 f(n+1) + a_2 f(n) &= a_1(n+1)\rho^{n+1} + a_2 n\rho^n = \\ &= 2(n+1)\rho^{n+2} - n\rho^{n+2} = (n+2)\rho^{n+2} = f(n+2). \end{aligned}$$

Покажем теперь, что любое решение исходного рекуррентного соотношения $f(n+2) = a_1 f(n+1) + a_2 f(n)$ представимо в нужном виде. Для этого, как и ранее, достаточно проверить, что при любых $x_0, x_1$ система

$$\begin{cases} (\alpha \cdot 0 + \beta)\rho^0 = x_0 \\ (\alpha \cdot 1 + \beta)\rho^1 = x_1 \end{cases}$$

имеет решение.

Непосредственно вычисляется, что решением являются числа

$$\alpha = \frac{x_1 - \rho x_0}{\rho}, \;\; \beta = x_0.$$

Из условия теоремы следует, что $\rho \neq 0$, следовательно решение системы всегда существует. $\square$

**Замечание.** В общем случае, если $\rho$ является корнем кратности $s$ характеристического многочлена $\mathcal{F}(\lambda)$, то в общем виде решения рекуррентного соотношения $f(n+k) = \sum\limits_{i=1}^{k} a_i f(n+k-i)$ ему соответствует слагаемое

$$(C_1 \cdot n^{s-1} + C_2 \cdot n^{s-2} + \ldots + C_s) \cdot \rho^n.$$

**Пример.** Найдем решение рекуррентного соотношения

$$f(n+2) = f(n+1) + f(n),$$

задающего последовательность чисел Фибоначчи

$$\{1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots\}$$

Характеристический многочлен рекуррентного соотношения

$$f(n+2) = f(n+1) + f(n)$$

имеет вид

$$\mathcal{F}(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1.$$

Находим, что

$$\rho_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ и } \rho_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

являются его корнями.

Тогда общее решение рекуррентного соотношения представляется в следующем виде:

$$x_n = \alpha \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Неизвестные коэффициенты $\alpha, \beta$ найдем из условия: $x_0 = 1$ и $x_1 = 1$. Для этого запишем систему

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \beta \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 \end{cases}.$$

Решим её и получим числа

$$\alpha = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}\ , \beta = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}.$$

Подставим найденные числа $\alpha$ и $\beta$ в общее решение рекуррентного соотношения и получим, что

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \right).$$

# Глава 2

# Практикум

## 2.1 Примеры решения задач

Этот раздел посвящён решениям задач. Все задачи, рассматриваемые здесь, обладают одной общей темой — они связаны с разложениями шаров по ящикам. Однако, для решения, казалось бы, похожих задач, зачастую требуется использовать различные приёмы и подходы.

**Задача 1.** *Сколькими способами можно разложить* 12 *одинаковых шаров по* 4 *различным ящикам?*

*Решение.* То, что шары одинаковые означает, что при разложении важно количество шаров в каждом ящике, но какие именно шары для этого используются — не важно. Расположим все 12 шаров в ряд. Тогда достаточно вставить три перегородки между ними. Изобразим это на рисунке так:

○○○|○○○○|○○○○|○

При этом самая левая группа из трёх шаров помещается в первый ящик, вторая группа из четырёх шаров — во второй, третья группа из четырёх шаров — в третий, а последняя (самая правая) группа из одного шара помещается в четвёртый ящик. Если две перегородки поставить рядом, то соответствующий ящик считается пустым. Такую расстановку перегородок между шарами удобно записывать в виде последовательности длины 15, состоящей из 12 нулей (шаров) и 3 единиц (перегородок). Например, последовательность, соответствующая рисунку, выглядит следующим образом:

$$(0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0).$$

Задача о нахождении числа способов разложить 12 одинаковых шаров по 4 различным ящикам сводится к задаче нахождения числа последовательностей длины 15, состоящих ровно из 12 нулей и 3 единиц. Чтобы построить одну такую последовательность достаточно выбрать 3 места из 15, на которые поместить по единице, а все остальные места последовательности заполнить нулями. Число таких последовательностей совпадает с количеством способов выбрать подмножество мощности 3 в множестве из 15 элементов. Это в точности комбинаторное число

$$C_{15}^{3} = \frac{15!}{3! \cdot 12!} = 455.$$

*Ответ.* 455.

Задачу 1 можно решить иначе. Из замечания после теоремы 15 следует, что число способов разложить $k$ одинаковых шаров по $n$ различным ящикам совпадает с числом различных мультимножеств мощности $k$ над множеством мощности $n$. Поэтому число способов разложить 12 одинаковых шаров по 4 различным ящикам равно

$$\overline{C_{4}^{12}} = C_{12+4-1}^{12} = C_{15}^{3} = 455.$$

**Задача 2.** *Сколькими способами можно разложить* 8 *одинаковых шаров по* 3 *одинаковым ящикам?*

*Решение.* Если все шары и ящики считаются одинаковыми, то искомая в условии задачи величина совпадает с числом способов представить число 8 в виде коммутативной суммы трёх неотрицательных целых слагаемых. Коммутативность означает, что два представления, отличающиеся лишь порядком слагаемых, совпадают.

Обозначим через $\widetilde{P_n^k}$ число способов представить число $n$ в виде коммутативной суммы $k$ неотрицательных слагаемых, через $P_n^k$ число способов представить число $n$ в виде коммутативной суммы ровно $k$ положительных слагаемых. Тогда число способов разложить 8 одинаковых шаров по 3 одинаковым ящикам совпадает с величиной $\widetilde{P_8^3}$. Найдём её.

Заметим, что:

(1) $\widetilde{P_n^k} = P_n^1 + P_n^2 + \ldots + P_n^k$,

(2) $P_n^n = P_n^1 = 1$ и $P_n^k = 0$ при $k > n$,

(3) $P_n^k = \widetilde{P_{n-k}^k}$,

(4) $P_n^2 = [\frac{n}{2}]$.

Третье соотношение следует из того, что любое представление числа $n-k$ в виде суммы $k$ неотрицательных слагаемых получается из представления числа $n$ в виде суммы $k$ положительных слагаемых уменьшением каждого слагаемого на 1. Четвёртое соотношение следует из того, что представление числа $n$ в виде суммы двух положительных числе однозначно определяется выбором меньшего слагаемого.

С помощью этих свойств находим, что:

$$\begin{aligned}\widetilde{P_8^3} &= P_8^1 + P_8^2 + P_8^3 = 1 + \widetilde{P_{8-2}^2} + \widetilde{P_{8-3}^3} = \\ &= 1 + P_6^1 + P_6^2 + P_5^1 + P_5^2 + P_5^3 = \\ &= 1 + 1 + \left[\frac{6}{2}\right] + 1 + \left[\frac{5}{2}\right] + \widetilde{P_{5-3}^3} = \\ &= 8 + P_2^1 + P_2^2 + P_2^3 = 8 + 1 + 1 + 0 = 10.\end{aligned}$$

*Ответ.* 10.

**Задача 3.** *Сколькими способами можно разложить* 6 *различных шаров по* 3 *одинаковым ящикам?*

*Решение.* Так как шары считаются различными, то для удобства будем считать, что все они пронумерованы числами от 1 до 6. Все ящики одинаковы, поэтому требуется найти число способов разбить это множество чисел на 3 подмножества (возможно пустых). Число способов разбить множество мощности $n = 6$ на $k$ непустых подмножеств — это в точности число Стирлинга второго рода $S_6^k$. Поэтому общее число способов разложить 6 различных шаров по 3 одинаковым ящикам совпадает с суммой

$$S_6^1 + S_6^2 + S_6^3.$$

Из определения числа Стирлинга второго рода (определение 10) следует, что $S_6^1 = 1$, а из следствия 1, что

$$S_6^2 = 2^{6-1} - 1 = 2^5 - 1 = 32 - 1 = 31.$$

С помощью рекуррентного соотношения для числа Стирлинга второго рода (теорема 8) находим, что

$$\begin{aligned} S_6^3 &= S_5^2 + 3 \cdot S_5^3 = \\ &= 2^{5-1} - 1 + 3 \cdot (S_4^2 + 3 \cdot S_4^3) = \\ &= 15 + 3 \cdot (2^{4-1} - 1) + 9 \cdot (S_3^2 + 3 \cdot S_3^3) = \\ &= 15 + 3 \cdot 7 + 9 \cdot (2^{3-1} - 1) + 27 \cdot 1 = 90. \end{aligned}$$

Таким образом, число способов разложить 6 различных шаров по 3 одинаковым ящикам равно $1 + 31 + 90 = 122$.

*Ответ.* 122.

**Задача 4.** *Скольким способами можно разложить* 12 *различных шаров по* 4 *различным ящикам?*

*Решение.* Для каждого из 12 шаров существует ровно 4 разных способа положить его в ящик. Один шар можно положить либо в первый, либо во второй, либо в третий, либо в четвёртый ящик. Все шары различны, и по правилу произведения (теорема 5) получаем, что общее число способов разложить 12 различных шаров по 4 различным ящикам равна

$$4^{12} = 16777216.$$

*Ответ.* 16777216.

**Задача 5.** *Скольким способами можно разложить* 6 *белых и* 8 *чёрных шара по* 6 *различным ящикам?*

*Решение.* Сначала найдём отдельно число способов разложить 6 белых шаров по 6 различным ящикам, и число способов разложить 8 чёрных шаров по 6 различным ящикам.

Шары одного цвета считаются одинаковыми. Используем решение задачи 1. Находим число способов вставить 5 перегородок между 6 шарами, и поэтому число способов разложить 6 белых шаров по 6 ящикам равно $N_1 = C_{11}^5$. Аналогично, чтобы разложить 8 чёрных шаров по 6 ящикам, найдём число способов вставить 5 перегородок между 8 шарами, и получим $N_2 = C_{13}^5$.

Разложения белых и чёрных шаров по ящикам независимы. Следовательно по правилу произведения (теорема 5), число способов разложить 6 белых и 8 чёрных шаров по 6 различным ящикам равно

$$N_1 \cdot N_2 = C_{11}^5 \cdot C_{13}^5 = \frac{11!}{5! \cdot 6!} \cdot \frac{13!}{5! \cdot 8!} = 84942.$$

*Ответ.* 84942.

**Задача 6.** *Сколькими способами можно разложить* 6 *белых и* 8 *чёрных шара по* 13 *различным ящикам так, чтобы ни один ящик не оказался пустым?*

*Решение.* Заметим, что общее число шаров $6+8$ на 1 больше числа ящиков. Поэтому, если все шары разложены так, что ни один ящик не пуст, то во всех ящиках, кроме одного, лежит по одному шару, а в одном ящике — два шара. Рассмотрим три случая в зависимости от того, какие цвета имеют эти два шара.

*Случай 1.* В ящике лежат два белых шара. Тогда во всех остальных 12-ти ящиках лежат 4 белых шара и 8 чёрных шаров. Так как каждое такое разложение однозначно задаётся выбором четырёх ящиков, в которые кладутся белые шары (а во все остальные ящики — чёрные), то число таких разложений совпадает с числом сочетаний $C_{12}^4$. Так как в качестве ящика, в который положены два белых шара, можно выбрать один из 13-ти различных ящиков, то общее число способов разложить 6 белых и 8 чёрных шара по 13 различным ящикам так, чтобы ни один ящик не оказался пустым и в одном из них лежали два белых шара равно $13 \cdot C_{12}^4$.

*Случай 2.* В ящике лежат два чёрных шара. Аналогично предыдущему случаю, оставшиеся шары можно разложить по 12-ти различным ящикам ровно $C_{12}^6$ способами (так как достаточно разложить 6 белых шаров, а во все остальные ящики положить чёрные). Тогда, общее число способов разложить 6 белых и 8 чёрных шара по 13 различным ящикам так, чтобы ни один ящик не оказался пустым и в одном из них лежали два чёрных шара равно $13 \cdot C_{12}^6$.

*Случай 3.* В ящике лежит один белый и один чёрный шар. Аналогично предыдущим двум случаям, число способов разложить оставшиеся шары по 12-ти различным ящикам равно $C_{12}^5$ (так как достаточно разложить 5 белых шаров по 12 различным ящикам, а во все остальные положить по одному чёрному шару). Тогда, общее число способов разложить 6 белых и 8 чёрных шара по 13 различным ящикам так, чтобы ни один ящик не оказался пустым и в одном из них лежали чёрный и белый шар равно $13 \cdot C_{12}^5$.

Заметим, что среди разложений шаров во всех трёх случаях нет одинаковых. Следовательно, по правилу суммы (теорема 3), число способов разложить 6 белых и 8 чёрных шаров по 13 различным ящикам так, чтобы ни один ящик не оказался пустым, равно

$$13 \cdot C_{12}^4 + 13 \cdot C_{12}^6 + 13 \cdot C_{12}^5 = 28743.$$

*Ответ.* 28743.

**Задача 7.** *Сколькими способами можно разложить* 25 *одинаковых шаров по* 6 *различным ящикам так, чтобы в каждом ящике оказалось не менее двух шаров?*

*Решение.* Положим в каждый ящик по два шара. После этого останется 13 одинаковых шаров, которые можно произвольным образом раскладывать по 6 ящикам. Тогда число способов разложить 25 одинаковых шаров по 6 различным ящикам так, чтобы в каждом ящике оказалось не менее двух шаров, совпадает с числом способов разложить 13 одинаковых шаров по 6 ящикам. Аналогично решению задачи 1, это число совпадает с числом различных последовательностей длины 18, состоящих из 5 единиц (перегородок) и 13 нулей (шаров). Число таких последовательностей совпадает с числом сочетаний

$$C_{18}^5 = \frac{18!}{5! \cdot 13!} = 8568.$$

*Ответ.* 8568.

**Задача 8.** *Сколькими способами можно разложить* 25 *одинаковых шаров по* 6 *различным ящикам так, чтобы в каждом ящике оказалось не более пяти шаров?*

*Решение.* Положим в каждый ящик по 5 шаров (максимальное возможное количество). Для этого потребуется 30 шаров. По условию задачи даны лишь 25 шаров, поэтому искомое число разложений совпадает с числом способов вынуть 5 шаров из 6 ящиков. Так как в каждом ящике уже лежит по 5 шаров, то вынимать мы их можем произвольным образом.

Отметим, что число способов вынуть 5 шаров из 6 ящиков совпадает с числом способов разложить 5 шаров по 6 ящикам (вынимание шара — это добавление шара, уничтожающего один из лежащих в ящике). Поэтому число способов разложить 25 одинаковых шаров по 6 различным ящикам так, чтобы в каждом ящике оказалось не более пяти шаров совпадает с числом способов разложить 5 одинаковых шаров по 6 различным ящикам. Аналогично решению задачи 1, это число совпадает с числом последовательностей длины 10, состоящих из 5 нулей (шаров) и 5 единиц (перегородок). Число таких последовательностей — это в точности число сочетаний

$$C_{10}^{5} = \frac{10!}{5! \cdot 5!} = 252.$$

*Ответ.* 252.

**Задача 9.** *Сколькими способами можно разложить* 25 *одинаковых шаров по* 6 *различным ящикам так, чтобы оказалось не более двух пустых ящиков?*

*Решение.* Рассмотрим три случая в зависимости от того, сколько остаётся пустых ящиков после разложения всех шаров.

*Случай 1.* Пустых ящиков не остаётся. Найдём число способов разложить 25 одинаковых шаров по 6 различным ящикам так, чтобы в каждом из них был хотя бы один шар. Аналогично решению задачи 7, поместим в каждый ящик по одному шару. После этого останется 19 шаров, которые по 6 ящикам можно раскладывать произвольным образом. Аналогично решению задачи 1, число способов разложить 19 одинаковых шаров по 6 различным ящикам совпадает с числом различных последовательностей длины 24, состоящих из 19 нулей (шаров) и 5 единиц (перегородок). Число таких последовательностей совпадает с числом сочетаний $C_{24}^{5}$. Получаем, что число способов разложить 25 одинаковых шаров по 6 различным ящикам так, чтобы в каждом из них был хотя бы один шар, равно $C_{24}^{5}$.

*Случай 2.* Остаётся ровно один пустой ящик. Сначала будем считать, что пустым остаётся первый ящик. Найдём число способов разложить 25 одинаковых шаров по 5 различным ящикам (по всем, кроме первого) так, чтобы в каждом из них был хотя бы один шар. Аналогично случаю 1, кладём по одному шару в каждый ящик, а оставшиеся 20 шаров раскладываем по 5 ящикам произвольным образом. Число способов сделать это равно $C_{24}^4$.

В качестве пустого ящика можно выбрать один из 6, следовательно по правилу произведения (теорема 5), число способов разложить 25 одинаковых шаров по 6 различным ящикам так, чтобы остался ровно один пустой ящик, равно $6 \cdot C_{24}^4$.

*Случай 3.* Остаётся ровно два пустых ящика. Сначала будем считать, что пустыми остаются первый и второй ящики. Найдём число способов разложить 25 шаров по 4 ящикам так, чтобы в каждом из них был хотя бы один шар. Аналогично случаям 1 и 2, кладём по одному шару в каждый ящик, а оставшийся 21 шар раскладываем по 4 ящикам произвольным образом. Число способов сделать это равно $C_{24}^3$.

В качестве пустых ящиков можно выбрать любые 2 ящика из 6. Число способов выбрать два этих ящика в точности равно числу сочетаний $C_6^2$. Следовательно по правилу произведения (теорема 5), число способов разложить 25 одинаковых шаров по 6 различным ящикам так, чтобы осталось ровно два пустых ящика, равно $C_6^2 \cdot C_{24}^3$.

Заметим, что среди разложений во всех трёх случаях нет одинаковых. Следовательно по правилу суммы (теорема 3), общее число способов разложить 25 одинаковых шаров по 6 различным ящикам так, чтобы оказалось не более двух пустых ящиков, равно

$$C_{24}^5 + 6 \cdot C_{24}^4 + C_6^2 \cdot C_{24}^3 = 136620.$$

*Ответ.* 136620.

**Задача 10.** *Найти коэффициент при $x^{50}$ в многочлене*

$$(1 + x + x^2 + \ldots + x^{100})^4.$$

*Решение.* Перемножим многочлен $1+x+x^2+\ldots+x^{100}$ сам с собой четыре раза без приведения подобных. Каждое слагаемое при этом получается в результате произведения четырёх одночленов, взятых по одному из каждого множителя. Так как коэффициенты при одночленах в исходном многочлене все равны единице, то коэффициент при $x^{50}$ в многочлене $(1+x+x^2+\ldots+x^{100})^4$

совпадает с числом способов выбрать из каждой скобки $(1+x+x^2+\ldots+x^{100})$ по одному одночлену так, чтобы их сумма степеней равнялась 50. Это совпадает с числом способов разложить 50 одинаковых шаров (степеней одночлена $x^{50}$) по 4 различным ящикам (множителям).

Аналогично решению задачи 1, число способов разложить 50 одинаковых шаров по 4 различным ящикам совпадает с числом различных последовательностей длины 53, состоящих из 50 нулей (шаров) и 3 единиц (перегородок). Число таких последовательностей — это в точности число сочетаний

$$C_{53}^3 = \frac{53!}{3! \cdot 50!} = 23426.$$

*Ответ.* 23426.

**Задача 11.** *Найти коэффициент при* $x^{320}$ *в многочлене*

$$(1 + x + x^2 + \ldots + x^{100})^4.$$

*Решение.* Способ решения этой задачи аналогичен решению задачи 10. Искомый коэффициент при $x^{320}$ связан с числом способов разложить 320 одинаковых шаров (степеней одночлена) по 4 различным ящикам (множителям). Но, так как максимальная степень одночлена в каждой скобке 100, то в каждый ящик можно положить не более 100 шаров. В этом состоит принципиальное отличие этой задачи от предыдущей.

Как и при решении задачи 8, положим в каждый ящик по 100 шаров, при этом будут использованы лишние 80 шаров. Найдём число способов вынуть 80 шаров из 4 ящиков. Это число совпадает с числом способов разложить 80 одинаковых шаров по 4 различным ящикам (так как вынимание шара из ящика эквивалентно опусканию шара, уничтожающего один из лежащих в ящике). Эта величина равна

$$C_{83}^3 = \frac{83!}{3! \cdot 80!} = 91881.$$

*Ответ.* 91881.

## 2.2 Задачи для самостоятельного решения

**1.** Найти число подмножеств $X$ множества $\{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J\}$, обладающие следующими свойствами:

(1) $|X| = 3$?

(2) $|X| = 5$, $A \in X$?

(3) $|X| = 6$, $B \notin X$?

(4) $|X| = 7$, $\{A, B\} \subset X$, $C \notin X$?

(5) $|X| \leqslant 5$?

**2.** Найти число подмножеств множества $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, состоящих из трёх чётных и двух нечётных чисел.

**3.** Сколько чисел от 0 до 999 999, в которых нет двух рядом стоящих одинаковых цифр?

**4.** На окружности последовательно отмечены точки $A_1, \ldots, A_{12}$. Сколько существует:

(1) Хорд с концами в отмеченных точках?

(2) Треугольников с вершинами в отмеченных точках?

(3) Выпуклых четырёхугольников с вершинами в отмеченных точках?

(4) Треугольников с вершинами в отмеченных точках, не имеющих общих точек с прямой $A_2A_8$?

(5) Треугольников с вершинами в отмеченных точках, имеющих общие точки с прямой $A_1A_5$?

**5.** На окружности отмечено $n$ точек. Точки соединяются всевозможными хордами. Известно, что никакие три из них не пересекаются в одной точке внутри круга. Найти:

(1) Число точек пересечения хорд внутри круга?

(2) количество частей, на которые хорды делят круг?

**6.** С использование рекуррентного соотношения для чисел сочетаний найти $C_6^4$.

**7.** С использование рекуррентного соотношения для чисел Стирлигна второго рода найти $S_4^3$, $S_5^3$, $S_6^4$.

**8.** Вычислить числа Белла $B(3)$ и $B(5)$.

*Указание.* $B_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k \cdot B_{n-k-1}$, $B_0 = 1$.

**9.** Сколько существует способов разложить 20 различных шаров по 4 различным ящикам так, чтобы в них лежало $4, 5, 8$ и 3 шара соответственно.

**10.** Сколькими способами можно разложить $n$ шаров по $m$ ящикам, при условии, что:

(1) Шары и ящики считаются различными?

(2) Шары одинаковые, а ящики различные?

(3) Шары различные, а ящики одинаковые?

(4) Шары и ящики считаются одинаковыми?

**11.** Сколькими способами можно разложить 4 белых и 3 чёрных шара по 6 различным ящикам?

**12.** Сколькими способами можно разложить 5 белых и 8 чёрных шаров по 7 различным ящикам при условии, что ни один ящик не должен быть пустым?

**13.** Сколькими способами можно разложить 20 одинаковых шаров по 5 различным ящикам так, чтобы:

(1) В каждом ящике оказалось не менее двух шаров?

(2) В каждом ящике оказалось не более 5 шаров?

(3) Оказалось не более двух пустых ящиков?

**14.** Сколькими способами можно разложить 6 шаров по 4 ящикам так, чтобы в каждом оказалось не более трёх шаров.

**15.** Найти коэффициент при $x^{100}$ в многочлене $(1 + x + x^2 + \ldots + x^{100})^3$.

**16.** Доказать, что $\sum\limits_{k=0}^{n} 9^k C_n^k = 10^n$.

*Указание.* Воспользоваться биномиальной формулой (теорема 13).

**17.** Найти коэффициент при $x^k$ в многочлене:

(1) $(x + 2)^{10}$, $k = 3$.

(2) $(1 - 2x)^7$, $k = 4$.

(3) $(\sqrt{x} - \frac{2}{x})^8$, $k = 5$.

(4) $(3\sqrt[3]{x^2} - x\sqrt{x})^9$, $k = 11$.

*Указание.* Воспользоваться биномиальной формулой (теорема 13).

**18.** Используя явные формулы для чисел Стирлинга второго рода, вычислить $S_7^5$, $S_8^5$ и $S_9^7$.

**19.** Найти коэффициент при $x^k$ в многочлене

(1) $(1 + x + x^2)^{10}$, $k = 15$.

(2) $(1 + x^2 + x^4)^6$, $k = 20$.

*Указание.* Использовать полиномиальную формулу (теорема 18).

**20.** Найти решение рекуррентного соотношения:

(1) $a_{n+2} = 7a_{n+1} - 12a_n$.

(2) $a_{n+2} = -9a_n$.

*Указание.* Использовать теорему 22.

**21.** Найти формулу общего члена последовательности:

(1) $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 3a_n$, $a_1 = 10$, $a_2 = 16$.

(2) $a_{n+2} = 2\cos\alpha a_{n+1} - a_n$, $a_1 = \cos\alpha$, $a_2 = \cos 2\alpha$.

(3) $a_{n+3} + 3a_{n+2} + 3a_{n+1} + a_n = 0$, $a_0 = a_1 = a_2 = 1$.

(4) $a_{n+3} = 9a_{n+2} - 26a_{n+1} + 24a_n$, $a_0 = 1, a_1 = -3, a_2 = -29$.

(5) $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$, $a_0 = 1, a_1 = -7$.

*Указание.* Использовать теорему 22.

# Литература


[1] Мещеряков, М.В. Избранные лекции по дискретной математике. Часть 1: комбинаторика и графы / М.В. Мещеряков. Саранск: Изд-во Мордовского ун-та, 2003. 116 с.

[2] Холл, М. Комбинаторика / М. Холл. Москва: Мир, 1970. 424 с.

[3] Виленкин, Н.Я. Комбинаторика / Н.Я. Виленкин, А.Н. Виленкин, П.А. Виленкин. Москва: МЦНМО, 2007. 400 с.

[4] Яблонский, С.В. Введение в дискретную математику / С.В. Яблонский. Москва: Высшая школа, 2010. 384 с.

[5] Новиков, Ф.А. Дискретная математика / Ф.А. Новиков. Санкт-Петербург: Питер, 2014. 432 с.

[6] Мальцев, И.А. Дискретная математика / И.А. Мальцев. Санкт-Петербург: издательство Лань, 2011. 304 с.

[7] Капитонова, Ю.В. Лекцкии по дискретной математике / Ю.В. Капитонова, С.Л. Кривой, А.А. Летичевский, Г.М. Луцкий. Санкт-Петербург: БХВ — Петербург, 2004. 624 с.

[8] Андерсон, Дж. Дискретная математика и комбинаторика // Дж. Андерсон. Москва: Вильямс, 2004. 960 с.

*Учебное издание*

*КЛАССИЧЕСКОЕ УНИВЕРСИТЕТСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ*

**КОРАБЛЁВ Филипп Глебович**
**КОРАБЛЁВА Вера Владимировна**

# ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА: КОМБИНАТОРИКА

***Учебное пособие***

Редактор
Верстка

Подписано в печать 00.00.14
Формат $60 \times 84\,^1/_{16}$. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 7,8. Уч.-изд. л. 7,6.
Тираж 100 экз. Заказ 00.
Цена договорная

ФГБОУ ВПО «Челябинский государственный университет»
454001 Челябинск, ул. Братьев Кашириных, 129

Издательство Челябинского государственного университета
454021 Челябинск, ул. Молодогвардейцев, 57б