

Лекція №4

Динаміка твердого тіла

Викл Коваль В.В.

ФОК

2021р.

Питання

Швидкість довільної точки твердого тіла при його плоскому русі. Кутова швидкість обертання твердого тіла.

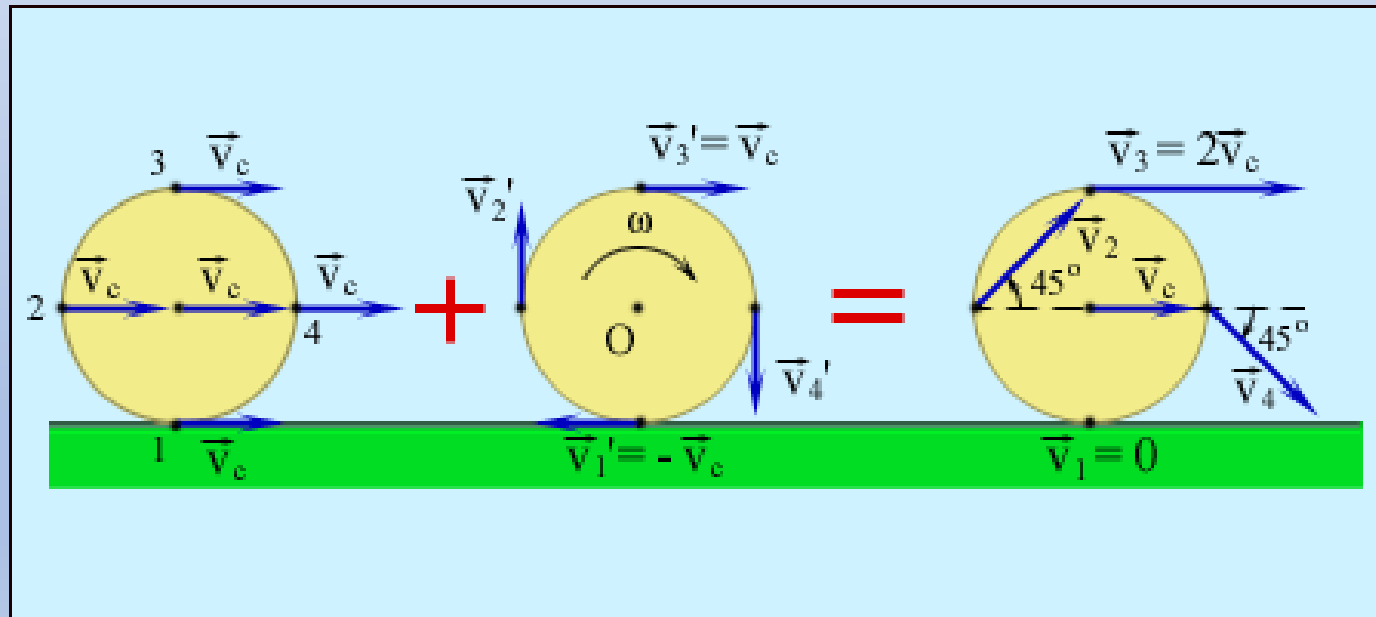
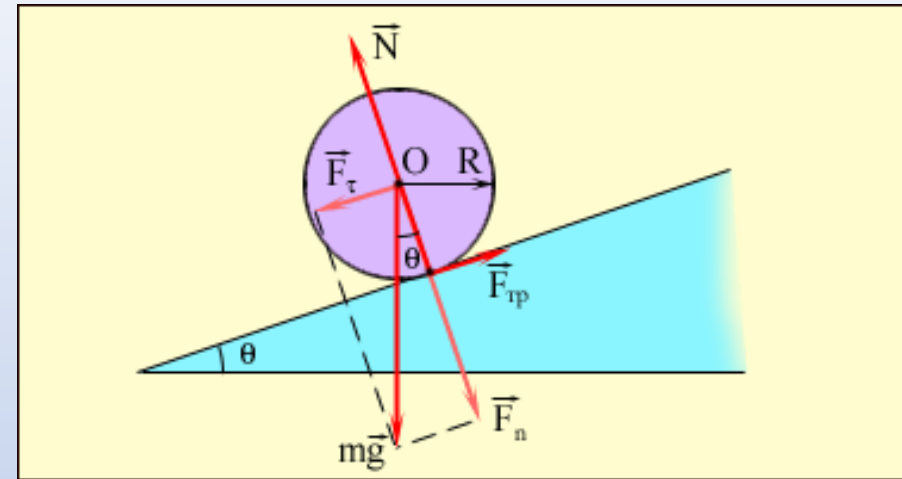
Миттєва вісь обертання. Рух центра мас твердого тіла.

Прискорення центра мас твердого тіла. Рівняння динаміки обертального руху відносно нерухомої осі. Момент інерції циліндра (диска) відносно осі симетрії. Момент інерції стержня. Теорема Гюйгенса-Штейнера.

Робота тіла, що обертається навколо нерухомої осі. Кінетична енергія твердого тіла за умови плоского руху.

Рівняння руху і рівноваги твердого тіла. Прискорення циліндра, який котиться без ковзання з похилої площини.

ТВЕРДЕ ТІЛО В МЕХАНІЦІ



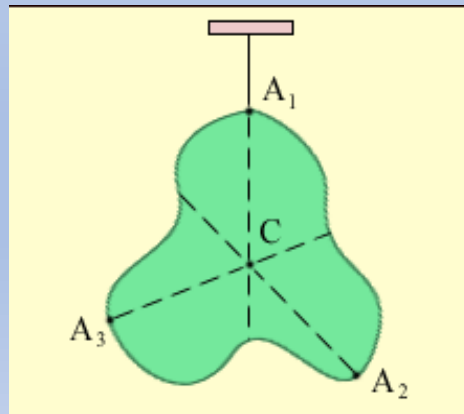
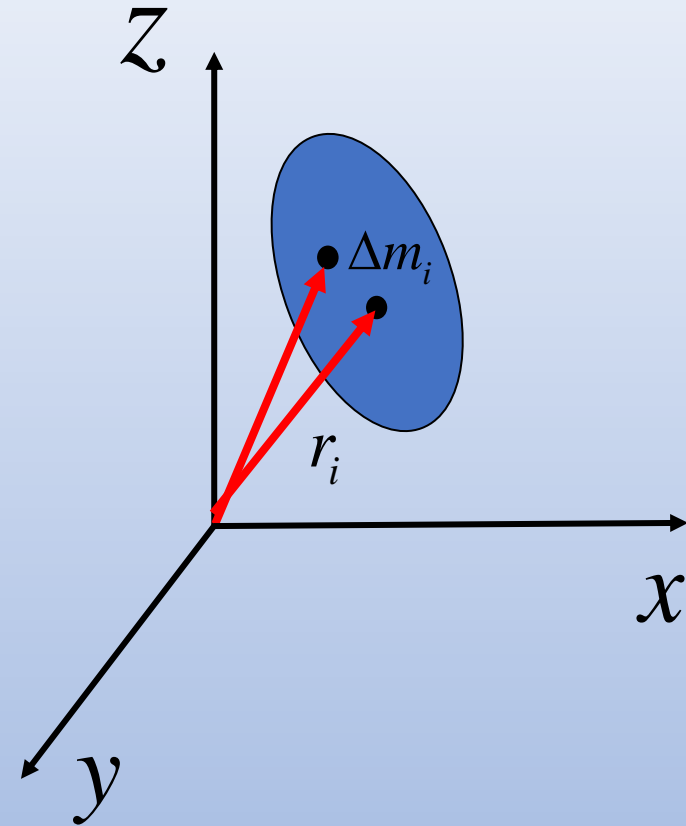
$$\vec{v} = \vec{v}_c + [\vec{\omega}, \vec{r}]$$

Рух центра мас твердого тіла

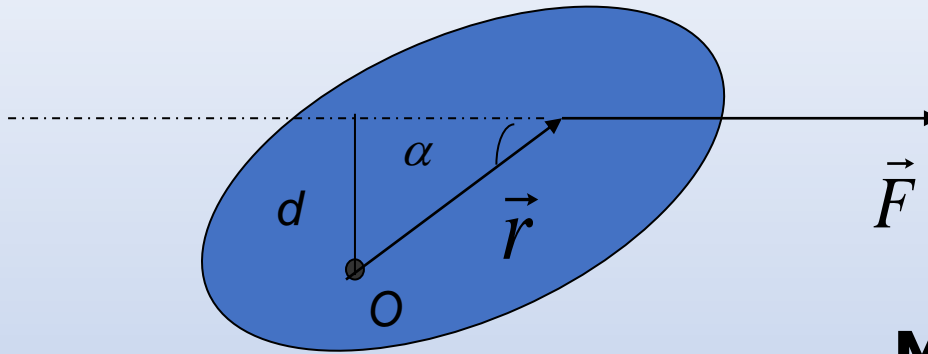
$$\vec{r}_c = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots m_N \vec{r}_N}{m_1 + m_2 + \dots m_N} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N \vec{r}_i m_i$$

$$\vec{r}_c = \frac{1}{m} \int_V \vec{r} dm$$

$$ma_c = \sum_{i=1}^N F_{306}$$



ДИНАМІКА ОБЕРТАЛЬНОГО РУХУ



Момент сили

$$M = r \cdot F \cdot \sin \alpha = F \cdot d \qquad \vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}]$$

Момент імпульсу

$$\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}],$$

Момент інерції

$$I = mr^2$$

Момент інерції системи матеріальних точок (тіла) відносно осі обертання

$$I = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2$$

Момент інерції однорідного тіла

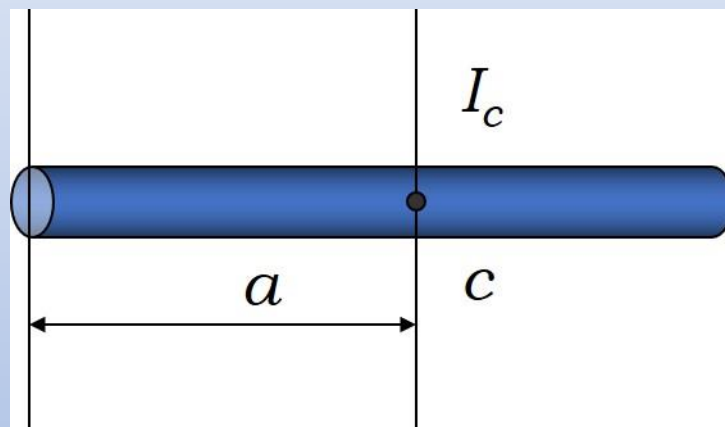
$$I = \rho \int_V r^2 dV$$

Момент імпульсу твердого тіла відносно осі z

$$L_z = I\omega$$

$$[M] = 1H \cdot m \quad [L] = 1H \cdot m \cdot c \quad [I] = 1kg \cdot m^2$$

ТЕОРЕМА ШТЕЙНЕРА



$$I = I_c + ma^2$$



Штейнер Якоб

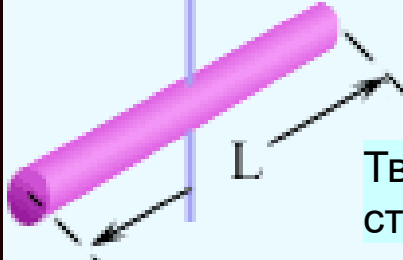
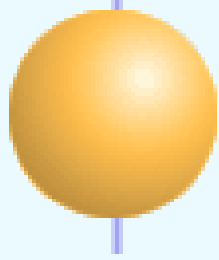
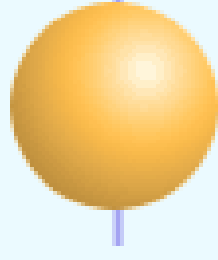
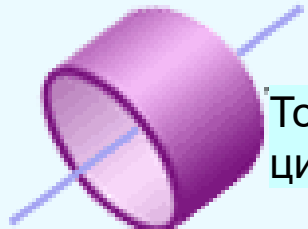
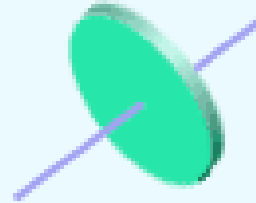
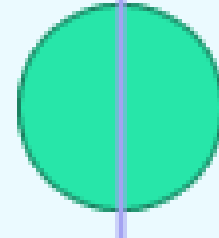
(1796 - 1863)

*Німецький математик.
Член Берлінської академії
наук*

Професор математики Берлінського університету. Один із творців проективної геометрії. В основній своїй праці "Систематичний розвиток залежності геометричних образів одного від іншого" (1834р.) побудував геометрію, не використовуючи аналітичні методи. У працях Штейнера чітко виявляються елементи теоретико-множинних уявлень у проективній геометрії. У 1833р. Штейнер видав книгу "Геометричні побудови, здійснювані за допомогою прямої і нерухомого кола". У 1842р. вийшла його книга "Про найбільші і найменші значення плоских фігур і про сферу", у якій геометричними засобами досліджені численні проблеми, що стосуються максимумів і мінімумів. Зокрема, у ній доводиться, що коло є плоскою фігурою, що має найменший периметр при заданій площі. Ряд важливих результатів Штейнер одержав у геометрії трикутника.

Моменти інерції однорідних тіл відносно осі, що проходить через центр мас цих тіл

$$I = \int_m r^2 dm$$

$I_c = \frac{1}{12} ML^2$  Твердий стержень	$I_c = \frac{2}{5} MR^2$  Шар	$I_c = \frac{2}{3} MR^2$  Тонкостінна сферична оболонка
$I_c = MR^2$  Тонкостінний циліндр	$I_c = \frac{1}{2} MR^2$  Диск	$I_c = \frac{1}{4} MR^2$  Диск

ОСНОВНИЙ ЗАКОН ДИНАМІКИ ОБЕРТАЛЬНОГО РУХУ

$$\vec{L} = [\vec{r}, m\vec{v}],$$

$$\frac{d}{dt} \vec{L} = \frac{d}{dt} [\vec{r}, m\vec{v}] = [\vec{r}, m\vec{v}'] + [\vec{r}', m\vec{v}]$$

$$\frac{d}{dt} \vec{L} = [\vec{r}, \vec{F}] + [\vec{v}, m\vec{v}] = \vec{M}$$

Диференціальна форма:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Інтегральна форма:

$$\vec{M} = I\vec{\varepsilon}$$

ЗАКОН ЗБЕРЕЖЕННЯ МОМЕНТУ ІМПУЛЬСУ

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{iвн} + \vec{M}_{iзов}$$

$$\vec{M}_{iвн} = 0$$

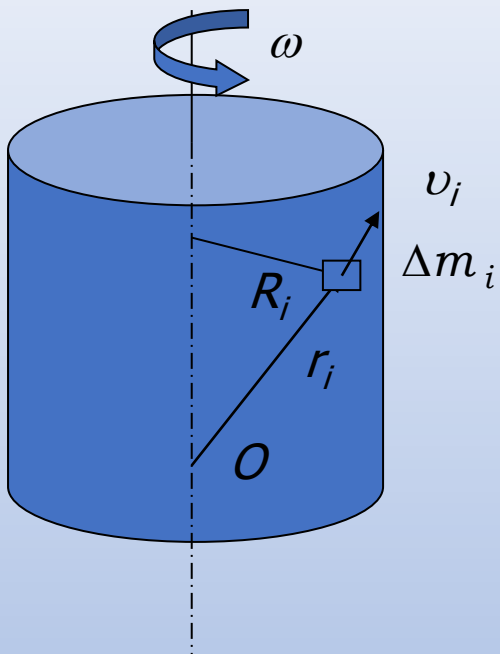
Для замкнених систем

$$\vec{M}_{iзов} = 0$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L} = const$$

$$\sum I\vec{\omega} = const$$

КІНЕТИЧНА ЕНЕРГІЯ ОБЕРТАЛЬНОГО ТІЛА



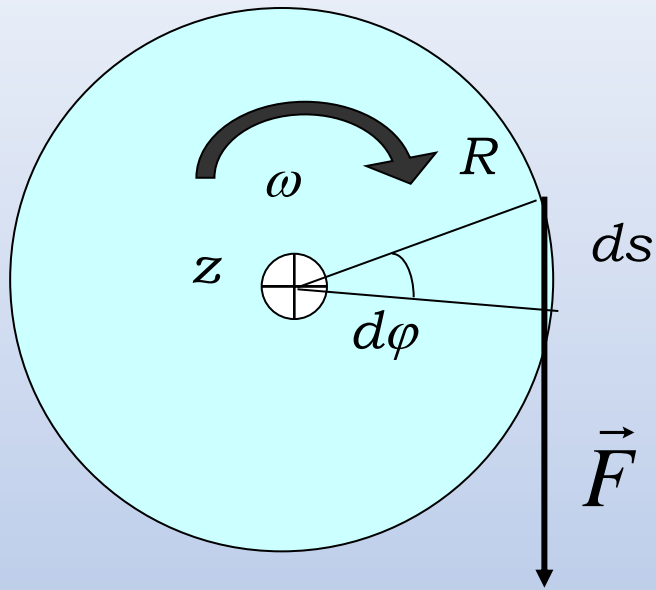
$$(\Delta W_k)_i = \frac{1}{2} \Delta m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \Delta m_i \omega^2 R_i^2$$

$$W_k = \sum_i (W_k)_i = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_i R_i^2 \Delta m_i$$

$$W_K = \frac{1}{2} I \omega^2$$

$$W_K = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2$$

РОБОТА СИЛ ПРИ ОБЕРТАННІ



$$dA = F_s ds = F_s R d\varphi = M_z d\varphi$$

$$dA = M_\omega d\varphi$$

$$N = \frac{dA}{dt} = M_\omega \frac{d\varphi}{dt} = M_\omega \omega$$

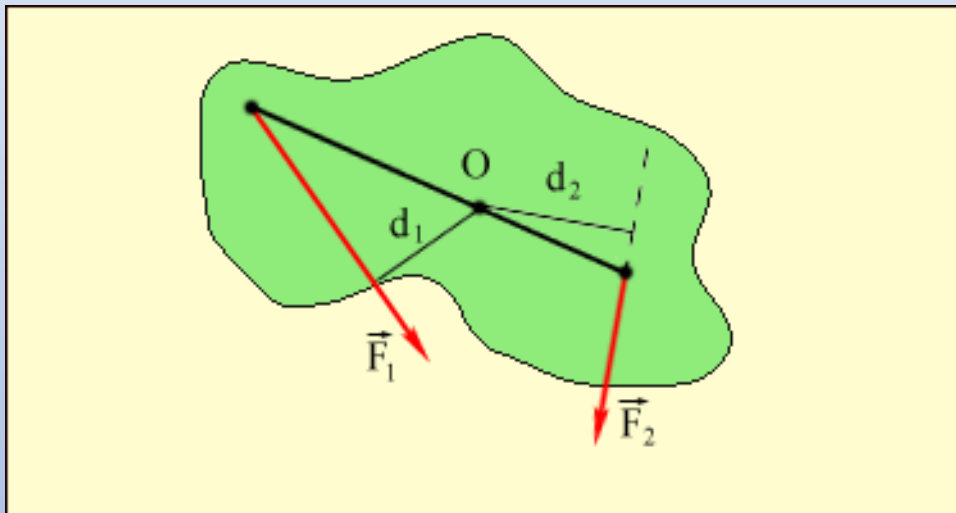
Відповідність лінійних і кутових характеристик

Поступальний рух	Співвіднош.	Обертальний рух	Співвіднош.	Зв'язок між величинами
Радіус вектор	\vec{r}	Кут	$\vec{\varphi}$	
Лінійна швидкість	$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$	Кутова швидкість	$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$	$v = \omega r$
Лінійне прискорення	$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$	Кутове прискорення	$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$	$a = \omega \varepsilon$
Маса	m	Момент інерції	$I = \int_m r^2 dm$	
Сила	\vec{F}	Момент сили	$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]$	
Імпульс	$\vec{p} = m \vec{v}$	Момент імпульсу	$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}]$	
Кінетична енергія	$W_k = \frac{mv^2}{2}$	Кінетична енергія	$W_k = \frac{I\omega^2}{2}$	

Відповідність лінійних і кутових характеристик

Поступальний рух	Співвіднош.	Обертальний рух	Співвіднош.	Зв'язок між величинами
Робота	$dA = (\vec{F} d\vec{r})$	Робота	$dA = (\vec{M} d\vec{\varphi})$	
Потужність	$N = (\vec{F} \vec{v})$	Потужність	$N = (\vec{M} \vec{\omega})$	
Основне рівняння динаміки	$\vec{F} = m\vec{a}$ $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$	Основне рівняння динаміки	$\vec{M} = I\vec{\varepsilon}$ $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$	
Закон збереження імпульсу	$\sum_{i=1}^N \vec{p}_i = const$	Закон збереження моменту імпульсу	$\sum_{i=1}^N \vec{L}_i = const$	

ВИСНОВКИ



$$m_c \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_{308}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{M}_{308}$$

Ваші питання?!