第三章 非线性方程和方程组的数值解法

$f(x)=0$ 的解也叫根或 $f(x)$ 的零点。
若 $f(x)=0(x\in[a,b])$ 有解，则称 $[a,b]$ 为有根区间，若 $f(x)\in C[a,b]$，且 $f(a)f(b)<0$ 在 $[a,b]$ 至少存在一实根。

1 二分法

过程略。
$\because b_2-a_2=\frac{b-a}{2}$，由此易证 $b_n-a_n=\frac{b-a}{2^{n-1}}$；且 $x_n,x^*\in[a_n,b_n]$
$\therefore |x_n-x^*|<\frac{b_n-a_n}{2}=\frac{b-a}{2^n}<\varepsilon, \therefore n>\frac{ln\frac{b-a}{\varepsilon}}{ln2}$

2 单个方程的不动点迭代法

2.1 不动点迭代法

$$f(x)=0, x\in[a,b] \tag{2.1}$$

将 (2.1) 转化为如下等价的方程：

$$x=\phi(x), \phi(x)\in[a,b] \tag{2.2}$$

由此可得如下迭代公式：

$$x_{k+1}=\phi(x_k), k=0,1,2,\dots \tag{2.3}$$

若 x_k 收敛，即 $x_k\to x^*, k\to\infty$ 则 $x^*=\phi(x^*).\phi(x)$ 称为迭代函数，x^* 称为 $\phi(x)$ 的不动点。

定理 2.1. *!!(压缩映射原理)* 设 $\phi(x)\in C[a,b]$，若满足下面条件：

1. 映内性：

$$\phi(x)\in[a,b], \forall x\in[a,b] \tag{2.4}$$

2. 压缩性 (*Lipschitz* 条件)：$\exists 0 \leq L < 1$ 使得：

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq L|x - y|, \forall x, y \in [a, b] \tag{2.5}$$

则 $\forall x_0 \in [a, b]$，由*2.3*产生的迭代序列 $\{x_k\}$ 都收敛到 ϕ 的唯一不动点，且有误差估计式：

$$|x_k - x^*| \leq \frac{L^k}{1 - L}|x_1 - x_0| \tag{2.6}$$

证明. 分四步: (1) 不动点存在 (2) 唯一性 (3) 收敛性 (4) 误差估计

1. 令 $f(x) = x - \phi(x)$, 则由2.4可得 $f(a) = a - \phi(a) \leq 0, f(b) = b - \phi(b) \geq 0, \therefore \exists x^* \in [a, b], s.t. f(x) = 0$, i.e.$x^* - \phi(x^*) = 0 \Leftrightarrow x^* = \phi(x^*)$

2. 唯一性 [反证法]：设 $x_1^* = \phi(x_1^*), x_2^* = \phi(x_2^*), x_1^* \neq x_2^*, x_1^*, x_2^* \in [a, b]$ 则 $|x_1^* - x_2^*| = |\phi(x_1^*) - \phi(x_2^*)| \leq L|x_1^* - x_2^*| < |x_1^* - x_2^*|$ 矛盾，$\therefore$ 唯一。

3. 收敛性：$\because \phi(x) \in [a, b], \forall x \in [a, b]$
   $\therefore x_k \in [a, b], k = 0, 1, 2, \ldots$
   $\therefore |x_k - x^*| = |\phi(x_{k-1}) - \phi(x^*)| \leq L|x_{k-1} - x^*| \leq \cdots \leq L^k|x_0 - x^*| \to 0, k \to \infty$
   $\therefore \lim_{k\to\infty} x_k = x^*$

4. 误差估计式：$\forall m$,

$$\begin{aligned} |x_{k+m} - x_k| &= |x_{k+m} - x_{k+m-1} + x_{k+m-1} - x_{k+m-2} + x_{k+m-2} + \cdots + x_{k+1} - x_k| \\ &\leq |x_{k+m} - x_{k+m-1}| + |x_{k+m-1} - x_{k+m-2}| + \cdots + |x_{k+1} - x_k| \end{aligned} \tag{2.7}$$

   而 $|x_{k+j+1} - x_{k+j}| = |\phi(x_{k+j}) - \phi(x_{k+j-1})| \leq L|x_{k+j} - x_{k+j-1}| \leq \cdots \leq L^{k+j}|x_1 - x_0|$
   $\therefore m \to \infty, |x_k - x^*| \leq \frac{L^k}{1-L}|x_1 - x_0|$

□

注释：

1. 由2.7式易证一个误差估计式 $|x_k - x^*| \leq \frac{L}{1-L}|x_k - x_{k-1}|$，当 L 不接近于 1 时，可用 $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$ 作为终止条件。

2. 可用2.6估计迭代次数：

$$k \geq \frac{ln\varepsilon - ln(|x_1 - x_0|/(1 - L))}{lnL}$$

3. 当 L 越小，收敛越快

4. 满足定理条件的迭代法是全局收敛的。

推论：若将定理2.1中的条件（2）改为 $\phi(x)$ 的导数在 $[a,b]$ 上存在，且 $\phi^{'}(x) \le L < 1, \forall x \in [a,b]$ 则定理2.1的结论仍成立。

例 2.1. *解方程 $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4 = 0, x^* \approx 1.130395$ 易证 $f(x) = 0$ 在 $[1,2]$ 上有根，$f(1) < 0, f(2) > 0$；将 $f(x) = 0$ 改写为如下不同形式:*

1.
$$x = x - x^3 - 2x^2 + 4 \triangleq \phi_1(x)$$

2.
$$x = [2(\frac{2}{x} - x)]^{\frac{1}{2}} \triangleq \phi_2(x)$$

3.
$$x = (2 - \frac{x^3}{2})^{\frac{1}{2}} \triangleq \phi_3(x)$$

4.
$$x = 2\sqrt{\frac{1}{x+2}} \triangleq \phi_4(x)$$

5.
$$x = x - \frac{x^3 + 2x^2 - 4}{3x^2 + 4} \triangleq \phi_5(x)$$

由此得到的迭代关系式，1 和 2 不收敛，3 需要 120 次收敛，4 需要 9 次迭代，5 需要 4 次迭代。

2.2 局部收敛性和收敛阶

定义 2.1. *设 $\phi(x)$ 在 $[a,b]$ 区间有不动点 x^*，若 $\exists x^*$ 的一个邻域 $R(x^*) = [x^* - \varepsilon_0, x^* + \varepsilon_0] \subset [a,b]$，$\varepsilon_0 > 0$ 使对 $\forall x_0 \in R(x^*)$，由 $x_{k+1} = \phi(x_k)$ 产生的迭代序列 $\{x_k\} \subset R(x^*)$ 且收敛于 x^*，则称此迭代方法局部收敛。*

定理 2.2. *设 x^* 为 $\phi(x)$ 的不动点，$\exists R(x^*), \phi(x) \in C^1[R(x^*)]$，且 $|\phi^{'}(x^*)| < 1$，则 $x_{k+1} = \phi(x_k)$ 局部收敛。*

证明. $\because \phi^{'}(x)$ 连续，且 $|\phi^{'}(x)| < 1, \therefore$ 由微积分定理可知：$\exists x^*$ 的一个邻域 $R(x^*) = [x^* - \varepsilon_0, x^* + \varepsilon_0]$，使得 $|\phi^{'}(x)| \le L < 1, \forall x \in R(x^*)$
任取 $x \in R(x^*)$，则 $|\phi(x) - x^*| = |\phi(x) - \phi(x^*)| = |\phi(x) - x^*| = |\phi^{'}(\xi)| \cdot |x - x^*| \le L|x - x^*| < |x - x^*| \le \varepsilon$
$\Rightarrow \phi(x) \in [R(x^*)]$，满足映内性。
显然 $\forall x, y \in R(x^*)$，$|\phi(x) - \phi(y)| = |\phi^{'}(\eta)||x - y| \le L|x - y|$，压缩性。
$\therefore$ 由压缩映射原理可知，迭代法具有局部收敛性。 □

思考题

- $x_{k+1} = sin(x_k), x^* = 0, |\phi^{'}(x^*)| = 1$，任取 x_0 收敛
- $x_{k+1} = x_k + x_k^3, x^* = 0, |\phi^{'}(x^*)| = 1$，发散
- $x_{k+1} = x_k + x_k^2, x^* = 0, |\phi^{'}(x^*)| = 1$，$x_0 > 0$ 发散；$x_0 < 0$ 收敛

证明：$|e_{k+1}| = |x_{k+1} - x^*| = |\phi(x_k) - \phi(x^*)| = |\phi^{'}(\xi)||x_k - x^*|$

定义 2.2. 设 $\{x_k\}$ 收敛于 x^*，记 $e_k = x_k - x^*$，若 $\exists$ 实数 $p \geq 1$ 及非零常数 C，使 $\lim_{k\to\infty} \frac{e_{k+1}}{|e_k|^p} = C$，则称迭代序列 $\{x_k\}$ 为 p 阶收敛的。

$p = 1$ 称为线性收敛；$p = 2$ 称为平方收敛。

$p = 1$ 时，$0 < c < 1$；$p > 1$，超线性收敛。

如果 $\phi(x) \in C^1[R(x^*)]$，则 $\lim_{k\to\infty} \frac{|e_{k+1}|}{e_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{|\phi(x_k)-\phi(x^*)|}{x_k - x^*} = |\phi^{'}(x^*)| \begin{cases} \neq 0, < 1 \text{ 线性} \\ = 0 \text{ 超线性} \end{cases}$

定理 2.3. 设 $\phi(x)$ 有不动点 $x^*, p > 1, \phi(x) \in C^p[R(x^*)]$，且 $\phi^{''}(x^*) = \phi^{(3)}(x^*) = \cdots = \phi^{(p-1)}(x^*) = 0$，$\phi^{(p)}(x^*) \neq 0$，则称迭代法是 p 阶收敛的，且 $\lim_{k\to\infty} \frac{|e_{k+1}|}{e_k} = \frac{\phi^{(p)}(x^*)}{p!}$

证明. $\because \phi^{'}(x^*) = 0, \therefore$ 由局部收敛性定理可知 $\forall x_0 \in R(x^*)$ 收敛

$$\phi(x_k) = \phi(x^*) + \phi^{'}(x^*)(x_k - x^*) + \cdots + \frac{\phi^{(p-1)}(x^*)}{(p-1)!}(x_k - x^*)^{p-1} + \frac{\phi^{(p)}(\xi)}{(p)!}(x_k - x^*)^p$$

$\Rightarrow e_{k+1} = x_{k+1} - x^* = \frac{\phi^{(p)}(\xi)}{(p)!} e_k^p \Rightarrow \lim_{k\to\infty} \frac{e_{k+1}}{e_k^p} = \frac{\phi^{(p)}(x^*)}{p!}$ □

3 迭代加速方法

Steffensen 迭代法

$$\begin{cases} y_k = \phi(x_k) \\ z_k = \phi(y_k) \\ x_{k+1} = x_k - \frac{(y_k - x_k)^2}{z_k - 2y_k + x_k} \end{cases}$$

其对应的迭代函数：

$$\Psi(x) = x - \frac{[\phi(x) - x]^2}{\phi[\phi(x)] - 2\phi(x) + x}, |\phi^{'}(x^*)| < 1$$
$$x_{k+1} = \Psi(x_k)$$

易证若 $\phi(x) \in C^1[R(x^*)]$，则 $x^* = \Psi(x^*) \Leftrightarrow x^* = \phi(x^*)$

定理 3.1. 设 $x^* = \phi(x^*)$，且 $\phi^{(p+1)}(x)\exists, \forall x \in R(x^*)$，则当 $p = 1$ 时，若 $\phi^{'}(x^*) \neq 1$，那么该方法是二阶的，否则为一阶收敛的，当 $x_{k+1} = \phi(x_k)$ 是 p 阶收敛的 $(p > 1)$，则该法是 $2p - 1$ 阶的。

4 Newton 迭代法

如果取 $\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f^{'}(x)}$，则有如下 Newton 迭代方法：

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f^{'}(x_k)}, k = 0, 1, \ldots \tag{4.1}$$

显然有 $\phi^{'}(x) = \frac{f(x)f^{''}(x)}{[f^{'}(x)]^2} \Rightarrow \phi^{'}(x^*) = 0$
$\therefore$(4.1) 收敛。

定理 4.1. *设 $f(x^*) = 0, f^{'}(x^*) \neq 0$[单根, 不存在重根], 且 $f(x) \in C^m[R(x^*)], m \geq 2$ 则 Newton 迭代方法4.1至少 2 阶收敛，且 $\lim_{k\to\infty} \frac{|e_{k+1}|}{e_k^2} = \frac{f^{''}(x^*)}{2f^{'}(x^*)}$*

4.1 重根时的 Newton 迭代法及加速

设 x^* 为 $f(x) = 0$ 的 $m(m \geq L)$ 重根, i.e.$f(x) = (x - x^*)^m q(x), q(x^*) \neq 0$，则 $\phi^{'}(x) = \frac{f(x)f^{''}(x)}{[f^{'}(x)]^2}, \therefore \phi^{'}(x) = 1 - \frac{1}{m} < 1$

有重根时 Newton 迭代法是收敛的，且为一阶收敛：$\lim_{k\to\infty} \frac{|e_{k+1}|}{e_k} = 1 - \frac{1}{m}$。

Newton 迭代法加速

- $\phi_1(x) = x - m\frac{f(x)}{f^{'}(x)}$
- $\phi_2(x) = x - \frac{[f^{'}(x)]^2}{[f^{'}(x)]^2 - f(x)f^{''}(x)}$

4.2 割线法

将4.1的 $f^{'}(x_k)$ 用其近似差商代替，i.e.$f^{'}(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$ 将此代入 Newton 法即可得：

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \tag{4.2}$$

定理 4.2. *设 $f(x)$ 在其零点 x^* 邻域二阶连续可导, 且 $f^{'}(x^*) \neq 0$, 则 $\exists \varepsilon > 0$, 当 $x_0, x_1 \in [x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon]$ 时, 割线法4.2收敛, 且收敛阶为 $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$*

5 非线性方程组的不动点迭代方法

设有如下非线性方程组：

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \ldots, f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \tag{5.1}$$

令 $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)^T, F(x)=(f_1,f_2,\dots,f_n)^T$ 则5.1可写成如下形式:

$$F(x)=0 \tag{5.2}$$

5.1 基本概念

假设 $f_1,f_2,\dots,f_n$ 是定义在子集 $D\subset R^n$ 上的实值函数，则可得 $F: D\subset R^n\to R^n$ 表示 F 为 R^n 中子集 D 到 R^n 的映射。更一般的，$F:D\subset R^n\to R^m$，若 $F(x)$ 为标量，则 $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)-F^{'}(x)\Delta x}{\Delta x}=0$

定义 5.1. *设 $F:D\subset R^n\to R^m$，若 $\exists A\in R^{m\times n}$，对 D 内 x 及 $\Delta x\in R^n$ 有:*

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{||F(x+\Delta x)-F(x)-A\Delta x||}{||\Delta x||}=0$$

则称 F 在 x 可导，称 A 为 F 在 x 的 Frehet 导数，记为

$$F^{'}(x)=A=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\end{bmatrix}$$

定理 5.1. *设 $F:D\subset R^n\to R^m$ 在 $x\in D\subset R^n$ 是 Frechet 可微的，则 $F(x)$ 在 x 连续，i.e.$\lim_{\Delta x\to 0}||F(x+\Delta x)-F(x)||=0$*

5.2 不动点迭代法

将 $F(x)=0$ 转化成等价的方程组

$$x=\phi(x) \tag{5.3}$$

其中 $\phi D\subset R^n\to R^n$，且 ϕ 是连续的，若 $\exists x^*\in D$ 使得 $x^*=\phi(x^*)$，则称 x^* 为 $\phi(x)$ 的不动点，由此可构造如下迭代方法

$$x^{(k+1)}=\phi(x^{(k)}),k=0,1,2,\dots \tag{5.4}$$

其中 $x^{(k)}=(x_1^{(k)},x_2^{(k)},\dots,x_n^{(k)})$

定义 5.2. *设 $\{x^{(k)}\}$ 收敛于 x^*，*

1. *若 $\exists$ 实数 $p\geq 1$ 及常数 $C>0$，使*

$$\lim_{k\to\infty}\frac{||x^{(k+1)}-x^*||}{||x^{(k)}-x^*||^p}=C$$

则称 $\{x^{(k)}\}$ 为 p 阶收敛的；其中 $p=1$ 时，$0<C<1$

2. 若存在实数 $p \geq 1$ 和常数 $C > 0$, 使 $||x^{(k+1)} - x^*|| \leq C||x^{(k)} - x^*||^p, k = 0, 1, 2, \ldots$ 成立，其中 $p = 1$ 时，$0 < c < 1$，则称 $\{x^{(k)}\}$ 至少 p 阶收敛；当 p=1 时，$\{x^{(k)}\}$ 至少线性收敛

3. 若存在实数 $p \geq 1$，且 $\lim_{k\to 0} \frac{||x^{(k+1)}-x^*||}{||x^{(k)}-x^*||^p} = 0$，则称 $\{x^{(k)}\}$ 为超 p 阶收敛。

定理 5.2. （压缩映射原理）设 $D \subset R^n$ 中的一个闭集，若 $\phi : D \to D(i.e.\phi(x) \in D, \forall x \in D)$ 为压缩映射，即满足如下条件：

$$||\phi(x) - \phi(y)|| \leq L||x - y||, 0 < L < 1, \forall x, y \in D \tag{5.5}$$

则有如下结论：

1. $\forall x^{(0)} \subset D$，由5.4产生的迭代序列 $\{x^{(k)}\} \subset D$
2. ϕ 在 D 上存在唯一的不动点 x^* 使 $x^* = \phi(x^*)$
3. $||x^{(k+1)} - x^*|| \leq ||x^{(k)} - x^*||, k = 0, 1, 2, \ldots$，$i.e.\{x^{(k)}\}$ 至少线性收敛
4. 有误差估计式：

$$||x^{(k)} - x^*|| \leq \frac{L^k}{1 - L}||x^{(1)} - x^{(0)}|| \tag{5.6}$$

证明. 1. 由映内性，显然

2. 由压缩性的 $||x^{(k+1)} - x^{(k)}|| = ||\phi(x^{(k)}) - \phi(x^{(k-1)})|| \leq L||x^{(k)} - x^{(k-1)}|| \leq \cdots \leq L^k||x^{(1)} - x^{(0)}||$
   于是对 $\forall m \in Z$，有

$$\begin{aligned} ||x^{(k+m)} - x^{(k)}|| = ||(&x^{(k+m)} - x^{(k+m-1)}) + (x^{(k+m-1)} - x^{(k+m-2)}) + \\ &\cdots + (x^{(k+1)} - x^{(k)})|| \\ &\leq (L^{k+m-1} + L^{k+m-2} + \cdots + L^k)||x^{(1)} - x^0|| \\ &\leq \frac{L^k}{1 - L}||x^{(1)} - x^0|| \end{aligned}$$

   $\because 0 < L < 1$，当 $k \to \infty$ 时，$||x^{(k+m)} - x^{(k)}|| \to 0$
   $\because \{x^{(k)}\}$ 为一个柯西序列，$\{x^{(k)}\}$ 有一个有限极限，$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x^*$
   又根据定理条件，$\phi(x)$ 在 D 上连续 $\therefore \lim_{k\to\infty} x^{(k+1)} = \lim_{k\to\infty} \phi(x^{(k)}) = \phi(x^*), \lim_{k\to\infty} x^{(k+1)} = x^*$
   $\therefore \phi(x^*) = x^*$
   $\because$D 为闭集，且 $x^{(k)} \in D, \forall k = 0, 1, 2, \cdots \therefore \{x^{(k)}\}$ 的极限 $x^* \in D$
   假设还有另一个不动点 $y^* \in D, x^* \neq y^*$，则 $||x^* - y^*|| = ||\phi(x^*) - \phi(y^*)|| \leq L||x^* - y^*|| < ||x^* - y^*||$，矛盾。

3. $||x^{(k+1)} - x^*|| = ||\phi(x^{(k)}) - \phi(x^*)|| \leq L||x^{(k)} - x^*||$，且 $0 < L < 1$，至少线性收敛

4. $||x^{(k+m)} - x^{(k)}|| \leq \frac{L^k}{1-L}||x^{(1)} - x^{(0)}||$
当 $m \to \infty$ 时，$||x^{(k)} - x^*|| \leq \frac{L^k}{1-L}||x^{(1)} - x^{(0)}||$

□

定义 5.3. *设 x^* 为 ϕ 的不动点，若 $\exists x^*$ 的一个邻域 $S(x^*) \subset D, \forall x^{(0)} \in S(x^*)$，有5.4产生的序列 $\{x^{(k)}\} \subset S(x^*)$，且 $\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x^*$ 则称 $\{x^{(k)}\}$ 有局部收敛性。*

定理 5.3. *设 $\phi : D \subset R^n \to R^n, x^* \in D$ 为 ϕ 的不动点，若 $\exists$ 一个开球，$S_r(x^*) = \{x | ||x - x^*|| < r, r > 0\} \subset D$，使得 $||\phi(x) - \phi(x^*)|| \leq L||x - x^*||, \forall x \in S_r(x^*), 0 \leq L < 1$ 则对 $\forall x^{(0)} \in S_r(x^*)$，由5.4产生的 $\{x^{(k)}\}$ 具有如下性质：*

1. $x^{(k)} \in S_r(x^*), k = 0, 1, 2, \ldots$

2. $\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x^*$

3. $\{x^{(k)}\}$ *至少线性收敛。*

证明. 1. 数学归纳法证明 $||x^{(k+1)} - x^*|| < r$

2. $||x^{(k+1)} - x^*|| = ||\phi(x^{(k)}) - \phi(x^*)|| \leq L||x^{(k)} - x^*|| \leq \cdots \leq L^{k+1}||x^{(0)} - x^*|| \to 0, k \to \infty$

3. $||x^{(k+1)} - x^*|| \leq L||x^{(k)} - x^*||, 0 < L < 1$ 至少线性收敛

□

定理 5.4. *设 $\phi : D \subset R^n \to R^n, \phi$ 在 D 内有不动点 x^*，且 ϕ 在 x^* 可导，$\rho(\phi^{'}(x^*)) = \lambda < 1$，则 $\exists$ 开球 $S_r(x^*) \subset D$ 对 $\forall x^{(0)} \in S_R(x^*)$，由5.4产生的迭代序列 $\{x^{(k)}\}$ 收敛到 x^**

证明. $\because \lambda < 1, \therefore \exists \varepsilon > 0, s.t. \lambda + 2\varepsilon < 1$
由范数与谱半径的关系可知，对于 ε，存在一种从属范数 $||\cdot||_\varepsilon$，使得 $||\phi(x^*)||_\varepsilon < \lambda + \varepsilon$。又 $\because$ $\phi(x)$ 在 x^* 可导，$\therefore$ 由导数定义可知，对于 $\varepsilon > 0, \exists S_r(x^*), \forall x \in S_r(x^*), ||\phi(x) - \phi(x^*) - \phi^{'}(x^*)(x - x^*)||_\varepsilon \leq \varepsilon||x - x^*||_\varepsilon$

$$\begin{aligned}
||\phi(x) - \phi(x^*)||_\varepsilon &= ||\phi(x) - \phi(x^*) - \phi^{'}(x^*)(x - x^*) + \phi^{'}(x^*)(x - x^*)||_\varepsilon \\
&\leq ||\phi(x) - \phi(x^*) - \phi^{'}(x^*)(x - x^*)||_\varepsilon + ||\phi^{'}(x^*)(x - x^*)||_\varepsilon \\
&< \varepsilon||x - x^*||_\varepsilon + (\lambda + \varepsilon)||x - x^*||_\varepsilon \\
&= (\lambda + 2\varepsilon)||x - x^*||_\varepsilon
\end{aligned}$$

$\because \lambda + 2\varepsilon < 1, \therefore$ 由定理5.3可知，$\{x^{(k)}\}$ 收敛于 x^* $\square$

例 5.1. 用不动点迭代法求解方程组

$$\begin{cases} x_1^2 - 10x_1 + x_2^2 + 8 = 0 \\ x_1 x_2^2 + x_1 - 10x_2 + 8 = 0 \end{cases}$$

解：将原方程组转化为 $x = \phi(x)$ 的形式，其中 $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \phi(x) = \begin{bmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x_1^2+x_2^2+8}{10} \\ \frac{x_1x_2^2+x_1+8}{10} \end{bmatrix}, \therefore x^{(k+1)} = \phi(x^{(k)}), k = 0, 1, 2, \ldots$

设 $D = \{(x_1, x_2) | 0 \le x_1, x_2 \le 1.5\}$ 易证 $0.8 \le \phi_1(x) \le 1.25, 0.8 \le \phi_2(x) \le 1.2875 \therefore \phi(x) \in D$(映内性)

$\forall x, y \in D$，有

$$\begin{cases} |\phi_1(x) - \phi_1(y)| = \frac{|y_1^2 - x_1^2 + y_2^2 - x_2^2|}{10} \le \frac{3}{10}(|y_1 - x_1| + |y_2 - x_2|) = \frac{3}{10}||x - y||_1 \\ |\phi_2(x) - \phi_2(y)| = \frac{|y_1 y_2^2 - x_1 x_2^2 + y_1 - x_1|}{10} \le \frac{4.5}{10}||x - y||_1 \end{cases}$$

$\therefore ||\phi(x) - \phi(y)|| = ||\phi_1(x) - \phi_1(y)|| + ||\phi_2(x) - \phi_2(y)|| \le \frac{7.5}{10}||x - y||_1$(压缩性)

$\therefore$ 迭代序列收敛。

取 $x^{(0)} = (0, 0)^T$，则 $x^{(1)} = (0.8, 0.8)^T, x^{(2)} = (0.928, 0.9312)^T, \ldots x^{(6)} = (0.99938, 0.99932)^T, x^* = (1, 1)^T$

$$\phi^{'}(x) = \begin{bmatrix} \frac{1}{5}x_1 & \frac{1}{5}x_2 \\ \frac{x_2^2+1}{10} & \frac{x_1x_2}{5} \end{bmatrix}, \therefore \phi^{'}(x^*) = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 \end{bmatrix}$$

$\therefore ||\phi^{'}(x^*)||_1 = 0.4 < 1 \therefore \rho(\phi^{'}(x^*) \le ||\phi^{'}(x^*)||_1 < 1)$
$\therefore \{x^{(k)}\}$ 收敛

5.3 Newton 迭代法

$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x)}{f'(x)}$ 推广到方程组：

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - [F^{'}(x^{(k)})]^{-1} F(x^{(k)}), k = 0, 1, 2, \ldots \tag{5.7}$$

将5.7改写成如下形式：

$$\begin{aligned} & F^{'}(x^{(k)})(x^{(k+1)} - x^{(k)}) = -F(x^{(k)}) \\ & F^{'}(x^{(k)})\Delta x^{(k)} = -F(x^{(k)}) \qquad , k = 0, 1, 2, \ldots \\ & x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Delta x^{(k)} \end{aligned}$$

例 5.2.
$$\begin{cases} x_1^2 - 10x_1 + x_2^2 + 8 = 0 \\ x_1 x_2^2 + x_1 - 10x_2 + 8 = 0 \end{cases}$$

解：
$$F^{'}(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 - 10 & 2x_2 \\ x_2^2 + 1 & 2x_1x_2 - 10 \end{bmatrix}$$

取 $x^{(0)} = (0,0)^T$ 由 $F^{'}(x^{(k)})\Delta x^{(0)} = -F(x^{(0)}) \Rightarrow \Delta x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.88 \end{bmatrix}$

$\therefore x^{(1)} = x^{(0)} + \Delta x^{(0)} = (0.8, 0.88)^T, \ldots, x^{(4)} = (1.000, 1.000)^T$

定理 5.5. *设 $F : D \subset R^n \to R^n, F(x^*) = 0, F(x)$ 在 x^* 的开邻域 $S_0 \subset D$ 上可导，且 $F^{'}(x)$ 连续，$[F^{'}(x^*)]^{-1}\exists$，则：*

1. *存在闭球 $\bar{S}_r^{'} = \{x|||x - x^*|| \le r, r > 0\} \subset S_0, \forall x^{(0)} \subset \bar{S}_r^{'}$，由 $x^{(k+1)} = x^{(k)} - [F^{'}(x^{(k)})]^{-1}F(x^{(k)})$ 产生的 $x^{(k)} \in \bar{S}_r^{'}, k = 0, 1, 2, \ldots$ (数学归纳法证明)*
2. *$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x^*$ (局部收敛性，$\rho(\phi^{'}(x^*)) < 1$ 或某种从属范数 <1)*
3. *若存在常数 $k > 0, s.t. ||F^{'}(x) - F^{'}(x^*)|| \le K||x - x^*||, \forall x \in \bar{S}_r^{'}$，则 $\{x^{(k)}\}$ 至少平方收敛。($||x^{(k+1)} - x^*|| \le C||x^{(k)} - x^*||^2$)*

5.4 拟 Newton 法与 Broyden 方法

将5.7中的 $[F^{'}(x^{(k)})]^{-1}$ 用 A_k^{-1} 代替，则

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - A_k^{-1}F(x^{(k)}), k = 0, 1, 2 \tag{5.8}$$

$f^{'}(x^{(k)})(x_k - x_{k-1}) \approx f(x_k) - f(x_{k-1})$，由此分析得：

$$A_{k+1}(x^{(k+1)} - x^{(k)}) = F(x^{(k+1)}) - F(x^{(k)}) \tag{5.9}$$
$$A_{k+1} = A_k + \Delta A_k, rank(\Delta A_k) = m \ge 1 \tag{5.10}$$

由 (5.8)(5.9)(5.10) 组成的迭代法称为拟 Newton 方法。

若 $m = 1$，则

$$\Delta A_k = u^{(k)}[v^{(k)}]^T, u^{(k)}, v^{(k)} \in R^n \tag{5.11}$$

记 $S^{(k)} = x^{(k+1)} - x^{(k)}, y^{(k)} = F(x^{(k+1)}) - F(x^{(k)})$，则5.9可写成

$$A_{k+1}S^{(k)} = y^{(k)} \tag{5.12}$$

由 (5.11)(5.12) 得

$$
\begin{aligned}
&\{A_k + u^{(k)}[v^{(k)}]^T\}S^{(k)} = y^{(k)} \Rightarrow \\
&u^{(k)}[v^{(k)}]^T S^{(k)} = y^{(k)} - A_k S^{(k)} \Rightarrow \\
&u^{(k)} = \tfrac{1}{[v^{(k)}]^T S^{(k)}}(y^{(k)} - A_k S^{(k)}), [v^{(k)}]^T S^{(k)} \neq 0
\end{aligned}
$$

将 $u^{(k)}$ 代入 ΔA_k 有:

$$\Delta A_k = \frac{y^{(k)} - A_k S^{(k)}}{[v^{(k)}]^T S^{(k)}}[v^{(k)}]^T$$

选取 $v^{(k)} = S^{(k)}$，则有 $\Delta A_k = \frac{y^{(k)} - A_k S^{(k)}}{[S^{(k)}]^T S^{(k)}}[S^{(k)}]^T$

$A_0 = I, A_{k+1} = A_k + \Delta A_k$ 由此可得秩 1 拟 Newton 法如下:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - A_k^{-1} F(x^{(k)}) \tag{5.13}$$

$$A_{k+1} = A_k + (y^{(k)} - A_k S^{(k)}) \frac{[S^{(k)}]^T}{[S^{(k)}]^T S^{(k)}} \tag{5.14}$$