

第三章 非线性方程和方程组的数值解法

$f(x) = 0$ 的解也叫根或 $f(x)$ 的零点。

若 $f(x) = 0 (x \in [a, b])$ 有解, 则称 $[a, b]$ 为有根区间, 若 $f(x) \in C[a, b]$, 且 $f(a)f(b) < 0$ 在 $[a, b]$ 至少存在一实根。

1 二分法

过程略。

$\because b_2 - a_2 = \frac{b-a}{2}$, 由此易证 $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^{n-1}}$; 且 $x_n, x^* \in [a_n, b_n]$
 $\therefore |x_n - x^*| < \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b-a}{2^n} < \varepsilon, \therefore n > \frac{\ln \frac{b-a}{\varepsilon}}{\ln 2}$

2 单个方程的不动点迭代法

2.1 不动点迭代法

$$f(x) = 0, x \in [a, b] \quad (2.1)$$

将 (2.1) 转化为如下等价的方程:

$$x = \phi(x), \phi(x) \in [a, b] \quad (2.2)$$

由此可得如下迭代公式:

$$x_{k+1} = \phi(x_k), k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.3)$$

若 x_k 收敛, 即 $x_k \rightarrow x^*, k \rightarrow \infty$ 则 $x^* = \phi(x^*)$. $\phi(x)$ 称为迭代函数, x^* 称为 $\phi(x)$ 的不动点。

定理 2.1. *!!(压缩映射原理)* 设 $\phi(x) \in C[a, b]$, 若满足下面条件:

1. 映内性:

$$\phi(x) \in [a, b], \forall x \in [a, b] \quad (2.4)$$

2. 压缩性 (Lipschitz 条件): $\exists 0 \leq L < 1$ 使得:

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq L|x - y|, \forall x, y \in [a, b] \quad (2.5)$$

则 $\forall x_0 \in [a, b]$, 由2.3产生的迭代序列 $\{x_k\}$ 都收敛到 ϕ 的唯一不动点, 且有误差估计式:

$$|x_k - x^*| \leq \frac{L^k}{1-L} |x_1 - x_0| \quad (2.6)$$

证明. 分四步: (1) 不动点存在 (2) 唯一性 (3) 收敛性 (4) 误差估计

1. 令 $f(x) = x - \phi(x)$, 则由2.4可得 $f(a) = a - \phi(a) \leq 0, f(b) = b - \phi(b) \geq 0$, $\therefore \exists x^* \in [a, b]$, s.t. $f(x) = 0$, i.e. $x^* - \phi(x^*) = 0 \Leftrightarrow x^* = \phi(x^*)$

2. 唯一性 [反证法]: 设 $x_1^* = \phi(x_1^*), x_2^* = \phi(x_2^*), x_1^* \neq x_2^*, x_1^*, x_2^* \in [a, b]$ 则 $|x_1^* - x_2^*| = |\phi(x_1^*) - \phi(x_2^*)| \leq L|x_1^* - x_2^*| < |x_1^* - x_2^*|$ 矛盾, \therefore 唯一。

3. 收敛性: $\because \phi(x) \in [a, b], \forall x \in [a, b]$

$$\therefore x_k \in [a, b], k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\therefore |x_k - x^*| = |\phi(x_{k-1}) - \phi(x^*)| \leq L|x_{k-1} - x^*| \leq \dots \leq L^k |x_0 - x^*| \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$$

$$\therefore \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$$

4. 误差估计式: $\forall m$,

$$\begin{aligned} |x_{k+m} - x_k| &= |x_{k+m} - x_{k+m-1} + x_{k+m-1} - x_{k+m-2} + x_{k+m-2} - \dots + x_{k+1} - x_k| \\ &\leq |x_{k+m} - x_{k+m-1}| + |x_{k+m-1} - x_{k+m-2}| + \dots + |x_{k+1} - x_k| \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\text{而 } |x_{k+j+1} - x_{k+j}| = |\phi(x_{k+j}) - \phi(x_{k+j-1})| \leq L|x_{k+j} - x_{k+j-1}| \leq \dots \leq L^{k+j} |x_1 - x_0|$$

$$\therefore m \rightarrow \infty, |x_k - x^*| \leq \frac{L^k}{1-L} |x_1 - x_0|$$

□

注释:

1. 由2.7式易证一个误差估计式 $|x_k - x^*| \leq \frac{L}{1-L} |x_k - x_{k-1}|$, 当 L 不接近于 1 时, 可用 $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$ 作为终止条件。

2. 可用2.6估计迭代次数:

$$k \geq \frac{\ln \varepsilon - \ln(|x_1 - x_0|/(1-L))}{\ln L}$$

3. 当 L 越小, 收敛越快

4. 满足定理条件的迭代法是全局收敛的。

推论: 若将定理2.1中的条件 (2) 改为 $\phi(x)$ 的导数在 $[a, b]$ 上存在, 且 $\phi'(x) \leq L < 1, \forall x \in [a, b]$ 则定理2.1的结论仍成立。

例 2.1. 解方程 $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4 = 0, x^* \approx 1.130395$ 易证 $f(x) = 0$ 在 $[1, 2]$ 上有根, $f(1) < 0, f(2) > 0$; 将 $f(x) = 0$ 改写为如下不同形式:

1.

$$x = x - x^3 - 2x^2 + 4 \triangleq \phi_1(x)$$

2.

$$x = [2(\frac{2}{x} - x)]^{\frac{1}{2}} \triangleq \phi_2(x)$$

3.

$$x = (2 - \frac{x^3}{2})^{\frac{1}{2}} \triangleq \phi_3(x)$$

4.

$$x = 2\sqrt{\frac{1}{x+2}} \triangleq \phi_4(x)$$

5.

$$x = x - \frac{x^3 + 2x^2 - 4}{3x^2 + 4} \triangleq \phi_5(x)$$

由此得到的迭代关系式, 1 和 2 不收敛, 3 需要 120 次收敛, 4 需要 9 次迭代, 5 需要 4 次迭代。

2.2 局部收敛性和收敛阶

定义 2.1. 设 $\phi(x)$ 在 $[a, b]$ 区间有不动点 x^* , 若 $\exists x^*$ 的一个邻域 $R(x^*) = [x^* - \varepsilon_0, x^* + \varepsilon_0] \subset [a, b]$, $\varepsilon_0 > 0$ 使对 $\forall x_0 \in R(x^*)$, 由 $x_{k+1} = \phi(x_k)$ 产生的迭代序列 $\{x_k\} \subset R(x^*)$ 且收敛于 x^* , 则称此迭代方法局部收敛。

定理 2.2. 设 x^* 为 $\phi(x)$ 的不动点, $\exists R(x^*), \phi(x) \in C^1[R(x^*)]$, 且 $|\phi'(x^*)| < 1$, 则 $x_{k+1} = \phi(x_k)$ 局部收敛。

证明. $\because \phi'(x)$ 连续, 且 $|\phi'(x)| < 1, \therefore$ 由微积分定理可知: $\exists x^*$ 的一个邻域 $R(x^*) = [x^* - \varepsilon_0, x^* + \varepsilon_0]$, 使得 $|\phi'(x)| \leq L < 1, \forall x \in R(x^*)$

任取 $x \in R(x^*)$, 则 $|\phi(x) - x^*| = |\phi(x) - \phi(x^*)| = |\phi(x) - x^*| = |\phi'(\xi)| \cdot |x - x^*| \leq L|x - x^*| < |x - x^*| \leq \varepsilon$

$\Rightarrow \phi(x) \in [R(x^*)]$, 满足映内性。

显然 $\forall x, y \in R(x^*), |\phi(x) - \phi(y)| = |\phi'(\eta)||x - y| \leq L|x - y|$, 压缩性。

\therefore 由压缩映射原理可知, 迭代法具有局部收敛性。 \square

思考题

- $x_{k+1} = \sin(x_k), x^* = 0, |\phi'(x^*)| = 1$, 任取 x_0 收敛
- $x_{k+1} = x_k + x_k^3, x^* = 0, |\phi'(x^*)| = 1$, 发散
- $x_{k+1} = x_k + x_k^2, x^* = 0, |\phi'(x^*)| = 1, x_0 > 0$ 发散; $x_0 < 0$ 收敛

证明: $|e_{k+1}| = |x_{k+1} - x^*| = |\phi(x_k) - \phi(x^*)| = |\phi'(\xi)||x_k - x^*|$

定义 2.2. 设 $\{x_k\}$ 收敛于 x^* , 记 $e_k = x_k - x^*$, 若 \exists 实数 $p \geq 1$ 及非零常数 C , 使 $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{e_{k+1}}{|e_k|^p} = C$, 则称迭代序列 $\{x_k\}$ 为 p 阶收敛的。

$p = 1$ 称为线性收敛; $p = 2$ 称为平方收敛。

$p = 1$ 时, $0 < c < 1$; $p > 1$, 超线性收敛。

如果 $\phi(x) \in C^1[R(x^*)]$, 则 $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|e_{k+1}|}{e_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|\phi(x_k) - \phi(x^*)|}{x_k - x^*} = |\phi'(x^*)| \begin{cases} \neq 0, < 1 \text{ 线性} \\ = 0 \text{ 超线性} \end{cases}$

定理 2.3. 设 $\phi(x)$ 有不动点 $x^*, p > 1, \phi(x) \in C^p[R(x^*)]$, 且 $\phi''(x^*) = \phi^{(3)}(x^*) = \dots = \phi^{(p-1)}(x^*) = 0, \phi^{(p)}(x^*) \neq 0$, 则称迭代法是 p 阶收敛的, 且 $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|e_{k+1}|}{e_k} = \frac{\phi^{(p)}(x^*)}{p!}$

证明: $\because \phi'(x^*) = 0, \therefore$ 由局部收敛性定理可知 $\forall x_0 \in R(x^*)$ 收敛

$$\phi(x_k) = \phi(x^*) + \phi'(x^*)(x_k - x^*) + \dots + \frac{\phi^{(p-1)}(x^*)}{(p-1)!}(x_k - x^*)^{p-1} + \frac{\phi^{(p)}(\xi)}{(p)!}(x_k - x^*)^p$$

$$\Rightarrow e_{k+1} = x_{k+1} - x^* = \frac{\phi^{(p)}(\xi)}{(p)!}e_k^p \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{e_{k+1}}{e_k^p} = \frac{\phi^{(p)}(x^*)}{p!} \quad \square$$

3 迭代加速方法

Steffensen 迭代法

$$\begin{cases} y_k = \phi(x_k) \\ z_k = \phi(y_k) \\ x_{k+1} = x_k - \frac{(y_k - x_k)^2}{z_k - 2y_k + x_k} \end{cases}$$

其对应的迭代函数:

$$\Psi(x) = x - \frac{[\phi(x) - x]^2}{\phi[\phi(x)] - 2\phi(x) + x}, |\phi'(x^*)| < 1$$

$$x_{k+1} = \Psi(x_k)$$

易证若 $\phi(x) \in C^1[R(x^*)]$, 则 $x^* = \Psi(x^*) \Leftrightarrow x^* = \phi(x^*)$

定理 3.1. 设 $x^* = \phi(x^*)$, 且 $\phi^{(p+1)}(x) \exists, \forall x \in R(x^*)$, 则当 $p = 1$ 时, 若 $\phi'(x^*) \neq 1$, 那么该方法是二阶的, 否则为一阶收敛的, 当 $x_{k+1} = \phi(x_k)$ 是 p 阶收敛的 ($p > 1$), 则该法是 $2p - 1$ 阶的。

4 Newton 迭代法

如果取 $\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$, 则有如下 Newton 迭代方法:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, k = 0, 1, \dots \quad (4.1)$$

显然有 $\phi'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} \Rightarrow \phi'(x^*) = 0$

$\therefore (4.1)$ 收敛。

定理 4.1. 设 $f(x^*) = 0, f'(x^*) \neq 0$ [单根, 不存在重根], 且 $f(x) \in C^m[R(x^*)], m \geq 2$ 则 Newton 迭代方法 4.1 至少 2 阶收敛, 且 $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|e_{k+1}|}{e_k^2} = \frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}$

4.1 重根时的 Newton 迭代法及加速

设 x^* 为 $f(x) = 0$ 的 $m(m \geq 2)$ 重根, i.e. $f(x) = (x - x^*)^m q(x), q(x^*) \neq 0$, 则 $\phi'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}, \therefore \phi'(x) = 1 - \frac{1}{m} < 1$

有重根时 Newton 迭代法是收敛的, 且为一阶收敛: $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|e_{k+1}|}{e_k} = 1 - \frac{1}{m}$ 。

Newton 迭代法加速

- $\phi_1(x) = x - m \frac{f(x)}{f'(x)}$
- $\phi_2(x) = x - \frac{[f'(x)]^2}{[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)}$

4.2 割线法

将 4.1 的 $f'(x_k)$ 用其近似差商代替, i.e. $f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$ 将此代入 Newton 法即可得:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \quad (4.2)$$

定理 4.2. 设 $f(x)$ 在其零点 x^* 邻域二阶连续可导, 且 $f'(x^*) \neq 0$, 则 $\exists \varepsilon > 0$, 当 $x_0, x_1 \in [x^* - \varepsilon, x^* + \varepsilon]$ 时, 割线法 4.2 收敛, 且收敛阶为 $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$

5 非线性方程组的不动点迭代方法

设有如下非线性方程组:

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \dots, f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (5.1)$$

令 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, $F(x) = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$ 则5.1可写成如下形式:

$$F(x) = 0 \quad (5.2)$$

5.1 基本概念

假设 f_1, f_2, \dots, f_n 是定义在子集 $D \subset R^n$ 上的实值函数, 则可得 $F : D \subset R^n \rightarrow R^n$ 表示 F 为 R^n 中子集 D 到 R^n 的映射。更一般的, $F : D \subset R^n \rightarrow R^m$, 若 $F(x)$ 为标量, 则 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x) - F'(x)\Delta x}{\Delta x} = 0$

定义 5.1. 设 $F : D \subset R^n \rightarrow R^m$, 若 $\exists A \in R^{m \times n}$, 对 D 内 x 及 $\Delta x \in R^n$ 有:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\|F(x + \Delta x) - F(x) - A\Delta x\|}{\|\Delta x\|} = 0$$

则称 F 在 x 可导, 称 A 为 F 在 x 的 *Frechet* 导数, 记为

$$F'(x) = A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

定理 5.1. 设 $F : D \subset R^n \rightarrow R^m$ 在 $x \in D \subset R^n$ 是 *Frechet* 可微的, 则 $F(x)$ 在 x 连续, *i.e.* $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \|F(x + \Delta x) - F(x)\| = 0$

5.2 不动点迭代法

将 $F(x) = 0$ 转化成等价的方程组

$$x = \phi(x) \quad (5.3)$$

其中 $\phi : D \subset R^n \rightarrow R^n$, 且 ϕ 是连续的, 若 $\exists x^* \in D$ 使得 $x^* = \phi(x^*)$, 则称 x^* 为 $\phi(x)$ 的不动点, 由此可构造如下迭代方法

$$x^{(k+1)} = \phi(x^{(k)}), k = 0, 1, 2, \dots \quad (5.4)$$

其中 $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$

定义 5.2. 设 $\{x^{(k)}\}$ 收敛于 x^* ,

1. 若 \exists 实数 $p \geq 1$ 及常数 $C > 0$, 使

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|x^{(k+1)} - x^*\|}{\|x^{(k)} - x^*\|^p} = C$$

则称 $\{x^{(k)}\}$ 为 p 阶收敛的; 其中 $p = 1$ 时, $0 < C < 1$

2. 若存在实数 $p \geq 1$ 和常数 $C > 0$, 使 $\|x^{(k+1)} - x^*\| \leq C\|x^{(k)} - x^*\|^p, k = 0, 1, 2, \dots$ 成立, 其中 $p = 1$ 时, $0 < C < 1$, 则称 $\{x^{(k)}\}$ 至少 p 阶收敛; 当 $p=1$ 时, $\{x^{(k)}\}$ 至少线性收敛
3. 若存在实数 $p \geq 1$, 且 $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|x^{(k+1)} - x^*\|}{\|x^{(k)} - x^*\|^p} = 0$, 则称 $\{x^{(k)}\}$ 为超 p 阶收敛。

定理 5.2. (压缩映射原理) 设 $D \subset R^n$ 中的一个闭集, 若 $\phi : D \rightarrow D$ (i.e. $\phi(x) \in D, \forall x \in D$) 为压缩映射, 即满足如下条件:

$$\|\phi(x) - \phi(y)\| \leq L\|x - y\|, 0 < L < 1, \forall x, y \in D \quad (5.5)$$

则有如下结论:

1. $\forall x^{(0)} \in D$, 由 5.4 产生的迭代序列 $\{x^{(k)}\} \subset D$
2. ϕ 在 D 上存在唯一的不动点 x^* 使 $x^* = \phi(x^*)$
3. $\|x^{(k+1)} - x^*\| \leq \|x^{(k)} - x^*\|, k = 0, 1, 2, \dots$, i.e. $\{x^{(k)}\}$ 至少线性收敛
4. 有误差估计式:

$$\|x^{(k)} - x^*\| \leq \frac{L^k}{1 - L} \|x^{(1)} - x^{(0)}\| \quad (5.6)$$

证明. 1. 由映内性, 显然

2. 由压缩性的 $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| = \|\phi(x^{(k)}) - \phi(x^{(k-1)})\| \leq L\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| \leq \dots \leq L^k \|x^{(1)} - x^{(0)}\|$

于是对 $\forall m \in Z$, 有

$$\begin{aligned} \|x^{(k+m)} - x^{(k)}\| &= \|(x^{(k+m)} - x^{(k+m-1)}) + (x^{(k+m-1)} - x^{(k+m-2)}) + \dots + (x^{(k+1)} - x^{(k)})\| \\ &\leq (L^{k+m-1} + L^{k+m-2} + \dots + L^k) \|x^{(1)} - x^{(0)}\| \\ &\leq \frac{L^k}{1 - L} \|x^{(1)} - x^{(0)}\| \end{aligned}$$

$\because 0 < L < 1$, 当 $k \rightarrow \infty$ 时, $\|x^{(k+m)} - x^{(k)}\| \rightarrow 0$

$\because \{x^{(k)}\}$ 为一个柯西序列, $\{x^{(k)}\}$ 有一个有限极限, $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x^*$

又根据定理条件, $\phi(x)$ 在 D 上连续. $\therefore \lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k+1)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \phi(x^{(k)}) = \phi(x^*), \lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k+1)} = x^*$

$\therefore \phi(x^*) = x^*$

$\because D$ 为闭集, 且 $x^{(k)} \in D, \forall k = 0, 1, 2, \dots \therefore \{x^{(k)}\}$ 的极限 $x^* \in D$

假设还有另一个不动点 $y^* \in D, x^* \neq y^*$, 则 $\|x^* - y^*\| = \|\phi(x^*) - \phi(y^*)\| \leq L\|x^* - y^*\| < \|x^* - y^*\|$, 矛盾。

3. $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| = \|\phi(x^{(k)}) - \phi(x^*)\| \leq \|x^{(k)} - x^*\|$, 且 $0 < L < 1$, 至少线性收敛

4. $\|x^{(k+m)} - x^{(k)}\| \leq \frac{L^k}{1-L} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|$
 当 $m \rightarrow \infty$ 时, $\|x^{(k)} - x^*\| \leq \frac{L^k}{1-L} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|$

□

定义 5.3. 设 x^* 为 ϕ 的不动点, 若 $\exists x^*$ 的一个邻域 $S(x^*) \subset D, \forall x^{(0)} \in S(x^*)$, 有 5.4 产生的序列 $\{x^{(k)}\} \subset S(x^*)$, 且 $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x^*$ 则称 $\{x^{(k)}\}$ 有局部收敛性。

定理 5.3. 设 $\phi : D \subset R^n \rightarrow R^n, x^* \in D$ 为 ϕ 的不动点, 若 \exists 一个开球, $S_r(x^*) = \{x | \|x - x^*\| < r, r > 0\} \subset D$, 使得 $\|\phi(x) - \phi(x^*)\| \leq L\|x - x^*\|, \forall x \in S_r(x^*), 0 \leq L < 1$ 则对 $\forall x^{(0)} \in S_r(x^*)$, 由 5.4 产生的 $\{x^{(k)}\}$ 具有如下性质:

1. $x^{(k)} \in S_r(x^*), k = 0, 1, 2, \dots$

2. $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x^*$

3. $\{x^{(k)}\}$ 至少线性收敛。

证明. 1. 数学归纳法证明 $\|x^{(k+1)} - x^*\| < r$

2. $\|x^{(k+1)} - x^*\| = \|\phi(x^{(k)}) - \phi(x^*)\| \leq L\|x^{(k)} - x^*\| \leq \dots \leq L^{k+1}\|x^{(0)} - x^*\| \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$

3. $\|x^{(k+1)} - x^*\| \leq L\|x^{(k)} - x^*\|, 0 < L < 1$ 至少线性收敛

□

定理 5.4. 设 $\phi : D \subset R^n \rightarrow R^n, \phi$ 在 D 内有不动点 x^* , 且 ϕ 在 x^* 可导, $\rho(\phi'(x^*)) = \lambda < 1$, 则 \exists 开球 $S_r(x^*) \subset D$ 对 $\forall x^{(0)} \in S_r(x^*)$, 由 5.4 产生的迭代序列 $\{x^{(k)}\}$ 收敛到 x^*

证明. $\because \lambda < 1, \therefore \exists \varepsilon > 0, s.t. \lambda + 2\varepsilon < 1$

由范数与谱半径的关系可知, 对于 ε , 存在一种从属范数 $\|\cdot\|_\varepsilon$, 使得 $\|\phi(x^*)\|_\varepsilon < \lambda + \varepsilon$ 。又 $\because \phi(x)$ 在 x^* 可导, \therefore 由导数定义可知, 对于 $\varepsilon > 0, \exists S_r(x^*), \forall x \in S_r(x^*), \|\phi(x) - \phi(x^*) - \phi'(x^*)(x - x^*)\|_\varepsilon \leq \varepsilon\|x - x^*\|_\varepsilon$

$$\begin{aligned} \|\phi(x) - \phi(x^*)\|_\varepsilon &= \|\phi(x) - \phi(x^*) - \phi'(x^*)(x - x^*) + \phi'(x^*)(x - x^*)\|_\varepsilon \\ &\leq \|\phi(x) - \phi(x^*) - \phi'(x^*)(x - x^*)\|_\varepsilon + \|\phi'(x^*)(x - x^*)\|_\varepsilon \\ &< \varepsilon\|x - x^*\|_\varepsilon + (\lambda + \varepsilon)\|x - x^*\|_\varepsilon \\ &= (\lambda + 2\varepsilon)\|x - x^*\|_\varepsilon \end{aligned}$$

$\therefore \lambda + 2\varepsilon < 1, \therefore$ 由定理5.3可知, $\{x^{(k)}\}$ 收敛于 x^* □

例 5.1. 用不动点迭代法求解方程组

$$\begin{cases} x_1^2 - 10x_1 + x_2^2 + 8 = 0 \\ x_1x_2^2 + x_1 - 10x_2 + 8 = 0 \end{cases}$$

解: 将原方程组转化为 $x = \phi(x)$ 的形式, 其中 $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \phi(x) = \begin{bmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x_1^2 + x_2^2 + 8}{10} \\ \frac{x_1x_2^2 + x_1 + 8}{10} \end{bmatrix}, \therefore x^{(k+1)} = \phi(x^{(k)}), k = 0, 1, 2, \dots$
 设 $D = \{(x_1, x_2) | 0 \leq x_1, x_2 \leq 1.5\}$ 易证 $0.8 \leq \phi_1(x) \leq 1.25, 0.8 \leq \phi_2(x) \leq 1.2875 \therefore \phi(x) \in D$ (映内性)
 $\forall x, y \in D$, 有

$$\begin{cases} |\phi_1(x) - \phi_1(y)| = \frac{|y_1^2 - x_1^2 + y_2^2 - x_2^2|}{10} \leq \frac{3}{10}(|y_1 - x_1| + |y_2 - x_2|) = \frac{3}{10}\|x - y\|_1 \\ |\phi_2(x) - \phi_2(y)| = \frac{|y_1y_2^2 - x_1x_2^2 + y_1 - x_1|}{10} \leq \frac{4.5}{10}\|x - y\|_1 \end{cases}$$

$\therefore \|\phi(x) - \phi(y)\| = \|\phi_1(x) - \phi_1(y)\| + \|\phi_2(x) - \phi_2(y)\| \leq \frac{7.5}{10}\|x - y\|_1$ (压缩性)

\therefore 迭代序列收敛。

取 $x^{(0)} = (0, 0)^T$, 则 $x^{(1)} = (0.8, 0.8)^T, x^{(2)} = (0.928, 0.9312)^T, \dots x^{(6)} = (0.99938, 0.99932)^T, x^* = (1, 1)^T$

$$\phi'(x) = \begin{bmatrix} \frac{1}{5}x_1 & \frac{1}{5}x_2 \\ \frac{x_2^2+1}{10} & \frac{x_1x_2}{5} \end{bmatrix}, \therefore \phi'(x^*) = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \|\phi'(x^*)\|_1 = 0.4 < 1 \therefore \rho(\phi'(x^*)) \leq \|\phi'(x^*)\|_1 < 1$$

$\therefore \{x^{(k)}\}$ 收敛

5.3 Newton 迭代法

$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x)}{f'(x)}$ 推广到方程组:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - [F'(x^{(k)})]^{-1}F(x^{(k)}), k = 0, 1, 2, \dots \quad (5.7)$$

将5.7改写成如下形式:

$$\begin{aligned} F'(x^{(k)})(x^{(k+1)} - x^{(k)}) &= -F(x^{(k)}) \\ F'(x^{(k)})\Delta x^{(k)} &= -F(x^{(k)}), k = 0, 1, 2, \dots \\ x^{(k+1)} &= x^{(k)} + \Delta x^{(k)} \end{aligned}$$

例 5.2.

$$\begin{cases} x_1^2 - 10x_1 + x_2^2 + 8 = 0 \\ x_1x_2^2 + x_1 + 10x_2 + 8 = 0 \end{cases}$$

解:

$$F'(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 - 10 & 2x_2 \\ x_2^2 + 1 & 2x_1x_2 + 10 \end{bmatrix}$$

$$\text{取 } x^{(0)} = (0, 0)^T \text{ 由 } F'(x^{(k)})\Delta x^{(0)} = -F(x^{(0)}) \Rightarrow \Delta x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.88 \end{bmatrix}$$

$$\therefore x^{(1)} = x^{(0)} + \Delta x^{(0)} = (0.8, 0.88)^T, \dots, x^{(4)} = (1.000, 1.000)^T$$

定理 5.5. 设 $F: D \subset R^n \rightarrow R^n, F(x^*) = 0, F(x)$ 在 x^* 的开邻域 $S_0 \subset D$ 上可导, 且 $F'(x)$ 连续, $[F'(x^*)]^{-1}$ 存在, 则:

1. 存在闭球 $\bar{S}_r' = \{x \mid \|x - x^*\| \leq r, r > 0\} \subset S_0, \forall x^{(0)} \in \bar{S}_r',$ 由 $x^{(k+1)} = x^{(k)} - [F'(x^{(k)})]^{-1}F(x^{(k)})$ 产生的 $x^{(k)} \in \bar{S}_r', k = 0, 1, 2, \dots$ (数学归纳法证明)
2. $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x^*$ (局部收敛性, $\rho(\phi'(x^*)) < 1$ 或某种从属范数 < 1)
3. 若存在常数 $k > 0, s.t. \|F'(x) - F'(x^*)\| \leq K\|x - x^*\|, \forall x \in \bar{S}_r',$ 则 $\{x^{(k)}\}$ 至少平方收敛。 ($\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \leq C\|x^{(k)} - x^*\|^2$)

5.4 拟 Newton 法与 Broyden 方法

将 5.7 中的 $[F'(x^{(k)})]^{-1}$ 用 A_k^{-1} 代替, 则

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - A_k^{-1}F(x^{(k)}), k = 0, 1, 2 \quad (5.8)$$

$f'(x^{(k)})(x_k - x_{k-1}) \approx f(x_k) - f(x_{k-1})$, 由此分析得:

$$A_{k+1}(x^{(k+1)} - x^{(k)}) = F(x^{(k+1)}) - F(x^{(k)}) \quad (5.9)$$

$$A_{k+1} = A_k + \Delta A_k, \text{rank}(\Delta A_k) = m \geq 1 \quad (5.10)$$

由 (5.8)(5.9)(5.10) 组成的迭代法称为拟 Newton 方法。

若 $m = 1$, 则

$$\Delta A_k = u^{(k)}[v^{(k)}]^T, u^{(k)}, v^{(k)} \in R^n \quad (5.11)$$

记 $S^{(k)} = x^{(k+1)} - x^{(k)}, y^{(k)} = F(x^{(k+1)}) - F(x^{(k)})$, 则 5.9 可写成

$$A_{k+1}S^{(k)} = y^{(k)} \quad (5.12)$$

由 (5.11)(5.12) 得

$$\begin{aligned} \{A_k + u^{(k)}[v^{(k)}]^T\}S^{(k)} &= y^{(k)} \Rightarrow \\ u^{(k)}[v^{(k)}]^T S^{(k)} &= y^{(k)} - A_k S^{(k)} \Rightarrow \\ u^{(k)} &= \frac{1}{[v^{(k)}]^T S^{(k)}}(y^{(k)} - A_k S^{(k)}), [v^{(k)}]^T S^{(k)} \neq 0 \end{aligned}$$

将 $u^{(k)}$ 代入 ΔA_k 有:

$$\Delta A_k = \frac{y^{(k)} - A_k S^{(k)}}{[v^{(k)}]^T S^{(k)}} [v^{(k)}]^T$$

选取 $v^{(k)} = S^{(k)}$, 则有 $\Delta A_k = \frac{y^{(k)} - A_k S^{(k)}}{[S^{(k)}]^T S^{(k)}} [S^{(k)}]^T$

$A_0 = I, A_{k+1} = A_k + \Delta A_k$ 由此可得秩 1 拟 Newton 法如下:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - A_k^{-1} F(x^{(k)}) \quad (5.13)$$

$$A_{k+1} = A_k + (y^{(k)} - A_k S^{(k)}) \frac{[S^{(k)}]^T}{[S^{(k)}]^T S^{(k)}} \quad (5.14)$$