第四章 数值逼近与数值积分

1 正交多项式

定义 1.1. 内积：(两个函数内积) 设 $f, g \in [a, b], \rho(x)$ 为权函数，称 $(f, g) = \int_a^b \rho(x)f(x)g(x)dx$ 为函数 f 和 g 在 $[a, b]$ 上带权 ρ 的内积。

定义 1.2. 正交：设 $f, g \in C[a, b]$，ρ 为权函数，若 $(f, g) = 0$，则称 f 与 g 在 $[a, b]$ 上带权 ρ 正交。

定义 1.3. 正交多项式：设 ϕ_n 是 $[a, b]$ 上首项系数 $a_n \neq 0$ 的 n 次多项式，$\rho(x)$ 为 $[a, b]$ 上权函数，若多项式序列 $\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n$ 满足：

$$(\phi_i, \phi_j) = \int_a^b \rho(x)\phi_i(x)\phi_j(x)dx = \begin{cases} 0, i \neq j \\ A_j > 0, i = j \end{cases}$$

则称 $\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n$ 为 $[a, b]$ 上带权 $\rho(x)$ 正交，并称 $\phi_n(x)$ 为 $[a, b]$ 上带 $\rho(x)$ 的 n 次正交多项式。

1.1 Gram-Schmidt 方法

用 Gram-Schmidt 正交化方法构造 $[a, b]$ 上带权 $\rho(x)$ 的正交多项式 **(重点)**：

$$\begin{aligned}
&\phi_0(x) = 1 \\
&\phi_1(x) = x - \alpha_1 \\
&\phi_k(x) = (x - \alpha_k)\phi_{k-1}(x) - \beta_k\phi_{k-2}(x), k = 2, 3, \ldots
\end{aligned}$$

其中：$\alpha_k = \frac{(x\phi_{k-1}, \phi_{k-1})}{(\phi_{k-1}, \phi_{k-1})}, \beta_k = \frac{(\phi_{k-1}, \phi_{k-1})}{(\phi_{k-2}, \phi_{k-2})}$

1.2 正交多项式性质

1. $\phi_k(x)$ 是最高次数项系数为 1 的多项式。
2. $\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n$ 在 $[a, b]$ 上带权 $\rho(x)$ 正交

3. 区间 $[a,b]$ 上关于权函数 $\rho(x)$，正交多项式 $\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n$ 必定线性无关。

4. 任意 k 次多项式均可表示为前 k+1 个 $\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_k$ 的线性组合 $P_k(x) = c_o\phi_0 + c_1\phi_1 + \cdots + c_k\phi_k$

定理 1.1. 设 $\{\phi_k, k \geq 0\}$ 是 $[a,b]$ 上带权 $\rho(x)$ 的正交多项式序列，则 n 次多项式 $\phi_n(x)$ 在 (a,b) 内恰有 n 个不同的实零点（$\phi_n(x_i) = 0, i = 1, 2, \ldots, n$，即 $\phi_n(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)$）。

1.3 常见的多项式

1.3.1 Legendre 多项式

表达式：

$$\begin{cases} P_0(x) = 1 \\ P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\{(x^2-1)^n\} \end{cases} \tag{1.1}$$

性质：

1. 正交性:
$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)dx = \begin{cases} 0, n \neq m \\ \frac{2}{2n+1}, n = m \end{cases}$$
i.e. Legendre 多项式序列 $P_0, P_1, \ldots, P_n$ 是 $[-1,1]$ 上带权 $\rho(x) = 1$ 的正交多项式序列。

2. 奇偶性：$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$

3. 递推关系: $(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x), n = 0, 1, 2, \ldots$

4. $P_n(x)$ 在 $(-1,1)$ 内有 n 个不同的实零点 $P_n(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)$

Legendre 多项式首项系数：$a_n = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}$，从表达式易知。

1.3.2 切比雪夫 (Chebyshev) 多项式

对于 $x \in [-1,1]$，称 n 次多项式:

$$T_n(x) = cos(narccosx), n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.2}$$

为 chebyshev 多项式。

性质：

1. 正交性：

$$\int_{-1}^{1}\frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx=\begin{cases}0, n\neq m\\ \frac{\pi}{2}, n=m\neq 0\\ \pi, n=m=0\end{cases}$$

   i.e. Chebyshev 多项式在 $[-1,1]$ 上带权 $\rho(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 正交

2. 递推关系：$T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x), n=1,2,\ldots$

3. 奇偶性：$T_n(-x)=(-1)^nT_n(x)$

4. $T_n(x)$ 在 $(-1,1)$ 上有 n 个不同的实零点；$x_k=cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}, k=1,2,\ldots,n$

5. T_n 的首项系数是 $a_n=2^{n-1}, n=1,2,\ldots$

6. 任意 n 次多项式均可表示成 $T_0,T_1,\ldots,T_n$ 的线性组合：$P_n(x)=c_oT_0+c_1T_1+\cdots+c_nT_n$

   由性质 1 和性质 6 可知：

$$\int_{-1}^{1}\frac{P_k(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx=0, k<n$$

2 最小二乘拟合

2.1 线性最小二乘拟合

已知一组数据 $(x_i,f_i), i=0,1,\ldots,m$，要求在函数类 $\Phi=\mathrm{span}\{\phi_0,\phi_1,\ldots,\phi_n\}$ 中找到一个函数 $S(x)$ 使得

$$\sum_{j=0}^{m}\rho(x_j)[S^*(x_j)-f_j]^2=\min_{S(x)\in\Phi}\sum_{j=0}^{m}\rho(x_j)[S(x_j)-f_j]^2 \tag{2.1}$$

其中 $S(x)=a_0\phi_0(x)+\cdots+a_n\phi_n(x)$，这就是线性最小二乘曲线拟合

$$F(a_0,a_1,\ldots,n)=\sum_{j=0}^{m}\rho(x_j)[S(x_j)-f_i]^2=\sum_{j=0}^{m}\rho(x_j)[\sum_{i=0}^{n}a_i\phi_i(x_j)-f_j]^2$$

令 $\frac{\partial F}{\partial a_i}=0, i=0,1,\ldots,n$ 则有：

$$\frac{\partial F}{\partial a_k}=2\sum_{j=0}^{m}\rho(x_j)[\sum_{i=0}^{n}a_i\phi_i(x_j)-f_j]\phi_k(x_j)=0 \tag{2.2}$$

定义 $(\phi_k,\phi_i)=\sum_{j=0}^{m}\rho(x_j)\phi_k(x_j)\phi_i(x_j)$ 为 $\phi_k(x_j)$ 和 $\phi_i(x_j)$ 在离散点集 $X=\{x_0,x_1,\ldots,x_m\}$ 上带权 $\rho(x_j)$ 的内积，则2.2可写为：

$$\sum_{i=0}^{n}(\phi_k,\phi_i)a_i=d_k,k=0,1,\ldots,n \tag{2.3}$$

其中 $d_k=(f,\phi_k)$，称2.3为法方程，或写成如下矩阵形式：

$$Ga=d$$

其中 $a=(a_0,a_1,\ldots,a_n)^T$，$d=(d_0,d_1,\ldots,d_n)^T$，

$$G=\begin{bmatrix}(\phi_0,\phi_0) & (\phi_0,\phi_1) & \ldots & (\phi_0,\phi_n)\\ (\phi_1,\phi_0) & (\phi_1,\phi_1) & \ldots & (\phi_1,\phi_n)\\ \vdots & \ldots & \ldots & \vdots\\ (\phi_n,\phi_0) & (\phi_n,\phi_1) & \ldots & (\phi_n,\phi_n)\end{bmatrix}$$

定义 2.1. 设 $\phi_0,\phi_1,\ldots,\phi_n\in[a,b]$ 的任意线性组合在 $X=\{x_0,x_1,\ldots,x_m\}(m\geq n)$ 上至多只有 n 个不同的零点，则称 $\phi_0,\phi_1,\ldots,\phi_n$ 在 X 上满足 *Haar* 条件

定理 2.1. 若 $\phi_0,\phi_1,\ldots,\phi_n$ 在 $X=\{x_0,x_1,\ldots,x_m\}$ 上满足 *Harr* 条件，则 $\phi_0,\phi_1,\ldots,\phi_n$ 在 x 上线性无关，且法方程*2.3*的系数矩阵 G 非奇异。

2.2 非线性最小二乘拟合

例 2.1. （重点）若已知 $(x_i,f_i),i=0,1,\ldots,m$，且其分布近似于指数曲线，则可考虑用指数函数 $S=be^{ax}$ 去拟合数据。

为此，首先给出 $F(a,b)=\sum_{i=0}^{m}(f_i-be^{ax_i})^2$ 则可令 $\frac{\partial F}{\partial a}=\frac{\partial F}{\partial b}=0,\Rightarrow$
$$\begin{cases}\sum_{j=0}^{m}[f_j-be^{ax_j}]e^{ax_j}=0\\ \sum_{j=0}^{m}[f_j-be^{ax_j}]be^{ax_j}=0\end{cases}$$

由 $S=be^{ax}$ 可得：$lnS(x)=lnb+ax$ 令:$z=lnS(x),\beta=lnb$ 则 $z=\beta+ax$，选取 $\Phi=\mathrm{span}\{1,x\},i.e.\phi_0(x)=1,\phi_1(x)=x$

已知 $x=\{1,1.25,1.5,1.75,2\},f=\{5.1,5.79,6.53,7.45,8.46\}$，则 $lnf=\{1.629,1.756,1.876,2.008,2.135\}$ 则 $(\phi_0,\phi_0)=5,(\phi_0,\phi_1)=7.5,(\phi_1,\phi_1)=11.875,d_0=(\phi_0,lnf)=9.404,d_1=(\phi_1,lnf)=14.424$

则有如下法方程：

$$\begin{bmatrix}5 & 7.5\\ 7.5 & 11.875\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta\\ \alpha/\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9.404\\ 14.424\end{bmatrix}$$

得到:$\beta=1.1214,\alpha=0.5064\Rightarrow b=e^{\beta}\approx3.069,\therefore S^*(x)=3.069e^{0.5064x}$

其他形式：$S(x)=\frac{1}{a_0+a_1x}$ 可转换为：$\frac{1}{S(x)}=a_0+a_1x$

2.3 正交多项式最小二乘拟合

如果能选取 $\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n$ 关于点集 $X = \{x_0, x_1, \ldots, x_m\}$ 上带数 $w_i, i = 0, 1, \ldots, m$ 正交的函数族,i.e.$(\phi_j, \phi_k) = \sum_{i=0}^{m} w_i \phi_j(x_j)\phi_k(x_i) = \begin{cases} 0, i \neq k \\ A_j > 0, k = j \end{cases}$,
则法方程变为:

$$(\phi_k, \phi_k)a_k = d_k, k = 0, 1, \ldots, n$$
$$\Rightarrow a_k^* = (f, \phi_k)/(\phi_k, \phi_k) = \sum_{j=0}^{m} w_j f_j \phi_k(x_j) / \sum_{j=0}^{m} w_j \phi_k^2(x_j)$$

3 插值

定义 3.1. 插值:就是寻找一个便于计算的简单函数 $\phi(x)$ 使得其满足 $\phi(x_j) = f(x_j), j = 0, 1, \ldots, n$ 并以 $\phi(x)$ 作为 $f(x)$ 的近似值,称 $\phi(x)$ 为插值函数,$f(x)$ 为被插函数。

3.1 Lagrange 插值

在多项式函数空间 $P_n = \mathrm{span}\{1, x, \ldots, x^n\}$ 中寻找某一插值函数 $L_n(x)$ 满足下列插值条件:

$$L_n(x_j) = f(x_j), i = 0, 1, \ldots, n \tag{3.1}$$

其中 $L_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$,由3.1式可以确定插值函数:$L_n(x) = a_0^* + a_1^* x + \cdots + a_n^* x^n$,其中 $a_i^*(i = 0, 1, \ldots, n)$ 为3.1式的解。

构造给出满足3.1的 $L_n(x)$,选下列基函数:

$$\begin{aligned} l_i(x) &= \frac{(x - x_0)\cdots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\cdots(x - x_n)}{(x_i - x_0)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n)} \\ &= \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \end{aligned} \tag{3.2}$$

其满足:$l_i(x_k) = \begin{cases} 0, i \neq k \\ 1, i = k \end{cases}$ 则令:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x) f(x_i) \tag{3.3}$$

于是可证:$L_n(x_j) = f(x_j), j = 0, 1, \ldots, n$ 称 $R(x) = f(x) - L_n(x)$ 为插值多项式的余项($R(x_j) = 0$)。插值余项:

$$R(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} w_{n+1}(x)$$

其中 $\xi \in (a,b), w_{n+1}(x) = \prod_{j=0}^{n}(x-x_j), \Rightarrow f(x) = L_n(x) + R(x)$，$[a,b]$ 为插值区间。

3.2 Newton 插值

若选取基函数 $\phi_0(x) = 1, \phi_1(x) = (x-x_0), \dots, \phi_k(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_k)$, 则 Newton 插值多项式可写为: $P(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \dots + a_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$, 则由插值条件: $P(x_j) = f(x_j), j = 0,1,\dots,n$ 即可确定 $a_j, j = 0,1,\dots,n, i.e. a_0 = P(x_0) = f(x_0)$.

$$
\begin{aligned}
&a_0 = P(x_0) = f(x_0) \\
&P(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) = f(x_1) \\
&P(x_2) = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_n(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = f(x_2) \\
&\dots \\
&P(x_n) = a_0 + a_1(x_n - x_0) + \dots + a_n(x_n - x_0)(x_n - x_1)\cdots(x_n - x_{n-1})
\end{aligned}
$$

用差商表示:

$$
\begin{aligned}
&a_0 = f(x_0), a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f[x_0, x_1] \\
&a_2 = \frac{f[x_0, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_1} = f[x_0, x_1, x_2] \\
&\dots \\
&a_k = f[x_0, x_1, \dots, x_k]
\end{aligned}
$$

由此可得 Newton 插值多项式:

$$
\rho(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + \dots + f[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0)\cdots(x - x_{n-1}) \tag{3.4}
$$

注：Newton 法的优势在于若新增节点，只需要计算新增的一项。

$$
\begin{gathered}
R(x) = f(x) - P(x) \\
H_n = \operatorname{span}\{\phi_0, \dots, \phi_n\}
\end{gathered}
$$

3.3 三次样条插值

$$
R(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} w_{n+1}(x)
$$

若 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$：随着插值节点增加，R(x) 越来越大。

龙格现象？高次插值中易出现。随着节点增加无法改进。因此需要低次插值方法。

定义 3.2. 设 $[a,b]$ 上一个剖分：$\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 如果函数 $S(x)$ 满足下列条件：

1. $S(x) \in C^n[a,b]$
2. $S(x)$ 在每个子区间 $[x_{i-1}, x_i], i = 1, 2, \ldots, n$ 是 3 次多项式

则称 $S(x)$ 是关于节点剖分 Δ 的三次样条函数

若再给定 $f(x) \in [a,b]$ 在节点上的值 $f(x_j)$ 并使得 $S(x_j) = f(x_j), j = 0, 1, \ldots, n$ 则称 $S(x)$ 为 $f(x)$ 的三次样条插值函数。

$S(x) : [x_0, x_1][x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$ 共 n 段，共需确定 4n 个参数。由 $S(x) \in C^2(a,b)$ 有：

$$\begin{cases} S(x_j - 0) = S(x_j + 0) \\ S^{'}(x_j - 0) = S^{'}(x_j + 0) \\ S^{''}(x_j - 0) = S^{''}(x_j + 0) \end{cases}$$

由插值条件共有 $4n - 2$ 个条件。再利用边界条件可得 4n 个方程。

边界条件的三种类型：

- I 型边界条件 $S^{'}(x_0) = f^{'}(x_0), S^{'}(x_n) = f^{'}(x_n)$
- II 型边界条件 $S^{''}(x_0) = f^{''}(x_0), S^{''}(x_n) = f^{''}(x_n)$
  或 $S^{''}(x_0) = 0, S^{''}(x_n) = 0$，称为自然边界条件。
- III 型边界条件（周期样条函数条件）
  $S^{(j)}(x_0) = S^{(j)}(x_n)$

考：两阶情况下，满足某种边界条件下的三次样条插值函数（给定部分参数）。

4 数值积分

定积分 $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ 若无法积分，积分无意义？或者只有离散数据，不知道表达式，则需要定积分：

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx = \lim_{\max(\Delta x) \to 0} \sum_{i=0}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i \tag{4.1}$$

数值积分则为选取不同 ξ_i，来使得 $\sum_{i=0}^{n} f(\xi_i)\Delta_i \approx \int_a^b f(x)dx$ 和真实积分之间误差尽可能小。i.e.$I(f) = \int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} A_k f(x_k)$ 记为 $I_n(f)$，其中 A_k 为求积系数，x_k 为节点。（方法围绕如何选择 A_k, x_k）

4.1 插值型求积公式

若已知节点 x_j 及其函数值 $f(x_j), i=0,1,\dots,n$ 则可获得 Lagrange 插值多项式 $L_n(x)=\sum_{k=0}^{n} l_k(x)f(x_k)$。进一步有:

$$\begin{aligned} I(f) \approx I_n(f) &= \int_a^b L_n(x)dx = \sum_{k=0}^{n}[\int_a^b l_k(x)dx]f(x_k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) \end{aligned} \tag{4.2}$$

其中 $A_k=\int_a^b l_k(x)dx$
误差:

$$\begin{aligned} R_n(f) &= \int_a^b [f(x)-L_n(x)]dx \\ &= \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} w_{n+1}(x)dx \end{aligned}$$

求积公式至少 n 阶精度。$\because$ 若 $f(x)$ 为 n 次多项式，$f^{(n+1)}=0$，$\therefore$ 至少 n 阶精度。

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) \tag{4.3}$$

$$R_n(f) = I(f)-I_n(f) = \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} w_{n+1}(x)dx \tag{4.4}$$

4.2 求积公式的代数精度（考点!!）

定义 4.1. **重点概念!** *如果 $R_n(x^m)=0,(m=0,1,\dots,k)$，则称求积公式4.3至少具有 k 次代数精度，如果 $\exists R(x^{k+1})\neq 0$ 则称4.3 的代数精度恰为 k，或若当 $f(x)$ 为任意次数 $\leq k$ 的多项式，求积公式*

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

精确成立，而对于某个 $k+1$ 次多项式，公式不精确成立，则称求积公式具有 k 次代数精度

注：4.3的代数精度至少为 n，但最多只能到 $n+1$（有 n+1 个节点，精度上限受限于节点已给定）如果节点和插值函数均可变 (A_k, x_k)，则可提高精度，即高斯求积。

4.3 Gauss 型求积公式

$$\int_a^b \rho(x)f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) \tag{4.5}$$

定义 4.2. *如果一组节点 $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [a,b]$ 能使求积公式4.5具有 $2n-1$ 次代数精度，则称4.5为带权 $\rho(x)$ 的 Gauss 型求积公式，其中 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 称为 Gauss 点（n 个节点）*

例 4.1. *试确定 A_1, A_2 和 x_1, x_2 使得下列求积公式 $\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2)$ 的代数精度尽可能高。*

解：选取 $f(x) = 1, x, x^2, x^3$ 则根据 Gauss 型求积公式定义可得

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = 2 = \int_{-1}^{1} 1dx \\ A_1x_1 + A_2x_2 = 0 = \int_{-1}^{1} xdx \\ A_1x_1^2 + A_2x_2^2 = \frac{2}{3} = \int_{-1}^{1} x^2dx \\ A_1x_1^3 + A_2x_2^3 = 0 = \int_{-1}^{1} x^3dx \end{cases}$$

解得： $\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} \begin{cases} A_1 = 1 \\ A_2 = 1 \end{cases}$

$\therefore \int_{-1}^{1} = f(x)dx \approx 1f(-\frac{1}{\sqrt{3}}) + 1f(\frac{1}{\sqrt{3}})$

$\int_{-1}^{1} x^4dx = \frac{2}{5} \neq \frac{2}{9}$ $\therefore$ *该公式精度达不到 4，为 3.*

定理 4.1. *求积公式4.3的节点是 Gauss 点的充要条件是函数 $w_n(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - x_i)$ 与任意次数不超过 $n-1$ 的多项式 $p(x)$ 在 $[a,b]$ 上关于权 $\rho(x)$ 正交. i.e.*

$$\int_a^b p(x)w_n(x)\rho(x)dx = 0$$

证明.

- 必要性: 对任何不超过 $2n-1$ 次的多项式, 4.5精确成立。$\forall p(x) \in H_{n-1}$，令 $f(x) = p(x)w_n(x) \in H_{2n-1}$
- 充分性：要证 x_k 为高斯点。$\forall f(x) \in H_{2n-1}, f(x) = p(x)w_n(x) + q(x)$，其中 $p(x), q(x) \in H_{n-1}$，第一项为 0，第二项积分 $q(x)$ 满足插值求积公式，精确成立。

□

Gauss 型求积公式的构造过程:

- 构造正交多项式得到高斯点。
- 确定求积系数 A_k，可选取 $l_k(x) = \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} \frac{x-x_i}{x_k-x_i}$（$n-1$ 次多项式）
  $\therefore \int_a^b \rho(x)l_k(x)dx = \sum_{i=1}^{n} A_i l_k(x_i) = A_k, (l_k(x_i) = 0, i \neq k)$

Gauss 型求积公式的误差：

$$\begin{aligned} R(f) &= \int_a^b \rho(x)f(x)dx - \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) \\ &= \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}\int_a^b \rho(x)w_n^2(x)dx, \xi \in (a,b) \end{aligned}$$

可以证明 n 点的求积公式最多只能达到 $2n-1$ 阶代数精度。

下面给出几种特殊的高斯求积公式，即使用不同方法选取高斯点。

4.3.1 Gauss-Legendre 求积公式

如果选取 $[-1,1]$ 上 Legendre 正交多项式的零点作为 Gauss 点，即可得 Gauss-Legendre 求积公式 $\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$

$$A_k = \int_{-1}^{1} l_k(x)dx, k = 1,2,\ldots,n \tag{4.6}$$

$$R(f) = \frac{1}{[(2n)!]^3}\frac{2^{2n+1}}{2n+1}(n!)^4 f^{(2n)}(\eta), \eta \in (-1,1) \tag{4.7}$$

若不是 $(-1,1)$ 区间，而是任意 (a,b) 区间，做积分变量的坐标变换后求解 $x = \frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}(b-a)t, t \in (-1,1)$

4.3.2 Gauss-Chebyshev 求积公式

如果以 $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, [-1,1]$ 上 Chebyshev 多项式的零点作为 Gauss 点，即可构造 Gauss-Chebyshev 求积公式：

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) \\ &A_k = \frac{\pi}{n} \\ &x_k = cos\frac{2k-1}{2n}\pi, k = 1,2,\ldots,n \\ &R(f) = \frac{\pi}{2^{n-1}(2n)!} f^{(2n)}(\eta), \eta \in (-1,1) \end{aligned}$$

例 4.2. 重要!! 构造具有下列形式的 *Gauss* 型求积公式：

$$\int_0^1 \sqrt{x} f(x)dx \approx A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) \tag{4.8}$$

- 方法一：待定系数法：令 $f(x) = 1, x, x^2, x^3$ 分别代入*4.8*使其精度成立即可确定 A_1, A_2, x_1, x_2

- 方法二：二次正交多项式构造

  取：$\rho(x)=\sqrt{x}$，则构造二次正交多项式如下：$\phi_0(x)=1,\phi_1(x)=x-\frac{3}{5}$

$$\because \alpha_1=\frac{(x\phi_0,\phi_0)}{(\phi_0,\phi_0)}=\frac{\int_0^1 x^{3/2}dx}{\int_0^1 x^{1/2}dx}=\frac{3}{5}$$

$$\phi_2(x)=(x-\alpha_2)\phi_1(x)-\beta_2\phi_0(x)=x^2-\frac{10}{9}x+\frac{5}{21}$$

$$\alpha_2=\frac{(x\phi_1,\phi_1)}{(\phi_1,\phi_1)}=\frac{\int_0^1 x^{3/2}(x-\frac{3}{5})^2dx}{\int_0^1 x^{1/2}(x-\frac{3}{5})^2dx}=\frac{23}{45}$$

$$\beta_2=\frac{(\phi_1,\phi_1)}{(\phi_0,\phi_0)}=\frac{\int_0^1 x^{1/2}(x-\frac{3}{5})^2dx}{\int_0^1 x^{1/2}dx}=\frac{12}{175}$$

  令 $\phi_2(x)=0$，则 $x_1=0.821162,x_2=0.289949,A_1=\int_0^1\sqrt{x}l_1(x)dx=\int_0^1\sqrt{x}\frac{x-x_2}{x_1-x_2}\approx 0.38911$ $A_2=\int_0^1\sqrt{x}l_2(x)dx\approx 0.277556$

$$\therefore \int_0^1\sqrt{x}f(x)dx\approx 0.38911f(x_1)+0.277556f(x_2)$$

- 方法三：取 $\rho(x)=\sqrt{x}$，则构造二次正交多项式如下，选取 $\phi_0=1,\phi_1(x)=x+a,\phi_2(x)=x^2+bx+c$，则利用正交性确定 ϕ_1,ϕ_2,$i.e.$

$$\begin{cases}\int_0^1\sqrt{x}(x+a)dx=0\\ \int_0^1\sqrt{x}(x^2+bx+c)dx=0\\ \int_0^1\sqrt{x}(x+a)(x^2+bx+c)dx=0\end{cases}$$