

## 第五章 常微分方程初值问题的数值解法

常微分方程的一般形式:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (0.1)$$

(定解条件) 对于问题0.1, 如果函数  $f(x, y)$  关于  $y$  满足 Lipschitz 条件, 即  $\exists L$  使得  $|f(x, y) - f(x, \bar{y})| \leq L|y - \bar{y}|$  成立则由微分方程理论可知, 初值问题0.1的解存在且唯一。

首先, 将自变量  $x$  的区间进行离散, i.e.  $x_n = x_{n-1} + h_n$ , 若等步长, 则  $x_n = x_0 + nh$

### 1 Euler 方法

#### 1.1 向前 Euler 方法

用  $y_n$  表示  $y(x_n)$  的近似解, i.e.  $y_n \approx y(x_n)$  由0.1显然有  $\frac{dy}{dx}|_{x=x_n} = f(x_n, y(x_n)) = y'(x_n)$ , 而  $\frac{dy}{dx}|_{x=x_n} \approx \frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h}$ , i.e.  $\frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h} \approx f(x_n, y(x_n)) \Rightarrow y(x_{n+1}) \approx y(x_n) + hf(x_n, y(x_n))$ , 若用  $y_n \approx y(x_n), y_{n+1} \approx y(x_{n+1})$ , 则上式可写为:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n), n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.1)$$

向前 Euler 公式, 显式方法。

泰勒公式展开法推导

$$\begin{aligned} y(x_{n+1}) &= y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2}y''(\xi) \\ \Rightarrow y(x_{n+1}) &\approx y(x_n) + hf(x_n, y(x_n)) \\ \Rightarrow y_{n+1} &= y_n + hf(x_n, y_n) \end{aligned}$$

积分方法推导：由0.1可得：

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{dy}{dx} dx = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y) dx = y(x_{n+1}) - y(x_n) \approx f(x_n, y(x_n))(x_{n+1} - x_n) = hf(x_n, y(x_n))$$

## 1.2 向后 Euler 公式，梯形公式和改进 Euler 公式

向后 Euler 公式，隐式公式：

$$\begin{aligned} y(x_{n+1}) &\approx y(x_n) + hf(x_{n+1}, y(x_{n+1})) \Rightarrow \\ y_{n+1} &= y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1}) \end{aligned} \quad (1.2)$$

梯形公式 (隐式公式)，当  $f(x, y)$  关于  $y$  是线性，则可以直接求出  $y_{n+1}$ ：

$$\begin{aligned} f(x, y(x)) &\approx \frac{f(x_n, y(x_n)) + f(x_{n+1}, y(x_{n+1}))}{2} \\ y(x_{n+1}) &\approx y(x_n) + h \frac{f(x_n, y(x_n)) + f(x_{n+1}, y(x_{n+1}))}{2}, n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (1.3)$$

隐式方法的稳定性往往较好（可取较大步长），但对于非线性问题，方程难解。

以梯形公式1.3为例说明如何而求  $y_{n+1}$ ：

$$\begin{aligned} y_{n+1}^{(0)} &= y_n + hf(x_n, y_n) \\ y_{n+1}^{(k+1)} &= y_n + h \frac{f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(k)})}{2}, k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

若迭代一次即终止，则有如下公式：

$$\begin{aligned} \bar{y}_{n+1} &= y_n + hf(x_n, y_n) \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1})], n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

整理可得改进 Euler 公式：

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_n + hf(x_n, y_n))] \quad (1.4)$$

## 1.3 单步法的截断误差和阶

所有单步法均可写成：

$$y_{n+1} = y_n + h\phi(x_n, y_n, y_{n+1}, h)$$

其中  $\phi$  与  $f$  有关， $\phi$  称为增量函数

若方法显式则：

$$y_{n+1} = y_n + h\phi(x_n, y_n, h) \quad (1.5)$$

称  $e_{n+1} = y(x_{n+1}) - y_{n+1}$  为在  $x_{n+1}$  点的整体截断误差

定义 1.1. 设  $y(x)$  是初值问题 0.1 的准确解。称

$$T_{n+1}(x) = y(x_{n+1}) - y(x_n) - h\phi(x_n, y(x_n), h) \quad (1.6)$$

为显式单步法 1.5 在  $x_{n+1}$  处的局部截断误差。

定义 1.2. 若  $T_{n+1} = O(h^{P+1})$ , 则称此方法具有  $P$  阶精度, 若  $T_{n+1} = \phi^*(x_n, y(x_n))h^{P+1} + O(h^{P+2})$ , 则称  $\phi^*(x_n, y(x_n))h^{P+1}$  为该方法的局部截断误差主项。

对于单步隐式方法  $T_{n+1} = y(x_{n+1}) - y(x_n) - h\phi(x_n, y(x_n), y(x_{n+1}), h)$

例: 求梯形公式的局部截断误差主项和阶解:

$$\begin{aligned} T_{n+1} &= y(x_{n+1}) - y(x_n) - h \frac{f(x_n, y(x_n)) + f(x_{n+1}, y(x_{n+1}))}{2} \\ &= y(x_n + h) - y(x_n) - \frac{h}{2} [y'(x_n) + y'(x_n + h)] \\ &= -\frac{h^3}{12} y'''(x_n) + O(h^4) \end{aligned}$$

$\therefore$  梯形公式的局部截断误差为  $-\frac{h^3}{12} y'''(x_n) + O(h^4)$ , 主项为:  $-\frac{h^3}{12} y'''(x_n)$ , 阶: 2 阶。

思考题: 改进 Euler 方法的  $T_{n+1} = ?$  主项为? 阶? (多元函数求 2 阶导)

解:

$$\begin{aligned} y(x_{n+1}) &= y(x_n) + hf + \frac{h^2}{2}(f_x + ff_y) + \\ &\quad \frac{h^3}{6}(f_{xx} + f_{xy}f + ff_{yx} + f^2f_{yy} + f_yf_x + f_y^2f) + O(h^4) \\ \tilde{y}_{n+1} &= y(x_n) + \frac{h}{2}f + \frac{h}{2}(f + h(f_x + ff_y) + \\ &\quad \frac{h^2}{2}(f_{xx} + f_{xy}f + ff_{yx} + f^2f_{yy}) + O(h^3)) \\ T_{n+1} &= y(x_{n+1}) - \tilde{y} \\ &= -\frac{h^3}{12}(f_{xx} + 2f_{xy}f + f^2f_{yy}) + \frac{h^3}{6}(f_yf_x + f_y^2f) + O(h^4) \end{aligned}$$

## 2 Runge-kutta 方法

### 2.1 R-K 法基本思想

向前 Euler(1 阶):

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hk_1 \\ k_1 = f(x_n, y_n) \end{cases}$$

梯形公式 (2 阶):

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h(\frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2) \\ k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f(x_{n+1}, y_{n+1}) \end{cases}$$

取更多点斜率加权平均, 构造更高精度的数值方法。

### 2.2 R-K 方法的构造

假设 P 级 R-K 方法的公式为:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h \sum_{i=1}^P c_i k_i, & k_1 &= f(x_n, y_n) \\ k_i &= f(x_n + a_i h, y_n + h \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} k_j), & i &= 2, 3, \dots, P \end{aligned} \quad (2.1)$$

以  $P = 2$  为例, 构造 R-K 方法:

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h(c_1 k_1 + c_2 k_2), & k_1 &= f(x_n, y_n) \\ k_2 &= f(x_n + a_2 h, y_n + h b_{21} k_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{n+1} &= y(x_{n+1}) - y(x_n) - h\{c_1 f(x_n, y(x_n)) \\ &\quad + c_2 f[x_n + a_2 h, y(x_n + b_{21} h f(x_n, y(x_n)))]\} \end{aligned}$$

构造麻烦的地方在于  $y(x_n + b_{21} h f(x_n, y(x_n)))$  无法写成  $y$  的形式, 使用 2 元函数泰勒展开。

$$\begin{aligned} y(x_{n+1}) &= [y + hy' + \frac{h^2}{2}y'' + \frac{h^3}{6}y''' + O(h^4)]|_{x=x_n} \\ &= y + hf + \frac{h^2}{2}(f_x + f_y f) + \frac{h^3}{6}(\dots) \\ \tilde{y}_{n+1} &= y + h\{c_1 f + c_2[f + a_2 h f_x + h b_{21} f f_y]\} + O(h^3) \end{aligned}$$

将  $y(x_{n+1})$  与  $\tilde{y}_{n+1}$  中前三项对应相等即可得:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_2 a_2 = \frac{1}{2} \\ c_2 b_{21} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

取  $c_2 = 1$  则  $c_1 = 0, a_2 = b_{21} = \frac{1}{2}$ ,

$$\begin{cases} k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hk_2 \\ y_{n+1} = y_n + hf(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hf(x_n, y_n)) \end{cases} \quad (2.2)$$

如果取  $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}, a_2 = b_{21} = 1$  即可得改进 Euler 公式1.4。

4 阶 R-K 方法:

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}[k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4], k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{h}{2}k_1), k_3 = f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{h}{2}k_2) \\ k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3) \end{cases} \quad (2.3)$$

### 3 单步法基本理论

**定义 3.1.** 对于所有初值问题 (0.1)(假设  $f$  满足 Lipschitz 条件) 的一种单步法:

$$y_{n+1} = y_n + h\phi(x_n, y_n, h) \quad (3.1)$$

产生的近似解, 若对任意固定的  $x_n = x_0 + nh$ , 均有  $\lim_{h \rightarrow 0} y_n = y(x_n)$  则称方法3.1是收敛的。

**定义 3.2.** 若方法3.1的增量函数  $\phi$  满足条件:

$$\phi(x, y, 0) = f(x, y)$$

则称方法3.1与初值问题0.1相容。

**稳定性** 以向前 Euler 方法1.1为例,  $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$  假设  $\bar{y}_n = y_n + \varepsilon_n$  ( $\varepsilon_n$  为计算误差), 记  $\varepsilon_{n+1} = \bar{y}_{n+1} - y_{n+1}, \bar{y}_{n+1} = \bar{y}_n + hf(x_n, \bar{y}_n)$ ,

上述两式相减得：

$$\begin{aligned}\varepsilon_{n+1} &= \varepsilon_n + h[f(x_n, \bar{y}_n) - f(x_n, y_n)] \\ &= \varepsilon + h(f'_y(x_n, \eta)(\bar{y}_n - y_n)) \\ &= [1 + hf'_y(x_n, \eta)]\varepsilon_n\end{aligned}$$

$\therefore$  if.  $|1 + hf'_y(x_n, \eta)| \leq 1 \Rightarrow |\varepsilon_{n+1}| \leq \varepsilon_n$  则此时向前 Euler 方法稳定，否则不稳定。

由此可得，若  $f'_y > 0$ ，则称方程0.1具有先天性不稳定性。

将数值方法应用于如下试验方程：

$$y' = \lambda y$$

在此种情况易证

$$y_{n+1} = E(\lambda h)y_n \quad (3.2)$$

**定义 3.3.** 如果3.2式中， $|E(\lambda h)| < 1$ ，则称方法3.1是绝对稳定的，在复平面上复变量  $\lambda h$  满足  $|E(\lambda h)| < 1$  的区域，称此方法3.1的绝对稳定性区域，它与实轴的交称为绝对稳定区间。

**例 1.** 已知求解初值问题  $y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$  的显式单步法

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{4}h[f(x_n, y_n) + 3f(x_n + \frac{2}{3}h, y_n + \frac{2}{3}hf(x_n, y_n))]$$

1. 求其局部截断误差和精度阶数
2. 求其绝对稳定性区域和绝对稳定性区间

**解**  $T_{n+1} = y(x_{n+1}) - \tilde{y}_{n+1}$

$$y(x_{n+1}) = y(x_n + h) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2}y''(x_n) + \frac{h^3}{6}y'''(x_n) + O(h^4)$$

$$\text{而 } y'' = f_{xx} + f_y f, y''' = f_{xx} + 2ff_{xy} + f^2 f_{yy} + f_y(f_x + ff_y)$$

$$\begin{aligned}\tilde{y}_{n+1} &= y(x_n) + \frac{h}{4}\{f + 3[f + f_x \frac{2}{3}h + f_y \frac{2}{3}hf + \\ &\quad \frac{1}{2}(f_{xx}(\frac{2}{3}h)^2 + 2f_{xy}(\frac{2}{3}h)^2 f + f_{yy}(\frac{2}{3}hf)^2)] + O(h^3)\} \\ T_{n+1} &= y(x_{n+1}) - \tilde{y}_{n+1} \\ &= \frac{h^3}{6}f_y(f_x + ff_y) + O(h^4)\end{aligned}$$

所以精度为 2 阶

(2) 将该方法应用于试验方程  $y' = \lambda y$  得

$$\begin{aligned}y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{4}h[\lambda y_n + 3\lambda(y_n + \frac{2}{3}hf(x_n, y_n))] \\&= [1 + \lambda h + \frac{1}{2}(\lambda h)^2]y_n\end{aligned}$$

$\therefore$  绝对稳定性区域为  $|1 + \lambda h + \frac{1}{2}(\lambda h)^2| < 1$

由上述不等式  $\Rightarrow \lambda h(\frac{1}{2}\lambda h + 1) < 0 \Rightarrow \lambda h > -2$

$\therefore$  绝对稳定性区间为  $(-2, 0)$  ( $\lambda$  必须为负, 否则方程具有先天性不稳定性。)

**例 2.** 将改进的 Euler 方法应用于求解初值问题  $y' = -20y, y(x_0) = y_0$ , 试问步长  $h$  满足什么条件时才能得证该方法的绝对稳定性。

**解**  $\because y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_n + h, y_n + hf(x_n, y_n))]$

将上述方法应用于  $y' = -20y$  得:

$$\begin{aligned}y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{2}[-20y_n + -20(y_n + hf(x_n, y_n))] \\&= y_n + \frac{h}{2}[-20y_n - 20(y_n - 20hy_n)] \\&= [1 - 20h + \frac{1}{2}(20h)^2]y_n\end{aligned}$$

$\therefore E(\lambda h) = 1 - 20h + \frac{1}{2}(20h)^2, \therefore |E(\lambda h)| < 1$  得  $h < 0.1$