#math

Chapter 8 欧氏空间上的函数与极限

8.1 欧氏空间与解析几何

（这一节最终放到第六章中）
点列的极限

8.2 开集与闭集

补集、内点、外点、边界点、孤立点、聚点；聚点三个等价定义：点的任一邻域都有集合中无穷多个点；点的任一邻域都有集合中不同于这个点的点；集合中可以构造出一个点列（无穷多项不为零）收敛于这个点

开集、闭集（单点集为闭集）；开集之补为闭，闭集之补为开；开集之并为开集，闭集之交为闭集，开集之有限交为开集，闭集之有限并为闭集

8.3 完备性等价表述

1. 矩形套定理. 推广：Cantor 闭区域套定理
2. BW 定理，有界点列必有收敛子列. 推广：聚点原理：有界无穷点集必有聚点
3. Cauchy 收敛准则，点列收敛 $\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists N\ \text{s.t.}\ k,l>N$ 时 $|\vec{x}_k-\vec{x}_l|<\varepsilon$
4. Heine-Borel 定理，紧集等价于有界闭集. 紧集：任意开覆盖必有有限子覆盖的集合

8.4 多元函数的极限与连续

多元函数，多元函数在某点的极限，多元函数的连续. 多元初等函数在定义域内连续. 连续的复合还是连续

- 存在极限（全面极限）：不管怎么趋向都有极限且极限相同.
- 累次极限：先 x 取极限后 y 取极限或者先 y 后 x.
- 关系：
  - 累次极限与全面极限无关，累次极限之间也无关.
  - 如果全面极限存在，累次极限中先取的极限也存在，则累次极限必存在，且等于全面极限.
  - 如果全面极限存在且两个累次极限都存在，则它们都相等
  - 函数在连续点上的累次极限与全面极限均存在且相等

8.5 向量值函数

向量值函数连续，等价于每一个分函数在这个点都连续

8.6 有界闭集上的连续函数

边界点的邻域：邻域与集合相交的部分. 以此定义紧集上的连续. 以下“有界闭集上的连续函数”简称“闭连函数”

连续映射将紧集映射到紧集. 由此推出有界性定理（闭连函数必有界）、最值定理（闭连函数的值域存在最大最小值）.

连通集. 连通有界闭集才是闭区间的推广. 连续映射把连通集映射到连通集（特别地，连续函数将连通紧集集映射到闭区间）. 由此推出介值定理.

一致连续：存在一个与点的选取无关的 ε. Cantor 定理：闭连必一致连

Chapter 9 多元函数微分学

分为五个副章节：

- 9.1~9.6 偏导与全微分：偏导，全微分，高阶偏导，高阶微分，向量值函数导数微分，复合函数微分
- 9.7~9.8 多元中值定理：中值定理，Taylor 公式
- 9.9~9.10 隐函数：隐函数存在定理，逆映射存在定理
- 9.11~9.12 切线法平面、法线切平面
- 9.13~9.14 多元函数极值：无条件极值，条件极值

9.1 偏导

偏导的定义，方向导数的定义. 注意方向导数要求除以的方向向量要是单位向量. 方向向量可以表示为 $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma, \cdots)$. 当方向与坐标轴相同时等于偏导，相反时等于偏导的负数. 对多元函数而言，可导即是可偏导.

“可导必连续”不成立，原因：偏导只考虑导的那个方向的性质，而连续要所有方向的性质

9.2 全微分

定义：$\exists A, B$ s.t. 某一点处 $\Delta f = A\Delta x + B\Delta y + o(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2})$，则 f 可微，$\mathrm{d}f = A\mathrm{d}x + B\mathrm{d}y$ 称为 f 在该点的全微分

可微是一个很强的条件：

- 可微 $\Rightarrow$ 可导，$A = f_x(x_0, y_0)$，$B = f_y(x_0, y_0)$
- 可微 $\Rightarrow$ 方向导数存在，且对于 $\vec{v} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cdots)$，$\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}} = f_x(x_0, y_0, \cdots) \cdot \cos\alpha + f_y(x_0, y_0, \cdots) \cdot \cos\beta + \cdots$
- 可微 $\Rightarrow$ 连续
- 可导 $\not\Rightarrow$ 可微，可导都推不出连续了当然不可微
- 可导+连续+任一方向导数都存在 $\not\Rightarrow$ 可微
- 可微唯一充分条件：偏导均连续 $\Rightarrow$ 可微

9.3 高阶偏导

两种表示方法：$\dfrac{\partial 2f}{\partial x \partial y}$，$f_{xy}$. 注意两个的顺序，第一种是先 y 后 x，第二种是先 x 后 y. 混合偏导之间不一定相等.

混合偏导连续 $\Rightarrow$ 混合偏导相等. 若函数有 n 阶连续偏导，导的次数 $\leqslant n$，则混合偏导的顺序不影响结果. 注：混合偏导连续 $\not\Leftarrow$ 混合偏导相等

Leibniz 二项展开可以用

9.4 高阶微分

$\mathrm{d}f = \dfrac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \dfrac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y$，若 f_x、f_y 可微、f_{xy}、f_{yx} 连续，则可以再微分，
$\mathrm{d}^2 f = (\mathrm{d}x\dfrac{\partial}{\partial x} + \mathrm{d}y\dfrac{\partial}{\partial y})^2 f$. 类推：$\mathrm{d}^k f = (\mathrm{d}x\dfrac{\partial}{\partial x} + \mathrm{d}y\dfrac{\partial}{\partial y})^k f$.

对 n 元函数：$\mathrm{d}^k f = (\mathrm{d}x_1\dfrac{\partial}{\partial x_1} + \mathrm{d}x_2\dfrac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + \mathrm{d}x_n\dfrac{\partial}{\partial x_n})^k f$.

9.5 向量值函数的导数与微分

向量值函数：许多数量值函数的组合.

导数 $\vec{f}'(\vec{x}_0)$ 为 Jacobi 矩阵，同一行为同一分函数，同一列为同一自变量.

若存在矩阵 A s.t. $\Delta\vec{f} = \vec{f}(\vec{x}_0 + \Delta\vec{x}) - f(\vec{x}_0) = A\Delta\vec{x} + o(\Delta\vec{x})$ 则称 f 在 $\vec{x}_0$ 可微，$\mathrm{d}\vec{f} = A\mathrm{d}\vec{x}$.

若可微则 $A = \vec{f}'(\vec{x}_0)\mathrm{d}\vec{x}$

可微等价于每个分函数都可微

9.6 复合函数微分

链式法则：外层导一下 $\times$ 内层导一下，中间的乘号是矩阵相乘. $z=f(u,v),\vec{g}=\begin{cases}u=u(x,y)\\v=v(x,y)\end{cases}$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}$

链式法则成立条件：外层函数可微

一阶全微分有形式不变性：函数自变量不管是否是中间变量，其微分的公式是一样的.

高阶微分不具有形式不变性，除非中间变量是线性变量

9.7 中值定理

$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=f_x(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)\Delta x+f_y(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)\Delta y$，$0<\theta<1$，四个 θ 是一样的. 由这个式子可知，两个点的连线必须在集合内. 这里引出凸区域和星形域.

推论：函数在区域上偏导恒为零，则函数为常函数

9.8 Taylor 公式

$$\begin{aligned}f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)=f(x_0,y_0)&\\&+(\Delta x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+\Delta y\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y})f(x_0,y_0)\\&+\frac{1}{2!}(\Delta x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+\Delta y\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y})^2f(x_0,y_0)\\&+\cdots\\&+\frac{1}{k!}(\Delta x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+\Delta y\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y})^kf(x_0,y_0)\\&+\frac{1}{(k+1)!}(\Delta x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+\Delta y\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y})^{k+1}f(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)\end{aligned}$$

经常展开到两次：

$$\begin{aligned}f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)=f(x_0,y_0)&\\&+f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y\\&+f_{xx}(x,y)(\Delta x)^2+2f_{xy}(x,y)(\Delta x\Delta y)+f_{yy}(x,y)(\Delta y)^2\end{aligned}$$

其中 $(x,y)=(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)$

注意，用 Taylor 算高阶导数，除了要乘以 $k!$，还要除以 C_k^m（二项式系数）!!!

9.9 隐函数存在定理

- 若

1. 原方程（组）有零点
2. 各方程偏导连续
3. 对因变量求导不为零（Jacobi 行列式不为零）

- 则
  - 存在隐函数
  - 隐函数连续
  - 隐函数可导，$\dfrac{\partial 因}{\partial 自}=-\dfrac{把分母中的因换成自}{第三条件的式子}$

例如 $F(x_1,\cdots,x_n,y)=0$，若 $\dfrac{\partial F}{\partial y}\neq 0$，则 $\dfrac{\partial y}{\partial x_i}=-\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x_i}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$

例如 $F_j(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m)=0$，若 $\dfrac{\partial(F_1,\cdots,F_j,\cdots,F_m)}{\partial(y_1,\cdots,y_j,\cdots,y_m)}\neq 0$，则

$$\frac{\partial y_j}{\partial x_i}=-\frac{\frac{\partial(F_1,\cdots,F_j,\cdots,F_m)}{\partial(y_1,\cdots,x_i,\cdots,y_m)}}{\frac{\partial(F_1,\cdots,F_j,\cdots,F_m)}{\partial(y_1,\cdots,y_j,\cdots,y_m)}}$$

9.10 逆映射存在定理

$\vec{f}=\begin{cases}u=u(x,y)\\v=v(x,y)\end{cases}$，把 $\vec{f}$ 作为隐函数塞进方程组 $\begin{cases}F(x,y,u,v)=u-u(x,y)=0\\G(x,y,u,v)=v-v(x,y)=0\end{cases}$，当 $\vec{f}$ 行列式不为零时 $\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\neq 0$，唯一确定 $\vec{g}=\begin{cases}x=x(u,v)\\y=y(u,v)\end{cases}$，就是 $\vec{f}$ 的逆映射，$\vec{g}$ 有连续导数，导数矩阵是 $\vec{f}$ 导数矩阵的逆矩阵

9.11 曲线的切线与法平面

曲线 $\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\\z=z(t)\end{cases}$，$x_0=x(t_0)$，类推. 曲线在 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切向量:

$\vec{\tau}=(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0))$

曲线 $\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$. 曲线在 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切向量：$\vec{\tau}=\left(\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)},\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)},\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right)$

在 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切向量 $\vec{\tau}=(a,b,c)$，则

- 切线 $\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$，若分母是 0 则分子恒为 0 且这一项剥出连等式.
- 法平面 $(x-x_0)a+(y-y_0)b+(z-z_0)c=0$

9.12 曲面的法线与切平面

曲面 $F(x,y,z)=0$. 曲面在 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的法向量： $\vec{n}=(F_x,F_y,F_z)\big|_{(x_0,y_0,z_0)}$

曲面 $z=f(x,y)$，改写为 $f(x,y)-z=0$. 曲面在 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的法向量：
$\vec{n}=(f_x,f_y,-1)\big|_{(x_0,y_0)}$

曲面 $\begin{cases}x=x(u,v)\\y=y(u,v)\\z=z(u,v)\end{cases}$. 曲面在 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的法向量： $\vec{n}=\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)\Big|_{(u_0,v_0)}$

在 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的法向量 $\vec{n}=(a,b,c)$，则

- 法线 $\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$，若分母是 0 则分子恒为 0 且这一项剥出连等式.
- 切平面 $(x-x_0)a+(y-y_0)b+(z-z_0)c=0$

9.13 无条件极值

极值点必要条件：若可偏导则偏导必为零，对每个自变量偏导都是零

极值判定定理：对某一点，泰之到二次，考虑二次项系数构成的二次型矩阵的定性，正定则为该点极小值点，负定则该点为极大值点，不定则不是极值点.

注：正定：任意阶主子式行列式为正；负定：奇数阶主子式行列式为负，偶数阶主子式行列式为正.

二元情形具体化为：令 $A=f_{xx}(x_0,y_0)$，$B=f_{xy}(x_0,y_0)$，$C=f_{yy}(x_0,y_0)$

- $AC-B^2>0$，$A>0$，则正定，为极小值点
- $AC-B^2>0$，$A<0$，则负定，为极大值点
- $AC-B^2<0$，不是极值点
- $AC-B^2=0$，情况不定

9.14 条件极值

条件极值点必要条件：Lagrange 乘数法，即将条件塞进同一个函数（Lagrange 函数 $L(x_1,\cdots,x_n,\lambda_1,\cdots,\lambda_m)$）求这个函数的无条件极值

条件极值判定定理：对某一点，把 Lagrange 函数泰到二次，考虑只含 x 的二次项系数构成的二次型矩阵的定性（因为作为限制条件，λ 取值是固定的，在泰展中取值只能是本身，不存在变数），正定则为该点极小值点，负定则该点为极大值点，不定则情况不定（限制条件内可能恒正或恒负）.

Chapter 10 重积分

10.1 重积分的概念与性质

平面点集的面积，二重积分的概念，多重积分的概念

性质：

- 闭连必可积（闭连：有界闭集上的连续函数）
- 可积必有界
- 可积之线性组合也可积，积分值也线性组合
- 可积相乘也可积，但积分值无关
- 可积则绝对可积，$|\int f\mathrm{d}V|\leqslant\int|f|\mathrm{d}V$
- 区域可加性
- 保序性（$f\leqslant g\Rightarrow\int f\mathrm{d}V\leqslant\int g\mathrm{d}V$）
- 介值性（$\inf f\cdot V\leqslant\int f\mathrm{d}V\leqslant\sup f\cdot V$）
- 典中典：f 闭连，非负，积分值为 0，则 $f\equiv 0$（证明：假设不恒为零，则存在保号区域，其上积分大于零，又非负故整个积分区域上积分值必大于零，矛盾）

10.2 累次积分

把重积分拆成多个定积分计算. 前提：函数可重积分、对某一个变量可定积分.

交换次序：先化成重积分，找出积分区域的表达式，再拆成累次

10.3 重积分换元法则

$\iint_{T(D)}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D f(x(u,v),y(u,v))\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$，其中 $T:\begin{cases}x=x(u,v)\\y=y(u,v)\end{cases}$.

$\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$ 即为 T 的 Jacobi 行列式. Jacobi 行列式是变换前后面积微元变化的倍数，即 $\mathrm{d}u\mathrm{d}v$ 作变换 T 之后 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$

有时候已知的是 T^{-1} 的 Jacobi 行列式，这时候不用反解，$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\cdot\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=1$，即 T 的 Jacobi 行列式就是 T^{-1} Jacobi 行列式的倒数.

（二重）极坐标变换
$\begin{cases}x=r\cos\theta\\y=r\sin\theta\end{cases}$，Jacobi $=r$

（二重）广义极坐标变换
$\begin{cases} x = ar\cos\theta \\ y = br\sin\theta \end{cases}$，Jacobi $= abr$

（三重）柱坐标变换
$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$，Jacobi $= r$

（三重）球坐标变换
$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$，Jacobi $= r^2\sin\varphi$.
其中 φ 是向径与 $+z$ 的夹角，$0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$，$0 \leqslant \theta < 2\pi$. $(\frac{1}{2}\pi - \varphi)$ 才是仰角

（n 重）球坐标变换
$\begin{cases} x_1 = r\cos\varphi_1 \\ x_2 = r\sin\varphi_1\cos\varphi_2 \\ x_3 = r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cos\varphi_3 \\ x_4 = r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\sin\varphi_3\cos\varphi_4 \\ \quad\vdots \\ x_{n-1} = r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\sin\varphi_3\cdots\sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1} \\ x_n = r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\sin\varphi_3\cdots\sin\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-1} \end{cases}$，Jacobi
$= r^{n-1}\sin^{n-2}\varphi_1\sin^{n-3}\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}$.
把三元球坐标变换的 z 提前，就和这个形式一样了. 各个角度的理解：要把 n 维空间想象成一个平面+ $(n-2)$ 个竖直轴. φ_{n-1} 是平面指向角，相当于以前的 $\theta \in [0, 2\pi)$，这个角是不出现在 Jacobi 里头的. 其他就是相对于各个竖直轴正向的夹角 $\in [0, \pi]$

Chapter 11 曲线积分与曲面积分

11.1 & 11.3 曲线积分

对于曲线 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$，记字母头上一点为对 t 求导，则由弧长公式
$\overset{\frown}{s} = \int_a^b \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 + (\dot{z})^2}\mathrm{d}t$ 得到：

- 第一类曲线积分
  - $\mathrm{d}s = \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 + (\dot{z})^2}\mathrm{d}t$
- 第二类曲线积分
  - $\mathrm{d}\vec{s} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})\mathrm{d}t$

11.2 & 11.4 曲面积分

对于曲面 $\begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \\ z=z(u,v) \end{cases}$：

- 第一类曲面积分
  - $\mathrm{d}S=|\vec{r_u}\times\vec{r_v}|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$
  - $\mathrm{d}S=\sqrt{EG-F^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$，其中 $E=\vec{r_u}\cdot\vec{r_u}$，$G=\vec{r_v}\cdot\vec{r_v}$，$F=\vec{r_u}\cdot\vec{r_v}$
  - $\mathrm{d}S=\sqrt{J_1^2+J_2^2+J_3^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$，其中 $(J_1,J_2,J_3)=\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)$，与 $\vec{n}$ 的方向一致.
- 第二类曲面积分
  - $\mathrm{d}\vec{S}=(\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\mathrm{d}z\mathrm{d}x,\mathrm{d}x\mathrm{d}y)$
  - $\mathrm{d}\vec{S}=\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}\mathrm{d}S=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)\mathrm{d}S$，代入上面合适的 $\mathrm{d}S$ 计算公式即可. 特别地，选择第三个公式时 $\mathrm{d}\vec{S}=\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$
  - 计算时，先用第一条把 $\mathrm{d}\vec{S}$ 分出来，写成一个向量点乘形式（$(P,Q,R)\cdot\mathrm{d}\vec{S}$），再用第二条把 $\mathrm{d}\vec{S}$ 变成向量 $\cdot\mathrm{d}S$，化成二重积分计算.

对于曲面 $z=z(x,y)$，$\vec{r}=(x,y,z(z,y))$，取自变量为 x 和 y：

- $\vec{r_x}=(1,0,z_x)$，$\vec{r_y}=(0,1,z_y)$，$\sqrt{EG-F^2}=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}$，$(J_1,J_2,J_3)=(-z_x,-z_y,1)$.

11.5 第二类积分与重积分的关系

诱导定向，“左边”

Green 公式：$\int_{\partial D}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint_D(Q_x-P_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

要求 D 为单连通区域，若有有限个洞可以割开算

Green 定理：下列四个命题等价

1. 对 D 内任一闭曲线 L，$\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0$
2. $\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 与路径无关，只与起点终点有关
3. 存在 D 上可微函数 $U(x,y)$ s.t. $\mathrm{d}U=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$，即 1-形式 $P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 存在原函数
4. D 上 $Q_x\equiv P_y$

循环常数：一条曲线包围了一个瑕点，包围区域内所有点除了瑕点都满足 $Q_x\equiv P_y$. 这时候找一个逆时针闭合曲线围住瑕点，计算它上面的积分，其值称为循环常数. 则曲线上的积分值 $=$ 环绕瑕点的圈数（带正负，逆时针为正，顺时针为负）$\times$ 循环常数

Gauss 公式：$\iint_{\partial\Omega} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint_{\Omega}(P_x + Q_y + R_z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

要求 Ω 为单连通区域，若有有限个洞可以割开算.

Stokes 公式：$\int_{\partial\Sigma} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \iint_{\Sigma}(R_y - Q_z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (P_z - R_x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (Q_x - P_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

行列式形式：

$$\int_{\partial\Sigma} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \iint_{\Sigma}\begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \iint_{\Sigma}\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}\mathrm{d}S$$

Chapter 12 数项级数

12.1 级数收敛

级数收敛定义；几何级数 $\sum x^n$，$|x| \geqslant 1$ 时发散，$|x| < 1$ 时收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n = \dfrac{x}{1-x}$；p-级数 $\sum \dfrac{1}{n^p}$，$p > 1$ 时收敛，$p \leqslant 1$ 时发散

级数收敛 $\Rightarrow$ 通项趋于零，用于证明级数发散

收敛级数线性组合也收敛，收敛值也是线性组合

结合律，收敛 $\Rightarrow$ 加括号收敛且和不变，加括号发散 $\Rightarrow$ 发散

积化和差：$\forall x$，$\sum \sin nx$ 有界. $\sum \cos nx$，$x \neq 2k\pi$ 时有界，$x = 2k\pi$ 时发散.

12.2 正项级数敛散性判断

部分和判别法：正项级数部分和有界则收敛，无界则发散

比较判别法：正项级数，通项 $a_n \leqslant Ab_n$，则 $\sum b_n$ 敛则 $\sum a_n$ 敛，$\sum a_n$ 散则 $\sum b_n$ 散.

比较判别法极限形式：$\sum a_n$ 与 $\sum b_n$ 为正项级数. 记 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = l$（未知比已知之极限为 l），则

- $0 < l < +\infty$ 时，分子分母同敛散
- $l = 0$ 时，分母敛则分子敛
- $l = +\infty$ 时，分母散则分子散

比较判别法迫敛形式：$\sum a_n$、$\sum b_n$ 收敛，若 $a_n \leqslant u_n \leqslant b_n$，则 $\sum u_n$ 收敛.

Cauchy 判别法：正项级数，$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{x_n} = r$，则

- $r < 1$ 时级数收敛
- $r > 1$ 时级数发散
- $r = 1$ 时不定

d'Alembert 判别法：正项级数，$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$，则

- $r < 1$ 时级数收敛
- $r > 1$ 时级数发散
- $r = 1$ 时不定

Raabe 判别法：正项级数，$\lim_{n\to\infty} n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) = r$，则

- $r > 1$ 时级数收敛
- $r < 1$ 时级数发散
- $r = 1$ 时不定

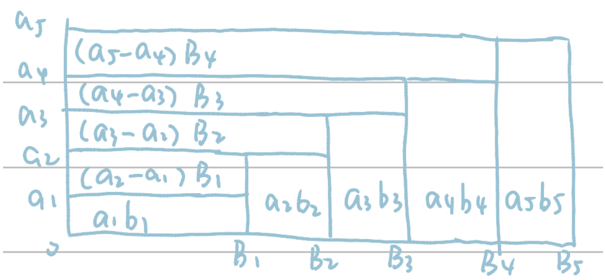
积分判别法：$f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 非负单减，任意区间 $[a, A]$ 可积，则 $\sum\limits_{n=N}^{\infty} f(n)$ 与 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 同敛散

12.3 任意项级数敛散性判断

Cauchy 收敛原理：部分和收敛的 Cauchy 收敛原理

Leibniz 判别法：一正一负，绝对值单减趋零

Abel 变换：$\sum\limits_{n=1}^{p} a_n b_n = B_p a_p - \sum\limits_{n=1}^{p-1} B_n(a_{n+1} - a_n)$，几何直观：



Abel 引理：$\{a_n\}$ 单调，$\{B_n\}$ 有界（$|B_n| \leqslant M$），则 $|\sum\limits_{1}^{p} a_k b_k| \leqslant M(|a_1| + 2|a_p|)$

A-D 判别法

- Abel 判别法：单调有界 $\times$ 部分和收敛
- Dirichlet 判别法：单调趋零 $\times$ 部分和有界

12.4 绝对收敛与条件收敛

绝对收敛 $\Rightarrow$ 收敛

绝对发散 $\not\Rightarrow$ 发散，但 Cauchy 判出来绝对发散或 d'Alembert 判出来绝对发散的，原级数必发散

正负部拆分：$x_n^+ = \begin{cases} x_n, \ x_n > 0 \\ 0, \ x_n \leqslant 0 \end{cases}$，$x_n^- = \begin{cases} -x_n, \ x_n < 0 \\ 0, \ x_n \geqslant 0 \end{cases}$. 有两个等式：$|x_n| = x_n^+ + x_n^-$，$x_n = x_n^+ - x_n^-$

重排级数：

- 对绝对收敛的级数，任一重排级数都绝对收敛，收敛值不变
- 对条件收敛的级数，存在重排级数收敛于任意实数，或者发散到无穷

级数相乘

- 两个收敛级数 $\sum a_n = A$ 和 $\sum b_n = B$ 按正方形排列的乘积，收敛于 AB
- 两个绝对收敛级数 $\sum a_n = A$ 和 $\sum b_n = B$ 相乘，不论怎么排序都收敛且收敛于 AB
- Cauchy 乘积 $c_n = \sum\limits_{i+j=n+1} a_i b_j$，若 $\sum a_n$、$\sum b_n$ 、$\sum c_n$ 都收敛，那么 $\sum c_n = AB$（这个的证明在 13.5）

12.5 无穷乘积

代换，$p_n = 1 + a_n$

$\prod p_n$ 与 $\sum \ln p_n$ 同敛散

a_n 不变号时 $\prod(1+a_n)$ 与 $\sum a_n$ 同敛散. 等价形式：p_n 不跨过 1 的分界线时 $\prod p_n$ 与 $\sum(p_n - 1)$ 同敛散.

$\sum a_n$ 收敛，则 $\sum a_n^2$ 与 $\prod(1+a_n)$ 同敛散

$\prod p_n$ 绝对收敛，即 $\sum \ln p_n$ 绝对收敛. 绝对收敛的无穷乘积可以换序.

$\prod(1+a_n)$ 绝对收敛、$\prod(1+|a_n|)$ 收敛、$\sum |a_n|$ 收敛，三者等价

Wallis 公式：$\dfrac{2}{\pi} = \dfrac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdots}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdots}$

Viète 公式：$\dfrac{2}{\pi} = \cos\dfrac{\pi}{4} \cdot \cos\dfrac{\pi}{8} \cdot \cos\dfrac{\pi}{16} \cdot \cdots$

Stirling 公式：$n! \sim \sqrt{2\pi n} \cdot (\dfrac{n}{e})^n$,$n \to +\infty$. 这使得 $n!$ 有了一个含 n 次方的等价逼近. 极限形式：$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n! e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} = \sqrt{2\pi}$

Chapter 13 函数项级数

13.1 点态收敛

点态收敛，收敛域，部分和函数，和函数，对偶性

13.2 一致收敛

一致收敛，内闭一致收敛

一致收敛 $\Leftrightarrow$ 部分和函数与和函数的距离趋于零，距离即 $\sup\limits_{x\in D}|f(x)-g(x)|$

13.3 一致收敛判别法

想判断不一致收敛：证明 sup>0 且可被达到，这样 sup 不趋于零，不一致收敛

Cauchy 收敛原理：部分和函数收敛的 Cauchy 收敛原理

Weierstrass 判别法/ M 判别法：若 $\forall x\in D$，成立 $|u_n(x)|\leqslant a_n$ 且 $\sum a_n$ 收敛，则 $\sum u_n(x)$ 在 D 上一致收敛，而且绝对一致收敛

A-D 判别法

- Abel 判别法：单调一致有界 $\times$ 部分和函数一致收敛
- Dirichlet 判别法：单调一致趋零 $\times$ 部分和函数一致有界
- 注：其中“单调”指的是对任意固定的 x_0，数列 $\{a_n(x_0)\}$ 随 n 单调；“一致有界”指的是对一切 n，函数值域有一个一致的界；“一致趋零”指的是随着 $n\to 0$，函数通项趋于 $f(x)\equiv 0$.
- 注：$\sum\cos kx$、$\sum\sin kx$ 在 $(0,2\pi)$ 内闭一致有界.

13.4 一致收敛的性质

一致收敛的函数项级数，可逐项求极限、可逐项积分.

逐项求导定理：若① $u_n(x)$ 导数连续、② $\sum u_n(x)$ 点态收敛、③ $\sum u_n'(x)$ 一致收敛，则可逐项求导. 条件③实际上可以推得 $\sum u_n(x)$ 一致收敛

可逐项推不出一致收敛.

Dini 定理：若①闭区间上 $u_n(x)$ 连续、② $\sum u_n(x)$ 点态收敛、③部分和函数对任意固定的 x_0 随 n 单调（对任意固定的 x_0，$\sum u_n(x_0)$ 是定号级数，要么正项要么负项），则 $\sum u_n(x)$ 一致

收敛.

13.5 幂级数及其性质

形式：$\sum a_n(x-x_0)^n$

收敛域：是以 x_0 为中心的区间（Abel 第一定理），端点收敛情况不一定，需要单独判断. 区间长度的一半称为收敛半径，收敛半径 $R=+\infty$ 表示对一切 x 幂级数都收敛，收敛半径 $R=0$ 表示只有 x_0 点处幂级数收敛.

收敛半径计算公式：$R=\dfrac{1}{A}$，$A=0$ 时 $R=+\infty$，$A=+\infty$ 时 $R=0$

- Cauchy-Hadamard 公式：$A=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}$
- d'Alembert 公式：$A=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$

幂级数在收敛域的内闭区间上一致收敛（Abel 第二定理）. 据此推出：

- 幂级数的和函数在收敛域上连续，端点开则开连，闭则闭连.
- 幂级数在收敛域的内闭区间上可逐项积分，积分后收敛半径不变. 注意积完之后求和从哪里开始. 一般可以由连续性将这一性质推广到开区间上.
- 幂级数在收敛域内可逐项求导，求导后收敛半径不变. 注意导完之后求和从哪里开始. 注意闭端点不是收敛域的内部.

13.6 函数的幂级数展开

说一个函数可以展开成级数，就是说级数一致收敛于这个函数，函数和级数之间可以画等号.

逻辑：（之后三角级数展开也是这个逻辑）

1. 假设某个函数可以被展开成幂级数，发现幂级数被函数唯一确定，$a_n=\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$
2. 据此，任意给一个函数，都按上面的规则构造出一个级数，称为这个函数的 Taylor 级数. 这个 Taylor 级数收不收敛、收敛的话收不收敛到 $f(x)$、是不是一致收敛，这都是后话. 所以这里函数和级数之间只能画波浪号而不能画等号.
3. 可以证明，当 f 在 x_0 处任意阶可导时，余项一致趋零，f 的 Taylor 级数一致收敛于 f，就是说 f 可以展开成幂级数，这时候 Taylor 级数就可以叫 Taylor 展开式了.

当 $x_0=0$ 时也称为 Maclaurin 级数

Taylor 级数的余项：Peano、Lagrange，补充一个积分形式余项，
$r_n(x)=\dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_{x_0}^{x}f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\mathrm{d}t.$

对于积分形式余项，运用积分第二中值定理（见 Chapter 14）

- 把 $f^{(n+1)}(t)$ 移出积分，得
  $r_n(x)=\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi)\int_{x_0}^{x}(x-t)^n\mathrm{d}t=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}$，即 Lagrange 余项.
- 把 $f^{(n+1)}(t)(x-t)^n$ 移出积分，得 $r_n(x)=\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n(x-x_0)$，令
  $\xi=x_0+\theta(x-x_0)$ 得 $r_n(x)=\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi)(1-\theta)^n(x-x_0)^{n+1}$，称为 Cauchhy 余项.

初等函数 Taylor 表（在 $x_0=0$ 处展开，注意求和从哪里开始）. $(1+x)^\alpha$ 收敛域，$\alpha>0$ 时两端闭 $\alpha<-1$ 时两端开，$-1<\alpha<0$ 时左开右闭）

初等函数	Taylor 展开式	收敛域
$\frac{1}{1+x}$	$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$	$(-1,1)$
e^x	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$	$\mathbb{R}$
$\arctan x$	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$	$[-1,1]$
$\ln(1+x)$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n$	$(-1,1]$
$(1+x)^\alpha$	$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n}{\alpha}x^n$	$(-1,1)$，开闭见上
$\arcsin x$	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	$[-1,1]$

求 Taylor 展开式的思路

- 思路一，对已知的展开式求导. 例如计算 $\frac{1}{x^2}$ 在 $x_0=1$ 的泰展，$\frac{1}{x}=\frac{1}{1+(x-1)}$
  $=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-1)^n$，逐项求导即可
- 思路二，线性拆分. 例如计算 $\frac{1}{3+5x-2x^2}$ 在 $x_0=0$ 的泰展，原式
  $=\frac{1}{7}(\frac{1}{3-x}+\frac{2}{1+2x})$，两个都有现成的公式
- 思路三，运用 Cauchy 乘积
  - 对于乘法，合并次数相同的项
  - 对于除法，设 $\frac{f(x)}{g(x)}=\sum c_n(x-x_0)^n$，得
    $\sum a_n(x-x_0)^n=(\sum b_n(x-x_0)^n)(\sum c_n(x-x_0)^n)$，待定系数解 c_n

- 思路四，整体代入. 例如计算 $\ln\frac{\sin x}{x}$ 在 $x_0=0$ 的泰展，
$\frac{\sin x}{x}=1-(\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{120}x^4+\cdots)$，令括号里面为 u，则
$\ln\frac{\sin x}{x}=\ln(1-u)=-(u-\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{3}u^3-\cdots)$

Chapter 14 广义积分

（含参变量积分不考）

14.1 & 14.3 无穷积分/瑕积分

瑕点：无穷远点/函数值为无穷大的点. 把被积区间划分成若干只含一个或不含瑕点的部分，每段单独看.

- 对于不含瑕点的，直接积分即可
- 对于无穷远瑕点，若 $\lim\limits_{A\to\infty}\int_a^A f(x)\mathrm{d}x$ 存在则收敛. p-积分 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$，$p>1$ 收敛，$p\leqslant 1$ 发散.
- 对于无穷大瑕点，若 $\lim\limits_{\eta\to 0^+}\int_{a+\eta}^b f(x)\mathrm{d}x$ 存在则收敛. p-瑕积分 $\int_a^b\frac{1}{(x-a)^p}\mathrm{d}x$，$0<p<1$ 收敛，$p\geqslant 1$ 发散. 这与 p-积分结论相反
- 如果两个端点都是瑕点，则两个极限过程都收敛整体才收敛，且极限过程都是独立的

14.2 无穷积分敛散性判断

Cauchy 收敛准则（假设瑕点是正无穷）：$\forall\varepsilon>0,\exists N\text{ s.t. }A,A'>N$ 时 $\left|\int_A^{A'}f(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$

比较判别法，要求函数非负. 结论与级数的比较判别法相同. 也有极限形式，是让 x 趋向瑕点（正无穷或负无穷）

Cauchy 判别法，本质是与 p-积分比较，不如直接用比较判别法

级数判别法（级数的积分判别法逆用）

A-D 判别法

- 积分第二中值定理：单调的提前，代入端点，代哪端积分靠哪侧. f、g 在 $[a,b]$ 可积，f 在 $[a,b]$ 单调，则 $\exists\xi\in[a,b]$ s.t. $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(a)\int_a^\xi g(x)\mathrm{d}x+f(b)\int_\xi^b g(x)\mathrm{d}x$
- Abel 判别法：单调有界（这回是关于 x 单调，注意与函数项级数区分）$\times$ 无穷积分收敛

- Dirichlet 判别法：单调趋零 $times$ 无穷积分有界（指任给积分上界，积分值有界）

绝对收敛必收敛，积分绝对值 $\leqslant$ 绝对值积分. 同样有绝对可积和条件可积

14.4 瑕积分敛散性判断

Cauchy 收敛准则（假设瑕点是区间下界）：$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta \text{ s.t. } 0 < \eta < \eta' < \delta$ 时 $\left|\int_{a+\eta}^{a+\eta'} f(x)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon$

比较判别法，要求函数非负. 结论与级数的比较判别法相同. 也有极限形式，是让 x 趋向瑕点（上界或下界）.

Cauchy 判别法，本质是与 p-瑕积分比较，不如直接用比较判别法

A-D 判别法（假设下界为瑕点）

- Abel 判别法：单调有界 $\times$ 瑕积分收敛
- Dirichlet 判别法：单调趋零（当自变量趋于下界）$\times$ 瑕积分有界

化为无穷积分判别：设 a 为瑕点，作变量替换 $x = a + \dfrac{1}{t}$，则 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} f(a+\frac{1}{t})\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$

14.5 Cauchy 主值

Cauchy Principal Value

即对于某个瑕点，有两个极限过程（或是负无穷到正无穷积分），让这两个极限过程的趋向速度相同，若这样的极限存在，则称在 Cauchy 主值意义下收敛，Cauchy 主值即为极限值，记为 $(\mathrm{cpv})\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

cpv 意义下的瑕积分称为奇异积分

普通意义下收敛，则 cpv 意义下收敛，反过来不定

14.6 Euler 积分

Γ 函数，aka 第二类 Euler 积分：$\Gamma(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\mathrm{d}x$

- 定义域（右边积分的收敛域）：$(0, +\infty)$
- $\Gamma(\alpha)$ 连续

- $\Gamma(\alpha)$ 任意阶可导，$\Gamma^{(n)}(\alpha)=\displaystyle\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}(\ln x)^n\mathrm{d}x$
- $\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$，$\alpha>0$，取正整数得 $\Gamma(n+1)=n!$
- $\Gamma(\alpha)$ 在 $(1,2)$ 取得唯一最小值，0^+ 和 $+\infty$ 处函数趋于正无穷
- Legendre 公式：$\Gamma(s)\Gamma(s+\dfrac{1}{2})=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2^{2s-1}}\Gamma(2s)$，$s>0$
- 余元公式：$\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\dfrac{\pi}{\sin s\pi}$，$0<s<1$
  - 引理：$\dfrac{\pi}{\sin s\pi}=\dfrac{1}{x}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\dfrac{1}{x+n}+\dfrac{1}{x-n})$

B 函数，aka 第一类 Euler 积分：$\mathrm{B}(p,q)=\displaystyle\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x$

- 定义在第一象限，连续，任意阶可导且导数连续
- 递归式
  - $\mathrm{B}(p,q)=\dfrac{(q-1)}{p+(q-1)}\mathrm{B}(p,q-1)$，$p>0$，$q>1$
  - $\mathrm{B}(p,q)=\dfrac{(p-1)}{(p-1)+q}\mathrm{B}(p-1,q)$，$p>1$，$q>0$

关系：

- $\mathrm{B}(p,q)=\dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$，$p,q>0$，代入正整数得 $\mathrm{B}(m,n)=\dfrac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}$

Chapter 15 Fourier 级数

（Fourier 积分不考）

15.1 & 15.2 三角级数与 Fourier 级数

三角级数：$\dfrac{1}{2}a_0+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$

逻辑：（和幂级数是一个逻辑）

1. 假设某个 $T=2\pi$ 的周期函数可以被展开成三角级数，发现三角级数被函数唯一确定，$a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x$，$b_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x$
2. 据此，任意给一个函数，都按上面的规则构造出一个级数，称为这个函数的 Fourier 级数. 这个 Fourier 级数收不收敛、收敛的话收不收敛到 $f(x)$、是不是一致收敛，这都是后话. 所以这里函数和级数之间只能画波浪号而不能画等号.

3. 可以证明，当 $f(x)$ 满足下面两个条件之一时，$f(x)$ 的 Fourier 级数点态收敛于 $\sigma(x)=\dfrac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$：
    - Dirichlet-Jordan 判别法：x 的邻域内分段单调且有界
    - Dini-Lipschitz 判别法：x 处满足 α-Holder 条件（$\forall\varepsilon>0$，$\exists L>0$、$\exists\alpha\in(0,1]$ s.t. $0<u<\delta$ 时，$|f(x\pm u)-f(x^\pm)|<Lu^\alpha$，$\alpha=1$ 时称为 Lipschitz 条件）. α-Holder 条件中 α 越大条件越强. 可导一定收敛于 $\sigma(x)=f(x)$

对于 $T=2l$ 的，设辅助函数 $g(x)=f\left(\dfrac{l}{\pi}t\right)$，把 g 傅展后代入 $t=\dfrac{\pi x}{l}$ 即可

偶延拓，奇延拓，周期延拓

偶函数的傅展只含 cos，奇函数的傅展只含 sin.

15.3 Fourier 级数的性质

（针对 $T=2\pi$）

1. Fourier 系数趋于零
2. 可逐项积分
3. 逐项微分：周期内连续、周期头尾相接、导数处处存在或只有有限个点不存在、导数可积或绝对可积，四个条件推出导函数的 Fourier 级数为（函数的 Fourier 级数）的导数，并不知道收敛性
4. 是所有三角级数中的最佳均方逼近
5. Parseval 等式：$\dfrac{1}{2}a_0^2+\sum(a_n^2+b_n^2)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x$

    (Bessel 不等式：上面等号改成 $\leqslant$)