Báo cáo nghiên cứu tìm hiểu về xử lý tín hiệu số

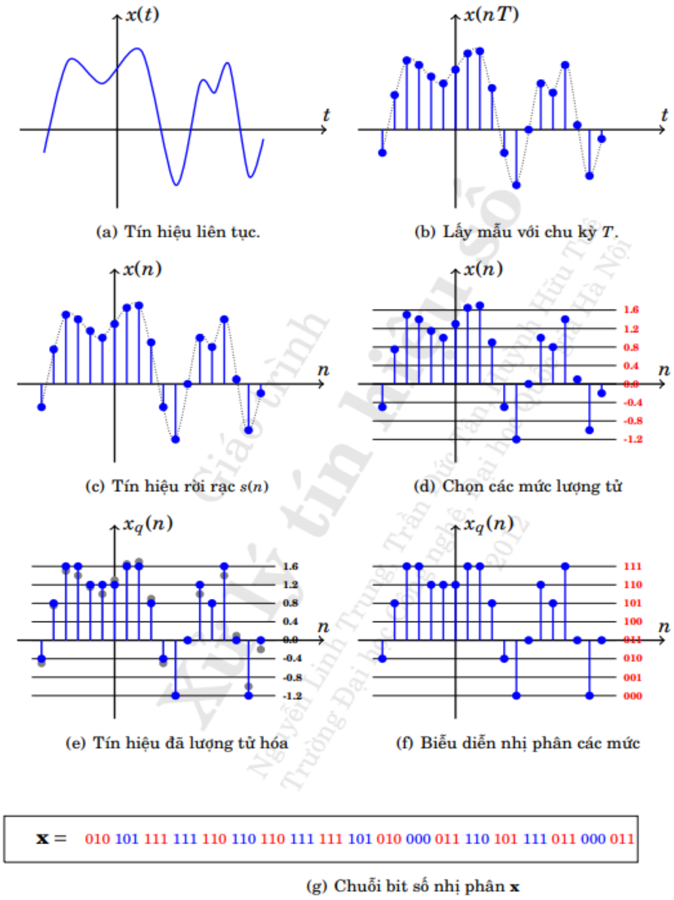
Yêu cầu: Báo cáo nghiên cứu tìm hiểu về xử lý tín hiệu số, phương pháp lấy mẫu, lượng tử, tín hiệu và hệ thống rời rạc, biến đổi Fourier, bộ lọc số IIR, FIR … và các topic khác liên quan xử lý tín hiệu

1. Xử lý tín hiệu số

- Xử lý tín hiệu bao gồm tất cả những áp dụng có thể hình dung, cần sử dụng tất cả các phương pháp luận hiện hữu trong điện tử, lọc tín hiệu, xử lý thông tin, lý thuyết nhận dạng,..
- Xử lý tín hiệu số tương ứng với chuyển hóa các hệ thống liên tục thành các hệ thống rời rạc, xây dựng các thuật toán để lọc các tín hiệu rời rạc. Xử lý tín hiệu số được ứng dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực.

2. Phương pháp lấy mẫu, lượng tử

- Để xử lý tín hiệu theo thời gian liên tục này bằng máy tính, trước hết cần số hóa nó, tức là biểu diễn nó bằng một chuỗi số mà máy tính có thể đọc và xử lý được. Quá trình số hóa gồm ba bước theo thứ tự sau: lấy mẫu, lượng tử hóa và mã hóa
- Lấy mẫu là lấy các giá trị của tín hiệu tại các thời điểm rời rạc (rời rạc hóa)
  + Lượng tử hóa là làm gần đúng giá trị của tín hiệu tại thời điểm lấy mẫu với các mức lượng tử (giá trị rời rạc). Lượng tử hóa được xác định bởi độ chính xác của máy tính.
  + Mã hóa là biểu diễn một số theo hệ thống nhị phân mà máy tính có thể đọc được
  => Đây là hoạt động quan trọng nhất trong quá trình số hóa.
- Ba thao tác trên được kết hợp thực hiện trong bộ biến đổi tương tự-số, viết tắt là ADC
- Hình 2.1 mô tả quá trình số hóa tín hiệu theo ba bước trên đây.



Hình 2.1: Quá trình số hóa tín hiệu liên tục thành chuỗi bit.

2.1. Lấy mẫu

2.1.1. Phương pháp lấy mẫu đều

- Lấy mẫu đều một tín hiệu liên tục *x(t)* tức là ghi lại chuỗi giá trị của tín hiệu này tại các thời điểm $t = nT$, T: chu kỳ lấy mẫu.
- Rời rạc hóa tín hiệu x(t) để có chuỗi *x(nT)* chỉ có giá trị khi từ chuỗi này có thể xây dựng lại x(t)

⇨ ***Định lý lấy mẫu Nyquist***: Tín hiệu x(t) và tín hiệu mẫu x(nT) là hoàn toàn tương đương nếu phổ của tín hiệu gốc x(t) có bề rộng hữu hạn W và vận tốc lấy mẫu phải lớn hơn hai lần của bề rộng phổ tín hiệu.

+ Phổ X(Ω) của tín hiệu gốc x(t) phải có bề rộng hữu hạn. Bề rộng này được gọi là bề rộng phổ của tín hiệu và được ký hiệu là *W*.

+ Để X (Ω+Ω0), X (Ω), X ($\Omega - \Omega_0$) không đụng nhau, phải có thêm một điều kiện khác là $\Omega_0 > 2W$

- Chọn $W_0 = \Omega_0/2$. Tần số $B_0 = (\Omega_0/2)/2\pi$ (Hz) gọi là tần số Nyquist
- Khi các điều kiện lấy mẫu được thỏa mãn, *x(t)* sẽ được tái tạo một cách hoàn hảo từ các mẫu *x(nT)* của nó

2.1.2. Lấy mẫu thực tế

- Trong thực tiễn, để đơn giản hóa thiết kế mạch điện tử cho việc lấy mẫu, người ta chọn T0 = T, trong trường hợp này, cách lấy mẫu này được gọi là lấy và giữ mẫu

2.2. Lượng tử hóa

- Sau khi lấy mẫu, bước tiếp theo của thao tác số hóa là lượng tử hóa các mẫu.
- Bề dày của mỗi mức được gọi là mức lượng tử và thiết bị xấp xỉ này được gọi là bộ lượng tử.
- Lượng tử hóa xấp xỉ một tín hiệu với một sai số: $x(n) = x_q(n) + e_q(n)$
  Sai số $e_q(n)$ có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn *q/2*, trong đó q là mức lượng tử.

2.3.Mã hóa và biểu diễn nhị phân

- Sau khi lượng tử hóa, để có mẫu $x_q(n)$ cần biểu diễn $x_q(n)$ sao cho máy tính có thể hiểu được
- Biểu diễn $x_q(n)$ theo hệ thống nhị phân
- cần chú ý phân biệt giữa biểu diễn dấu phẩy tĩnh và dấu phẩy động, bởi vì hai phương pháp này tương ứng với sự lựa chọn độ chính xác khác nhau

3. Tín hiệu và hệ thống rời rạc

3.1. Tín hiệu rời rạc

- Tín hiệu rời rạc thực chất là một chuỗi số x(n) với n là biến số thời gian độc lập rời rạc, có giá trị biến thiên từ −∞ đến +∞. Biến n chỉ định số thứ tự của các mẫu tín hiệu và như vậy x(n) là mẫu thứ n của tín hiệu
- Một tín hiệu rời rạc có thể được biểu diễn bằng hàm số toán học, đồ thị hoặc một chuỗi số
- Phân loại tín hiệu

  + Tín hiệu năng lượng và tín hiệu công suất

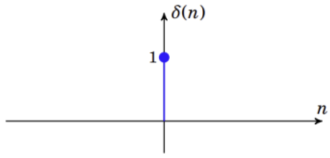
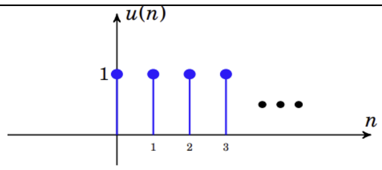
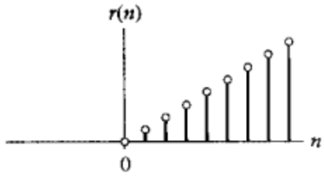
  + Tín hiệu tuần hoàn: Tín hiệu x(n) được gọi là tín hiệu tuần hoàn với chu kỳ N, trong đó N là số nguyên dương, nếu và chỉ nếu *x(n+N) = x(n)* với mọi *n*

  + Tín hiệu chẵn, tín hiệu lẻ

  - Tín hiệu chẵn là tín hiệu x(- n) = x(n)

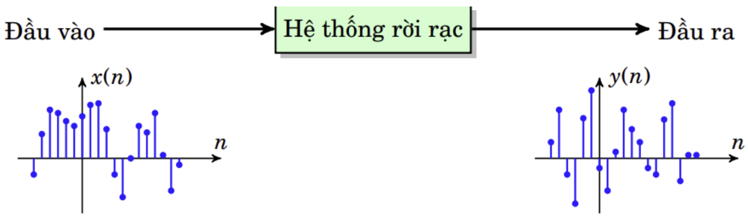
- Tín hiệu lẻ là tín hiệu có x(- n) = - x(n)

- Một số tín hiệu quan trọng

Tín hiệu	Biểu diễn hình học	Công thức
Xung Kronecker: δ(n)		$\delta(\mathrm{n}) = \begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ 1, & n = 0 \end{cases}$
Tín hiệu thang đơn vị: u(n)		$\mathrm{u(n)} = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$
Tín hiệu dốc đơn vị: $u_r(n)$		$u_r(n) = \begin{cases} n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$
Tín hiệu mũ rời rạc		$x(n) = a^n$

- Một số phép toán tín hiệu
  + Dịch gốc thời gian: y(t) = $x(t - t_0)$
    - t_0>0: dịch sang phải (trễ)
    - t_0<0: dịch sang trái (tiến)
  + Đổi chiều thời gian: thay thế biến độc lập n bằng – n
  + Tỷ lệ thời gian *y(t) = x(at)*
    - a>1: nén tín hiệu
    - 0<a<1: giãn tín hiệu
  + Cộng tín hiệu: y[n] = x_1 [n] + x_2 [n]
  + Nhân tín hiệu: y[n] = x_1 [n] x_2 [n]

3.2. Hệ thống rời rạc



Sơ đồ khối hệ thống rời rạc

- Một hệ thống rời rạc là một toán tử, thường ký hiệu là T {·}, biến đổi một tín hiệu rời rạc được gọi là tín hiệu đầu vào thành một tín hiệu rời rạc khác được gọi là tín hiệu đầu ra.
  + Tín hiệu đầu vào còn được gọi là tín hiệu kích thích và tín hiệu đầu ra là tín hiệu đáp ứng.
  + Gọi x(n) là tín hiệu đầu vào và y(n) là tín hiệu đầu ra, ta có mối quan hệ

  y(n) = T{x(n)}

<u>3.2.1. Mô hình hệ thống</u>

- Mối liên hệ giữa đầu vào và đầu ra của họ hệ thống này là một phương trình sai phân tuyến tính có dạng: $\sum_{k=0}^{N} a_k y(n\text{-}k) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n\text{-}k)$
  + $a_k$và $b_k$là các hệ số có thể phụ thuộc vào *n* nhưng hoàn toàn độc lập với mọi *x(n)* và mọi *y(n)*. N và M là hai hằng số nguyên dương => hệ thống bậc hữu hạn.

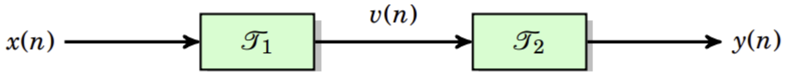
+ Có thể đặc tả phương trình sai phân bằng một sơ đồ hệ thống được xác định bởi ba toán tử cơ bản là cộng tín hiệu, khuếch đại biên độ và dịch trễ thời gian

3.2.2. Phân loại hệ thống

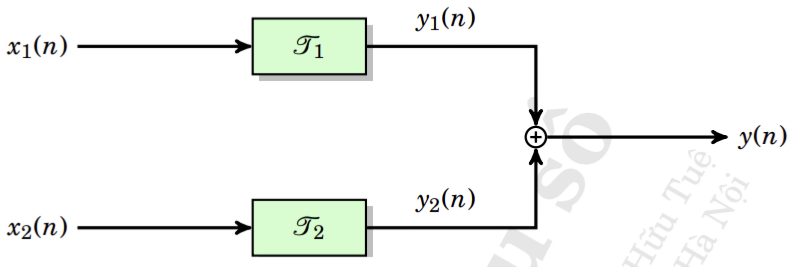
- Hệ thống tĩnh và hệ thống động
  + Hệ thống tĩnh hay hệ thống không nhớ nếu mẫu ở đầu ra y(n) tại thời điểm n chỉ phụ thuộc mẫu ở đầu vào x(n) tại cùng một thời điểm n.
  + Nếu mẫu đầu ra y(n) tại thời điểm n phụ thuộc vào nhiều mẫu tại các thời điểm khác nhau của đầu vào x(n) thì hệ thống được gọi là hệ thống động hoặc có
- Hệ thống bất biến
- Hệ thống tuyến tính: nếu đầu vào của hệ thống tuyến tính là một tổ hợp của nhiều tín hiệu thì đầu ra của nó là tổ hợp của các đầu ra tương ứng
- Hệ thống nhân quả: Một hệ thống được gọi là nhân quả khi tín hiệu đầu ra xuất hiện sau khi đầu vào xuất hiện
- Hệ thống ổn định: Nếu tồn lại một số nguyên dương M_x sao cho đầu vào x(n) của một hệ thống ổn định thỏa mãn |x(n)| < $M_x < \infty$, thì tồn tại một số nguyên dương M_y sao cho đầu ra y(n) thỏa mãn |y(n)| < $M_y < \infty$

3.2.3. Kết nối các hệ thống

- Các hệ thống rời rạc thường được kết nối với nhau để tạo nên một hệ thống lớn hơn. Có hai cách kết nối: kết nối nối tiếp và kết nối song song.



Hình 1: Kết nối nối tiếp



Hình 2: Kết nối song song.

- Hình 1 mô tả mô hình kết nối nối tiếp của hai hệ thống T1 và T2. Theo đó, tín hiệu đầu ra y(n) được tính là y(n) = T2{v(n)} = T2{T1{x(n)}}
- Hình 2 mô tả mô hình kết nối song song của hai hệ thống T1 và T2. Tín hiệu đầu ra là y(n) = y1(n)+ y2(n) = T1{x1(n)}+T2{x2(n)}

3.2.4. Hệ thống tuyến tính bất biến

- Xét một hệ thống tuyến tính bất biến T. Gọi h(n) là đáp ứng của hệ thống lúc được kích thích nó bởi một xung Kronecker δ(n).
  + h(n) được gọi là đáp ứng xung của hệ thống.
  + Nếu chiều dài của chuỗi h(n) là hữu hạn => hệ thống có đáp ứng xung chiều dài hữu hạn (FIR).
  + Nếu chiều dài của chuỗi h(n) là vô hạn => hệ thống có đáp ứng xung chiều dài vô hạn (IIR).
- Xét một tín hiệu đầu vào bất kỳ x(n) thay vì xung Kronecker. Tín hiệu x(n) có thể biểu diễn dưới dạng tổ hợp tuyến tính của các xung Kronecker như sau:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{x(k)\delta(n-\ k)}$$

=> Một hệ thống tuyến tính bất biến, thường được viết tắt là hệ thống LTI*, hoàn toàn được xác định bởi đáp ứng xung h(n) của nó

- Đầu ra y(n) của một hệ thống tuyến tính bất biến bằng tích chập giữa đáp ứng xung h(n) và tín hiệu đầu vào x(n) như sau:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{x(k)h(n-\ k)}$$

hay

$$\mathrm{y(n) = h(n) * x(n)}$$

với phép toán * là phép tính tích chập

3.2.5. Biến đổi Z

- Cho một tín hiệu rời rạc x(n), biến đổi Z của tín hiệu x(n), ký hiệu *S(z)* hoặc *Z {x(n)}*, được định nghĩa như sau:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(\mathrm{n})z^{-n}$$

- Vùng chứa các điểm z để X(z) hội tụ gọi là vùng hội tụ, thường ký hiệu là ROC
- Một số biến đổi Z thông dụng

Bảng 3.1: Một số biến đổi Z thông dụng.

$x(n)$	$S(z)$
$\delta(n)$	1
$u(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$, ROC: $\lvert z\rvert > 1$
$anu(n)$	$\frac{az^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$, ROC: $\lvert z\rvert > 1$
$e^{-na}u(n)$	$\frac{1}{1-e^{-1}z^{-1}}$, ROC: $\lvert z\rvert > \lvert e^{-a}\rvert$
$a^n u(n)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$, ROC: $\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$a^n[1-u(n)]$	$-\frac{1}{1-az^{-1}}$, ROC: $\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$
$\sin(n\omega_0)u(n)$	$\frac{\sin(\omega_0)z^{-1}}{1-2z^{-1}\cos(\omega_0)+z^2}$
$\cos(n\omega_0)u(n)$	$\frac{1-\cos(\omega_0)z^{-1}}{1-2z^{-1}\cos(\omega_0)+z^2}$

- Tính chất của biến đổi Z

Bảng 3.2: Tính chất của biến đổi Z.

$x(n)$	$S(z)$
$a_1x_1(n)+a_2x_2(n)$	$a_1x_1(z)+a_2x_2(z)$
$s(n-n_0)$	$z^{-n_0}X(z)$
$e^{-na}x(n)$	$S(e^a z)$
$\alpha^{-n}x(n)$	$S(\alpha z)$
$h(n)\star x(n)$	$H(z)X(z)$

3.2.6. Biến đổi Z ngược

- Thao tác từ tín hiệu x(n) suy ra X(z) là biến đổi Z. Ngược lại, thao tác từ X(z) suy ra x(n) được gọi là biến đổi Z ngược và được ký hiệu toán tử là $Z^{-1}\{.\}$

$$x(n) = Z^{-1}\{X(z)\}.$$

3.2.7. Biến đổi Z và hệ thống tuyến tính bất biến

- Biến đổi Z rất hữu ích lúc nghiên cứu tín hiệu rời rạc và hệ thống rời rạc, đặc biệt là đối với các hệ thống tuyến tính bất biến bậc hữu hạn.
- Đối với loại hệ thống này, đầu vào và đầu ra của hệ thống được nối kết bởi một phương trình sai phân tuyến tính có hệ số là hằng số như sau:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n\text{-}k) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n\text{-}k)$$

- Lấy biến đổi Z hai vế của phương trình sai phân

  + Hàm truyền $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0+b_1z^{-1}+\ldots+b_Mz^{-M}}{a_0+a_1z^{-1}+\ldots+a_Nz^{-N}}$

  + Mỗi liên hệ giữa $Y(z)$: $Y(z) = H(z)X(z)$
- Đáp án của phương trình này, tức là y(n), có thể biểu diễn dưới hai dạng khác nhau.

  + Dạng thứ nhất y(n) = y_h (n)+ y_p (n).
    - y_p (n) là một nghiệm bất kỳ thỏa mãn phương trình sai phân => nghiệm riêng hay nghiệm đặc biệt của phương trình sai phân.
    - y_h (n) là nghiệm của phương trình thuần nhất sau: $\sum_{k=0}^{N} a_k y(n\text{-}k) = 0$

  + Dạng thứ hai y(n) = $y_{z,s}$ (n)+ $y_{z,i}$ (n)
    - $y_{z,s}$ (n) là nghiệm của phương trình sai phân với N điều kiện ban đầu triệt tiêu.
    - $y_{z,i}$ (n) là nghiệm của phương trình thuần nhất được xác định với N điều kiện ban đầu của phương trình sai phân

4. Biến đổi Fourier

4.1. Định nghĩa biến đổi Fourier theo thời gian rời rạc

- Phổ của một tín hiệu theo thời gian liên tục x(t) là biến đổi Fourier của x(t), viết tắt là FT, được định nghĩa bằng toán học như sau

$$X(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\exp(-j\Omega t)dt$$

- Gọi $x_d(n)$ = x(nT) và đặt X_d (ω) = $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_d(n)$ exp(−jΩω) => biến đổi Fourier theo thời gian rời rạc, viết tắt là DTFT, của tín hiệu rời rạc $x_d(n)$

4.2. Áp dụng biến đổi Fourier theo thời gian rời rạc vào hệ thống tuyến tính bất biến

- Biểu thức biến đổi Fourier của đáp ứng xung h(n) tính tại ω = ω_0,

$$H(\omega_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(k) \exp(-jk\omega_0)$$

  => biến đổi Fourier theo thời gian rời rạc, viết tắt là DTFT, của tín hiệu rời rạc
- Vì thế $y(n) = H(\omega_0)exp(jn\omega_0)$
- H(ω) là độ khuếch đại phức của hệ thống tuyến tính bất biến rời rạc. Lúc hệ thống được kích thích bởi một tín hiệu điều hòa với tần số góc ω thì tín hiệu này sẽ được khuếch đại bởi H(ω), độ khuếch đại này thay đổi với tần số góc ω => H(ω) cũng được gọi là **đáp ứng tần số của hệ thống.**

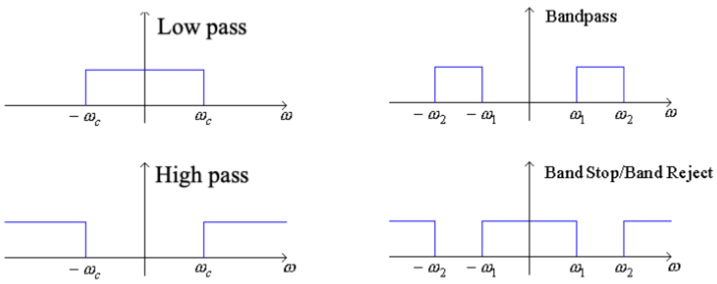
5. Bộ lọc IIR - Thiết kế bộ lọc có đáp ứng xung vô hạn (IIR filter design)

- Thiết kế một bộ lọc số là xây dựng một hàm truyền của một hệ thống tuyến tính bất biến rời rạc thế nào để nó đáp ứng những điều kiện của bài toán thiết kế đặt ra.

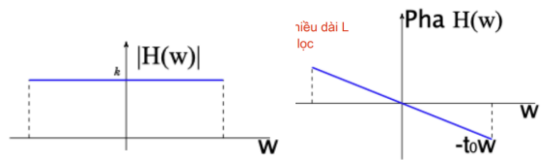
- Thiết kế bộ lọc tương tự để phục vụ cho thiết kế các bộ lọc số IIR sử dụng hai họ bộ lọc tương tự phổ cập là Butterworth và Chebyshev.
- Có hai phương pháp thiết kế bộ lọc số dựa trên bộ lọc tương tự.
  + Phương pháp thứ nhất thiết kế một hệ thống rời rạc sao cho đáp ứng hệ thống (đáp ứng xung hoặc đáp ứng bậc thang đơn vị) giống với đáp ứng của bộ lọc tương tự tương ứng. Cụ thể là lấy mẫu đáp ứng xung hoặc đáp ứng bậc thang đơn vị của bộ lọc tương tự và từ đó suy ra hàm truyền của bộ lọc số.
  + Phương pháp thứ hai thiết kế một hệ thống rời rạc sao cho đáp ứng tần số của hệ thống giống với đáp ứng tần số của hệ thống tương tự tương ứng. Cần tìm một phép biến đổi từ miền biến đổi Laplace sang miền biến đổi Z thế nào để tính chất của đáp ứng tần số được bảo toàn.

5.1. Lọc tần số

- Trong xử lý tín hiệu số, bộ lọc là các hệ thống TTBB có tác dụng chọn lọc tần số.



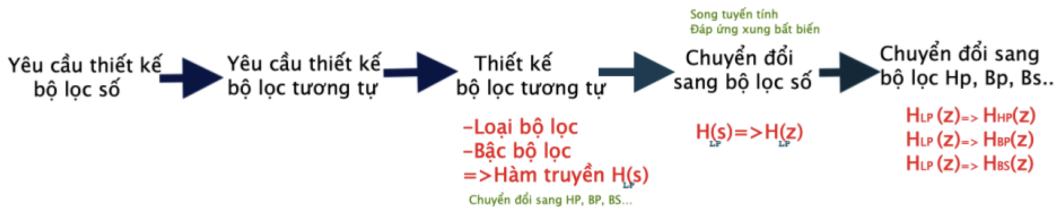
- Các tính chất của bộ lọc
  + Pha tuyến tính



  - Xét 1 hệ thống TTBB mà tín hiệu đi qua nó không bị méo mà chỉ bị suy hao và trễ: y(t)= k.x(t-t_0)
  - Dịch trong miền thời gian ⇐⇒ dịch pha trong miễn tần số:
  - Y (ω) = kX(ω).exp(−jωt_0)
  - Y (ω) = X(ω).H(ω) ⇒ H(ω) = k. exp(- jωt_0)
    => Đáp ứng biên độ: |H(ω)| = k và Đáp ứng pha: ΦH(ω) = $-t_0$ω
  - Bộ lọc với pha phi tuyến
    Khi hàm biểu diễn pha của hệ thống là hàm phi tuyến theo biến tần số ⇒ Hệ thống có pha phi tuyến

  + Pha tuyến tính và pha phi tuyến
  - Pha tuyến tính: Mọi tần số đi qua hệ thống có cùng độ trễ (= hệ số góc đường thẳng biểu diễn pha)
  - Pha phi tuyến: Các tần số khác nhau, đi qua hệ thống có độ trễ khác nhau.
  - Với các hệ thống có pha phi tuyến cần khảo sát độ trễ theo từng tần số :
    - Độ trễ pha (phase delay): $t_p(\omega) = -\frac{\Phi_{H(\omega)}}{\omega}$
    - Độ trễ nhóm (group delay): $t_g(\omega) = -\frac{d(\Phi_{H(\omega)})}{d\omega}$
  - Với hệ thống có pha tuyến tính: t_p (ω) = t_g (ω) = t_0 = conts
  - Với hệ thống có pha phi tuyến: t_p (ω) ≠ t_g (ω)

- Lọc số IIR Filter
+ IIR thường là các hệ thống có pha phi tuyến
+ Thiết kế bộ lọc số IIR ⇒ xác định H(z) =?
+ Các bộ lọc số IIR được thiết kế theo cách chuyển đổi từ lọc tương tự tương đương
+ Quy trình thiết kế:



5.2. Thiết kế bộ lọc tương tự IIR

5.2.1. *Biết đáp ứng biên độ |H(Ω)| của bộ lọc cần thiết kế. Xác định hàm truyền H(s)?*

+ Hệ thống LTI nhân quả, ổn định có đáp ứng xung h(t)
+ Đáp ứng tần số:

$$H(\Omega) = \int_{t=-\infty}^{\infty} h(t).e^{-j\Omega t} dt$$

+ Hàm truyền:

$$H(s) = \int_{t=-\infty}^{\infty} h(t).e^{-st} dt$$

$$H(\Omega) = H(s)|_{s=j\Omega} \text{ và } H(s) = H(\Omega)|_{\Omega=\frac{s}{j}}$$

=> Lưu ý: các hệ thống IIR, pha rất khó ước lượng, nên ta chỉ biết biên độ |H(Ω)|, chứ không biết H(Ω)
+ H(Ω) là số phức: với ∗ :liên hợp phức

$$|H(\Omega)|^2 = H(\Omega).H(\Omega)^*$$

=> H(Ω)∗ = H(−Ω)

$$|H(\Omega)|^2 = H(\Omega).H(-\Omega) = H(s).H(-s)|_{s=j\Omega}$$

$$H(s).H(-s) = |H(\Omega)|^2|_{\Omega=\frac{s}{j}}$$

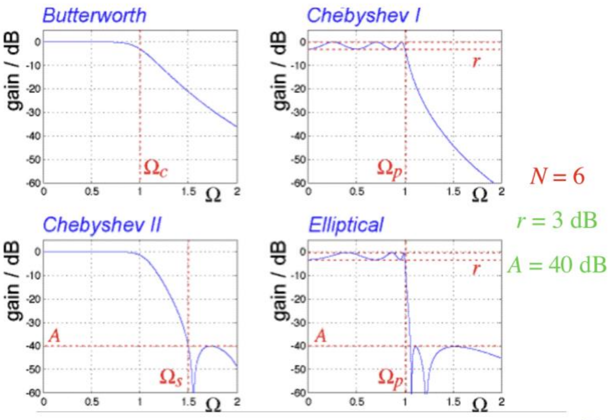
+ Từ |H(Ω)| của bộ lọc, xác định |H(Ω)| ^{2} , xấp xỉ nó bằng phân thức A(Ω) ^{2} . Ta có:

$$H(s).H(-s) = |H(\Omega)|^2|_{\Omega=\frac{s}{j}} = A(\Omega)^2|_{\Omega=\frac{s}{j}} = A(s)^2$$

+ Xác định các điểm cực và điểm không của A(s) ^{2}.
+ Do H(s).H(−s) = A(s) ^{2} nên H(s) và H(-s) sẽ chia sẻ một nửa số điểm cực (cặp điểm cực) và điểm không (cặp điểm không) của A(s) ^{2}
+ Để hệ thống ổn định: Chọn điểm cực của H(s) nằm bên trái trục tung
+ Để hệ thống có pha tối thiểu: Chọn điểm không (tốt nhất) nằm gần các điểm cực, nằm bên trái hoặc trên trục tung.
+ Chọn xong điểm cực, điểm không =⇒ Hàm truyền H(s)

5.2.2. *Bộ lọc tương tự*

+ Có thể thấy mấu chốt của việc tính H(s) khi biết đáp ứng biên độ của bộ lọc |H(Ω)| là có thể tìm được hàm xấp xỉ A(Ω) ^{2} của |H(Ω)| ^{2}
+ Các nhà toán học Butterworth, Chebychev ... đã đưa ra các công thức xấp xỉ.
+ Với mỗi công thức xấp xỉ ta sẽ có họ các bộ lọc tương tự tương ứng...



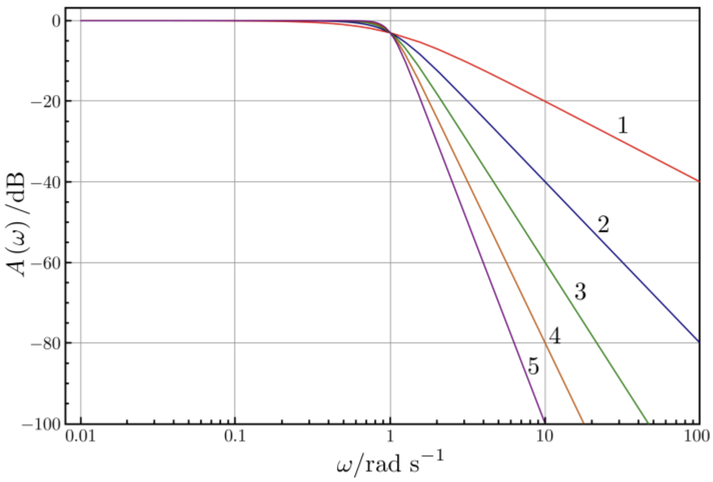
5.2.3. Bộ lọc tương tự Butterworth

- Butterworth đưa ra công thức xấp xỉ bộ lọc thông thấp:

$$A(\Omega)^2 = \frac{1}{1+(\frac{\Omega}{\Omega_c})^{2n}}$$

+ Ωc : tần số cắt của bộ lọc. Tại đó $|H(\Omega)|$ bé hơn 3dB

+ n: bậc của bộ lọc, bậc của đa thức mẫu số của H(s).



- Với $\Omega c = 1$ ta có bảng các xác định hàm truyền bộ lọc Butterworth như sau:

n	1/H(s)
1	$(s+1)$
2	$(s^2+1.4142s+1)$
3	$(s+1)(s^2+s+1)$
4	$(s^2+0.7654s+1)(s^2+1.8478s+1)$
5	$(s+1)(s^2+0.6180s+1)(s^2+1.6180s+1)$
6	$(s^2+0.5176s+1)(s^2+1.4142s+1)(s^2+1.9319s+1)$
7	$(s+1)(s^2+0.4450s+1)(s^2+1.2470s+1)(s^2+1.8019s+1)$
8	$(s^2+0.3902s+1)(s^2+1.1111s+1)(s^2+1.6629s+1)(s^2+1.9616s+1)$
9	$(s+1)(s^2+0.3473s+1)(s^2+s+1)(s^2+1.5321s+1)(s^2+1.879s+1)$
10	$(s^2+0.3129s+1)(s^2+0.9080s+1)(s^2+1.4142s+1)(s^2+1.7820s+1)(s^2+1.9754s+1)$

+ Khi $\Omega c \neq 1$, tính H(s) từ bảng, và thay s bởi $s/\Omega c$

5.2.4. Bộ lọc Chebychev

- Chebychev là bộ lọc có ripple trong dải thông (type1) hoặc dải triệt (type2).
- Bộ lọc thông thấp Chebychev-type1 bậc n có xấp xỉ:

$$A(\Omega)^2 = \frac{\alpha}{1+\epsilon^2[C_n(\frac{\Omega}{\Omega_c})]^2}$$

+ ϵ^2 : tham số liên quan đến độ gợn sóng dải thông
+ α: tham số liên quan đến độ khuếch đại cho tín hiệu ở D.C
+ Ωc là tần số cắt của bộ lọc
+ C_n(x) là đa thức Chebychev, như bảng:

n	$C_n(x)$
1	x
2	$2x^2-1$
3	$4x^3-3x$
4	$8x^4-8x^2+1$
5	$15x^5-20x^3+5x$
6	$32x^6-48x^4+18x^2-1$

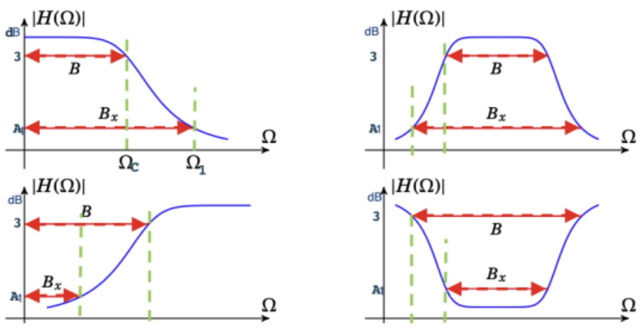
- Cách chọn các tham số:
  + Độ gợn sóng dải thông (dB):

  $$r = 20\log_{10}(|A_{max}|/|A_{min}|) = 10\log_{10}(1+\epsilon^2) \Rightarrow \epsilon^2 = 10^{r/10} - 1$$

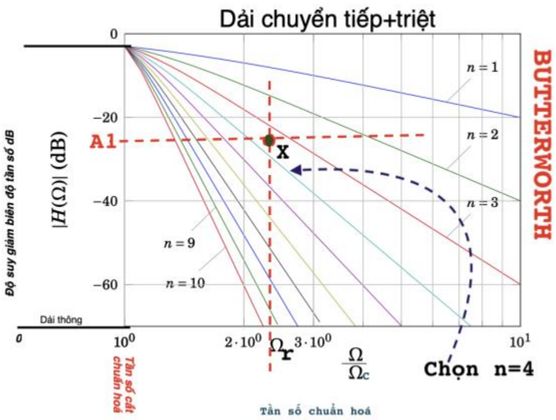
  + Số cực trị (min, max) của bộ lọc = bậc của bộ lọc
  + Tại Ω = 0, $|A(\Omega)|^2$ đạt max (=α) với n lẻ và min (=$\alpha/(1+\epsilon^2)$) với n chẵn
  + Nếu muốn đáp ứng biên độ của bộ lọc tại DC bằng 1 hay $|H(\Omega)|_{\Omega=0} = 1$ thì:

  $$\alpha = \begin{cases} 1, & n \text{ lẻ} \\ 1+\epsilon^2, & n \text{ chẵn} \end{cases}$$

- Chọn bậc của bộ lọc theo phương pháp đồ thi
  + Bậc của bộ lọc là tham số quan trọng để thiết kế bộ lọc tương tự.
  + Để xác định bậc n, có thể chọn n dựa trên độ suy giảm của đáp ứng tần số trong dải triệt hay tốc độ suy giảm của bộ lọc nhanh hay chậm
  + Xác định tần số cắt Ωc của bộ lọc, tại đó đáp ứng biên độ = 3 dB
    - Giả sử tại Ω1 có mức suy giảm A1 dB.
    - Tính tần số chuẩn hoá với từng loại bộ lọc: $\Omega r = \begin{cases} \frac{B_x}{B}, & \text{với lọc Lp, Bp} \\ \frac{B}{B_x}, & \text{với lọc Hp, Bs} \end{cases}$



  + Kéo từ A1 từ phải sang trái và từ Ωr dưới lên trên => giao nhau tại X Xác định bậc n tối thiểu thoả mãn (bên trái điểm X)



+ Với họ bộ lọc Chebychev, bậc của bộ lọc được chọn kèm theo thông tin về độ gợn sóng dải thông
+ Các độ gợn sóng phổ biến 0.1, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5 và 3dB
+ Cách chọn tương tự như Butterworth

5.2.5. Phép biến đổi một bộ lọc thông thấp thành bộ lọc thông dải

+ Từ LowPass sang BandPass

- Chỉ áp dụng với bộ lọc thông dải bậc chẵn (2n)
- Bậc của bộ lọc thông thấp dùng để chuyển đổi = 1/2 bậc của bộ lọc thông dải cần thiết kế
- Xác định hàm truyền của bộ lọc tương tự thông thấp LP bậc n, có tần số cắt chuẩn hoá: Ωc = 1 : H_{LP}(s)
- Để chuyển sang bộ lọc thông dải có dải thông Ω_{p1}, Ω_{p2}:
  - Thay s trong HLP(s) bởi $\frac{s^2+\Omega_0^2}{s}$ với $\Omega_0 = \sqrt{\Omega_{p1}\,\Omega_{p2}}$
  - Với tần số cắt chưa chuẩn hoá: thay s bởi s/Ωc với Ωc = Ω_{p2}- Ω_{p1}

5.2.6. Phép biến đổi một bộ lọc thông thấp thành bộ lọc triệt dải

+ Từ LowPass sang BandStop

- Chỉ áp dụng với bộ lọc chặn dải bậc chẵn (2n)
- Bậc của bộ lọc thông thấp dùng để chuyển đổi = 1/2 bậc của bộ lọc chặn dải cần thiết kế
- Xác định hàm truyền của bộ lọc LP bậc n, có tần số cắt chuẩn hoá: Ωc = 1: H_{LP}(s)
- Để chuyển sang bộ lọc chặn dải, có dải chặn Ω_{s1}, Ω_{s2}:
  - Thay s trong H_{LP}(s)bởi $\frac{s}{s^2+\Omega_0^2}$ với $\Omega_0 = \sqrt{\Omega_{s1}\,\Omega_{s2}}$
  - Nếu tần số cắt chưa chuẩn hoá: thay s bởi s/Ωc với Ωc = $\frac{1}{\Omega_{s2}-\Omega_{s1}}$

5.2.7. Phép biến đổi một bộ lọc thông thấp thành bộ lọc thông cao

- Từ LowPass sang HighPass
  - Bậc của bộ lọc thông cao = bậc bộ lọc thông thấp dùng để chuyển đổi.
  - Xác định hàm truyền của bộ lọc tương tự thông thấp LP có tần số cắt chuẩn hoá Ωc = 1 : HLP(s)
  - Để chuyển sang bộ lọc thông cao, có tần số cắt Ωc : Thay s trong H_{LP}(s) bởi Ωc/s

5.3 Phương pháp đáp ứng bất biến

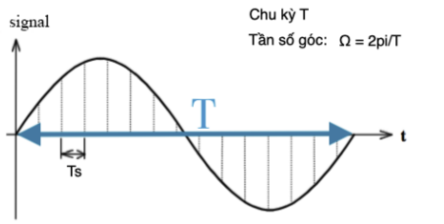
- Đáp ứng của hệ thống là tín hiệu ra .
- Đáp ứng bất biến: tín hiệu ra hệ thống tương tự và hệ thống số bất biến (có dạng như nhau) khi cho cùng dạng tín hiệu vào
    - Đáp ứng xung bất biến: Cho tín hiệu xung δ vào hệ thống tương tự và số, tín hiệu thu được ở đầu ra 2 hệ thống (i.e đáp ứng xung) "như nhau"
    - Đáp ứng bậc thang bất biến: Cho tín hiệu xung bậc thang u(t) hoặc u(n) vào hệ thống số và tương tự; tín hiệu ra thu được có dạng giống hệt nhau

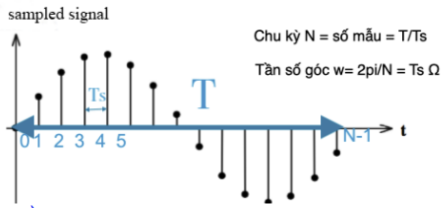
5.3.1 Thiết kế theo đáp ứng xung bất biến

- Đáp ứng xung bất biến, nên đáp ứng xung của bộ lọc tương tự h_a(t) có dạng giống hệt đáp ứng xung bộ lọc số h(n)

  ⇒ Coi như h(n) có được bằng cách lấy mẫu ha(t) với chu kỳ lấy mẫu T_s : h(n) = h_a (nT_s)

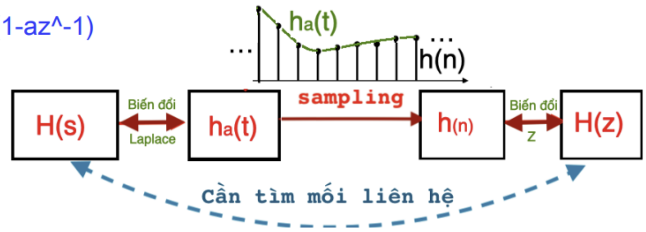
  ⇒ Mối liên hệ giữa tần số số và tần số tương tự: ω = ΩT_s





e^{at}u(t)<===>1/(s-a)

a^n u(n) <===> 1/(1-az^-1)



- Giả sử hàm truyền H(s) của hệ thống tương tự có điểm cực p_k: H(s) = $\frac{1}{s-p_k}$

  \+ Biến đổi Laplace ngược ⇒ h_a(t) = exp *(p_kt)u(t)* (chỉ xét hệ thống nhân quả)

  \+ Lấy mẫu ha(t) thu được h(n):

$$\text{h(n): } h(n) = h_a(nT_s) = e^{p_k nT_s}.u(n) = (e^{p_k T_s})^n u(n)$$

  \+ Biến đổi Z của h(n): H(s) = $\frac{1}{1-e^{p_k T_s} z^{-1}}$

  => điểm cực p_kcủa H(s) =⇒ cực $e^{p_k T_s}$ của H(z)

- Mở rộng: Trường hợp H(s) có điểm cực phức

  ⇒ Cặp điểm phức đối xứng H(s) chứa phân thức bậc 2 hệ số thực: H(s) = $\frac{as+b}{s^2+cs+d}$

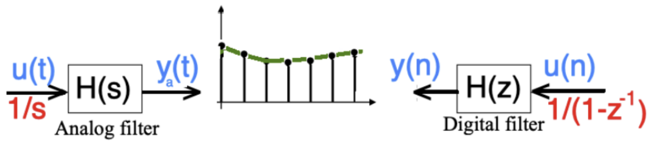
  \+ Công thức chuyển đổi sang bộ lọc số tương ứng:

$$H(s) = \frac{as+b}{s^2+cs+d} \Longrightarrow H(z) = \frac{a - e^{-\sigma T_s}[a\cos(\Omega_0 T_s) + \frac{a\sigma - b}{\Omega_0}\sin(\Omega_0 T_s)]z^{-1}}{1 - 2e^{-\sigma T_s}\cos(\Omega_0 T_s)z^{-1} + e^{-2\sigma T_s}z^{-2}}$$

  với σ = c/2 và $\Omega_0 = \sqrt{d - c^2/4}$

- Quy trình thiết kế bộ lọc số IIR theo phương pháp đáp ứng xung bất biến
  + Giả sử cần thiết kế bộ lọc số thông thấp có đặc tả tần số ω_p, ω_c , ω_s ; tần số lấy mẫu $F_{sampling}$
  + B1: Chuyển đổi yêu cầu sang miền tương tự:
  Tần số số ω = $T_s\Omega$ nên tần số tương tự $\Omega = \omega/T_s$
  Có $T_s = 1/F_{sampling}$ ⇒ Ωp = ωpFsampling , $\Omega_c = \omega_c F_{sampling}$, $\Omega_s = \omega_s F_{sampling}$
  + B2: Thiết kế bộ lọc tương tự (Butterworth,..) theo đặc tả trên ⇒ H(s)
  + B3: Phân tích H(s) thành các tổ hợp phân thức bậc nhất hoặc bậc 2 theo điểm cực của nó
  + B4: Áp dụng công thức chuyển đổi H(s)⇒H(z) để thu được hàm truyền của bộ lọc số H(z)

5.3.2 Thiết kế theo đáp ứng bậc thang bất biến



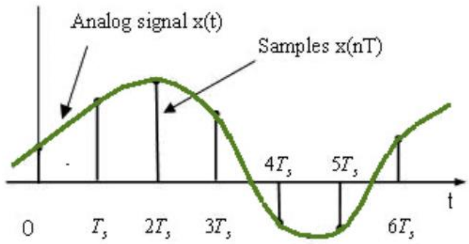
- Đáp ứng nhảy bậc bất biến: tín hiệu ra thu được khi cho tín hiệu nhảy bậc u(n), u(t) qua bộ lọc số, tương tự như nhau
- Coi như tín hiệu ra bộ lọc số y(n) có được bằng cách lấy mẫu từ tín hiệu ra của bộ lọc tương tự y_a (t): y(n) = y_a (nT_s)
- Giả sử H(s) có điểm cực p_k hay H(s) = $\frac{1}{s-p_k}$
- Công thức chuyển đổi đáp ứng nhảy bậc bất biến:

$$H(s) = \frac{1}{(s-p_k)} \Longrightarrow H(z) = \frac{1}{p_k}\left(\frac{e^{p_k T_s}-1}{z-e^{p_k T_s}}\right)$$

5.4 Phương pháp biến đổi song tuyến tính

5.4.1 Biến đổi song tuyến tính

- Xét tính chất dịch thời gian, với biến đổi Laplace và Z
  + x(t) ⇒ X(s) thì x(t − t_0) ==⇒ $e^{-t_0 s}X(s)$
  + x(n) ⇒ X(z) thì x(n −n_0) ⇒ $z^{-n_0}X(s)$



- Do tín hiệu rời rạc x(n) được lấy mẫu từ x(t) nên khi x(t) dịch T_s tương đương với làm x(n) dịch 1 bước
- Công thức chuyển đổi song tuyến tính

$$z = \frac{2+sT_s}{2-sT_s} \; , \; s = \frac{2}{T_s}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

- Liên hệ tần số

$$\Omega = \frac{2}{T_s}tan(\frac{\omega}{2}) \text{ và } \omega = 2arctan(\Omega\frac{T_s}{2})$$

- Liên hệ tần số số và tần số tương tự (C = 2/T_s)
  + ω nhỏ, quan hệ gần như tuyến tính
  + ω lớn (f càng gần với tần số lấy mẫu f_sampling), quan hệ phi tuyến
- Đáp ứng tần số của bộ lọc số với Đáp ứng tần số của bộ lọc tương tự

5.4.2 Thiết kế theo biến đổi song tuyến tính

- Quy trình thiết kế bộ lọc số IIR theo phương pháp song tuyến tính

  + Giả sử cần thiết kế bộ lọc số LP có đặc tả tần số ω_c ; tần số lấy mẫu F_sampling

  + B1: Chuyển đổi yêu cầu sang miền tương tự: Tần số tương tự $\Omega = \frac{2}{T_s}\tan\left(\frac{\omega}{2}\right)$

  + B2: Thiết kế bộ lọc tương tự (Butterworth,..) theo đặc tả trên ⇒ H(s) (có thể sử dụng trực tiếp các yêu cầu về A_p, A_s của bộ lọc số để thiết kế)

  + B3: Áp dụng công thức chuyển đổi song tuyến tính: $s = \frac{2}{T_s}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$; do đó thay s =⇒ s /Ω_c

$$\frac{2}{T_s\Omega_c}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} = \frac{1}{\tan\left(\frac{\omega}{2}\right)}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} = \cot an\left(\frac{\omega}{2}\right)\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \quad (*)$$

  + B4: Thay (*) vào H(s) để có hàm truyền của bộ lọc số H(z)

5.4 Thiết kế bộ lọc số thông dải

- Quá trình thiết kế trên gồm hai bước

  + Chọn một bộ lọc thông thấp và dùng một phép biến đổi từ thông thấp sang thông dải để có một bộ lọc tương tự thông dải đáp ứng những đặc tả mong muốn.

  + Từ hàm truyền của bộ lọc tương tự thông dải này ta sử dụng phép biến đổi song tuyến tính để suy ra hàm truyền của bộ lọc số tương ứng.

5.5 Thiết kế bộ lọc số triệt dải

- Kết quả có được cho ra dạng tổng quát của phép biến đổi

$$p = \frac{D_1(1-z^{-2})}{1-E_1z^{-1}+z^{-2}}.$$

- Các hằng số D_1 và E_1 tính theo dải triệt b và tần số trung bình hình học v_2

$$D_1 = \lambda_r \tan\left(\frac{\pi}{2}\frac{B}{F_N}\right) = \lambda_r \tan\left(\frac{\pi}{2}b\right),$$

$$E_1 = 2\cos\left(\pi\frac{F_2}{F_N}\right) = 2\cos(\pi\nu_2).$$

  + Biểu diễn hằng số D_1 và E_1 tính theo các tần số cắt của dải triệt

$$D_1 = \lambda_r \tan\left(\frac{\pi}{2}(\nu_3-\nu_1)\right),$$

$$E_1 = \frac{2\cos\left(\frac{\pi}{2}(\nu_3+\nu_1)\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}(\nu_3-\nu_1)\right)}.$$

- Các tần số số ν1, ν2 và ν3 được nối kết với nhau thông qua biểu thức

$$\tan^2\left(\frac{\pi}{2}\nu_2\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2}\nu_1\right)\tan\left(\frac{\pi}{2}\nu_3\right).$$

5.6 Thiết kế bộ lọc số thông cao

- Theo lập luận của thiết lập bộ lọc thông thấp ta thấy ngay phép biến đổi ngược lại sẽ cho ta bộ lọc thông cao. Phép biến đổi song tuyến tính biến một bộ lọc tương tự thông thấp $G_{lp}(p)$ thành một bộ lọc số thông cao $H_{hp}(z)$ là

$$p = C\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}.$$

- λ là tần số của $G_{lp}(p)$ và ν là tần số của $H_{hp}(z)$

$$|\lambda| = C\cot\left(\frac{\pi}{2}\frac{F}{F_N}\right) = C\cot\left(\frac{\pi}{2}\nu\right).$$

$$C = \lambda_r \tan\left(\frac{\pi}{2}\frac{F_r}{F_N}\right) = \lambda_r \tan\left(\frac{\pi}{2}\nu_r\right).$$

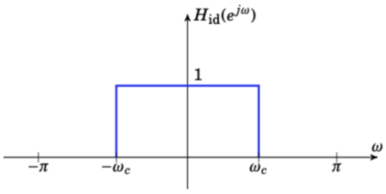
  => Bậc của bộ lọc số $H_{hp}(z)$ bằng bậc của $G_{lp}(p)$ được sử dụng trong quá trình thiết kế

6. Bộ lọc FIR

6.1 Phương pháp cửa sổ

6.1.1 Phương pháp thiết kế cửa sổ

- Thiết kế bộ lọc FIR thông thấp lí tưởng



$$H_{id}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| \le \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| \le \pi. \end{cases}$$

- Đáp ứng xung tương ứng

$$h_{id}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H_{id}(e^{j\omega})e^{jn\omega}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{jn\omega}d\omega$$

hay

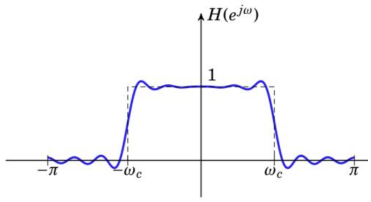
$$h_{id}(n) = \frac{1}{2\pi jn}\left(e^{-jn\omega_c} - e^{-jn\omega_c}\right) = \frac{\omega_c}{\pi}\frac{\sin n\omega_c}{n\omega_c}$$

- Đáp ứng xung h_{id}(n) dài vô hạn => không thoả mãn điều kiện FIR
- Phải giới hạn chiều dài của hệ thống lại

$$h(n) = \begin{cases} h_{id}(n), & |n| \le M, \\ 0, & |n| > M. \end{cases}$$

- Đáp ứng tần số của h(n)

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-M}^{M} h(n)e^{-jn\omega}$$
$$= h_0 + \sum_{n=1}^{M} h(n)(e^{-jn\omega} + e^{jn\omega})$$
$$= h_0 + 2\sum_{n=1}^{M} h(n)\cos(n\omega).w(n)$$



Hiện tượng Gibbs

+ Hiện tượng Gibbs sẽ giảm bớt nếu tăng M lên hoặc dùng các hàm cửa sổ

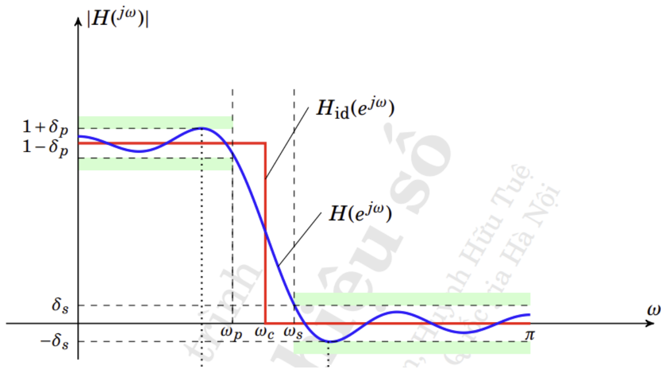
$$h(n) = h_{id}(n).w(n)$$

+ Bộ lọc nhân quả nếu h(n)=0 mọi n <0

=> Dịch đáp ứng xung M bước để thu được bộ lọc nhân quả: h_{NQ}(n) = h(n − M)

Bảng 6.1: Các hàm cửa sổ thông dụng

Tên cửa sổ	$w_0(n), -(L-1)/2 \le n \le (L-1)/2$	$w(n) = w_0\left(n - \frac{L-1}{2}\right), 0 \le n \le L-1$
Chữ nhật	1	1
Tam giác	$1 - \frac{2\|n\|}{L-1}$	$\begin{cases} \frac{2n}{L-1}, & \text{với } 0 \le n \le \frac{L-1}{2} \\ 2 - \frac{2n}{L-1}, & \text{với } \frac{L-1}{2} < n \le (L-1) \end{cases}$
Cosine	$\cos\left(\frac{\pi n}{L-1}\right)$	$\cos\left(\frac{\pi n}{L-1} - \frac{\pi}{2}\right)$
Reimann	$\text{sinc}^L\left(\frac{2n}{L-1}\right)$	$\text{sinc}^L\left(\frac{2n}{L-1} - 1\right)$
Hanning	$0,5 + 0,5\cos\left(\frac{2\pi n}{L-1}\right)$	$0,5 - 0,5\cos\left(\frac{2\pi n}{L-1}\right)$
Hamming	$0,54 + 0,46\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)$	$0,54 - 0,46\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)$
Blackman	$0,42 + 0,5\cos\left(\frac{2\pi n}{L-1}\right) + 0,08\cos\left(\frac{4\pi n}{L-1}\right)$	$0,42 - 0,5\cos\left(\frac{2\pi n}{L-1}\right) + 0,08\cos\left(\frac{4\pi n}{L-1}\right)$
Kaiser	$\frac{I_0\left(\beta\sqrt{1-\left(\frac{2n}{L-1}\right)^2}\right)}{I_0(\beta)}$	$\frac{I_0\left(\beta\sqrt{1-\left(\frac{2n}{L-1}-1\right)^2}\right)}{I_0(\beta)}$



+ ω_p, ω_s , ω_c : tần số biên dải thông, tần số biên dải triệt, tần số cắt của bộ lọc δp, δs : độ dao động cực đại ở dải thông, dải triệt

- Khoảng chuyển tiếp: $\Delta\omega = |\omega_s - \omega_p|$
- A_p: độ gợn sóng dải thông (dB), A_s độ suy hao dải triệt (dB)

+ Mối liên hệ giữa các tham số:

- Thông thường, sẽ căn cứ vào A_p, A_s , δ_p, δ_s để chọn loại cửa sổ sử dụng.
- C: hằng số cửa sổ, tỉ lệ nghịch với chiều dài cửa sổ và khoảng chuyển tiếp:

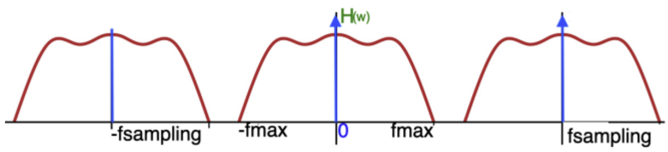
$$\Delta_\omega = 2\pi\ C/L$$

Bảng : Bảng tra giá trị của các cửa sổ thông dụng

Cửa sổ	A_p (dB)	A_s (dB)	$\delta_p = \delta_s$	C
Chữ nhật	0,742	21	0,0819	0,60
Hanning	0,055	44	0,0063	3,21
Hamming	0,019	53	0,0022	3,47
Blackman	0,0015	75,3	0,00017	5,71

+ Chuẩn hoá tần số: Cách chuyển đổi từ tần số dài (f) sang tần số góc (ω) khi thiết kế các bộ lọc số:

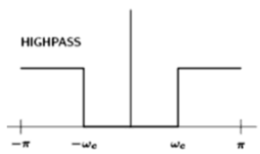
- Bộ lọc số được lấy mẫu với tần số f_sampling thì phổ sẽ tuần hoàn với tần số (dài) f_sampling (Hz



- Mà phổ của bộ lọc số tuần hoàn với tần số (góc) ω = 2π
- Chuẩn hoá: $\omega_p = f_p 2\pi$/f_sampling ; $\omega_c = f_c 2\pi$/f_sampling; $\omega_s = f_s 2\pi$/f_sampling

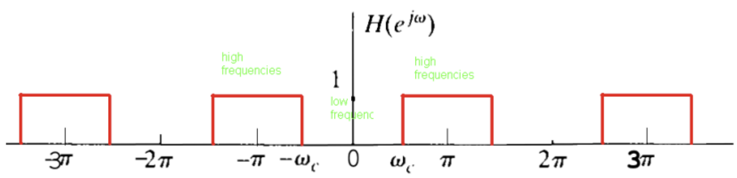
6.1.3 Thiết kế bộ lọc thông cao

- Bộ lọc FIR thông cao lí tưởng

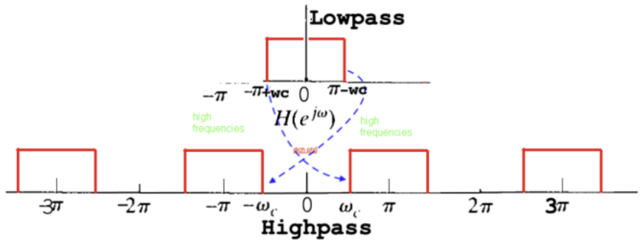


$$H_{\text{id}}^{\text{HP}}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & \omega_c < |\omega| \leq \pi. \\ 0, & |\omega| \leq \omega_c \end{cases}$$

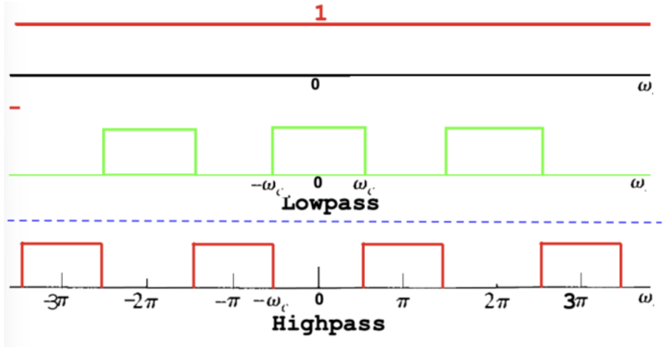
- Do các bộ lọc số, phổ tuần hoàn với chu kỳ 2π nên:



- Có thể thu được bộ lọc thông cao từ bộ lọc thông thấp bằng cách:



+ Dịch phổ: Highpass(ω) = Lowpass(ω) dịch +/ − π trong miền tần số



- Dịch ±π trong miền tần số ⇔nhân thêm $e^{\pm j\pi n} = (-1)^n$ e trong miền thời gian
- Quy trình thiết kế:
  - Thiết kế bộ lọc thông thấp có tần số cắt $(\pi - \omega_c)$, theo phương pháp cửa sổ

$$h^{LP}(n) = \frac{\sin((\pi-\omega_c)n)}{\pi n} w(n)$$

  - Áp dụng công thức chuyển đổi:

$$h^{HP}(n) = h^{LP}(n).(-1)^n = (-1)^n.\frac{\sin((\pi-\omega_c)n)}{\pi n} w(n)$$

+ Trừ phổ: Highpass(ω) = 1 − Lowpass(ω)

- Highpass(ω) = 1 − Lowpass(ω) tương ứng trong miền thời gian:

$$h^{HP}(n) = \delta(n) - h^{LP}(n)$$

  - Quy trình thiết kế: Thiết kế bộ lọc thông thấp có tần số cắt (ω_c), theo phương pháp cửa sổ

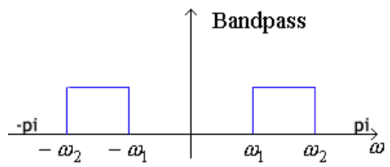
$$h^{LP}(n) = \frac{\sin((\pi-\omega_c)n)}{\pi n} w(n)$$

  - Áp dụng công thức chuyển đổi:

$$h^{HP}(n) = \delta(n) - h^{LP}(n) = \delta(n) - \frac{\sin((\omega_c)n)}{\pi n} w(n)$$

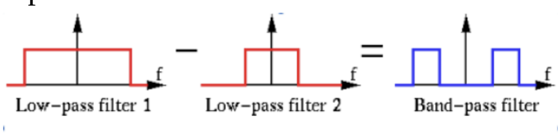
6.1.4 Thiết kế bộ lọc thông dải

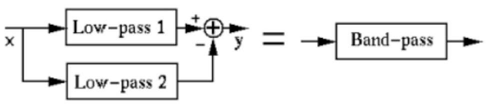
- Bộ lọc FIR thông dải lí tưởng



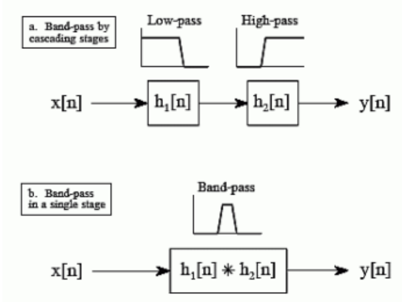
- Có thể thiết kế bộ lọc thông dải theo nhiều cách:

+ Từ các bộ lọc thông thấp

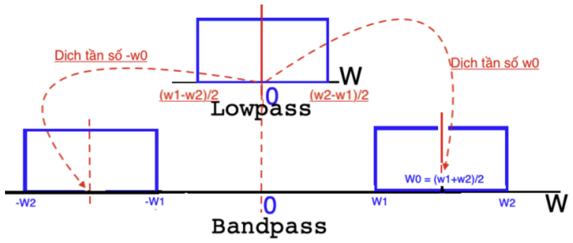




+ Từ các bộ lọc thông thấp, thông cao:



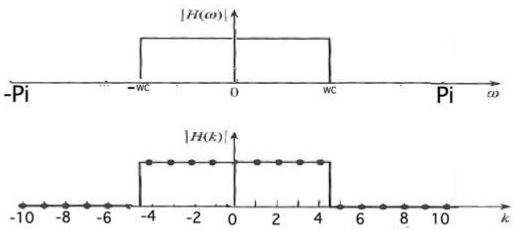
+ Để đơn giản, thường chỉ dùng cách dịch phổ, từ 1 bộ lọc LP duy nhất



- Quy trình thiết kế:
    - Thiết kế bộ lọc thông thấp có tần số cắt ω_c= $(\omega_2 - \omega_1)/2$
    - Dịch phổ đi $\pm\omega_0$= $\pm(\omega_2 + \omega_1)/2$,=> nhân với $e^{\pm j\omega_0 n}$
      => $h^{BP}(n) = h^{LP}(n)(e^{jw_0 n} + e^{-jw_0 n})/2 = h^{LP}(n).cos(\omega_0 n)$
    - Chuẩn hoá tần số
    - Chọn ω_1 = $(\omega_{s1} + \omega_{p1})/2$; ω_2 = $(\omega_{s2} + \omega_{p2})/2$
    - Tính khoảng dịch phổ ω_0= $(\omega_2 + \omega_1)/2$ và tần số cắt ω_c= $(\omega_2 - \omega_1)/2$
    - Thiết kế bộ lọc thông thấp có tần số cắt ωc sử dụng phương pháp cửa sổ
    - Chuyển đổi Lp-Bp:
      $$h^{BP}(n) = h^{LP}(n).cos(\omega_0 n) = \frac{sin(\omega_c n)}{\pi n} w(n)cos(\omega_0 n)$$
    - w(n) là hàm cửa sổ, chọn khi thiết kế LP

6.2 Phương pháp lấy mẫu trên miền tần số

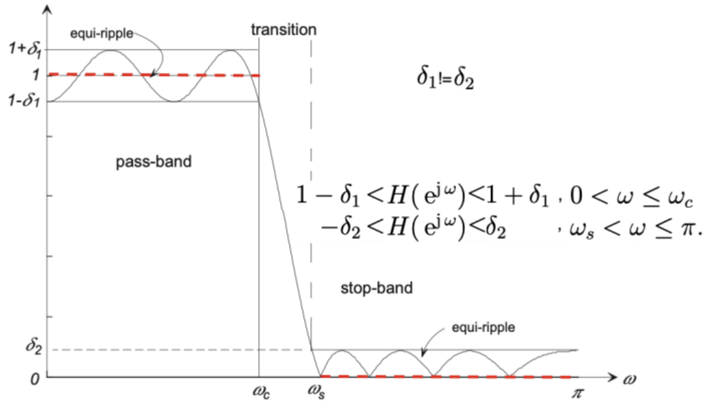
- Ý tưởng: Từ H(ω) của bộ lọc lí tưởng $\xrightarrow[\text{N mẫu}]{\text{Lấy mẫu đều}} H^K(\omega) \xrightarrow[\text{Fourier ngược}]{\text{Biến đổi}} \text{h(n)}$



- Xét đáp ứng tần số của bộ lọc trong 1 chu kỳ 2π từ (−π, π)
    + Chia đều khoảng 2π thành N đoạn (N=2M+1), mỗi đoạn dài 2π/N => tại ω_k = k2π/N
    + Lấy mẫu tần số: H^k(ω) = H(ω) tại ω = ω_k
    + Đáp ứng xung, xác định dùng biến đổi Fourier ngược (DFT):
$$h(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=-M}^{M} H^k(\omega)e^{jk\frac{2\pi}{N}n}$$
- Giảm bớt hiện tượng Gibbs:
    + Sử dụng cửa sổ (như phương pháp cửa sổ)
    + Thay đổi biên độ của đáp ứng tần số tại các điểm bất liên tục thành 0.5

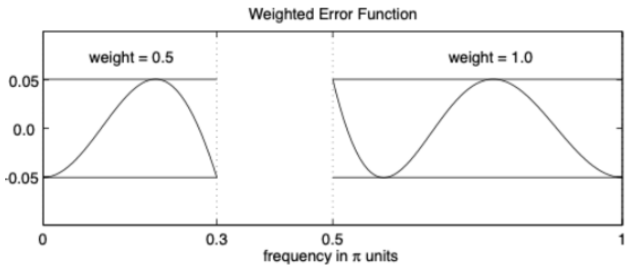
6.3 Phương pháp thiết kế Parks-McClellan

- Tối ưu: Thiết kế bộ lọc H(ω) sao cho sai số giữa H(ω) và H_{id}(ω) trong khoảng thông dải và triệt dải (pass-band, stop-band) nhỏ nhất



- Sai khác giữa H(ω) và H_{id}(ω) phụ thuộc vào δ_p, δ_s và do đó không cùng scales => dùng weight để chuẩn hoá:

$$W(e^{j\omega}) = \begin{cases} \delta_2/\delta_1 & \text{in the pass-band} \\ 1 & \text{in the stop-band} \\ 0 & \text{in the transition band.} \end{cases}$$



- Giả sử bộ lọc cần thiết kế có chiều dài L=2M+1 và các hệ số đối xứng, 2 phía gốc toạ độ:

$$H(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)e^{-jk\omega} = h_0 + 2\sum_{k=1}^{M}(h_k cos(k\omega)) = \sum_{k=0}^{M}(a_k cos(k\omega))$$

- Hàm sai số

$$E(\omega) = W(\omega)[H_{id}(\omega) - H(\omega)] = W(\omega)[H_{id}(\omega) - \sum_{k=0}^{M}(a_k cos(k\omega))]$$

- Bài toán tối ưu:

  + Gọi **Ω** là tập hợp hữu hạn các tần số trong khoảng thông tần và triệt tần (pass-band, stop-band), trong khoảng (0, π)

  + Xác định tập hợp các hệ số bộ lọc a_k sao cho tối thiểu hoá giá trị cực đại sai số trong khoảng thông tần và triệt tần (minimize the maximum values of error E(ω))

$$\min_{a_k}\left\{\max_{\Omega}\left\{W(\omega)[H_{id}(\omega) - \sum_{k=0}^{M}(a_k cos(k\omega))]\right\}\right\}$$