UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FIRENZE
LAUREA MAGISTRALE IN INGEGNERIA INFORMATICA

CORSO DI ANALISI NUMERICA

Implementazione del metodo di migliore approssimazione ai minimi quadrati trigonometrica

A. Rizzo, M. Bruni

Indice

- Introduzione
  - Cenni teorici
  - Problema
  - Condizioni da rispettare
  - Casi particolari
- Implementazione
  - Interfaccia

Cenni teorici

- Approssimazione di una funzione

$$f(x), x \in [0,2\pi]$$

- Classe di funzioni scelta:

$$\mathbb{T}_n = \left\{ \sum_{k=0}^{n} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \, , a_k, b_k \in \mathbb{R} \right\}$$

- Criterio: migliore approssimazione

Cenni teorici

- Assegnati i dati

$$(x_i, f(x_i)), i = 0,1, \dots, m$$

- Costruire una funzione trigonometrica approssimante $\widetilde{f_n}$ del tipo

$$\widetilde{f_n}(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

Problema

- Si costruisce un vettore errore $\vec{e} \in \mathbb{R}^m$ nel modo seguente

$$e_i = f(x_i) - \widetilde{f_n}(x_i)\,, i = 0,1,\dots,m$$

- Diventa un problema di ottimizzazione, i.e. determinare i coefficienti $a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n$ soluzione del problema di minimo

$$\min \quad \|e\|_2$$

Condizioni da rispettare

- Nodi $x_i \in [0, 2\pi)$ equispaziati

$$x_i = \frac{(i-1)\cdot 2\pi}{m}, i = 1, \dots, m$$

- Il numero di nodi m deve rispettare la condizione

$$m \geq 2n + 1$$

- In questo caso il polinomio trigonometrico è ***approssimante***

- I coefficienti $\{a_k\}$ e $\{b_k\}$ si ricavano dalle seguenti formule

$$\begin{cases} a_k = \dfrac{2}{m} \sum_{i=1}^{m} f(x_i) \cos(kx_i), & k = 0,1, \dots, n \\ b_k = \dfrac{2}{m} \sum_{i=1}^{m} f(x_i) \sin(kx_i), & k = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

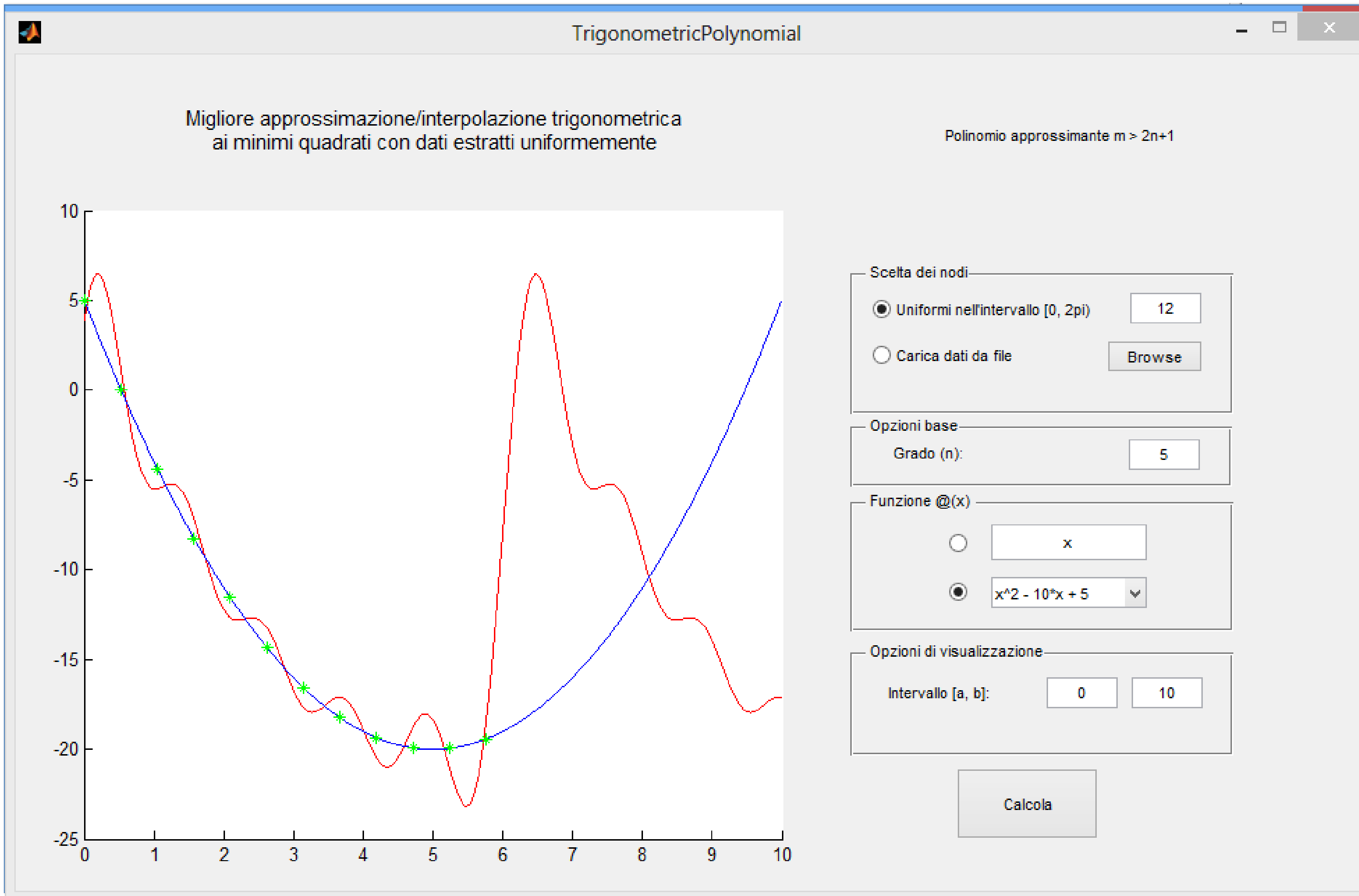
Casi particolari

- Se il numero di dati è dispari ed uguale a $m = 2n + 1$ allora il polinomio trigonometrico è ***interpolante*** nei nodi

- Se il numero di dati è pari ed uguale a $m = 2n$ allora il polinomio trigonometrico è interpolante ed i coefficienti $\{a_k\}$ e $\{b_k\}$ si ricavano con le seguenti formule

$$\begin{cases} a_k = \dfrac{2}{m}\sum_{i=1}^{m} f(x_i)\cos(kx_i) \ , & k = 0,1,\dots,n \\ b_k = \dfrac{2}{m}\sum_{i=1}^{m} f(x_i)\sin(kx_i) \ , & k = 1,2,\dots,n-1 \end{cases}$$

Interfaccia



ca il numero di nodi
ngono calcolati in
automatico
tte di caricare i dati
file formato *.csv

ca il numero n delle

tte di specificare la
ne da approssimare
ando la sintassi
) di funzioni

tte di specificare le
i di visualizzazione

a il polinomio
ssimante sulla base
ti inseriti