

INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO  
LICENCIATURA EM ENGENHARIA AEROESPACIAL  
MÚSICA E MATEMÁTICA

---

Música Aleatória  
*Music Generator*

---

**Docente:**

Henrique Oliveira

**Autor:**

Dinis Costa Marques, 109402

15 de junho de 2025

## Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Música Aleatória</b>	<b>1</b>
<b>3</b>	<b>Contexto Histórico</b>	<b>2</b>
3.1	Primórdios . . . . .	2
3.2	<i>Musikalisches Würfelspiel</i> . . . . .	2
3.3	Século XX . . . . .	3
<b>4</b>	<b><i>Music Generator</i></b>	<b>4</b>
4.1	Requisitos . . . . .	5
4.2	<i>Inputs</i> . . . . .	5
4.3	Utilização . . . . .	6
4.4	Funcionamento . . . . .	7
4.5	A Matemática por trás . . . . .	7
<b>5</b>	<b>Conclusão</b>	<b>8</b>

## Lista de Figuras

2.1	Exemplos das diversas vertentes da música aleatória. . . . .	1
3.1	Abertura da <i>Missa Cuiusvis Toni</i> , Johannes Ockeghem (séc XV). [3] . . . . .	2
3.2	<i>Pithoprakta</i> - Iannis Xenakis (1955–56) [4] . . . . .	4
4.1	<i>Music Generator</i> . . . . .	5
4.2	Exemplo de um excerto aceitável . . . . .	5
4.3	Exemplo de <i>output</i> do <i>Music Generator</i> . . . . .	6

## 1 Introdução

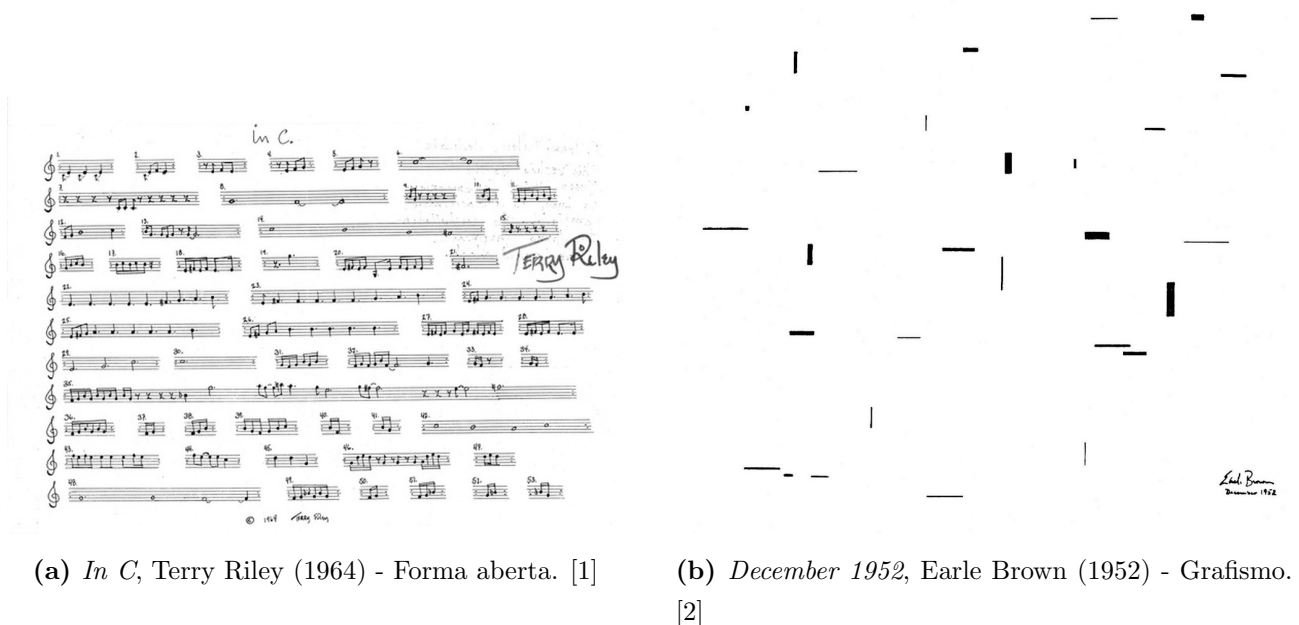
Música e matemática sempre estiveram interligadas, influenciando-se mutuamente ao longo da história. Esta relação recíproca tem sido uma base essencial para a evolução da música.

A matemática está presente em quase todos os aspetos musicais: desde a construção de instrumentos, regida por princípios acústicos, até à composição, onde ritmos, escalas e estruturas seguem padrões matemáticos. Proporções, como a razão áurea, e sequências, como a de Fibonacci, são frequentemente aplicadas para criar equilíbrio estético e auditivo.

Neste contexto, surge a música aleatória, onde o acaso e probabilidades desempenham um papel central. Diferente da música tradicional, esta vertente recorre a algoritmos, probabilidade e improvisação, rompendo com estruturas rígidas e explorando novas formas de expressão sonora.

Neste trabalho pretende-se explorar essa interseção entre matemática e música, apresentando um programa capaz de gerar composições com base em excertos organizados por diferentes probabilidades.

## 2 Música Aleatória



**Figura 2.1:** Exemplos das diversas vertentes da música aleatória.

A música aleatória, ou *musique aléatoire*, é um estilo composicional onde certos elementos são definidos aleatoriamente, desafiando a rigidez da escrita musical tradicional. Ao invés de todas as decisões pertencerem ao compositor, parte delas é deixada ao intérprete. Essa indeterminação pode surgir através de partituras gráficas, instruções vagas ou do uso de processos probabilísticos e algorítmicos na composição ou execução.

Esta prática redefine o papel do compositor, intérprete e ouvinte, oferecendo novas perspectivas para a criação artística e para a análise da música como fenómeno matemático e cultural.

Existem diferentes abordagens dentro da música aleatória. Uma delas utiliza processos fortuitos apenas na composição, resultando numa partitura fixa, executada sempre da mesma forma.

Outra abordagem, a forma aberta, introduz a aleatoriedade na performance: o compositor fornece excertos que o intérprete pode organizar livremente, criando uma estrutura variável a cada execução.

A notação indeterminada representa o extremo desta prática, substituindo a escrita tradicional por grafismos ou instruções ambíguas, atribuindo ao intérprete um papel criativo, essencial na interpretação sonora.

### 3 Contexto Histórico

#### 3.1 Primórdios

Um dos primeiros exemplos de ambiguidade na composição de uma peça remonta ao século XV, com Johannes Ockeghem e a sua *Missa Cuiusvis Toni*. Traduzindo o título, "Missa em qualquer tom", facilmente se compreende a intenção por trás desta: concebida de forma a que os intérpretes possam escolher em qual dos modos gregos a desejam interpretar. Todo este engenho foi, nitidamente, pensado, notando-se uma preocupação com a notação (evidente na Figura 3.1), cuidadosamente construída de forma ambígua, omitindo claves, armaduras ou qualquer outra informação que possa induzir o intérprete a assumir um modo similar ao pensado pelo compositor.

Fruto da sua ambiguidade, o resultado sonoro varia, significativamente, de acordo com o modo escolhido, afetando tanto a atmosfera geral da música, bem como a relação entre as vozes.



**Figura 3.1:** Abertura da *Missa Cuiusvis Toni*, Johannes Ockeghem (séc XV). [3]

#### 3.2 *Musikalisches Würfelspiel*

Avançando alguns séculos, mais precisamente até ao século XVIII, verifica-se a popularização de uma nova técnica de composição, *Musikalisches Würfelspiel* (Jogos de dados musicais). Publicado em 1757, por Johann Philipp Kirnberger, estes jogos facilmente se espalharam, sendo uma das técnicas de composição de vários ilustres compositores da época. Na verdade, esta técnica apresentou ainda uma maior abrangência, já que, desde a sua génese, foi pensada como uma técnica que permitisse a alguém laico criar a sua própria peça.

Embora existam inúmeras variações destes jogos, todos estes operam de forma semelhante. Primeiramente, deve compor-se uma série de compassos independentes, e, em seguida, numerá-los. Tendo assim definida a base da peça, segue-se a organização destes compassos numa tabela, associando cada um a um par de dados (como na Tabela 3.1). Como tal, as principais diferenças entre os jogos centra-se

nesta associação. Enquanto as versões mais simples fazem esta associação direta, outras, por exemplo, somam os dados, ou têm tabelas diferentes para cada compasso da peça final. Finalmente, lançam-se os dados e juntam-se os compassos escolhidos para formar a nova peça.

		Dado 1					
		1	2	3	4	5	6
Dado 2	1	6	7	24	27	28	16
	2	17	5	8	23	15	30
	3	29	18	4	9	22	33
	4	35	26	14	3	10	21
	5	25	13	31	36	19	11
	6	12	2	34	32	20	1

**Tabela 3.1:** Exemplo de possível *Musikalisches Würfelspiel*

Partindo do princípio de que se deseja compor seguindo a Tabela 3.1, e se pretende compor  $n$  compassos, estamos perante  $36^n$  possibilidades, todas estas equiprováveis, uma vez que se assume o dado 1 e 2 como distintos.

Um dos mais famosos apoiantes desta técnica foi Mozart, que também criou a sua própria versão em 1787<sup>1</sup>. Este jogo foi projetado com uma duração fixa de 32 compassos. A cada compasso, associam-se 11 potenciais excertos, distribuídos pelos números 2 a 12 - a soma de o lançamento de dois dados. Ou seja, há 11<sup>32</sup> possíveis composições se se seguir este modelo.

No entanto, repare-se que, visto que se utiliza a soma de dois dados, há composições mais prováveis que as demais. Na realidade, existem 36 possíveis combinações de dois dados (como verificado anteriormente). Contudo, apenas uma dá uma soma de 2, (1, 1). Por contraste, existem seis formas de se obter 7, {(1, 6); (2, 5); (3, 4); (4, 3); (5, 2); (6, 1)}. Ou seja, estamos perante uma probabilidade de  $\frac{1}{36}$  contra outra de  $\frac{6}{36}$ , 6 vezes superior. Como esta diferença é relativa a cada compasso, o seu efeito apenas se amplia com cada novo compasso gerado com este jogo.

### 3.3 Século XX

A aleatoriedade ganhou novo impulso no século XX, à medida que os movimentos modernistas procuravam romper com os modelos tradicionais da música ocidental. De "jogo estético", a música aleatória tornou-se campo de experimentação rigorosa, com forte diálogo com a matemática.

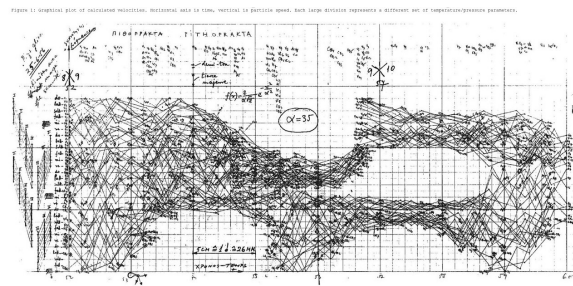
Entre muitas figuras centrais deste paradigma, pode destacar-se John Cage. Na sua obra *Music of Changes* (1951), usou o *I Ching* como mecanismo de geração aleatória de parâmetros musicais — duração, altura, dinâmica —, afastando o controlo composicional tradicional. Já em *4'33"* (1952), radicaliza o conceito: o silêncio do intérprete torna audível o acaso sonoro do ambiente, elevando o ruído quotidiano à categoria de material musical. Na Europa, Pierre Boulez e Karlheinz Stockhausen desenvolveram abordagens complementares. Boulez, com a *Troisième Sonate pour Piano* (1955–57),

<sup>1</sup>Note-se que o manuscrito (K. 516f) foi publicado por Nikolaus Simrock em 1792, um ano após a morte de Mozart. Na capa, este jogo foi creditado a Mozart, mas a autenticidade desta afirmação é debatida. No entanto, o seu valor histórico, quer pertença a Mozart ou não, é indiscutível e suficiente para garantir a sua inclusão neste trabalho.

introduziu a forma aberta, permitindo permutações na ordem das secções — ideia com paralelos em combinatória matemática. Stockhausen, por sua vez, em *Klavierstück XI* (1956), propôs uma leitura não-linear baseada em decisões probabilísticas, aproximando-se de processos estocásticos.

Iannis Xenakis, compositor e engenheiro grego radicado em França, representa, talvez, o expoente máximo da fusão entre música e matemática, no século XX. A sua formação em engenharia civil e arquitetura permitiu-lhe integrar ferramentas matemáticas avançadas no processo composicional.

Uma das suas obras mais emblemáticas, neste contexto, é *Pithoprakta* (1955–56), que significa literalmente “ações por probabilidade”. Inspirado pelo movimento browniano das partículas, Xenakis recorreu a modelos estatísticos da Física para determinar os parâmetros de execução das cordas — altura, ritmo, densidade e dinâmica. Cada instrumento representa uma partícula em movimento accidental e o resultado é uma massa sonora em constante transformação, construída a partir de distribuições gaussianas e processos estocásticos. Outra peça notável é *Achorripsis* (1956–57), onde aplica a teoria das probabilidades, segundo o modelo de Poisson, organizando o tempo e os eventos musicais com base em distribuições estatísticas. Em obras como *ST/10 – 1,080262* (1956), nota-se que o título se refere, diretamente, à estrutura combinatória usada na peça: 10 instrumentos, 1.080.262 possíveis configurações. Esta preocupação com o espaço combinatório e com o cálculo estrutural revela uma visão da música como sistema formal, próximo da lógica matemática.



**Figura 3.2:** *Pithoprakta* - Iannis Xenakis (1955–56) [4]

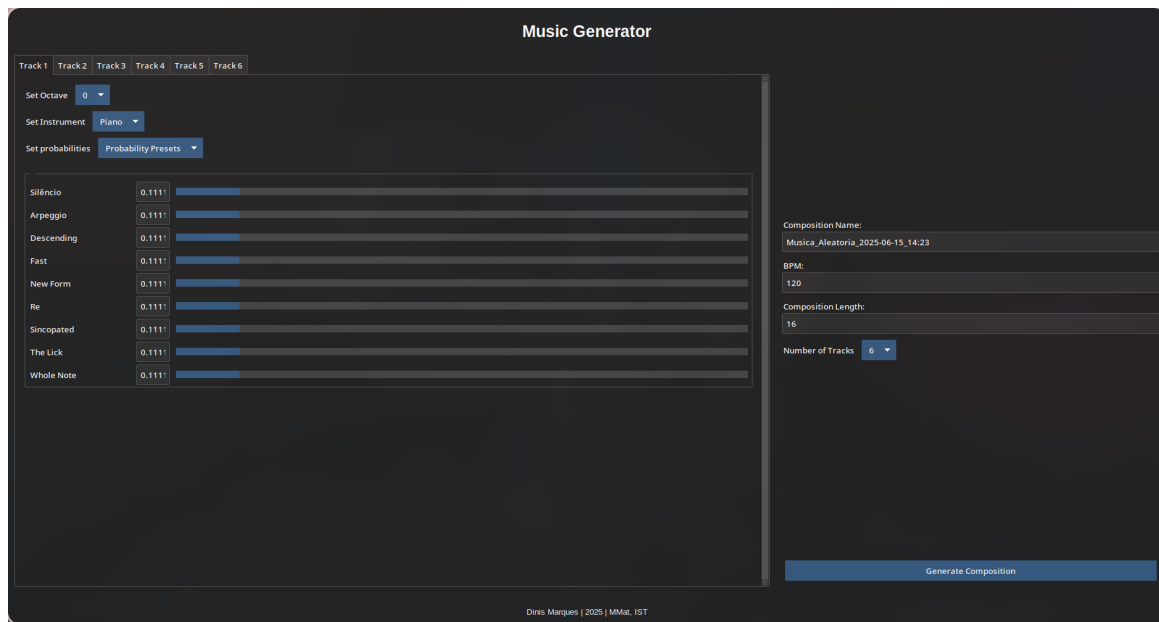
Na segunda metade do século XX, assistiu-se a uma proliferação destas práticas, com inúmeros compositores a explorarem a aleatoriedade como nova gramática musical. Mesmo fora da escola *avant-garde*, as ideias desenvolvidas, neste período, continuam a influenciar práticas contemporâneas — do experimentalismo à música eletrónica, mostrando o profundo enraizamento matemático na criatividade sonora moderna.

## 4 Music Generator

Inspirado por esta vertente musical tão associada a conceitos matemáticos, propus a criação de um programa musical que permitisse a criação de música aleatória, baseando-se na junção de excertos MIDI, segundo várias distribuições probabilísticas definidas pelo utilizador, formando uma composição única a cada utilização.

Para tal, foi projetado um programa em *Python* (com recurso ao *TKinter*), apelidado de *Music Generator*<sup>2</sup>. Este responsabiliza-se pela atribuição de probabilidades e junção de excertos disponibilizados pelo utilizador.

<sup>2</sup>Disponível online publicamente no Github (<https://github.com/Dinis-CM/music-generator>)



**Figura 4.1:** *Music Generator*

## 4.1 Requisitos

Para se obter o devido funcionamento do programa, deve correr-se o ficheiro *music\_generator.py*. No entanto, antes de tal, devem ser instaladas as bibliotecas *mido*, *ttkbootstrap* e *scipy*, assim como garantir que o *Python* instalado contém o módulo *TKinter*.

Para além disso, para criar os *inputs* do programa, bem como visualizar o *output*, aconselha-se ao utilizador a obtenção de um programa de edição de pautas musicais. Em princípio, qualquer programa que tenha a capacidade de importação MIDI funcionará. Contudo, *Music Generator* foi pensado tendo por base o programa gratuito *Muscore*, sendo que o seu funcionamento conjunto foi testado afincadamente.

## 4.2 Inputs

Para o programa, é considerado *input* todo o ficheiro MIDI presente na subpasta *inputs*, sendo estes importados para o programa com o mesmo nome que o ficheiro possui.

Todavia, para o correto funcionamento do programa, deve proceder-se a uma análise dos excertos que se pretendem importar. Estes devem seguir as seguintes regras:

- Deve ter apenas uma pauta;
- Deve ser apenas um compasso de 4/4;
- Não deverá incluir elementos atípicos;
- Não deverá exceder uma amplitude de 2 oitavas.



**Figura 4.2:** Exemplo de um excerto aceitável

### 4.3 Utilização

Ao correr o programa, o utilizador deparar-se-á com a interface gráfica explícita na Figura 4.1.

À esquerda, localiza-se um caderno com seis abas (*Tracks*), cada uma representando um instrumento/intérprete diferente. Todas as abas são idênticas e apresentam quatro elementos principais:

- *Set octave* - Permite seleccionar (entre 0 e 7) a oitava da nota mais grave, que será utilizada na geração musical daquele instrumento.
- *Set instrument* - Indica o nome da pauta e, simultaneamente, atribui-lhe um número de instrumento, segundo o padrão MIDI.
- *Set probabilities* - Opções de *presets* passíveis de aplicação na tabela de probabilidades desse instrumento<sup>3</sup>.
- Tabela de probabilidades - Indicação do nome do excerto, respetiva probabilidade, e representação gráfica em forma de barras da função probabilidade.

À direita, encontram-se os comandos relativos à composição em geral:

- *Composition Name* - Nome em que o ficheiro será guardado.
- *BPM* - Marcação de tempo da partitura.
- *Composition Length* - Número de compassos a serem gerados.
- *Number of Tracks* - Número das *tracks* a serem incluídas (de 1 até ao número indicado).

Em baixo, encontra-se o botão *Generate Composition*, que, ao ser pressionado, tenta gerar uma composição com os dados introduzidos pelo utilizador. Caso suceda, um novo ficheiro MIDI encontrar-se-á na subpasta *output* com o nome definido pelo utilizador.



**Figura 4.3:** Exemplo de *output* do *Music Generator*

<sup>3</sup>Devido a erros em soma aritmética de *floats*, por vezes é necessário proceder a ligeiras correções aquando da aplicação de *presets*



## 4.4 Funcionamento

Por detrás do programa, o que, realmente, se presencia é uma importação de cada ficheiro MIDI, utilizando a biblioteca *mido*. Esta converte o binário em texto, que pode ser lido e processado. Sendo assim, o conteúdo de cada mensagem de *note on/off* (mensagem do protocolo MIDI) é guardado, após algum tratamento, na estrutura definida por *Excerpt*. Estes excertos são, por sua vez, adicionados à estrutura *ExcerptCollection*, juntamente com um excerto especial que apenas contém silêncio.

Esta coleção de excertos é, então, copiada para cada pauta, definida pela estrutura *Track*. Em simultâneo, é inicializada uma estrutura *Composition*. Estas duas são responsáveis pelo armazenamento dos dados manipulados pelo utilizador, através da interface gráfica. Cada uma possui uma série de informação essencial: a *Track* guarda atributos específicos de cada pauta, como *name*, *midi\_number*, *input\_excerpts*, *excerpts*, *octave*, *probabilities*; enquanto a *Composition* guarda os atributos gerais - *name*, *bpm*, *length*, *tracks*.

Ao pressionar o botão *Generate Composition*, é ativada a função *generate*, a função-chave para o funcionamento do programa.

```

1  def generate(composition, tracks):
2      # Clear previous generations
3      composition.tracks = []
4      for track in tracks:
5          track.excerpts = []
6      # Generate excerpts for each track based on the probabilities
7      for n in range(composition.max_tracks):
8          chosen_excerpts = random.choices(tracks[n].input_excerpts.excerpts, weights=tracks[n].probabilities,
9          ↪ k=composition.length)
10         for chosen_excerpt in chosen_excerpts:
11             tracks[n].add_excerpt(chosen_excerpt)
12         composition.add_track(tracks[n])
13     # Set the name of the composition
14     composition.name=re.sub(r'[A-Za-z0-9_-\.\.]', '_', composition.name)
15     # Export the composition to a MIDI file
16     file_path = os.path.join("output", f"{composition.name}.mid")
17     export_file(file_path, composition)

```

Com a geração da composição, é exportado o ficheiro em formato MIDI, recorrendo, novamente, à biblioteca *mido*. Além das mensagens *note on/off* presentes nas nossas pautas, são também colocadas outras mensagens *meta* necessárias para um ficheiro de MIDI saudável.

Após todo este processo, obtém-se o resultado pretendido: a disponibilização de uma nova composição musical completamente aleatória.

## 4.5 A Matemática por trás

A base matemática do *Music Generator* assenta, essencialmente, na teoria das probabilidades, sendo esta a responsável pela seleção aleatória dos excertos musicais utilizados na composição final. Cada excerto é associado a uma determinada probabilidade (definida pelo utilizador), representando a sua probabilidade de ser escolhido a cada interação da geração musical.

A seleção dos excertos é realizada através da função *random.choices*, que permite efetuar sorteios ponderados, segundo um vetor de pesos. Matematicamente, este processo pode ser representado por

uma variável aleatória discreta  $X$ , onde cada valor  $x_i$  (excerto) tem associada uma probabilidade  $P(X = x_i) = p_i$ , sendo que:

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1. \quad (1)$$

Para cada compasso da composição, é realizada uma escolha aleatória, de acordo com esta distribuição.

A sequência de compassos da composição pode, assim, ser modelada por uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.), cada uma representando a escolha do excerto num dado instante:

$$X_1, X_2, \dots, X_L \sim \text{Distribuição}(p_1, p_2, \dots, p_n), \quad (2)$$

onde  $L$  representa o número total de compassos definidos pelo utilizador.

Para facilitar a criação de distribuições, o programa inclui, ainda, alguns *presets*, permitindo ao utilizador definir rapidamente um comportamento probabilístico comum: entre estes destacam-se a distribuição equiprovável, onde todos os excertos têm igual probabilidade, ou seja, para  $n$  excertos,

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad p_i = \frac{1}{n}; \quad (3)$$

tal como uma distribuição binomial, que é utilizada para favorecer excertos centrais ou extremos, modelando a distribuição das probabilidades, segundo a fórmula da distribuição binomial

$$p_i = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad (4)$$

onde valor de  $p$  pode ser ajustado para alterar a inclinação da distribuição.

No futuro, estas bases poderão ser estendidas para incluir dependências entre excertos ou transições condicionadas, promovendo uma maior coesão melódica e harmónica nas composições produzidas. Mesmo assim, esta abordagem já permite a criação de composições aleatórias controladas, com variação significativa e possibilidade de manipulação expressiva do estilo gerado.

## 5 Conclusão

A música aleatória, ao romper com os paradigmas tradicionais da composição, revela-se como uma ferramenta poderosa de exploração criativa, aliando arte, matemática e tecnologia. Através da história, desde os modos ambíguos do Renascimento até aos algoritmos do século XX, esta prática mostrou-se um reflexo da constante reinvenção da linguagem musical.

Com a criação do *Music Generator*, tentou prestar-se homenagem a essa tradição inovadora, oferecendo uma plataforma acessível, onde intérpretes e curiosos possam explorar, manipular e criar novas composições, a partir de elementos preexistentes. Mais do que um simples gerador aleatório, o programa pretende ser um espaço de experimentação, onde a escolha do utilizador, aliada ao acaso, dá origem a algo genuinamente novo.

A música gerada não pretende substituir a composição humana, mas, sim, dialogar com ela, abrindo portas não só a processos colaborativos entre criador e máquina como também expandindo os limites do que consideramos música.

## Referências

- [1] T. Riley, “In C,” *Musée d’art contemporain de Lyon*, 1964. URL: <https://www.navigart.fr/mac-lyon/artwork/terry-riley-in-c-music-score-80000000001034>.
- [2] E. Brown, “December 1952,” *UMS’nJIP*, 1952. URL: <http://umsnjip.ch/december1952.htm>.
- [3] J. Ockeghem, “Missa Cuiusvis Toni,” *Biblioteca Apostolica Vaticana*, URL: <https://www3.nd.edu/~ablachly/MUS20101/Manuscripts15.html>.
- [4] blessing5150, “‘Pithoprakta’ by Iannis Xenakis,” *Wordpress*, 2017. URL: <https://music77031su.wordpress.com/2017/04/02/pithoprakta-by-iannis-xenakis/>.
- [5] J. A. e Pablo Milrud, *A Harmonia é Numérica*. National Geographic, 2018.
- [6] Encyclopædia Britannica, “Aleatory Music,” *Encyclopædia Britannica*, 2017. URL: <https://www.britannica.com/art/aleatory-music>.
- [7] Wikipedia, “Aleatoric Music,” *Wikipedia*, 2025. URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Aleatoric\\_music](https://en.wikipedia.org/wiki/Aleatoric_music).
- [8] J. Ockeghem, “Missa Cuiusvis Toni,” *Clemens Goldberg*, 2024. URL: [https://imslp.org/wiki/Missa\\_cuiusvis\\_toni\\_\(Ockeghem%2C\\_Johannes\)](https://imslp.org/wiki/Missa_cuiusvis_toni_(Ockeghem%2C_Johannes)).
- [9] J. Jean, “What is Chance Music?” *Perennial Music and Arts*, 2019. URL: <https://www.perennialmusicandarts.com/post/what-is-chance-music>.
- [10] T. Connaghan, “What is Chance Music?” *Emastered*, 2024. URL: <https://emastered.com/blog/what-is-chance-music>.
- [11] M. Keary, “How The Classical Genre Pioneered Looping: Aleatoric Music,” *Youtube*, 2018. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=xabYn35ngaY>.
- [12] MasterClass, “Aleatoric Music Explained: 5 Examples of Indeterminate Music,” *MasterClass*, 2021. URL: <https://www.masterclass.com/articles/aleatoric-music-explained>.
- [13] J. Cage, “Music of Changes,” *Peters Edition*, 1952. URL: [https://www.johncage.org/pp/John-Cage-Work-Detail.cfm?work\\_ID=134](https://www.johncage.org/pp/John-Cage-Work-Detail.cfm?work_ID=134).