

## Relatório de Investigação Operacional | TP11-1

### Trabalho realizado por:

Ana Beatriz Santos | nº 119599

Dinis Oliveira | nº 119193

Diogo Santos | nº 113774

Guilherme Escórcio | nº 118648

Maria Luana Barata | nº 120488

Maxim Prots | nº 119703

### Introdução

A *TINTEX*, uma empresa de tintas, fabrica dois tipos de tinta, brilhante e mate, através da mistura de silicato e óleo de linhaça. Com diferentes proporções destes compostos, obtemos 4 tipos de soluções pré-misturadas - **tipo 1**, **tipo 2**, **tipo 3** e **tipo 4**. Na tabela seguinte, apresentam-se as proporções de silicato e óleo de linhaça de cada tipo de soluções pré-misturadas, assim como o preço do processo por litro de cada um destes tipos.

Processos	Concentrações dos 2 tipos de compostos presentes		Custo de cada processo (€/litro)
	Silicato	Óleo de linhaça	
Tipo 1	0,60	0,40	0,50
Tipo 2	0,30	0,70	0,75
Tipo 3	1,00	0,00	1,00
Tipo 4	0,00	1,00	1,50

Tinta brilhante (litro)	$\geq 0,25$	$\geq 0,50$
Tinta mate (litro)	$\geq 0,20$	$\leq 0,50$

**Tabela 1** - Dados relativos à composição de cada tipo (1, 2, 3 e 4) de solução pré-mistura (proporções de silicato e óleo de linhaça), assim como o custo do processo por litro de cada um. Concentrações necessárias dos dois compostos para o fabrico de tinta brilhante e de tinta mate, por litro.

A *TINTEX* tem como objetivo fabricar, por hora, 100 litros da tinta Brilhante e 250 litros da tinta Mate e, para tal, pretendem minimizar o custo total horário para a produção destes dois tipos de tinta, assegurando sempre as quantidades anteriormente referidas, como também garantindo as suas especificações.

a) **Formulação do problema como um modelo de Programação Linear:**

Após analisar a introdução, é possível perceber que estamos perante um problema de programação linear de minimização, sendo o nosso objetivo minimizar o custo total horário, resultante da produção dos dois tipos de tinta, através da mistura de silicato e óleo de linhaça.

- Definição das variáveis de decisão  $x_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ):

$x_1B$ : quantidade, em litros, de solução do (Tipo 1) usada, por hora, para fabricar Tinta Brilhante;

$x_2B$  : quantidade, em litros, de solução do (Tipo 2) usada, por hora, para fabricar Tinta Brilhante;

$x_3B$  : quantidade, em litros, de silicato puro (Tipo 3) usada, por hora, para fabricar Tinta Brilhante;

$x_4B$  : quantidade, em litros, de óleo de linhaça puro (Tipo 4) usada, por hora, para fabricar Tinta Brilhante;

$x_1M$  : quantidade, em litros, de solução do (Tipo 1) usada, por hora, para fabricar Tinta Mate;

$x_2M$  : quantidade, em litros, de solução do (Tipo 2) usada, por hora, para fabricar Tinta Mate;

$x_3M$  : quantidade, em litros, de silicato puro (Tipo 3) usada, por hora, para fabricar Tinta Mate;

$x_4M$  : quantidade, em litros, de óleo de linhaça puro (Tipo 4) usada, por hora, para fabricar Tinta Mate;

A mistura destas soluções será usada para produzir dois tipos de tinta:

$yB$ : litros de tinta Brilhante produzidos por hora  $yB = 100$ ;

$yM$ : litros de tinta Mate produzidos por hora  $yM = 250$ ;

- Função Objetivo  $Min Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$

$$Min Z(x) = 0.5(x_1B + x_1M) + 0.75(x_2B + x_2M) + 1(x_3B + x_3M) + 1.5(x_4B + x_4M) \text{ (€/litro)}$$

- Restrições funcionais  $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad i = 1, 2, \dots, m$
- Esta restrição significa que a soma dos litros das soluções Tipo 1, Tipo 2, silicato puro e óleo de linhaça puro usados na tinta Brilhante deve ser exatamente 100 litros.

$$R1: x_1B + x_2B + x_3B + x_4B = 100 \text{ (litros/hora)}$$

- Esta restrição significa que a soma dos litros das soluções Tipo 1, Tipo 2, silicato puro e óleo de linhaça puro usados na tinta Brilhante deve ser exatamente 250 litros.

$$R2: x_1M + x_2M + x_3M + x_4M = 250 \text{ (litros/hora)}$$

- Esta restrição surge devido à quantidade para a produção de silicato na Tinta Brilhante, pelo menos 25%.

$$R3: 0.35x_1B + 0.05x_2B + 0.75x_3B - x_4B \geq 0 \text{ (litros/hora)}$$

- Esta restrição surge devido à quantidade mínima de silicato que é necessário ser fornecido para a produção da Tinta Brilhante, pelo menos 50%.

$$R4: -0.1x_1B + 0.2x_2B - 0.5x_3B - 0.5x_4B \geq 0 \text{ (litros/hora)}$$

- Esta restrição surge devido à quantidade mínima de silicato que é necessário ser fornecido para a produção da Tinta Brilhante, pelo menos 20%.

$$R5: 0.4x_1M + 0.1x_2M + 0.8x_3M - 0.2x_4M \geq 0 \text{ (litros/hora)}$$

- Esta restrição surge devido à disponibilidade necessária de produção máxima de 50% de óleo de linhaça na Tinta Mate.

$$R6: -0.1x_1M + 0.2x_2M - 0.5x_3M - 0.5x_4M \leq 0(\text{litros/hora})$$

- Esta restrição de não negatividade surge porque as quantidades de soluções ou produtos puros usados na produção das tintas não podem ser negativas.

$$R7: x_1B, x_2B, x_3B, x_4B, x_1M, x_2M, x_3M, x_4M \geq 0$$

- Formulação do modelo de PL:

$$\text{Min } Z(x) = 0.5x_1B + 0.75x_2B + 1x_3B + 1.5x_4B + 0.5x_1M + 0.75x_2M + 1x_3M + 1.5x_4M \text{ (€/hora)}$$

$$x_1B + x_2B + x_3B + x_4B = 100(\ell/h)$$

$$x_1M + x_2M + x_3M + x_4M = 250(\ell/h)$$

$$0.35x_1B + 0.05x_2B + 0.75x_3B - x_4B \geq 0(\ell/h)$$

$$-0.1x_1B + 0.2x_2B - 0.5x_3B - 0.5x_4B \geq 0(\ell/h)$$

$$0.4x_1M + 0.1x_2M + 0.8x_3M - 0.2x_4M \geq 0(\ell/h)$$

$$-0.1x_1M + 0.2x_2M - 0.5x_3M - 0.5x_4M \leq 0(\ell/h)$$

$$x_1B, x_2B, x_3B, x_4B, x_1M, x_2M, x_3M, x_4M \geq 0$$

## b) Solução Ótima

Para utilizar o Solver, começou-se por introduzir numa folha de Excel os dados relevantes, bem como as fórmulas correspondentes às restrições e à função objetivo, que se encontram compiladas na Tabela 2. Através da resolução do problema com o Solver, foi possível obter a solução e o valor ótimos, bem como os relatórios de resposta, sensibilidade e limites (Fig. 1, 2 e 3)

Variáveis	$x_1B$	$x_2B$	$x_3B$	$x_4B$	$x_1M$	$x_2M$	$x_3M$	$x_4M$	Total		Limite
Qtde. Tinta Brilhante	1	1	1	1	0	0	0	0	100	$\geq$	100
Silicato na Brilhante	0.35	0.05	0.75	-0.25	0	0	0	0	25	$\geq$	0
Óleo Linhaça na Brilhante	-0.1	0.2	-0.5	0.5	0	0	0	0	1.8E-15	$\geq$	0
Qtde. Tinta Mate	0	0	0	0	1	1	1	1	250	$\geq$	250
Silicato na Mate	0	0	0	0	0.4	0.1	0.8	-0.2	100	$\geq$	0
Óleo Linhaça na Mate	0	0	0	0	-0.1	0.2	-0.5	0.5	-25	$\leq$	0
Custo Total	0.5	0.75	1	1.5	0.5	0.75	1	1.5	183.333		
Qtde. produtos adquiridos	66.667	33.333	0	0	250	0	0	0			

**Tabela 2** - Apresenta os resultados da resolução do modelo de Programação Linear utilizando o Solver do Excel. Os valores indicam a alocação ótima das soluções pré-misturadas e dos componentes puros (silicato e óleo de linhaça) na produção de tintas brilhante e mate. A tabela inclui as restrições aplicadas, os limites estabelecidos e os valores obtidos para a função objetivo, permitindo analisar o custo mínimo de produção e a utilização eficiente dos recursos.

- **Relatório de Resposta:**

Objective Cell (Min)

Cell	Name	Original Value	Final Value
\$J\$8	Custo Total Total	125	183,3333333

Variable Cells

Cell	Name	Original Value	Final Value	Integer
\$B\$9	Variáveis de Decisão $x_1$ B	0	66,66666667	Contin
\$C\$9	Variáveis de Decisão $x_2$ B	0	33,33333333	Contin
\$D\$9	Variáveis de Decisão $x_3$ B	0	0	Contin
\$E\$9	Variáveis de Decisão $x_4$ B	0	0	Contin
\$F\$9	Variáveis de Decisão $x_1$ M	250	250	Contin
\$G\$9	Variáveis de Decisão $x_2$ M	0	0	Contin
\$H\$9	Variáveis de Decisão $x_3$ M	0	0	Contin
\$I\$9	Variáveis de Decisão $x_4$ M	0	0	Contin

Constraints

Cell	Name	Cell Value	Formula	Status	Slack
\$J\$2	Qtde. Tinta Brilhante Total	100	\$J\$2=\$L\$2	Binding	0
\$J\$3	Silicato na Brilhante Total	25	\$J\$3>=\$L\$3	Not Bindin	25
\$J\$4	Óleo Linhaça na Brilhante To	-4,44089E-15	\$J\$4>=\$L\$4	Binding	0
\$J\$5	Qtde. Tinta Mate Total	250	\$J\$5=\$L\$5	Binding	0
\$J\$6	Silicato na Mate Total	100	\$J\$6>=\$L\$6	Not Bindin	100
\$J\$7	Óleo Linhaça na Mate Total	-25	\$J\$7<=\$L\$7	Not Bindin	25

**Fig. 1** – Relatório de resposta produzido pelo solver do Excel que contém primeiramente a **célula de objetivo**, seguido das **células de variável** e por fim as **restrições**.

- **Relatório de Sensibilidade:**

Variable Cells

Cell	Name	Final Value	Reduced Cost	Objective Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
\$B\$9	Variáveis de Decisão $x_1B$	66,66666667	0	0,5	0,25	1E+30
\$C\$9	Variáveis de Decisão $x_2B$	33,33333333	0	0,75	1E+30	0,25
\$D\$9	Variáveis de Decisão $x_3B$	0	0,833333333	1	1E+30	0,833333333
\$E\$9	Variáveis de Decisão $x_4B$	0	1,333333333	1,5	1E+30	1,333333333
\$F\$9	Variáveis de Decisão $x_1M$	250	0	0,5	0,25	1E+30
\$G\$9	Variáveis de Decisão $x_2M$	0	0,25	0,75	1E+30	0,25
\$H\$9	Variáveis de Decisão $x_3M$	0	0,5	1	1E+30	0,5
\$I\$9	Variáveis de Decisão $x_4M$	0	1	1,5	1E+30	1

Constraints

Cell	Name	Final Value	Shadow Price	Constraint R.H. Side	Allowable Increase	Allowable Decrease
\$J\$2	Qtde. Tinta Brilhante Total	100	0,583333333	100	1E+30	100
\$J\$3	Silicato na Brilhante Total	25	0	0	25	1E+30
\$J\$4	Óleo Linhaça na Brilhante Tot	-4,44089E-15	0,833333333	0	20	10
\$J\$5	Qtde. Tinta Mate Total	250	0,5	250	1E+30	250
\$J\$6	Silicato na Mate Total	100	0	0	100	1E+30
\$J\$7	Óleo Linhaça na Mate Total	-25	0	0	1E+30	25

**Fig. 2** – Relatório de sensibilidade produzido pelo solver do Excel que contém primeiramente as **células de variável** e por fim as **restrições**.

- **Relatório de Limites:**

Objective		
Cell	Name	Value
\$J\$8	Custo Total Total	183,3333333

  

Variable			Lower Limit	Objective Result	Upper Limit	Objective Result
Cell	Name	Value				
\$B\$9	Variáveis de Decisão $x_1$	66,66666667	66,66666667	183,3333333	66,66666667	183,3333333
\$C\$9	Variáveis de Decisão $x_2$	33,33333333	33,33333333	183,3333333	33,33333333	183,3333333
\$D\$9	Variáveis de Decisão $x_3$	0	0	183,3333333	0	183,3333333
\$E\$9	Variáveis de Decisão $x_4$	0	0	183,3333333	0	183,3333333
\$F\$9	Variáveis de Decisão $x_1$	250	250	183,3333333	250	183,3333333
\$G\$9	Variáveis de Decisão $x_2$	0	-5,68434E-14	183,3333333	-5,68434E-14	183,3333333
\$H\$9	Variáveis de Decisão $x_3$	0	-5,68434E-14	183,3333333	-5,68434E-14	183,3333333
\$I\$9	Variáveis de Decisão $x_4$	0	-5,68434E-14	183,3333333	-5,68434E-14	183,3333333

**Fig. 3** – Relatório de limites produzido pelo solver do Excel.

c) **Análise dos Resultados Obtidos**

**Solução Ótima**

Quantidade de produtos adquiridos:

$$X_1B^* = 66; X_2B^* = 34; X_3B^* = 0; X_4B^* = 0$$

$$X_1B^* = 250; X_2M^* = 0; X_3M^* = 0; X_4M^* = 0$$

**Valor Ótimo**

$$Z^* = 183.35 \text{ (€/hora)}$$



## Interpretação da Solução

Com base nos resultados obtidos pelo Solver, a solução ótima para minimizar o custo total de aquisição dos insumos para a produção da TINTEX é:

- **66.67 litros/hora da solução Tipo 1 e 33.33 litros/hora da solução Tipo 2** para a tinta Brilhante.
- **250 litros da solução Tipo 1** para a tinta Mate.
- **Nenhuma compra dos produtos puros de silicato ou óleo de linhaça.**
- O custo mínimo para atender às necessidades de produção é **183.3€**.

## Cálculo das Variáveis de Folga

As restrições e suas variáveis de folga são analisadas a seguir:

### 1. Quantidade mínima de silicato na Brilhante

$$0.35(66.66) + 0.05(33.33) + 0.75(0) - 0.25(0) + S_1 = 25$$

$$S_1 = 0 \rightarrow \text{Recurso Escasso}$$

### 2. Quantidade mínima de óleo de linhaça na Brilhante

$$-0.1(66.66) - 0.2(33.33) - 0.5(0) + 0.5(0) + S_2 = 50$$

$$S_2 = 63.2 \rightarrow \text{Recurso Abundante}$$

### 3. Quantidade mínima de silicato na Mate

$$0.4(250) + 0.1(0) + 0.8(0) - 0.2(0) + S_3 = 50$$

$$S_3 = -50 \rightarrow \text{Recurso Abundante}$$

### 4. Quantidade máxima de óleo de linhaça na Mate

$$-0.1(250) + 0.2(0) - 0.5(0) + 0.5(0) + S_4 = 125$$

$$S_4 = -25 \rightarrow \text{Recurso Abundante}$$

## Classificação dos Recursos

- **Escassos:** Silicato na Brilhante, Silicato na Mate
- **Abundante:** Óleo de linhaça na Brilhante, Óleo de linhaça na Mate

Quando a variável de folga é **0**, o recurso é **escasso**. Quando atinge um valor negativo ou máximo permitido, significa que o recurso é **abundante**.

Assim, a empresa pode focar em estratégias para otimizar o uso do óleo de linhaça e encontrar alternativas para aumentar a disponibilidade do silicato, caso queira reduzir custos adicionais no futuro.

#### d) Formulação dual do problema

A cada problema de Programação Linear (PL) está associado um problema dual, que também é considerado um problema de PL que permite uma nova perspetiva sobre a otimização. Desta forma os problemas de otimização podem ser analisados de duas perspetivas. Como o problema inicial era de minimização, o seu dual será de maximização.

Este é constituído por:

- 6 variáveis:  $y_1; y_2; y_3; y_4; y_5; y_6$
- 8 restrições
- Função Objetivo:  $\text{Max } W(y) = 100y_1 + 259y_2$  (€/litro)
- Formulação:

$$\begin{aligned}
 \text{s.a: } y_1 + 0.35y_3 - 0.1y_4 &\leq 0.5 \\
 y_1 + 0.05y_3 + 0.2y_4 &\leq 0.75 \\
 y_1 + 0.75y_3 - 0.5y_4 &\leq 1.0 \\
 y_1 - 0.3y_3 - 0.5y_4 &\leq 1.5 \\
 +y_2 &+ 0.4y_5 - 0.1y_6 \leq 0.5 \\
 +y_2 &+ 0.1y_5 + 0.2y_6 \leq 0.75 \\
 +y_2 &+ 0.8y_5 - 0.5y_6 \leq 1.0 \\
 +y_2 &- 0.2y_5 + 0.5y_6 \leq 1.5
 \end{aligned}$$

$$y_1, y_2 - \text{livres}; y_3, y_4, y_5 \geq 0; y_6 \leq 0$$

#### e) Análise e descrição da solução obtida para o modelo dual

A fig. 2 (relatório de sensibilidade do Solver), permite-nos ler a solução dual na coluna relativa aos preços-sombra da tabela de restrições. Esses valores que retiramos da tabela são os valores ótimos das variáveis duais, sendo que, para este problema, foram obtidos os seguintes:

$y_1 = 0,583333333$ , logo o lucro total aumenta cerca de 0.58€ por cada 1 hora a mais no recurso “tinta brilhante total”.

$y_2 = 0$ , logo não há variação no lucro total diário perante alterações na quantidade de horas no recurso “**silicatos na brilhante total**”, pois o preço sombra é zero.

$y_3 = 0,833333333$ , logo o lucro total aumenta cerca de 0.83€ por cada 1 hora a mais no recurso “**óleo de linhaça na brilhante total**”.

$y_4 = 0,5$ , logo o lucro total aumenta 0.5€ por cada unidade 1 hora a mais no recurso “**tinta mate total**”.

$y_5 = 0$ , logo não há variação no lucro total diário perante alterações na quantidade de horas no recurso “**silicato na mate total**”, pois o preço-sombra é zero.

$y_6 = 0$ , logo não há variação no lucro total diário perante alterações na quantidade de horas no recurso “**óleo de linhaça na mate total**”, pois o preço-sombra é zero.

Pelo valor das variáveis de folga do modelo dual é nos possível obter o **custo de oportunidade**, embora este não nos dê uma informação tão direta como o preço sombra das restrições do modelo primal, apesar de estar diretamente ligado. Este representa a perda do potencial ganho ao não aumentar a disponibilidade de um recurso escasso.

Podemos concluir que os **recursos escassos** têm **custo de oportunidade positivo** – são limitantes na produção e qualquer aumento na sua disponibilidade pode melhorar o lucro, por exemplo, se conseguirmos mais 1 unidade de tinta brilhante o lucro total aumentaria 0,58€/h.

Pela mesma lógica, os **recursos abundantes não geram custo de oportunidade** – já há mais do que seria necessário disponível, ou seja, há sobra de capacidade, logo aumentar a sua quantidade não afetaria o lucro.

**f) Apresente a análise de sensibilidade do modelo formulado na alínea a), nomeadamente:**

**i.. aos termos independentes: quantidade a produzir de cada tipo de tinta, percentagens de silicato e de óleo de linhaça em cada tipo de tinta;**

Nome	Restrições Lado Direito	Aumento Admissível	Diminuição Admissível	Limite Inferior	Limite Superior	Intervalo de Estabilidade
Qtda. Tinta Brilhante Total	100	1E+30	100	0	$\infty$	$[0;\infty[$
Silicato na Brilhante Total	0	25	1E+30	$-\infty$	25	$] -\infty; 25]$
Óleo Linhaça na Brilhante Total	0	20	10	-10	20	$[-10; 20]$
Qtde. Tinta Mate Total	250	1E+30	250	0	$\infty$	$[0;\infty[$
Silicato na Mate Total	0	100	1E+30	$-\infty$	100	$] -\infty; 100]$
Óleo Linhaça na Mate Total	0	1E+30	25	-25	$\infty$	$[-25;\infty[$

Os valores apresentados na coluna Restrições Lado Direito da Tabela 4. podem ser reduzidos dentro dos limites indicados na coluna Diminuição Admissível ou aumentados dos limites especificados na coluna Aumento Admissível. Em outras palavras, esses valores podem variar dentro de uma faixa específica, definida pelos limites inferiores e superiores

Resumindo, se os termos independentes das restrições — como a **Quantidade de Tinta Brilhante Total**, os **Silicatos na Tinta Brilhante Total**, o **Óleo de Linhaça na Tinta Brilhante Total**, a **Quantidade de Tinta Mate Total**, os **Silicatos na Tinta Mate Total** e o **Óleo de Linhaça na Tinta Mate Total** — variarem dentro dos intervalos de estabilidade correspondentes, a base da solução ótima permanecerá inalterada. No entanto, se houver mudanças nos termos independentes das restrições fora desses intervalos, isso poderá levar a alterações no conjunto de soluções possíveis.

ii. aos coeficientes da função objetivo: custos unitários de cada “fonte” possível para obtenção do silicato e do óleo de linhaça.

Objetivo Coeficiente	Aumento Admissível	Diminuição Admissível	Limite Inferior	Limite Superior	Intervalo de Estabilidade
0,5	0,25	1E+30	$-\infty$	0,75	$]-\infty;0,75]$
0,75	1E+30	0,25	0,5	$\infty$	$[0,5;\infty[$
1	1E+30	0,833	0,167	$\infty$	$[0,167;\infty[$
1,5	1E+30	1,333	0,167	$\infty$	$[0,167;\infty[$
0,5	0,25	1E+30	$-\infty$	0,75	$]-\infty;0,75]$
0,75	1E+30	0,25	0,5	$\infty$	$[0,5;\infty[$
1	1E+30	0,5	0,5	$\infty$	$[0,5;\infty[$
1,5	1E+30	1	0,5	$\infty$	$[0,5;\infty[$

**Tabela 5** – Parâmetros do Relatório de Sensibilidade retirado do Excel/Solver (Células de Variável) e respetivos intervalos de estabilidade.

Os valores correntes são apresentados na coluna Objetivo Coeficiente da Tabela 5 e os acréscimos e decréscimos permitidos, nas colunas Aumento Admissível e Diminuição Admissível, respetivamente. A estabilidade da solução ótima depende das variações nos coeficientes da função objetivo dentro destes intervalos indicados. As pequenas variações dentro destas faixas não alteram a solução ótima, mas ultrapassar esses limites leva a uma mudança na base ótima e, possivelmente, na estratégia de produção.