Д. Л. Берман, О распределении узлов в интерполяционном процессе С. Н. Бернштейна, *Изв. вузов. Матем.*, 1957, номер 1, 35–43

Д. Л. Берман

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ УЗЛОВ В ИНТЕРПОЛЯЦИОННОМ ПРОЦЕССЕ С. Н. БЕРНШТЕЙНА

1°. Пусть заданы треугольная матрица узлов

$$\begin{array}{l} x_1^{(1)}, \\ x_1^{(2)},\ x_2^{(2)}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_1^{(n)},\ x_2^{(n)}, \ldots\ x_n^{(n)}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array} \tag{1}$$

$$-1 \leqslant x_1^{(n)} < x_2^{(n)} < \ldots < x_n^{(n)} \leqslant 1,\ n = 1, 2, \ldots$$

и функция $f(x)$, определенная на отрезке $[-1, 1]$. Обозначим через $L_n(f, x)$ интерполяционный полином Лагранжа степени $(n-1)$, построенный для n-й строчки матрицы (1) и для функции $f(x)$. Как известно,

$$L_n(f, x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k^{(n)})\, l_k^{(n)}(x),$$

где *

$$l_k^{(n)}(x) = \frac{\omega_n(x)}{(x - x_k^{(n)})\, \omega_n'(x_k^{(n)})}\ ; \quad \omega_n(x) = \prod_{k=1}^{n} (x - x_k^{(n)}).$$

Согласно классическому результату акад. С. Н. Бернштейна и Г. Фабера, не существует матрицы вида (1), при которой для любой непрерывной функции выполняется равномерно в $[-1, 1]$ соотношение

$$L_n(f, x) \to f(x),\ n \to \infty.$$

В связи с этим отрицательным результатом представляет интерес интерполяционный процесс $\{A_n(f, x)\}_{n=1}^{\infty}$ С. Н. Бернштейна, который определяется по закону:

$$A_n(f, x) = {\sum_{j=1}^{n}}' f(x_j)\, r_j(x);\ \ r_j(x) = l_j(x) + (-1)^{j-1}\, l_{2pt_j}(x), \tag{2}$$

где p — произвольное фиксированное натуральное число.

Целое число t_j определяется однозначно из неравенств

$$2p(t_j - 1) < j < 2pt_j.$$

* Ради простоты письма мы опускаем верхний индекс n.

Штрих в сумме (2) указывает на то, что j принимает все целые значения от 1 до n, за исключением чисел, кратных $2p$. Если $2pt_j > n$, то мы считаем $l_{2pt_j}(x)=0$. Полиномы $A_n(f, x)$ обладают двумя важными свойствами:

1) Можно указать весьма обширный класс матриц узлов вида (1), при котором для любой непрерывной в $[-1, 1]$ функции $f(x)$ имеет место равномерно соотношение [1—3].

$$A_n(f, x) \to f(x), \ n \to \infty, \ -1 \leqslant x \leqslant 1. \tag{3}$$

2) Отношение степени полинома $A_n(f, x)$ к числу его узлов сколь угодно близко к 1, если только p достаточно велико.

С другой стороны, в случае равноотстоящих узлов отрезка $[-1, 1]$, процесс $A_n(f, x)$, построенный для функции $f(x) \equiv x$, расходится во всех точках $x \neq 0$ из интервала $(-1, 1)$. Сходимость же интерполяционного процесса Лагранжа в этом случае тривиальна, ибо

$$L_n(f, x) \equiv f(x), \ n=2, 3, \dots$$

В связи с указанными фактами возникает естественный вопрос: какова должна быть матрица узлов (1), чтобы для любой непрерывной функции выполнялось равномерно соотношение (3)?

Настоящая заметка и посвящена этому вопросу.

2°. Положим

$$x_k^{(n)} = \cos \theta_k^{(n)}; \ k=1, 2, \dots n; \ n=1, 2, \dots$$

Тогда очевидно, что

$$\pi \geqslant \theta_1^{(n)} > \theta_2^{(n)} > \dots > \theta_n^{(n)} \geqslant 0; \ n=1, 2, \dots$$

Мы будем говорить, что узлы $\{x_k^{(n)}\}_{k=1}^n$, $n=1, 2, \dots$ квазиравномерно распределены на полуокружности, если существуют такие положительные константы c_1 и c_2, не зависящие от n, что выполняются неравенства

$$\frac{c_1}{n} \leqslant \theta_v^{(n)} - \theta_{v+1}^{(n)} \leqslant \frac{c_2}{n}; \ v=1, 2, \dots (n-1); \ n=2, 3, \dots \tag{4}$$

Теорема 1. *Пусть фундаментальные полиномы интерполяционного процесса $\{A_n(f, x)\}_{n=1}^\infty$ С. Н. Бернштейна ограничены в совокупности, то есть*

$$|r_j^{(n)}(x)| \leqslant c_3; \ -1 \leqslant x \leqslant 1; \ j=1, 2, \dots; n=1, 2, \dots \tag{5}$$

где c_3 не зависит от x и n, и j принимает все целые значения от 1 до n, за исключением чисел, кратных $2p$. Тогда узлы полиномов $\{A_n(f, x)\}_{n=1}^\infty$ квазиравномерно распределены на полуокружности.

Доказательство. Мы пользуемся известным методом П. Эрдеша и П. Турана [5].

Пусть $2pt_j < j < j+1 < 2p(t_j+1)$, тогда по теореме о среднем значении

$$\frac{1}{\theta_j - \theta_{j+1}} = \frac{r_j(\cos\theta_j) - r_j(\cos\theta_{j+1})}{\theta_j - \theta_{j+1}} = \frac{dr_j(\cos\theta)}{d\theta}\bigg|_{\theta=\bar{\sigma}}, \tag{6}$$

где $\bar{\sigma}$ находится между θ_{j+1} и θ_j. Так как $r_j(\cos\theta)$ — косинус полином порядка $\leqslant n-1$, то, согласно теореме С. Н. Бернштейна и неравенству (5), имеем

$$\left|\left(\frac{dr_j(\cos\theta)}{d\theta}\right)_{\theta=\bar{\sigma}}\right| \leqslant c_3(n-1). \tag{7}$$

Из (6) и (7) вытекает, что

$$\theta_j - \theta_{j+1} \geqslant \frac{c_1}{n}. \tag{8}$$

Аналогичным образом рассматривается случай, когда θ_j и θ_{j+1} из различных групп *. Итак, левые неравенства из (4) доказаны.

Значительно сложнее доказываются правые неравенства из (4). Положим

$$\max_{i=1,\,2,\,\ldots\,(n-1)} \left\{(\theta_i^{(n)} - \theta_{i+1}^{(n)})\right\} = \theta_q^{(n)} - \theta_{q+1}^{(n)} = \frac{2\psi(n)}{n+1};$$

$$t_1^{(n)} = \frac{\theta_q^{(n)} + \theta_{q+1}^{(n)}}{2}; \quad \zeta_1 = \cos t_1^{(n)}.$$

Так как

$$\sum_{i=2}^{n} (\theta_{i-1} - \theta_i) \leqslant \pi, \quad \text{то} \quad \psi(n) \geqslant \frac{\pi}{3}.$$

Без ограничения общности можно считать, что $0 \leqslant t_1^{(n)} \leqslant \frac{\pi}{2}$. Очевидно, нам нужно доказать, что $\psi(n) \leqslant C$, $n = 1, 2, \ldots$, где C — константа **.

Будем различать два случая.

Случай А. Существует такое натуральное число $r_0 > 2$, не зависящее от n, что

$$|\, l_k^{(n)}(\cos t_1^{(n)}) \,| \leqslant n^{r_0} |\, t_1^{(n)} - \theta_k^{(n)} \,|^{r_0}, \; k = 1, 2, \ldots n; \; n = 1, 2, \ldots \tag{9}$$

Тогда положим

$$R(x) = R(\cos\theta) = K_n(\theta + t_1) + K_n(\theta - t_1),$$

где $K_n(t)$ — ядро Джексона

$$K_n(t) = \frac{1}{m^{r_0+2}} \left(\frac{\sin\frac{mt}{2}}{\sin\frac{t}{2}} \right)^{r_0+2}, \quad m = \left[\frac{2n-2}{r_0+2}\right].$$

Нетрудно видеть, что

$$|\, R(x_j^{(n)}) \,| \leqslant \frac{C}{n^{r_0+2} \,|\, \theta_j^{(n)} - t_1^{(n)} \,|^{r_0+2}}; \; j = 1, 2, \ldots n; \; n = 1, 2, \ldots$$

Так как $R(x)$ — полином степени $\leqslant n-1$, то

$$R(x) = \sum_{j=1}^{n} R(x_j^{(n)})\, l_j^{(n)}(x).$$

---

* Точки $\left\{x_{2pt}^{(n)}\right\}$ мы не рассматриваем, поскольку они не являются узлами полиномов $\left\{A_n(f, x)\right\}$.

** В дальнейшем мы опускаем индексы у констант C.

Отсюда, если учесть, что $R(\cos t_1^{(n)}) \geqslant 1$, получим неравенство

$$\frac{C}{n^{r_0+2}} \sum_{j=1}^{n} \frac{|l_j^{(n)}(\cos t_1^{(n)})|}{|\theta_j - t_1|^{r_0+2}} \geqslant 1. \tag{10}$$

Из (9) и (10) следует, что

$$\frac{C}{n^2} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{|\theta_j - t_1|^2} \geqslant 1. \tag{11}$$

Но из определения $t_1^{(n)}$ и неравенств (8) вытекает, что

$$|\theta_j - t_1| \geqslant \frac{\psi(n) + |j-q| C_1}{n}, \quad j = 1, 2, \ldots n. \tag{12}$$

Неравенства (11) и (12) приводят к заключению, что

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{[\psi(n) + |j-q| C_1]^2} \geqslant 1.$$

Значит, $\psi(n) \leqslant C$, $n = 1, 2, \ldots$ Таким образом, в этом случае теорема доказана.

Случай В. Существует хоть одно такое k, что

$$|l_k^{(n)}(\zeta_1)| > n^{r_0} |t_1^{(n)} - \theta_k^{(n)}|^{r_0}. \tag{13}$$

В этом случае наши рассуждения зависят от расположения отрезка $[x_k, x_{2pt_k}]$ относительно отрезка $[x_q, x_{q+1}]$. Возможны лишь следующие расположения:

Первое расположение. $x_q < x_{q+1} \leqslant x_k < {}_{2pt_k}$.

Второе расположение. $x_k \leqslant x_q < x_{q+1} \leqslant x_{2pt_k}$.

Третье расположение. $x_k < x_{2pt_k} \leqslant x_q < x_{q+1}$.

Предварительно заметим, что равенство (2) можно написать в виде

$$r_k(x) = l_k(x)\, b_k(x);$$

$$b_k(x) = 1 - a\frac{x - x_k}{x - x_{2pt_k}}; \quad a = (-1)^{k-1} \frac{\omega_n'(x_k)}{\omega_n'(x_{2pt_k})} > 0.$$

Мы ограничимся здесь исследованием лишь случая $0 < a \leqslant 1$, ибо случай $a > 1$ исследуется аналогичным образом *.

Для определенности будем считать, что $x_k > 0$. При первом расположении мы имеем:

$$0 < b_k(\zeta_1) \geqslant 1 - \frac{\zeta_1 - x_k}{\zeta_1 - x_{2pt_k}},$$

поэтому

$$\frac{1}{b_k(\zeta_1)} \leqslant \frac{\cos\theta_{2ptk} - \cos t_1}{\cos\theta_{2pt_k} - \cos\theta_k}.$$

* Это непосредственно следует из сравнения графиков функции $b_k(x)$ при $0 < a < 1$ и $a > 1$.

Но легко проверить, что, если $0 \leqslant \alpha < \beta < \gamma \leqslant \pi$, то

$$\left|\frac{\cos\alpha - \cos\gamma}{\cos\alpha - \cos\beta}\right| \leqslant \frac{\pi^2}{4}\left(\frac{\alpha-\gamma}{\alpha-\beta}\right)^2,$$

Стало быть,

$$\frac{1}{b_k(\zeta_1)} \leqslant \frac{\pi^2}{4}\left(\frac{\theta_{2pt_k} - t_1}{\theta_{2pt_k} - \theta_k}\right)^2. \tag{14}$$

Заметим, что

$$\frac{t_1 - \theta_{2pt_k}}{\theta_k - \theta_{2pt_k}} = 1 + \frac{t_1 - \theta_k}{\theta_k - \theta_{2pt_k}}. \tag{15}$$

Кроме того, из неравенств (8) вытекает, что

$$\theta_k - \theta_{2pt_k} > (2pt_k - k - 1)\frac{C_1}{n}. \tag{16}$$

Очевидно, что в силу неравенств (16) и (15), мы получаем, что

$$\frac{t_1 - \theta_{2pt_k}}{\theta_k - \theta_{2pt_k}} < 1 + Cn(t_1 - \theta_k), \tag{17}$$

ибо $2pt_k - k - 1 \geqslant 1$.

Можно считать, что $1 \leqslant Cn(t_1 - \theta_k)$, ибо в противном случае

$$t_1 - \theta_k < \frac{C}{n}, \tag{18}$$

а отсюда, вследствие того, что

$$t_1 - \theta_k \geqslant \frac{\theta_q - \theta_{q+1}}{2}, \tag{19}$$

уже следует неравенство

$$\theta_q - \theta_{q+1} < \frac{C}{n}. \tag{20}$$

Итак, из неравенства (17) вытекает, что

$$\frac{t_1 - \theta_{2pt_k}}{\theta_k - \theta_{2pt_k}} < Cn(t_1 - \theta_k),$$

а тогда из (14) следует, что

$$\frac{1}{b_k(\zeta_1)} \leqslant Cn^2(t_1 - \theta_k)^2. \tag{21}$$

Согласно предположению

$$n^{r_0}(t_1 - \theta_k)^{r_0} < \frac{|r_k(\zeta_1)|}{b_k(\zeta_1)}. \tag{22}$$

Отсюда следует, в силу неравенств (5) и (21), что

$$n^{r_0}(t_1 - \theta_k)^{r_0} < Cn^2(t_1 - \theta_k)^2.$$

Стало быть

$$t_1 - \theta_k < \frac{C}{n},$$

то есть мы получили неравенство (18), а из него, как уже было отмечено, следует неравенство (20).

Переходим ко второму расположению.

Поскольку $b_k(x)$ — возрастающая функция и $b_k(x_k)=1$, то при втором расположении $b_k(\zeta_1)>1$, поэтому из неравенств (5) и (22) непосредственно вытекает, что

$$\theta_k - t_1 < \frac{C}{n},$$

а отсюда уже следует (20).

Прежде чем перейти к третьему расположению, сформулируем следующую известную лемму [5].

Лемма. *Пусть $f(\theta)$ — косинус полином порядка m, корни которого $\{\psi_i\}$ простые и вещественные*

$$0 \leqslant \psi_1 < \psi_2 < \ldots < \psi_m \leqslant \pi.$$

Тогда, если $|f(\theta)|$ достигает своего наибольшего значения в $[\psi_q, \psi_{q+1}]$, то для любой точки ξ из $[\psi_q, \psi_{q+1}]$ существует интервал l такой, что

1) *l лежит в $[\psi_q, \psi_{q+1}]$;*
2) *ξ является концом интервала l;*
3) *Длина интервала l больше $\frac{1}{2m}$;*
4) *Для любой точки θ из интервала l имеет место неравенство $|f(\theta)| \geqslant \frac{|f(\xi)|}{2}$.*

Теперь мы переходим к третьему расположению.

Допустим сначала, что $|l_k(\cos\theta)|$ достигает своего наибольшего значения в $[\theta_{q+1}, \theta_q]$. Тогда согласно лемме и неравенству (13) имеем

$$\frac{n^{r_0}|t_1-\theta_k|^{r_0}}{2} \leqslant \min\{|l_k(\zeta_1)|, |l_k(\zeta_2)|\}, \tag{23}$$

где

$$\zeta_1 = \cos\left(t_1^{(n)} \pm \frac{1}{2n-2}\right) = \cos t_2^{(n)}.$$

Очевидно, что неравенство (23) можно написать в виде

$$\frac{n^{r_0}|t_1-\theta_k|^{r_0}}{2} \leqslant \min\left\{\frac{|r_k(\zeta_1)|}{|b_k(\zeta_1)|}, \frac{|r_k(\zeta_2)|}{|b_k(\zeta_2)|}\right\}.$$

Если еще учесть неравенство (5), то получим

$$\frac{n^{r_0}|t_1-\theta_k|^{r_0}}{2} \leqslant \frac{C}{\max\{|b_k(\zeta_1)|, |b_k(\zeta_2)|\}}. \tag{24}$$

Положим

$$E=|b_k(\zeta_1)|, \quad F=|b_k(\zeta_2)|.$$

Очевидно, что

$$\frac{1}{\max\{E, F\}} \leqslant \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{E^2+F^2}}. \tag{25}$$

Легко видеть, что E^2+F^2 достигает минимум при

$$a=\frac{A+B}{A^2+B^2},$$

где

$$A=\frac{\zeta_1-x_k}{\zeta_1-x_{2pt_k}}; \quad B=\frac{\zeta_2-x_k}{\zeta_2-x_{2pt_k}},$$

и что

$$(\sqrt{E^2+F^2})_{\min}=\frac{|A-B|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Согласно формуле конечных приращений

$$|A-B|=\frac{1}{2(n-1)}\cdot\frac{\sin\delta(\cos\theta_{2pt_k}-\cos\theta_k)}{(\cos\delta-\cos\theta_{2pt_k})^2},\tag{26}$$

где δ заключено между $t_1^{(n)}$ и $t_1^{(n)}-\frac{1}{2n-2}$*. Легко видеть, что $\max\{A, B\}=A$, а значит из (25) и (26) вытекает, что

$$\frac{1}{\max\{E, F\}}\leqslant\frac{n(\cos t_1-\cos\theta_{2pt_k})(\cos t_1-\cos\theta_k)}{\sin t_1(\cos\theta_{2pt_k}-\cos\theta_k)}.\tag{27}$$

Но

$$\frac{\cos t_1-\cos\theta_k}{\sin t_1}<\theta_k-t_1,\tag{28}$$

ибо $t_1<\theta_k$. Далее,

$$\frac{\cos t_1-\cos\theta_{2pt_k}}{\cos\theta_{2pt_k}-\cos\theta_k}\leqslant\frac{\sin\frac{t_1+\theta_{2pt_k}}{2}}{\sin\frac{\theta_k+\theta_{2pt_k}}{2}}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\theta_{2pt_k}-t_1}{\theta_k-\theta_{2pt_k}}.\tag{29}$$

Согласно неравенству (8),

$$\theta_k-\theta_{2pt_k}>\frac{C_1}{n}(2pt_k-k-1).$$

Кроме того, $\theta_{2pt_k}-t_1<\theta_k-t_1$. Поэтому

$$\frac{\theta_{2pt_k}-t_1}{\theta_k-\theta_{2pt_k}}<\frac{C(\theta_k-t_1)n}{2pt_k-k-1}<C(\theta_k-t_1)n.\tag{30}$$

Легко видеть, что

$$\frac{\sin\frac{t_1+\theta_{2pt_k}}{2}}{\sin\frac{\theta_k+\theta_{2pt_k}}{2}}\leqslant\cos\frac{\theta_k-t_1}{2}\leqslant 1.\tag{31}$$

Следовательно, в силу (27), (28), (29), (30), (31), имеем

$$\frac{1}{\max\{E, F\}}\leqslant Cn^2(\theta_k-t_1)^2.\tag{32}$$

Неравенства (24) и (32) приводят к заключению, что

$$n|t_1-\theta_k|^{r_0}\leqslant Cn^2|t_1-\theta_k|^2$$

или

$$|t_1-\theta_k|\leqslant\frac{C}{n}.\tag{33}$$

* Также возможно, что δ заключено между $t_1^{(n)}$ и $t_1^{(n)}+\frac{1}{2n-2}$, тогда рассуждения слегка изменяются.

Наконец, из неравенств (19) и (33) вытекает, что

$$\theta_q - \theta_{q+1} \leqslant \frac{C}{n}.$$

Если $|l_k^{(n)}(\cos\theta)|$ достигает своего наибольшего значения вне (θ_{q+1}, θ_q), то рассуждения почти сохраняются. Пусть, например, $|l_k(\cos\theta)|$ достигает своего наибольшего значения в точке $\zeta_3 = \cos t_3$, тогда из неравенства (13) следует, что

$$|l_k(\zeta_3)| > n^{r_0} |t_1 - \theta_k|^{r_0},$$

а значит согласно лемме

$$|l_k[\cos(t_3 \pm \varphi)]| > \frac{n^{r_0}|t_1 - \theta_k|^{r_0}}{2}, \quad |\varphi| \leqslant \frac{1}{2n-2}.$$

Для завершения доказательства остается оценить снизу величину

$$\min_{0 \leqslant a \leqslant 1} \max\left\{|b_k(\zeta_1)|, \max_{|\varphi| \leqslant \frac{1}{2n-2}} |b_k[\cos(t_3 + \varphi)]|\right\}.$$

Это делается в точности так же, как в случае, когда $|l_k(\cos\theta)|$ достигает наибольшего значения внутри (θ_{q+1}, θ_q).

Замечание. При рассмотрении случая B мы предполагали, что $k \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\, 2p)$ и $k+1 \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\, 2p)$. Эти ограничения не являются существенными, ибо метод доказательства проходит также и в том случае, когда неравенство (13) заменяется одним из неравенств

$$|l_{2pt-1}(\zeta_1)| > n^{r_0} |t_1 - \theta_{2pt-1}|^{r_0};$$

$$|l_{2pt}(\zeta_1)| > n^{r_0} |t_1 - \theta_{2pt}|^{r_0}.$$

Теорема 2 (П. Эрдеша и П. Турана). *Если фундаментальные полиномы Лагранжа* $\{l_k^{(n)}(x)\}_{k=1}^n$, $n = 1, 2, \ldots$ *матрицы узлов* (1) *ограничены в совокупности, то есть*

$$|l_j^{(n)}(x)| \leqslant C; \ -1 \leqslant x \leqslant 1; \ j = 1, 2, \ldots n; \ n = 1, 2, \ldots, \tag{34}$$

то узлы (1) *квазиравномерно распределены на полуокружности.*

Действительно, из неравенств (34) и равенств (2) следует, что

$$|r_j^{(n)}(x)| \leqslant 2C; \ -1 \leqslant x \leqslant 1; \ j = 1, 2, \ldots; \ n = 1, 2, \ldots,$$

а тогда согласно теореме 1 узлы (1) квазиравномерно распределены на полуокружности.

3° Теперь мы сформулируем основную теорему.

Теорема 3. *Для того, чтобы интерполяционный процесс* $\{A_n(f, x)\}_{n=1}^{\infty}$ *С. Н. Бернштейна, построенный для любой непрерывной на отрезке* $[-1, 1]$ *функции* $f(x)$, *равномерно сходился в* $[-1, 1]$ *к функции* $f(x)$ *необходимо, чтобы узлы полиномов* $\{A_n(f, x)\}$ *были квазиравномерно распределены на полуокружности.*

Доказательство. Известно, что если соотношение (3) имеет место равномерно для любой непрерывной функции, то нормы операторов $\{A_n(f, x)\}$ ограничены в совокупности.

Это значит, что существует такая константа C, что

$$\|A_n\| \leqslant C, \ n = 1, 2, \ldots \tag{35}$$

Но из определения оператора $A_n(f, x)$ видно, что

$$\|A_n\| = \max_{-1 \leqslant x \leqslant 1} \sum_{j=1}^{n}{}' |r_j^{(n)}(x)|,$$

а значит из (35) вытекает, что

$$\sum_{j=1}^{n}{}' |r_j^{(n)}(x)| \leqslant C; \; -1 \leqslant x \leqslant 1; \; n = 1, 2, \ldots \tag{36}$$

Остается теперь еще заметить, что из неравенств (36) следует, что полиномы $\{r_j^{(n)}(x)\}$; $j = 1, 2, \ldots$; $n = 1, 2, \ldots$ ограничены в совокупности, а тогда согласно теореме 1 узлы полиномов $\{A_n(f, x)\}_{n=1}^{\infty}$ квазиравномерно распределены на полуокружности.

Новгородский педагогический институт

Поступило 11 X 1957 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Н. Бернштейн, Об одном видоизменении интерполяционной формулы Лагранжа, Собр. соч., **2**, АН СССР, стр. 130, 1954. 2. Д. Л. Берман, Об одном интерполяционном процессе академика С. Н. Бернштейна, ДАН, **60**, № 3, 1948. 3. Д. Л. Берман, Интерполирование в многомерном пространстве, ДАН, **81**, № 1, 1951. 4. Д. Л. Берман, Расходимость интерполяционного процесса С. Н. Бернштейна, ДАН, **70**, № 2, 1950. 5. P. Erdös, P. Turán, On Interpolation II, Annals of Math., **39**, p. p. 703—724, 1938.