Е. А. Барбашин, Об условиях сохранения свойства устойчивости решений интегро-дифференциальных уравнений, *Изв. вузов. Матем.*, 1957, номер 1, 25–34

*Е. А. Барбашин*

# ОБ УСЛОВИЯХ СОХРАНЕНИЯ СВОЙСТВА УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение вида

$$\varphi_t'(x, t)=\int_a^b K(x, s, \varphi(s, t))\,ds+F(x, \varphi(x, t)). \tag{1}$$

Здесь $\varphi_t'(x, t)$ означает частную производную функции $\varphi(x, t)$ по $t$, функции $K(x, s, \varphi)$, $F(x, \varphi)$ определены и непрерывны по всем аргументам в области $D_n$

$$a\leqslant x\leqslant b, \quad a\leqslant s\leqslant b, \quad |\varphi|\leqslant h \tag{2}$$

и удовлетворяют условию $K(x, s, 0)=0$, $F(x, 0)=0$.

В этой работе мы даем в § 1 оценку изменения решений уравнения (1) при вариации в этом уравнении функций $K(x, s, \varphi)_n$ $F(x, \varphi)$, мы показываем далее, что при достаточно малых вариациях указанных функций свойство устойчивости (по показательному закону) решения $\varphi=0$ уравнения (1) сохраняется. В § 2 мы совершаем переход от интегро-дифференциального уравнения (1) к системе дифференциальных уравнений, близкой в известном смысле к уравнению (1). Этот переход совершенно аналогичен переходу, совершаемому от линейного интегрального уравнения к системе линейных алгебраических уравнений в теории Фредгольма. В § 2 дается оценка между решениями уравнения (1) и решениями соответствующей системы дифференциальных уравнений (17). На основании полученных оценок доказывается теорема о сохранении свойства устойчивости (по показательному закону) решения $\varphi=0$ уравнения (1) при переходе к соответствующей системе дифференциальных уравнений.

Методика вывода основных теорем нашей статьи существенно опирается на результаты статьи [4].

Заметим, что в случае, когда функции $K(x, s, \varphi)$, $F(x, \varphi)$ линейны по $\varphi$, теорема 2 вытекает из результатов К. П. Персидского [1], однако теорема 3 не следует из этих результатов даже и в линейном случае. Теорема 2 нашей работы была доказана также в линейном случае Н. Шерстобитовой, использовавшей в своем доказательстве предложенный нами метод.

Предположим, что в области $D$ выполняются для функций $K(x, s, \varphi)$, $F(x, \varphi)$ условия Липшица

$$\begin{gathered}|K(x, s, \varphi_1)-K(x, s, \varphi_2)|<K|\varphi_1-\varphi_2|,\\ |F(x, \varphi_1)-F(x, \varphi_2)|<\lambda|\varphi_1-\varphi_2|,\end{gathered} \tag{3}$$

и пусть $M$ и $N$ будут положительные константы, удовлетворяющие условиям

$$|K(x, s, \varphi)|<M, \quad |F(x, \varphi)|<N \tag{4}$$

в области $D$.

Пусть дана функция $\psi(x)$, имеющая на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ конечное число точек разрыва первого рода и удовлетворяющая на указанном отрезке условию $|\psi(x)|<h_1<h$. С помощью принципа сжатых отображений [2] легко доказать, что существует на некотором интервале $t_0-d<t<t_0+d$ решение $\varphi(x, t)$ уравнения (1), совпадающее при $t=t_0$ с заданной функцией $\psi(x)$.

В самом деле, рассмотрим оператор

$$A(\varphi)=\psi(x)+\int_{t_0}^{t}\left\{\int_{a}^{b} K(x, s, \varphi(s, t))\, ds+F(x, \varphi(x, t))\right\} dt.$$

Очевидно

$$|A(\varphi_1)-A(\varphi_2)|<L \sup_{a \leqslant s \leqslant b}|\varphi_1-\varphi_2||t-t_0|,$$

где

$$L=K(b-a)+\lambda. \tag{5}$$

Кроме того имеем:

$$|A(\varphi)-\psi(x)|<(M(b-a)+N)|t-t_0|.$$

Выбирая теперь в качестве $d$ наименьшее из двух чисел $\frac{1}{L}$ и $\frac{h-h_1}{M(b-a)+N}$, мы обеспечим выполнение всех условий, требуемых для применения принципа сжатых отображений.

Заметим теперь, что, если решение уравнения (1) при $t>t_0$ не выходит из области $|\varphi| \leqslant h_1<h$, то его можно продолжить для значений $t$, превосходящих $t_0+d$ точно таким же образом, как это делается в теории обыкновенных дифференциальных уравнений, причем выбранное ранее число $d$ будет годным для любого шага при указанном продолжении. Таким образом, решение $\varphi(x, t)$ будет продолжаемым, т. е. будет определено для всех $t$, удовлетворяющих условию $t_0 \leqslant t<\infty$.

## § 1.

Лемма 1. *Если непрерывная функция $u(t)$ удовлетворяет при $t>t_0 \geqslant 0$ неравенству*

$$0 \leqslant u(t)<\delta+\int_{t_0}^{t}\left(L u(t)+\sigma e^{M(t-t_0)}\right) dt, \tag{6}$$

*где $L$, $\delta$, $\sigma$, $M$ — положительные постоянные, то справедлива оценка:*

$$u(t)<\frac{\sigma}{L-M}\left(e^{L(t-t_0)}-e^{M(t-t_0)}\right)+\delta e^{L(t-t_0)}. \tag{7}$$

В самом деле, при $t$ близком к $t_0$, неравенство (7) выполняется, допустим $t=\tau$ — наименьшее число, при котором это неравенство нарушается. Подставляя в левую часть неравенства (6)

$$u(\tau)=\frac{\sigma}{L-M}\left(e^{L(\tau-t_0)}-e^{M(\tau-t_0)}\right)+\delta e^{L(\tau-t_0)},$$

имеем

$$u(\tau)<\delta+\int_{t_0}^{\tau}\left[\frac{L\sigma}{L-M}\left(e^{L(t-t_0)}-e^{M(t-t_0)}\right)+L\delta e^{L(t-t_0)}+\sigma e^{M(t-t_0)}\right]dt.$$

Производя в правой части интегрирование, мы получим в правой части также $u(\tau)$, что даст противоречивое неравенство.

Лемма 2. *Пусть* $\varphi_1(x, t)$ и $\varphi_2(x, t)$ — *решения уравнения* (1), *определяемые соответственно начальными функциями* $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$, *и пусть* $|\psi_1(x)-\psi_2(x)|<\delta$ *при* $a\leqslant x\leqslant b$. *Имеет место в области* $D$ *оценка:*

$$|\varphi_1(x, t)-\varphi_2(x, t)|<\delta e^{L(t-t_0)}, \tag{8}$$

*где*

$$L=K(b-a)+\lambda.$$

В самом деле, имеем

$$|\varphi_1(x, t)-\varphi_2(x, t)|<|\psi_1(x)-\psi_2(x)|+$$
$$+\int_{t_0}^{t}\left[\int_a^b|K(x, s, \varphi_1)-K(x, s, \varphi_2)|\,ds+|F(x, \varphi_1)-F(x, \varphi_2)|\right]dt$$

или, вводя обозначение

$$u(t)=\sup_{a\leqslant x\leqslant b}|\varphi_1(x, t)-\varphi_2(x, t)|, \text{ получим } u(t)<\delta+\int_{t_0}^{t}L\,u(t)\,dt.$$

Оценка (8) следует теперь из оценки (7) леммы (1).

Наряду с уравнением (1), рассмотрим теперь уравнение

$$\varphi_t'(x, t)=\int_a^b\overline{K}(x, s, \varphi(s, t))\,ds+\overline{F}(x, \varphi(x, t)) \tag{9}$$

в котором функции $\overline{K}(x, s, \varphi)$ и $\overline{F}(x, \varphi)$ удовлетворяют тем же условиям, что и функции $K(x, s, \varphi)$, $F(x, \varphi)$ в уравнении (1).

Лемма 3. *Пусть в области* $D$ *выполняются неравенства*

$$|\overline{K}(x, s, \varphi)-K(x, s, \varphi)|<\gamma, \tag{10}$$

$$|\overline{F}(x, \varphi)-F(x, \varphi)|<r, \tag{11}$$

*где* $\overline{K}(x, s, \varphi)$ и $\overline{F}(x, \varphi)$ — *функции, фигурирующие в уравнении* (9).

*Пусть* $\varphi(x, t)$ — *решение уравнения* (1), *а* $\overline{\varphi}(x, t)$ — *решение уравнения* (9), *причем* $\varphi(x, t_0)=\overline{\varphi}(x, t_0)$; *имеет место в области* $D$ *оценка:*

$$|\overline{\varphi}(x, t)-\varphi(x, t)|<\frac{(b-a)\gamma+r}{L}\left(e^{L(t-t_0)}-1\right). \tag{12}$$

В самом деле имеем

$$|\overline{\varphi}(x, t)-\varphi(x, t)|<\int_{t_0}^{t}\left[\int_a^b|\overline{K}(x, s, \overline{\varphi})-K(x, s, \varphi)|\,ds+\right.$$

$$\left.+|\overline{F}(x, \overline{\varphi})-F(x, \varphi)|\right]dt$$

или

$$|\overline{\varphi}(x, t)-\varphi(x, t)|<\int_{t_0}^{t}\left[\int_a^b\{|\overline{K}(x, s, \overline{\varphi})-K(x, s, \overline{\varphi})|+\right.$$

$$+|K(x, s, \overline{\varphi})-K(x, s, \varphi)|\}\,dt+$$

$$\left.+|\overline{F}(x, \overline{\varphi})-F(x, \overline{\varphi})|+|F(x, \overline{\varphi})-F(x, \varphi)|\right]dt.$$

Пусть $u(t)=\sup\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|\overline{\varphi}(x, t)-\varphi(x, t)|$, имеем тогда

$$u(t)<\int_{t_0}^{t}[\gamma(b-a)+r+(K(b-a)+\lambda)\,u(t)]\,dt.$$

Помня, что $L=K(b-a)+\lambda$, и примеьяя лемму 1, мы получаем требуемую оценку.

Мы скажем, что тривиальное решение $\varphi=0$ уравнения (1) равномерно асимптотически устойчиво, если:

а) существует число $\delta$ такое, что для всякого $\varepsilon>0$ можно указать $T>0$ настолько большое, что из $|\varphi(x, t_0)|<\delta$ следует $|\varphi(x, t)|<\varepsilon$ при $t>T$;

в) для любого $\varepsilon>0$ можно указать число $\delta>0$ такое, что из $|\varphi(x, t_0)|<\delta$ следует $|\varphi(x, t)|<\varepsilon$ при всех $t>t_0$.

Назовем тривиальное решение $\varphi=0$ уравнения (1) $\varepsilon$-устойчивым, если можно указать число $\delta>0$ такое, что из $|\varphi(x, t)|<\delta$ следует $|\varphi(x, t)|<\varepsilon$ при $t>t_0$.

Теорема 1. *Пусть тривиальное решение уравнения (1) равномерно асимптотически устойчиво. Для любого числа $\varepsilon$ можно указать $\gamma$ и $r$ такие, что при выполнении условий* (10) и (11) *тривиальное решение уравнения* (9) *будет $\varepsilon$-устойчивым.*

Доказательство. Для заданного числа $\varepsilon$ выберем, в силу свойства ($b$), число $\delta<\frac{\varepsilon}{2}$ такое, чтобы из $|\varphi(x, t_0)|<\delta$ следовало бы $|\varphi(x, t)|<\frac{\varepsilon}{2}$ при $t>t_0$.

В силу свойства ($a$) существует число $T>0$ такое, что будем иметь

$$|\varphi(x, t_0+T)|<\frac{\delta}{2}, \text{ если только } |\varphi(x, t_0)|<\delta.$$

Подберем теперь $\gamma$ и $r$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{(b-a)\gamma+r}{L}(e^{LT}-1)<\frac{\delta}{2}.$$

Лемма 3 дает нам неравенство

$$|\overline{\varphi}(x, t)-\varphi(x, t)|<\frac{\delta}{2} \text{ при } t_0\leqslant t\leqslant t_0+T,$$

если только $\bar{\varphi}(x, t_0) = \varphi(x, t_0)$ и $|\varphi(x, t_0)| < \delta$.
Очевидно имеем

$$|\bar{\varphi}(x, t)| < \frac{\delta}{2} + \delta < \varepsilon \quad \text{и} \quad |\bar{\varphi}(x, t_0 + T)| < \delta.$$

Принимая теперь функцию $\bar{\varphi}(x, t_0 + T)$ за начальную функцию для решения уравнения (1), мы подобным же образом покажем, что

$$|\bar{\varphi}(x, t)| < \varepsilon \text{ при } t_0 + T \leqslant t \leqslant t_0 + 2T \quad \text{и} \quad |\bar{\varphi}(x, t_0 + 2T)| < \delta.$$

Проводя далее аналогичные рассуждения мы убеждаемся, что

$$|\bar{\varphi}(x, t)| < \varepsilon \text{ при всех } t \geqslant t_0.$$

Заметим, что доказанная теорема в некотором смысле аналогична теореме об устойчивости при постоянно действующих возмущениях, доказанной С. И. Горшиным [3] для счетной системы дифференциальных уравнений.

Лемма 4. *Пусть в области $D$ имеют место неравенства*:

$$\begin{gathered} |\bar{K}(x, s, \varphi) - K(x, s, \varphi)| < \gamma_1 |\varphi|, \\ |\bar{F}(x, \varphi) - F(x, \varphi)| < r_1 |\varphi|. \end{gathered} \tag{13}$$

*Пусть* $\varphi(x, t)$ — *решение уравнения* (1) *и* $\bar{\varphi}(x, t)$ — *решение уравнения* (9), *причем* $\varphi(x, t_0) = \bar{\varphi}(x, t_0)$ *и* $|\varphi(x, t_0)| < \delta$. *Имеет место в области $D$ оценка*:

$$|\bar{\varphi}(x, t) - \varphi(x, t)| < \delta e^{L(t - t_0)} [e^{R(t - t_0)} - 1], \tag{14}$$

*где* $R = \gamma_1 (b - a) + r_1$, *а $L$ определена равенством* (5).

Докажем лемму. Очевидно имеем

$$|\bar{\varphi}(x, t) - \varphi(x, t)| \leqslant \int_{t_0}^{t} \Big\{ \int_{a}^{b} |\bar{K}(x, s, \bar{\varphi}) - K(x, s, \bar{\varphi})| +$$
$$+ |K(x, s, \bar{\varphi}) - K(x, s, \varphi)| ] \, ds + |\bar{F}(x, \bar{\varphi}) - F(x, \varphi)| +$$
$$+ |F(x, \bar{\varphi}) - F(x, \varphi)| \Big\} dt,$$

откуда следует

$$|\bar{\varphi}(x, t) - \varphi(x, t)| < \int_{t_0}^{t} \Big\{ \int_{a}^{b} [(\gamma_1 + K) |\bar{\varphi} - \varphi| + \gamma_1 |\varphi|] \, ds +$$
$$+ (r_1 + \lambda) |\bar{\varphi} - \varphi| + r_1 |\varphi| \Big\} dt$$

Пусть $u(t) = \sup\limits_{a \leqslant x \leqslant b} |\bar{\varphi}(x, t) - \varphi(x, t)|$, имеем тогда, учитывая принятые обозначения

$$u(t) < \int_{t_0}^{t} [(R + L) u(t) + \delta R e^{L(t - t_0)}] \, dt.$$

Требуемая оценка вытекает, очевидно, из леммы 1.

Мы скажем теперь, что тривиальное решение $\varphi=0$ уравнения (1) устойчиво по показательному закону [1], если существуют постоянные $B>1$ и $\alpha>0$ такие, что из $|\varphi(x,t_0)|<\delta$ следует при $t>t_0$

$$|\varphi(x,t)|<B\delta e^{-\alpha(t-t_0)}, \tag{15}$$

где $\delta$ — любое достаточно малое положительное число.

Теорема 2. *Пусть тривиальное решение $\varphi=0$ уравнения (1) устойчиво по показательному закону. Можно указать такие положительные числа $\gamma_1$ и $r_1$, что при выполнении неравенства (13), тривиальное решение $\varphi=0$ уравнения (9) будет также устойчивым по показательному закону.*

Докажем теорему. Пусть $T=\frac{1}{\alpha}\ln 4B$ и $\delta=\frac{\varepsilon}{2B}$, где $\varepsilon$ — произвольное положительное число, для которого выполняется (15). Очевидно, при $|\varphi(x,t_0)|<\delta$ имеем

$$|\varphi(x,t)|<\frac{\varepsilon}{2} \text{ на промежутке } t_0\leqslant t\leqslant t_0+T$$

и

$$|\varphi(x,t_0+T)|<\frac{\delta}{4}.$$

Очевидно, можно подобрать $R=\gamma_1(b-a)+r_1$ таким образом, чтобы выполнялось неравенство

$$e^{LT}(e^{RT}-1)<\frac{1}{4}.$$

В этом случае оценка (14) дает нам

$$|\bar{\varphi}(x,t)-\varphi(x,t)|<\frac{\delta}{4} \text{ при } t_0\leqslant t\leqslant t_0+T, \tag{16}$$

что и дает возможность применить теорему 2 статьи [4].

## § 2.

Разобьем теперь отрезок $a\leqslant s\leqslant b$ и отрезок $a\leqslant x\leqslant b$ на $n$ равных частей и введем обозначения:

$$\Delta x=\Delta s=\frac{b-a}{n}, \quad x_k=a+k\Delta x, \quad s_k=a+k\Delta s,$$

$$\varphi(x_k,t)=\varphi_k(t), \quad K(x_i,s_k,\varphi(s_k,t))=K_{ik}(\varphi_k), \quad F(x_i,\varphi(x_i,t))=F_i(\varphi_i).$$

Рассмотрим далее, наряду с уравнением (1), систему дифференциальных уравнений вида

$$\psi_i'(t)=\sum_{k=1}^{n}K_{ik}(\psi_k)\Delta s+F_i(\psi_i), \quad i=1,2,\ldots,n. \tag{17}$$

Очевидно, что при $n$ достаточно большом система (17) становится в некотором смысле близкой к уравнению (1). Естественно поэтому ожидать, что решение системы (17) будет в определенном смысле близким к решению уравнения (1). Ниже мы даем оценки близости этих решений, а также показываем, что свойство устойчивости по показательному закону при наложении некоторых дополнительных ограничений на функции $K(x,s,\varphi)$, $F(x,\varphi)$ сохраняется при переходе от уравнения (1) к системе (17).

Лемма 5. *Пусть* $\varphi(x,t)$ — *решение уравнения* (1) *и* $\psi_1(t)$, $\psi_2(t), \ldots, \psi_n(t)$ — *решение системы* (17) *такое, что*

$$\varphi(x_i, t_0) = \psi_i(t_0), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

*Имеет место оценка при* $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T$

$$|\varphi_i(t) - \psi_i(t)| < \frac{\sigma_n}{L}[e^{L(t-t_0)} - 1], \tag{18}$$

*где* $\sigma_n$ — *положительная постоянная, выбранная таким образом, что*

$$\left|\int_a^b K(x_i, s, \varphi(s,t))\,ds - \Delta s \sum_{k=1}^{n} K_{ik}(\varphi_k(t))\right| \leqslant \sigma_n \tag{19}$$

*при* $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T$ и $i = 1, 2, \ldots, n$.

В самом деле, имеем

$$|\varphi_i(t) - \psi_i(t)| \leqslant \int_{t_0}^{t} \left|\int_a^b K(x_i, s, \varphi)\,ds - \Delta s \sum_{k=1}^{n} K_{ik}(\varphi_k)\right| dt +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} \left[\sum_{k=1}^{n} |K_{ik}(\varphi_k) - K_{ik}(\psi_k)|\,\Delta s + |F_i(\varphi_i) - F_i(\psi_i)|\right] dt.$$

Следовательно,

$$|\varphi_i(t) - \psi_i(t)| < \int_{t_0}^{t} \left[\sigma_n + K \sum_{k=1}^{n} |\varphi_k - \psi_k|\,\Delta s + \lambda\,|\varphi_i - \psi_i|\right] dt.$$

Обозначив через $u(t)$ максимальное значение $|\varphi_i(t) - \psi_i(t)|$ при $i = 1, 2, \ldots, n$, имеем очевидно

$$u(t) < \int_{t_0}^{t} (\sigma_n + L\,u(t))\,dt,$$

откуда, применяя лемму 1, получим неравенство (22).

Лемма 6. *Пусть в области* $D$ *функция* $K(x, s, \varphi)$ *имеет непрерывную частную производную первого порядка по* $x$, *а функция* $F(x, \varphi)$ *по* $x$ *и* $\varphi$, *и пусть эти производные удовлетворяют неравенствам в* $D$

$$|K'_x(x, s, \varphi)| < K_1|\varphi|, \quad |F'_x(x, \varphi)| < \lambda_1|\varphi|, \quad |F'_x(x, \varphi)| < \lambda_2.$$

*Пусть далее функция* $\varphi(x, t_0)$ *непрерывно дифференцируема в некотором интервале* $c < x < d$, *лежащем внутри отрезка* $a \leqslant x \leqslant b$, *и пусть на этом интервале выполняются неравенства*

$$|\varphi(x, t_0)| < \delta, \quad |\varphi'_x(x, t_0)| < \delta_1.$$

*Если решение* $\varphi(x, t)$ *уравнения* (1) *не выходит за пределы области* $D$ *при* $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T$, *то справедлива оценка:*

$$|\varphi'_x(x, t)| < \frac{K_1(b-a) + \lambda_1}{|\lambda_2 - L|}\,\delta\,|e^{\lambda_2(t-t_0)} - e^{L(t-t_0)}| + \delta_1 e^{\lambda_2(t-t_0)}. \tag{20}$$

В самом деле имеем

$$|\varphi_x'(x,t)| \leqslant |\varphi_x'(x,t_0)| + \int_{t_0}^{t} \Big[ \int_a^b |K_x'(x,s,\varphi(s,t))|\,ds + \left|\frac{\partial F}{\partial x}\right| +$$

$$\left|\frac{\partial F}{\partial \varphi}\varphi_x'(x,t)\right|\Big] dt,$$

или, используя неравенство (8) леммы 2, получим

$$|\varphi_x'(x,t)| < \delta_1 + \int_{t_0}^{t} [(K_1(b-a)+\lambda_1)\,\delta\, e^{L(t-t_0)} + \lambda_2 |\varphi_x'(x,t)|]\,dt.$$

Очевидно, оценка (24) снова получается применением леммы 1.

Лемма 7. *Пусть $K(x,s,\varphi)$ и $F(x,\varphi)$ удовлетворяют условиям леммы 6, и пусть, кроме того, $K(x,s,\varphi)$ имеет непрерывные производные первого порядка по $s$ и $\varphi$, причем эти производные удовлетворяют неравенствам в области $D$*

$$|K_s'(x,s,\varphi)| < M_1 |\varphi|, \quad |K_\varphi'(x,s,\varphi)| < M_2.$$

*Пусть далее $\varphi(x,t_0)$ непрерывно дифференцируема по $x$ на каждом из интервалов $x_k < x < x_{k+1}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, причем на множестве существования производной $\varphi_x'(x,t_0)$ выполняются оценки:*

$$|\varphi(x,t_0)| < \delta, \quad |\varphi_x'(x,t_0)| < \delta_1.$$

*При выполнении этих условий в качестве $\sigma_n$ леммы 5 можно принять число, равное*

$$\frac{(b-a)^2}{2n}[A\delta + B\delta_1],$$

*где $A$ и $B$ — постоянные числа, зависящие только от $T$.*

Действительно, используя формулу Лагранжа, получим при

$$s_k < s < s_{k+1}$$

$$K(x_i, s, \varphi(s,t)) = K_{ik}(\varphi_k) + (s - s_k)[K_s'(x_i, \bar{s}_k, \varphi(\bar{s}_k, t)) +$$

$$+ K_\varphi'(x_i, \bar{s}_k, \varphi(\bar{s}_k, t))\,\varphi_s'(\bar{s}_k, t),$$

где $s_k < \bar{s}_k < s_{k+1}$.

Имеем далее

$$\left|\int_{s_k}^{s_{k+1}} K(x_i, s, \varphi(s,t))\,ds - K_{ik}(\varphi_k)\,\Delta s\right| < \int_{s_k}^{s_{k+1}} |s - s_k|\,[M_1|\varphi(\bar{s}_k, t) +$$

$$+ M_2 |\varphi_s'(\bar{s}_k, t)|]\,ds.$$

Принимая во внимание оценки лемм 2 и 6, получим

$$\left|\int_{s_k}^{s_{k+1}} K(x_i, s, \varphi(s,t))\,ds - K_{ik}(\varphi_k)\,\Delta s\right| < \frac{(\Delta s)^2}{2}(A\delta + B\delta_1),$$

где введены обозначения:

$$A = \left(M_1 + M_2 \frac{K_1(b-a)+\lambda_1}{|\lambda_2 - L|}\right) e^{LT},$$

$$B = M_1 e^{\lambda_2 T}.$$

Помня, что $\Delta s = \frac{b-a}{n}$, получим

$$\left| \int_a^b K(x_i, s, \varphi(s, t))\, ds - \sum_{k=1}^{n} K_{ik}(\varphi_k) \Delta s \right| < \frac{(b-a)^2}{2n} (A\delta + B\delta_1).$$

Следствие. *Пусть $\varphi(x, t_0)$ — кусочно-постоянная функция $x$ с точками разрыва в $x_k$. В качестве $\sigma_n$ можно принять величину*

$$\frac{(b-a)^2}{2n} A\delta.$$

Мы скажем, что тривиальное решение системы (17) устойчиво по показательному закону, если из $|\psi_i(t_0)| < \delta$, где $\delta$ — достаточно малое положительное число и $i = 1, 2, \ldots, n$, следует

$$|\psi_i(t)| < C\delta e^{-\beta(t-t_0)} \quad \text{при} \quad t > t_0, \; i = 1, 2, \ldots, n.$$

Пусть теперь функции $K(x, s, \varphi)$ и $F(x, \varphi)$ обладают непрерывными частными производными первого порядка по всем аргументам.

Теорема 3. *Если тривиальное решение $\varphi = 0$ уравнения* (1) *устойчиво по показательному закону, то существует целое положительное число $n_0$ такое, что при $n > n_0$ решение системы* (17) *будет также устойчивым по показательному закону.*

Наметим доказательство теоремы.

Пусть $T = \frac{1}{\alpha} \ln 4B$, где $\alpha$ и $B$ — постоянные из неравенства (15), и пусть $\delta = \frac{\varepsilon}{2B}$, где $\varepsilon$ — произвольно, но достаточно малое число. Очевидно из неравенства $|\varphi(x, t_0)| < \delta$ следует $|\varphi(x, t)| < \varepsilon$ при

$$t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T \quad \text{и} \quad |\varphi(x, t_0 + T)| < \frac{\delta}{4}.$$

Подберем теперь $n_0$ таким образом, чтобы выполнялось неравенство при $n > n_0$

$$\frac{(b-a)^2}{2n} \frac{A}{L} (e^{LT} - 1) < \frac{1}{4}, \tag{21}$$

где $A$ — константа леммы 7.

Пусть теперь $\psi_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots n$ будет решение системы (17), удовлетворяющее условию $|\psi_i(t_0)| < \delta$ при $i = 1, 2, \ldots n$. Определим прежде всего для данного разбиения отрезка $a \leqslant x \leqslant b$ на $n$ частей $(n > n_0)$ кусочно-постоянную функцию $\varphi^0(x, t_0)$, приняв

$$\varphi^0(x, t_0) = \psi_i(t_0), \text{ если } a + (i-1)\Delta x \leqslant x < a + i\Delta x.$$

Пусть $\varphi^0(x, t)$ — решение уравнения (1), определенное выбранной указанным выше способом начальной функцией $\varphi^0(x, t_0)$, и пусть

$$\varphi_i^0(t) = \varphi^0(x_i, t).$$

Из оценок леммы 5 и из неравенства (21) следует:

$$|\varphi_i^0(t) - \psi_i(t)| < \frac{\delta}{4} \quad \text{при} \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T. \tag{22}$$

Так как $|\varphi_i^0(t_0)| < \delta$, то при $t > t_0 + T$ будем иметь $|\varphi_i^0(t)| < \frac{\delta}{4}$, что дает нам оценку $|\psi_i(t_0+T)|<\frac{\delta}{2}$. Кроме того, так как $|\varphi_i^0(t)|<\frac{\varepsilon}{2}$, то из неравенства (26) следует $|\psi_i(t)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\delta}{4}<\varepsilon$ при $t_0\leqslant t\leqslant t_0+T$.

Далее доказательство теоремы идет в точности по схеме, данной в доказательстве теоремы 2, статьи [4].

Уральский политехнический
институт им. С. М. Кирова

Поступило
11 X 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. К. П. Персидский, О характеристичных числах, Изв. АН Казах. ССР, № 116, в. 1 (6), стр. 64—76, 1952. 2. И. Г. Петровский, Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, Гостехиздат, стр. 62—67, 1952. 3. С. Горшин, Некоторые критерии устойчивости с постоянными возмущениями, Изв. АН Казах. ССР, № 97, в. 4, стр. 51—56, 1950. 4. Е. А. Барбашин, О двух схемах доказательства теорем об устойчивости по первому приближению, ДАН СССР, т. III, № 1, стр. 9—12, 1956.