Ф. А. Шолохович, Линейные динамические системы, *Изв. вузов. Матем.*, 1957, номер 1, 249–257

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ
1957 МАТЕМАТИКА № 1

Ф. А. Шолохович

ЛИНЕЙНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Определение. Динамическую систему $f(t)p$ ([1], стр. 346), заданную в банаховом пространстве B ([2], стр. 22), назовем линейной, если выполняется условие

$$f(t)(p_1+p_2)=f(t)p_1+f(t)p_2,$$

где t — любое вещественное число, а p_1 и p_2 — произвольные точки пространства B.

Важными примерами линейных динамических систем (л. д. с.) являются системы решений уравнения в частных производных гиперболического типа и интегро-дифференциального уравнения

$$\varphi_t'(x, t)=\int_a^b k(x, s)\varphi(s, t)\,ds,$$

рассмотренные в соответствующих банаховых пространствах. Поэтому наибольший интерес представляет исследование линейных систем, определенных в бесконечномерных пространствах. К тому же в случае n-мерного пространства B всякую линейную динамическую систему можно считать совокупностью решений системы n линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэфициентами.

§ 1. Траектории линейной динамической системы

Известно, что в конечномерной линейной динамической системе всякое движение, устойчивое по Лагранжу ([1], стр. 359), почти периодично ([1], стр. 411). Мы покажем, что в бесконечномерной л. д. с. могут содержаться движения всех основных типов. Для более широкого класса линейных систем, расположенных в линейном метрическом (не банаховом) пространстве, аналогичное заключение вытекает из работ М. В. Бебутова [3] и М. И. Альмухамедова [4].

Пример. Пусть $\alpha(x)$ — непрерывная полуаддитивная функция ([2], стр. 166), заданная на всей числовой оси, и $\alpha(0)=0$. Как известно,

$$\sup_{-\infty<x<\infty}|\alpha(x+t)-\alpha(x)|=\max[\alpha(t), \alpha(-t)]$$

([2] теорема 6.10.2).

Предположим, что при любом t существуют пределы разности $\alpha(x+t)-\alpha(x)$ как при $x\to+\infty$, так и при $x\to-\infty$.

В множестве $B=\{p\}$ вещественных функций $p=y(x)$ таких, что функция $y(x)e^{-\alpha(x)}=\varphi(x)$ непрерывна в замкнутом отрезке $[-\infty, \infty]$, определим естественным образом операции сложения и умножения на вещественные числа. Введем норму равенством

$$\| p \| = \sup_{-\infty < x < \infty} |y(x)| e^{-\alpha(x)}.$$

Легко проверить, что множество B превратится после этого в банахово пространство. Линейную динамическую систему в этом пространстве определим так: если $p = y(x)$, то $f(t)p = y(x+t)$. Мы докажем лишь непрерывность функции $f(t)p$ по совокупности аргументов. Выполнение остальных условий определения л. д. с. очевидно.

При фиксированном t $f(t)$ представляет собой линейный оператор. Покажем его ограниченность.

$$\| f(t) p \| = \sup_{-\infty < x < \infty} |y(x+t)| e^{-\alpha(x)} = \sup_{-\infty < x < \infty} |y(x)| e^{-\alpha(x-t)} =$$

$$= \sup_{-\infty < x < \infty} |y(x)| e^{-\alpha(x)} e^{\alpha(x) - \alpha(x-t)}.$$

Так как $\alpha(x)$ полуаддитивна, то $\alpha(x) - \alpha(x-t) \leqslant \alpha(t)$, следовательно, $\| f(t) p \| \leqslant e^{\alpha(t)} \| p \|$, т. е. $\| f(t) \| \leqslant e^{\alpha(t)}$. (Легко убедиться, что $\| f(t) \| = e^{\alpha(t)}$). Покажем сильную непрерывность операторной функции $f(t)$ ([2], определение 3. 4. 2). Из равенства

$$\lim_{t \to t_0} f(t) p = \lim_{t - t_0 \to 0} f(t - t_0) f(t) p$$

следует, что достаточно установить непрерывность $f(t)$ при $t = 0$. Если

$$p = y(x) = \varphi(x) e^{\alpha(x)},$$

то

$$\| f(t) p - p \| = \sup_{-\infty < x < \infty} |\varphi(x+t) e^{\alpha(x+t)} - \varphi(x) e^{\alpha(x)}| e^{-\alpha(x)} =$$

$$= \sup_{-\infty < x < \infty} |\varphi(x+t) e^{\alpha(x+t) - \alpha(x)} - \varphi(x)| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{-\infty < x < \infty} |\varphi(x+t)| \, |e^{\alpha(x+t) - \alpha(x)} - 1| +$$

$$+ \sup_{-\infty < x < \infty} |\varphi(x+t) - \varphi(x)|.$$

Пусть

$$\sup_{-\infty < x < \infty} |\varphi(x)| = M,$$

и $\varepsilon > 0$ — произвольное число. Ввиду того, что функция $\alpha(x)$ непрерывна, $\alpha(0) = 0$ и

$$\sup_{-\infty < x < \infty} |\alpha(x+t) - \alpha(x)| = \max[\alpha(t), \alpha(-t)],$$

можно указать такое число δ_1, чтобы при $|t| < \delta_1$ имело место неравенство $|e^{\alpha(x+t) - \alpha(x)} - 1| < \frac{\varepsilon}{2M}$. Используя равномерную непрерывность $\varphi(x)$ на $[-\infty, \infty]$, можно найти число δ_2 так, чтобы при $|t| < \delta_2$ было $|\varphi(x+t) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Положим $\delta = \min[\delta_1, \delta_2]$. При $|t| < \delta$ имеем

$$\| f(t) p - p \| \leqslant M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Непрерывность $f(t)p$ по совокупности аргументов докажем с помощью оценки

$$\| f(t) p - f(t_0) p_0 \| \leqslant \| f(t) \| \cdot \| p - p_0 \| + \| f(t) p_0 - f(t_0) p_0 \|.$$

Сначала по $\varepsilon > 0$ найдем число δ_1 так, чтобы при $|t-t_0| < \delta_1$ было $\| f(t) p_0 - f(t_0) p_0 \| < \frac{\varepsilon}{2}$. Пусть

$$\max_{|t-t_0| \leqslant \delta_1} \| f(t) p \| = M_1.$$

Возьмем $\delta_2 = \frac{\varepsilon}{2M_1}$. Тогда из неравенств $|t-t_0| < \delta_1$; $\| p - p_0 \| < \delta_2$ будет следовать неравенство $\| f(t) p - f(t_0) p_0 \| < \varepsilon$.

В дальнейшем будем считать $\alpha(x) = |x|$. Для построения нужных нам траекторий используем идею М. И. Альмухамедова ([4], стр. 36 и 37). Доказательства придется, разумеется, изменить, т. к. метрика нашего пространства отлична от метрики пространства полупериодических функций в статье М. И. Альмухамедова.

1. Движение устойчивое по Пуассону, но не рекуррентное ([1], стр. 364 и 402).

Опишем построение графика функции $y_0(x)$, которую мы примем за начальную точку p_0 нужного нам движения.

Каждому натуральному числу n поставим в соответствие равнобедренный треугольник с основанием, равным n, и высотой, равной единице. Назовем этот треугольник $\triangle_n$. Если приставлять указанные треугольники в каком-нибудь порядке друг к другу, накладывая их основания на ось Ox, то боковые стороны образуют график некоторой функции. Мы будем считать при этом, что каждая пара соседних треугольников имеет одну (и только одну) общую точку. Конечную совокупность примыкающих друг к другу треугольников назовем звеном. Поступим так:

Правую вершину треугольника $\triangle_1$ поместим в начало координат, и приставим к $\triangle_1$ справа треугольник $\triangle_2$. К тому, что получится слева, присоединим звено $\triangle_1 \triangle_2$ и добавим треугольник $\triangle_3$. Будем иметь

$$\triangle_3 \triangle_1 \triangle_2 \triangle_1 \triangle_2.$$

К этому звену справа приставим такое же звено и еще треугольник $\triangle_4$. На k-ом шаге к тому, что построено, мы присоединим с подходящей стороны точно такое же звено и $\triangle_{k+1}$ — первый из не использованных еще треугольников. Продолжим этот процесс неограниченно.

Таким путем мы построим график функции, определенной на всей числовой оси. Назовем эту функцию $y_0(x)$. Ей соответствует точка $P_0 \in B$. Докажем, что движение $f(t) p_0$ устойчиво по Пуассону.

Пусть $\varepsilon > 0$ и $T > 0$ — произвольные числа. Возьмем число $L > \ln 2 - \ln \varepsilon$. Отрезок $[-L, L]$ целиком покрыт некоторым звеном, полученным на определенном шаге. Это звено встречается слева и справа, как угодно далеко, в частности, вне отрезка $[-T, T]$. Поэтому найдутся такие числа t_1 и t_2, оба превосходящие число T, что функция $y_0(x)$ будет совпадать с функциями $y_0(x+t_1)$ и $y_0(x-t_2)$ по меньшей мере на отрезке $[-L, L]$. Тогда

$$\| p_0 - f(t_1) p_0 \| = \sup_{-\infty < x < \infty} |y_0(x) - y_0(x+t_1)| e^{-|x|} =$$

$$= \sup_{|x| < L} |y_0(x) - y_0(x+t_1)| e^{-|x|} \leqslant 2e^{-L} < \varepsilon.$$

Аналогично $\| p_0 - f(-t_2) p_0 \| < \varepsilon$. Двусторонняя устойчивость движения $f(t) p_0$ по Пуассону доказана.

Покажем, что движение $f(t) p_0$ не рекуррентно. Пусть $T > 0$ — как угодно большое число. Возьмем целое число $N > 2T$. Предположим, что абсцисса левой вершины треугольника $\triangle_N$, когда он первый раз встречается справа, равна t_0. Рассмотрим дугу $f(\bar{t})p_0$ траектории $f(t)p_0$ при $t_0+\frac{1}{2}T\leqslant\bar{t}\leqslant t_0+\frac{3}{2}T$. Расстояние от точки p_0 до этой дуги не меньше, чем $\frac{1}{2}$. Действительно, произвольной точке $\bar{p}$ нашей дуги соответствует функция $y_0(x+\bar{t})$, и, когда $\bar{t}$ находится в указанном отрезке, $y_0(0+\bar{t})\geqslant\frac{1}{2}$. Поэтому

$$\|p_0-\bar{p}\|=\sup_{-\infty<x<\infty}|y_0(x)-y_0(x+\bar{t})|e^{-|x|}\geqslant$$

$$\geqslant|y_0(0)-y_0(0+\bar{t})|e^0\geqslant\frac{1}{2}.$$

Итак, нельзя найти такого числа T, чтобы любая дуга траектории $f(t)p_0$ временной длины T аппроксимировала всю траекторию с точностью до $\varepsilon<\frac{1}{2}$.

2. Рекуррентное движение, не являющееся почти периодическим.

Сейчас нам понадобятся три горизонтальных отрезка длиной в единицу. На двух мы построим равнобедренные треугольники с высотой $\frac{1}{2}$. У первого, назовем его $\triangle_1$, вершину поместим выше основания. У второго, $\triangle_2$,— ниже основания. Оставшийся отрезок обозначим $\triangle_3$. График функции $y_0(x)=p_0$ получим с помощью звеньев, составленных из фигур $\triangle_1$, $\triangle_2$, $\triangle_3$ (от треугольников $\triangle_1$, $\triangle_2$ в график войдут боковые стороны).

Поместим $\triangle_1$ на отрезке $[0,1]$, $\triangle_2$ — на отрезке $[1, 2]$, $\triangle_3$ — на отрезке $[2, 3]$ оси Ox. Затем составим всевозможные перестановки из фигур $\triangle_1$, $\triangle_2$, $\triangle_3$. Каждая из этих перестановок образует звено $\triangle_i^{(1)} (i=1, 2, \dots, 6)$. Длина звена $\triangle_i^{(1)}$ равна трем (обозначим это так: $|\triangle_i^{(1)}|=3$), их число $m_1=3!$. Несколько звеньев $\triangle_i^{(1)}$ (но не все) приставим слева к звену $\triangle_1$, $\triangle_2$, $\triangle_3$, уже занимающему отрезок $[0, 3]$, остальные присоединим справа. Из звеньев $\triangle_i^{(1)}$ снова составим всевозможные перестановки. Получим звенья $\triangle_i^{(2)}$. Их количество $m_2=m_1!$ и $|\triangle_i^{(2)}|=3m_1$.

Одно из звеньев $\triangle_i^{(2)}$ уже лежит на оси Ox, остальные приставим к нему слева и справа в произвольном порядке. Указанный процесс продолжается неограниченно. Пусть m_k — количество звеньев $\triangle_i^{(k)}$, тогда $m_k=m_{k-1}!$, причем $m_1=3!$; $|\triangle_i^{(k)}|=3m_1m_2\dots m_{k-1}$.

Функцию, соответствующую полученному графику, назовем $y_0(x)$ и примем за начальную точку p_0. Покажем, что движение $f(t)p_0$ рекуррентно.

Пусть число $\varepsilon(0<\varepsilon<1)$ как угодно мало, и $p_1=f(t_1)p_0=$ $=y_0(x+t_1)$ — произвольная точка траектории $f(t)p_0$. Найдем такое число L, чтобы $e^{-L}<\varepsilon$. Выберем число k так, чтобы имело место неравенство $|\triangle_i^{(k)}|=3m_1m_2\dots m_{k-1}>2L$.

Если рассмотреть график функции $y(x+t_1)$, то начало координат O принадлежит основанию одного из звеньев $\triangle_i^{(k)}$, например, $\triangle_j^{(k)}$. Один из концов этого звена, допустим правый, удален от точки O не меньше, чем на $\frac{1}{2}|\triangle_j^{(k)}|$. Слева к звену $\triangle_j^{(k)}$ примыкает звено $\triangle_l^{(k)}$. Совокупность звеньев $\triangle_l^{(k)}\triangle_j^{(k)}$ принадлежит одному звену $\triangle_S^{(k+1)}$.

Пусть $T=2m_{k+2}$. На любой дуге траектории $f(t)p_0$ временной длины T найдется такая точка q_1, что $\| p_1 - q_1 \| < \varepsilon$. В самом деле, график функции $y_0(x)$ таков, что в любом месте оси Ox отрезок длиной $2m_{k+2}$ содержит целиком основание хотя бы одного звена $\triangle_i^{(k+2)}$ (так как $|\triangle_i^{(k+2)}| = 3m_1 \ldots m_{k+1} < m_{k+1}! = m_{k+2}$). Возьмем произвольную точку $p_2 = f(t_2)p_0 = y_0(x+t_2)$ траектории $f(t)p_0$ и рассмотрим график функции $y_0(x+t_2)$. Отложив от начала координат вправо отрезок T, мы найдем на графике функции $y_0(x+t_2)$ какое-нибудь звено $\triangle_i^{(k+2)}$, целиком лежащее внутри отрезка $[0, T]$. В этом звене где-то будет находиться звено $\triangle_s^{(k+1)}$, а в нем — пара $\triangle_l^{(k)}\triangle_j^{(k)}$. Следовательно, найдется такое число $t_3 (0 < t_3 < T)$, что функции $y_0(x+t_1)$ и $y_0(x+t_2+t_3)$ совпадут внутри окрестности начала координат, радиус которой не меньше, чем $\frac{1}{2}|\triangle_i^{(k)}| > L$. Пусть

$$q_1 = f(t_2+t_3)p_0 = y_0(x+t_2+t_3).$$

Имеем

$$\| p_1 - q_1 \| = \sup_{-\infty < x < \infty} |y_0(x+t_1) - y_0(x+t_2+t_3)| e^{-|x|} =$$

$$= \sup_{|x|>L} |y_0(x+t_1) - y_0(x+t_2+t_3)| e^{-|x|} \leqslant \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) e^{-L} < \varepsilon.$$

Рекуррентность движения $f(t)p_0$ доказана.

Сейчас мы установим, что движение $f(t)p_0$ не обладает свойством устойчивости по Ляпунову относительно множества точек своей траектории и, следовательно, не является почти периодическим ([1], гл. V, теорема 35).

В любой близости от точки p_0 найдется такая точка $p_1 = f(t_1)p_0$, что график соответствующей ей функции состоит из звеньев, концы которых имеют целочисленные координаты. Так как функция $y_0(x)$ не является периодической, то $p_0 \neq p_1$, и на некотором отрезке $[n, n+1]$ окажется, что

$$\max_{n \leqslant x \leqslant n+1} |y_0(x+t_1) - y_0(x)| \geqslant \frac{1}{2}.$$

Тем более

$$\left\| f\left(n+\frac{1}{2}\right)p_0 - f\left(n+\frac{1}{2}\right)p_1 \right\| \geqslant \frac{1}{2}.$$

Этим доказано отсутствие устойчивости по Ляпунову.

В связи с рассмотренным примером, интересно отметить, что, если функция $\| f(t) \|$ ограничена на всей оси t, $\| f(t) \| \leqslant M < \infty$, то всякое движение, устойчивое по Лагранжу в некотором направлении, является почти периодическим. Для доказательства достаточно с помощью неравенства

$$\| f(t)p - f(t)q \| = \| f(t)(p-q) \| \leqslant M \cdot \| p-q \|$$

установить равномерную двустороннюю устойчивость по Ляпунову системы $f(t)p$ и применить теорему А. А. Маркова ([1], стр. 416).

§ 2. Линейные многообразия однотипных траекторий

Суммой движений $f(t)p_1$ и $f(t)p_2$ мы будем называть движение

$$f(t)(p_1+p_2) = f(t)p_1 + f(t)p_2.$$

Теорема 1. *Для того, чтобы сумма двух периодических движений $f(t)p_1$ и $f(t)p_2$ была периодическим движением, необходимо и достаточно, чтобы периоды этих движений были соизмеримы.*

Достаточность почти очевидна. Пусть периоды движений τ_1 и τ_2, причем $\frac{\tau_1}{\tau_2}=\frac{n_1}{n_2}$ (n_1 и n_2 — целые числа). Положим, $\tau=n_1\tau_2=n_2\tau_1$.

Тогда

$$f(t+\tau)(p_1+p_2)=f(t+n_2\tau_1)p_1+f(t+n_1\tau_2)p_2=f(t)(p_1+p_2).$$

Докажем необходимость. Пусть точка q_1 лежит на траектории $f(t)p_1$.

Из предыдущего ясно, что движение $f(t)(p_1-q_1)$ будет либо периодическим с периодом $\frac{\tau_1}{k}$ ($k\geqslant 1$ — целое число), либо точкой покоя. Покажем, что в последнем случае обязательно $p_1-q_1=\theta$ (начальная точка пространства B). Допустим, что $p_1-q_1=r$ и $\|r\|\neq 0$. Если $q_1=f(t_1)p_1$, то

$$p_1-f(t_1)p_1=r,\ f(t_1)p_1-f(2t_1)p_1=r,\dots,$$
$$\dots,\ f[(m-1)t_1]p_1-f(mt_1)p_1=r.$$

Сложив эти равенства почленно, получим

$$p_1-f(mt_1)p_1=mr \text{ и } \|p_1-f(mt_1)p_1\|=m\|r\|,$$

что означает неограниченность траектории $f(t)p_1$ и противоречит замкнутости этой траектории.

Предположим, что $f(t)(p_1+p_2)$ — периодическое движение с периодом τ.

Обозначим $f(\tau)p_1=q_1$; $f(\tau)p_2=q_2$. Из равенства

$$f(t+\tau)(p_1+p_2)=f(t)(p_1+p_2)$$

получим

$$f(t)(q_1-p_1)=f(t)(p_2-q_2).$$

Возможны два случая для левой части равенства.

1. $q_1-p_1=\theta$

2. Период движения $f(t)(q_1-p_1)$ равен $\frac{\tau_1}{n_1}$ ($n_1\geqslant 1$ — целое число).

Если $q_1-p_1=\theta$, то и $p_2-q_2=\theta$, т. е. τ кратно периодам τ_1 и τ_2. Если $q_1-p_1\neq\theta$, тогда $p_2-q_2\neq\theta$, и период движения $f(t)(p_2-q_2)$ должен равняться числу $\frac{\tau_2}{n_2}$ ($n_2\geqslant 1$ — целое число). Следовательно, $\frac{\tau_1}{n_1}=\frac{\tau_2}{n_2}$. Теорема доказана.

Легко доказать, что сумма двух движений, устойчивых по Лагранжу, устойчива по Лагранжу. Это же справедливо по отношению к почти периодическим движениям. Доказательство проводится так же, как и в статье [5] (см. § 1 теорема II и ее следствия и § 2 теорема 1).

Мы приходим к следующему выводу: множество точек, устойчивых по Лагранжу, образует линейное многообразие в пространстве B. Это многообразие содержит линейное многообразие почти периодических движений, которое в свою очередь охватывает каждое линейное многообразие периодических движений с соизмеримыми периодами. Перечисленные здесь многообразия инвариантны.

Перейдем к рассмотрению наименьших линейных многообразий, содержащих данную траекторию. В случае конечного числа измерений такое многообразие будет подпространством ([6], стр. 117).

Теорема 2. *Если движение устойчиво по Пуассону или рекуррентно, то наименьшее линейное многообразие, содержащее это движение, состоит из движений, соответственно, устойчивых по Пуассону или рекуррентных.*

Доказательство. Пусть движение $f(t)p$ устойчиво по Пуассону и

$$q=\sum_{i=1}^{n} a_i f(t_i) p.$$

Существует такая последовательность $\{t_k\}$, что $t_k \to \infty$ и $\lim f(t_k) p = p$ ([1], стр. 364).

Тогда

$$\lim f(t_k) q = \lim \sum_{i=1}^{n} a_i f(t_i) f(t_k) p = \sum_{i=1}^{n} a_i f(t_i) p = q.$$

Докажем вторую часть теоремы. Пусть движение $f(t)p$ рекуррентно и

$$q=\sum_{i=1}^{n} a_i f(t_i) p.$$

Так как движение $f(t)p$ устойчиво по Лагранжу ([1] гл. V, теорема 28), то этим же свойством обладает движение $f(t)q$.

Следовательно, достаточно доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ множество значений t, удовлетворяющих неравенству $\| q - f(t) q \| < \varepsilon$, является относительно плотным ([1], стр. 405).

Обозначим $a = \max |a_i|$; $T = \max |t_i|$ и возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$. Из непрерывности по начальным данным ([1], стр. 346, 347) найдем такое число $\delta > 0$, чтобы выполнялось неравенство $\| f(t) p - f(t) r \| < \frac{\varepsilon}{an}$ для любой точки $r \in B$ и любого числа t, если они удовлетворяют неравенствам $\| p - r \| < \delta$; $|t| \leqslant T$. По числу δ найдем такое относительно плотное множество чисел $\{\tau_n\}$, чтобы для каждого из них $\| p - f(\tau_k) p \| < \delta$. Покажем, что любое число τ_k из этого множества удовлетворяет неравенству $\| q - f(\tau_k) q \| < \varepsilon$. Действительно,

$$\| q - f(\tau_k) q \| = \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i f(t_i) p - \sum_{i=1}^{n} a_i f(t_i + \tau_k) p \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} |a_i| \, \| f(t_i) p - f(t_i) f(\tau_k) p \| \leqslant a \sum_{i=1}^{n} \| f(t_i) p - f(t_i) f(\tau_k) p \| .$$

Но

$$\| p - f(\tau_k) p \| < \delta, \ |t_i| \leqslant T \quad (i = 1, 2, \dots n),$$

следовательно,

$$\| f(t_i) p - f(t_i) f(\tau_k) p \| < \frac{\varepsilon}{an} .$$

Поэтому

$$\| q - f(\tau_k) q \| < an \frac{\varepsilon}{an} = \varepsilon.$$

Теорема доказана.

Таким образом, наименьшее линейное многообразие, содержащее движение любого из упомянутых в этом параграфе типов, состоит из движений того же типа. Инвариантность такого многообразия очевидна.

В наименьшем линейном подпространстве, содержащем данную траекторию, движения, вообще говоря, не однотипны. Возьмем, к примеру, рекуррентную траекторию $f(t)p_1$. Допустим, что порожденное ею линейное подпространство L состоит только из рекуррентных траекторий. Рассмотрим динамическую систему $f_0(t)\bar{p}$, $\bar{p} \in L$, индуцированную исходной л. д. с. $f(t)p$ в подпространстве $\bar{L}$. По предположению все движения в л. д. с. $f_0(t)\bar{p}$ ограничены, поэтому ограничена функция $\| f_0(t) \|$.

Движение $f(t)p_1$ устойчиво по Лагранжу. Из этих двух фактов по замечанию, сделанному в конце § 1, следует, что движение $f(t)p_1$ почти периодично. Так как в § 1 показано существование рекуррентных движений, не являющихся почти периодическими, то замыканию наименьшего линейного многообразия, содержащего рекуррентную траекторию, могут принадлежать даже неограниченные движения. Аналогичные рассуждения применимы к траектории, устойчивой по Лагранжу.

§ 3. Спектр бесконечно малого производящего оператора линейной динамической системы

Бесконечно малым производящим оператором л. д. с. $f(t)p$ называется оператор A, определяемый равенством

$$A = \lim_{t \to 0} \frac{f(t) - f(0)}{t}$$

(имеется в виду сильный предел ([2], стр. 51)).

Естественно возникает вопрос о роли спектра $\sigma(A)$ оператора A, так как в конечномерном случае этот спектр превращается в множество корней характеристического уравнения соответствующей системы дифференциальных уравнений.

Обозначим точечный спектр оператора A ([2], определение 2.14.1) через $P\sigma(A)$. С помощью результатов пункта 15.6 книги [2] нетрудно доказать, что:

1. Если $\beta i \in P\sigma(A)$ (β — вещественное число), то л. д. с. обладает инвариантным подпространством периодических движений периода $\frac{2\pi}{\beta}$ (когда $\beta \neq 0$) или подпространством точек покоя (когда $\beta = 0$).

2. Если $\lambda \in P\sigma(A)$ и $\operatorname{Re}\lambda \neq 0$, то л. д. с. обладает подпространством таких траекторий, одна из полутраекторий которых примыкает к точке θ (начальная точка пространства B), а другая уходит в бесконечность.

3. (Обращение утверждений 1 и 2). Если пространство л. д. с. содержит конечномерное инвариантное линейное подпространство L, то все корни векового уравнения системы дифференциальных уравнений, соответствующих интегральным кривым L, принадлежат точечному спектру оператора A.

По-видимому, роль точечного спектра этим ограничивается. Мы покажем на примере, что для бесконечномерной л. д. с. спектр утрачивает свое определяющее значение.

Рассмотрим динамическую систему примера § 1, положив

$$\alpha(x) = \sqrt{|x|}.$$

Если $p = y(x)$, то $Ap = y'(x)$. Спектр оператора A лежит на мнимой оси, т. к.

$$\| f(t) \| = e^{\sqrt{|t|}} \quad \text{и} \quad \lim_{t \to \pm\infty} \frac{\ln \| f(t) \|}{t} = 0$$

([2], теорема 11. 6. 1). Уравнению

$$Ap = \beta_i p \quad (p = y_1(x) + iy_2(x))$$

соответствует система уравнений

$$y_1'(x) = -\beta y_2(x); \quad y_2'(x) = \beta y_1(x),$$

имеющая решение при любом вещественном β, откуда видно, что спектр чисто точечный и простой), т. е. собственное подпространство чисел β_i и $-\beta_i$ двумерно).

При этих условиях в конечномерном случае все решения были бы почти периодическими, была бы устойчивость начала координат по Ляпунову. Однако в нашей л. д. с. нет ни того ни другого, так как имеются неограниченные в обе стороны траектории, например траектория точки $p = e^{\sqrt{|x|}}$ (множество точек, лежащих на неограниченных траекториях, даже плотно в пространстве B).

В статье [7] И. М. Гельфанд доказал теорему, утверждающую, что, если функция $\| f(t) \|$ ограничена, то спектр оператора A лежит на мнимой оси. В конечномерном случае эта теорема обратима, если о спектре вдобавок известно, что он простой. Наш пример показывает, что в общем случае обращение теоремы Гельфанда при указанном дополнительном условии места не имеет.

Тема настоящей статьи предложена Е. А. Барбашиным. Автор благодарит Е. А. Барбашина за руководство при выполнении работы.

Уральский государственный университет
им. А. М. Горького

Поступило
16 IX 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Немыцкий, В. В. Степанов, Качественная теория дифференциальных уравнений, М.—Л., ГИТТЛ, стр. 550, 1949. 2. Э. Хилл, Функциональный анализ и полугруппы, М., ИЛ, стр. 635, 1951. 3. М. В. Бебутов, О динамических системах, в пространстве непрерывных функций, Бюллетень МГУ, мат., т. II, в. 5, стр. 52, 1941. 4. М. И. Альмухамедов, Пространство полупериодических функций в теории динамических систем, Уч. зап. Казан. гос. пед. ин-та, физ.-мат. ф-т, в. 10, 1955. 5. Б. М. Левитан, Некоторые вопросы теории почти периодических функций 1, УМН, т. II, в. 5 (21), стр. 133—192, 1947. 6. Л. А. Люстерник, В. И. Соболев, Элементы функционального анализа, М.—Л., стр. 360, 1951. 7. И. М. Гельфанд, Об однопараметрических группах операторов в нормированном пространстве, ДАН СССР, т. 25, № 9, 1939.