П. А. Муравьев, Решение операционным методом некоторых дифференциальных уравнений n-го порядка с запаздывающим аргументом (с различными запаздываниями), *Изв. вузов. Матем.*, 1957, номер 1, 175–187

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ
1957 МАТЕМАТИКА № 1

П. А. Муравьев

РЕШЕНИЕ ОПЕРАЦИОННЫМ МЕТОДОМ НЕКОТОРЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ n-го ПОРЯДКА С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ (С РАЗЛИЧНЫМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ)

При математическом описании различных процессов с последействием часто приходится пользоваться дифференциальными уравнениями с запаздывающим аргументом, в частности, с такими уравнениями приходится встречаться в теории и практике автоматического регулирования.

Известно, что в замкнутой форме такие уравнения интегрируются лишь в совершенно исключительных случаях. Поэтому нам представляется целесообразным привести в настоящей работе некоторые новые, результаты по этому вопросу.

Мы будем рассматривать только линейные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами и любым числом *различных* постоянных положительных запаздываний.

§ 1. Имеем уравнение вида

$$Lx(t)+\sum_{i=1}^{r}\Delta_i x(t-\tau_i)=F(t), \tag{1.1}$$

где

$$L\equiv\sum_{k=0}^{n}a_k\frac{d^{n-k}}{dt^{n-k}}\,;\quad \Delta_i\equiv\sum_{k=0}^{n}b_{ik}\frac{d^{n-k}}{dt^{n-k}}\,;$$

$$a_k,\ b_{ik}\text{ — постоянные, } a_0\equiv 1;$$

τ_i — положительные постоянные; $\tau_1<\tau_2<\ldots<\tau_r$;
$F(t)$ — известная функция, преобразуемая по Лапласу и непрерывная для $-\infty<t<\infty$.

Наша задача: доказать существование и единственность решения $x(t)$ уравнения (1.1) при условиях

$$1)\ x(t)\equiv 0 \text{ для } t<0,$$

$$2)\ x^{(k)}(+0)=l_k\ (k=0,1,\ldots,n-1,\ l_k\text{ — const}), \tag{1.2}$$

и построить это решение с помощью операционного метода (преобразование Лапласа).

Сначала мы решим эту задачу для случая $r=1$.

Тогда уравнение (1.1) примет вид:

$$Lx(t)+\Delta_1 x(t-\tau_1)=F(t). \tag{1.3}$$

Решение $x(t)$ уравнения (1.3) будем строить с помощью таких вспомогательных функций, существование которых (как и их изображений) неоспоримо.

Сначала строим функции $x_{(k)}(t)$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$ следующим путем: $x_{(0)}(t)$ есть решение уравнения (без запаздывания)

$$Lx_{(0)}(t) = F(t) \tag{1.4}$$

на всей оси t при условиях:

$$x_{(0)}^{(k)}(0) = l_k \ (k=0,\ 1, \ldots, n-1); \quad x_{(k)}(t) \ (k=1, 2, \ldots)$$

есть решение уравнения (без запаздывания).

$$Lx_{(k)}(t) + \Delta_1 x_{(k-1)}(t-\tau_1) = F(t) \tag{1.5}$$

на всей оси t при условиях:

$$x_{(k)}(k\tau_1) = x_{(k-1)}(k\tau_1), \quad x_{(k)}^{(m)}(k\tau_1) = x_{(k-1)}^{(m)}(k\tau_1) \ (m=1,\ 2, \ldots, n-1), \tag{1.6}$$

где $x_{(k-1)}(t)$ считается найденным.

Известно, что функции $x_{(k)}(t)$ существуют и однозначно определяются на всей оси t наставленными условиями, и существуют их изображения, если предположить существование изображения для $F(t)$.

Очевидно, имеют место следующие соотношения:
для

$$k\tau_1 < t < (k+1)\tau_1: \quad x_{(k)}(t) = x(t) \ (k=0,\ 1,\ 2, \ldots),$$

откуда и следует сразу существование и единственность искомого решения $x(t)$.

Далее полагаем:

$$\left.\begin{aligned} \Delta_k(t) &\equiv x_{(k)}(t) - x_{(k-1)}(t) \quad (k=1, 2, 3, \ldots), \\ \Delta_0(t) &\equiv x_{(0)}(t). \end{aligned}\right\} \tag{1.7}$$

Напишем уравнения:

$$Lx_{(k)}(t) + \Delta_1 x_{(k-1)}(t-\tau_1) = F(t), \tag{a}$$

$$Lx_{(k-1)}(t) + \Delta_1 x_{(k-2)}(t-\tau_1) = F(t). \tag{b}$$

Вычитая из уравнения (a) уравнение (b) получим

$$L\Delta_k(t) + \Delta_1 \Delta_{k-1}(t-\tau_1) = 0 \quad (k=2,\ 3,\ 4, \ldots) \tag{1.8}$$

на всей оси t.

Заметим, что в силу (1.6), $\Delta_k^{(m)}(k\tau_1) \equiv 0$ $(k=1,\ 2,\ 3, \ldots;\ m=0,\ 1, \ldots, n-1)$.

Теперь строим функции вида

$$x_j(t) = \sum_{k=0} \Delta_k(t)\, \eta(t - t\tau_1) \ (j=0, 1, 2, \ldots), \tag{1.9}$$

где

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

/$x_j(k\tau_1)$ и $x_j^{(m)}(k\tau_1)$; $k=1,\ 2,\ 3, \ldots;\ m=1,\ 2, \ldots, n-1$;

определяем „по непрерывности").

Очевидно, для фиксированного j имеем
для

$$k\tau_1 < t < (k+1)\tau_1: \ x_j(t) = x_{(k)}(t) = x(t) \ (k=0,\ 1,\ 2, \ldots, j),$$

откуда в промежутке

$$0 < t < (j+1)\tau_1$$

имеем

$$x_j(t) = x(t);$$

для

$$t < 0: \ x_j(t) \equiv 0;$$

для $t > 0$ вне промежутка

$$0 < t < (j+1)\tau_1 \quad x_j(t) = x_{(j)}(t).$$

Таким образом, функция $x_j(t)$ определена для

$$-\infty < t < \infty, \quad t \neq 0.$$

Условимся обозначать:

$$f(t) \risingdotseq \overline{F}(p), \quad \text{если} \quad \overline{F}(p) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-pt}\, dt.$$

Найдем изображение

$$x_j(t) \risingdotseq \overline{x}_j(p):$$

$$\overline{x}_j(p) = \sum_{k=0}^{j} \left\{ \int_0^\infty \Delta_k(t)\, \eta(t - k\tau_1)\, e^{-pt}\, dt \right\}.$$

В силу свойств функции $\eta(t)$, очевидно, имеем:

$$\overline{x}_j(p) = \sum_{k=0}^{j} \int_{k\tau_1}^{\infty} \Delta_k(t)\, e^{-pt}\, dt. \tag{1.10}$$

Далее будем искать функцию $\overline{x}_j(p)$.

С этой целью сперва найдем $\overline{x}_{(0)}(p) \risingdotseq x_{(0)}(t)$ из операторного уравнения

$$\varphi(p)\, \overline{x}_{(0)}(p) = \overline{F}(p) + f_0(p),$$

соответствующего уравнению (1.4), где

$$\varphi(p) \equiv \sum_{k=0}^{n} a_k p^{n-k}, \quad f_0(p) \equiv \sum_{k=0}^{n-1} A_k p^{n-k-1}, \quad A_k = \sum_{\nu=0}^{k} a_\nu l_{k-\nu}.$$

Таким образом,

$$\overline{x}_{(0)}(p) = \frac{\overline{F}(p) + f_0(p)}{\varphi(p)}. \tag{1.11}$$

Теперь умножим обе части уравнения (1.8) на e^{-pt} и проинтегрируем от $k\tau_1$ до ∞.

Будем иметь

$$\int_{k\tau_1}^{\infty} L\Delta_k(t)\, e^{-pt}\, dt = -\int_{k\tau_1}^{\infty} \Delta_1 \Delta_{k-1}(t - \tau_1)\, e^{-pt}\, dt. \tag{1.12}$$

Выполнив все необходимые действия, получим

$$\int\limits_{k\tau_1}^{\infty} \Delta_k(t)\, e^{-pt}\, dt = -\frac{\theta_1(p)}{\varphi(p)}\, e^{-p\tau_1} \int\limits_{(k-1)\tau_1}^{\infty} \Delta_{k-1}(t)\, e^{-pt}\, dt \quad (k=2,\ 3, \ldots), \tag{1.13}$$

где

$$\theta_1(t) \equiv \sum_{k=0}^{n} b_{1k}\, p^{n-k}.$$

Вычитание из (1.5) (при $k=1$) уравнения (1.4) дает

$$L\Delta_1(t) = -\Lambda_1 x_{(0)}(t-\tau_1). \tag{1.14}$$

Умножая обе части (1.14) на e^{-pt} и интегрируя от τ_1 до ∞, получим

$$\int\limits_{\tau_1}^{\infty} \Delta_1(t)\, e^{-pt}\, dt = -\frac{e^{-p\tau_1}}{\varphi(p)} \left\{ \theta_1(p)\, \bar{x}_{(0)}(p) - f_1(p) \right\}, \tag{1.15}$$

где

$$f_1(p) \equiv \sum_{k=0}^{n-1} B_{1k}\, p^{n-k-1}, \quad B_{1k} = \sum_{\nu=0}^{k} b_{1\nu}\, l_{k-\nu}.$$

$$(\Lambda_1 x_{(0)}(t) \mathrel{\dot{\sim}} \theta_1(p)\, \bar{x}_{(0)}(p) - f_1(p)).$$

Из (1.10), (1.13) и (1.15) выводим:

$$\bar{x}_j(p) = \bar{x}_{(0)}(p) + \sum_{k=1}^{j} (-1)^k e^{-k\tau_1 p} \frac{[\theta_1(p)]^{k-1}}{[\varphi(p)]^k} \left\{ \theta_1(p)\, \bar{x}_{(0)}(p) - f_1(p) \right\},$$

откуда, и из (1.11)

$$x_j(t) \mathrel{\dot{\sim}} \bar{x}_j(p) = \frac{f_0(p)}{\varphi(p)} \sum_{k=0}^{j} (-1)^k q_1^k e^{-k\tau_1 p} +$$

$$+ \frac{f_1(p)}{\varphi(p)}\, e^{-p\tau_1} \sum_{k=0}^{j-1} (-1)^k q_1^k e^{-k\tau_1 p} + \frac{\bar{F}(p)}{\varphi(p)} \sum_{k=0}^{j} (-1)^k q_1^k e^{-k\tau_1 p}, \tag{1.16}$$

где

$$x(t) = x_j(t) \text{ для } 0 < t < (j+1)\tau_1,$$

$$\varphi(p) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, p^{n-k}, \quad \theta_1(p) = \sum_{k=0}^{n} b_{1k}\, p^{n-k},$$

$$q_1 = \frac{\theta_1(p)}{\varphi(p)}, \quad f_0(p) = \sum_{k=0}^{n-1} A_k\, p^{n-k-1},$$

$$A_k = \sum_{\nu=0}^{k} a_\nu\, l_{k-\nu}, \quad f_1(p) = \sum_{k=0}^{n-1} B_{1k}\, p^{n-k-1}, \quad B_{1k} = \sum_{\nu=0}^{k} b_{1\nu}\, l_{k-\nu}.$$

Соотношение (1.16) дает решение задачи, поставленной нами в начале § 1, для случая $r=1$. Легко доказывается существование и непрерывность производных $x^{(k)}(t)$ $(k=1, 2, \ldots, n-1)$ для $t=\tau_1$, $2\tau_1$, $3\tau_1, \ldots$, но производная $x^{(n)}(t)$ при $t=\tau_1$, вообще говоря, не существует, хотя она существует и непрерывна в точках типа $k\tau_1$ $(k=2, 3, 4, \ldots)$.

Прежде, чем перейти к решению нашей задачи для случая $r>1$, докажем лемму, которая нам будет нужна в дальнейшем изложении.

Лемма. *Пусть имеем соотношение вида*

$$u_j(t) \overset{\cdot}{\sim} \bar{u}_j(p) = \sum_{k=0}^{j} \bar{v}_k(p) e^{-k\tau p} \quad (\tau > 0 - \mathrm{const}).$$

Тогда для промежутка $0 < t < (j+1)\tau$ *будет справедливо равенство*

$$u_j(t) = u_{j+m}(t) \quad (m = 1, 2, 3, \ldots). \tag{1.17}$$

Доказательство. Полагая, что $\bar{v}_k(p) \overset{\cdot}{\sim} v_k(t)$, будем иметь

$$u_{j+m}(t) \overset{\cdot}{\sim} \bar{u}_{j+m}(p) = \sum_{k=0}^{j+m} \bar{v}_k(p) e^{-k\tau p} = \bar{u}_j(p) + \sum_{k=j+1}^{j+m} \bar{v}_k(p) e^{-k\tau p} \overset{\cdot}{\sim}$$

$$\overset{\cdot}{\sim} u_j(t) = \sum_{k=j+1}^{j+m} v_k(t - k\tau)\, \eta(t - k\tau) = u_j(t)$$

(для $0 < t < (j+1)\tau$), ибо, в силу свойств функции $\eta(t)$ для $0 < t < (j+1)\tau$, имеем

$$\sum_{k=j+1}^{j+m} v_k(t - k\tau)\, \eta(t - k\tau) = 0,$$

и лемма доказана. Полагая в (1.16)

$$s_1 \equiv \sum_{k=0}^{\left[\frac{t}{\tau_1}\right]} m_1^k, \quad m_1 \equiv -q_1 e^{-p\tau_1}$$

и применяя к нему лемму, будем иметь для всякого

$$t > 0 \text{ и } j = \left[\frac{t}{\tau_1}\right]:$$

$$x_j(t) \overset{\cdot}{\sim} \bar{x}_j(p) = \frac{s_1}{\psi(p)} \left[f_0(p) + f_1(p) e^{-p\tau_1} + \bar{F}(p) \right]. \tag{1.18}$$

Введем следующие обозначения, нужные нам в дальнейшем изложении:

$$
\left.
\begin{aligned}
&m_i \equiv -q_i e^{-p\tau_i}, \quad \theta_i(p) \equiv \sum_{k=0}^{n} b_{ik} p^{n-k},\\
&q_i \equiv \frac{\theta_i(p)}{\varphi(p)}, \quad f_i(p) \equiv \sum_{k=0}^{n-1} B_{ik} p^{n-k-1};\\
&B_{ik} \equiv \sum_{\nu=0}^{k} b_{i\nu} l_{k-\nu} \; (i=1, 2, \dots, r); \quad g_i \equiv s_i s_{i-1} \dots s_2 s_1;\\
&\sigma_1 \equiv m_1, \; \sigma_2 \equiv g_1 m_2, \; \sigma_3 \equiv g_2 m_3, \dots, \; \sigma_j = g_{j-1} m_j;\\
&s_j \equiv \sum_{k=0}^{\left[\frac{t}{\tau_j}\right]} \sigma_j^k; \quad \Phi_r(p) \equiv \sum_{i=0}^{r} f_i(p) e^{-p\tau_i} \; (\tau_0 \equiv 0).
\end{aligned}
\right\} \qquad (a)
$$

Теперь докажем следующую теорему:

Теорема. *Решение $x(t)$ уравнения* (1.1) *при условиях* (1.2) *существует для* $t > 0\,(t \neq m\tau_k,\; k=1, 2, \dots, \tau;\; m=1, 2, 3, \dots)$ *и определяется соотношением вида*

$$
x(t) \doteqdot \bar{x}_t(p) = \frac{g_r}{\varphi(p)} \left\{ \bar{F}(p) + \Phi_r(p) \right\}, \tag{1.19}
$$

где $\bar{x}_t(p)$ *есть изображение такого оригинала, который при любом фиксированном* $t = t_0 > 0$ *равен* $x(t_0)$*.

Доказательство. Мы доказали, что теорема верна для случая $r=1$. Предполагаем, что она верна для случая $r=\rho$, и докажем, что она верна при $r=\rho+1$.

При $r=\rho$ уравнение

$$
Lx(t) + \sum_{i=1}^{\rho} \Delta_i x(t-\tau_i) = F(t) \tag{1.20}
$$

имеет решение $x(t)$ при условиях (1.2), определяемое соотношением

$$
x(t) \doteqdot \bar{x}_t(p) = \frac{g_\rho}{\varphi(p)} \left\{ \bar{F}(p) + \Phi_\rho(p) \right\}. \tag{1.21}
$$

С помощью соотношения (1.21) мы докажем, что уравнение

$$
Lx(t) + \sum_{i=1}^{\rho+1} \Delta_i x(t-\tau_i) = F(t) \tag{1.22}
$$

при условиях (1.2) имеет решение $x(t)$, определяемое соотношением

$$
x(t) \doteqdot \bar{x}_t(p) = \frac{g_{\rho+1}}{\varphi(p)} \left\{ \bar{F}(p) + \Phi_{\rho+1}(p) \right\}. \tag{1.23}
$$

Строим последовательность функций $\{x_k(t)\}$, определяемых уравнениями

---

* $\bar{x}_t(p)$ есть семейство функций от p с параметром t.

$$Lx_k(t)+\sum_{i=1}^{\rho}\Delta_i x_k(t-\tau_i)=\psi_k(t)\quad (k=0,\ 1,\ 2,\ldots) \tag{1.24}$$

для $$0<t<\infty$$

при условиях:

$$1)\ x_k(t)\equiv 0 \text{ для } t<0,\quad 2)\ x_k^{(m)}(+0)=l_m\ (m=0,1,\ldots,n-1), \tag{1.25}$$

где $\psi_k(t)$ — известные функции, преобразуемые по Лапласу, непрерывные для $-\infty<t<\infty$, которые определим ниже.

Решения $x_k(t)$ этих уравнений определяются соотношениями:

$$x_k(t)\dot{\sim}\frac{g_\rho}{\varphi(p)}\left\{\bar{\psi}_k(p)+\Phi_\rho(p)\right\}, \tag{1.26}$$

которые справедливы согласно предположению.

Сначала найдем решение $x(t)$ уравнения (1.22) при условиях (1.2) для $0<t<\tau_{\rho+1}$.

Легко видеть, что в этом случае $x(t)=x_0(t)$ уравнения (1.24), в котором $\bar{\psi}_0(p)=\bar{F}(p)$.

Применяя (1.26), получим

$$x_0(t)\dot{\sim}\bar{x}_0(p)=\frac{g_\rho}{\varphi(p)}\left\{\bar{F}(p)+\Phi_\rho(p)\right\}. \tag{1.27}$$

Далее замечаем, что если положить в (1.24)

$$\psi_k(t)=F(t)-\Delta_{\rho+1}x_{k-1}(t-\tau_{\rho+1})\quad (k=1,2,3,\ldots), \tag{1.28}$$

то для промежутка

$$k\tau_{\rho+1}<t<(k+1)\tau_{\rho+1} \tag{1.29}$$

решение $x(t)$ уравнения (1.22) будет совпадать с $x_k(t)$ уравнения (1.24), т. е.

$$x(t)=x_k(t) \text{ для } k\tau_{\rho+1}<t<(k+1)\tau_{\rho+1}. \tag{1.30}$$

Очевидно имеем

$$\bar{\psi}_k(p)=\bar{F}(p)-e^{-p\tau_{\rho+1}}\left[\theta_{\rho+1}(p)\bar{x}_{k-1}(p)-f_{\rho+1}(p)\right]. \tag{1.31}$$

Из (1.24), (1.26), (1.28) и (1.31) следует:

$$x_k(t)\dot{\sim}\bar{x}_k(p)=g_\rho\left\{\frac{\bar{F}(p)}{\varphi(p)}+m_{\rho+1}\bar{x}_{k-1}(p)+\frac{f_{\rho+1}(p)}{\varphi(p)}e^{-p\tau_{\rho+1}}+\frac{\Phi_\rho(p)}{\varphi(p)}\right\}. \tag{1.32}$$

Последовательно полагая в соотношении (1.32) $k=1,\ 2,\ 3,\ldots$, получим

$$\bar{x}_k(p)=\frac{g_\rho}{\varphi(p)}\left\{\bar{F}(p)\sum_{j=0}^{k}\sigma_{\rho+1}^{j}+\Phi_{\rho+1}(p)\sum_{j=0}^{k}\sigma_{\rho+1}^{j}+\right.$$

$$\left.+f_{\rho+1}(p)e^{-p\tau_{\rho+1}}\sum_{j=0}^{k-1}\sigma_{\rho+1}^{j}\right\}. \tag{1.33}$$

В силу (1.29): $k=\left[\frac{t}{\tau_{\rho+1}}\right]$, а в силу принятых нами выше обозначений (α):

$$s_{\rho+1} = \sum_{j=0}^{\left[\frac{t}{\tau_{\rho+1}}\right]} \sigma_{\rho+1}^{j}.$$

Учитывая это и применяя лемму к последнему слагаемому правой части равенства (1.33), будем иметь

$$x(t) \risingdotseq \overline{x}_t(p) = \frac{g_{\rho+1}}{\varphi(p)} \left\{ \overline{F}(p) + \Phi_{\rho+1}^{t}(p) \right\}, \tag{1.34}$$

т. е. мы получили (1.23), что и доказывает нашу теорему. Эта теорема дает полное решение задачи, поставленной в начале этого §, т. е. мы доказали, что уравнение (1.1) при условиях (1.2) имеет единственное решение, определяемое соотношением (1.19).

§ 2. Задача настоящего § состоит в том, чтобы, пользуясь соотношением (1.19), получить эффективные формулы для нахождения решения $x(t)$ уравнения (1.1) при условиях (1.2). Для большей определенности мы рассмотрим тот наиболее часто встречающийся случай, когда $r=1$. В этом случае, как мы видели, будет имет место соотношение (1.18).

Запишем его в виде

$$x_j(t) \risingdotseq \overline{x}_j(p) = \overline{z}_j(p) + \overline{v}_j(p), \tag{2.1}$$

где

$$\overline{z}_j(p) \equiv [f_0(p) + f_1(p)e^{-p\tau_1}] \frac{s_1}{\varphi(p)}, \quad \overline{v}_j(p) \equiv \frac{\overline{F}(p)}{\varphi(p)} s_1(p).$$

Сначала будем искать

$$z_j(t) \risingdotseq \overline{z}_j(p).$$

$$\overline{z}_j(p) = \sum_{\rho=0}^{n-1} A_\rho p^{n-\rho-1} \sum_{k=0}^{j} \frac{[\theta_1(p)]^k}{[\varphi(p)]^{k+1}} e^{-k\tau_1 p} +$$

$$+ \sum_{\rho=0}^{n-1} B_{1\rho} p^{n-\rho-1} \sum_{k=0}^{j} \frac{[\theta_1(p)]^k}{[\varphi(p)]^{k+1}} e^{-(k+1)\tau_1 p}. \tag{2.2}$$

Из (2.2) видно, что для нахождения функции $z_j(t)$ нужно уметь находить „оригиналы“ правильных рациональных дробей, для чего можно было бы воспользоваться „теоремами разложения“ операционного исчисления. Но этот путь практически почти не применим, так как требует больших вычислительных усилий. В силу этого мы должны были отказаться от использования „теорем разложения“ и искать других путей решения задачи. Сейчас мы покажем один из возможных приемов решения задачи о нахождении „оригинала“ правильной рациональной дроби, имеющей кратные полюсы.

Преобразуем правую часть (2.2) следующим путем:

Представим многочлен $\varphi(p)$ в виде произведения

$$\varphi(p) = \prod_{\omega=1}^{n} \alpha_\omega,$$

где

$$\alpha_\omega = p - \beta_\omega, \quad \beta_\omega \text{ — корни } \varphi(p).$$

Корни $\varphi(p)$ могут быть простыми и кратными. Обозначим число различных корней $\varphi(p)$ через $m (m \leqslant n)$, а кратности корней $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ соответственно обозначим через $h_1, h_2, \ldots, h_m$.

Тогда многочлен $\varphi(p)$ примет вид:

$$\varphi(p) = \prod_{\omega=1}^{m} \alpha_{\omega}^{h_\omega};$$

$$[\varphi(p)]^N = \prod_{\omega=1}^{m} \alpha_{\omega}^{N_\omega},$$

где

$$N = k+1, \quad N_\omega = N h_\omega. \tag{2.3}$$

Выражение $[\theta_1(p)]^k$ представим в виде

$$[\theta_1(p)]^k = \left\{ \sum_{s=0}^{n} b_{1s} p^{n-s} \right\}^k.$$

Применяя последовательно формулу бинома Ньютона, получим

$$[\theta_1(p)]^k = k! \sum_{m_1=0}^{k} \frac{b_{1n}^{k-m_1}}{(k-m_1)!} \sum_{m_2=0}^{m_1} \frac{b_{1,\,n-1}^{m_1-m_2}}{(m_1-m_2)!} \cdots$$

$$\cdots \sum_{m_n=0}^{m_{n-1}} \frac{b_{11}^{m_{n-1}-m_n} b_{10}^{m_n}}{(m_{n-1}-m_n)!\, m_n!} p^{m_1+m_2+\cdots+m_n}. \tag{2.4}$$

Для более краткой записи введем новый символ, который назовем „кратная сумма порядка n" и определим так:

$$\left\{ \int\limits_{m_{i+1}=0}^{m_i} v_{m_i}^{(i+1)} \right\}_{i(0,\,n)} \equiv \sum_{m_1=0}^{k} v_{m_0}^{(1)} \sum_{m_2=0}^{m_1} v_{m_1}^{(2)} \cdots \sum_{m_n=0}^{m_{n-1}} v_{m_{n-1}}^{(n)} \cdot v_{m_n}^{(n+1)}, \tag{2.5}$$

где индекс i пробегает все натуральные значения от 0 до n включительно:

$$m_0 \equiv k, \quad m_{n+1} \equiv 0, \quad \sum_{m_{n+1}=0}^{m_n} v_{m_n}^{(n+1)} \equiv v_{m_n}^{(n+1)}.$$

Теперь равенство (2.4) примет вид:

$$[\theta_1(p)]^k = k! \left\{ \int\limits_{m_{i+1}=0}^{m_i} \frac{b_{1,\,n-i}^{m_i-m_{i+1}}}{(m_i-m_{i+1})!} p^{m_1+m_2+\cdots+m_n} \right\}_{i(0,\,n)}. \tag{2.6}$$

Учитывая (2.3) и (2.6), мы можем записать равенство (2.2) в виде

$$\overline{z}_j(p) = \sum_{\rho=0}^{n-1} A_\rho \sum_{k=0}^{j} k! \left\{ \int\limits_{\substack{m_{l+1}=0 \\ i(0,\, n)}}^{m_l} \frac{b_{1,\, n-l}^{m_l - m_{l+1}}}{(m_l - m_{l+1})!} \cdot \frac{pM}{\prod\limits_{\omega=1}^{m} \alpha_\omega^{N_\omega}} \right\} e^{-k\tau_1 p} +$$

$$+ \sum_{\rho=0}^{n-1} B_{1\rho} \sum_{k=0}^{j} k! \left\{ \int\limits_{\substack{m_{l+1}=0 \\ i(0,\, n)}}^{m_l} \frac{b_{1,\, n-l}^{m_l - m_{l+1}}}{(m_l - m_{l+1})!} \cdot \frac{pM}{\prod\limits_{\omega=1}^{m} \alpha_\omega^{N_\omega}} \right\} e^{-(k+1)\tau_1 p}, \tag{2.7}$$

где

$$M = n - \rho - 1 + m_1 + m_2 + \ldots + m_n, \quad N_\omega = Nh_\omega, \quad N = k + 1.$$

Отсюда следует, что для нахождения функции $z_j(t) \dot{\sim} \overline{z}_j(p)$ нужно уметь находить оригинал функции вида

$$L(p) \equiv \frac{pM}{\alpha_1^{N_1} \alpha_2^{N_2} \ldots \alpha_m^{N_m}} \dot{\sim} u_{MN}(t). \tag{2.8}$$

Известно, что в этом случае имеет место формула обращения:

$$u_{MN}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{s-i\infty}^{s+i\infty} L(p) e^{pt} dp,$$

где интеграл берется вдоль любой прямой $Re\, p = s > s_0$ и понимается в смысле главного значения (s_0 — абсцисса сходимости). Функция $u_{MN}(t)$ равна сумме вычетов функции

$$g(p) \equiv L(p) e^{pt}$$

в точках $p = \beta_\rho$ ($\rho = 1, 2, \ldots, m$) [1].

Применение известных формул для вычисления вычетов в кратных полюсах требует больших вычислительных усилий, поэтому мы избрали другой прием, а именно, мы разложили подинтегральную функцию $g(p)$ в ряд Лорана по степеням α_ρ ($\rho = 1, 2, \ldots, m$). Коэффициент разложения при α_ρ^{-1} и есть вычет функции $g(p)$ при $\alpha_\rho = 0$.

Идя таким путем, мы получили следующие формулы операторных соотношений:

$$L(p) = \frac{pM}{\alpha_1^{N_1} \alpha_2^{N_2} \ldots \alpha_m^{N_m}} \dot{\sim} u_{MN}(t), \tag{I}$$

где

$$M = 0, 1, 2, \ldots; \; N_\rho = 1, 2, 3, \ldots; \; \alpha_\rho = p - \beta_\rho \quad (\rho = 1, 2, \ldots, m);$$

β_ρ — корни $\varphi(p)$;

$$M < N_1 + N_2 + \ldots + N_m.$$

$$u_{MN}(t) = \sum_{\rho=1}^{m} u_{MN_\rho}^{(\beta_\rho)}(t). \tag{II}$$

$$u_{MN_\rho}^{(\beta_\rho)}(t) = e^{\beta_\rho t} \sum_{r=0}^{N_\rho - 1} \gamma_{rMN_\rho}^{(\beta_\rho)} \cdot t^r. \tag{III}$$

$$\gamma_{rMN_\rho}^{(\beta_\rho)} = \frac{M!}{r!\prod\limits_{k=1}^{m-1}(s_k-1)!\,\sigma_k^{s_k}} \cdot \sum_{\nu=\mu}^{M} \frac{\beta_\rho^\nu}{\nu!\,(M-\nu)!}(-1)^\lambda \times$$

$$\times \Bigg\{ \int\limits_{\lambda_i=0}^{\lambda_{i+1}} \frac{(s_{i+1}+\lambda_{i+1}-\lambda_i-1)!}{(\lambda_{i+1}-\lambda_i)!\,\sigma_{i+1}^{\lambda_{i+1}-\lambda_i}} \Bigg\}, \qquad \text{(IV)}$$
$$i(m-2,\ 0)$$

где

$$\lambda = N_\rho + \nu - M - r - 1,\ \ \mu = -N_\rho + M + r + 1,\ s_k =$$
$$= \begin{cases} N_k, & k < \rho \\ N_{k+1}, & k \geqslant \rho \end{cases},\quad \sigma_k = \begin{cases} \beta_\rho - \beta_k, & k < \rho \\ \beta_\rho - \beta_{k+1}, & k \geqslant \rho \end{cases};$$

$\Big\{ \int\limits_{\lambda_i=0}^{\lambda_{i+1}} (\ldots) \Big\}_{i(m-2,0)}$ — символ „кратной суммы порядка $m-2$" типа (2.5), где индекс i пробегает все натуральные значения от $m-2$ до 0 включительно,

$$\lambda_0 \equiv 0,\ \lambda_{m-1} \equiv \lambda,\quad \sum_{\lambda_0=0}^{\lambda_1} \frac{(s_1+\lambda_1-1)!}{\lambda_1!\,\sigma_1^{\lambda_1}} \equiv \frac{(s_1+\lambda_1-1)!}{\lambda_1!\,\sigma_1^{\lambda_1}}.$$

Заметим, что в литературе нам не приходилось встречать подобных формул операторных соотношений. Эти формулы представляют из себя обобщение большого числа формул, содержащихся в справочниках по операционному исчислению. Так, например, в справочнике [2] формулы 1.1—1.152 могут быть получены из наших формул I—IV как частные случаи последних. Кроме того, формулы I — IV дают возможность получить в качестве частных случаев многие другие операционные формулы, не содержащиеся в справочниках.

В силу (2.7), получаем следующее выражение для функции $z_j(t)$:

$$z_j(t) = \sum_{\rho=0}^{n-1} A_\rho \sum_{k=0}^{j} k!\Bigg\{ \int\limits_{m_{i+1}=0}^{m_i} \frac{b_{1,\,n-i}^{m_i-m_{i+1}}}{(m_i-m_{i+1})!}\, u_{MN}(t-k\tau_1)\Bigg\}_{i(0,\ n)} \eta(t-k\tau_1) +$$

$$+ \sum_{\rho=0}^{n-1} B_{1\rho} \sum_{k=0}^{j} k!\Bigg\{ \int\limits_{m_{i+1}=0}^{m_i} \frac{b_{1,\,n-i}^{m_i-m_{i+1}}}{(m_i-m_{i+1})!}\, u_{MN}(t-(k+1)\tau_1)\Bigg\}_{i(0,\ n)} \eta(t-(k+1)\tau_1), \qquad (2.9)$$

где

$$M = n - \rho - 1 + m_1 + m_2 + \ldots + m_n,\quad N = k + 1.$$

Заметим, что функция $v_j(t) \dot{\sim} \overline{v}_j(p)$ может быть найдена совершенно аналогично в том случае, когда функция $\overline{F}(p)$ есть рациональная дробь. Если в (2.1) $\overline{F}(p) = 0$, то $x_j(t) = z_j(t)$.

Таким образом, мы показали как найти функцию $x_j(t) = x(t)$ для $0 < t < (j+1)\tau_1$ в случае, когда $r = 1$ в соотношении (1 19). Легко видеть, что, если в соотношении (1.19) $r > 1$, то функция $\overline{x}_t(p)$ при $\overline{F}(p) = 0$ может быть представлена как сумма слагаемых вида

$$R(p)\, e^{-p(\nu_1\tau_1 + \nu_2\tau_2 + \cdots + \nu_r\tau_r)}, \tag{2.10}$$

где $R(p)$ — правильная рациональная дробь относительно p,

$$\nu_k = 0,\ 1,\ 2, \ldots \quad (k = 1,\ 2, \ldots,\ r).$$

Следовательно, и в этом случае искомая функция $x(t)$ может быть найдена с помощью наших формул I—IV.

В заключение приведем технический пример.

Пример [3]. В статье В. К. Глухова рассматривается схема регулятора солесодержания котловой воды, которая приводит автора к уравнению:

$$\varphi'''(t) + c_1\varphi''(t) + c_2\varphi'(t) + d_1\varphi'(t-\tau) + d_2\varphi(t-\tau) = 0, \tag{1}$$

где c_1, c_2, d_1, d_2, τ — постоянные, $\tau > 0$. Приводим наше решение этого уравнения (автор не дает решения).

С помощью подстановки

$$\varphi(t) = e^{kt}x(t) \text{ при } k = -\frac{c_1}{3} \tag{2}$$

уравнение (1) примет вид:

$$x'''(t) + a_2x'(t) + a_3x(t) + b_{12}x'(t-\tau) + b_{13}x(t-\tau) = 0. \tag{3}$$

Будем его решать при условиях:

$$x(t) \equiv 0 \text{ для } t < 0,\ x(+0) = l_0,\ x'(+0) = l_1,\ x''(+0) = l_2. \tag{4}$$

В нашем примере имеем

$$\left.\begin{aligned} &\varphi(p) = p^3 + a_2p + a_3,\ f_0(p) = A_0p^2 + A_1p + A_2,\\ &\qquad A_0 = l_0,\ A_1 = l_1,\ A_2 = a_2l_0 + l_2;\\ &\theta_1(p) = b_{12}p + b_{13};\ f_1(p) = B_{12} = b_{12}l_0,\ B_{10} = B_{11} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Полагаем, что $\beta_1 \neq \beta_2 \neq \beta_3$.

В силу (2.9), имеем

$$x_j(t) = \sum_{\rho=0}^{2} A_\rho \sum_{k=0}^{j} k!\Bigg\{\int\limits_{\substack{m_{i+1}=0\\ i(0,\ 3)}}^{m_i} \frac{b_{1,\,3-i}^{m_i - m_{i+1}}}{(m_i - m_{i+1})!}\, u_{MN}(t-k\tau)\Bigg\}\eta(t-k\tau) +$$

$$+ \sum_{\rho=0}^{2} B_{1\rho} \sum_{k=0}^{j} k!\Bigg\{\int\limits_{\substack{m_{i+1}=0\\ i(0,\ 3)}}^{m_i} \frac{b_{1,\,3-i}^{m_i - m_{i+1}}}{(m_i - m_{i+1})!}\, u_{MN}(t-(k+1)\tau)\Bigg\}\eta(t-(k+1)\tau), \tag{6}$$

где

$$M = 2 - \rho + m_1 + m_2 + m_3,\quad N = k + 1,\quad h_\omega = 1.$$

В силу того, что $b_{10} = b_{11} = 0$, имеем

$$\Bigg\{\int\limits_{\substack{m_{i+1}=0\\ i(0,\ 3)}}^{i} \frac{b_{1,\,3-i}^{m_i - m_{i+1}}}{(m_i - m_{i+1})!}\Bigg\} = \sum_{m_1=0}^{k} \frac{b_{13}^{k-m_1}\, b_{12}^{m_1}}{(k-m_1)!\, m_1!}, \tag{7}$$

следовательно, $m_2 = m_3 = 0$ и в (6) $M = 2 - \rho + m_1$.

Теперь равенство (6) примет вид:

$$x_j(t)=\sum_{\rho=0}^{2}A_\rho\sum_{k=0}^{j}k!\sum_{m_1=0}^{k}\frac{b_{13}^{k-m_1}b_{12}^{m_1}}{(k-m_1)!\,m_1!}\cdot u_{MN}(t-k\tau)\,\eta(t-k\tau)+$$

$$+\sum_{\rho=0}^{2}B_{1\rho}\sum_{k=0}^{j}k!\sum_{m_1=0}^{k}\frac{b_{13}^{k-m_1}b_{12}^{m_1}}{(k-m_1)!\,m_1!}\,u_{MN}(t-(k+1)\tau)\,\eta(t-(k+1)\tau). \qquad (8)$$

Функции $u_{MN}(t)$ находим по формулам I—IV, которые в нашем случае примут вид:

$$L(p)=\frac{p^M}{(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)^N}\ \dot{\sim}\ u_{MN}(t); \qquad (\mathrm{I})$$

$$u_{MN}(t)=\sum_{\rho=1}^{3}u_{MN}^{(\beta_\rho)}(t); \qquad (\mathrm{II})$$

$$u_{MN}^{(\beta_\rho)}(t)=e^{\beta_\rho t}\sum_{r=0}^{N-1}\gamma_{rMN}^{(\beta_\rho)}\cdot t^r; \qquad (\mathrm{III})$$

$$\gamma_{rMN}^{(\beta_\rho)}=\frac{M!}{r!\,[(N-1)!]^2\prod_{k=1}^{2}\sigma_k^N}\sum_{\nu=\mu}^{M}\frac{\beta_\rho^\nu}{\nu!\,(M-\nu)!}(-1)^\lambda\times$$

$$\times\sum_{\lambda_1=0}^{\lambda}\frac{(N+\lambda-\lambda_1-1)!\,(N+\lambda_1-1)!}{(\lambda-\lambda_1)!\,\lambda_1!\,\sigma_2^{\lambda-\lambda_1}\sigma_1^{\lambda_1}}, \qquad (\mathrm{IV})$$

где

$$\lambda=N+\nu-M-r-1,\quad \mu=-N+M+r+1,\quad \sigma_k=\begin{cases}\beta_\rho-\beta_k, & k<\rho\\ \beta_\rho-\beta_{k+1}, & k\geqslant\rho.\end{cases}$$

Ивановский энергетический институт
имени В. И. Ленина

Поступило
30 IX 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, Методы теории функций комплексного переменного, ГТТИ, М., стр. 421, 1951. 2. В. А. Диткин, А. И. Кузнецов, Справочник по операционному исчислению, ГТТИ, М., стр. 112—126, 1951. 3. В. К. Глухов, Автоматическое регулирование солесодержания котловой воды, Ж. „Теплоэнергетика“, № 7, 1954.