Р. И. Кирищиев, О геометрических построениях в плоскости Лобачевского при помощи прямой линии и точки, *Изв. вузов. Матем.*, 1957, номер 1, 161–165

Р. И. Кирищиев

О ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПОСТРОЕНИЯХ В ПЛОСКОСТИ ЛОБАЧЕВСКОГО ПРИ ПОМОЩИ ПРЯМОЙ ЛИНИИ И ТОЧКИ

В 1951 году К. К. Мокрищевым была доказана возможность решения конструктивных задач второй степени в плоскости Лобачевского при помощи линейки с параллельными бортами и отмеченной на одном из них произвольной точкой (1). В 1954 году мною было дано доказательство аналогичного предложения для линейки с расходящимися бортами и отмеченной на одном из них произвольной точкой (2), (3). В то время я занимался геометрическими построениями в плоскости Лобачевского под руководством ныне покойного профессора Николая Михайловича Несторовича. О своем учителе я вспоминаю как о прекрасном человеке, педагоге, ученом. Продолжительные содержательные беседы с ним развили во мне интерес к геометрическим построениям и к геометрии Лобачевского. Один из вопросов теории геометрических построений в плоскости Лобачевского, являющийся продолжением упомянутых выше работ, и рассматривается в настоящей статье.

Нами будет доказана теорема:

Любая геометрическая задача на построение второй степени в плоскости Лобачевского может быть решена при помощи жестко соединенных прямой линии и точки.

Такой чертежный инструмент можно представить себе, например, в виде пластинки, один борт которой прямолинеен, а на другом отмечена фиксированная точка. В дальнейшем мы будем называть этот инструмент ш а б л о н о м, прямолинейный борт его — б о р т о м и фиксированную точку — в е р ш и н о й.

При помощи шаблона можно осуществлять конструктивные операции, которые устанавливаются следующими постулатами:

Постулат I. Бортом шаблона можно пользоваться как обычной однобортной линейкой.

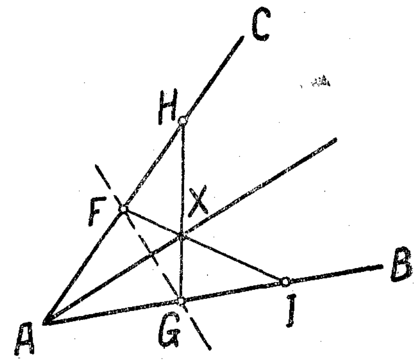
Постулат II. Если в плоскости даны или построены две пересекающиеся прямые, то шаблон можно наложить на плоскость так, что его борт совпадет с одной из прямых, а вершина ляжет на другую; при этом можно отметить положение вершины в плоскости.

Для доказательства теоремы достаточно показать, как решаются 15 задач (1°—8° элементарные, I°—IV° основные и A°— B° главные), к которым сводится любая задача на построение второй степени (4). При решении этих задач может возникнуть необходимость решить вспомогательные задачи; их мы будем нумеровать строчными буквами (а°, б° и т. д.).

Условимся, положение вершины шаблона на чертежах обводить кружочком, и прямые углы отмечать зачерненным квадратиком.

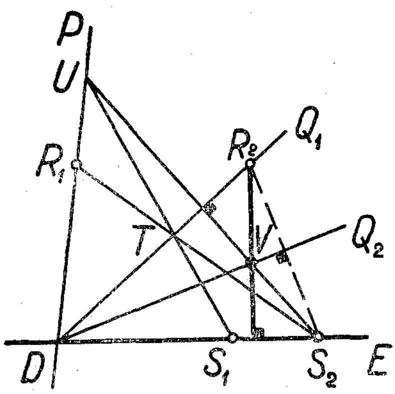
Приступаем к решению достаточных 15 задач.

1°. *Разделить угол BAC пополам (построить биссектрису угла).* Накладываем шаблон на плоскость так, чтобы борт его совпал со стороной AB угла, а вершина легла на сторону AC, и отмечаем ее положение точкой F (постулат II, фигура 1). Потом накладываем шаблон так, чтобы его борт совпал со стороной AC угла, а вершина легла на AB, и отмечаем ее положение точкой G. Теперь прикладываем шаблон бортом к прямой FG так, чтобы вершина его легла сначала на сторону AB, а затем — на AC, и в обоих случаях отмечаем положение вершины точками I и H. Если обозначить $X \equiv HG \times FI$, то AX — биссектриса угла.



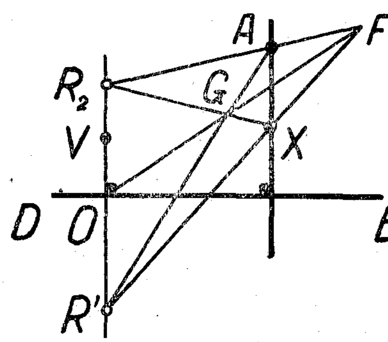
Фиг. 1.

$a°$. *Провести какую-нибудь прямую, перпендикулярную прямой DE.* Проводим через точку D произвольную прямую DP (фигура 2) и строим биссектрису DQ_1 угла EDP (задача 1°). Положение вершины шаблона на сторонах угла при построении биссектрисы мы обозначим буквами R_1 и S_1. Строим биссектрису DQ_2 угла EDQ_1 (задача 1°), и положение вершины шаблона при построении этой биссектрисы обозначим буквами R_2 и S_2. Проводим R_1S_2; $R_1S_2 \times DQ_1 \equiv T$. Проводим S_1T; $S_1T \times DP \equiv U$. Очевидно, точки S_2 и U симметричны относительно DQ_1. Рассмотрим треугольник DR_2S_2. В нем DQ_2 и S_2U являются высотами. Если теперь через точку R_2 и точку V пересечения высот провести прямую, то она будет третьей высотой треугольника (5, стр. 202, теорема 3а), то есть $R_2V \perp DE$.



Фиг. 2.

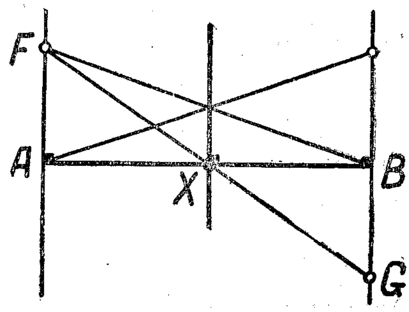
2°. *Из точки A опустить перпендикуляр на прямую DE.* Строим прямую $R_2V \perp DE$ (задача a°); $R_2V \times DE \equiv 0$ (фигура 3). Прикладываем шаблон бортом к прямой DE так, чтобы вершина легла на продолжение перпендикуляра за точку O, и отмечаем положение вершины точкой R'. Точки R_2 и R' симметричны относительно DE, поэтому $R_2O = OR'$. Проводим прямую R_2A и отмечаем на ней произвольную точку F, лежащую с R_2 по разные стороны A. Проводим прямые OF, $R'F$, $R'A$ и R_2G, где $G \equiv OF \times R'A$. Обозначим $X \equiv R_2G \times R'F$; тогда $AX \perp DE$. Достоверность построения легко устанавливается из рассмотрения свойств полного четырехугольника $AFGX$.



Фиг. 3.

3°. *В точке D восстановить перпендикуляр к прямой DE.* Решается, как и задача 2°.

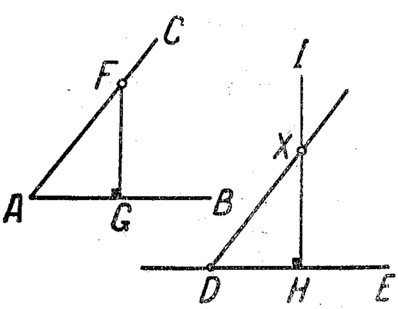
4°. *Разделить отрезок AB пополам.* Восставляем в точках A и B перпендикуляры к AB (фиг. 4). Затем прикладываем шаблон бортом к AB так, чтобы вершина его легла сначала на один проведенный перпендикуляр, а потом — на другой, и в обоих случаях отмечаем положение ее точками F и G. Если эти точки лежат по разные стороны AB, то прямая FG пересечет отрезок AB в его середине X. В случае необходимости построить медиатрису отрезка AB (перпендикуляр к нему в точке X), выполняют дополнительное построение, ясное из приводимого чертежа.



Фиг. 4.

5°. *Удвоить угол BAC.* Прикладываем шаблон бортом к стороне AC угла так, чтобы вершина его легла на AB, и отмечаем положение ее точкой F. Опускаем из F перпендикуляр FG на AC (задача 2°, G — основание перпендикуляра). Затем прикладываем шаблон бортом к AC так, чтобы вершина его легла на продолжение перпендикуляра FG за точку G, и отмечаем ее положение точкой X. Тогда $\angle BAX = 2\angle BAC$.

6°. *Удвоить отрезок AB.* Восставляем в точке B перпендикуляр к AB (задача 3°) и отмечаем на нем произвольную точку F. Удваиваем угол AFB (задача 5°): $\angle AFC = 2\angle AFB$. Сторона FC удвоенного угла пересечет продолжение AB в точке X так, что $AX = 2AB$.

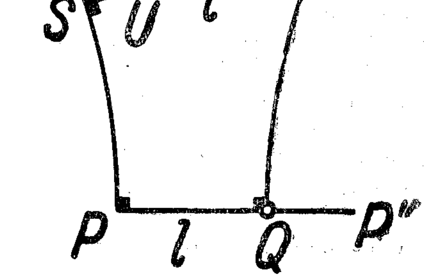


Фиг. 5.

7°. *Перенести отрезок AB на прямую DE, отложив его от точки D* (4, задача 370).

8°. *Перенести угол BAC в точку D, отложив его от прямой DE.* Накладываем шаблон бортом на AB, а вершиной — на AC, и отмечаем положение вершины точкой F (фигура 5). Проводим $FG \perp AB$, G — основание перпендикуляра. Строим на DE отрезок $DH = AG$ (задача 7°). Проводим $HI \perp DE$. Накладываем шаблон бортом на DE так, чтобы вершина легла на HI, и отмечаем ее положение точкой X. Угол EDX — искомый.

6°. *Построить какие-нибудь угол τ и отрезок t, связанные условием* $\tau = \Pi(t)$. Строим две взаимноперпендикулярные прямые PP' и PP'' (задача a°). Прикладываем шаблон бортом к прямой PP' так, чтобы вершина легла на PP'', и отмечаем ее положение точкой Q (фигура 6). Проводим прямые $QR \perp PP''$, где R — произвольная точка на QR, $RS \perp PP'$ (S — основание перпендикуляра) и $RT \perp QR$. Накладываем шаблон бортом на RT, а вершиной — на RS, и отмечаем положение вершины точкой U. Проводим $UV \perp RT$, где V — основание перпендикуляра. Если обозначить $RS = t$ и $\angle RUV = \tau$, то $\tau = \Pi(t)$. Для доказательства



Фиг. 6.

введем обозначения $PQ = UV = l$, $\angle QRS = \varphi$. Из трипрямоугольника $PQRS$ имеем

$$\operatorname{ch}\frac{l}{k} = \operatorname{ch}\frac{t}{k}\cdot\sin\varphi.$$

Из прямоугольного треугольника RUV имеем

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \operatorname{ch}\frac{l}{k}\cdot\sin\tau.$$

Написанные равенства приводят к следующему:

$$\sin\tau = \frac{1}{\operatorname{ch}\frac{t}{k}}.$$

Отсюда заключаем, что $\tau = \Pi(t)$.

Г°. *Через точку A провести прямую, параллельную прямой DE.* Выполняем в стороне построение задачи б°. Затем проводим прямую $FG \perp DE$ (задача а°); обозначим $H \equiv FG \times DE$. Переносим отрезок t на прямую FG к точке H (задача 7°): $HI = t$. Строим угол $HIK = \tau$ (задача 8°); очевидно, $IK \parallel DE$. Дальнейшее построение выполняется при помощи только проведения прямых линий (6, § 22, 3°), если заметим, что пара параллельных прямых определяет точку (бесконечно удаленную).

II°. *Построить угол $\Pi(AB)$, соответствующий отрезку AB* (4, задача 373).

III°. *Построить отрезок $\Delta(AOB)$, соответствующий $\angle AOB$, как углу параллельности* (4, задача 160, первое решение).

IV°. *Построить общий перпендикуляр расходящихся прямых AB и DE* (7, стр. 234, лемма 2).

А°. *Построить точки пересечения прямой и окружности, заданной центром и радиусом* (8).

Б°. *Построить точки пересечения двух окружностей, заданных своими центрами и радиусами* (4, задача 376).

В°. *Построить точку пересечения двух прямых.* Задача решается непосредственно (постулат I), если прямые пересекаются или сводится к I° или IV°.

Теорема доказана. Таким образом, оказывается возможным упростить чертежные инструменты — линейки с параллельными или расходящимися бортами и отмеченной на одном из бортов точкой: оставив фиксированную точку, убрать ту из прямых, на которой она отмечена.

Естественно возникает вопрос: можно ли поступить иначе, то есть оставить две прямые (два борта линейки — параллельные или расходящиеся), но не отмечать на одной из них точку. Этот вопрос подлежит разрешению.

Нетрудно заметить, что предложенный нами чертежный инструмент несколько напоминает гиперциркуль с фиксированной дистанцией (4, § 20, 2°) построения, при помощи которого выполнены А. С. Смогоржевским (6, § 30). Однако, существенное отличие шаблона от гиперциркуля состоит в том, что при его помощи нельзя прочертить гиперцикл как непрерывную линию, а можно найти только любое конечное число точек гиперцикла определенной дистанции (точно так же, как при помощи комплекса линейка-эталон длины можно найти любое число точек окружности определенного радиуса, но нельзя прочертить ее как непрерывную линию).

Ростовский инженерно-строительный институт

Поступило 14 X 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. К. К. Мокрищев, О разрешимости ограниченными средствами конструктивных задач второй степени в плоскости Лобачевского, Уч. зап. физ.-мат. ф-та РГУ, т. XXXII, в. 4, Харьков, 1955. 2. Р. И. Кирищиев. О некоторых специальных вопросах теории геометрических построений в плоскости Лобачевского, Автореферат канд. дис., Ростов-на-Дону, 1954. 3. Р. И. Кирищиев, О построениях в плоскости Лобачевского при помощи двубортной линейки, Тр. Рост. инж.-стр. ин-та. 4. Н. М. Несторович, Геометрические построения в плоскости Лобачевского, М.—Л., 1951. 5. В. Ф. Каган, Основания геометрии, т. I, М.—Л., 1949. 6. А. С. Смогоржевский, Геометрические построения в плоскости Лобачевского, М.—Л., 1951. 7. Д. Гильберт, Основания геометрии, М.—Л., 1948. 8. Р. И. Кирищиев, Об одной теореме Д. Д. Мордухай-Болтовского, Жур. Успехи мат. наук, т. XI, в. 1, (67), М., 1956.