Хуа Ло-гэн, Б. А. Розенфельд, Геометрия прямоугольных матриц и ее применение к вещественной проективной и неевклидовой геометрии, *Изв. вузов. Матем.*, 1957, номер 1, 233–247

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ
1957 МАТЕМАТИКА № 1

Хуа Ло-гэн, Б. А. Розенфельд

ГЕОМЕТРИЯ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ МАТРИЦ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ К ВЕЩЕСТВЕННОЙ ПРОЕКТИВНОЙ И НЕЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ

Один из авторов настоящей работы изучал одномерную проективную и неевклидову геометрию, в которой координатами точек служили сначала квадратные матрицы ([1], [2] и др.), а затем прямоугольные матрицы ([3], [4] и др.). Одномерная геометрия над квадратными матрицами применялась к многомерной вещественной проективной и неевклидовой геометрии другим из авторов ([5], [6]. При встрече авторов в июне-июле 1956 г. в Москве во время III Съезда математиков СССР выяснилось, что геометрия прямоугольных матриц также имеет применение к вещественной проективной и неевклидовой геометрии и притом еще более широкое, чем геометрия квадратных матриц. При этом оказалось, что к значительной части результатов в области этого применения авторы пришли независимо друг от друга. Это совпадение результатов и послужило причиной опубликования настоящей совместной работы.

§ 1. Матричные координаты плоскостей

Рассмотрим n-мерное вещественное проективное пространство P_n, каждая точка x которого определяется $n+1$ вещественной координатой $x^i (i, j, \ldots = 0,1, \ldots, n)$, определенной с точностью до умножения на вещественный множитель. Всякая m-мерная плоскость пространства P_n определяется $m+1$ линейно независимой точкой $x_a (a, b, \ldots = 0,1, \ldots, m)$ с координатами x^i_a. Координаты x^i_a составляют прямоугольную матрицу $\Xi = (x^i_a)$ с $n+1$ строкой и $m+1$ столбцом, которую можно разложить на две матрицы: квадратную матрицу $X_0 = (x^b_a)$ $(m+1)$-го порядка и прямоугольную матрицу $X_1 = (x^u_a)$ $(u, v, \ldots = m+1, \ldots, n)$ с $n-m$ строками и $m+1$ столбцом.

При переходе от точек x_a к другой системе линейно независимых точек y_a, координаты точек y_a связаны с координатами точек x_a соотношениями

$$y^i_a = \sum_b x^i_b K^b_a, \tag{1}$$

где коэффициенты K^b_a составляют неособенную квадратную матрицу $K = (k^b_a)$ $(m+1)$-го порядка.

Соотношения (1) можно переписать в виде формулы, связывающей матрицу $H = (y^i_a)$ с матрицами Ξ и K, имеющей вид

$$H = \Xi K \tag{2}$$

или в виде формул, связывающих матриц $Y_0=(y_a^b)$ и $Y_1=(y_a^u)$ с матрицами X_0, X_1 и K, имеющих вид

$$Y_0=X_0K, \quad Y_1=X_1K. \tag{3}$$

Частным случаем преобразования (1) является переход от координат x_a^i точек x_a к координатам $x_a^i k_a$ тех же точек; в этом случае матрица Ξ, а следовательно и матрицы X_0 и X_1 также умножаются на матрицу K по формуле (2) и (3), причем здесь $k_a^b=k_a\delta_a^b$ ($\delta_a^b=1$ при $a=b$ и 0 при $a\neq b$).

Из формулы (2) следует, что миноры $(m+1)$-го порядка матрицы Ξ при замене точек x_a точками y_a умножаются на одно и то же число $|K|$ — определитель матрицы K. Эти миноры, называемые *грассмановыми координатами* (см. [7], стр. 303), вполне определяют m-мерные плоскости пространства P_n и являются наиболее часто применяемым средством изучения этих плоскостей. Однако число грассмановых координат, равное $\frac{(n+1)!}{(m+1)!\,(n-m)!}$, значительно превышает число параметров, от которых зависит многообразие m-мерных плоскостей, равное $(m+1)(n-m)$, вследствие чего эти координаты, определенные с точностью до вещественного множителя, связаны рядом квадратичных соотношений.

Представление m-мерных плоскостей с помощью координат, могущих служить параметрами многообразия этих плоскостей, можно получить, поставив в соответствие каждой m-мерной плоскости с неособенной матрицей X_0 прямоугольную матрицу

$$X=X_1X_0^{-1} \tag{4}$$

с $n-m$ строками и $m+1$ столбцом. Матрица X не зависит от выбора точек x_a, определяющих плоскость, и от умножения их координат x_a^i на числа k_a. В самом деле, при замене точек x_a точками y_a матрицы X_0, X_1 заменяются матрицами (3), а

$$Y_1Y_0^{-1}=(X_1K)(X_0K)^{-1}=X_1KK^{-1}X_0^{-1}=X_1X_0^{-1}.$$

Число элементов матрицы X равно $(m+1)(n-m)$, т. е. совпадает с числом параметров многообразия m-мерных плоскостей пространства P_n. Поэтому элементы матриц X можно считать координатами m-мерных плоскостей. Будем называть эти координаты *матричными координатами* m-мерной плоскости.

Матричные координаты можно рассматривать как частный случай грассмановых координат, так как, если мы обозначим элементы матрицы X через X_a^u, то нашу плоскость всегда можно задать такими точками x_a, для которых

$$x_a^b=\delta_a^b, \qquad x_a^u=X_a^u. \tag{5}$$

В этом случае $X_0={}'I$, $X_1=X$, т. е. точки с координатами (5) могут быть получены из произвольных точек x_a по формуле (1), в которой роль коэффициентов k_a^b играют элементы матрицы X_0^{-1}. В том случае, когда матрица Ξ составлена из элементов (5), ее минор $(m+1)$-го порядка, состоящий из ее 0-й, 1-й, . . . , $(a-1)$-й, $(a+1)$-й, . . . , m-й и u-й строк, с точностью до знака совпадает с элементом X_a^u. Точно также миноры $(m+1)$-го порядка, состоящие из $m+1-k$ строк из числа первых $m+1$ строки матрицы Ξ и из k строк из числа последних $n-m$ строк этой матрицы, с точностью до знака совпадают с минорами k-го порядка матрицы X. Разложения миноров k-го порядка этой матрицы по их строками и столбцами, представляющие собой квадратичные соотношения между минорами k-го порядка, элементами одной из их строк или столбцов и их алгебраическими дополнениями, совпадают с квадратичными соотношениями между грассмановыми координатами. Поэтому матричные координаты можно рассматривать как *нормированные грассмановы* координаты. Этой нормировкой грассмановых координат иногда пользовались в алгебраической геометрии (см. напр. [7]).

Необходимым и достаточным условием того, что для m-мерной плоскости нельзя определить матричных координат, является пересечение этой плоскости с $(n-m-1)$-мерной плоскостью $e_{m+1}, e_{m+2}, \ldots e_n$, порожденной базисными точками $e_{m+1}, e_{m+2}, \ldots$ $\ldots, e_n$. В самом деле, если для плоскости нельзя определить матричных координат, столбцы матрицы $X_0=(x_a^b)$ линейно зависимы и, следовательно, существуют числа k_b, не все равные нулю, для которых

$$\sum_b k_b x_a^b = 0.$$

Это уравнение гиперплоскости, и так как оно не содержит координат $x^{m+1}, x^{m+2}, \ldots, x^n$, то все точки x_a, определяющие нашу плоскость, а следовательно, и вся эта плоскость, лежат в гиперплоскости, в которой находятся и все базисные точки $e_{m+1}, \ldots, e_n$. Но так как всякие m—мерная и $(n-m-1)$—мерная плоскости, лежащие в $(n-1)$-мерной плоскости, имеют общую точку, то мы получаем, в случае невозможности определения для плоскости матричных координат, она пересекается с $(n-m-1)$-мерной плоскостью $e_{m+1}e_{m+2}\ldots e_n$. С другой стороны, если плоскость пересекается с $(n-m-1)$—мерной плоскостью $e_{m+1}e_{m+2}\ldots e_n$, эта плоскость лежит в гиперплоскости, содержащей точки $e_{m+1}, \ldots, e_n$, вследствие чего уравнение этой гиперплоскости не содержит координат $x^{m+1}, \ldots$ $\ldots, x^n$ и является линейным соотношением между координатами x_a^b точек x_a, так что определитель матрицы (x_a^b) равен нулю.

Случай, когда матрица X_0 является нулевой матрицей, т. е. $x_a^b=0$ при всех a и b соответствует тому, что все точки x_a лежат в самой плоскости $e_{m+1}e_{m+2}\ldots e_n$, то наша плоскость целиком лежит в плоскости $e_{m+1}e_{m+2}\ldots e_n$.

Заметим, что при $m+1<n-m$ матрицы X_1 и X вытянуты вертикально, при $m+1=n-m$ эти матрицы квадратны, а при $m+1>n-m$ они вытянуты горизонтально. Очевидно, что матрица X_0 может быть нулевой только при $m+1 \leqslant n-m$.

§ 2. Представление плоскостей точками прямой над прямоугольными матрицами

Как мы видели, всякая m-мерная плоскость вещественного пространства P_n характеризуется двумя матрицами X_0, X_1, определенными с точностью до умножения на квадратную матрицу $X_0 \to X_0K$, $X_1 \to X_1K$, а всякая m-мерная плоскость, не пересекающаяся с плоскостью $e_{m+1}e_{m+2}\ldots e_n$, характеризуется одной прямоугольной матрицей $X=X_1X_0^{-1}$.

Таким образом, матрицы X_0, X_1 по своим свойствам аналогичны координатам x^0, x^1 точки вещественной проективной прямой, а матрица $X=X_1X_0^{-1}$ аналогична координате вещественной аффинной прямой E_1, для которой точка проективной прямой с координатой $x^0=0$ служит бесконечно удаленной точкой.

Эта аналогия дает нам основание называть матрицу X координатой точки *аффинной прямой* $E_1^{(m+1)(n-m)}$ *над прямоугольными матрицами с $n-m$ строками и $m+1$ столбцом*, а матрицы X_0, X_1 — координатами точки *проективной прямой* $P_1^{(m+1)(n-m)}$ *над прямоугольными матрицами с $n-m$ строками и $m+1$ столбцом*. Точки прямой $P_1^{(m+1)(n-m)}$, для которых координата X_0 является нулевой матрицей, назовем *бесконечно удаленными точками* прямой $E_1^{(m+1)(n-m)}$ при ее дополнении до прямой $P_1^{(m+1)(n-m)}$, а точки прямой $P_1^{(m+1)(n-m)}$, для которых координата X_0 является не нулевой, а особенной матрицей, — *идеальными точками* прямой $E_1^{(m+1)(n-m)}$ при ее дополнении до прямой $P_1^{(m+1)(n-m)}$.

Из результатов § 1 видно, что *моделью проективной прямой* $P_1^{(m+1)(n-m)}$ *является многообразие m—мерных плоскостей пространства P_n, а моделью аффинной прямой* $E_1^{(m+1)(n-m)}$ *является многообразие всех m-мерных плоскостей пространства P_n, за исключением плоскостей, пересекающихся с $(n-m)$-мерной плоскостью* $e_{m+1}e_{m+2}\ldots e_n$. При этом бесконечно удаленные точки прямой $E_1^{(m+1)(n-m)}$ при ее дополнении до прямой $P_1^{(m+1)(n-m)}$ изображаются m-мерными плоскостями, целиком лежащими в плоскости $e_{m+1}e_{m+2}\ldots$ $\ldots e_n$, а идеальные точки прямой $E_1^{(m+1)(n-m)}$ при ее дополнении до прямой $P_1^{(n+1)(n-m)}$ изображаются m-мерными плоскостями, пересекающимися с плоскостью $e_{m+1}e_{m+2}\ldots e_n$, но не лежащими в ней целиком. Бесконечно удаленные точки существуют только при $m+1\leqslant n-m$.

В том случае, когда число $n-m$ является кратным числа $m+1$, $n-m=(r+1)(m+1)$, матрица Ξ может быть разложена на $r+1$ квадратную матрицу $(m+1)$-го порядка $\Xi_\alpha\,(\alpha=0,1,\ldots r)$, определенных с точностью до умножения на такую же квадратную матрицу $\Xi_\alpha\to\Xi K$, а матрица X может быть разложена на r таких же матриц $X_\alpha\,(\alpha=1,\ldots r)$, связанных с матрицами Ξ_α соотношениями $X_\alpha=\Xi_\alpha\Xi_0^{-1}$. Таким образом, матрицы Ξ_α по своим свойствам аналогичны координатам x^i точки вещественного проективного пространства P_r, а матрицы X_α аналогичны координатам вещественного аффинного пространства E_r, для которого гиперплоскость $x^0=0$ пространства P_r служит бесконечно удаленной гиперплоскостью.

Эта аналогия дает основание называть матрицы X_a координатами точек *r-мерного аффинного пространства* $E_r^{(m+1)^2}$ *над квадратными матрицами $(m+1)$-го порядка*, а матрицы Ξ_α называть координатами точки *r-мерного проективного пространства* $P_r^{(m+1)^2}$ *над квадратными матрицами $(m+1)$-го порядка*. Точки пространства $P_r^{(m+1)^2}$, для которых координата X_0 является нулевой матрицей, называются *бесконечно удаленными точками* пространства $E_r^{(m+1)^2}$ при его дополнении до пространства $P_r^{(m+1)^2}$, а точки пространства $P_r^{(m+1)^2}$, для которых координата X_0 является не нулевой, но особенной матрицей, называются *идеальными точками* пространства $E_r^{(m+1)^2}$ при его дополнении до пространства $P_r^{(m+1)^2}$.

Сравнивая определения пространств $P_r^{(m+1)^2}$ и $E_r^{(m+1)^2}$ и прямых $P_1^{(m+1)(n-m)}$ и $E_1^{(m+1)(n-m)}$, мы видим, что *проективная прямая* $P_1^{(m+1)\cdot(r+1)(n-m)}$ *является моделью проективного пространства*

$P_r^{(m+1)^2}$, *а аффинная прямая* $E_1^{(m+1)\cdot(r+1)(m+1)}$ *является моделью аффинного пространства* $E_r^{(m+1)^2}$. Поэтому прямые $P_1^{(m+1)(n-m)}$ и $E_1^{(m+1)(n-m)}$, для которых отношение $\frac{n-m}{m+1}$ не является целым числом, а может быть представлено дробью $\frac{r}{s}+1$, можно рассматривать как *проективное и аффинное пространство над матрицами* $(m+1)$*-го порядка, размерность которого равна дробному числу* $\frac{r}{s}$.

§ 3. Получение матричных координат с помощью гиперплоскостей

Как известно, m-мерную плоскость пространства P_n можно задать не только с помощью $m+1$ линейно независимых точек x_a, лежащих на ней, но и двойственным образом: с помощью $n-m$ линейно независимых *гиперплоскостей* p^u, проходящих через нее. Тангенциальные координаты p_i^u этих плоскостей составляют прямоугольную матрицу $\pi=(p_i^u)$ с $n-m$ строками и $n+1$ столбцом, которую можно разложить на две матрицы: прямоугольную матрицу $P_0=(p_a^u)$ с $n-m$ строками и $m+1$ столбцом и квадратную матрицу $P_1=(p_v^u)$ $(n-m)$-го порядка.

При переходе от гиперплоскостей p^u к другой системе линейно независимых гиперплоскостей q^u, координаты гиперплоскостей q^u связаны с координатами гиперплоскостей p^u соотношениями

$$q_i^u=\sum_i k_v^u p_i^v\,, \tag{6}$$

где коэффициенты k_v^u составляют неособенную квадратную матрицу $K=(k_v^u)$ $(n-m)$-го порядка.

Соотношения (6) можно переписать в виде формулы, связывающей матрицу $P=(q_i^u)$ с матрицами Π и K, имеющей вид

$$P=K\Pi, \tag{7}$$

или в виде формул, связывающих матрицы $Q_0=(q_a^u)$ и $Q_1(q_v^u)$ с матрицами P_0, P_1 и K, имеющих вид

$$Q_0=KP_0, \quad Q_1=KP_1. \tag{8}$$

Частным случаем преобразования (6) является переход от координат p_i^u гиперплоскостей p^u к координатам $k^u p_i^u$ тех же гиперплоскостей: в этом случае матрица Π, а, следовательно, и матрицы P_0 и P_1 также умножаются на матрицу K по формулам (7) и (8), причем здесь $k_v^u=k^u\delta_v^u$.

Из формулы (7) следует, что миноры $(n-m)$-го порядка матрицы Π при замене гиперплоскостей p^u гиперплоскостями q^u умножаются на одно и то же число $|K|$ - определитель матрицы K. Эти миноры, называемые *двойственными грассмановыми координатами* (см. [7], стр. 310) также вполне определяют m-мерные плоскости пространства P_n.

Каждой m-мерной плоскости с неособенной матрицей P_1 можно поставить в соответствие прямоугольную матрицу

$$P=-P_1^{-1}P_0 \tag{9}$$

с $n-m$ строками и $m+1$ столбцом. Матрица P не зависит от выбора гиперплоскостей p^u, определяющих плоскость и от умножения их координат p_i^u на числа k^u. В самом деле, при замене гиперплоскостей p^u гиперплоскостями q^u матрицы P_0, P_1 заменяются матрицами (8), а

$$Q_1^{-1}Q_0=(KP_1)^{-1}(KP_0)=P_1^{-1}K^{-1}KP_0=P_1^{-1}P_0.$$

Покажем, что *матрица P совпадает с матрицей X*. В самом деле, так как точки x_a лежат в нашей плоскости, а гиперплоскости p^u проходят через нее, каждая точка x_a лежит в каждой гиперплоскости p^u, т. е. имеет место $(m+1)(n-m)$ соотношений

$$\sum_i p_i^u x_a^i=0, \tag{10}$$

которые можно переписать в виде

$$\sum_b p_b^u x_a^b+\sum_v p_v^u x_a^v=0 \tag{11}$$

или

$$P_0X_0+P_1X_1=0. \tag{12}$$

Умножая обе части этого равенства слева на P_1^{-1}, а справа на X_0^{-1}, мы перепишем его в виде

$$P_1^{-1}P_0+X_1X_0^{-1}=0, \tag{13}$$

откуда и вытекает совпадение матриц $X=X_1X_0^{-1}$ и $P=-P_1^{-1}P_0$. Поэтому матрица X имеет двоякое представление

$$X=X_1X_0^{-1}=-P_1^{-1}P_0. \tag{14}$$

Отсюда видно, что матричные координаты плоскостей можно рассматривать так же, как *нормированные двойственные грассмановы координаты.*

§ 4. Представление проективных преобразований

Группа проективных преобразований пространства P_n состоит из преобразований двух видов: *коллинеаций*, при которых m-мерные плоскости переходят друг в друга, и *корреляций*, при которых m-мерные плоскости переходят в $(n-m-1)$-мерные плоскости. Рассмотрим, каким образом преобразуются матричные координаты плоскостей при коллинеациях. Коллинеации пространства P_n выражаются формулами:

$$'x^i=\sum_i A_j^i x^j \tag{15}$$

и

$$'p_i=\sum_j p_j N_i^j, \tag{16}$$

где матрицы $A=(A_j^i)$ и $N=(N_i^j)$ — неособенно квадратные матрицы $(n+1)$-го порядка, причем матрица N является транспонированной обратной матрицей A.

При коллинеации (15) координаты x_a^i точек x_a преобразуются по закону

$$'x_a^i = \sum_j A_j^i x_a^j, \tag{17}$$

что можно переписать в виде

$$'x_a^b = \sum_c A_c^b x_a^c + \sum_w A_w^b x_a^w, \qquad 'x_a^v = \sum_c A_c^v x_a^c + \sum_w A_w^v x^w. \tag{18}$$

Формулы (17) можно переписать в виде

$$'\Xi = A\Xi. \tag{19}$$

Если разложить матрицу A на четыре матрицы $A = (A_a^b)$, $B = (A_u^b)$, $C = (A_a^v)$, $D = (A_u^v)$, то формулы (18) можно переписать в виде

$$'X_0 = AX_0 + AX_1, \quad 'X_1 = CX_0 + DX_1. \tag{20}$$

При коллинеации (16) координаты p_i^u гиперплоскостей p^u преобразуются по закону

$$'p_i^u = \sum_j p_j^u N_i^j, \tag{21}$$

что можно переписать в виде

$$'p_a^u = \sum_c P_c^u N_a^c + \sum_w P_w^u N_a^w, \qquad 'p_v^u = \sum_c P_c^u N_v^c + \sum_w P_w^u N_v^w. \tag{22}$$

Формулы (21) можно переписать в виде

$$'\Pi = \Pi N. \tag{23}$$

Если разложить матрицу N на четыре матрицы $K = (N_a^b)$, $L = (N_a^v)$, $M = (N_u^a)$, $N = (N_u^v)$, то формулы (22) можно переписать в виде

$$'P_0 = P_0 K + P_1 L, \quad 'P_1 = P_0 M + P_1 N. \tag{24}$$

Из формулы (20) следует, что

$$'X = 'X_1' X_0^{-1} = (CX_0 + DX_1)(AX_0 + BX_1)^{-1} =$$
$$= (CX_0 + DX_1) X_0^{-1} X_0 (AX_0 + BX_1)^{-1} =$$
$$= [(CX_0 + DX_1) X_0^{-1}][(AX_0 + BX_1) X_0^{-1}]^{-1} = (C + DX)(A + BX)^{-1}.$$

Из формулы (24) следует, что

$$'X = -P_1^{-1} P_0 = -(P_0 M + P_1 N)^{-1} (P_0 K + P_1 L) =$$
$$= -(P_0 M + P_1 N)^{-1} P_1 P_1^{-1} (P_0 K + P_1 L) =$$
$$= -[P_1^{-1} (P_0 M + P_1 N)]^{-1} [P_1^{-1} (P_0 K + P_1 L)] =$$
$$= (XM - N)^{-1} (-XK + L).$$

Таким образом, ***при коллинеации пространства P_n матричные координаты плоскостей преобразуются по закону***

$$'X = (C + DX)(A + BX)^{-1} = (XM - N)^{-1} (-XK + L), \tag{25}$$

где матрицы A, B, C, D составляют матрицу A коэффициентов формулы (15), а матрицы K, L, M, N составляют матрицу N коэффициентов формулы (16).

Преобразования (25) можно рассматривать как *коллинеации проективной прямой* $P_1^{(m+1)(n-m)}$.

Корреляции пространства P_n выражаются формулами:

$$'p_i = \sum_j A_j^i X^j. \tag{26}$$

и

$$'x^i = \sum_j N_i^j p_i, \tag{27}$$

т. е. их можно рассматривать как произведения коллинеаций этого пространства на простейшую корреляцию

$$'p_i = x^i, \tag{28}$$

которая в применении к точкам x_a может быть записана в виде

$$'p_i^a = x_a^i, \tag{29}$$

что можно переписать в виде

$$'\Pi = \Xi^T, \tag{30}$$

где T — знак транспонирования матрицы.

Поэтому, так как $(XY)^T = Y^T X^T$, *произвольная корреляция пространства* P_n *может быть записана в виде*

$$'X = (A^T + X^T B^T)^{-1}(C^T + X^T D^T) = (-K^T X^T + L^T)(M^T X^T - N^T), \tag{31}$$

где матрицы A, B, C, D составляют матрицу A коэффициентов формулы (26), а матрицы K, L, M, N составляют матрицу N коэффициентов формулы (27).

В случае, когда $m = n - m - 1$, корреляции также переводят m-мерные плоскости в m-мерные плоскости. Все матрицы в формулах (25) и (31) — квадратные матрицы $(m+1)$-го порядка, и преобразования (31), также как преобразования (25), можно рассматривать как *коллинеации проективной прямой* $P_1^{(m+1)^2}$; в этом случае преобразования (25) называются *коллинеациями первого рода*, а преобразования (31) — *коллинеациями второго рода*.

§ 5. Размерность пересечения плоскостей

Рассмотрим две m-мерные плоскости пространства P_n и попытаемся определить размерность плоскости их пересечения по их матричным координатам.

Если размерность пересечения наших плоскостей равна d, то мы можем первые $d+1$ точку из $m+1$ точки x_a, определяющих первую плоскость, выбрать в пересечении наших плоскостей; пусть вторая плоскость определяется как пересечение $n-m$ гиперплоскостей q^u. Тогда выражения

$$\sum_i q_i^u x_a^i = \sum_b q_b^u x_a^b + \sum q_v^u x_a^v \tag{32}$$

равны нулю для $a \leqslant d$ и отличны от нуля для $a > d$, т. е. у прямоугольной матрицы $\left(\sum_i q_i^u x_a^i\right)$ с $n-m$ строками и $m+1$ столбцом первые $d+1$ столбец состоят из нулей. Остальные $m-d$ столбцов этой матрицы линейно независимы, так как в случае их линейной зависимости можно было бы выбрать точки x_a таким образом, что еще по меньшей мере один столбец матрицы $\left(\sum_i q_i^u x_a^i\right)$ состоял бы из нулей, а в таком случае наши плоскости пересекались бы по плоскости размерности большей, чем d. Поэтому *ранг матрицы* $\left(\sum_i q_i^u x_a^i\right)$ *равен* $m-d$. То же рассуждение в обратном порядке показывает, что и обратно, если ранг матрицы $\left(\sum_i q_i^u x_a^i\right)$ равен $m-d$, наши плоскости пересекаются по d-мерной плоскости.

Так как элементы этой матрицы представляются в виде (32), эту матрицу можно записать так:

$$Q_0 X_0 + Q_1 X_1 . \tag{33}$$

Поэтому необходимое и достаточное условие того, что размерность пересечения наших плоскостей равна d, состоит в том, что ранг матрицы (33) равен $m-d$.

Так как ранг прямоугольной матрицы не изменяется от умножения ее справа и слева на неособенные квадратные матрицы, а в силу равенств

$$X = X_1 X_0^{-1}, \quad Y = Q_1^{-1} Q_0 ,$$

произведение матрицы (33) на квадратную матрицу Q_1^{-1} $(n-m)$-го порядка слева и квадратную матрицу X_0^{-1} $(m+1)$-го порядка справа имеет вид

$$Q_1^{-1}(Q_0 X_0 + Q_1 X_1) X_0^{-1} = Q_1^{-1} Q_0 + X_1 X_0^{-1} = X - Y, \tag{34}$$

мы получаем, что *необходимое и достаточное условие того, что размерность пересечения двух m-мерных плоскостей, матричные координаты которых составляют матрицы X и Y, равна d, состоит в том, что ранг матрицы $X-Y$* равен $m-d$.

Так как размерность s плоскости, порожденной двумя плоскостями p и q измерений, связана с размерностями этих плоскостей и размерностью d их пересечения известным соотношением

$$p + q = s + d,$$

в том случае, когда две m-мерные плоскости $(p=q=m)$ пересекаются по d-мерной плоскости, размерность порожденной ими плоскости равна $s=2m-d$, т. е. $m-d=s-m$.

Поэтому полученный нами результат может быть сформулирован также так: *необходимое и достаточное условие того, что размерность плоскости, порожденной двумя m-мерными плоскостями, матричные координаты которых составляют матрицы X и Y, равна s, состоит в том, что ранг матрицы $X-Y$ равен $s-m$.*

В случае, когда две m-мерные плоскости пересекаются по $(m-1)$-мерной плоскости и, следовательно, порождают $(m+1)$-мерную плоскость, ранг матрицы $X-Y$ равен 1, т. е. этот случай соответствует случаю *когерентности* двух прямоугольных матриц.

§ 6. Двойное отношение четырех плоскостей

Рассмотрим две m-мерные плоскости пространства P_n, определенные матрицами координат $\Xi=(x_a^i)$ и $H=(y_a^i)$, и две $(n-m-1)$-мерные плоскости того же пространства, определяемые матрицами тангенциальных координат $\pi=(p_i^a)$ и $P=(q_i^a)$. Матрицу Ξ, как в § 1, разложим на матрицы $X_0=(x_a^b)$ и $X_1=(x_b^u)$ и составим матрицу матричных координат $X=X_1X_0^{-1}$. Точно так же разложим матрицу H на матрицы $Y_0=(y_a^b)$ и $Y_1=(y_a^u)$ и составим матрицу $Y=Y_1Y_0^{-1}$. Матрицу Π разложим несколько иначе, чем в § 3, на матрицы $P_0=(p_b^a)$ и $P_1=(p_u)$ и составим матрицу матричных координат

$$p=p_0^{-1}p_1 \tag{35}$$

по формуле, не совпадающей с формулой (9), но имеющей то же строение, что и формула (4) для матрицы X; так как $(n-m-1)$-мерные плоскости мы будем определять только с помощью координат p_i^a, это не приведет нас к недоразумениям. Матрица P не зависит от выбора гиперплоскостей p^a, определяющих $(n-m-1)$-мерную плоскость и от умножения координат p_i^a на числа k^a, так как при замене гиперплоскостей p^a другими гиперплоскостями или при умножении их координат на числа, матрицы P_0 и P_1 заменяются матрицами KP_0 и KP_1, а матрица $P=P_0^{-1}P_1$ остается неизменной. Точно так же мы разложим матрицу P на матрицы $Q_0=(q_b^a)$ и $Q_1=(q_u^a)$ и составим матрицу матричных координат $Q=Q_0^{-1}Q_1$. Матрицы X и Y являются прямоугольными матрицами с $n-m$ строками и $m+1$ столбцом, а матрицы P и Q являются прямоугольными матрицами с $m+1$ строкой и $n-m$ столбцами.

Рассмотрим выражение аналогичное (32)

$$\sum_i q_i^b x_a^i=\sum_c q_c^b x_a^c+\sum_u q_u^b x_a^u. \tag{36}$$

Эти выражения также образуют матрицу

$$Q_0X_0+Q_1X_1, \tag{37}$$

которая здесь в отличие от матрицы (33) является квадратной матрицей $(m+1)$-го порядка. При другом выборе точек и гиперплоскостей, определяющих наши плоскости, когда матрицы X_0, X_1, Q_0 и Q_1 заменяются матрицами

$$'X_0=X_0K_1 \quad 'X_1=X_1K, \quad 'Q_0=NQ_0, \quad 'Q_1=NQ_1, \tag{38}$$

матрица (37) переходит в матрицу

$$'Q_0'X_0+'Q_1'X_1=N(Q_0X_0+Q_1X_1)K. \tag{39}$$

Рассмотрим теперь квадратную матрицу $(m+1)$-го порядка

$$W=(Q_0X_0+Q_1X_1)(P_0X_0+P_1X_1)^{-1}(P_0Y_0+P_1Y_1)(Q_0Y_0+Q_1Y_1)^{-1}. \tag{40}$$

При другом выборе точек и гиперплоскостей, определяющих наши плоскости, когда матрицы X_0, X_1, Q_0 и Q_1 заменяются матрицами (38), а матрицы Y_0, Y_1, P_0 и P_1 заменяются аналогичными матрицами

$$'Y_0=Y_0L, \quad 'Y_1=Y_1L, \quad 'P_0=MP_0, \quad 'P_1=MP_1, \tag{41}$$

матрица (40) переходит в матрицу

$$\begin{gathered}'W=('Q_0'X_0+'Q_1'X_1)('P_0'X_0+'P_1'X_1)^{-1}('P_0'Y_0+'P_1'Y_1)('Q_0'Y_0+\\+'Q_1'Y_1)^{-1}=N(Q_0X_0+Q_1X_1)K\cdot[M(P_0X_0+P_1X_1)K]^{-1}\cdot M(P_0Y_0+\\+P_1Y_1)L\cdot[N(Q_0Y_0+Q_1Y_1)L]^{-1}=N(Q_0X_0+Q_1X_1)K\cdot K^{-1}(P_0X_0+\\+P_1X_1)^{-1}M^{-1}\cdot M(P_0Y_0+P_1Y_1)L\cdot L^{-1}(Q_0Y_0+Q_1Y_1)^{-1}N^{-1}=NWN^{-1}.\end{gathered} \tag{42}$$

При $m=0$, когда роль наших плоскостей играют две точки и две гиперплоскости, матрица W является числом — двойным отношением двух точек и двух гиперплоскостей, равным двойному отношению данных двух точек и двух точек пересечения определяемой ими прямой с данными гиперплоскостями. Поэтому и в общем случае будем называть матрицу W *двойным отношением двух m-мерных и двух* $(n-m-1)$-мерных плоскостей.

Таким образом, двойное отношение двух m-мерных и двух $(n-m-1)$-мерных плоскостей является квадратной матрицей $W(m+1)$-го порядка, определенной с точностью до преобразования

$$W \to NWN^{-1}, \tag{44}$$

где N — произвольная неособенная матрица того же порядка.

Подвергая наши плоскости коллинеации, выражаемой формулами (15) и (16), и корреляции, выражаемой формулами (26) и (27), мы найдем, что *при коллинеации двойное отношение подвергается преобразованию* (44), *а при корреляции оно подвергается преобразованию*

$$W \to NW^TN^{-1}. \tag{45}$$

Матрица W может быть записана также в виде

$$W=(P\Xi)(\Pi\Xi)^{-1}(\Pi H)(PH)^{-1}.$$

В этом виде матрицу W для m-мерных плоскостей пространства P_n в 1955 г. рассматривал А. Фурман [8] (не ссылавшийся на [5]).

Двойное отношение двух m-мерных и двух $(n-m-1)$-мерных плоскостей легко выражается через матричные координаты этих плоскостей. Для этого достаточно подставить в формулу (42)

$$K_0=X_0^{-1}, \quad L=Y_0^{-1}, \quad M=P_0^{-1}, \quad N=Q_0^{-1},$$

после чего эту формулу можно переписать в виде

$$W=(I+QX)(I+PX)^{-1}(I+PY)(I+QY)^{-1}. \tag{46}$$

Формула (46) дает выражение двойного отношения двух m-мерных и двух $(n-m-1)$-мерных плоскостей при любых n и m.

В случае, когда $m=n-m-1$ и все матрицы X, Y, P, Q — квадратные, можно выразить двойное отношение через матрицы P и Q, определенные не по формуле (35), а по формуле (9). Тогда двойное отношение можно записать в виде

$$W=(Q-X)(P-X)^{-1}(P-Y)(Q-Y)^{-1}. \tag{47}$$

Из того, что преобразования (44) и (45) не меняют собственных чисел матрицы W, следует, что эти собственные числа остаются инвариантными и при коллинеациях и при корреляциях пространства. Поэтому *собственные числа матрицы двойного отношения двух m-мерных и двух* $(n-m-1)$*—мерных плоскостей являются числовыми инвариантами этих плоскостей при проективных преобразованиях.*

Найдем геометрический смысл этих инвариантов в том основном случае, когда матрица W имеет все различные собственные числа. Для этого заметим, что в основном случае две m-мерные и две $(n-m-1)$ — мерные плоскости пространства P_n обладают $m+1$ трансверсалями, прямыми, пересекающими все четыре эти плоскости, и двойные отношения четверок точек пересечения этих трансверсалей с плоскостями являются числовыми инвариантами этих плоскостей при проективных преобразованиях. Эти инварианты были впервые найдены Б. Сегре [9] (более подробно об этих инвариантах см. [6], стр. 303—306).

Покажем, что *собственные числа матрицы двойного отношения наших четырех плоскостей совпадают с этими проективными инвариантами данных плоскостей.* Для этого выберем за точки x_a и y_a, точки пересечения трансверсалей с m-мерными плоскостями, причем выберем координаты этих точек такими, что координаты точек пересечения трансверсалей с третьей плоскостью имеют вид $x_a^i + y_a^i$. Тогда координаты точек пересечения трансверсалей с четвертой плоскостью будут иметь вид $x_a^i + w_a y_a^i$, где числа w_a и будут двойными отношениями указанных четверок точек.

Запишем, что точки с координатами $x_a^i + y_a^i$ лежат в гиперплоскостях с координатами p_i^b, а точки с координатами $x_a^i + w_a y_a^i$ лежат в гиперплоскостях с координатами q_i^b:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_i p_i^b(x_a^i + y_a^i) = \sum_c p_c^b x_a^c + \sum_u p_u^b x_a^u + \sum_c p_c^b y_a^c + \sum_u p_u^b y_a^u = 0, \\ &\sum_i q_i^b(x_a^i + w_a y_a^i) = \sum_c q_c^b x_a^c + \sum_u q_u^b x_a^u + \\ &\qquad + w_a\Big(\sum_c q_c^b y_a^c + \sum_u q_u^b y_a^u\Big) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

Если ввести матрицу $\widehat{W} = (w_a \delta_a^b)$, формулы (48) можно переписать в виде

$$\left.\begin{aligned} &P_0 X_0 + P_1 X_1 + P_0 Y_0 + P_1 Y_1 = 0, \\ &Q_0 X_0 + Q_1 X_1 + \widehat{W}(Q_0 Y_0 + Q_1 Y_1) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

или

$$\begin{aligned} &P_0 Y_0 + P_1 Y_1 = -(P_0 X_0 + P_1 X_1), \\ &Q_0 X_0 + Q_1 X_1 = -\widehat{W}(Q_0 Y_0 + Q_1 Y_1). \end{aligned} \tag{50}$$

Но при выполнении соотношений (50) формулу (40) можно переписать в виде

$$W = \widehat{W},$$

т. е. при нашем выборе точек x_a и y_a матрица двойного отношения совпадает с диагональной матрицей $\widehat{W} = (w_a \delta_a^b)$, собственными числами которой являются двойные отношения w_a, откуда вытекает это совпадение при любом выборе точек x_a и y_a.

Таким образом, вычисление собственных чисел двойного отношения (46) или (47), образованного из матриц матричных координат двух m-мерных и двух $(n-m-1)$-мерных плоскостей, дает нам двойные отношения w_a четверок точек пересечения этих плоскостей с их трансверсалями.

§ 7. Применение к неевклидовой геометрии

Неевклидово пространство Римана S_n представляет собой проективное пространство P_n, в котором всяким двум точкам x и y с координатами x^i и y^i отнесено расстояние ω, определенное по формуле

$$\cos^2\omega = \frac{\left(\sum\limits_i x^i y^i\right)^2}{\sum\limits_i x^{i^2} \cdot \sum\limits_i y^{i^2}}. \tag{51}$$

Неевклидово пространство ^lS_n представляет собой пространство P_n, в котором всяким двум точкам x и y отнесено расстояние ω, определенное по формуле

$$\cos^2\omega = \frac{\left(\sum\limits_i \varepsilon_i x^i y^i\right)^2}{\sum\limits_i \varepsilon_i x^{i^2} \cdot \sum\limits_i \varepsilon_i y^{i^2}}, \tag{52}$$

где $\varepsilon_i \pm 1$, причем в l случаях $\varepsilon_i = -1$, а в остальных случаях $\varepsilon_i = +1$ ([6], стр. 151). Пространство ^1S_n — *неевклидово пространство Лобачевского.* В пространствах S_n и ^lS_n определен абсолютный поляритет, имеющий соответственно вид

$$p_i = x^i \tag{53}$$

и

$$p_i = \varepsilon_i x^i, \tag{54}$$

и выражение $\cos^2\omega$ может быть определено как двойное отношение точек x и y с координатами x^i и y^i и гиперплоскостей, соответствующих этим точкам при абсолютном поляритете. *Движения* неевклидова пространства, т. е. взаимно однозначные преобразования этого пространства, сохраняющие расстояния между точками, совпадают с коллинеациями, перестановочными с абсолютным поляритетом.

При абсолютном поляритете m-мерная плоскость переходит в $(n-m-1)$-мерную плоскость, называемую ее *полярой,* причем, если m-мерная плоскость определялась точками x_a с координатами x_a^i, ее поляра определяется гиперплоскостями p^a в пространстве S_n с координатами

$$p_i^a = x_a^i, \tag{55}$$

а в пространстве ^lS_n — с координатами

$$p_i^a = \varepsilon_i x^i. \tag{56}$$

Отсюда видно, что матрицы P_0 и P_1 для этой поляры связаны с матрицами X_0 и X_1 для m-мерной плоскости в пространстве S_n соотношениями

$$P_0 = X_0^T, \quad P_1 = X_1^T,$$

а в пространстве ^lS_n соотношениями

$$P_0 = (E_0 X_0)^T = X_0^T E_0, \quad P_1 = (E_1 X_1)^T = X_1^T E_1,$$

где E_0, E_1 — матрицы $(\varepsilon_a \delta_b^a)$, $(\varepsilon_u \delta_v^u)$. Поэтому в пространстве S_n

$$P = P_0^{-1} P_1 = X_0^{T^{-1}} X_1^T = (X_1 X_0^{-1})^T = X^T, \tag{57}$$

а в пространстве ^lS_n

$$P = P_0^{-1} P_1 = (X_0^T E_0)^{-1} (X_1^T E_1) = E_0 X_0^{T^{-1}} X_1^T E_1 =$$

$$= E_0 (X_1 X_0^{-1}) E_1 = E_0 X^T E_1. \tag{58}$$

Две m-мерные плоскости пространства S_n и ^lS_n в основном случае имеют $m+1$ *общий перпендикуляр.* Эти общие перпендикуляры можно определить так же, как трансверсали данных m-мерных плоскостей и их поляр, а длины ω_a этих общих перпендикуляров связаны с двойными отношениями W_a точек пересечения данных плоскостей и их поляр с их трансверсалями соотношениями

$$W_a = \cos^2 \omega_a. \tag{59}$$

Поэтому *длины общих перпендикуляров* ω_a *двух* m*-мерных плоскостей пространства* S_n *могут быть определены по формулам* (59) *через собственные числа матрицы*

$$W = (I + Y^T X)(I + X^T X)^{-1}(I + X^T Y)(I + Y^T Y)^{-1}, \tag{60}$$

а длины общих перпендикуляров ω_a *двух* m*-мерных плоскостей пространства* ${}^lS_n$ *могут быть определены по формулам* (59) *через собственные числа матрицы*

$$W = (I + E_0 Y^T E_1 X)(I + E_0 X^T E_1 X)^{-1}(I + E_0 X^T E_1 Y)(I + \\ + E_0 Y^T E_1 Y)^{-1}. \tag{61}$$

Матричные координаты весьма удобны также для изучения *дифференциально геометрических свойств семейств* m*-мерных плоскостей* n-мерных проективного и неевклидовых пространств.

Если нам дано k — параметрическое семейство m-мерных плоскостей, зависящих от параметров u^p $(p = 1, 2, \ldots, k)$, то матричные координаты этих плоскостей являются функциями параметров u^p, и прямоугольные матрицы

$$L_p = \frac{\partial X}{\partial u^p} \tag{62}$$

играют роль касательных векторов в семействах плоскостей. Определенные таким образом прямоугольные матрицы совпадают с прямоугольными матрицами, полученными одним из авторов ранее для семейств m-мерных плоскостей как в проективных пространствах [10], так и в неевклидовых пространствах [11]. Наиболее удобно применение этих матриц в случае конгруэнций и антиконгруэнций m-мерных плоскостей, т. е. семейства этих плоскостей, зависящих соответственно от $n - m$ или $m + 1$ параметров. В этих случаях столбцы или строки матриц (62) являются линейными функциями друг друга, и линейные операторы, определяющие эти функции, являются весьма удобным средством изучения конгруэнций и антиконгруэнций плоскостей.

Москва —
Пекин

Поступило
11 X 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. Hua Loo-keng, Geometries of matrices. I. Generalisation of von Staudt's theorem, Trans. Amer. Math., Soc. 57, ss. 441—481, 1945 2. Хуа Ло-ген, Геометрия симметрических матриц над полем действительных чисел, Д. АН СССР, 53, стр. 99—102, 1946. 3. Hua Loo-keng, On the extended spaces of seveval complex variables, Science record, 2, № 1, ss. 5—8, 1947. 4. Hua Loo-keng, A theorem on matrices over a sfield and its application, Chinese Math. Society, 1, № 2, ss. 110—165, 1951. 5. Б. А. Розенфельд, Геометрия многообразия плоскостей проективного пространства как точечная проективная геометрия, Тр. семинара по векторному и тензорному анализу при МГУ, в. 9, стр. 213—222. 1952. 6. Б. А. Розенфельд, Неевклидовы геометрии. М., 1955. 7. В. Ходж, Д. Пидо, Методы

алгебраической геометрии, т. 1, М., 1954. 8. A. F u h r m a n n, Klasse ähnlicher Matrizenals verallgemeinerte Doppelverhältnisse, Math. Zeitschrift, **62**, ss. 211—240, 1955. 9. B. S e g r e, Sui residui relative ai punti uniti delle corrispondenze fra varietà sovraposte, Atti del I. Congresso dell'Unione matem. Ital. Bologna, ss. 259—263, 1938. 10. Б. А. Р о з е н ф е л ь д, Проективно-дифференциальная геометрия семейств $P_m + P_{n-m-1}$ в P_n, Мат. сб. **24** (66), стр. 405—428, 1949. 11. Б. А. Р о з е н ф е л ь д, Дифференциальная геометрия семейств многомерных плоскостей, Изв. АН СССР, сер. мат., **11**, стр. 483—308, 1947.