В. В. Вагнер, Полугруппы частичных преобразований с симметричным отношением транзитивности, *Изв. вузов. Матем.*, 1957, номер 1, 81–88

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1957 МАТЕМАТИКА № 1

В. В. Вагнер

ПОЛУГРУППЫ ЧАСТИЧНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ С СИММЕТРИЧНЫМ ОТНОШЕНИЕМ ТРАНЗИТИВНОСТИ

Множество всех частичных преобразований множества A или, что то же самое, множество всех однозначных бинарных отношений между элементами множества A будем, как обычно, обозначать через $\mathfrak{F}(A \times A)$.

Относительно операции умножения бинарных отношений $\mathfrak{F}(A \times A)$ будет полугруппой.

Пусть $\Gamma \subset \mathfrak{F}(A \times A)$ — произвольная полугруппа частичных преобразований множества A, т. е. некоторая подполугруппа полугруппы $\mathfrak{F}(A \times A)$.

Бинарное отношение

$$\tau_\Gamma = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma \tag{1}$$

называется отношением транзитивности полугруппы Γ, а его симметричная часть

$$\tilde{\tau}_\Gamma = \tau_\Gamma \cap \overset{-1}{\tau_\Gamma} \tag{2}$$

— отношением взаимной транзитивности полугруппы Γ.

Очевидно, что τ_Γ будет транзитивным бинарным отношением, откуда $\tilde{\tau}_\Gamma$ будет частичным отношением эквивалентности.

Отношение квазипорядка *

$$\xi_\Gamma = \tau_\Gamma \cap \Delta_A \tag{3}$$

называется отношением псевдотранзитивности полугруппы Γ, а отношение эквивалентности

$$\tilde{\xi}_\Gamma = \tilde{\tau}_\Gamma \cup \Delta_A, \tag{4}$$

являющееся его симметричной частью, — отношением взаимной псевдотранзитивности.

Полугруппа частичных преобразований Γ называется транзитивной, если $\tau_\Gamma = A \times A$, что означает, что для любой пары элементов (a_1, a_2) существует частичное преобразование из Γ, преобразующее a_1 в a_2, и псевдотранзитивной, если $\xi_\Gamma = A \times A$, что означает, что для любой пары различных элементов (a_1, a_2) $(a_1 \neq a_2)$ существует частичное преобразование из Γ, преобразующее a_1 в a_2.

Подмножество $\mathfrak{A}$ множества A называется полуинвариантным относительно данного бинарного отношения ρ между элементами

* Отношением квазипорядка называется рефлективное и транзитивное бинарное отношение.

этого множества, если оно удовлетворяет условию, что сечение [1] ρ через $\mathfrak{A}$ включается в $\mathfrak{A}$

$$\rho(\mathfrak{A}) \subset \mathfrak{A}. \qquad (5)$$

Подмножества, являющиеся дополнениями подмножеств полуинвариантных относительно бинарного отношения ρ, совпадают с подмножествами, полуинвариантными относительно обратного бинарного отношения $\overset{-1}{\rho}$ [4].

Подмножество $\mathfrak{A}$ называется полуинвариантным относительно полугруппы частичных преобразований $\Gamma \subset \mathfrak{F}(A \times A)$, если оно полуинвариантно относительно каждого частичного преобразования из Γ, что, очевидно, эквивалентно тому, что $\mathfrak{A}$ — полуинвариантно относительно отношения транзитивности τ_Γ.

Подмножество $\mathfrak{A}$ называется гомоморфным подмножеством для полугруппы частичных преобразований $\Gamma \subset \mathfrak{F}(A \times A)$, если отображение $f_{\mathfrak{A}}$ полугруппы Γ в полугруппу $\mathfrak{F}(A \times A)$, определяемое формулой

$$f_{\mathfrak{A}}(\gamma) = \Delta_{\mathfrak{A}} \circ \gamma \circ \Delta_{\mathfrak{A}}, \qquad (6)$$

или, что то же самое,

$$f_{\mathfrak{A}}(\gamma) = \mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \cap \gamma \qquad (7)$$

является гомоморфизмом.

Можно показать [4], что для того, чтобы $\mathfrak{A}$ было гомоморфным подмножеством для Γ, необходимо и достаточно, чтобы оно удовлетворяло условию

$$\tau_\Gamma(\mathfrak{A}) \cap \overset{-1}{\tau_\Gamma}(\mathfrak{A}) \subset \mathfrak{A}, \qquad (8)$$

что эквивалентно тому, что $\mathfrak{A}$ является пересечением подмножества, полуинвариантного относительно Γ, и подмножества, дополнение которого полуинвариантно относительно Γ.

В частности, гомоморфным будет всякое подмножество, полуинвариантное относительно Γ, и всякое подмножество, дополнение которого полуинвариантно относительно Γ.

Рассмотрим отображение f_Π полугруппы Γ в полугруппу $\mathfrak{F}(A \times A)$, определяемое формулой

$$f_\Pi(\gamma) = \Pi \cap \gamma, \qquad (9)$$

где Π — частичное отношение эквивалентности*, все классы которого являются гомоморфными подмножествами для Γ, и покажем, что f_Π будет гомоморфизмом.

Действительно, представляя частичное отношение эквивалентности Π как объединение декартовых квадратов его классов

$$\Pi = \bigcup_{\mathfrak{A} \in A/\Pi} \mathfrak{A} \times \mathfrak{A}, \qquad (10)$$

где через A/Π обозначено множество всех классов Π, мы получаем

$$f_\Pi(\gamma) = \bigcup_{\mathfrak{A} \in A/\Pi} f_{\mathfrak{A}}(\gamma), \qquad (11)$$

где $f_{\mathfrak{A}}$ будет гомоморфизмом полугруппы Γ в полугруппу $\mathfrak{F}(A \times A)$, определяемым формулой (7).

Замечая, что для любых $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$, $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2 \in A/\Pi$, $\mathfrak{A}_1 \neq \mathfrak{A}_2 \to f_{\mathfrak{A}_2}(\gamma_2) \circ f_{\mathfrak{A}_1}(\gamma_1) = \varnothing$, мы получаем, что f_Π будет также гомоморфизмом Γ в $\mathfrak{F}(A \times A)$.

* Частичным отношением эквивалентности называется симметричное и транзитивное бинарное отношение.

Легко видеть, что отношение взаимной транзитивности $\tilde{\tau}_\Gamma$ будет частичным отношением эквивалентности, все классы которого будут гомоморфными подмножествами для Г. Действительно, согласно (2), мы имеем *

$$\tilde{\tau}_\Gamma\langle a\rangle=\tau_\Gamma\langle a\rangle\cap\overset{-1}{\tau}_\Gamma\langle a\rangle, \qquad (12)$$

а так как подмножество $\tau_\Gamma\langle a\rangle$ полуинвариантно, а подмножество $\overset{-1}{\tau}_\Gamma\langle a\rangle$ является дополнением полуинвариантного подмножества, поскольку оно является полуинвариантным относительно бинарного отношения $\overset{-1}{\tau}_\Gamma$, обратного отношению транзитивности, то подмножество $\tilde{\tau}_\Gamma\langle a\rangle$ будет гомоморфным для Г.

Таким образом, отображение $f_{\tilde{\tau}_\Gamma}$ Г в $\mathfrak{F}(A\times A)$, определяемое формулой аналогичной формуле (9)

$$f_{\tilde{\tau}_\Gamma}(\gamma)=\tilde{\tau}_\Gamma\cap\gamma, \qquad (13)$$

будет гомоморфизмом.

Подставляя выражение (2) для $\tilde{\tau}_\Gamma$ и замечая, что $\tau_\Gamma\cap\gamma=\gamma$, мы получаем из (13)

$$f_{\tilde{\tau}_\Gamma}(\gamma)=\overset{-1}{\tau}_\Gamma\cap\gamma. \qquad (14)$$

Обозначим через $\tilde{\Gamma}$ полугруппу частичных преобразований $f_{\tilde{\tau}_\Gamma}(\Gamma)$, являющуюся образом Г при гомоморфизме $f_{\tilde{\tau}_\Gamma}$. Из (14) мы получаем

$$\tau_{\tilde{\Gamma}}=\tilde{\tau}_\Gamma. \qquad (15)$$

Таким образом, каждой полугруппе частичных преобразований Г соответствует, являющаяся ее гомоморфным образом, полугруппа частичных преобразований того же множества $\tilde{\Gamma}$ с симметричным отношением транзитивности, совпадающим с отношением взаимной транзитивности исходной полугруппы Г. Полугруппу $\tilde{\Gamma}$ мы будем называть *симметрантом* полугруппы Г.

Пусть (G, O) — абстрактная полугруппа, где O — бинарная алгебраическая операция полугруппы, для которой мы будем, как обычно, пользоваться мультипликативным обозначением $\mathrm{O}(g_1, g_2)=g_1g_2$.

Каждому представлению r полугруппы (G, O) с помощью частичных преобразований некоторого множества A, т. е. ее гомоморфизму в полугруппу $\mathfrak{F}(A\times A)$, соответствует ее представление

$$\tilde{r}=f_{\tilde{\tau}_{r(G)}}\circ r, \qquad (16)$$

при котором образом полугруппы (G, O) будет полугруппа частичных преобразований с симметричным отношением транзитивности, являющаяся симметрантом полугруппы частичных преобразований $r(G)$.

Представление $\tilde{r}$ мы будем называть *симметрантом* представления r.

---

* Через $\rho\langle a\rangle$ обозначается сечение бинарного отношения $\rho\in\mathfrak{N}(A\times B)$ через элемент a, см. [1].

Как известно, простейшим представлением полугруппы (G, O) является каноническое представление C, определяемое формулой

$$C(g) = \lambda_g, \tag{17}$$

где λ_g — правый сдвиг, определяемый элементом g, т. е. преобразование множества G, определяемое формулой $\lambda_g(\bar{g}) = \bar{g}g$.

Как известно [3], полугруппа (G, O) называется обобщенной группой, если все ее идемпотенты попарно коммутируют, и для каждого элемента g существует обобщенно обратный элемент g^{-1}, определяемый формулами

$$gg^{-1}g = g, \quad g^{-1}gg^{-1} = g^{-1}. \tag{18}$$

При этом оказывается, что для каждого элемента существует единственный обобщенно обратный элемент, и что преобразование θ, где $\theta(g) = g^{-1}$, является инволютивным антиавтоморфизмом.

Каноническое представление обобщенной группы (G, O) является собственным, т. е. является ее изоморфизмом в обобщенную группу всех правых сдвигов Λ. Однако больший интерес имеет представление обобщенной группы (G, O) с помощью, так называемых, приведенных правых сдвигов, когда каждому элементу g соответствует взаимно однозначное частичное преобразование множества G $\tilde{\lambda}_g = \lambda_g \cap \overset{-1}{\lambda}_{g^{-1}}$, называемое приведенным правым сдвигом, определяемым этим элементом [3].

Теорема. *Симметрант канонического представления обобщенной группы* (G, O) *совпадает с ее представлением с помощью приведенных правых сдвигов*

$$\tilde{C}(g) = \tilde{\lambda}_g. \tag{19}$$

Доказательство. Докажем, прежде всего, что отношение транзитивности τ_Λ обобщенной группы всех правых сдвигов Λ может быть выражено формулой*

$$\tau_\Lambda = \underset{(g_1, g_2)}{C}\, g_1 \overset{-1}{g_1} g_2 = g_2. \tag{20}$$

Действительно, замечая, что

$$(g_1, g = g_2) \to (g_1 \overset{-1}{g_1} g_2 = g_1 \overset{-1}{g_1} g_1 g = g_1 g = g_2),$$

мы получаем далее

$$(g_1, g_2) \in \tau_\Lambda \longleftrightarrow \bigvee_g (g_1, g_2) \in \lambda_g \longleftrightarrow \bigvee_g g_1 g = g_2 \longleftrightarrow g_1 \overset{-1}{g_1} g_2 = g_2.$$

Пользуясь (20), мы имеем

$$(g_1, g_2) \in \overset{-1}{\tau_\Lambda} \cap \lambda_g \longleftrightarrow g_1 = g_2 \overset{-1}{g_2} g_1 \wedge g_1 g = g_2.$$

Замечая, что $\overset{-1}{g_1} g_1$ и gg^{-1} будут идемпотенты и потому будут коммутировать, мы получаем далее

$$(g_1 = g_2 \overset{-1}{g_2} g_1 \wedge g_1 g = g_2) \to (g_2 g^{-1} = g_1 gg^{-1} = g_2 \overset{-1}{g_2} g_1 gg^{-1} =$$

$$= g_2 (g_1 g)^{-1} g_1 gg^{-1} = g_2 g^{-1} \overset{-1}{g_1} g_1 gg^{-1} = g_2 g^{-1} gg^{-1} \overset{-1}{g_1} g_1 =$$

$$= g_2 g^{-1} \overset{-1}{g_1} g_1 = g_2 (g_1 g)^{-1} g_1 = g_2 \overset{-1}{g_2} g_1 = g_1),$$

* Также как и в [3] и [4] здесь применяется символика математической логики. В частности C является символом абстракции.

откуда

$$(g_1, g_2) \in \overset{-1}{\tau}_\Delta \cap \lambda_g \to g_2 g^{-1} = g_1$$

или

$$(g_1, g_2) \in \overset{-1}{\tau}_\Delta \cap \lambda_g \to (g_1, g_2) \in \overset{-1}{\lambda}_g,$$

что дает

$$\overset{-1}{\tau}_\Delta \cap \lambda_g \subset \overset{-1}{\lambda}_{g-1}$$

или

$$\overset{-1}{\tau}_\Delta \cap \lambda_g \subset \lambda_g \cap \overset{-1}{\lambda}_{g-1}.$$

Замечая, что

$$\lambda_g \cap \overset{-1}{\tau}_{g-1} \subset \overset{-1}{\tau}_\Delta \cap \lambda_g,$$

мы получаем окончательно

$$\overset{-1}{\tau}_\Delta \cap \lambda_g = \lambda_g \cap \overset{-1}{\lambda}_{g-1}, \tag{21}$$

что эквивалентно (19) и дает, таким образом, доказательство теоремы.

Представление обобщенной группы с помощью приведенных правых сдвигов, при определении которых использовалось существование единственного обобщенно обратного элемента для каждого элемента обобщгнной группы, до сих пор казалось относящимся к специфическим особенностям теории обобщенных групп, не имеющим аналога в общей теории полугрупп. Однако, доказанная теорема показывает, что рассмотрение симметранта канонического представления произвольной полугруппы дает возможность и в этом отношении теорию обобщенных групп свести к общей теории полугрупп. В связи с этим является целесообразным для произвольной полугруппы ввести понятие приведенного правого сдвига $\tilde{\lambda}_g$, определяемого элементом g, с помощью формулы

$$\tilde{\lambda}_g = \overset{-1}{\tau}_\Delta \cap \lambda_g. \tag{22}$$

Каждому представлению r полугруппы (G, O) с помощью частичных преобразований некоторого множества A соответствуют следующие бинарные отношения между элементами множества G:

1) стабильное отношение квазипорядка ζ_r

$$\zeta_r = \underset{(g_1, g_2)}{\mathrm{C}}\ r(g_1) \subset r(g_2), \tag{22}$$

называемое фундаментальным отношением квазипорядка представления r,

2) стабильное отношение эквивалентности ε_r, являющееся симметричной частью фундаментального отношения квазипорядка ζ_r,

$$\varepsilon_r = \zeta_r \cap \overset{-1}{\zeta}_r = \underset{(g_1, g_2)}{\mathrm{C}}\ r(g_1) = r(g_2), \tag{23}$$

называемое ядром представления r,

3) стабильное рефлективное симметричное бинарное отношение σ_r

$$\sigma_r = \underset{(g_1, g_2)}{\mathrm{C}}\ r(g_1) \cup r(g_2) \in \mathfrak{F}(A \times A), \tag{24}$$

называемое отношением объединимости представления r,

4) регулярное слева отношение квазипорядка $\underset{1}{\chi_r}$

$$\underset{1}{\chi_r} = \underset{(g_1, g_2)}{C} pr_1(r(g_1)) \subset pr_1(r(g_2)), \tag{25}$$

называемое первым проекционным отношением квазипорядка представления r,

5) регулярное слева отношение эквивалентности $\underset{1}{\Pi_r}$, являющееся симметричной частью первого проекционного отношения квазипорядка

$$\underset{1}{\Pi_r} = \underset{1}{\chi_r} \cap \overset{-1}{\underset{1}{\chi_r}} = \underset{(g_1, g_2)}{C} pr_1(r(g_1)) = pr_1(r(g_2)), \tag{26}$$

называемое первым проекционным ядром представления r,

6) регулярное справа отношение квазипорядка $\underset{2}{\chi_r}$

$$\underset{2}{\chi_r} = \underset{(g_1, g_2)}{C} pr_2(r(g_1)) \subset pr_2(r(g_2)), \tag{27}$$

называемое вторым проекционным отношением квазипорядка представления r,

7) регулярное справа отношение эквивалентности $\underset{2}{\Pi_r}$, являющееся симметричной частью второго проекционного отношения квазипорядка

$$\underset{2}{\Pi_r} = \underset{2}{\chi_r} \cap \overset{-1}{\underset{2}{\chi_r}} = \underset{(g_1, g_2)}{C} pr_2(r(g_1)) = pr_2(r(g_2)), \tag{28}$$

называемое вторым проекционным ядром представления r.

При этом надо заметить, что, если r является представлением (G, O) с помощью преобразований множества A, т. е. $\bigwedge_g pr_1(r(g)) = A$, то мы будем иметь

$$\zeta_r = \varepsilon_r = \sigma_r, \quad \underset{1}{\chi_r} = \underset{1}{\Pi_r} = A \times A. \tag{29}$$

В общей теории полугрупп большое значение имеет нахождение для произвольной полугруппы (G, O) подмножеств множества G и бинарных отношений между его элементами, являющихся инвариантами, в смысле Риге [2], бинарной алгебраической операции O, т. е. определяемыми этой последней.

Каждой полугруппе (G, O) соответствует полугруппа (G, O^*), бинарная алгебраическая операция O^* которой получается инвертированием бинарной алгебраической операции O, т. е. определяется формулой

$$O^*(g_1, g_2) = O(g_2, g_1). \tag{30}$$

Полугруппа (G, O^*) называется инвертированной полугруппой для исходной полугруппы (G, O). Очевидно, что подмножества и бинарные отношения, являющиеся инвариантами для инвертированной полугруппы, будут инвариантами и для исходной полугруппы. Это дает своего рода принцип двойственности в теории инвариантов полугрупп. Каждому инварианту полугруппы соответствует двойственный ему инвариант, являющийся аналогичным инвариантом инвертированной полугруппы. Пересечение инварианта с двойственным ему инвариантом дает инвариант, двойственный самому себе.

Примерами подмножеств, являющихся инвариантами полугруппы, могут служить множество всех правых единиц и множество всех левых единиц, представляющих пару двойственных друг другу инвариантов, множество всех идемпотентов, представляющие инвариант двойственный самому себе и т. д.

Простейшими бинарными отношениями, являющимися инвариантами произвольной полугруппы (G, O) будут отношения транзитивности τ_Δ, отношение взаимной транзитивности $\tilde{\tau}_\Delta$, отношение псевдотранзитивности ξ_Δ, отношение взаимной псевдотранзитивности $\tilde{\xi}_\Delta$ полугруппы всех правых сдвигов Δ. Замечая, что правый сдвиг инвертированной полугруппы (G, O^*), определяемый элементом g, совпадает с левым сдвигом исходной полугруппы (G, O), определяемым, тем же элементом, т. е. с преобразованием μ_g множества G, определяемым формулой $\mu_g(\overline{g}) = g\overline{g}$, мы получаем, что двойственными инвариантами будут аналогичные бинарные отношения τ_M, $\tilde{\tau}_M$, ξ_M, $\tilde{\xi}_M$ для полугруппы всех левых сдвигов M. Из указанных инвариантов полугруппы отношения эквивалентности $\tilde{\xi}_\Delta$ и $\tilde{\xi}_M$ рассматривались в общей теории полугрупп Дж. А. Грином [6]. Согласно (29), каноническое представление c полугруппы может дать нам не более трех нетривиальных бинарных отношений, являющихся инвариантами, а именно: ε_c, $\underset{2}{\chi_c}$, $\underset{2}{\Pi_c}$. Двойственными инвариантами будут аналогичные бинарные отношения ε_{c^*}, $\underset{2}{\chi_{c^*}}$, $\underset{2}{\Pi_{c^*}}$, соответствующие каноническому представлению c^* инвертированной полугруппы. Симметранту канонического представления $\tilde{C}$ соответствуют инварианты полугруппы $\zeta_{\tilde{c}}$, $\varepsilon_{\tilde{c}}$, $\sigma_{\tilde{c}}$, $\underset{1}{\chi_{\tilde{c}}}$, $\underset{1}{\Pi_{\tilde{c}}}$, $\underset{2}{\chi_{\tilde{c}}}$, $\underset{2}{\Pi_{\tilde{c}}}$, двойственные им инварианты $\zeta_{\tilde{c}^*}$, $\varepsilon_{\tilde{c}^*}$, $\sigma_{\tilde{c}^*}$, $\underset{1}{\chi_{\tilde{c}^*}}$, $\underset{1}{\Pi_{\tilde{c}^*}}$, $\underset{2}{\chi_{\tilde{c}^*}}$, $\underset{2}{\Pi_{\tilde{c}^*}}$ соответствуют симметранту канонического представления $\tilde{c}^*$ инвертированной полугруппы, который определяется формулой

$$\tilde{c}^*(g) = \tilde{\mu}_g, \tag{31}$$

где

$$\tilde{\mu}_g = \overset{-1}{\tau_M} \sqcap \mu_g \tag{32}$$

— приведенный левый сдвиг исходной полугруппы, определяемый элементом g. Попарные пересечения двойственных друг другу инвариантов будут являться двойственными самим себе инвариантами.

Как известно, любому собственному представлению r обобщенной группы (G, O) с помощью взаимно однозначных частичных преобразований некоторого множества A, соответствуют одни и те же бинарные отношения ζ_r, σ_r, $\underset{1}{\chi_r}$, $\underset{2}{\chi_r}$, причем [5]

$$\underset{1}{\chi_r} = \overset{-1}{\tau_\Delta}, \quad \underset{2}{\chi_r} = \overset{-1}{\tau_M}. \tag{33}$$

В силу того, что представление r собственное, мы имеем

$$\varepsilon_r = \Delta_G \tag{34}$$

и, следовательно, ζ_r является отношением порядка, называемым каноническим отношением порядка обобщенной группы и обозначаемым обычно через ω [2]. При этом канонические отношения порядка для данной обобщенной группы и инвертированной совпадают.

Пересечение отношения объединимости для данной обобщенной группы с отношением объединимости для инвертированной обобщенной группы совпадает с так называемым отношением совместности обобщенной группы σ [3].

Саратовский государственный университет
им. Н. Г. Чернышевского

Поступило
20 X 57

ЛИТЕРАТУРА

1. N. Bourbaki, Theorie des ensembles (Fascicule de resultats), Paris, Hermann, 1939. 2. J. Riguet, Relations binaires, fermetures, correspondances de Galois, Bull. Soc. Math. France, 76, p. p. 114—155, 1948. 3. В. В. Вагнер, Теория обобщенных груд и обобщенных групп, Мат. сб., 32 (74), стр. 545—632, 1953. 4. В. В. Вагнер, Представление упорядоченных полугрупп, Мат. сб., 38 (80), стр. 203—240, 1956. 5. В. В. Вагнер, Обобщенные груды, приводимые к обобщенным группам, Укр. мат. жур., 8, стр. 235—252, 1956. 6. J. A. Green, On the structure of semigroups, Ann. of. Math., 54, p. p. 163—172, 1951.