



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Букоша, Отсутствие периодических орбит у одного класса двумерных систем Колмогорова, *Изв. вузов. Матем.*, 2018, номер 1, 3–9

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 5.101.22.68

19 июня 2023 г., 13:28:32



Р. БУКОША

ОТСУТСТВИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ОРБИТ У ОДНОГО КЛАССА ДВУМЕРНЫХ СИСТЕМ КОЛМОГОРОВА

Аннотация. Для двумерной системы Колмогорова, где $R(x, y)$, $S(x, y)$, $P(x, y)$, $Q(x, y)$, $M(x, y)$, $N(x, y)$ — однородные многочлены степеней m, a, n, n, b, b соответственно, получено явное выражение первого интеграла. Затем на его основе доказано отсутствие периодических орбит и предельных циклов. Приведен пример применения этих результатов.

Ключевые слова: система Колмогорова, первый интеграл, периодическая орбита, предельный цикл.

ВВЕДЕНИЕ

Системой Колмогорова называют автономную систему дифференциальных уравнений на плоскости вида

$$x' = \frac{dx}{dt} = xF(x, y), \quad y' = \frac{dy}{dt} = yG(x, y), \quad (1)$$

где производные берутся по времени, а F и G — две функции переменных x и y . Ее часто используют при моделировании взаимного влияния двух биологических видов в общей экологической нише [1]–[3]. Существует множество других теорий природных явлений, где используются системы Колмогорова, включая математическую экологию и динамику популяций [4]–[7], динамику химических реакций, физику плазмы [8], гидродинамику [9], экологию и др. В классической модели Лотки–Вольтерра–Гаузе функции F и G линейны, и, как хорошо известно, предельных циклов в этой модели нет. Конечно, здесь может быть одна критическая точка внутри квадранта ($x > 0$, $y > 0$), которая может быть центром, но изолированных периодических решений здесь нет. Напомним, что в фазовой плоскости предельный цикл системы (1) есть изолированная периодическая орбита системы (1). Одно из наиболее важных направлений в качественной теории плоских динамических систем [10]–[15] связано со второй частью нерешенной шестнадцатой проблемой Гильберта. Существует обширная литература по предельным циклам. Большая ее часть посвящена выявлению этих циклов, их количеству и устойчивости. Гораздо более редки работы, где они выписываются в явном виде [16]–[18].

Система (1) интегрируема на открытом подмножестве Ω плоскости \mathbb{R}^2 непостоянная C^1 -функция $H : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, называемая первым интегралом этой системы на Ω , которая постоянна на содержащихся в Ω траекториях системы (1), т. е. если

$$\frac{dH(x, y)}{dt} = \frac{\partial H(x, y)}{\partial x} xF(x, y) + \frac{\partial H(x, y)}{\partial y} yG(x, y) \equiv 0 \text{ в точках } \Omega.$$

При этом $H = h$ есть общее решение этого уравнения, где h — произвольная постоянная. Хорошо известно, что для систем дифференциальных уравнений на плоскости существование первого интеграла определяет фазовый портрет [19].

В данной статье исследуется интегрируемость и периодические орбиты двумерной системы Колмогорова вида

$$x' = x \left(\frac{R(x, y)}{S(x, y)} + \sqrt{P(x, y)} \exp \left(\frac{M(x, y)}{N(x, y)} \right) \right), \quad y' = y \left(\frac{R(x, y)}{S(x, y)} + \sqrt{Q(x, y)} \exp \left(\frac{M(x, y)}{N(x, y)} \right) \right), \quad (2)$$

где $R(x, y)$, $S(x, y)$, $P(x, y)$, $Q(x, y)$, $M(x, y)$, $N(x, y)$ — однородные многочлены степеней m , a , n , n , b , b соответственно.

Определим тригонометрические функции

$$\begin{aligned} f_1(\theta) &= \sqrt{P(\cos \theta, \sin \theta)} (\cos^2 \theta) \exp \left(\frac{M(\cos \theta, \sin \theta)}{N(\cos \theta, \sin \theta)} \right) + \\ &\quad + \sqrt{Q(\cos \theta, \sin \theta)} (\sin^2 \theta) \exp \left(\frac{M(\cos \theta, \sin \theta)}{N(\cos \theta, \sin \theta)} \right), \\ f_2(\theta) &= \frac{R(\cos \theta, \sin \theta)}{S(\cos \theta, \sin \theta)}, \\ f_3(\theta) &= \left(\sqrt{Q(\cos \theta, \sin \theta)} - \sqrt{P(\cos \theta, \sin \theta)} \right) (\cos \theta \sin \theta) \exp \left(\frac{M(\cos \theta, \sin \theta)}{N(\cos \theta, \sin \theta)} \right). \end{aligned}$$

1. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Теорема. Для системы Колмогорова (2) справедливы следующие утверждения.

(1) Если $f_3(\theta) N(\cos \theta, \sin \theta) S(\cos \theta, \sin \theta) \neq 0$, $P(\cos \theta, \sin \theta) \geq 0$, $Q(\cos \theta, \sin \theta) \geq 0$ и $\frac{1}{2}n + a - m \neq 0$, то система (2) имеет первый интеграл

$$\begin{aligned} H(x, y) &= (x^2 + y^2)^{\frac{n+2a-2m}{4}} \exp \left(\left(m - \frac{1}{2}n - a \right) \int_0^{\arctan \frac{y}{x}} A(\omega) d\omega \right) - \\ &\quad - \left(\frac{1}{2}n + a - m \right) \int_0^{\arctan \frac{y}{x}} \exp \left(\left(m - \frac{1}{2}n - a \right) \int_0^w A(\omega) d\omega \right) B(w) dw, \end{aligned}$$

где $A(\theta) = \frac{f_1(\theta)}{f_3(\theta)}$, $B(\theta) = \frac{f_2(\theta)}{f_3(\theta)}$, а траектории системы дифференциальных уравнений (2) в декартовых координатах имеют уравнения

$$x^2 + y^2 = \left(\begin{aligned} &h \exp \left(\left(\frac{1}{2}n + a - m \right) \int_0^{\arctan \frac{y}{x}} A(\omega) d\omega \right) + \\ &+ \left(\frac{1}{2}n + a - m \right) \exp \left(\left(\frac{1}{2}n + a - m \right) \int_0^{\arctan \frac{y}{x}} A(\omega) d\omega \right) \\ &\int_0^{\arctan \frac{y}{x}} \exp \left(\left(m - \frac{1}{2}n - a \right) \int_0^w A(\omega) d\omega \right) B(w) dw \end{aligned} \right)^{\frac{4}{n+2a-2m}},$$

где $h \in \mathbb{R}$. При этом система (2) не имеет предельных циклов.

(2) Если $f_3(\theta) N(\cos \theta, \sin \theta) S(\cos \theta, \sin \theta) \neq 0$, $P(\cos \theta, \sin \theta) \geq 0$, $Q(\cos \theta, \sin \theta) \geq 0$ и $\frac{1}{2}n + a - m = 0$, то система (2) имеет первый интеграл

$$H(x, y) = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \exp \left(- \int_0^{\arctan \frac{y}{x}} (A(\omega) + B(\omega)) d\omega \right),$$

а кривые, образованные траекториями системы дифференциальных уравнений (2), в декартовых координатах записываются как

$$(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} - h \exp \left(\int_0^{\arctan \frac{y}{x}} (A(\omega) + B(\omega)) d\omega \right) = 0,$$

где $h \in \mathbb{R}$, и система (2) не имеет предельных циклов.

(3) Если $f_3(\theta) = 0$ для всех $\theta \in \mathbb{R}$, то система (2) имеет первый интеграл $H = \frac{y}{x}$, и траектории системы (2) записываются в декартовых координатах как $y - hx = 0$, где $h \in \mathbb{R}$. Система (2) не имеет предельных циклов.

Доказательство. Перепишем систему (2) в полярных координатах (r, θ) , т. е. положим $x = r \cos \theta$ и $y = r \sin \theta$. Получим

$$r' = f_1(\theta) r^{\frac{1}{2}n+1} + f_2(\theta) r^{m-a+1}, \quad \theta' = f_3(\theta) r^{\frac{1}{2}n}, \quad (3)$$

где тригонометрические функции $f_1(\theta)$, $f_2(\theta)$, $f_3(\theta)$ определены во введении, $r' = dr/dt$ и $\theta' = d\theta/dt$.

Пусть $f_3(\theta) N(\cos \theta, \sin \theta) S(\cos \theta, \sin \theta) \neq 0$, $P(\cos \theta, \sin \theta) \geq 0$, $Q(\cos \theta, \sin \theta) \geq 0$ для $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ и $\frac{1}{2}n + a - m \neq 0$.

Будем считать координату θ независимой переменной. Тогда система (3) приобретает вид

$$\frac{dr}{d\theta} = A(\theta) r + B(\theta) r^{1-\frac{1}{2}n+a-m},$$

где $A(\theta) = \frac{f_1(\theta)}{f_3(\theta)}$, $B(\theta) = \frac{f_2(\theta)}{f_3(\theta)}$, — это уравнение Бернулли. Стандартная замена переменных $\rho = r^{\frac{1}{2}n+a-m}$ приводит к линейному уравнению

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \left(\frac{1}{2}n + a - m \right) (A(\theta) \rho + B(\theta)). \quad (4)$$

Общее решение уравнения (4) есть

$$\begin{aligned} \rho(\theta) = & \exp \left(\left(\frac{1}{2}n + a - m \right) \int_0^\theta A(\omega) d\omega \right) \times \\ & \times \left(\alpha + \left(\frac{1}{2}n + a - m \right) \int_0^\theta \exp \left(\left(m - \frac{1}{2}n - a \right) \int_0^w A(\omega) d\omega \right) B(w) dw \right), \end{aligned}$$

где $\alpha \in \mathbb{R}$. Отсюда первый интеграл равен

$$\begin{aligned} H(x, y) = & (x^2 + y^2)^{\frac{n+2a-2m}{4}} \exp \left(\left(m - \frac{1}{2}n - a \right) \int_0^{\arctan \frac{y}{x}} A(\omega) d\omega \right) - \\ & - \left(\frac{1}{2}n + a - m \right) \int_0^{\arctan \frac{y}{x}} \exp \left(\left(m - \frac{1}{2}n - a \right) \int_0^w A(\omega) d\omega \right) B(w) dw. \end{aligned}$$

Пусть Γ — периодическая орбита, окружающая точку равновесия, лежащую в одном из открытых квадрантов, и пусть $h_\Gamma = H(\Gamma)$. Кривые $H = h$ с $h \in \mathbb{R}$, образованные траекториями системы (2), в декартовых координатах записываются так:

$$x^2 + y^2 = \left(\begin{aligned} & h \exp \left(\left(\frac{1}{2}n + a - m \right) \int_0^{\arctan \frac{y}{x}} A(\omega) d\omega \right) + \\ & + \left(\frac{1}{2}n + a - m \right) \exp \left(\left(\frac{1}{2}n + a - m \right) \int_0^{\arctan \frac{y}{x}} A(\omega) d\omega \right) \\ & \int_0^{\arctan \frac{y}{x}} \exp \left(\left(m - \frac{1}{2}n - a \right) \int_0^w A(\omega) d\omega \right) B(w) dw \end{aligned} \right)^{\frac{4}{n+2a-2m}}.$$

где $h \in \mathbb{R}$.

Поэтому периодическая орбита Γ содержится в кривой

$$x^2 + y^2 = \left(\begin{aligned} &h_{\Gamma} \exp \left(\left(\frac{1}{2}n + a - m \right) \int_0^{\arctan \frac{y}{x}} A(\omega) d\omega \right) + \\ &+ \left(\frac{1}{2}n + a - m \right) \exp \left(\left(\frac{1}{2}n + a - m \right) \int_0^{\arctan \frac{y}{x}} A(\omega) d\omega \right) \\ &\int_0^{\arctan \frac{y}{x}} \exp \left(\left(m - \frac{1}{2}n - a \right) \int_0^w A(\omega) d\omega \right) B(w) dw \end{aligned} \right)^{\frac{4}{n+2a-2m}}.$$

Но эта кривая не может содержать периодическую орбиту Γ . Следовательно, квадрант $(x > 0, y > 0)$ не содержит предельных циклов, поскольку в нем вышеуказанная кривая имеет не более одной точки пересечения с прямой $y = \beta x$ при любом $\beta \in]0, +\infty[$.

Чтобы установить это, достаточно подсчитать абсциссы точек пересечения этой кривой с прямой $y = \beta x$ при $\beta \in]0, +\infty[$. Эти абсциссы равны

$$x = \frac{1}{\sqrt{1+\beta^2}} \left(\begin{aligned} &h_{\Gamma} \exp \left(\left(\frac{1}{2}n + a - m \right) \int_0^{\arctan \beta} A(\omega) d\omega \right) + \\ &+ \left(\frac{1}{2}n + a - m \right) \exp \left(\left(\frac{1}{2}n + a - m \right) \int_0^{\arctan \beta} A(\omega) d\omega \right) \\ &\int_0^{\arctan \beta} \exp \left(\left(m - \frac{1}{2}n - a \right) \int_0^w A(\omega) d\omega \right) B(w) dw \end{aligned} \right)^{\frac{2}{n+2a-2m}},$$

и на каждой полупрямой OX^+ лежит не более одного значения x . Следовательно, в квадранте $(x > 0, y > 0)$ лежит не более одной точки пересечения, а кривая не может содержать периодическую орбиту.

Тем самым доказано утверждение (1) теоремы.

Допустим теперь, что $f_3(\theta) N(\cos \theta, \sin \theta) S(\cos \theta, \sin \theta) \neq 0$, $P(\cos \theta, \sin \theta) \geq 0$, $Q(\cos \theta, \sin \theta) \geq 0$ и $\frac{1}{2}n + a = m$.

Взяв в качестве независимой переменной координату θ , запишем систему (3) в виде

$$\frac{dr}{d\theta} = (A(\theta) + B(\theta)) r. \quad (5)$$

Общее решение уравнения (5) есть $r(\theta) = \alpha \exp \left(\int_0^{\theta} (A(\omega) + B(\omega)) d\omega \right)$, где $\alpha \in \mathbb{R}$. Первый интеграл равен

$$H(x, y) = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \exp \left(- \int_0^{\arctan \frac{y}{x}} (A(\omega) + B(\omega)) d\omega \right).$$

Пусть Γ — периодическая орбита, окружающая точку равновесия, расположенную в квадранте $(x > 0, y > 0)$, причем $h_{\Gamma} = H(\gamma)$. Кривые $H = h$, $h \in \mathbb{R}$, образованные траекториями системы (2), в декартовых координатах запишутся так:

$$(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} - h \exp \left(\int_0^{\arctan \frac{y}{x}} (A(\omega) + B(\omega)) d\omega \right) = 0.$$

Поэтому периодическая орбита Γ содержится в кривой

$$r(\theta) = h_{\Gamma} \exp \left(\int_0^{\arctan \frac{y}{x}} (A(\omega) + B(\omega)) d\omega \right).$$

Но эта кривая не может содержать периодических орбит, и, следовательно, квадрант $(x > 0, y > 0)$ не может содержать предельных циклов, потому что вышеуказанная кривая имеет в этом квадранте не более одной точки пересечения с каждой прямой $y = \beta x$, $\beta \in]0, +\infty[$.

Чтобы установить этот факт, нужно вычислить абсциссы точек пересечения этой кривой с прямыми $y = \beta x$, $\beta \in]0, +\infty[$. Они равны

$$x = \frac{h_\Gamma}{\sqrt{(1 + \beta^2)}} \exp \left(\int_0^{\arctan \beta} (A(\omega) + B(\omega)) d\omega \right).$$

Не более одного значения x лежит на каждой полупрямой OX^+ , и, соответственно, не более одной точки лежит в квадранте ($x > 0$, $y > 0$). Таким образом, эта кривая не может содержать периодических орбит.

Тем самым доказано утверждение (2) теоремы.

Теперь предположим, что $f_3(\theta) = 0$ для всех $\theta \in \mathbb{R}$, тогда из (3) следует равенство $\theta' = 0$. Поэтому проходящие через начало координат прямые инвариантны относительно действия системы (2). Значит, $\frac{y}{x}$ есть первый интеграл этой системы, и ее траектории имеют вид $y - hx = 0$, $h \in \mathbb{R}$. Поэтому в рассматриваемом случае нет ни периодических орбит, ни предельных циклов.

Этим завершается доказательство предложения (3) теоремы. \square

2. ПРИМЕР

Наш результат иллюстрирует

Пример. Положим $R(x, y) = x^5 + x^3y^2$, $S(x, y) = x^2 + y^2$, $P(x, y) = 9x^2 + 8y^2$, $Q(x, y) = x^2 + y^2$, $M(x, y) = 3x^2 + y^2$ и $N(x, y) = x^2 + y^2$. Тогда система (2) записывается в виде

$$\begin{aligned} x' &= x \left(\frac{x^5 + x^3y^2}{x^2 + y^2} + \sqrt{9x^2 + 8y^2} \exp \left(\frac{3x^2 + y^2}{x^2 + y^2} \right) \right), \\ y' &= y \left(\frac{x^5 + x^3y^2}{x^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + y^2} \exp \left(\frac{3x^2 + y^2}{x^2 + y^2} \right) \right), \end{aligned} \quad (6)$$

а двумерная система Колмогорова (6) в полярных координатах (r, θ) имеет вид

$$\begin{aligned} r' &= \left(\sin^2 \theta + (\cos^2 \theta) \sqrt{8 + \cos^2 \theta} \right) (\exp(2 + \cos^2 \theta)) r^2 + (\cos^3 \theta) r^4, \\ \theta' &= (\cos \theta \sin \theta) \left(1 - \sqrt{8 + \cos^2 \theta} \right) (\exp(2 + \cos^2 \theta)) r, \end{aligned}$$

здесь $f_1(\theta) = \left(\sin^2 \theta + (\cos^2 \theta) \sqrt{8 + \cos^2 \theta} \right) (\exp(2 + \cos^2 \theta))$, $f_2(\theta) = \cos^3 \theta$ and $f_3(\theta) = (\cos \theta \sin \theta) \left(1 - \sqrt{8 + \cos^2 \theta} \right) (\exp(2 + \cos^2 \theta))$. Поскольку в квадранте ($x > 0$, $y > 0$) выполнены условия случая а) теоремы, то двумерная система Колмогорова (6) имеет первый интеграл

$$H(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2} \exp \left(2 \int_0^{\arctan \frac{y}{x}} A(\omega) d\omega \right) + 2 \int_0^{\arctan \frac{y}{x}} \exp \left(2 \int_0^w A(\omega) d\omega \right) B(w) dw,$$

где $A(\omega) = \frac{\sin^2 \omega + (\cos^2 \omega) \sqrt{8 + \cos^2 \omega}}{(\cos \omega \sin \omega)(1 - \sqrt{8 + \cos^2 \omega})}$, $B(\omega) = \frac{\cos^3 \omega}{(\sin \omega)(1 - \sqrt{8 + \cos^2 \omega})(\exp(2 + \cos^2 \omega))}$.

Кривые $H = h$, $h \in \mathbb{R}$, образованные траекториями системы (6) в декартовых координатах имеют вид

$$\frac{1}{x^2 + y^2} = \exp \left(-2 \int_0^{\arctan \frac{y}{x}} A(\omega) d\omega \right) \left(h - 2 \int_0^{\arctan \frac{y}{x}} \exp \left(2 \int_0^w A(\omega) d\omega \right) B(w) dw \right),$$

где $h \in \mathbb{R}$. Очевидно, система (6) не имеет ни периодических орбит, ни предельных циклов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Использованный в данной статье элементарный метод может оказаться плодотворным в исследованиях и более общих двумерных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Возможно, он позволит найти явный вид их первых интегралов и охарактеризовать их траектории.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Gao P. *Hamiltonian structure and first integrals for the Lotka–Volterra systems*, Phys. Lett. A **273** (1–2), 85–96 (2000).
- [2] Li C., Llibre J. *The cyclicity of period annulus of a quadratic reversible Lotka–Volterra system*, Nonlinearity **22** (12), 2971–2979 (2009).
- [3] Llibre J., Valls C. *Polynomial, rational and analytic first integrals for a family of 3-dimensional Lotka–Volterra systems*, Z. Angew. Math. Phys. **62** (5), 761–777 (2011).
- [4] Huang X. *Limit in a Kolmogorov-type model*, Internat. J. Math. and Math Sci. **13** (3), 555–566 (1990).
- [5] Llibre J., Salhi T. *On the dynamics of a class of Kolmogorov systems*, J. Appl. Math. and Comput. **225**, 242–245 (2013).
- [6] Llyod N.G., Pearson J.M., Sáez E., Szántó I. *Limit cycles of a cubic Kolmogorov system*, Appl. Math. Lett. **9** (1), 15–18 (1996).
- [7] May R.M. *Stability and complexity in model ecosystems* (Princeton, New Jersey, 1974).
- [8] Lavel G., Pellat R. *Plasma physics*, in: *Proceedings of Summer School of Theoretical Physics* (Gordon and Breach, New York, 1975).
- [9] Busse F.H. *Transition to turbulence via the statistical limit cycle route*, in: *Synergetics* (Springer-Verlag, Berlin, 1978), p. 39.
- [10] Boukoucha R. *On the dynamics of a class of Kolmogorov systems*, Sib. Elektron. Mat. Izv. **13**, 734–739 (2016).
- [11] Boukoucha R., Bendjeddou A. *On the dynamics of a class of rational Kolmogorov systems*, J. Nonlinear Math. Phys. **23** (1), 21–27 (2016).
- [12] Chavarriga J., García I. A. *Existence of limit cycles for real quadratic differential systems with an invariant cubic*, Pacific J. Math. **223** (2), 201–218 (2006).
- [13] Al-Dosary Khalil I.T. *Non-algebraic limit cycles for parameterized planar polynomial systems*, Int. J. Math. **18** (2), 179–189 (2007).
- [14] Dumortier F., Llibre J., Artés J. *Qualitative theory of planar differential systems* (Springer, Universitext, Berlin, 2006).
- [15] Llibre J., Yu J., Zhang X. *On the limit cycle of the polynomial differential systems with a linear node and homogeneous nonlinearities*, Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg. **24**, No. 5, Article ID 1450065 (2014).
- [16] Bendjeddou A., Boukoucha R. *Explicit non-algebraic limit cycles of a class of polynomial systems*, FJAM **91** (2), 133–142 (2015).
- [17] Bendjeddou A., Boukoucha R. *Explicit limit cycles of a cubic polynomial differential systems*, Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math. **61** (1), 77–85 (2016).
- [18] Gasull A., Giacomini H., Torregrosa J. *Explicit non-algebraic limit cycles for polynomial systems*, J. Comput. Appl. Math. **200** (1), 448–457 (2007).
- [19] Cairó L., Llibre J. *Phase portraits of cubic polynomial vector fields of Lotka–Volterra type having a rational first integral of degree 2*, J. Phys. A **40** (24), 6329–6348 (2007).

Рашид Букоша

Университет Беджайи, Беджайя, 06000, Алжир,

e-mail: rachid_boukecha@yahoo.fr

R. Boukoucha

On the non-existence of periodic orbits for a class of two-dimensional Kolmogorov systems

Abstract. For two-dimensional Kolmogorov system, where $R(x, y)$, $S(x, y)$, $P(x, y)$, $Q(x, y)$, $M(x, y)$, and $N(x, y)$ are homogeneous polynomials of degrees m , a , n , n , b , and b , respectively, we obtain an explicit expression of the first integral and prove the non-existence of periodic orbits and of limit cycles. We adduce an example of applicability of our result.

Keywords: Kolmogorov system, first integral, periodic orbits, limit cycle.

Rachid Boukoucha

University of Bejaia, 06000 Bejaia, Algeria,

e-mail: rachid_boukecha@yahoo.fr