Н. В. Азбелев, З. Б. Цалюк, Замечание об итерационных методах решения дифференциальных уравнений, *Изв. вузов. Матем.*, 1957, номер 1, 21–23

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1957 МАТЕМАТИКА № 1

Н. В. Азбелев, З. Б. Цалюк

ЗАМЕЧАНИЕ ОБ ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Итерационные методы приближенного решения операторных уравнений $P(y)=0$ заключаются в построении сходящейся к решению последовательности $\{y_i\}$, образованной по закону $y_{i+1}=y_i+AP(y_i)$, где A — некоторый оператор, удовлетворяющий условию $A(0)=0$. Выбор оператора A, определяющего процесс, обычно производится сразу для широкого класса уравнений без учета свойств данного оператора P. Последовательность $\{y_i\}$ будет сходиться быстрее, если выбирать A с учетом особенностей P (именно этим объясняется исключительная сходимость методов Чаплыгина и Канторовича).

Ниже приведена попытка рационального выбора оператора A для уравнения

$$y^{(n)}=f(x, y, y', \ldots, y^{(r)}) \; (r\leqslant n-1), \; y^{(k)}(a)=y_0^{(k)} \; (k=0, \ldots, n-1), \qquad (1)$$

основанная на результатах работы [1].

1. Пусть функция $f[y]\equiv f(x, y, y', \ldots, y^{(r)})$ непрерывна вместе с производными $\frac{\partial f}{\partial y^{(k)}}$ $(k=0, \ldots, r)$ в области $a\leqslant x\leqslant b$, $a_k\leqslant y^{(k)}\leqslant b_k$ $(k=0, \ldots, r)$, содержащей точку $(a, y_0, \ldots, y_0^{(r)})$. Пусть, далее, y — решение уравнения (1) и u — n раз непрерывно дифференцируемая на $[a, b]$ функция, удовлетворяющая условиям $u^{(k)}(a)=y^{(k)}(a)$ $(k=0,\ldots, n-1)$, $a_k\leqslant y^{(k)}\leqslant b_k$ $(k=0, \ldots, r)$. Обозначим через φ невязку нулевого приближения u:

$$u^{(n)}-f[u]=\varphi. \qquad (2)$$

Вычитая почленно (1) из (2), получим

$$u^{(n)}-y^{(n)}-(f[u]-f[y])=\varphi.$$

В силу леммы Адамара [2], существуют такие непрерывные на $[a, b]$ функции $s_k(x)$, что

$$f[u]-f[y]=\sum_{k=0}^{r}(u^{(k)}-y^{(k)})\cdot s_k.$$

Пусть $K(x, s)$ — функция Коши [2] дифференциальной операции

$$L[v]\equiv v^{(n)}-\sum_{k=0}^{r}s_k v^{(k)}.$$

На основании равенства $L[u-y]=\varphi$, имеем следующее представление решения y:

$$y = u - \int_a^x K(x, s)\,\varphi(s)\,ds.$$

Аппроксимируя $K(x, s) \approx Q(x, s)$ $\left(\frac{\partial^k}{\partial x^k} Q(s, s) = \delta_{k,\,n-1}\right)$ неизвестную функцию $K(x, s)$ (зависящую от решения y), получим

$$y \approx u - \int_a^x Q(x, s)\,\varphi(s)\,ds. \tag{3}$$

Результаты работы [1] позволяют указать верхнюю и нижнюю границы возможных значений $K(x, s)$. Целесообразно выбранное ядро $Q(x, s)$ следует заключить в эти же границы.

2. Пусть $K_1(x, s)$ и $K_2(x, s)$ — функции Коши операций

$$L_1[v] \equiv v^{(n)} - \sum_{k=0}^{r} q_k v^{(k)} \quad \text{и} \quad L_2[v] \equiv v^{(n)} - \sum_{k=0}^{r} p_k v^{(k)},$$

где q_k и p_k — непрерывные на $[a, b]$ функции, удовлетворяющие неравенствам $q_k \leqslant \frac{\partial f}{\partial y^{(k)}} \leqslant p_k$, $x \in [a, b]$, $k = 0, \ldots, r$ (q_k и p_k — коэффициенты условий L_1 и L_2 [1, 3, 4]). Тогда, в силу следствия 2 теоремы 4 работы [1], в треугольнике $a \leqslant s \leqslant x \leqslant c$ $(c \leqslant b)$ — положительности производной $\frac{\partial^r}{\partial x^k} K_1(x, s)$, выполняются неравенства:

$$\frac{\partial^k}{\partial x^k} K_1(x, s) \leqslant \frac{\partial^k}{\partial x^k} K(x, s) \leqslant \frac{\partial^k}{\partial x^k} K_2(x, s), \quad k = 0, \ldots, r.$$

На основании вышеупомянутого следствия, можно показать также, что неравенствам

$$\frac{\partial^k}{\partial x^k} K_1(x, s) \leqslant \frac{\partial^k}{\partial x^k} Q(x, s) \leqslant \frac{\partial^k}{\partial x^k} K_2(x, s),$$

$$a \leqslant s \leqslant x \leqslant c, \quad k = 0, \ldots, r$$

удовлетворяет функция Коши дифференциальной операции

$$v^{(n)} - \sum_{k=0}^{r} h_k v^k, \tag{4}$$

для непрерывных коэффициентов которой выполняются соотношения

$$q_k \leqslant h_k \leqslant p_k, \quad x \in [a, b], \quad k = 0, \ldots, r.$$

Если принять коэффициенты h_k и q_k постоянными, то вычисление ядра $Q(x, s)$ (функции Коши операции (4)) сведется к алгебраическим операциям.

3. Можно убедиться, что последовательность

$$\{y_i\}, \; y_0 = u, \; y_{i+1} = y_i - \int_a^x Q(x, s)\left(y_i^{(n)}(s) - f[y_i(s)]\right) ds$$

равномерно сходится на $[a, b]$ к решению y, если

$$a_k \leqslant y_i^{(k)} \leqslant b_k, \quad x \in [a, b], \quad k = 0, \ldots, r \text{ при всех } i.$$

Положив для построения этой последовательности $Q = K_1$ или $Q = K_2$, получим итерационные процессы типа процесса Чаплыгина [4. 5]. Приняв $Q = \frac{(x-s)^{n-1}}{(n-1)!}$, получим последовательность Пикара.

4. Пример. Для уравнения $y' = \sin y - 4y$, $y(0) = 0$ положим $L_1[v] \equiv v' + 5v$ и $L_2[v] \equiv v' + 3v$. Приняв $Q = e^{-4(x-s)}$ и $u = x$, получим, в силу (3),

$$y_1 = x - e^{-4x} \int_0^x e^{4s} (1 - \sin s + 4s)\, ds = \frac{1}{17}(e^{-4x} + 4 \sin x - \cos x).$$

Для приближенного решения по методу Пикара следовало бы положить $Q = 1$. Тогда

$$\bar{y}_1 = x - \int_0^x (1 - \sin s + 4s)\, ds = 1 - \cos x - 2x^2.$$

Сравнение приближенных решений y_1 и $\bar{y}_1$ с точным $y \equiv 0$ в окрестности начальной точки и на всей полуоси показывает преимущество предложенного выбора ядра $Q(x, s)$.

Ижевский механический институт

Поступило 1 X 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. В. Азбелев, З. Б. Цалюк, О задаче Чаплыгина, Укр. мат. жур., т. 9, № 4, 1957. 2. И. Г. Петровский, Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, Гостехиздат, 1952. 3. Н. В. Азбелев, З. Б. Цалюк и Е. С. Чичкин, О приближенном решении технических задач, сводящихся к дифференциальным уравнениям, Тр. Ижевского механ. ин-та, вып. 2, стр. 126—131, 1957. 4. Н. В. Азбелев, Об одном методе двусторонних приближений к решению дифференциального уравнения, Тр. Ижевского мех. ин-та, вып. 1, стр. 79—84, 1955. 5. С. Н. Слугин, Приближенное решение операторных уравнений на основе метода С. А. Чаплыгина, ДАН СССР, т. 103, № 4, стр. 565—569, 1955.