Э. М. Жмудь, Теоретико-групповая функция Мебиуса–Дельсарта и теория линейных представлений конечных групп, *Изв. вузов. Матем.*, 1957, номер 1, 133–141

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1957 МАТЕМАТИКА № 1

Э. М. Жмудь

ТЕОРЕТИКО-ГРУППОВАЯ ФУНКЦИЯ МЕБИУСА-ДЕЛЬСАРТА И ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

В работе [1] Дельсартом был построен теоретико-групповой аналог функции Мёбиуса. При этом рассматривался лишь случай абелевых групп.

В настоящей работе (§ 1) дается построение теоретико-групповой функции Мёбиуса и некоторых других связанных с ней функций для произвольных конечных групп. Эти функции, как оказывается, доставляют весьма удобный аппарат для исследования изоморфных линейных представлений конечных групп, позволяющий придать всей теории таких представлений простую и естественную форму. Приложение теоретико-групповых функций к теории линейных представлений конечных групп составляет содержание второго параграфа работы.

§ I. 1. Пусть G — конечная группа с областью операторов Ω, порождающей все внутренние автоморфизмы группы G; $N_G^{(0)}$ — множество всех допустимых относительно Ω подгрупп группы G; $N_G^{(i+1)}$ — множество всех фактор-групп $H_1^{(i)}/H_2^{(i)}$, где $H_1^{(i)}$ и $H_1^{(i)} \in N_G^{(i)}$. Пусть, наконец,

$$E_G = \bigcup_{i=0}^{\infty} N_G^{(i)}.$$

Ω можно, очевидно, рассматривать так же, как область операторов каждой группы $x \in E_G$. При этом Ω порождает все внутренние автоморфизмы группы x. Каждая группа $x \in E_G$ операторно изоморфна с некоторой фактор-группой H_1/H_2, где H_1, $H_2 \in N_G^{(0)}$.

Если y — *допустимая* подгруппа группы $x \in E_G$, то мы будем писать $y|x$. Для фактор-группы группы x по допустимой подгруппе y будем применять обозначение $\frac{x}{y}$. Группы x и y множества E_G будем относить к одному и тому же **типу**, если они операторно изоморфны ($x \simeq y$). Множество E_G распадается на конечное число t_G типов. Тип, содержащий единицу группы G, обозначим через I, а множество всех типов — через T_G.

2. Пусть $f(x)$ — функция, определенная на множество E_G и удовлетворяющая условиям:

1) область ее значений содержится в заданном поле P нулевой характеристики; 2) Если x, $y \in E_G$, $x \simeq y$, то $f(x) = f(y)$.

Если A — один из типов групп множества E_G, положим $f(A) = f(x)$, где $x \in A$. Множество всех функций $f(x)$, удовлетворяющих условиям 1) и 2), обозначим через D_G. Пусть f, $g \in D_G$, $x \in E_G$. Положим,

$$(f * g)(x) = \sum_{d|x} f(d)\, g\left(\frac{x}{d}\right), \tag{1}$$

где d пробегает множество всех допустимых подгрупп группы x. Легко видеть, что $(f \ast g)(x) \in D_G$. Так же, как и в (1), устанавливается, что введенная с помощью (1) операция умножения в D_G ассоциативна. Определяя обычным образом сложение функций и их умножение на элементы поля P, мы превратим множество D_G в ассоциативное кольцо. Это кольцо, являющееся, очевидно, алгеброй ранга t_G над полем P, мы назовем *алгеброй Дельсарта* группы G. Пусть $A \in T_G$, $x \in E_G$. Функции

$$e_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A \\ 0, & \text{если } x \text{ не } \in A \end{cases},$$

очевидно, образуют базис алгебры D_G. Если $f \in D_G$, то

$$f(x) = \sum_{A \in T_G} e_A(x) f(A)$$

или

$$f = \sum_{A \in T_G} e_A f(A).$$

Алгебра D_G имеет единицу e: $e(x) = e_J(x)$.

Пусть $f \in D_G$. Положим, $|f| = f(I)$. Если $f, g \in D_G$, $\alpha \in P$, то

$$|\alpha f| = \alpha |f|, \quad |f+g| = |f| + |g|, \quad |f \ast g| = |f| \cdot |g|. \tag{2}$$

Теорема 1. *Элемент $f \in D_G$ тогда и только тогда имеет обратный, если $|f| \neq 0$.*

Доказательство. 1. Если $f \ast g = e$, то в силу (2), $|f| \cdot |g| = 1$, откуда и следует, что $|f| \neq 0$.

2. Пусть $|f| \neq 0$. Назовем „длиной" группы $x \in E_G$ длину композиционного ряда допустимых подгрупп этой группы. Допустим, что на множестве $E_G^{(l)}$ всех групп из E_G, длина которых не превосходит l, определена функция $g(x)$, удовлетворяющая условиям

$$g(x) = \frac{1}{|f|}, \text{ если } x \in I; \quad \sum_{d|x} f(d) g\left(\frac{x}{d}\right) = 0, \text{ если } x \in E_G^{(l)}, \ x \text{ не } \in I, \tag{3}$$

$$g(x_1) = g(x_2), \text{ если } x_1, x_2 \in E_G^{(l)}, \ x_1 \simeq x_2. \tag{4}$$

Если

$$x \in E_G^{(l+1)}, \quad x \text{ не } \in I, \quad d | x, \quad d \text{ не } \in I,$$

то, очевидно,

$$\frac{x}{d} \in E_G^{(l)}$$

и, следовательно, имеет смысл $g\left(\frac{x}{d}\right)$. Определим $g(x)$ для

$$x \in E_G^{(l+1)}, \ x \text{ не} \in E_G^{(l)}$$

с помощью соотношения

$$g(x) = -\frac{1}{|f|} \sum_{d|x,\, d \neq 1_x} f(d) g\left(\frac{x}{d}\right), \tag{5}$$

где 1_x — единица группы x. Из (3), (4) и (5) вытекает

$$g(x)=\frac{1}{|f|},$$

если

$$x\in I;\quad \sum_{d|x} f(d)\, g\left(\frac{x}{d}\right)=0,$$

если

$$x\in E_G^{(l+1)},\quad x \text{ не } \in I;$$

$$g(x_1)=g(x_2),$$

если

$$x_1,\ x_2\in E_G^{(l+1)},\quad x_1\cong x_2.$$

Продолжая процесс расширения области определения функции $g(x)$, мы после конечного числа шагов получим функцию $g\in D_G$, удовлетворяющую условию $f\ast g=e$, т. е. являющуюся правым обратным элементом по отношению к f*. Аналогично доказывается существование левого обратного элемента. Легко доказывается

Теорема 2. *Если* $|f|=0$, *то* f *нильпотентный элемент алгебры* D_G. *Радикалом* R *алгебры* D_G *является множество ее необратимых элементов. Имеет место прямое разложение:* $D_G=eP\dot{+}R$.

3. Алгебра D_G, вообще говоря, не является коммутативной. Можно указать необходимое и достаточное условие для ее коммутативности. Для наших целей достаточна

Теорема 3. *Если* x — *вполне приводимая группа множества* E_G (т. е. x *разлагается в прямое произведение своих минимальных допустимых подгрупп), то* $(f\ast g)(x)=(g\ast f)(x)$ *для любых* $f,\ g\in D_G$. *Если, в частности, вполне приводима группа* G, *то алгебра* D_G *коммутативна.*

Доказательство. Множество N_x допустимых подгрупп вполне приводимой группы $x\in E_G$ допускает, как известно, структурные антиавтоморфизмы α, обладающие следующими свойствами: если $y\in N_x$, y^α — образ подгруппы y в отображении α, то

$$(y^\alpha)^\alpha=y,\quad \frac{x}{y^\alpha}\simeq y.$$

Следовательно,

$$(f\ast g)(x)=\sum_{d|x} f(d)\, g\left(\frac{x}{d}\right)=\sum_{d|x} f(d^\alpha)\, g\left(\frac{x}{d^\alpha}\right)=$$

$$=\sum_{d|x} f\left(\frac{x}{d}\right) g(d)=(g\ast f)(x).$$

Если группа G вполне приводима, то вполне приводимы все группы $x\in E_G$. Поэтому алгебра D_G коммутативна.

4. Пусть $\mathbf{1}$ — функция, тождественно равная на множестве E_G единице. Так как $|\mathbf{1}|=1\neq 0$, то в D_G имеется *элемент обратный* к $\mathbf{1}$. Обозначим этот элемент через μ_D, а соответствующую функцию $\mu_D(x)$ назовем ***функцией Мёбиуса — Дельсарта*** группы G. В силу ее определения,

$$\mathbf{1}\ast\mu_D=\mu_D\ast\mathbf{1}=e$$

---

* При достаточно большом l, очевидно, $E_G^{(l)}=E_G$.

или

$$\sum_{d|x}\mu_D(d)=\sum_{d|x}\mu_D\left(\frac{x}{d}\right)=\begin{cases}1, \text{ если } x\in I,\\ 0, \text{ если } x \text{ не } \in I.\end{cases} \tag{6}$$

Если

$$f\in D_G,\ g=f*1,\ h=1*f, \text{ то } f=g*\mu_D=\mu_D*h.$$

Отсюда вытекают две „дуальные“ между собой *формулы обращения Дедекинда—Дельсарта:*

$$g(x)=\sum_{d|x}f(d),\quad f(x)=\sum_{d|x}g(d)\,\mu_D\left(\frac{x}{d}\right), \tag{7}$$

$$h(x)=\sum_{d|x}f\left(\frac{x}{d}\right),\quad f(x)=\sum_{d|x}h\left(\frac{x}{d}\right)\mu_D(d). \tag{8}$$

5. Группу $x\in E_G$ назовем Ω-простой, если она не содержит допустимых подгрупп, отличных от x и от 1_x. Ω-простые группы элементарны. Абелевы Ω-простые группы имеют тип $(p, p, \ldots)$, где p — простое число. Кольцо эндоморфизмов абелевой Ω-простой группы порядка p^r является конечным полем порядка p^g, где g — степень этого поля относительно простого поля характеристики p. Можно показать, что r делится на g. Вполне приводимая группа $x\in E_G$ разлагается в прямое произведение Ω-простых подгрупп. Число сомножителей в таком разложении назовем Ω-рангом группы x.

Пусть M_x — множество всех Ω-простых допустимых подгрупп группы x. Разложение $x=x_1\times x_2$ вполне приводимой группы x в прямое произведение допустимых подгрупп x_1 и x_2 назовем расщеплением $(x=x_1\circ x_2)$, если $M_x=M_{x_1}\cup M_{x_2}$. Вполне приводимые группы, не допускающие нетривиальных расщеплений назовем *нерасщепляемыми.* Вполне приводимая группа x тогда и только тогда является нерасщепляемой, если все группы множества M_x операторно изоморфны. Неабелевы нерасщепляемые вполне приводимые группы являются Ω-простыми группами. Если x абелева вполне приводимая нерасщепляемая группа Ω-ранга n, то группа x элементарна и имеет порядок p^{rn}, где p^r — порядок любой из групп множества M_x; если K — поле эндоморфизмов какой-нибудь из групп множества M_x, то, как можно показать, множество допустимых подгрупп группы x структурно изоморфно с множеством подпространств некоторого линейного n-мерного пространства над полем K. Пользуясь этим обстоятельством, можно показать, что количество допустимых подгрупп Ω-ранга ν вполне приводимой нерасщепляемой абелевой группы x равно

$$N_\nu(x)=\prod_{j=0}^{n-1}\frac{p^{gn}-p^{gj}}{p^{g\nu}-p^{gj}}, \tag{9}$$

где p^g порядок поля K.

Вполне приводимая группа x расщепляется единственным (с точностью до порядка сомножителей) способом в произведение нерасщепляемых допустимых подгрупп — Ω-*когерент группы* x. Две Ω-простые допустимые подгруппы группы тогда и только тогда содержатся в одной и той же Ω-когеренте, если они операторно-изоморфны.

Теорема 4. *Если $x \in E_G$, то $\mu_D(x)=1$, если $x \in I$; $\mu_D(x)=0$, если группа x не является вполне приводимой; $\mu_D(x)=-1$, если x Ω-простая группа;*

$$\mu_D(x)=(-1)^n p^{\frac{n(n-1)}{2}g},$$

если x — абелева вполне приводимая нерасщепляемая группа Ω-ранга n (p^g — порядок поля эндоморфизмов любой группы множества M_x). Если группа x вполне приводима и $x=x_1 \circ x_2$, то

$$\mu_D(x)=\mu_D(x_1)\,\mu_D(x_2).$$

Доказательство этой теоремы в существенных чертах такое же, как и доказательство аналогичной теоремы статьи [1]: проверяется, что для функции, удовлетворяющей условиям этой теоремы выполняются соотношения (6).

6. В дальнейшем $[y]$ означает порядок группы y. Пусть k — натуральное число, $x \in E_G$. Функции

$$\varphi_{\mathrm{I}}^{(k)}(x)=\sum_{d|x}\left[\frac{x}{d}\right]^k \mu_D(d)=\mu_D(x) * [x]^k, \tag{10}$$

$$\varphi_{\mathrm{II}}^{(k)}(x)=\sum_{d|x}[d]^k \mu_D\left(\frac{x}{d}\right)=[x]^k * \mu_D(x) \tag{11}$$

назовем функциями Эйлера—Дельсарта k-го порядка и соответственно I-го и II-го рода группы G. В силу формул обращения (7) и (8), имеем

$$\sum_{d|x}\varphi_{\mathrm{I}}^{(k)}\left(\frac{x}{d}\right)=[x]^k, \qquad \sum_{d|x}\varphi_{\mathrm{II}}^{(k)}(d)=[x]^k.$$

Если группа x вполне приводима, то обе функции совпадают, и можно опустить индексы I, II:

$$\varphi_{\mathrm{I}}^{(k)}(x)=\varphi_{\mathrm{II}}^{(k)}(x)=\varphi^{(k)}(x).$$

Назовем *Ω-цоколем* z_x группы $x \in E_G$ композит всех подгрупп множества M_x. Ω-цоколь, очевидно, вполне приводим. Пусть x_0 — пересечение всех максимальных допустимых подгрупп группы x. Фактор-группу $z_x^*=\frac{x}{x_0}$ назовем *Ω-антицоколем* группы x. Ω-антицоколь, как можно показать, вполне приводим.

Пусть $x \in E_G$. Пользуясь полной приводимостью цоколя и антицоколя и свойствами функции $\mu_D(x)$ легко получить соотношение

$$\varphi_{\mathrm{I}}^{(k)}(x)=\left[\frac{x}{z_x}\right]^k \varphi^{(k)}(z_x), \tag{12}$$

$$\varphi_{\mathrm{II}}^{(k)}(x)=\frac{[x]^k}{[z_x^*]^k}\varphi^k(z_x^*), \tag{13}$$

сводящие изучение функций $\varphi_{\mathrm{I}}^{(k)}(x)$ и $\varphi_{\mathrm{II}}^{(k)}(x)$ к случаю, когда x вполне приводимая группа.

Теорема 5. 1) *Если x—вполне приводимая группа множества E_G, то*

$$\varphi^{(k)}(x)=\begin{cases}[x]^k-1, & \text{если } x\ \Omega\text{-простая группа (в частности — неабелева нерасщепляемая группа)}, \quad (14')\\ \prod\limits_{\nu=0}^{n-1}(p^{kr}-p^{\nu g}), & \text{если } x\text{—абелева нерасщепляемая группа } \Omega\text{-ранга } n\ (p, r \text{ и } g \text{ имеют прежний смысл}), \quad (14'')\\ \varphi(x_1)\,\varphi(x_2), & \text{если } x=x_1\circ x_2. \quad (14''')\end{cases}$$

Доказательство. 1) (14′) вытекает из (10) и (11). 2) Если x-абелева вполне приводимая нерасщепляемая группа Ω-ранга n, то в силу (10) и (11),

$$\varphi^{(k)}(x)=[x]^k\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu p^{\frac{\nu(\nu-1)}{2}g}N_\nu(x)\,p^{-k\tau\nu}. \tag{15}$$

Полагая

$$F_n(u,\ t)=\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu u^{\frac{\nu(\nu-1)}{2}}G_{n,\nu}(u)\,t^\nu, \qquad G_{n,\nu}(u)=\prod_{j=0}^{\nu-1}\frac{u^n-u^j}{u^\nu-u^j}$$

и применяя индукцию по n, получаем

$$F_n(u,t)=\prod_{\nu=0}^{n-1}(1-u^\nu t).$$

В силу (15) и (9), имеем:

$$\varphi^{(k)}(x)=[x]^k F_n(p^g,\ p^{-kr}),$$

откуда и следует (14″).

3) Соотношение (14‴) вытекает из (10) и (11) и следующего замечания: если $x=x_1\circ x_2$, $d\,|\,x$, то $d=d_1\circ d_2$, где $d_i\,|\,x_i$ $(i=1,\ 2)$.

Разлагая вполне приводимую группу x в прямое произведение ее Ω-когерент и пользуясь соотношениями (14), получаем

Теорема 6. *Если $x\in E_G$-вполне приводимая группа, то $\varphi^{(k)}(x)\neq 0$ тогда и только тогда, если для каждой абелевой Ω-когеренты группы x имеет место $n\leq\frac{kr}{g}$ (n—Ω-ранг когеренты, p^{nr}—ее порядок, p^g—порядок полей эндоморфизмов ее Ω-простых подгрупп).*

§ 2.1. Пусть X—система k элементов группы $x\in E_G$; m_X—минимальная из допустимых подгрупп группы x, содержащих систему X; $f_x^{(k)}$—количество k-членных систем $X\subset x$, удовлетворяющих условию $m_X=x$. Так как из $x_1\simeq x_2$ следует $f_{x_1}^{(k)}=f_{x_2}^{(k)}$, то $f_x^{(k)}\in D_G$. Из определения функции $f_x^{(k)}$ следует, что $\sum\limits_{d|x}f_d^{(k)}=$ количеству $[x]^k$ всех возможных k-членных систем $X\subset x$. Применяя формулу обращения (7), отсюда получаем

$$f_x^{(k)}=\varphi_{11}^{(k)}(x). \tag{16}$$

Два элемента a и b группы x будем относить к одному и тому же Ω-*классу*, если $b=a^\omega$, где a^ω—образ элемента a в отображении $\omega \in \Omega$. Если $x = m_X$, то группа x порождается множеством Ω-классов, отвечающих элементам системы X. Из этого замечания и соотношения (16) вытекает

Теорема 7. *Группа $x \in E_G$ тогда и только тогда порождается k Ω-классами, если $\varphi_{\text{II}}^{(k)}(x) \neq 0$.*

Из теоремы 7, соотношения (13) и теоремы 6 вытекает (см. обозначения теоремы 6).

Теорема 8. *Группа $x \in E_G$ тогда и только тогда порождается k Ω-классами, если для каждой абелевой Ω-когеренты ее антицоколя имеет место $n \leqslant \frac{kr}{g}$.*

2. Пусть $\Gamma_{x,1}, \ldots, \Gamma_{x,N(x)}$ — полная система представителей классов абсолютно-неприводимых представлений группы $x \in E_G$; $\nu_{x,\alpha}$ — степень, $j_{x,\alpha}$ — ядро гомоморфизма представления $\Gamma_{x,\alpha}$; $[\alpha]$ — система не превосходящих $N(x)$ натуральных чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$. Положим,

$$\nu_{x,[\alpha]} = \prod_{i=1}^{k} \nu_{x,\alpha_i}, \quad j_{x,[\alpha]} = \bigcap_{i=1}^{k} j_{x,\alpha_i}, \tag{17}$$

Пусть y — произвольная подгруппа группы x, $\tilde{y}$ — максимальная допустимая подгруппа группы y. Положим,

$$h(x) = \sum_{\tilde{j}_{x,[\alpha]} = 1_x} \nu_{x,[\alpha]}^2.$$

Легко видеть, что $h(x) \in D_G$. Далее, если $d \mid x$, то, как легко видеть,

$$h\left(\frac{x}{d}\right) = \sum_{\tilde{j}_{x,[\alpha]} = d} \nu_{x,[\alpha]}^2.$$

Отсюда, пользуясь вытекающим из (17) и теории характеров соотношением

$$\sum_{[\alpha]} \nu_{x,[\alpha]}^2 = [x]^k,$$

получаем

$$\sum_{d \mid x} h\left(\frac{x}{d}\right) = [x]^k.$$

Применяя формулу обращения (8), получаем

$$h(x) = \varphi_{\text{I}}^{(k)}(x).$$

Итак,

$$\sum_{\tilde{j}_{x,[\alpha]} = 1_x} \nu_{x,[\alpha]}^2 = \varphi_{\text{I}}^{(k)}(x). \tag{18}$$

Предположим теперь, что Ω совпадает с группой внутренних автоморфизмов группы G. Пусть $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_N$ — полная система представителей классов абсолютно-неприводимых представлений группы G; ν_i — степень, J_i — ядро гомоморфизма представления Γ_i. Полагая в (17) $x = G$ и обозначая $\nu_{[\alpha]} = \nu_{G,[\alpha]}$, $J_{[\alpha]} = j_{G,[\alpha]}$, будет иметь

$$\nu_{[\alpha]}=\prod_{i=1}^{k}\nu_{\alpha_i}, \quad J_{[\alpha]}=\bigcap_{i=1}^{k}J_{\alpha_i}. \tag{19}$$

Назовем нормальный делитель H группы G **k-ядром**, если H есть ядро гомоморфизма линейного представления группы G, распадающегося на k абсолютно-неприводимых компонент. Подгруппа H тогда и только тогда является k-ядром, если $H=J_{[\alpha]}$ для некоторой системы $[\alpha]=[\alpha_1,\dots,\alpha_k]$. Принимая в (18) $x=G$ и замечая, что $\widehat{J}_{[\alpha]}=J_{[\alpha]}$, получаем

$$\sum_{J_{[\alpha]}=1_G}\nu_{[\alpha]}^2=\varphi_{\mathrm{I}}^{(k)}(G). \tag{20}$$

Если H — нормальный делитель группы G, то

$$\sum_{J_{[\alpha]}=H}\nu_{[\alpha]}^2=\varphi_{\mathrm{I}}^{(k)}(G/H). \tag{21}$$

Из (21) вытекает

Теорема 9. *Нормальный делитель H группы G тогда и только тогда является ее k-ядром, если* $\varphi_{\mathrm{I}}^{(k)}(G/H)\neq 0$.

Если Z — цоколь группы G, то $\varphi^{(k)}(Z)=\varphi_{\mathrm{II}}^{(k)}(Z)$ и, следовательно, в силу (12),

$$\varphi_{\mathrm{I}}^{(k)}(G)=[G/Z]^k\varphi_{\mathrm{II}}^{(k)}(Z). \tag{22}$$

Из (22), (20) и теоремы 7 вытекает теорема I статьи [2]. Из (22) и теоремы 6 вытекает теорема 2, а из (20) и (14) — соотношение (28) статьи [2].

3. Пусть $\chi_i(g)$ — характер элемента $g\in G$ в представлении Γ_i; X — система элементов $g_1,\dots,g_k$ группы G; $[\alpha]=[\alpha_1,\dots,\alpha_k]$, $1\leqslant\alpha_i\leqslant N$ $(i=1,\dots,k)$. Полагая, что

$$\chi_{[\alpha]}(X)=\prod_{i=1}^{k}\chi_{\alpha_i}(g_i), \tag{23}$$

определим функцию $s^{(k)}(X)$ системы X:

$$s^{(k)}(X)=\sum_{J_{[\alpha]}=1_G}\nu_{[\alpha]}\chi_{[\alpha]}(X). \tag{24}$$

Теорема 10. *Если H_X — минимальный из нормальных делителей группы G, содержащих систему X, то*

$$s^{(k)}(X)=\varphi_{\mathrm{I}}^{(k)}(G)\frac{\mu_D(H_X)}{\varphi_{\mathrm{II}}^{(k)}(H_X)}. \tag{25}$$

Доказательство. Пусть M — множество всех минимальных нормальных делителей группы G, T — подмножество множества M, $\mu(T)=(-1)^t$, где t — число подгрупп, входящих в T. C_T — композит подгрупп множества T ($C_T=1_G$, если T пусто). С помощью соображений, примененных в статье [2] для вывода ее соотношения (1), получаем

$$s^{(k)}(X)=\sum_{T\subseteq M,\, C_T\supset X}\mu(T)[G/C_T]^k. \tag{26}$$

Из (26) вытекает: если $H_{X_1} = H_{X_2}$, то

$$s^{(k)}(X_1) = s^{(k)}(X_2). \tag{27}$$

Предположим теперь, что группа G допускает изоморфные представления, распадающиеся на k абсолютно-неприводимых компонент. Тогда

$$n^{(k)} = \sum_{J_{[\alpha]} = 1_G} \nu^2_{[\alpha]} \neq 0.$$

Пусть H — нормальный делитель группы G. Положим,

$$f(H) = \frac{1}{n^{(k)}} \sum_{H_Y = H} s^{(k)}(Y). \tag{28}$$

Из свойства (27) функции $s^{(k)}(X)$ вытекает (см. § 2.1):

$$f(H_X) = f^{(k)}_{H_X} \frac{s^{(k)}(X)}{n^{(k)}}. \tag{29}$$

С другой стороны,

$$\sum_{D|H} f(D) = \frac{1}{n^{(k)}} \sum_{Y \subset H} s^{(k)}(Y),$$

где D пробегает множество всех содержащихся в H нормальных делителей группы G, а Y — множество всех k-членных систем элементов подгруппы H. Пользуясь известными соотношениями теории характеров, из (30) получаем

$$\sum_{D|H} f(D) = e(H),$$

откуда, ввиду произвольности H, вытекает, что $f(H) = \mu_D(H)$. Отсюда, пользуясь (29), (20) и (16), получаем (25).

Харьковский инженерно-экономический институт

Поступило 4 X 1956

ЛИТЕРАТУРА

1. S. Delsarte, Fonctions de Möbius sur les group Abelian finis, Annals of Math., 49, s. s. 600—609, 1948. 2. Э. Жмудь, Об изоморфных линейных представлениях конечных групп, Мат. сб. (нов. сер.), т. 38, в. 4, стр. 417—480, 1956. 3. M. Tazawa, Über isomorphe Darstellung der endliche Gruppe, Tôhoku math. journ. 47, № 1, s. 87—93, 1940. 4. R. Kochendörffer, Über treue irreduzible Darstellungen endlicher Gruppen, Math. Nachr. 1, s. 25—39, 1948. 5. W. Gaschütz, Endliche Gruppen mit treuen absolut-irreduziblen Darstellungen, Math. Nachr. 12, № 3/4, s. s. 253—255, 1954.