В. С. Фёдоров, Об одном обобщении интеграла типа Коши в многомерном пространстве, *Изв. вузов. Матем.*, 1957, номер 1, 227–231

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1957 МАТЕМАТИКА № 1

В. С. Федоров

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ИНТЕГРАЛА ТИПА КОШИ В МНОГОМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Цель настоящей работы — исследовать некоторые основные свойства одного n-мерного аналога, известного в классической теории аналитических функций комплексного переменного интеграла типа Коши в связи с общим понятием гиперкомплексной функции, моногенной по отношению к некоторой другой такой функции (см. [1]).

1. Пусть D — некоторая область n-мерного действительного евклидова пространства $E(x_1, \ldots, x_n)$, и пусть $\zeta = a_1 e_1 + \ldots + a_m \cdot e_m$, $f = b_1 e_1 + \ldots + b_m \cdot e_m$, где $e_1, \ldots, e_m$ — база какой-либо алгебры, ассоциативной и коммутативной, с единицей, обозначаемой ε, и произвольного ранга m над полем комплексных чисел ($m < n$ или $m \geqslant n$), a_k, b_k ($k = 1, \ldots, m$) — однозначные комплекснозначные функции точки $x = (x_1, \ldots, x_n) \in D$ (в частности, ζ и f — обыкновенные комплексные функции точки области D). Будем считать, если не сделано оговорок, что в области D существуют непрерывные частные производные:

$$f_j \equiv \frac{\partial f}{\partial x_j}; \quad \zeta_j \equiv \frac{\partial \zeta}{\partial x_j}; \quad \zeta_{sj} \equiv \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_j \partial x_s}, \ (s,\ j = 1, \ldots, n),$$

и что в области D существует $(\zeta_1)^{-1}$.

Обозначим всегда через σ замкнутую, $(n-1)$-мерную гиперповерхность, гомеоморфную сфере конечного диаметра и достаточно гладкую для возможности применить к ней известную формулу Остроградского. Пусть Δ_σ — внутренность поверхности σ и $\delta_\sigma = D - \overline{\Delta}_\sigma$. Всегда считаем, что $\overline{\Delta}_\sigma \subset D$.

Пусть

$$I_\sigma(x) = \frac{1}{\omega_n \cdot \zeta_1(x)} \int\limits_\sigma \left\{ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \cdot (\zeta_j \varphi^1 + \zeta_1 \varphi^j) - \alpha_1 \zeta_j \varphi^j \right\} f d\sigma; \tag{1}$$

где

$$x \in \Delta_\sigma \ (x \in \delta_\sigma), \quad \omega_n = \frac{2 \cdot \pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)},$$

и где под знаком интеграла

$$f = f(t); \text{ точка } t = (t_1, \ldots, t_n) \in \sigma;$$

$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — направляющие косинусы внешней нормали к σ;

$$\zeta_j = \frac{\partial \zeta(t)}{\partial t_j}; \quad \varphi^j = \frac{t_j - x_j}{r^n} \ (j = 1, \ldots, n);$$

$$r = \sqrt{(t_1 - x_1)^2 + \ldots + (t_n - x_n)^2}.$$

Очевидно, что в случае 1) $n=2$, 2) $\zeta=x_1+ix_2$ $(i^2=-1)$ получим в правой части формулы (1) известный интеграл типа Коши, так как тогда подъинтегральное выражение в формуле (1) примет вид:

$$(\varphi^1-i\varphi^2)\cdot(\alpha_1+i\alpha_2)\cdot f\cdot d\sigma.$$

Ставим и разрешаем задачи: 1. Найти необходимые и достаточные условия, наложенные на ζ и f, при которых $I_\sigma(x)$ для любой σ будет моногенной по ζ в соответствующей области Δ_σ.

2. Та же задача для областей δ_σ.

Заметим (см. [2]), что моногенность какой-либо гиперкомплексной функции F по ζ в области D в случае непрерывных частных производных 1-го порядка функции F по $x_1,\dots,x_n$ в области D состоит в том, что в этой области имеют место для функций F и ζ „обобщенные уравнения Коши — Римана" вида:

$$\left.\begin{aligned}&D^x_{1j}F(x)=0,\ (j=2,\dots,n),\\&\left(D^x_{1j}\equiv\zeta_1(x)\frac{\partial}{\partial x_j}-\zeta_j(x)\frac{\partial}{\partial x_1}\right).\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

Переходим к выводу необходимых условий моногенности каждой $I_\sigma(x)$ по ζ в области Δ_σ. Возьмем в области D n-мерные кубы:

$$Q:\qquad -a<x_k-y_k<a\quad (k=1,\dots,n),$$
$$q:\qquad -b<x_k-z_k<b\quad (k=1,\dots,n)$$

с центрами в точках y и z соответственно, где

$$z_1=y_1+a;\quad z_j=y_j\ \ (j=2,\dots,n);\ 0<b<a.$$

Пусть $A=Q+q$, и B — множество точек, расположенных одновременно внутри Q и вне $\bar{q}$. Обозначим через $\sigma_1(\sigma_2)$ границу области $A(B)$ и через γ — границу области q. Полагаем, что

$$\theta(x)=I_{\sigma_1}(x)-I_{\sigma_2}(x);\ x\in B.$$

Тогда

$$\theta(x)=I_\gamma(x);\ x\in B.$$

Применив формулу Остроградского (см. формулу (1), получим

$$\theta(x)=\frac{1}{\omega_n\cdot\zeta_1(x)}\cdot\tilde{I};\ x\in B;\tag{3}$$

где

$$\tilde{I}=\int_q\left(\mu\varphi^1+\sum_{i=2}^{n}\beta_i\cdot\varphi^i\right)dq;$$

$$\mu=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial t_i}\left(f\cdot\frac{\partial\zeta}{\partial t_i}\right);\quad \beta_i=\zeta_1\cdot f_i-\zeta_i\cdot f_1;$$

$$\zeta=\zeta(t);\quad f=f(t);\quad t\in q.$$

Если допустить, что каждая $I_\sigma(x)$ — моногенная по ζ в соответствующей области Δ_σ, то из (2) получим

$$D^x_{1j}\theta(x)=0\quad (j=2,\dots,n;\ x\in B).$$

Откуда, в силу (3),

$$\zeta_1(x)\cdot\int\limits_q\left(\mu(t)\cdot D_{1j}^x\varphi^1+\sum_{i=2}^{n}\beta_i(t)D_{1j}^x\varphi^i\right)dq=\tilde{I}\cdot D_{1j}^x\zeta_1(x);\quad (x\in B). \tag{4}$$

Полагая, что $(t_j-x_j)/r=\gamma_j$; $(j=1,\dots,n)$, будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\varphi^j=-\frac{1}{r^n}+\frac{n}{r^n}\gamma_j^2;\ (j=1,\dots,n),$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\varphi^i=\frac{n}{r_n}\gamma_i\gamma_j\quad (i,\ j=1,\dots,n;\ i\neq j).$$

Если определять кубы Q и q для соответственно подобранных новых координатных осей, то формула (4) получится при любом направлении вектора $\overrightarrow{yz}$.

Пусть $c_1,\dots,c_n$ — направляющие косинусы луча, выходящего из точки x и проведенного через точку z, и пусть r_1 — расстояние точки x от точки z.

Разделив обе части равенства (4) на $|q|$, переходим к пределу при $b\to 0$ и при фиксированных точках x и z. Умножив обе части полученного равенства на r_1^n, переходим к пределу при $r_1\to 0$, считая точку x и числа $c_1,\dots,c_n$ фиксированными. Получим в этой точке x, как легко заметить, равенства вида

$$\left.\begin{aligned}&\mu\cdot(n\zeta_1c_1c_j+\zeta_j-n\zeta_jc_1^2)+\\&+\sum_{\substack{i=2\\(i\neq j)}}^{n}n\beta_i(\zeta_1c_ic_j-\zeta_jc_1c_i)+\beta_j[(nc_j^2-1)\zeta_1-n\zeta_jc_1c_j]=0;\\&\qquad\qquad (j=2,\dots,n).\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Очевидно, что равенства (5) имеют место в каждой точке x области D и для всевозможных чисел $c_1,\dots,c_n$, если $c_1^2+\dots+c_n^2=1$. Для $c_1=1$; $c_k=0$, $(k=2,\dots,n)$ получим из (5)

$$\mu\zeta_j(1-n)=\beta_j\zeta_1;\quad (j=2,\dots n). \tag{6}$$

При $c_j=1$ $(j=2,\dots,n)$; $c_k=0$ $(k\neq j)$ из (5) следует

$$\mu\zeta_j=\beta_j\zeta_1(1-n);\ (j=2,\dots,n). \tag{7}$$

Из (6) и (7) имеем

$$\beta_j(n^2-2n)=0\ (j=2,\dots,n). \tag{8}$$

Рассмотрим два случая: 1°) $n>2$; 2°) $n=2$.

В первом случае из (8) следует: $\beta_j=0$ $(j=2,\dots,n)$, а тогда, полагая в равенстве (5) $j=2$, $nc_1^2=1$, $c_2\neq 0$, получим $\mu=0$, так как, согласно условию, ζ_1 не есть делитель нуля в любой точке $x\in D$.

Итак, имеем

$$\left.\begin{aligned}&1)\qquad f\text{ — моногенная по }\zeta\text{ в области }D;\\&2)\qquad \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[f(x)\cdot\frac{\partial\zeta(x)}{\partial x_i}\right]=0\ (x\in D).\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Таковы необходимые условия, которым должны удовлетворять функции f и ζ, если допустить, что $n>2$, и что каждая $I_\sigma(x)$ — моногенная по ζ в области Δ_σ (или каждая $I_\sigma(x)$ — моногенная по ζ в области δ_σ).

3. Пусть теперь функции f и ζ удовлетворяют условиям (9) в области D, причем ζ имеет непрерывные частные производные второго порядка по $x_1, \ldots, x_n$ в этой области, и в каждой точке этой области существует $(\zeta_1)^{-1}$. При этих предположениях справедливо следующее обобщение интегральной формулы Коши:

$$I_\sigma(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \Delta_\sigma, \\ 0, & x \in \delta_\sigma. \end{cases}$$

В самом деле, пусть $x \in \Delta_\sigma$ и S — $(n-1)$-мерная сфера с центром в этой точке x и $S \subset \Delta_\sigma$. Обозначим через T область, ограниченную поверхностями σ и S. По формуле Остроградского имеем (ср. формулу (3))

$$I_\sigma(x) - I_S(x) = \frac{1}{\omega_n \cdot \zeta_1(x)} \int\limits_T \left(\mu\varphi^1 + \sum_{i=2}^{n} \beta_i \varphi^i \right) dT. \tag{10}$$

Из условий (9) следует, что в области T $\mu = 0$; $\beta_i = 0$ $(i = 2, \ldots, n)$, поэтому из (10), если ε — радиус сферы S, выводим:

$$I_\sigma(x) = \frac{1}{\omega_n \cdot \zeta_1(x) \cdot \varepsilon^{n-1}} \int\limits_S f(t)\zeta_1(t)\, dS \quad (t \in S),$$

откуда при $\varepsilon \to 0$ (точка x — фиксированная) получим $I_\sigma(x) = f(x)$. Аналогично докажем, что $I_\sigma(x) = 0$ для $x \in \delta_\sigma$. Таким образом, условия (9) — достаточные для моногенности каждой $I_\sigma(x)$ по ζ в областях Δ_σ и δ_σ.

4. Переходим теперь к случаю $n = 2$. При $n = 2$ уравнение (6) примет вид

$$\mu\zeta_2 = -\beta_2\zeta_1,$$

а отсюда и из (5) следует, что в области D

$$\beta_2(\zeta_1^2 + \zeta_2^2) = 0.$$

Заметим, что формула (2) (условие моногенности f по ζ) при $n = 2$ получит вид $\beta_2 = 0$ (имеем $\beta_2 = 0$ в той области, в которой f — моногенная по ζ).

Интересно рассмотреть тот случай, когда β_2 отлично от нуля в некоторой области $\Delta \subset D$, т. е., когда f не есть моногенная по ζ в области Δ. Тогда имеем, если взять $f = \varepsilon x_2$ $(x \in \Delta)$:

$$[\zeta_1(x)]^2 + [\zeta_2(x)]^2 = 0. \tag{11}$$

Условие (11) — *необходимое* для данной $\zeta(x)$, $x \in D$, если потребовать, чтобы *каждая* $I_\sigma(x)$ была моногенной по этой ζ в соответствующей области Δ_σ *одновременно* для *всех* f, непрерывных в D (или, хотя бы, для всех f, линейных от $x_1, \ldots, x_n$ в области D). Докажем *достаточность* условий (11). А именно, докажем, что *каждая* $I_\sigma(x)$ будет моногенная по ζ в соответствующей области Δ_σ ($\bar{\Delta}_\sigma$ — любая в D), если f — любая непрерывная функция точки множества D. ζ — любое решение уравнения (11) в области D при условии, что $(\zeta_1)^{-1}$ существует в этой области, и что ζ_1 предполагается непрерывной в D. Кроме того, мы докажем, что из условия (11) следует моногенность каждой $I_\sigma(x)$ по ζ и в области Δ_σ, и в области δ_σ одновременно.

Введем обозначение: $\lambda = (\zeta_1)^{-1} \cdot \zeta_2$, откуда и из (11) имеем

$$\zeta_2 = \lambda\zeta_1; \quad \lambda^2 = -\varepsilon. \tag{12}$$

Значит, λ — постоянная в D. Формулу (1) для $n=2$, в силу (12), запишем так:

$$I_\sigma(x) = \frac{1}{2\pi\lambda\zeta_1(x)} \oint_\sigma (\varepsilon\varphi^1 - \lambda\varphi^2)(\lambda\alpha_1 - \varepsilon\alpha_2)\zeta_1 f d\sigma. \tag{13}$$

Здесь σ — замкнутая простая кусочно гладкая плоская кривая.

Полагая, что $z_0 = \varepsilon x_1 + \lambda x_2$; $z = \varepsilon t_1 + \lambda t_2$ в формуле (13) получим

$$\varepsilon\varphi^1 - \lambda\varphi^2 = \frac{1}{z - z_0}; \quad \lambda \cdot (\varepsilon\alpha_1 + \lambda\alpha_2) = \frac{dz}{d\sigma}.$$

А также ζ — моногенная по z_0 в области D и, наоборот, z_0 — моногенная по ζ в этой области, так как имеем в области D, в силу (12),

$$\zeta_1 = \zeta_1 \cdot \frac{\partial z_0}{\partial x_1}; \quad \zeta_2 = \zeta_1 \cdot \frac{\partial z_0}{\partial x_2}.$$

Полагая $I_\sigma(x) \equiv F(z_0)$, можем записать формулу (13) в виде

$$F(z_0) = \frac{1}{2\pi\lambda \dfrac{d\zeta(x)}{dz_0}} \oint_\sigma \frac{f \dfrac{d\zeta}{dz} dz}{z - z_0},$$

откуда сразу следует моногенность $F(z_0)$ по z_0, а, следовательно, и по ζ в области Δ_σ и δ_σ, и притом для всякой f, непрерывной на кривой σ. Мы видим, что *только для $n=2$ получим обычные свойства интеграла типа Коши, и притом при условии* (11), которое вводит алгебру, изоморфную алгебре обычных комплексных чисел, для чисел z_0 (а ранг m алгебры для f и ζ остается произвольным).

Ивановский энергетический институт
им. В. И. Ленина

Поступило
7 X 1957 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. А. Морев, Моногенные гиперкомплексные функции, Укр. мат. жур., 8, № 4, стр. 423—434, 1956. 2. В. С. Федоров, Моногенность, Мат. сб., 18 (60), № 3, стр. 353—378, 1946.