В. И. Ведерников, Поверхности, огибающие семейство гиперсфер, *Изв. вузов. Матем.*, 1957, номер 1, 89–97

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ
1957 МАТЕМАТИКА № 1

В. И. Ведерников

ПОВЕРХНОСТИ, ОГИБАЮЩИЕ СЕМЕЙСТВО ГИПЕРСФЕР

Целью заметки является изучение условий, необходимых и достаточных для того, чтобы гиперповерхность n-мерного конформного пространства Мёбиуса являлась огибающей m-параметрического семейства гиперсфер, причем мы используем метод нормализации А. П. Нордена ([1] § 82, 83) и одновременно символический метод исчисления внешних форм Картана [2]. Заметим, что аналогичные результаты в метрическом случае были получены А. Г. Костюченко [3].

1. Мы будем рассматривать гиперповерхность в пространстве Эвклида E_n, задавая гиперсферу ее полисферическими координатами $s_0, s_1, \dots s_{n+1}$, которые являются коэфициентами ее уравнения

$$(s_0 + s_{n+1}) \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2 \sum_{i=1}^{n} s_i x_i - 2 (s_0 - s_{n+1}) = 0,$$

где $x_1, x_2, \dots x_n$ — координаты точки E_n. Координаты $S = \{s_0, s_1, \dots, s_n, s_{n+1}\}$ определяются с точностью до множителя и для действительной сферы

$$(SS) = s_0^2 + s_1^2 + \dots + s_n^2 - s_{n+1}^2 \geqslant 0,$$

причем, здесь равенство возможно только в случае точки, рассматриваемой как гиперсфера нулевого радиуса. Симметрическая билинейная форма (ST), полярная квадратичной форме (SS), называется билинейным ковариантом двух гиперсфер. Угол между двумя гиперсферами S и T определятся по формуле

$$\cos \varphi = \frac{(ST)}{\sqrt{(SS)} \sqrt{(TT)}} .$$

Равенство

$$(ST) = 0$$

есть условие ортогональности гиперсфер, причем точка считается ортогональной той сфере, которой она принадлежит. Конформное пространство M_n определяется как пространство Эвклида E_n, дополненное одной несобственной точкой, являющейся общей для всех гиперплоскостей, в котором определена группа конформных точечных преобразований, линейных в полисферических координатах, и переводящее гиперсферу в гиперсферу. При конформном преобразовании равенство $(SS) = 0$ и угол между гиперсферами сохраняется, а гиперплоскость считается гиперсферой. Репер в M_n определяется заданием $n+2$ гиперсфер, получающихся при конформном преобразовании аффинной декартовой системы координат в E_n. Он состоит из n гиперсфер $A_1, A_2, \dots, A_n$, пересекающихся в двух точках A_0 и A_{n+1}.

Гиперповерхность в M_n есть $n-1$-параметрическое семейство точек $A_0(u^1, u^2, \dots u^{n-1})$. При этом

$$(A_0 A_0) = A_0^2 = 0. \tag{1}$$

Следуя методу нормализации А. П. Нордена [1], мы в каждой точке гиперповерхности A_0 определим репер $A_0, A_1, \dots A_{n-1}, A_n, A_{n+1}$, где A_n — касательная гиперсфера гиперповерхности, $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$-гиперсферы, проходящие через точку A_0, ортогональные гиперповерхности и пересекающиеся по так называемому нормализующему кругу гиперповерхности, а точка A_{n+1} есть общая точка гиперсфер $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n$.

Мы полагаем в дальнейшем

$$A_n^2 = 1;\ (A_0 A_{n+1}) = 1;\ (A_i A_j) = g_{ij}\ (i,\ j = 1, 2, \dots, n-1). \tag{2}$$

Для гиперсфер репера всегда выполняются равенства

$$(A_0 A_i) = (A_0 A_n) = (A_{n+1} A_i) = (A_{n+1} A_n) = 0. \tag{3}$$

Так как A_n — касательная сфера, то

$$(A_0 + dA_0,\ A_n) = (dA_0 A_n) = 0 \tag{4}$$

и, принимая во внимание (1), (3), найдем

$$dA_0 = \omega_0^0 A_0 + \omega^i A_i.$$

Форма ω_0^0 называется нормализующей формой, и она зависит от выбора нормализующего круга. Формы удовлетворяют условию

$$[\omega^1,\ \omega^2, \dots \omega^{n-1}] \neq 0,$$

то есть условию невырожденности гиперповерхности $A_0(u^1, \dots u^{n-1})$

Уравнения инфинитезимального изменения репера, если принять во внимание условия (1), (2), (3), (4), имеют вид [4]

$$\begin{aligned}
dA_0 &= \omega_0^0 A_0 + \omega^i A_i,\\
dA_i &= \omega_i^0 A_0 + \omega_i^j A_j + \omega_i^n A_n + \omega_i^{n+1} A_{n+1},\\
dA_n &= \omega_n^0 A_0 + \omega_n^i A_i,\\
dA_{n+1} &= \qquad \omega_{n+1}^i A_i - \omega_n^0 A_n - \omega_0^0 A_{n+1},
\end{aligned} \tag{5}$$

где дифференциальные формы $\omega_\alpha^\beta\ (\alpha, \beta = 0,\ 1,\ 2, \dots, n-1, n,\ n+1)$ связаны условиями

$$\begin{aligned}
&\omega_i^{n+1} + g_{ij}\omega_0^j = 0, \quad \omega_i^0 + g_{ij}\omega_{n+1}^j = 0,\\
&\omega_i^n + g_{ij}\omega_n^j = 0.
\end{aligned} \tag{6}$$

Если положить

$$dA_0^2 = g_{ij}\omega^i\omega^j, \tag{7}$$

то

$$dg_{ij} = d(A_i A_j) = \omega_i^k g_{kj} + \omega_j^k g_{ki}. \tag{8}$$

Следовательно, тензор g_{ij} определяет угловую метрику поверхности. Так как конформные преобразования есть линейные преобразования в однородных полисферических координатах, то группа конформных преобразований есть подгруппа проективных преобразований, и уравнения структуры в нашем случае имеют вид

$$D\omega_\alpha^\beta = [\omega_\alpha^\gamma \omega_\gamma^\beta]. \tag{9}$$

В частном случае, когда сферы $A_1, A_2, \dots A_{n-1}$ ортогональны и $A_k^2 = 1$, имеем

$$g_{ij} = \delta_{ij}; \quad \omega_i^k + \omega_k^i = 0, \tag{10}$$

и в этом случае мы называем репер ортогональным.

Так как при $\omega^i = 0$ элементы репера фиксируются в данной точке и $\omega_\alpha^\beta = 0$, то

$$\left.\begin{aligned} \omega_i^0 &= p_{ij}\omega^j, \\ \omega_i^n &= b_{ij}\omega^j, \\ \omega_0^0 &= l_i\omega^i, \\ \omega_i^j &= l_{ik}^j\,\omega^k, \\ \omega_n^0 &= -\,n_i\omega^i, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

где коэфициенты являются тензорами при замене $\omega^i \to p_k^i\,\omega^k$. Из уравнений (5) и (11) имеем

$$(dA_0 dA_n) = -(A_n d^2 A_0) = -\,b_{ij}\omega^i\omega^j; \quad b_{ij} = b_{ji} \tag{12}$$

и, следовательно, вдоль линий, удовлетворяющих уравнению

$$b_{ij}\omega^i\omega^j = 0, \tag{13}$$

касательная гиперсфера A_n содержит точки A_0, dA_0, d^2A_0, то есть A_n есть соприкасающаяся гиперсфера этой линии. В случае, когда гиперповерхность $A_0(u^1, u^2, \dots u^{n-1})$ определена в E_n, и A_n проходит через несобственную точку, то есть A_n является касательной гиперплоскостью гиперповерхности A_0, уравнения (13) определяют асимптотические направления гиперповерхности, а тензор b_{ij} отличается лишь множителем от второго основного тензора гиперповерхности в E_n. При замене касательной гиперсферы A_n другой касательной гиперсферой B_n, всегда имеет место

$$B_n = A_n + \lambda A_0, \tag{14}$$

так как гиперсферы принадлежат одному пучку параболического типа. Используя равенство (5) и (14), легко установить, что

$$b_{ij}' = b_{ij} - \lambda\, g_{ij}. \tag{15}$$

При любом другом допустимом изменении репера гиперповерхности, то есть при перенормировании точки $A_0 \to \sigma A_0$ и изменении нормализации $A_i \to \lambda_i^j A_j$, b_{ij} изменяется как относительный тензор.

В частном случае эвклидовой нормализации, когда $A_{n+1} = \text{const}$ является несобственной точкой E_n, уравнения (5) совпадают с уравнениями Вейнгартена, а уравнения (9) сводятся к уравнениям Гаусса и Петерсона-Кодацци ([1] § 128). Гиперсферы A_k в этом случае являются касательными гиперплоскостями гиперповерхности (A_0), g_{ij} есть метрический тензор гиперповерхности A_0, а b_{ij} есть второй основной тензор гиперповерхности. Таким образом, в дальнейшем можно все результаты применять к случаю гиперповерхности, определенной в пространстве Эвклида E_n. Все вычисления в случае E_n упрощаются, ибо в этом случае $p_{ij} = l_i = n_i = 0$, но лишь с точки зрения записи. Поэтому мы вычисления проводим в общем случае.

2. Рассмотрим теперь семейство касательных гиперсфер A_n гиперповерхности (A_0). Если при некотором выборе касательных гиперсфер в точках гиперповерхности семейств гиперсфер A_n оказывается

m-мерным, то сама гиперповерхность (A_0) является огибающей m-параметрического семейства гиперсфер. Если же это не имеет место, то можно попытаться перейти к новому семейству касательных гиперсфер. $A_n \to B_n = A_n + \lambda A_0$ так, чтобы за счет выбора $\lambda(u', \dots, u^{n+1})$ уменьшить размерность семейства касательных гиперсфер. При этом существенным оказывается ранг матрицы $(b_{ij}') = (b_{ij} - \lambda g_{ij})$, то есть структура характеристического уравнения

$$|b_{ij} - \lambda g_{ij}| = 0. \tag{16}$$

При этом следует иметь в виду, что, так как тензор b_{ij} определяется с точностью до множителя, так же как и тензор g_{ij}, то при перенормировании точки гиперповерхности $A_0 \to \sigma A_0$, корни этого характеристического уравнения изменяются по закону $\lambda_i \to \frac{1}{\sigma}\lambda_i$, то есть конформно инвариантный смысл имеет лишь отношение корней и кратность корня. Однако гиперсферы $A_n + \lambda_i A_0$, называемые главными сферами гиперповерхности, определяются конформно-инвариантно.

Если семейство гиперсфер B_n вырожденное, то есть семейство гиперсфер B_n существенно зависит от m параметров: $B_n(v^1, \dots v^m)$, то, выбрав параметры

$$v^1, v^2, \dots, v^m, v^{m+1}, \dots, v^{n-1} \ (m < n-1)$$

и полагая

$$A_i = \frac{\partial A_0}{\partial v^i}; \ \omega^i = dv^i,$$

мы получим

$$\frac{\partial B_n}{\partial v^\alpha} = -n_\alpha A_0 - g^{ri} b_{r\alpha} A_r = 0; \ \alpha = m+1, \dots, n-1$$

и, следовательно,

$$\mathrm{Rang}\,(b_{ij}') \leqslant m,$$

то есть уравнение (16)—характеристическое уравнение—имеет $(n - m - 1)$-кратный корень.

Предположим теперь, что характеристическое уравнение (16) имеет k-кратный характеристический корень λ и, следовательно, матрицы b_{ij} и g_{ij} приводятся к диагональному виду

$$(b_{ij}) = \begin{Vmatrix} \lambda & & & & & & \\ & \lambda & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \lambda & & & \\ & & & & \lambda_{k+1} & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \lambda_{n-1} \end{Vmatrix}; \ (g_{ij}) = E,$$

и тогда в ортогональном репере имеем

$$\omega_i^{n+1} = -\omega^i; \ \omega_i^n = b_{ij}\omega^j = \begin{cases} \lambda\omega^i & i = 1, 2, \dots k, \\ \lambda_i\omega^i & i = k+1, \dots, n-1. \end{cases} \tag{17}$$

Мы полагаем в дальнейшем

$$p, q = 1, 2, \dots k; \ \alpha, \beta \dots = k+1, \dots n-1$$

и

$$d\lambda = \lambda_{(p)}\omega^p + \lambda_{(\alpha)}\omega^\alpha. \tag{18}$$

Из уравнений структуры (9) найдем

$$\left.\begin{aligned} D\omega^i+\sum_{k=1}^{n-1}[\omega^k\omega_i^k]+[\omega^i\omega_0^0]=0,\\ D\omega_p^n=\sum_{i=1}^{n-1}\lambda[\omega_p^i\omega^i]+\sum_{\alpha=k+1}^{n-1}(\lambda_\alpha-\lambda)[\omega_p^\alpha\,\omega^\alpha]+[\omega_p^{n+1}\omega_{n+1}^n]. \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

Наряду с этим

$$D\omega_p^n=D(\lambda\omega^p)=[d\lambda\omega^p]+\lambda D\omega^p$$

и, следовательно,

$$\sum(\lambda_\alpha-\lambda)[\omega_p^\alpha\,\omega^\alpha]-\sum_{q=1}^{k}[\omega^p\omega^q]\,n_q-\sum_{\alpha=k+1}^{n-1}[\omega^p\omega^\alpha]\,n_\alpha=\sum_{q=1}^{n}\lambda_{(q)}[\omega^q\omega^p]+$$

$$+\sum_{\alpha=k+1}^{n-1}\lambda_{(\alpha)}[\omega^\alpha\omega^p]+\sum_{q=1}^{k}\lambda[\omega^q\omega^p]\,l_q+\sum_{\alpha=k+1}^{n-1}\lambda[\omega^\alpha\omega^p]\,l_\alpha.$$

В силу линейной независимости форм $[\omega^i\omega^j]$, получим

$$n_q=\lambda_{(q)}+\lambda l_q, \qquad (20)$$

и так как $\lambda_\alpha-\lambda\neq 0$,

$$[\omega_p^\alpha\,\omega^\alpha]=\sum_{\beta\neq\alpha}\frac{\lambda_\beta-\lambda}{\lambda_\alpha-\lambda}[\omega_p^\beta\,\omega^\beta]+\sum_{\alpha=k+1}^{n-1}m_\alpha[\omega^\alpha\omega^p].$$

Отсюда и из (19) имеем

$$[D\omega^\alpha,\ \omega^{k+1},\dots\omega^{n-1}]=\sum_{p=1}^{k}[\omega^p\omega_\alpha^p\,\omega^{k+1}\dots\omega^{n-1}]+$$

$$+\sum_{\beta=k+1}^{n-1}[\omega^\beta\omega_\alpha^\beta\omega^{k+1}\dots\omega^{n-1}]+[\omega_0^0\omega^\alpha\omega^{k+1}\dots\omega^{n-1}]=0,$$

то есть система уравнений Пфаффа

$$\omega^\alpha=0,\ (\alpha=k+1,\dots,n-1)$$

вполне интегрируемая. Если принять интегралы полученной полной системы Пфаффа

$$v^{k+1}=\mathrm{const},\dots v^{n-1}=\mathrm{const}$$

за новые параметры на гиперповерхности $A_0(v^1,v^2,\dots v^k,v^{k+1}\dots v^{n-1})$, то уравнения $\omega^\alpha=0$ выделяют k-мерную поверхность $A_0(v^1,v^2\dots v^k)$, принадлежащую гиперповерхности.

Для главных гиперсфер гиперповерхности $B_n=A_n+\lambda A_0$ имеем, в силу (5), (16), (17) и 20,

$$dB_n = d(A_n + \lambda A_0) = \omega_n^0 A_0 + \omega_n^i A_i + \left(\sum_1^k \lambda_{(q)}\omega^q\right)A_0 + \sum_{k+1}^{n-1}\lambda_{(\alpha)}\omega^\alpha A_0 +$$

$$+ \lambda\left(\sum_1^k l_q\omega^q\right)A_0 + \lambda\sum_{k+1}^{n-1}(l_\alpha\omega^\alpha)A_0 + \sum_1^k \omega^q A_q + \lambda\sum_{k+1}^{n-1}\omega^\alpha A_\alpha \equiv 0\,(\mathrm{mod}\,\omega^\alpha).$$

Следовательно, поверхность $A_0(v^1, v^2 \dots v^k)$ имеет постоянную касательную гиперсферу B_n, то есть гиперповерхность $A_0(v^1, v^2, \dots, v^{n-1})$ является огибающей $(n-k-1)$-параметрического семейства гиперсфер $B_n(v^{k+1}, v^{k+2}, \dots v^{n-1})$.

Окончательно: *Гиперповерхность* $A_0(u^1, u^2, \dots u^{n-1})$ ***является огибающей*** $(n-k-1)$***-параметрического семейства гиперсфер*** $(k \geqslant 2)$ ***тогда и только тогда, когда характеристическое уравнение***

$$|b_{ij} - \lambda g_{ij}| = 0$$

имеет k***-кратный корень*** $\lambda(u^1, u^2, \dots u^{n-1})$.

3. Пусть далее имеется гиперповерхность $A_0(u^1, u^2, \dots u^{n-1})$, $\lambda(u^1, u^2, \dots u^{n-1})$ является корнем характеристического уравнения

$$|b_{ij}'| = |b_{ij} - \lambda g_{ij}| = 0,$$

и семейство соответствующих главных гиперсфер $B_n = A_n + \lambda A_0$ имеет вторую огибающую полость $A_{n+1}(u^1, u^2 \dots u^{n-1})$. Тогда, относя каждой точке A_0 репер $A_0, A_1, \dots A_{n-1}, B_n, B_{n+1}$, получим

$$\omega_n^{0'} = (dB_n B_{n+1}) = -(B_n dB_{n+1}) = 0$$

и, следовательно,

$$dB_n = \omega_n^{i'} A_i = -g^{rs} b_{ri} A_s \omega^i.$$

В местных ортогональных координатах, в которых матрица (b_{ij}') имеет диагональную форму

$$(b_{ij}') = \begin{Vmatrix} 0 & & & & & & \\ & 0 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 0 & & & \\ & & & & \lambda_{k+1} & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \lambda_{n-1} \end{Vmatrix},$$

где k — кратность корня λ, легко видеть, что

$$\mathrm{Rang}\,(b_{ij}') = n - k - 1.$$

В этом случае

$$dB_n = -\sum_{k+1}^{n-1} \lambda_\alpha A_\alpha \omega^\alpha$$

и, следовательно,

$$B_n = \mathrm{const}$$

при

$$\omega^\alpha = 0.$$

Так как при $p, q = 1, 2, \ldots, k$

$$\omega_p^n = 0; \quad \omega^p = 0,$$

то

$$D\omega_p^n = \sum_{\alpha=k+1}^{n-1} \lambda_\alpha [\omega_p^\alpha \omega^\alpha] = 0$$

и, следовательно,

$$\omega_p^\alpha = \sum_{k+1}^{n-1} \sigma_{p\beta}^\alpha \omega^\beta,$$

а отсюда и вследствие (19)

$$[D\omega^\alpha, \ \omega^{k+1}, \ldots \omega^{n-1}] = 0,$$

то есть система

$$\omega^\alpha = 0$$

вполне интегрируемая. Рассуждая так же, как в пункте 2, заключаем, что гиперповерхность есть огибающая $(n-k-1)$-параметрического семейства гиперсфер $B_n(v^{k+1}, v^{k+2}, \ldots v^{n-1})$.

Таким образом: *Если для гиперповерхности A_0 характеристическое уравнение*

$$|b_{ij} - \lambda g_{ij}| = 0$$

имеет простой корень λ, и семейство касательных гиперсфер

$$B_n = A_n + \lambda A_0$$

имеет вторую огибающую полость, то семейство гиперсфер B_n зависит от $n-2$ существенных параметров, а гиперповерхность $A_0(u^1, \ldots, u^{n-1})$ есть огибающая $(n-2)$-параметрического семейства гиперсфер. Если же семейство гиперсфер B_n не имеет второй огибающей полости, то это семейство зависит от $(n-1)$ существенного параметра, и мы назовем такое семейство невырожденным семейством главных гиперсфер поверхности.

Условие того, что гиперсферы $B_n = A_n + \lambda A_0$, где λ — простой корень характеристического уравнения (16), образуют вырожденное семейство главных сфер, можно выразить в различных формах:

1. Гиперсферы $B_1, B_2, \ldots, B_{n-1}$, определяющиеся из равенства $dB_n = B_i \omega^i$, линейно зависимые.

2. Гиперсферы $B_1, B_2, \ldots, B_n$ имеют общую точку $A_{n+1}(u^1, u^2, \ldots, u^{n-1})$.

3. В ортогональном репере, в котором матрица (b_{ij}) приводится к диагональной форме, и в произвольной нормализации

$$n_1 = \lambda_{(1)} + \lambda l_1.$$

В случае, если A_{n+1} есть фокальная точка $(n_k = 0)$, то

$$\lambda_{(1)} = -\lambda l_1.$$

В самом деле, в этом случае из (5) следует

$$dB_n = d(A_n + \lambda A_0) \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ \omega^2, \ldots, \omega^{n-1})$$

и, следовательно, система

$$\omega^\alpha = 0, \ \alpha = 2, 3, \ldots, n-1,$$

всегда вполне интегрируемая, определяет $n-2$-параметрическое семейство гиперсфер. В случае эвклидовой нормализации $l_k=0$ и, следовательно, вдоль соответствующей линии кривизны гиперповерхности (A_0), $\lambda=\mathrm{const}$.

4. Можно было бы дать метрическую характеристику внутренней геометрии гиперповерхностей пространства Эвклида E_n, являющихся огибающими $n-k-1$-параметрического $(k>1)$ семейства гиперсфер. Для этого нужно воспользоваться выражением второго основного тензора гиперповерхности b_{ij} через метрический тензор гиперповерхности, данным в работе А. М. Лопшица [5]. При этом придется исключить несущественные частные случаи. Однако условия в этом случае оказываются сложными и, следовательно, мало применимыми. Поэтому имеют смысл излагаемые ниже неполные условия. Мы рассмотрим тензор Риччи R_{ij}, соответствующий метрическому тензору гиперповерхности, и неголономные координаты, в которых матрица второго метрического тензора гиперповерхности (b_{ij}) имеет диагональную форму

$$(b_{ij})=\begin{pmatrix} b_1 & & & \\ & b_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_n \end{pmatrix},\quad (g_{ij})=E.$$

Если гиперповерхность является огибающей $(n-k-1)$-параметрического семейства гиперсфер, то, согласно доказанной выше теореме,

$$b_1=b_2=\cdots=b_k.$$

Используя известное выражение для тензора Риччи через второй основной тензор гиперповерхности [5]

$$R_{jj}=b_j\left(b_j-\sum_{1}^{n-1}b_i\right),\quad R_{jl}=0,\ j\neq l, \tag{21}$$

мы для рассматриваемой гиперповерхности получим

$$R_{11}=R_{22}=\cdots=R_{kk},$$

то есть характеристическое уравнение

$$|R_{ij}-\mu g_{ij}|=0 \tag{22}$$

имеет k-кратный корень $\mu_1=\mu_2=\cdots=\mu_k$. Если, напротив, уравнение (22) имеет k-кратный корень, то есть

$$R_{11}=R_{22}=\cdots=R_{kk}=R,$$

то

$$R=b_1\,[b_1-(b_1+b_2+\cdots+b_{n-1})]=-b_1\left[b_2+b_3+\cdots+b_k+\sum_{\alpha>k}b_\alpha\right],$$

$$R=b_2\,[b_2-(b_1+b_2+\cdots+b_{n-1})]=-b_2\left[b_1+b_3+\cdots+b_k+\sum_{\alpha>k}b_\alpha\right],$$

. . . .

$$R=b_k\,[b_k-(b_1+b_2+\cdots+b_{n-1})]=-b_k\left[b_1+b_2+\cdots+b_{k-1}+\sum_{\alpha>k}b_\alpha\right].$$

Отсюда имеем

$$(b_2-b_1)\left(b_3+b_4+\cdots+b_k+\sum_{\alpha>k}b_\alpha\right)=0,$$

$$(b_3-b_1)\left(b_2+b_4+\cdots+b_k+\sum_{\alpha>k}b_\alpha\right)=0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(b_k-b_1)\left(b_2+b_3+\cdots+b_{k-1}+\sum_{\alpha>k}b_\alpha\right)=0.$$

Предположим теперь, что $b_1=b_2=\cdots=b_p=b$ и $b_{p+1}\neq b,\ldots,b_k\neq b$, тогда

$$b_2+b_3+\cdots+b_p+b_{p+2}+\cdots+b_k=0,$$

$$b_2+b_3+\cdots+b_p+b_{p+1}+b_{p+3}+\cdots+b_k=0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$b_2+b_3+\cdots+b_p+b_{p+1}+\cdots+b_{k-1}=0,$$

и при $k-p>1$ имеем

$$b_{p+1}=b_{p+2}=\cdots=b_k.$$

Следовательно: если характеристическое уравнение

$$|b_{ij}-\lambda g_{ij}|=0 \qquad (16)$$

имеет корень кратности k, то характеристическое уравнение

$$|R_{ij}-\mu g_{ij}|=0 \qquad (22)$$

также имеет корень кратности k. Напротив, если уравненне (22) имеет корень кратности k_1, то характеристическое уравнение (16) имеет одновременно корень λ_1 кратности p и корень λ_2 кратности k_1-p, и следовательно, соответствующая гиперповерхность является одновременно огибающей $(n-p-1)$-параметрического и $n-k+$ $+p-1$-параметрического семейства гиперсфер.

Так как p или k_1-p не меньше $\frac{k_1}{2}$, то гиперповерхность является огибающей семейства гиперсфер, размерность которого не более $n-\frac{k_1}{2}-1$. При $k_1>2$ обязательно имеет место „понижение размерности" семейства касательных гиперсфер, которое огибается поверхностью.

Воронежский государственный университет

Поступило 5 X 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. А. П. Норден, Пространства афинной связности, 1950. 2. С. П. Фиников, Метод внешних форм Картана, 1948. 3. А. Г. Костюченко, О связи между строением — мерной поверхности и ее главными кривизнами, УМН VIII, в. 5, (57), 1953. 4. М. А. Акивис, Инвариантное построение геометрии гиперповерхности конформного пространства, Мат. сб., т. 31 (73), 1, 1952. 5. А. М. Лопшиц, Алгебраическая задача теории пространств первого класса, Тр. семинара по векторному и тензорному анализу, IX, стр. 462—490, 1952. 6. А. П. Эйзенхарт, Риманова геометрия, 1948.