М. А. Акивис, Фокальные образы поверхности ранга r, *Изв. вузов. Матем.*, 1957, номер 1, 9–19

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1957 МАТЕМАТИКА № 1

М. А. Акивис

ФОКАЛЬНЫЕ ОБРАЗЫ ПОВЕРХНОСТИ РАНГА r

1. В работе рассматриваются фокальные образы *поверхности ранга* r, т. е. такой n-мерной поверхности N-мерного пространства, касательная плоскость которой зависит от $r \leqslant n$ параметров

Поверхности ранга $r < n$ рассматривались ранее Картаном в связи с изучением метрического изгибания гиперповерхностей [1] и многообразий постоянной кривизны [2], Н. Н. Яненко в связи с изучением метрического изгибания поверхностей произвольного класса [3] и рядом других авторов, а в самое последнее время — участниками Семинара по классической дифференциальной геометрии при МГУ С. И. Савельевым [4] и В. В. Рыжковым *.

Изучение фокальных образов поверхности ранга r позволяет сформулировать ряд теорем о структуре таких поверхностей и подойти к их полной классификации. Однако последний вопрос в настоящей работе своего завершения еще не получил.

Так как ранг поверхности — это ее чисто проективный инвариант, то мы рассматриваем поверхности ранга r с точки зрения проективной геометрии — в проективном пространстве P_N.

В работе применяется метод подвижного репера и внешних дифференциальных форм в том виде, как он изложен в книге С. П. Финикова [5].

2. Касательная плоскость E_n поверхности ранга r касается этой поверхности вдоль m-мерной плоскости E_m, где $m = n - r$ (см. [3]). Плоскости E_m образуют на поверхности „правильное" семейство, то есть через каждую точку поверхности проходит, вообще говоря, одна плоскость E_m. Будем называть плоскость E_m *образующей* поверхности; саму поверхность будем обозначать через $S_{n,m}$. Таким образом, образующая E_m и касательная плоскость E_n поверхности $S_{n,m}$ зависят от r параметров, которые мы будем называть главными параметрами поверхности.

Свяжем с поверхностью $S_{n,m}$ подвижный репер, точки $A_0, A_1, \dots, A_m$ которого лежат в образующей E_m поверхности, точки $A_{m+1}, \dots A_n$ — в ее касательной плоскости E_n, а точки $A_{n+1}, \dots, A_N$ дополняют систему точек до полного репера пространства P_N. Тогда уравнения инфинитезимального перемещения репера поверхности $S_{n,m}$ примут вид

$$\left.\begin{aligned} dA_i &= \omega_i^j A_j + \omega_i^p A_p + \omega_i^\alpha A_\alpha \\ dA_p &= \omega^i A_i + \omega_p^q A_q + \omega_p^\alpha A_\alpha \\ dA_\alpha &= \omega_\alpha^i A_i + \omega_\alpha^p A_p + \omega_\alpha^\beta A_p \end{aligned}\right\}, \tag{1}$$

* Работа В. В. Рыжкова „О тангенциальном вырождении поверхностей" была доложена семинару в сентябре 1957 года.

где здесь и в дальнейшем $i, j, k=0, 1, \ldots, m$; $p, q, s=m+1, \ldots, n$; $\alpha, \beta, \gamma=n+1, \ldots, N$. Условие постоянства касательной плоскости E_n вдоль образующей E_m запишется в форме

$$\omega_i^\alpha=0. \tag{2}$$

Если мы зафиксируем главные параметры u^p нашей поверхности, то ее образующая E_m и касательная плоскость E_n останутся неподвижными; поэтому формы Пфаффа ω_i^p и ω_p^α зависят только от дифференциалов главных параметров u^p. Введя на поверхности $S_{n,m}$ независимые формы ϑ^p, получим уравнения

$$\omega_i^p=a_{iq}^p\vartheta^q, \quad \omega_p^\alpha=b_{pq}^\alpha\vartheta^q, \tag{3}$$

которые вместе с уравнениями (2) полностью определяют поверхности $S_{n,m}$ в пространстве P_N.

Дифференцируя внешним образом систему (2), получим

$$[\omega_i^p\omega_p^\alpha]=0.$$

Откуда, в силу (3), вытекает условие

$$a_{ip}^s b_{sq}^\alpha=a_{iq}^s b_{sp}^\alpha, \tag{4}$$

означающее *перестановочность* матриц $\mathfrak{A}_i=\|a_{iq}^p\|$ и $\mathfrak{B}^\alpha=\|b_{pq}^\alpha\|$.

3. Определим фокальные образы поверхности $S_{n,m}$.

Точку $X=x^iA_i$ образующей E_m назовем *фокальной*, если она принадлежит кроме E_m еще некоторой смежной образующей E_m'. Геометрическое место фокальных точек назовем *фокальной поверхностью* F образующей E_m. Условие фокальности точки X запишется в виде

$$X=x^iA_i={}'x^iA_i',$$

где $A_i'=A_i+dA_i$ и ${}'x^i=x^i+dx^i$. Отсюда, в силу (1), мы получим систему уравнений

$$x^i\omega_i^p=x^ia_{iq}^p\vartheta^q=0. \tag{5}$$

Так как для точек поверхности F эта система должна иметь хоть одно нетривиальное решение, то ее ранг должен быть меньше, чем r. Поэтому уравнение фокальной поверхности F мы получим в виде

$$|x^ia_{iq}^p|=0. \tag{6}$$

Следовательно, вообще говоря, F представляет собой алгебраическую поверхность порядка r*.

Гиперплоскость $\Xi=\xi_\alpha x^\alpha=0$, проходящую через касательную плоскость E_n, назовем *фокальной*, если кроме плоскости E_n, она проходит также через некоторую смежную касательную плоскость E_n'. Уравнению фокальной гиперплоскости должны удовлетворять координаты точек $A_i'=A_i+dA_i$ и $A_p'=A_p+dA_p$ для некоторой системы значений форм ϑ^p. Подставляя координаты этих точек в уравнение гиперплоскости, мы получим условие фокальности в виде

$$\xi_\alpha\omega_p^\alpha=\xi_\alpha b_{pq}^\alpha\vartheta^q=0. \tag{7}$$

---

* Мы говорим, что некоторая поверхность имеет порядок r в том случае, если найдется хоть одна прямая, пересекающая эту поверхно ть в r *различных* точках, и нет ни одной прямой, пересекающей ее более чем в r точках.

Отсюда вытекает следующее уравнение геометрического места Φ фокальных плоскостей:

$$|\xi_\alpha b^\alpha_{pq}|=0, \tag{8}$$

показывающее, что Φ, вообще говоря, является конусом класса r*, вершиной которого служит плоскость E_n. Назовем конус Φ *фокальным конусом* касательной плоскости E_n.

Пусть r' — число линейно независимых матриц $\mathfrak{A}_i$. Если $r'<m+1$, то преобразованием репера в плоскости E_m мы можем получить $\mathfrak{A}_{i'}=0$ при $i'\geqslant r'$. Отсюда следует, что в образующей E_m содержится такая плоскость $E_{m-r'}=[A_{r'},\dots,A_m]$, через которую проходят все образующие E'_m, смежные с E_m. Назовем эту плоскость $E_{m-r'}$ *характеристической*. Фокальной поверхностью F в этом случае будет конус порядка r, вершиной которого служит характеристическая плоскость.

Точно так же, если r'' — число линейно независимых матриц $\mathfrak{B}^\alpha$ поверхности $S_{n,m}$, то $m+r''$ — размерность ее соприкасающейся плоскости, и фокальный конус Φ целиком лежит в этой плоскости $E_{m+r''}$.

4. Несмотря на то, что индексы p и q в матрицах $\mathfrak{A}_i=\|a^p_{iq}\|$ и $\mathfrak{B}^\alpha=\|b^\alpha_{pq}\|$ пробегают одну и ту же систему значений от $m+1$ до n, они связаны с различными рядами переменных — „принадлежат различным пространствам“, и преобразования по этим индексам происходят совершенно независимо. Чтобы связать эти две системы индексов, мы примем в качестве линейно независимых форм поверхности $S_{n,m}$ формы ω^p_0, т. е. положим,

$$\vartheta^p=\omega^p,$$

считая при этом, что A_0 — произвольная точка плоскости E_m, не лежащая на фокальной поверхности F.

Матрица $\mathfrak{A}_0$ станет теперь единичной матрицей $a^p_{0q}=\delta^p_q$, а уравнения (3) примут вид

$$\omega^p_i=a^p_{iq}\omega^q_0,\quad \omega^\alpha_p=b^\alpha_{pq}\omega^q_0, \tag{3'}$$

где здесь и далее, начиная с этого места, $i, j, k=1,\dots,m$.

При преобразованиях репера вида

$$\left.\begin{aligned} A_{0'}=A_0,\ A_{i'}=A_i,\ A_{\alpha'}=A_\alpha,\\ A_{p'}=\lambda^p_{p'}A_p,\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

матрицы $\mathfrak{A}_i$ и $\mathfrak{B}^\alpha$ преобразуются по тензорному закону:

$$a^{p'}_{i'q'}=\lambda^{p'}_p\lambda^q_{q'}a^p_{iq},\quad b^{\alpha'}_{p'q'}=\lambda^p_{p'}\lambda^q_{q'}b^\alpha_{pq}.$$

Условия (4) запишутся теперь в виде

$$b^\alpha_{pq}=b^\alpha_{qp},\quad a^s_{ip}b^\alpha_{sq}=a^s_{iq}b^\alpha_{sp}, \tag{4}$$

так что матрицы $\mathfrak{B}^\alpha$ становятся симметричными, а матрицы $\mathfrak{A}_i$ перестановочны с этими симметричными матрицами.

5. Теорема 1. *Если фокальные поверхности F и фокальные конусы Φ поверхности $S_{n,m}$ не вырождаются соответственно*

* Мы говорим, что некоторая поверхность имеет класс r в том случае, если найдется хоть один пучок гиперплоскостей, содержащий r *различных* гиперплоскостей, касательных к этой поверхности, и нет ни одного пучка гиперплоскостей, содержащего более чем r таких гиперплоскостей.

в поверхности порядка, и конусы класса меньше, чем r, то: а) все матрицы $\mathfrak{A}_i$ и $\mathfrak{B}^\alpha$ этой поверхности могут быть одновременно приведены к диагональному виду; b) каждая из поверхностей F распадается на r различных плоскостей $m-1$ измерений, а каждый из конусов Φ — на r различных связок гиперплоскостей, зависящих от $N-n-2$ параметров.

Доказательство. Рассмотрим в плоскости E_m произвольную прямую l, пересекающую поверхность F в r различных точках. Поместим точки A_0 и A_1 репера на эту прямую, считая при этом, что точка A_0 не лежит на поверхности F. Точки пересечения $\lambda A_0 + A_1$ прямой l с поверхностью F найдутся из уравнения

$$|\lambda\delta_p^q + a_{1p}^q| = 0.$$

Так как это уравнение должно иметь r различных решений, то матрица $\mathfrak{A}_1$ имеет простую структуру (6) и преобразованием репера (9) может быть приведена к диагональному виду

$$a_{1q}^p = a_1^p\,\delta_{pq},$$

где δ_{pq} — символ Кронекера и суммирования по индексам p и q здесь и в дальнейшем нет, если на это не указывает знак Σ.

Записывая условие (4') для матрицы $\mathfrak{A}_1$, мы получим

$$a_1^p\, b_{pq}^\alpha = a_1^q\, b_{qp}^\alpha,$$

откуда, в силу симметрии матриц $\mathfrak{B}^\alpha$, следует

$$(a_1^p - a_1^q)\, b_{pq}^\alpha = 0.$$

Но так как, по предположению, $a_1^p \neq a_1^q$ при $p \neq q$, то

$$b_{pq}^\alpha = 0 \text{ при } p \neq q,$$

и в этом репере все матрицы $\mathfrak{B}^\alpha$ имеют диагональный вид

$$b_{pq}^\alpha = b_p^\alpha\,\delta_{pq}. \qquad (10)$$

Рассмотрим теперь произвольный пучок гиперплоскостей, содержащий ровно r различных гиперплоскостей, принадлежащих конусу Φ. Примем за базис этого пучка гиперплоскости Ξ_N и Ξ_{N-1}. Гиперплоскости этого пучка $\lambda\Xi_N + \Xi_{N-1}$, принадлежащие конусу Φ, найдутся из уравнения

$$|\lambda b_{pq}^N + b_{pq}^{N-1}| = 0,$$

которое должно иметь ровно r различных корней.

Но в построенном репере матрицы b_{pq}^N и b_{pq}^{N-1} приведены к диагональному виду и

$$\lambda_p = -b_p^{N-1} : b_p^N.$$

А так как $\lambda_p \neq \lambda_q$ при $p \neq q$, то

$$\begin{vmatrix} b_p^{N-1} & b_q^{N-1} \\ b_p^N & b_q^N \end{vmatrix} \neq 0 \text{ при } p \neq q.$$

Записывая условия (4') для матриц $\mathfrak{B}^N$ и $\mathfrak{B}^{N-1}$, мы получим

$$\left.\begin{aligned} a_{ip}^q b_q^{N-1} &= a_{iq}^p b_p^{N-1} \\ a_{ip}^q b_q^N &= a_{iq}^p b_p^N \end{aligned}\right\},$$

откуда в силу предыдущего неравенства следует, что

$$a_{iq}^{p}=0 \text{ при } p\neq q,$$

то есть в этом репере все матрицы $\mathfrak{A}_i$ также имеют диагональный вид

$$a_{iq}^{p}=a_i^p\delta_{pq}. \tag{11}$$

Первая часть теоремы доказана полностью.

Для доказательства второй части заметим, что в нашем репере уравнение фокальной поверхности F принимает вид

$$\prod_p(x^0+a_i{}^p x^i)=0, \tag{12}$$

а фокального конуса Φ

$$\prod_p \xi_\alpha b_p^\alpha=0, \tag{13}$$

откуда непосредственно следует распадение соответствующего фокального образа.

6. В силу уравнений (10) и (11) условия фокальности (5) и (7) примут соответственно вид

$$(x^0+a_i^p x^i)\,\omega_0^p=0,$$

$$(\xi_\alpha b_p^\alpha)\,\omega_0^q=0.$$

Из этих уравнений ясно, что p-той $(m-1)$-плоскости фокальной поверхности (12) соответствует на поверхности $S_{n,m}$ направление

$$\omega_0^q=0,\ q\neq p, \tag{14}$$

и это же самое направление соответствует p-той $(N-n-2)$-связке гиперплоскостей фокального конуса (13). p различных направлений, определяемых таким образом для каждого значения параметров u^p поверхности $S_{n,m}$, назовем *сопряженными* направлениями этой поверхности. Легко видеть, что при $m=0$ это определение совпадает с обычным определением полной системы сопряженных направлений на n-мерной поверхности в P_N.

Совокупность всех сопряженных направлений поверхности $S_{n,m}$ назовем ее *сопряженной сетью*. Если уравнения

$$\omega_0^p=0$$

поверхностей этой сети будут вполне интегрируемыми, назовем сеть *голономной*, в противном случае — *неголономной*. Условие голономности сопряженной сети запишется в виде

$$[D\omega_0^p,\ \omega_0^p]=\sum_{q\neq p}[\omega_q^p\omega_0^p\,\omega_0^q]=0. \tag{15}$$

Репер, в котором все матрицы $\mathfrak{A}_i$ и $\mathfrak{B}^\alpha$ приведены к диагональному виду, назовем *сопряженным*. Образующая E_m', соседняя к E_m в p-том сопряженном направлении (14), определяет вместе с E_m инвариантную $(m+1)$ — плоскость $[A_0, \dots A_m, A_p]$.

7. В сопряженном репере уравнения (3) принимают вид

$$\omega_i^p=a_i^p\omega_0^p,\ \omega_p^\alpha=b_p^\alpha\,\omega_0^p, \tag{16}$$

а уравнения (4′) удовлетворяются тождественно. Внешнее дифференцирование уравнений (16) дает

$$\left.\begin{aligned} &[\Delta a_i^p \omega_0^p] + \sum_{q \neq p} (a_i^q - a_i^p)[\omega_q^p \omega_0^q] = 0, \\ &[\Delta b_p^\alpha \omega_0^p] - \sum_{q \neq p} [b_q^\alpha \omega_p^q + b_p^\alpha \omega_q^p, \ \omega_0^q] = 0, \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

где обозначено

$$\Delta a_i^p = da_i^p - a_j^p \omega_i^j + a_i^p \omega_0^0 - \omega_i^0 + a_i^p a_j^p \omega_0^j,$$

$$\Delta b_p^\alpha = db_p^\alpha + b_p^\beta \omega_\beta^\alpha + b_p^\alpha (\omega_0^0 - 2\omega_p^p) + b_p^\alpha a_j^p \omega_0^j.$$

Полная система дифференциальных уравнений поверхности $S_{n,m}$ состоит из уравнений Пфаффа (2) и (16) и внешних дифференциальных уравнений (17). Характеристическая система форм, входящих в последние уравнения, состоит из форм Δa_i^p, Δb_p^α и ω_p^q $(q \neq p)$. Общее число этих форм

$$\mathfrak{q} = mr + (N - n) r + r(r-1).$$

Эти формы будут линейными комбинациями независимых форм ω_0^p Их разложение по формам ω_0^p можно записать в виде

$$\left.\begin{aligned} \Delta a_i^p &= b_{ip}^p \omega_0^p + \sum_{q \neq p} b_{iq}^p \omega_0^q, \\ \Delta b_p^\alpha &= c_{pp}^\alpha \omega_0^p + \sum_{q \neq p} c_{pq}^\alpha \omega_0^p, \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

$$\omega_q^p = l_{qp}^p \omega_0^p + l_{qq}^p \omega_0^q + \sum_{s \neq p, q} l_{qs}^p \omega_0^s, \tag{19}$$

где p, q и s — три различных индекса из $m+1, \dots n$.

Подставляя эти разложения в уравнения (17), мы получим

$$\left.\begin{aligned} b_{iq}^p &= (a_i^q - a_i^p)\, l_{qp}^p, \\ c_{pq}^\alpha &= -(b_q^\alpha l_{pp}^q + b_p^\alpha l_{qp}^p), \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

$$(a_i^q - a_i^p)\, l_{qs}^p - (a_i^s - a_i^p)\, l_{sq}^p = 0, \tag{21}$$

$$b_q^\alpha l_{ps}^q - b_s^\alpha l_{pq}^s + b_p^\alpha (l_{qs}^p - l_{sq}^p) = 0. \tag{22}$$

Здесь соотношения (20) определяют коэфициенты b_{iq}^p и c_{pq}^α через l_{pp}^q и l_{qp}^p остающиеся произвольными, а соотношения (21) и (22) накладывают связи на коэфициенты l_{qs}^p при $p \neq q \neq s$.

8. Теорема 2. *Если на поверхности $S_{n,m}$ выполнены условия теоремы 1, и для любых трех сопряженных направлений этой поверхности соответствующие им три $(m-1)$-плоскости фокальной поверхности F не проходят через одну $(m-2)$-плоскость или соответствующие им три $(N-n-2)$-связки гиперплоско-*

стей не пересекаются по одной $(N-n-3)$-связке, то сопряженная сеть такой поверхности будет голономной.

Доказательство: а) Предположим, что три $(m-1)$-плоскости фокальной поверхности F, соответствующие p-тому, q-тому и s-тому сопряженным направлениям, не пересекаются по одной $(m-2)$-плоскости. Тогда произвольная двумерная плоскость α общего положения, лежащая в E_m, пересечет эти три $(m-1)$-плоскости по трем прямым, не проходящим через одну точку. Поместим точки A_0, A_1 и A_2 репера на плоскость α, считая при этом, что точка A_0 не лежит на поверхности F. В силу (12) уравнения прямых, по которым плоскость α пересекается тремя $(m-1)$-плоскостями, запишутся в виде

$$x^0+a_1^p x^1+a_2^p x^2=0,$$

$$x^0+a_1^q x^1+a_2^q x^2=0,$$

$$x^0+a_1^s x^1+a_2^s x^2=0.$$

И так как эти три прямые не проходят через одну точку, то

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1^p & a_2^p \\ 1 & a_1^q & a_2^q \\ 1 & a_1^s & a_2^s \end{vmatrix} \neq 0. \tag{23}$$

Записывая теперь соотношения (21) для $i=1, 2$, получим

$$(a_1^q-a_1^p)\, l_{qs}^p-(a_1^s-a_1^p)\, l_{sq}^p=0,$$

$$(a_2^q-a_2^p)\, l_{qs}^p-(a_2^s-a_2^p)\, l_{sq}^p=0.$$

Определитель этой системы уравнений, в силу (23), отличен от нуля и, следовательно,

$$l_{qs}^p=0.$$

б) Пусть три $(m-1)$-плоскости поверхности F, соответствующие p-тому, q-тому и s-тому сопряженным направлениям, проходят через одну $(m-2)$-плоскость, а три $(N-n-2)$-связки гиперплоскостей, соответствующие этим трем направлениям, не пересекаются по одной $(N-n-3)$-связке.

Мы можем выбрать прямую l в образующей E_m так, чтобы она пересекла три наши $(m-1)$-плоскости в трех различных точках. Если мы поместим на ней точки A_0 и A_1, так как это сделано в $n^0 s$, то получим, что

$$a_1^p \neq a_1^q \neq a_1^s.$$

Если мы теперь проциклируем соотношение (21), записанное при $i=1$ по индексам p, q и s, то из трех полученных уравнений сможем выразить величины l_{sq}^p, l_{ps}^q, l_{qp}^s через l_{qs}^p, l_{sp}^q, l_{pq}^s. Подставляя эти величины в уравнения, получаемые циклированием соотношений (22), мы получим для каждого значения индекса α одно уравнение

$$b_p^\alpha \frac{l_{qs}^p}{a^s-a^p}+b_q^\alpha \frac{l_{sp}^q}{a^p-a^q}+b_s^\alpha \frac{l_{pq}^s}{a^q-a^s}=0 \tag{24}$$

на три величины l_{qs}^p, l_{sp}^q, l_{pq}^s.

Рассмотрим теперь произвольную двупараметрическую связку гиперплоскостей. Она пересечется с каждой из трех $(N-n-2)$-связок, соответствующих p-тому, q-тому и s-тому сопряженным направлениям, по однопараметрическому пучку гиперплоскостей, причем эти пучки не содержат общей гиперплоскости. Если считать базисом двупараметрической связки гиперплоскости Ξ_{N-2}, Ξ_{N-1} и Ξ_N, то в силу (13) уравнения трех однопараметрических пучков, по которым эта связка пересекается с тремя $(N-n-2)$-связками, запишутся в виде

$$\xi_{N-2}b_p^{N-2}+\xi_{N-1}b_p^{N-1}+\xi_N b_p^N=0,$$
$$\xi_{N-2}b_q^{N-2}+\xi_{N-1}b_q^{N-1}+\xi_N b_q^N=0,$$
$$\xi_{N-2}b_s^{N-2}+\xi_{N-1}b_s^{N-1}+\xi_N b_s^N=0.$$

И так как эти пучки не содержат общей гиперплоскости, то

$$\begin{vmatrix} b_p^{N-2} & b_p^{N-1} & b_p^N \\ b_q^{N-2} & b_q^{N-1} & b_q^N \\ b_s^{N-2} & b_s^{N-1} & b_s^N \end{vmatrix} \neq 0. \tag{25}$$

Записывая теперь соотношения (24) для $\alpha=N-2,\ N-1,\ N$, мы получим из них, в силу (25), что снова

$$l_{qs}^p=0.$$

Так как условия теоремы выполняются для любых трех сопряженных направлений, то

$$l_{qs}^p=0 \text{ при } p\neq q\neq s \tag{26}$$

для любых трех индексов p, q и s.

Но, в силу (26), немедленно выполняются условия (15), и сопряженная сеть нашей поверхности $S_{n,m}$ будут голономной, что и требовалось доказать.

Легко доказать далее, что уравнения (26) вытекают из условий голономности (15) при выполнении хотя бы одного из условий теоремы 1. Следовательно, на поверхностях $S_{n,m}$, несущих сопряженную сеть, условия (15) и (26) будут равносильными.

9. Уравнения (26) эквивалентны системе внешних дифференциальных уравнений

$$[\omega_q^p\omega_0^p\,\omega_0^q]=0. \tag{27}$$

Легко видеть, что внешние дифференциалы этой системы тождественно обращаются в нуль.

Поверхность $S_{n,m}$ с голономной сопряженной сетью полностью определяется системой уравнений Пфаффа (2), (16) и внешних уравнений (17), (27), замкнутой относительно внешнего дифференцирования.

Строя интегральные элементы, мы легко найдем характеры системы

$$s_1=mr+(N-n)r,\quad s_2=r(r-1),$$

и так как $s_1+s_2=q$, то все остальные характеры $s_3,\dots,s_r$ оказываются равными нулю. Число Картана будет равно

$$Q=s_1+2s_2=mr+(N-n)r+2r(r-1).$$

С другой стороны, число произвольных параметров b^p_{ip}, c^α_{pp}, l^p_{ql} и l^p_{qq}, входящих в разложения (18) и (19), снова равно

$$N = mr + (N - n)r + 2r(r - 1).$$

Итак, $Q = N$, и по признаку Картана *решение рассматриваемой системы дифференциальных уравнений — поверхности $S_{n,m}$ с голономной сопряженной сетью — существует в области аналитических функций с произволом $r(r-1)$ функций двух аргументов.*

10. Рассмотрим коррелятивное преобразование в пространстве P_N, ставящее в соответствие k-мерной плоскости E_k этого пространства $(N-k-1)$-мерную плоскость E_{N-k-1} и сохраняющее инцидентность плоскостей.

Докажем, что *при коррелятивном преобразовании поверхность $S_{n,m}$ ранга r переходит в поверхность $S_{n',m'}$, где $n' = N - m - 1$, $m' = N - n - 1$, того же ранга r.*

В самом деле, при коррелятивном преобразовании образующей E_m поверхности $S_{n,m}$ соответствует плоскость E_{N-m-1}, а ее касательной плоскости E_n — плоскость E_{N-n-1}, причем плоскость E_{N-n-1} лежит в плоскости E_{N-m-1}. Произвольная образующая E_m' поверхности $S_{n,m}$, смежная с E_m с точностью до бесконечно малых второго порядка, лежит целиком в плоскости E_n, и плоскость E_n', касающаяся поверхности вдоль образующей E_m', проходит с той же точностью через исходную образующую. Поэтому плоскость E_{N-n-1}, коррелятивная плоскости E_n, описывает такую поверхность, что произвольная ее образующая E'_{N-n-1}, соседняя с E_{N-n-1} с точностью до бесконечно малых второго порядка, лежит в плоскости E_{N-m-1}, проходящей через исходную образующую. Следовательно, плоскость E_{N-m-1} будет касательной плоскостью к поверхности, описываемой плоскостью E_{N-n-1} во всех точках этой плоскости, то есть она будет поверхностью $S_{n',m'}$, где $n' = N - m - 1$ и $m' = N - n - 1$. А так как $r' = n' - m' = n - m = r$, то ранг поверхности $S_{n',m'}$ снова равен r.

Например, гиперповерхность $(N - n = 1)$ ранга r с $m = n - r$-мерной образующей переходит при корреляции в $n' = N - m - 1$-мерную поверхность максимального ранга, так как для этой поверхности $m' = 0$. Обратно, n-мерная поверхность максимального ранга $r = n$ переходит при корреляции в гиперповерхность ранга n с образующей размерности $m' = N - n - 1$. Именно поэтому мы должны были включить в наше рассмотрение также поверхности максимального ранга.

Поверхности ранга r класса 2 $(N - n = 2)$ переходят при корреляции в $n' = N - m - 1$-мерные поверхности ранга r с $m' = N - n - 1 = 1$-мерной образующей и обратно, поверхности ранга r с одномерной образующей переходят при корреляции в поверхности класса 2. В частности, поверхности класса 2 с одномерной образующей переходят при корреляции в такие же поверхности.

Легко видеть, что при коррелятивном преобразовании фокальные поверхности F поверхности $S_{n,m}$ переходят в фокальные конусы Φ' поверхности $S_{n',m'}$ и наоборот. Отсюда вытекает, что *если поверхность $S_{n,m}$ несет сопряженную сеть, то такую сеть несет и поверхность $S_{n',m'}$, а если эта сеть будет голономна на поверхности $S_{n,m}$, то она будет голономна и на поверхности $S_{n',m'}$.*

11. Условия теоремы 1 могут выполняться только при $m \geqslant 1$ и $N - n \geqslant 2$, и при этом соотношении размерностей в общем случае они будут всегда выполняться. Точно так же условия теоремы 2 будут выполняться в общем случае при $m \geqslant 1$ и $N - n \geqslant 3$ или при $m \geqslant 2$ и $N - n \geqslant 2$.

Кроме того, легко доказать, что поверхность $S_{n,0}$ несет сопряженную сеть при $N-n=1$, 2, а при $N-n\geqslant 3$ ее, вообще говоря, не несет, и что гиперповерхность $(N-n=1)$ ранга r несет сопряженную сеть при $m=0,1$, а при $m\geqslant 2$ также ее не несет. Эти общие случаи мы можем представить в виде таблицы 1. В этой таблице буквой „г" обозначено наличие при соответствующем соотношении размерностей голономной сопряженной сети, буквами „нг" — неголономной сопряженной сети и, наконец, знаком „—"- отсутствие сопряженной сети. Эта таблица симметрична относительно главной диагонали в силу принципа двойственности, который имеет место в пространстве P_N, описанному в предыдущем пункте.

$N-n$ \ m	0	1	2	3 . . .
1	нг	нг	—	— . . .
2	нг	нг	г	г . . .
3	—	г	г	г . . .
4	—	г	г	г . . .
.	.	.	.	. . . .
.	.	.	.	. . . .
.	.	.	.	. . . .

Нами доказано существование поверхностей $S_{n,m}$ с голономной сопряженной сетью. Существование поверхностей $S_{n,0}$ максимального ранга очевидно. Произвол их существования равен $N-n$ функций n аргументов. В силу принципа двойственности отсюда следует существование гиперповерхностей $(N-n=1)$ любого ранга r. Произвол их существования равен $m+1$ функций r аргументов. Остается открытым вопрос о существовании поверхностей $S_{n,1}$ при $N-n=2$ с неголономной сопряженной сетью.

12. *Если при $m=0$ и $N-m>2$ либо при $N-m=1$ и $m>1$ на поверхности $S_{n,m}$ существует сопряженная сеть, то эта сеть будет, вообще говоря, голономной.* В самом деле, на такой поверхности будет выполняться одно из условий (21) или (22), и это условие так же, как при доказательстве теоремы 2, приведет к уравнениям (26) — условиям голономности сопряженной сети.

Отсюда в частности следует, что квазилапласовы преобразования поверхности $S_{n,0}$, рассмотренные В. Т. Базылевым [7], при наличии n-мерной сопряженной сети, могут отличаться от лапласовых только для гиперповерхностей и поверхностей класса 2, а для поверхностей более высокого класса они, вообще говоря, совпадают с преобразованиями Лапласа.

13. Размерность соприкасающейся плоскости поверхности $S_{n,m}$ равна $n+r''$, где r'' — число линейно независимых матриц $\mathfrak{B}^{\alpha}$ этой поверхности. Так как на поверхности $S_{n,m}$, несущей сопряженную сеть, все матрицы $\mathfrak{B}^{\alpha}$ могут быть одновременно приведены к диагональному виду, то число линейно независимых из них не больше, чем r, и на этой поверхности $r''<r$.

Поместив точки A_{α} при $\alpha\leqslant n+r''$ в соприкасающуюся плоскость, мы приведем к нулю все формы $\omega_p^{\alpha''}$ при $\alpha''>n+r''$. Формы $\omega_{\alpha}^{\alpha''}$ будут зависеть при этом только от дифференциалов главных параметров поверхности.

Отсюда вытекает, что если $r''=r$, то плоскости E_n, касательные к поверхности $S_{n,m}$, снова описывают поверхность $S_{n+r,n}$ ранга r. Если $r''<r$, то плоскости E_n уже не образуют поверхности ранга r, так как размерность образованной ими поверхности равна $n+r''<n+r$. Если для поверхности $S_{n+r,n}$ число r'' также равно r, то процесс образования поверхностей ранга r можно продолжать k'' раз до тех пор, пока r'' не станет меньше r, или пока разность $N-(n+k''r)$ не станет меньше r.

С другой стороны, размерность характеристической плоскости образующей E_m поверхности $S_{n,m}$ равна $m-r'$, где r' — число линейно независимых матриц $\mathfrak{A}_i$ $(i=0, 1, \dots, m)$. На поверхности, несущей сопряженную сеть $r' \leqslant r$. На такой поверхности плоскость $E_{m-r'}$ — это плоскость, по которой пересекаются r $(m-1)$-плоскостей, составляющих ее фокальную поверхность F.

Так же, как это сделано выше, покажем, что если $r'=r$, то плоскость E_{m-r} снова описывает поверхность $S_{m, m-r}$ ранга r. Если $r'<r$, то плоскость E_{m-r} уже не описывает поверхности ранга r, так как $m-r'+r>m$. Если для поверхности $S_{m, m-r}$ число r' также равно r, то процесс можно продолжать k' раз до тех пор, пока r' не станет меньше r, или пока число $m-k'r$ не станет меньше, чем r.

Вторая часть нашего построения совершенно симметрична первой. Если постоянно $r''=r'=r$, то мы получаем последовательность вложенных друг в друга поверхностей ранга r. Размерность двух соседних членов этой последовательности отличаетса на r. Размерность образующей первого члена этой последовательности меньше, чем r, а размерность касательной плоскости последнего — больше чем $N-r$.

14. Картаном в работе [2] в связи с изучением многообразий постоянной кривизны были рассмотрены поверхности ранга r, у которых размерность соприкасающейся плоскости равна $n+r$ и $n+\frac{r(r+1)}{2}$. Первые из них несут голономную сопряженную сеть и являются частным случаем поверхностей $S_{n, m}$, рассмотренных нами в пп. 8 и 9. Вторые же выпадают из нашего рассмотрения, так как фокальные поверхности F таких поверхностей вырождаются в r-кратные $(m-1)$-плоскости, а сами эти поверхности вырождаются в конические поверхности с $(m-1)$-мерной вершиной. При коррелятивном преобразовании каждая такая поверхность перейдет в $n'=N-m-1$-мерную поверхность, целиком лежащую в $N-m$-мерной плоскости, т. е. гиперповерхность ранга r. А такие поверхности отмечены нами в п°11.

Тульский механический институт

Поступило 12 X 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. E. Cartan, La deformation des hypersurfaces dans l'espace euclidien reel â n dimehsions, Bull. de la Soc. math. de France, 44, 1916. 2. E. Cartan, Sur les varietes de curbure constant d'un espace euclidiene on non euclidiene, Bull. de la Soc. math. de France, 47, 1919, 48, 1926. 3. Н. Н. Яненко, Некоторые вопросы из теории вложения многомерных римановых метрик в эвклидовы пространства, Успехи мат. наук, VIII, 1, 1953. 4. С. И. Савельев, Поверхность с плоскими образующими, вдоль которых касательная плоскость постоянна, ДАН СССР. 5. С. П. Фиников, Метод внешних форм Картана, М., 1948. 6. Ф. Р. Гантмахер, Теория матриц, М., 1954. 7. В. П. Базылев, Квази-лапласовы преобразования p-мерных поверхностей n-мерного проективного пространства, Уч. зап. Мос. пед. ин-та им. Потемкина, т. 35. вып. 4.