В. К. Давыдова, Частично системно транзитивные группы подстановок, *Изв. вузов. Матем.*, 1957, номер 1, 121–125

В. К. Давыдова

ЧАСТИЧНО СИСТЕМНО ТРАНЗИТИВНЫЕ ГРУППЫ ПОДСТАНОВОК

§ 1. Бомонтом и Питерсоном в работе „Set-transitive permutation groups" (см. [1]) были рассмотрены системно-транзитивные группы подстановок. В настоящей статье мы обобщим это понятие, введя новое понятие m-частично k-системно транзитивной группы подстановок посредством следующего определения:

Пусть имеется группа $\mathfrak{g}$ подстановок n символов. Образуем системы из этих n символов по k (не обязательно всевозможные). Обозначим образованные нами системы через $s_1, s_2, \ldots s_m$, где $m \leqslant \binom{n}{k}$. Если для любой пары этих систем s_i и s_j $(1 \leqslant i \leqslant m;\ 1 \leqslant j \leqslant m)$ можно подобрать подстановку данной группы, переводящую s_i в s_j, и если всякий элемент группы каждую из этих систем переводит также в одну из этих систем, то группу $\mathfrak{g}$ будем называть m-частично k—системно транзитивной.

Если при этом каждый элемент системы s_i может быть переведен в любой произвольно заданный элемент системы s_j подстановкой данной группы, то группу $\mathfrak{g}$ назовем m-частично k-кратно транзитивной.

При $m = \binom{n}{k}$ группа $\mathfrak{g}$ является k-системно транзитивной.

Докажем некоторые теоремы о частично системно транзитивных группах подстановок.

Теорема 1. *Если группа $\mathfrak{g}$ подстановок n символов m-частично k-системно транзитивна, то $\mathfrak{g}$ будет и m-частично $(n-k)$-системно транзитивной.*

Доказательство. Пусть группа $\mathfrak{g}$ подстановок n символов является m-частично k-системно транзитивной. Тогда система k символов, например, $s_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$, может быть переведена в каждую из m систем $s_1, s_2, \ldots, s_m$ с помощью подстановок этой группы $\mathfrak{g}$. Пусть, например, τ_i переводит s_1 в s_i, т. е. $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k)\tau_i = (i_1, i_2, \ldots, i_k)$. Тогда, очевидно, дополнение к системе s_1, равное $c(s_1) = (\alpha_{k+1}, \alpha_{k+2} \ldots \alpha_n)$ переводится этой подстановкой τ_i в дополнение к системе s_i, т. е. в $c(s_i) = (i_{k+1}, i_{k+2}, \ldots, i_n)$. Но так как система s_1 может быть переведена в любую другую систему s_j, где $1 \leqslant j \leqslant m$, то, очевидно, дополнение к системе s_1, т. е. $c(s_1)$ может быть переведено в любое другое дополнение $c(s_j)$, где $1 \leqslant j \leqslant m$.

Кроме этого, по определению m-частично k-системно транзитивной группы, каждый элемент группы $\mathfrak{g}$ переводит систему s_1 в одну из этих же m систем. А значит дополнение $c(s_1)$ каждый элемент группы $\mathfrak{g}$ будет переводить в дополнение к одной из этих m систем, т. е.

$$c(s_1),\ c(s_2), \ldots,\ c(s_m).$$

Это означает, что группа $\mathfrak{g}$ является m-частично $(n-k)$-системно транзитивной.

Примечание. Если в теореме 1 положить $m=\binom{n}{k}$, то получим как частный случай теорему, доказанную Бомонтом и Питерсоном: если группа $\mathfrak{g}$ является k-системно транзитивной, то она и $(n-k)$-системно транзитивна. (См. [1], стр. 37).

Теорема 2. *Если группа $\mathfrak{g}$ подстановок n символов является m-частично k-системно транзитивной, то она содержит подгруппу $\mathfrak{g}_1$ индекса m, состоящую из подстановок, переводящих одну из систем, например $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$, в самое себя.*

Доказательство. Пусть группа $\mathfrak{g}$ подстановок n символов является m-частично k-системно транзитивной. Это означает, что система k символов, например $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$, может быть переведена в любую из m систем k символов подстановкой, принадлежащей группе $\mathfrak{g}$, и что любая подстановка группы $\mathfrak{g}$ переводит эту систему в одну из тех же m систем.

Подстановки, которые систему $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ переводят в самое себя, составляют подгруппу $\mathfrak{g}_1$ группы $\mathfrak{g}$. Разложим $\mathfrak{g}$ по модулю $\mathfrak{g}_1$:

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_1+\mathfrak{g}_1 T_2+\ldots+\mathfrak{g}_1 T_r.$$

Если элемент T_i переводит систему $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ в другую систему $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$, то, очевидно, любой элемент смежной системы $\mathfrak{g}_1 T_i$ переводит $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ в $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$. Если же два элемента T_i и T_j принадлежат различным системам, то они систему $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ переводят в различные системы, т. е.

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) T_i=(i_1, i_2, \ldots, i_k).$$
$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) T_j=(j_1, j_2, \ldots, j_k),$$

причем $(i_1, i_2, \ldots, i_k) \neq (j_1, j_2, \ldots, j_k)$, в противном случае элемент $T_i T_j^{-1}$ принадлежал бы $\mathfrak{g}_1$, т. е. входил бы в смежную систему $\mathfrak{g}_1$, что невозможно, т. к. T_i и T_j, по предположению, принадлежат различным смежным системам.

Так как, по условию, группа $\mathfrak{g}$ m-частично k-системно транзитивна, то таких смежных систем должно быть m, т. е. $r=m$, а это означает, что индекс подгруппы $\mathfrak{g}_1$ равен m. На основании теоремы Лагранжа из теоремы 2 вытекает следующее:

Если группа $\mathfrak{g}$ подстановок n символов является m-частично k-системно транзитивной, то порядок $\mathfrak{g}$ равен $m \cdot p$, где p есть порядок подгруппы $\mathfrak{g}_1$ группы $\mathfrak{g}$, состоящей из таких подстановок, которые переводят одну из этих m систем k символов в самое себя.

Теорема 3. *Если группа $\mathfrak{g}$ подстановок n символов является m-частично k-системно транзитивной, то она не будет $(m-l)$-частично k-системно транзитивной, где $1 \leqslant l \leqslant m$, если $(m-l)$ систем будут взяты из числа прежних m систем.*

Доказательство. Пусть группа $\mathfrak{g}$ является m-частично k-системно транзитивной. Выберем из m данных систем какие-либо $(m-l)$ систем. Очевидно, каждая из этих $(m-l)$ систем может быть переведена в любую другую произвольно заданную систему из выбранных нами $(m-l)$ систем с помощью подстановок данной группы. Но не всякая подстановка группы $\mathfrak{g}$ будет переводить одну из этих $(m-l)$ систем в какую-либо другую из этих же систем, т. к. данная группа, по условию, является m-частично k-системно транзитивной, т. е. найдутся подстановки в группе $\mathfrak{g}$, которые данную систему будут переводить в одну из l систем, которые входят в число m систем, но не входят в $(m-l)$ выбранных систем. А это означает, что группа $\mathfrak{g}$ не будет $(m-l)$ частично k-системно транзитивной.

Следствие. Если группа $\mathfrak{g}$ подстановок n символов является k-системно транзитивной, то она не является p-частично k-системно транзитивной, где $1 \leqslant p < \binom{n}{k}$.

Действительно, k-системно транзитивную группу можно считать m-частично k-системно транзитивной, когда $m=\binom{n}{k}$.

Из условия системной транзитивности следует, что m есть число всевозможных систем из n символов по k. Следовательно, для того, чтобы группа $\mathfrak{g}$ была p-частично k-системно транзитивной, мы должны из данных m систем выбрать p каких-либо систем. Но из теоремы 3 следует, что, если из $m=\binom{n}{k}$ систем мы выберем любые p систем, то группа $\mathfrak{g}$ не будет p-частично k-системно транзитивной.

§ 2. По аналогии с терминологией, данной Бомонтом и Питерсоном, дадим такое определение:

Группу $\mathfrak{g}$ подстановок n символов будем называть m-частично системно транзитивной, если она m-частично k-системно транзитивна для любого k, удовлетворяющего условию

$$1 \leqslant k \leqslant n-1.$$

Теорема 4. *Если группа $\mathfrak{g}$ есть прямое произведение двух системно транзитивных групп с различными символами, то $\mathfrak{g}$ есть частично системно транзитивная группа.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{g}_1$ -системно транзитивная группа n символов, и $\mathfrak{g}_2$ — системно транзитивная группа m других символов, и пусть группа $\mathfrak{g}$ есть прямое произведение групп $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$. Составим всевозможные системы $s_1, s_2, \ldots, s_t$ из k символов группы $\mathfrak{g}_1$, где $0 \leqslant k \leqslant n$, и l символов группы $\mathfrak{g}_2$, где $0 \leqslant l \leqslant m$.

$$s_1 = \left(a_1^{(1)}\, a_2^{(1)} \ldots a_k^{(1)}\, b_1^{(1)}\, b_2^{(1)} \ldots b_l^{(1)}\right),$$

$$s_2 = \left(a_1^{(2)}\, a_2^{(2)} \ldots a_k^{(2)}\, b_1^{(2)}\, b_2^{(2)} \ldots b_l^{(2)}\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$s_t = \left(a_1^{(t)}\, a_2^{(t)} \ldots a_k^{(t)}\, b_1^{(t)}\, b_2^{(t)} \ldots b_l^{(t)}\right).$$

Докажем, что система s_1 может быть переведена в любую из t систем с помощью подстановки, принадлежащей $\mathfrak{g}$, т. е.

$$s_1 G = s_j, \text{ где } G \in \mathfrak{g} \text{ и } j = 1, 2, \ldots, t.$$

Так как $\mathfrak{g}_1$, по условию,—системно транзитивная группа, то совокупность любых ее k символов может быть переведена в любую другую наперед заданную совокупность k символов с помощью подстановки $\tau_j \in \mathfrak{g}_1$, т. е. найдется такая подстановка $\tau_j \in \mathfrak{g}_1$, которая будет переводить систему символов $\left(a_1^{(1)}\, a_2^{(1)} \ldots a_k^{(1)}\right)$ в систему $\left(a_1^{(j)}\, a_2^{(j)} \ldots a_k^{(j)}\right)$, т. е.

$$\left(a_1^{(1)}\, a_2^{(1)} \ldots a_k^{(1)}\right)\tau_j = \left(a_1^{(j)}\, a_2^{(j)} \ldots a_k^{(j)}\right),$$

и так как $\mathfrak{g}_2$, по условию,—системно транзитивная группа, то любая совокупность l ее символов может быть переведена в любую другую наперед заданную совокупность символов с помощью подстановки $\sigma_j \in \mathfrak{g}_2$, т. е. найдется такая подстановка $\sigma_j \in \mathfrak{g}_2$, что

$$\left(b_1^{(1)}\, b_2^{(1)} \ldots b_l^{(1)}\right)\sigma_j = \left(b_1^{(j)}\, b_2^{(j)} \ldots b_l^{(j)}\right).$$

Подстановка $G_j = \tau_j \sigma_j$ будет принадлежать группе $\mathfrak{g}$ как прямое произведение подстановок, принадлежащих $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$, и будет переводить систему s_1 в систему s_j, т. е. $s_1 G_j = s_j$, т. к. σ_j будет оставлять без изменения символы группы $\mathfrak{g}_1$, а τ_j — оставлять без изменения символы группы $\mathfrak{g}_2$.

С другой стороны, система, состоящая из k символов группы $\mathfrak{g}_1$ и l символов группы $\mathfrak{g}_2$, не может быть переведена в произвольно выбранную систему $(k+l)$ символов, например, составленную из $(k+1)$ символов группы $\mathfrak{g}_1$ и $(l-1)$ символов группы $\mathfrak{g}_2$. Следовательно, группа $\mathfrak{g}$ является лишь частично $(k+l)$-системно транзитивной группой.

Так как число k может принимать значения от 0 до n и l от 0 до m, то $(k+l)$ может изменяться от 0 до $(n+m)$, т. е. группа $\mathfrak{g}$ будет частично p-системно транзитивна для любого p, где $1<p<<(n+m)$, т. е., по определению, группа $\mathfrak{g}$ является частично системно транзитивной группой.

§ 3. В этом параграфе мы рассматриваем геометрические примеры m-частично k-системно транзитивных групп.

1. Рассмотрим m тетраэдров T_i, расположенных таким образом, что вращение на угол $\frac{2\pi}{m}$ относительно некоторой оси переводит T_i в T_{i+1} $(i=1,\ldots m;\ T_{m+1}=T_1)$. Каждое вращение на угол $\frac{2\pi}{m}k$ $(k=0,\ldots,\ m-1)$ относительно той же оси можно представить подстановкой $4m$ символов (вершин тетраэдров); подстановки эти образуют некоторую группу $\mathfrak{g}$ порядка m, которая, как легко видеть, будет m-частично 4-системно транзитивна. В качестве m систем по 4 символа можно взять системы, содержащие все вершины одного тетраэдра.

2. Возьмем m тетраэдров и рассмотрим группу подстановок, переводящих один из тетраэдров в любой произвольно заданный тетраэдр. Если за символы группы $\mathfrak{g}$ принять вершины тетраэдров, то получим группу $4m$ символов. Пронумеруем вершины каждого тетраэдра: 1, 2, 3, 4. Рассмотрим три случая:

1) обозначим через $\mathfrak{g}_1$ группу, состоящую из подстановок, переводящих одни из тетраэдров в любой другой тетраэдр, причем так, что каждая вершина первого тетраэдра переходит в вершину другого тетраэдра с тем же номером. Порядок группы $\mathfrak{g}_1$ равен $m!$.

2) Обозначим через $\mathfrak{g}_2$ группу, состоящую из подстановок, переводящих один из тетраэдров в любой другой тетраэдр так, что вершина (1) первого тетраэдра переходит в вершину (1) другого тетраэдра. Порядок группы $\mathfrak{g}_2$ равен $m!\cdot 3$, т. к. один тетраэдр можно перевести в другой так, чтобы совпали верхние вершины, с помощью трех различных подстановок.

3) Обозначим через $\mathfrak{g}_3$ группу, состоящую из подстановок, переводящих один из тетраэдров в любой другой тетраэдр, причем совершенно произвольно. Порядок группы $\mathfrak{g}_3$ равен $m!\cdot 12$, т. е. $m!$ умножается на порядок группы тетраэдра.

Все эти группы $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{g}_3$ будут m-частично 4-системно транзитивны, т. к. совокупность 4-х вершин одного тетраэдра может быть переведена в совокупность 4-х вершин любого другого тетраэдра с помощью подстановки данной группы.

3. Возьмем m произвольных многогранников с l вершинами и рассмотрим группу подстановок, переводящих вершины одного из многогранников в вершины любого другого многогранника.

Пронумеруем вершины каждого многогранника: 1, 2. ..., l, и рассмотрим группу $\mathfrak{g}$, символами которой являются вершины многогранников и, которая состоит из подстановок, переводящих один из многогранников в любой другой многогранник, причем так, что p вершин первого многогранника переходят в p вершин другого многогранника с тем же номером, где $0 \leqslant p \leqslant l$. Порядок группы $\mathfrak{g}$ равен $m!\,(l-p)!$. Образуя совокупность m систем по l символов, каждая из которых будет содержать вершины одного многогранника, убеждаемся, что данная группа будет m-частично l-системно транзитивна.

4. Рассмотрим сферу с центром в начале координат, фиксируя некоторый диаметр ее AB, разделим его на $k+1$ равных частей и проведем через точки деления плоскости, перпендикулярные AB, получая, таким образом, на сфере k параллелей; затем проведя через AB плоскости под углами $\frac{\pi}{m}k$ $(k=0,\dots, m-1)$ к некоторой фиксированной плоскости, получим на сфере m меридианов. Пересечения меридианов с параллелями дадут $2mk$ точек. Принимая за элементы группы $\mathfrak{g}$, вращая вокруг оси AB на углы $\frac{\pi}{m}t$ $(0 \leqslant t \leqslant 2m-1)$, рассматриваемые как подстановки точек пересечений параллелей с меридианами, убеждаемся что $\mathfrak{g}$ m-частично $2k$-системно транзитивна.

Аналогичное построение, примененное к незамкнутой поверхности вращения, например параболоиду вращения, приводит к группе с бесконечным числом символов, которая будет m-частично ∞-системно транзитивна.

Московский химико-технологический институт
им. Д. И. Менделеева

Поступило
1 X 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. Beaumont, Peterson, Set-transitive permutation groups, Canadian Journal of Mathematics, VII. № 1, p.p. 35—42, 1955.