Б. М. Гагаев, Об одной проблеме Н. Н. Лузина, *Изв. вузов. Матем.*, 1957, номер 1, 99–101

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1957 МАТЕМАТИКА № 1

Б. М. Гагаев

ОБ ОДНОЙ ПРОБЛЕМЕ Н. Н. ЛУЗИНА

Н. Н. Лузин в своей диссертации „Интеграл и тригонометрический ряд" (стр. 52, изд. ГТТИ, 1951) поставил проблему отыскания всех ортогональных систем функций, производные которых вплоть до постоянных множителей образуют ту же систему. Как известно [1], [2], такими являются системы:

$$\{A_k \cos(2\pi n_k x + \alpha_k),\ B_k \sin(2\pi n_k x + \alpha_k)\}$$

и

$$\left\{A_k \cos\left[2\pi\left(n_k - \frac{1}{2}\right)x + \alpha_k\right],\ B_k \sin\left[2\pi\left(n_k - \frac{1}{2}\right)x + \alpha_k\right]\right\},$$

где $\{n_k\}$ — произвольная (конечная или бесконечная) последовательность целых чисел, A_k, B_k и α_k — произвольные постоянные.

Известно, что многочлены Эрмита $H_n(x)$ образуют ортогональную относительно веса e^{-x^2} и отрезка ортогональности $[-\infty, \infty]$ систему функций, причем $H_n'(x) = 2n H_{n-1}(x)$, т. е. $H_n(x)$ образуют ортогональную относительно веса e^{-x^2} систему функций, производные которых вплоть до постоянных множителей совпадают с ними же.

Отсюда возникает следующее обобщение проблемы Н. Н. Лузина.

Найти все веса $p(x)$, для которых существуют ортогональные системы функций, производные которых вплоть до постоянных множителей совпадают с ними же. Для каждого такого веса найти инвариантные, при дифференцировании вплоть до постоянных множителей, ортогональные системы.

Предположим, что вес $p(x)$ неотрицателен, дважды непрерывно дифференцируем, функции $\varphi_n(x)$ образуют ортогональную систему, содержащую единицу, дважды непрерывно дифференцируемы, первые производные которых образуют полную систему. Пусть $[a, b]$ отрезок ортогональности. Тогда [3], [4] функции $\varphi_n(x)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d\varphi_n(x)}{dx}\right] + \lambda_n p(x)\varphi_n(x) = 0 \tag{1}$$

и

$$p(b)\frac{d\varphi_n(b)}{dx} = p(a)\frac{d\varphi_n(a)}{dx} = 0.$$

Если бы $p(b)$ или $p(a)$ не были равны 0, то в соответствующей точке $\frac{d\varphi_n(x)}{dx}$ были бы равны 0, но тогда, так как все производные $\varphi_n(x)$ входят в систему, в этой точке все функции, кроме одной, равной тождественной единице, вместе со всеми производными были бы равны 0. В этом случае все $\varphi_n(x)$, кроме одной, были бы тождественно равны 0. Следовательно,

$$p(b) = p(a) = 0,$$

Производные $\frac{d\varphi_n(x)}{dx}$ также должны удовлетворять уравнению (1), а потому

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d^2\varphi_n(x)}{dx^2}\right]+\mu_n p(x)\frac{d\varphi_n(x)}{dx}=0.$$

Дифференцируя уравнение (1), получаем

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d^2\varphi_n(x)}{dx^2}\right]+\frac{dp(x)}{dx}\,\frac{d^2\varphi_n(x)}{dx^2}+\frac{d^2p(x)}{dx^2}\,\frac{d\varphi_n(x)}{dx}+$$

$$+\lambda_n p(x)\frac{d\varphi_n(x)}{dx}+\lambda_n\frac{dp(x)}{dx}\varphi_n(x)=0. \qquad (2)$$

Вставив в (2) значение $\varphi_n(x)$ из (1), получим

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d^2\varphi_n(x)}{dx^2}\right]+\mu_n p(x)\frac{d\varphi_n(x)}{dx}+$$

$$+\left[(\lambda_n-\mu_n)p(x)+\frac{d^2p(x)}{dx^2}-\frac{\left(\frac{dp(x)}{dx}\right)^2}{p(x)}\right]\frac{d\varphi_n(x)}{dx}=0.$$

Пусть $\varphi_n(x)$ не равна тождественно единице.

Значит,

$$\frac{d^2p(x)}{dx^2}-\frac{\left(\frac{dp(x)}{dx}\right)^2}{p(x)}=(\mu_n-\lambda_n)\,p(x).$$

Если

$$\mu_n-\lambda_n=0,$$

имеем

$$\frac{d^2p(x)}{dx^2}-\frac{\left(\frac{dp(x)}{dx}\right)^2}{p(x)}=0$$

или

$$\frac{\frac{d^2p(x)}{dx^2}}{\frac{dp(x)}{dx}}=\frac{\frac{dp(x)}{dx}}{p(x)},$$

Следовательно,

$$p(x)=\alpha e^{\beta x},$$

где α, β — некоторые постоянные. Но если $\alpha\neq 0$, $\alpha e^{\beta x}$ обращается в нуль лишь в одной точке, что противоречит предположению, что $p(x)=0$ на концах отрезка ортогональности, а потому $\mu_n\neq\lambda_n$. Следовательно,

$$\frac{d}{dx}\,\frac{\frac{dp(x)}{dx}}{p(x)}=C, \quad C=\mu_n-\lambda_n,$$

откуда

$$p(x)=\alpha e^{\beta x^2+\gamma x},$$

где α, β, γ — постоянные. Можно положить $\alpha=1$. В точках a и b

$e^{\beta x^2+\gamma x}$ должно обращаться в 0, что возможно лишь, если

$$a = -\infty, \quad b = \infty, \quad \beta < 0.$$

Линейным преобразованием независимого переменного x вес можно привести к виду e^{-x^2}.

Отыщем ортогональные относительно этого веса и инвариантные вплоть до постоянного множителя системы. Пусть $\varphi_n(x)$ — функции этой системы. Пусть $\varphi'_m(x) \neq \lambda \varphi_n(x)$, тогда

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \varphi_n(x) \varphi'_m(x)\, dx = -\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} [\varphi'_n(x) -$$

$$- 2x \varphi_n(x)] \varphi_m(x)\, dx.$$

Вследствие полноты системы $\varphi'_m(x)$ система $\varphi_m(x)$ также будет полной, а потому

$$\varphi'_n(x) - 2\varphi_n(x) = \mu \varphi_s(x), \tag{3}$$

где

$$\varphi'_s(x) = \alpha_n \varphi_n(x).$$

Дифференцируя (3), получаем

$$\varphi''_n(x) - 2x \varphi'_n(x) + \lambda_n \varphi(x) = 0.$$

Следовательно, система многочленов Эрмита является единственной ортогональной относительно веса e^{-x^2} и отрезка ортогональности $[-\infty, \infty]$, инвариантной вплоть до постоянных множителей при дифференцировании системой функций.

Этот результат был получен без предположения, что система содержит единицу.

Сделанные предположения о том, что система $\varphi_n(x)$ содержит 1, и $\frac{d\varphi_n(x)}{dx}$ образуют полную систему являются жесткими. Они исключают первоначальную проблему Н. Н. Лузина.

Желательно было бы решить обобщенную проблему без этих предположений, или, по крайней мере, без первого из них.

Казанский государственный университет
им. В. И. Ульянова-Ленина

Поступило
25 IX 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. B. Gagaeff, Sur f'unicite' du systéme de fonctions, orthogonales invariant relati, vement à fa dérivation, comptes Bendus de l' Academie des Saences de Paris, p.p. 222—224, 1929. 2. Б. В. Гнеденко, О единственности системы ортогональных функций, инвариантной относительно дифференцирования, ДАН, т. 14, стр. 159—162, 1937. 3. Б. М. Гагаев, О некоторых классах ортогональности функций, Изв. АН СССР, сер. мат., т. 10, стр. 197—206, 1946. 4. С. Н. Андрианов, О сохранении ортогональности при дифференцировании, Уч. Зап. КГУ, т. 110, кн. 7, стр. 23—30, 1950.