Г. Б. Гуревич, Алгебра дифференцирований произвольной стандартной нульалгебры, *Изв. вузов. Матем.*, 1957, номер 1, 103–120

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1957 МАТЕМАТИКА № 1

Г. Б. Гуревич

АЛГЕБРА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЙ ПРОИЗВОЛЬНОЙ СТАНДАРТНОЙ НУЛЬАЛГЕБРЫ

1. Линейная алгебра Ли векторного пространста $\sum_n$ размерности n называется нульалгеброй [1], если все аффиноры, ей принадлежащие, нильпотентны; в силу теорем Ли и Энгеля всякая нульалгебра является нильпотентной алгеброй Ли. Нульалгебра носит название стандартной [2], если её нормализатор совпадает с нормализатором некоторой полной нульалгебры {полная нульалгебра может быть определена как линейная алгебра Ли, ортогональное дополнение которой есть в то же время её нормализатор (см. [1]. р)}.

В предлагаемой работе для произвольной стандартной нульалгебры F найдены её алгебра дифференцирований $\mathfrak{A}$ (пп. 3—5), веса, весовые векторы, корни и корневые аффиноры алгебры $\mathfrak{A}$ (пп. 6, 7), и введено понятие её максимального весового идеала; применение того же понятия к любой алгебре Ли позволяет выделить новый класс весоустойчивых алгебр Ли (п. 9). В заключительном разделе работы (пп. 10—12) показано, что алгебра дифференцирований стандартной нульалгебры устанавливает нумерацию её весовых векторов.

Основное поле, над которым построено пространство $\sum_n$, предполагается алгебраически замкнутым и имеющим характеристику нуль.

Краткое изложение (без доказательств) результатов пп. 3—5 было дано в [4].

2. Строение стандартной нульалгебры F вполне определяется её шифром:

$$\begin{pmatrix} 0 & \begin{matrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_q \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_q \end{matrix} & n \end{pmatrix} \tag{1}$$

$\{i_0=j_0=0,\ i_{q+1}=j_{q+1}=n\}$, где $i_1, \ldots, j_q$ — натуральные числа, удовлетворяющие соотношениям

$$i_1<i_2<\ldots<i_q<n;\quad j_1<j_2<\ldots<j_q<n; \tag{2}$$

$$i_\lambda \leqslant j_\lambda,\quad \lambda=1,2,\ldots,q. \tag{3}$$

При некотором специальном выборе базиса B_0 пространства $\sum_n$ алгебра F является линейной оболочкой координатных диад e_{xy}*, для которых

$$x\leqslant i_q;\ y>j_\lambda \quad \text{при} \quad i_{\lambda-1}<x\leqslant i_\lambda,\ \lambda=1,2,\ldots,q. \tag{4}$$

* Координатная диада e_{xy} есть аффинор, в матрице которого на пересечении x-ой строки и y-ого столбца стоит 1, все же остальные её элементы равны нулю.

Базис B_0, обладающий указанным свойством, называется каноническим относительно алгебры F. В выборе канонического базиса имеется значительный произвол; ниже базис B_0 остаётся всё время зафиксированным. Для краткости пара индексов диады e_{xy} будет иногда обозначаться одной греческой буквой α (или β. γ).

В дальнейшем буква m будет всегда означать класс нильпотентности стандартной нульалгебры F; правило для его разыскания дано в [3], п. 5. Класс нильпотентности $m=1$, т. е. алгебра F—абелева тогда и только тогда, когда в шифре (1) $i_q \leqslant j_1$.

Порядок следования чисел шифра (1) по величине определяется заданием чисел s_μ, t_μ ($\mu=0, 1, 2, \ldots, k+1$): сперва идут s_1 верхних чисел шифра, затем t_1 нижних чисел, далее s_2-s_1 верхних, за ними t_2-t_1 нижних и т. д.; при этом, если $i_\lambda=j_\nu$, то число i_λ считается предшествующим числу j_ν. Принимая ещё во внимание (3), видим, что

$$s_0=0<s_1<s_2<\ldots<s_k<s_{k+1}=q; \qquad t_0=0<t_1<t_2<\ldots<t_k<t_{k+1}=q; \tag{5}$$

$$t_\mu \leqslant s_\mu, \quad \mu=1, 2, \ldots, k. \tag{6}$$

Мы положим, кроме того,

$$s=s_1; \quad t=t_k; \tag{7}$$

как легко видеть, числа s и t определены неравенствами

$$i_s \leqslant j_1 < i_{1+s}; \quad j_t < i_q \leqslant j_{1+t}. \tag{8}$$

Отметим, что $s \geqslant t$ при $m=2$, $s<t$ при $m \geqslant 3$.

Нормализатор $\mathfrak{S}$ стандартной нульалгебры F находится по следующему правилу {см. [3], п. 2}: расположим все различные между собой числа шифра (1) в порядке их возрастания:

$$r_0=0<r_1<r_2<\ldots<r_w<r_{w+1}=n; \tag{9}$$

базис нормализатора $\mathfrak{S}$ состоит из тех координатных диад e_{xy}, для которых

$$y>r_{\sigma-1} \text{ при } r_{\sigma-1}<x \leqslant r_\sigma, \quad \sigma=1, 2, \ldots, w+1. \tag{10}$$

В соответствии с (10) мы положим

$$g(x)=\sigma, \text{ если } r_{\sigma-1}<x \leqslant r_\sigma; \tag{11}$$

по (10) диада $e_{xy} \in \mathfrak{S}$ тогда и только тогда, когда

$$g(x) \leqslant g(y). \tag{12}$$

В дальнейшем нам понадобится ещё знать состав коммутанта $[F^2]$ и центра $\mathfrak{z}$ стандартной нульалгебры F с шифром (1). Если e_{xy}, $e_{yz} \in F$, то коммутатор $[e_{xy} e_{yz}]=e_{xz} \in [F^2]$. Предположим, что $i_{\lambda-1}<x \leqslant i_\lambda$, где

$$t_{\mu-1}<\lambda \leqslant t_\mu. \tag{13}$$

По (4) индекс $y>j_\lambda$, а в силу (13) $i_{s_\mu} \leqslant j_\lambda < i_{1+s_\mu}$. Вследствие этого из соотношения $e_{yz} \in F$ вытекает, что $z>j_{1+s_\mu}$. Отсюда заключаем, что коммутант $[F^2]$ также есть стандартная нульалгебра, имеющая шифр

$$\begin{pmatrix} 0 & i_{t_1} & i_{t_2} \ldots i_{t_k} & n \\ & j_{1+s_1} & j_{1+s_2} \ldots j_{1+s_k} & \end{pmatrix}; \quad s_1=s, \quad t_k=t. \tag{14}$$

Центр $\mathfrak{z}$ алгебры F является стандартной нульалгеброй с базисом, состоящим из тех диад $e_{xy} \in F$, для которых

$$x \leqslant j_1, \quad y > i_q \tag{15}$$

{ср. [3], теорема 8}.

При $m \geqslant 4$ алгебра $[F^2]$ не будет абелевой, так что $i_t > j_{1+s}$, и по (8) обе диады $f = e_{j_1 i_t}$ и $g = e_{i_t, 1+i_q}$ принадлежат алгебре F; следовательно, $[fg] = e_{j_1, 1+i_q} \in [F^2]$. Таким образом,

$$\text{при } m \geqslant 4 \ \mathfrak{z} \subset [F^2]. \tag{16}$$

С другой стороны, очевидно, что при $m = 2$ $[F^2] \subseteq \mathfrak{z}$. (17)

Если $m = 3$, то (17) не может быть, конечно, справедливым; однако, как легко проверить, соотношение (16) при $m = 3$ также может не иметь места.

Стандартная нульалгебра называется двойственной алгебре F и обозначается через DF, если числа n и q одинаковы для обеих алгебр, и, кроме того,

$$i'_\lambda + j_\mu = i_\lambda + j'_\mu = n \ \text{при} \ \mu = q + 1 - \lambda; \ \lambda = 1, 2, \ldots, q \tag{18}$$

(штрихом отмечены числа шифра алгебры DF). Стандартные нульалгебры F и DF изоморфны друг другу ([3], п. 7).

3. Обратимся теперь к разысканию алгебры дифференцирований $\mathfrak{A}$ стандартной нульалгебры F; тривиальный случай, когда $m = 1$, мы можем при этом оставить в стороне. Алгебра $\mathfrak{A}$ есть, как известно, множество тех аффиноров A, действующих на пространстве $\sum_{\mathfrak{F}}$ алгебры F, для которых справедливо соотношение:

$$A[fg] = [Af, g] + [f, Ag], \ f, \ g \in F. \tag{19}$$

Установим прежде всего связь, существующую между алгеброй $\mathfrak{A}$ и нормализатором $\mathfrak{S}$ алгебры F. Каждому аффинору $s \in \mathfrak{S}$ соответствует аффинор $S = [s$, определяемый на пространстве $\sum_{\mathfrak{F}}$ равенством

$$Sf = [sf], \ f \in F. \tag{20}$$

Тождество Якоби

$$[s[fg]] = [[sf]g] + [f[sg]]$$

сразу показывает, что для аффинора S выполнено (19); поэтому $S \in \mathfrak{A}$. Таким образом, все аффиноры

$$E_{xy} = [e_{xy}, \ g(x) \leqslant g(y) \tag{21}$$

входят в состав алгебры $\mathfrak{A}$ {см. (12)}.

Пусть, далее, векторы

$$e_{xy} \in F \text{ и не } \in [F^2], \ e_{\xi\eta} \in \mathfrak{z}; \tag{22}$$

тогда аффинор $C_{xy\xi\eta}$, заданный на пространстве $\sum_{\mathfrak{F}}$ соотношениями

$$C_{xy\xi\eta} e_{xy} = e_{\xi\eta}; \ C_{xy\xi\eta} e_\alpha = 0, \ \alpha \neq xy, \tag{23}$$

принадлежит, как нетрудно убедиться, алгебре $\mathfrak{A}$. Аффиноры (23) мы будем называть аффинорами категории (C).

Остается выяснить, имеются ли в алгебре $\mathfrak{A}$ аффиноры, не выражающиеся линейно через аффиноры (21) и (23). При этом целесообразно обозначить через $\mathfrak{z}^*$ множество тех диад e_{xy}, которые содержатся в центре $\mathfrak{z}$ и не принадлежат коммутанту $[F^2]$; в силу (16) при $m \geqslant 4$, множество $\mathfrak{z}^*$ — пустое.

4. С указанной выше целью введём в рассмотрение абелеву подалгебру Γ_0 алгебры $\mathfrak{A}$, состоящую из аффиноров

$$H^* = \sum_{x=1}^{n} \lambda_x E_{xx}, \tag{24}$$

где λ_x — произвольные скаляры. Все векторы $e_{xy} \in F$ будут для аффиноров алгебры Γ_0 весовыми (характеристическими). Вес вектора e_{xy}

$$\Delta^*_{xy} = \lambda_x - \lambda_y, \quad e_{xy} \in F; \tag{25}$$

все веса (25) — простые.

Базис алгебры $\mathfrak{A}$ мы выберем так, чтобы все аффиноры U базиса были корневыми относительно Γ_0; тогда каждый из них будет задаваться на пространстве $\sum_{\mathfrak{F}}$ равенствами вида

$$Ue_\beta = \theta_{\alpha\beta} e_\alpha, \tag{26}$$

где для всех e_α и для всех e_β разности

$$\pi = \Delta^*_\alpha - \Delta^*_\beta \tag{27}$$

будут одинаковы, если только $\theta_{\alpha\beta} \neq 0$. Далее мы различим три возможности.

А) Разности (27), равные нулю; для них равенства (26) имеют вид

$$Ue_{xy} = \theta_{xy} e_{xy}, \quad e_{xy} \in F; \tag{28}$$

так как $e_{xy} \in F$, то по (4) $x \leqslant i_q$, $y > j_1$. Введём обозначение

$$\theta_{xn} = \theta_x - \theta_n, \quad x = 1, 2, \ldots, i_q, \tag{29}$$

где θ_n — произвольно выбранный скаляр, и рассмотрим сперва те векторы $e_{xy} \in F$, для которых $j_1 < y \leqslant i_q$; тогда диада $e_{yn} \in F$ и не $\in \mathfrak{z}$. Из соотношения $[e_{xy} e_{yn}] = e_{xn}$ ввиду (19) следует:

$$[Ue_{xy}, e_{yn}] + [e_{xy}, Ue_{yn}] = Ue_{xn}, \tag{30}$$

откуда находим по (29), что

$$\theta_{xy} = \theta_x - \theta_y, \tag{31}$$

если только $e_{xy} \in F$ и $x < y \leqslant i_q$. При $x = 1$ равенства (31) и (29) дают

$$\theta_{1y} = \theta_1 - \theta_y, \tag{32}$$

когда $j_1 < y \leqslant i_q$, и когда $y = n$; далее, мы полагаем:

$$\theta_{1y} = \theta_1 - \theta_y, \quad y = 1 + i_q, 2 + i_q, \ldots, n - 1. \tag{33}$$

Если $x > j_1$, то $e_{1x} \in F$; используя соотношения $[e_{1x} e_{xy}] = e_{1y}$ и (19), мы убедимся, что (31) справедливо и тогда, когда $e_{xy} \in F$ и $j_1 < x < y$. Таким образом, формула (31) остается неустановленной лишь для случая, когда $x \leqslant j_1$, $y > i_q$, т. е. когда $e_{xy} \in \mathfrak{z}$. Если $e_{xy} \in \mathfrak{z} \cap [F^2]$, то

$$e_{xy} = [e_{xz} e_{zy}], \quad j_1 > z \leqslant i_q, \tag{34}$$

и используя снова (19), придём к выводу, что (31) имеет место и в этом последнем случае. Итак, равенство (31) верно для всех диад $e_{xy} \in F$ и не $\in \mathfrak{z}^*$. При $m \geqslant 4$ множество $\mathfrak{z}^*$ — пустое; поэтому аффинор

$$U = \sum \theta_x E_{xx} \tag{35}$$

и принадлежит, следовательно, подалгебре Γ_0.

Если же $m \leqslant 3$, то для $e_{xy} \in \mathfrak{z}^*$ в равенстве (28) скаляр θ_{xy} произволен, и аффинор U отличается от правой части равенства (35) на некоторую линейную комбинацию аффиноров

$$H_{xy} = C_{xyxy}, \; e_{xy} \in \mathfrak{z}^*. \tag{36}$$

В) Разности (27) вида

$$\pi = \lambda_x - \lambda_y, \; x \neq y. \tag{37}$$

Случай В) мы разобъём на три подслучая.

В 1)

$$x \leqslant j_1. \tag{38}$$

Выражение (37) представимо в виде разности двух весов только следующим образом:

$$\pi = \Lambda^*_{xz} - \Lambda^*_{yz} \tag{39}$$

при условии, что e_{xz}, $e_{yz} \in F$; последнее же даёт $y \leqslant i_q$, $z > j_1$. В силу этого {см. (15)}, если $e_{xy} \in \mathfrak{z}$, то $\lambda_x - \lambda_y$ не может быть разностью двух весов (25).

Итак, мы можем принять, что $y \leqslant i_q$; обозначив через z_0 наименьшее значение индекса z, при котором $e_{yz} \in F$, будем иметь для аффинора U:

$$Ue_{yz} = \theta_z e_{xz}, \; z \geqslant z_0; \; Ue_{vz} = \mathbf{0}, \; e_{vz} \in F, \; v \neq y; \tag{40}$$

если при некотором z вектор e_{xz} не $\in F$, то соответствующее $\theta_z = 0$.

При $z \leqslant i_q$ диада $e_{zn} \in F$; применив (19) к равенству $e_{yn} = [e_{yz} e_{zn}]$, мы найдём, что $Ue_{yn} = \theta_z e_{xn}$, вследствие чего $\theta_z = \theta$; таким образом,

$$Ue_{yz} = \theta e_{xz}, \tag{41}$$

если $z_0 \leqslant z \leqslant i_q$. Если же $z > i_q$, но $e_{yz} \in [F^2]$, то

$$e_{yz} = [e_{yv} e_{vz}], \quad y < v \leqslant i_q,$$

и, используя снова (19), мы убедимся, что (41) остаётся в силе и при этой возможности. В случае, когда $g(x) \leqslant g(y)$, вышеизложенное показывает, что аффинор U есть линейная комбинация аффинора E_{xy} и аффиноров вида C_{yzxz}. При

$$g(x) > g(y), \tag{42}$$

ввиду (38) для некоторого λ индекс $y \leqslant i_\gamma \leqslant x$; вектор e_{xz_0} не $\in F$, и $\theta_{z_0} = 0$. Поэтому в (41) скаляр $\theta = 0$, и аффинор U линейно выражается через аффиноры C_{yzxz}. Здесь, в силу (42), оба вектора e_{xz}, $e_{yz} \in \mathfrak{z}^*$, так что в подслучае В 1) соотношение (42) может встретиться только при $m \leqslant 3$.

B 1*)

$$y > i_q. \tag{43}$$

Этот подслучай двойственен подслучаю B 1) (т. е. может быть к нему сведен переходом от F к DF, см. конец п. 2); отсюда заключаем, что в условиях (43) аффинор U может быть выражен линейно через аффиноры E_{xy}, C_{zxzy}; соотношение (42) снова возможно лишь при $m \leqslant 3$.

B 2)

$$x > j_1, \; y \leqslant i_q. \tag{44}$$

Здесь для разности π возможно как представление (39), так и представление

$$\pi = \Delta^*_{vy} - \Delta^*_{vx}, \tag{45}$$

первое — при e_{xz}, $e_{yz} \in F$, второе — при e_{vy}, $e_{vx} \in F$, причём ввиду (44) оба вектора e_{xz}, e_{vy} не $\in \mathfrak{z}$. Для аффинора U имеем

$$\begin{gathered} Ue_{yz} = \theta_z e_{xz}, \; z \geqslant z_0; \; Ue_{vx} = \omega_v e_{vy}, \; v \leqslant v_0, \\ Ue_{vz} = \mathbf{0}, \; e_{vz} \in F, \; v \neq y, \; z \neq x, \end{gathered} \tag{46}$$

где z_0 — наименьшее значение z, при котором $e_{yz} \in F$, v_0 — наибольшее значение v, при котором $e_{vx} \in F$. Если e_{xz} не $\in F$, то $\theta_z = 0$, если же e_{vy} не $\in F$, то $\omega_v = 0$; в частности, $Ue_{yx} = 0$ при $e_{yx} \in F$. Из равенства $[e_{vx} e_{yz}] = -\delta_{vz} e_{yx}$ на основе (19) найдём, что $\theta_z = -\omega_v$; поэтому

$$\theta_z = \theta; \; \omega_v = -\theta. \tag{47}$$

При $g(x) \leqslant g(y)$ по (46) и (47) аффинор $U = \theta E_{xy}$. При $g(x) > g(y)$ между числами y и x содержится одно из чисел i_λ, j_μ шифра (1). В случае, когда $y \geqslant i_\lambda \leqslant x$, рассуждая, как в B 1), приходим к выводу, что в (47) скаляр $\theta = 0$, иначе говоря, что аффинор $U = 0$; последнее же противоречит тому, что U принадлежит к базису алгебры $\mathfrak{A}$. Двойственным образом убеждаемся в несовместимости соотношения $y \leqslant j_\mu \leqslant x$ с тем, что $U \neq \mathbf{0}$.

5. Остаётся рассмотреть ещё ту возможность, когда

C) разность (27) имеет вид

$$\pi = \lambda_y + \lambda_z - \lambda_x - \lambda_v, \; x \neq y, \; x \neq z, \; y \neq v, \; z \neq v; \tag{48}$$

не нарушая общности можем считать, что

$$y \leqslant z; \; x \leqslant v. \tag{49}$$

Выражение (48) представимо в виде разности двух весов тремя способами:

$$\pi = \Delta^*_{yv} - \Delta^*_{xz}; \tag{50}$$

$$\pi = \Delta^*_{zv} - \Delta^*_{xy}; \tag{51}$$

$$\pi = \Delta^*_{yx} - \Delta^*_{vz}. \tag{52}$$

Равенство (50) возможно, если e_{yv}, $e_{xz} \in F$, для чего необходимо, чтобы $y < v$, $x < z$; аналогичные замечания надлежит сделать и для (51), (52). По соответствующей причине представление $\pi = \Delta^*_{zx} - \Delta^*_{vy}$ ввиду (49) не может иметь места, а равенства (51) и (52) не могут осуществляться одновременно.

Соотношение (51) справедливо только в том случае, когда e_{zv}, $e_{xy} \in F$, а тогда, так как $y \leqslant z$, векторы $e_{yv}, e_{xz} \in F$, и равенство (50) также оказывается возможным; аналогичное соображение можно высказать и для (52). Итак, при $U \neq 0$ могут иметь место либо оба представления (50) и (51), либо оба представления (50) и (52), либо только одно представление (50). В соответствии с этим нам надлежит рассмотреть нижеследующие подслучаи.

С 1) Для разности (48) возможно лишь представление (50) и, кроме того, $y \neq z$, $x \neq v$.

Тогда e_{xz}, $e_{yv} \in F$, $z > j_1$, и аффинор U задаётся равенствами:

$$Ue_{xz} = \theta e_{yv}; \quad Ue_\alpha = 0, \ e_\alpha \in F, \ \alpha \neq xz. \tag{53}$$

В этом подслучае вектор e_{xz} не может принадлежать коммутанту $[F^2]$: если $e_{xz} \in [F^2]$, то $e_{xz} = [e_{x\eta} e_{\eta z}]$, $x < \eta < z$, и (19), в силу (53), даёт $U = 0$. Следовательно, при $e_{yv} \in \mathfrak{z}$ аффинор U относится к категории (С).

Если же e_{yv} не $\in \mathfrak{z}$, то или $y > j_1$ или $v \leqslant i_q$; из этих двух двойственных друг другу возможностей достаточно рассмотреть первую, при которой $e_{1y} \in F$. Используя соотношения $[e_{1y} e_{xz}] = 0$ и (19), снова найдём, что $U = 0$. Итак, в подслучае С1) аффинор U лишь скалярным множителем отличается от одного из аффиноров (23).

С2) Для разности (48) возможны оба представления (50) и (51) и, кроме того,

$$\text{или } i_1 > 1, \ \text{ или } i_1 = 1, \ x > 1, \tag{54}$$

$$\text{или } v \leqslant i_q. \tag{55}$$

В С2) включается и та возможность, когда $y = z$, и оба представления (50), (51) совпадают.

В случае С2) все векторы e_{xz}, e_{yv}, e_{xy}, $e_{zv} \in F$, вследствие чего

$$x \leqslant i_q; \ j_1 < y \leqslant z \leqslant i_q; \ v > j_1; \tag{56}$$

для аффинора U здесь имеем

$$\begin{gathered} Ue_{xz} = \theta_1 e_{yv}; \quad Ue_{xy} = \theta_2 e_{zv}; \\ Ue_\alpha = 0; \ e_\alpha \in F, \ \alpha \neq xy, \ \alpha \neq xz. \end{gathered} \tag{57}$$

В условиях (54) всегда найдётся такое число $\xi \leqslant i_1$, что $\xi \neq x$; применив (19) к равенствам

$$[e_{xz} e_{\xi y}] = 0, \ [e_{xy} e_{\xi z}] = 0, \ e_{\xi y}, \ e_{\xi z} \in F,$$

мы найдём, что $\theta_1 = \theta_2 = 0$, т. е., что аффинор $U = 0$. В случае (55) к тому же выводу придём, используя равенства

$$[e_{xz} e_{vn}] = 0, \ [e_{xy} e_{vn}] = 0, \ e_{vn} \in F.$$

Таким образом, подслучай С2) — невозможен.

С3) Для разности (48) возможны оба представления (50) и (51) (включая и случай, когда $y = z$) и, кроме того,

$$i_1 = 1, \ x = 1, \ v > i_q. \tag{58}$$

Если $j_2 < y < z$, то можно повторить рассуждения, применённые к возможностям (54), взяв $\xi = 2$. Если же $j_1 < y \leqslant j_2 < z$, то, основываясь на соотношениях

$$[e_{1y} e_{1z}] = 0, \ [e_{1y} e_{2z}] = \delta_{2y} e_{1z}, \tag{59}$$

снова убедимся, что $U = 0$. Пусть, наконец, $j_1 < y \leqslant z \leqslant j_2$; тогда первое из равенств (59) покажет, что в (57) числа $\theta_1 = \theta_2 = \theta$, так что $U = \theta D_{1yzv}$, где

$$\begin{gathered} D_{1yzv} e_{1y} = e_{zv}; \quad D_{1yzv} e_{1z} = e_{yv}; \\ D_{1yzv} e_\alpha = 0, \ e_\alpha \in F, \ \alpha \neq 1y, \ \alpha \neq 1z \end{gathered} \tag{60}$$

$\{e_{zv} \in F$, откуда, так как $y \leqslant z$, следует, что и $e_{yv} \in F\}$. Нетрудно убедиться, что в указанных условиях аффинор $D_{1yzv} \in \mathfrak{A}$; для этого достаточно проверить для него выполнения условия (19) в применении к коммутаторам $[e_{1y} e_{1z}] = 0$,

$$[e_{1y} e_{\xi\eta}] = \delta_{y\xi} e_{1\eta}; \ [e_{1z} e_{\xi\eta}] = \delta_{\xi z} e_{1\eta}; \ \xi \leqslant i_q, \ \eta \neq y, \ \eta \neq z.$$

C2*) Для разности (48) возможны оба представления (50) и (52) (включая и случай, когда $x = v$).

Подслучай C2*) двойственен к C2) и C3). Поэтому он может представиться лишь тогда, когда $j_q = n-1$, $z = n$, $y \leqslant j_1$, $i_{q-1} < x \leqslant v \leqslant i_q$, $e_{yx} \in F$, причем аффинор $U = \theta D_{nvxy}$, где

$$D_{nvxy} e_{xn} = e_{yv}; \ D_{nvxy} e_{vn} = e_{yx};$$
$$D_{nvxy} e_\alpha = 0, \ e_\alpha \in F, \ \alpha \neq xn, \ \alpha \neq vn. \tag{61}$$

Отметим, что в (60), (61) векторы e_{1y}, e_{1z}, e_{xn}, e_{vn} не $\in [F^2]$ $\{$см. (14)$\}$.

Резюмируем результаты пп. 4, 5.

а) Пусть F — стандартная нульалгебра с шифром (1), *класс нильпотентности которой $m \geqslant 2$. Её алгебра дифференцирований $\mathfrak{A}$ при $i_1 > 1$, $j_q < n-1$ является линейной оболочкой всех аффиноров E_{xy}, у которых x, $y = 1, 2, \ldots, n$, $g(x) \leqslant g(y)$* $\{$см. (11)$\}$ *и всех аффиноров $C_{xy\xi\eta}$* $\{$см. (23)$\}$, *для которых $e_{xy} \in F$ и не $\in [F^2]$, а $e_{\xi\eta} \in \mathfrak{z}$; каждый из аффиноров E_{xy} задаётся на пространстве $\Sigma_{\mathfrak{F}}$ алгебры F равенствами*

$$E_{xy} e_{yz} = e_{xz}; \ E_{xy} e_{vx} = -e_{vy};$$
$$E_{xy} e_{vz} = 0, \ v \neq y, \ z \neq x \tag{62}$$

(алгебра F предполагается отнесенной к каноническому относительно неё базису пространства Σ_n, $\mathfrak{z}$ — **центр алгебры** F).

Если $i_1 = 1$, то в базис алгебры $\mathfrak{A}$ кроме линейно независимых из числа аффиноров E_{xy}, $C_{xy\xi\eta}$, входят ещё и аффиноры D_{1yzv} $\{$см. (60)$\}$, *для которых*

$$j_1 < y \leqslant z \leqslant j_2, \ v > i_q, \ e_{zv} \in F. \tag{63}$$

Если же $j_q = n-1$, то в базисе алгебры $\mathfrak{A}$ фигурируют также и аффиноры D_{nvxy} $\{$см. (61)$\}$, *где*

$$i_{q-1} < x \leqslant v \leqslant i_q, \ y \leqslant j_1, \ e_{yx} \in F. \tag{64}$$

6. Как нетрудно показать, аффинор (24) будет регулярным для алгебры $\mathfrak{A}$, если только для него все разности $\lambda_x - \lambda_y$ различны между собой; такой аффинор и послужит нам для построения картановской подалгебры Γ алгебры $\mathfrak{A}$.

В силу результатов п. 4, сл. А), при $m \geqslant 4$ подалгебра Γ совпадает с Γ_0 и состоит, таким образом, из аффиноров

$$H = \sum_{x=1}^{n} \lambda_x H_x, \tag{65}$$

где $H_x = E_{xx}$ $\{$см. (62)$\}$, а λ_x — произвольные скаляры. При $m \leqslant 3$ в базис алгебры Γ включатся ещё аффиноры (36), и вместо (65) мы будем иметь

$$H = \sum_{x=1}^{n} \lambda_x H_x + \sum \lambda_{xy} H_{xy}, \tag{66}$$

где скаляры λ_x, λ_{xy} — произвольны, а знак второй суммы распространён на те пары индексов xy, для которых $e_{xy} \in \mathfrak{z}^*$. В обоих случаях картановская подалгебра Γ алгебры $\mathfrak{A}$ — абелева.

Если

$$m=2, \quad i_t < x \leqslant j_1 \text{ или } i_q < x \leqslant j_{1+s}, \tag{67}$$

то, как легко проверить, принимая во внимание (8), (4), (14) и (15), векторы e_{xy}, e_{zx}, принадлежащие алгебре F, будут все содержаться в $\mathfrak{z}^*$, вследствие чего H_x есть линейная комбинация аффиноров (36). Поэтому при $m=2$ мы примем, что те λ_x, индекс x которых удовлетворяет условиям (67), все равны нулю.

Весовыми векторами (относительно Γ) снова будут все диады e_{xy}:

$$He_{xy} = \Delta_{xy} e_{xy}; \tag{68}$$

их веса Δ_{xy} все — простые и выражаются формулами:

$$\Delta_{xy} = \lambda_x - \lambda_y, \quad e_{xy} \text{ не } \in \mathfrak{z}^* \tag{69}$$

{ср. (25)} и

$$\Delta_{xy} = \lambda_x - \lambda_y + \lambda_{xy}, \quad e_{xy} \in \mathfrak{z}^*. \tag{70}$$

Разыскав среди аффиноров (65) или (66) те, для которых веса Δ_{xy} всех векторов e_{xy} равны нулю, мы убедимся, что между H_x, H_{xy} имеется одна и только одна линейная зависимость. При $m \geqslant 3$ она имеет вид

$$\sum_{x=1}^{n} H_x = 0, \tag{71}$$

при $m=2$ указанная зависимость такова:

$$\sum H_x - \sum\nolimits_1 H_{xy} + \sum\nolimits_2 H_{xy} = 0, \tag{72}$$

где знак $\sum$ первой суммы распространяется на те значения x, для которых не выполнено условие (67), знак $\sum_1$ — на те H_{xy}, у которых $x \leqslant i_t$, знак $\sum_2$ — на те H_{xy}, у которых $y > j_{1+s}$.

Благодаря наличию линейной зависимости (71) или (72) в равенствах (65) или (66) один из скаляров λ_x {при $m=2$, не удовлетворяющих (67)} следует положить равным нулю.

7. Перейдём теперь к разысканию корневых аффиноров алгебры $\mathfrak{A}$, отвечающих её корням, отличным от нуля. Если P — такой аффинор, то равенства, задающие его на пространстве $\sum_{\mathfrak{F}}$, имеют такой вид:

$$Pb = a, \tag{73}$$

где a, b — весовые векторы алгебры $\mathfrak{A}$, принадлежащие соответственно весам Δ_a, Δ_b; для тех из равенств (73), правая часть которых отлична от нуля, разности $\Delta_a - \Delta_b$ должны быть все одинаковы. Так как у алгебры $\mathfrak{A}$ все веса — простые, то

$$[HP] = \pi P, \tag{74}$$

где $\pi = \Delta_a - \Delta_b$ есть корень алгебры $\mathfrak{A}$, отвечающий аффинору P.

Отсюда сразу видим, что все аффиноры категории (C) $\{$см. (23)$\}$ будут корневыми; аффинор $C_{xy\xi\eta}$ принадлежит корню

$$\gamma_{xy\xi\eta} = \Lambda_{\xi\eta} - \Lambda_{xy} \tag{75}$$

($\gamma_{xy\xi\eta} \neq \mathbf{0}$, если пары индексов xy, $\xi\eta$ различны).

При $m \geqslant 4$ корневыми аффинорами, соответствующими отличным от нуля корням, будут также и те из аффиноров E_{xy} $\{$см. (62)$\}$ для которых $x \neq y$; их мы обозначим через A_{xy} и назовём **аффинорами категории** (A). Отвечающий аффинору A_{xy} корень есть

$$\alpha_{xy} = \lambda_x - \lambda_y, \ x \neq y, \ g(x) \leqslant g(y). \tag{76}$$

При $m \leqslant 3$ вследствие появления векторов $e_{xy} \in \mathfrak{z}^*$ $\{$см. (70)$\}$ некоторые из аффиноров A_{xy} не будут совпадать с E_{xy}: если $e_{yz} \in \mathfrak{z}^*$ или $e_{xz} \in \mathfrak{z}^*$, то первая из формул (62) заменяется на

$$A_{xy}\, e_{yz} = \mathbf{0}; \tag{77}$$

если $e_{vx} \in \mathfrak{z}^*$ или $e_{vy} \in \mathfrak{z}^*$, то вместо второй из формул (62) мы имеем

$$A_{xy}\, e_{vx} = \mathbf{0}; \tag{78}$$

в этих случаях A_{xy} отличается от соответствующего аффинора E_{xy} на линейную комбинацию аффиноров категории (C). Формула (76) остаётся в силе и при $m \leqslant 3$.

В число аффиноров категории (A) не включаются при любом m также и те E_{xy}, которые выражаются линейно через аффиноры категории (C); это будет, как легко убедиться, $\{$см. (4), (8), (14), (15)$\}$ в следующих и только в следующих двух случаях: когда

$$x \leqslant j_1, \ y > i_t \ \text{или} \ x \leqslant j_{1+s}, \ y > i_q. \tag{79}$$

Если хоть одно из чисел i_1, $n - j_q$ равно 1, то имеются ещё корневые аффиноры категории ($\boldsymbol{D}$) $\{$см. (60), (61)$\}$; аффинору D_{1yzv} отвечает корень

$$\delta_{1yzv} = \lambda_y + \lambda_z - \lambda_1 - \lambda_v, \tag{80}$$

аффинору D_{nvxy} — корень

$$\delta_{nvxy} = \lambda_y + \lambda_n - \lambda_x - \lambda_v. \tag{81}$$

Зная корни алгебры $\mathfrak{A}$, мы легко найдём её **центр** $\mathfrak{z}_a$, состоящий из тех аффиноров $H_0 \in \Gamma$, для которых равны нулю значения всех корней. Если мы примем во внимание указанные выше (п. 6) значения индекса x, при которых скаляр λ_x всегда равен нулю, то равенства $\alpha_{1y} = \alpha_{xn} = 0$, а также равенства $\gamma_{yz1z} = 0$ при $y > j_1$ и $\gamma_{vxvn} = 0$ при $x \leqslant i_q$ $\{$см. (75) и (76)$\}$ покажут нам, что для аффинора H_0 все $\lambda_x = 0$, $x = 1, 2, \ldots, n$. При $m \leqslant 3$ надо ещё воспользоваться соотношениями $\gamma_{xy\xi\eta} = 0$, где $e_{xy} \in \mathfrak{z}^*$, $e_{\xi\eta} \in [F^2] \cap \mathfrak{z}$; тогда мы убедимся, что и все $\lambda_{xy} = 0$, так что $H_0 = 0$. Таким образом, $\mathfrak{z}_a = 0$ (т. е. состоит из одного лишь нулевого аффинора).

При $m = 1$ алгебра $\mathfrak{A}$ есть полная линейная алгебра пространства $\Sigma_{\mathfrak{F}}$ и, следовательно, её центр $\mathfrak{z}_a$ состоит из всех скалярных аффиноров. Итак,

β) *центр алгебры дифференцирований стандартной нульалгебры F равен нулю, если алгебра F — неабелева, и отличен от нуля, если она — абелева.*

Выясним далее, какие из корневых аффиноров алгебры $\mathfrak{A}$ войдут в состав алгебры внутренних дифференцирований (присоединённой алгебры) $F^{\text{пр}}$ алгебры F; их мы будем обозначать через B_{xy}. Аффинор $B_{xy}=[e_{xy}$, где вектор $e_{xy}\in F$, но не $\in\mathfrak{z}$; осложнения, связанные с формулами (77), (78) здесь возникнуть не могут, так как $B_{xy}f=0$ при $f\in\mathfrak{z}$, а для f не $\in\mathfrak{z}$ вектор $B_{xy}f=[e_{xy}f]\in[F^2]$. Отсюда ясно, что в случае, когда условия (79) не выполнены, т. е. когда

$$\text{или } x\leqslant j_1,\ y\leqslant i_t,\ \text{или } x>j_{1+s},\ y>i_q,\ \text{или } x>j_1,\ y\leqslant i_q, \tag{82}$$

аффинор

$$B_{xy}=A_{xy},\ e_{xy}\in F. \tag{83}$$

При $m=2$ случай (83), как легко видеть, невозможен.

Если же условия (79) имеют место, то аффинор B_{xy} линейно выражается через аффиноры категории (C), а именно при $x\leqslant j_1$. $i_t<y\leqslant i_q$

$$B_{xy}=\sum_{z=1+j_g}^{n}C_{yzxz},\ e_{xy}\in F, \tag{84}$$

где число g определено условием $i_{g-1}<y\leqslant i_g$; при тех значениях z, на которые распространяется знак суммирования в (84), диада $e_{yz}\in F^*$, а $e_{xz}\in\mathfrak{z}$ (через F^* обозначено множество тех $e_{xy}\in F$, которые не $\in[F^2]+\mathfrak{z}$).

Если же $j_1<x\leqslant j_{1+s}$, $y>i_q$, то

$$B_{xy}=-\sum_{z=1}^{i_g}C_{zxzy},\ e_{xy}\in F, \tag{85}$$

где g задаётся соотношениями $j_g<x\leqslant j_{1+g}$; для тех z, которые фигурируют в правой части (85), $e_{zx}\in F^*$, $e_{zy}\in\mathfrak{z}$.

8. Корневой аффинор линейной алгебры Ли $\mathfrak{B}$ мы будем называть весовым, если соответствующий ему корень равен одному из весов алгебры $\mathfrak{B}$.

Найдём весовые аффиноры алгебры дифференцирований $\mathfrak{A}$ стандартной нульалгебры F. В силу формул (69), (70), (80) и (81) среди корневых аффиноров, принадлежащих подалгебре Γ или к категории (**D**), весовых аффиноров нет; в категории (*A*) весовыми будут аффиноры B_{xy} $\{$см. (83), (82)$\}$ и только они. Остаётся рассмотреть весовые аффиноры категории (*C*); по замечанию п. 4 $\{$сл. В 1).$\}$ соответствующий вес

$$\Lambda_{xy}=\lambda_x-\lambda_y, \tag{86}$$

причём,

$$e_{xy}\in F \text{ и не } \in\mathfrak{z}. \tag{87}$$

Случай, когда $x>j_1$, $y\leqslant i_q$ исключается $\{$п. 4, сл. В 2)$\}$; если $x\leqslant j_1$, то весу (86) отвечают аффиноры C_{yzxz}, если же $y>i_q$ — аффиноры C_{vxvy} $\{$ср. п. 4, сл. В 1) и В 1*)$\}$. При первой из этих возможностей вектор e_{yz} не $\in\mathfrak{z}^*$ (так как по (87) $y>j_1$); по аналогичной причине во втором случае e_{vy} не $\in\mathfrak{z}^*$. Итак, γ) *среди корневых аффиноров алгебры дифференцирований* $\mathfrak{A}$ *стандартной нульалгебры* F *с шифром* (1) *следующие и только следующие будут весовыми: аффиноры* B_{xy}, *определяемые формулой* (83) *в условиях* (82), *аффиноры*

$$\sum \theta_z C_{yzxz}, \text{ где } x \leqslant j_1, \; e_{xy} \in F, \; e_{yz} \in F^*, \; e_{xz} \in \mathfrak{z} \tag{88}$$

и

$$\sum \theta_z C_{zxzy}, \text{ где } y > i_q, \; e_{xy} \in F, \; e_{zx} \in F^*, \; e_{zy} \in \mathfrak{z}. \tag{89}$$

Каждый из аффиноров (83), (88), (89) принадлежит к весу (86); если

$$i_{g-1} < y \leqslant i_g, \; t_{\mu-1} < g \leqslant t_\mu, \; g \leqslant q, \tag{90}$$

то в (88) индексы z подчинёны условиям

$$j_g < z \leqslant j_{1+s_\mu}, \; z > i_q; \tag{91}$$

если же

$$j_g < x \leqslant j_{1+g}, \; s_\mu < g \leqslant s_{1+\mu}, \; g \geqslant 1, \tag{92}$$

то в (89)

$$i_{t_\mu} < z \leqslant i_g, \; z \leqslant j_1. \tag{93}$$

В силу предложения γ), аффиноры (84) и (85) также являются весовыми.

9. Идеал линейной алгебры Ли мы назовём **весовым**, если он допускает базис, составленный из весовых аффиноров алгебры. Разыщем **максимальный весовой идеал** $\mathfrak{K}_0$ алгебры дифференцирований $\mathfrak{A}$ стандартной нульалгебры F; в силу результатов п. 8

$$F^{\text{пр}} \subseteq \mathfrak{K}_0 \tag{94}$$

($F^{\text{пр}}$ есть идеал алгебры $\mathfrak{A}$).

Обратимся теперь к аффинорам (88) и (89). Если для аффинора $E_{\xi\eta}$ справедливо неравенство $i_q < \xi < \eta$ {откуда следует, что $g(\xi) \leqslant g(\eta)$}, то

$$[E_{\xi\eta} C_{y\xi x\xi}] = - C_{y\xi x\eta}; \; [E_{\xi\eta} C_{y\eta x\eta}] = C_{y\xi x\eta}; \tag{95}$$

$$[E_{\xi\eta} C_{yzxz}] = 0, \; z \neq \xi, \; z \neq \eta$$

{см. (23) и (62); $x < y \leqslant i_q$}. Предположим сперва, что $i_t > y \leqslant i_q$, тогда для аффинора C, выражающегося формулой (88), в (90) число $\mu = k+1$, $j_g \geqslant j_{1+t} \geqslant i_q$, и по (91) индекс z под знаком суммы пробегает значения от $1 + j_g$ до n. При $j_g < \xi < \eta$ формула (95) даст

$$[E_{\xi\eta} C] = (\theta_\eta - \theta_\xi) C_{y\xi x\eta}.$$

Так как аффинор $C_{y\xi x\eta}$ не является весовым {см. γ)}, то аффинор C принадлежит к $\mathfrak{K}_0$ только тогда, когда все $\theta_z = \theta$, т. е. {см. (84)}, когда $C = \theta B_{xy} \in F^{\text{пр}}$.

Если же $y \leqslant i_t$, то в (90), (91) число $\mu \leqslant k$, $j_{1+s_\mu} \leqslant j_q < n$, $j_g \leqslant j_t < i_q$, и в (88) под знаком суммы индекс z принимает все значения от $1 + i_q$ до j_{1+s_μ}. Выбрав числа ξ, η так, что $i_q < \xi \leqslant j_{1+s_\mu} < \eta$, мы по (95) получим

$$[E_{\xi\eta} C] = -\theta_\xi C_{y\xi x\eta};$$

следовательно, если $C \in \mathfrak{K}_0$, то все $\theta_z = 0$, т. е. $C = 0$.

Случай, когда аффинор C выражен формулой (89), двойственен рассмотренному; поэтому всякий такой содержащийся в $\mathfrak{K}_0$ аффинор также принадлежит к $F^{\text{пр}}$. Таким образом {см. (94)}, при $m \geqslant 2$:

$$\mathfrak{K}_0 = F^{\text{пр}}. \tag{96}$$

При $m=1$, как легко видеть, $\mathfrak{K}_0 = F^{\text{пр}} = \mathbf{0}$. Итак,

δ) максимальный весовой идеал $\mathfrak{K}_0$ алгебры дифференцирований $\mathfrak{A}$ любой стандартной нульалгебры F совпадает с присоединенной алгеброй $F^{\text{пр}}$ алгебры F.

Указанный результат позволяет выделить новый класс весоустойчивых алгебр Ли. Пусть $\mathfrak{B}$ — алгебра Ли, $\mathfrak{B}^{\text{пр}}$ — её присоединённая алгебра, $\mathfrak{A}$ — алгебра дифференцирований алгебры $\mathfrak{B}$, и $\mathfrak{z}_a$ — центр алгебры $\mathfrak{A}$. Как выше (пп. 8 и 9), определим весовые аффиноры алгебры $\mathfrak{A}$ и её весовые идеалы; однако, здесь мы дополнительно потребуем, чтобы среди векторов, принадлежащих тому весу, которому отвечает весовой аффинор, хотя бы один не содержался в центре алгебры $\mathfrak{B}$. Пусть, далее $\mathfrak{K}_0$ — максимальный весовой идеал алгебры $\mathfrak{A}$; при этом всегда $\mathfrak{B}^{\text{пр}} \subseteq \mathfrak{K}_0$. Если же $\mathfrak{K}_0 \subseteq \mathfrak{B}^{\text{пр}} + \mathfrak{z}_a$, то алгебру Ли $\mathfrak{B}$ мы назовем весоустойчивой.

По теореме δ) все стандартные нульалгебры — весоустойчивы; легко видеть, что тем же свойством обладают и все полупростые алгебры Ли. Среди нильпотентных алгебр Ли имеются как весоустойчивые алгебры, не изоморфные стандартной нульалгебре, так и невесоустойчивые.

10. Предположим, что стандартная нульалгебра F задана абстрактно своим тензором структуры при произвольном базисе её пространства $\sum_{\mathfrak{F}}$. Тогда алгебра дифференцирований $\mathfrak{A}$ алгебры F определит все свои весовые векторы, лишь скалярными множителями отличающиеся от векторов e_{xy} (п. 6). Покажем, что та же алгебра $\mathfrak{A}$ позволяет (при $m \geqslant 2$) для каждого из векторов e_{xy} установить (с некоторой неизбежной степенью произвола) значения его индексов x и y,

Прежде всего отметим те изменения нумерации векторов e_{xy}, которые остаются возможными после фиксирования картановской подалгебры Γ алгебры $\mathfrak{A}$; их мы будем называть допустимыми изменениями нумерации. Для любой стандартной нульалгебры F таковыми будут:

a) переход от F к DF (см. конец п. 2), что влечёт за собой изменение индексов x, y по правилу:

$$x \to x',\ y \to y',\ x'+y = x+y' = n+1; \tag{97}$$

b) перестановка индексов x_1 и x_2, для которых $g(x_1) = g(x_2)$ {см. (11)}.

c) перестановка двух любых векторов $e_{xy} \in \mathfrak{z}^*$ (при $m \leqslant 3$).

Ещё одно изменение нумерации *d*) допустимо в особом случае, когда в шифре (1) алгебры

$$i_{q-1} \leqslant j_2,\ i_1 = n - j_q = 1. \tag{98}$$

Векторы e_{1x}, $e_{xn} \in F^*$, для которых $i_{q-1} < x \leqslant j_2$, объединим в пары в соответствии с соотношением $[e_{1x} e_{xn}] \neq 0$. В указанных условиях допустима замена $\overline{e}_{1x} = e_{xn}$, $\overline{e}_{xn} = e_{1x}$. Особый случай (98) будет охарактеризован ниже инвариантно {см. (108)}; он возможен лишь тогда, когда

$$m \leqslant 3,\ t_1 = 1,\ s_2 = q-1, \text{ или } m=2,\ t=1,\ s \leqslant q-1, \text{ или } m=2,\ t>1,\ s=q-1. \tag{99}$$

С каждым из весовых векторов $e_{\xi\eta} \in [F^2]$ свяжем три подпространства пространства $\sum_{\mathfrak{F}}$. Через $P_{\xi\eta}$ мы обозначим линейную оболочку всех векторов $Ae_{\xi\eta}$, где A — произвольный аффинор алгебры $\mathfrak{A}$, через $h_{\xi\eta}$ — размерность подпространства $P_{\xi\eta}$. В силу теоремы a)

$$P_{\xi\eta} = \{e_{\xi y},\ e_{x\eta}\},\ g(x) \leqslant g(\xi),\ g(y) \geqslant g(\eta) \tag{100}$$

($\{\ \}$ — знак линейной оболочки); если $g(\xi) = a$, $g(\eta) = b + 1$, то

$$h_{\xi\eta} = n - 1 + r_a - r_b \tag{101}$$

$\{$см. (9), (11)$\}$; следовательно, наименьшее значение числа $h_{\xi\eta}$ равно

$$i_1 + n - j_q - 1. \tag{102}$$

Подпространство $Q_{\xi\eta}$ есть линейная оболочка тех весовых векторов $f \in [F^2]$, для которых возможно соотношение $Uf = e_{\xi\eta}$, где U — некоторый корневой аффинор алгебры $\mathfrak{A}$. Основываясь на результатах п. 7, видим, что

$$\begin{gathered} Q_{\xi\eta} = \{e_{\xi y},\ e_{x\eta}\},\ e_{\xi y},\ e_{\xi\eta} \in [F^2], \\ g(x) \geqslant (g\,\xi),\quad g(y) \leqslant g(\eta). \end{gathered} \tag{103}$$

Наконец, подпространство $R_{\xi\eta}$ является линейной оболочкой тех весовых векторов $f \in F$, которые удовлетворяют условию:

$$[fg] = \theta e_{\xi\eta},\ g \in F,\ \theta \neq 0; \tag{104}$$

очевидно, что

$$R_{\xi\eta} = \{e_{\xi x},\ e_{x\eta}\},\ e_{\xi x},\ e_{x\eta} \in F \text{ и не } \in \mathfrak{z}. \tag{105}$$

Подпространства $P_{\xi\eta}$, $Q_{\xi\eta}$ позволят нам на инвариантном пути выбрать векторы e_{1n}, $e_{1,\,n-1}$ и e_{2n}. В качестве вектора e_{1n} мы можем, используя допустимое изменение нумерации b), взять любой весовой вектор $\theta e_{\xi\eta}$, $\theta \neq 0$, для которого число $h_{\xi\eta}$ имеет наименьшее значение (102). По (100), (103) и (11), (14)

$$P_{1n} = \{e_{1y},\ e_{xn}\},\ x \leqslant i_1,\ y > j_q; \tag{106}$$

$$Q_{1n} = \{e_{1y},\ e_{xn}\},\ x \leqslant i_t,\ y > j_{1+s}. \tag{107}$$

В особом случае (98)

$$h_{1n} = 1;\ Q_{1n} = [F^2]; \tag{108}$$

условиями (108) особый случай (98) характеризуется инвариантно.

Если не выполнено хоть одно из соотношений (108), то в Q_{1n} имеются весовые векторы, не коллинеарные вектору e_{1n}; любой из таких векторов $\theta e_{\xi\eta}$, у которого число $h_{\xi\eta}$ имеет наименьшее возможное для указанных векторов значение, мы можем принять за $e_{1,\,n-1}$ $\{$в силу допустимых изменений нумерации a) и b)$\}$; при этом

$$Q_{1,n-1} = \{e_{1y},\ e_{x,\,n-1}\},\ x \leqslant i_t,\ g(j_{1+1}) < g(y) \leqslant g(n-1). \tag{109}$$

Оставляя снова в стороне особый случай (108), мы можем утверждать, что

$$Q_{1,\,n-1} + P_{1n} \neq Q_{1n}; \tag{110}$$

в качестве вектора e_{2n} может быть взят любой весовой вектор

$\theta\, e_{\xi\eta} \in Q_{1n}$ и не $\in Q_{1,n-1}$, у которого число $h_{\xi\eta}$ имеет наименьшее из возможных для таких векторов значение; тогда

$$Q_{2n} = \{ e_{2y},\ e_{xn} \},\ g(2) \leqslant g(x) \leqslant g(i_t),\ y > j_{1+s}. \tag{111}$$

Роли векторов $e_{1,n-1}$ и e_{2n} можно обменять между собой {допустимое изменение нумерации a)}; для определённости мы будем придерживаться введенных выше обозначений.

В особом случае (108) может оказаться невозможным выбор вектора $e_{2n} \in [F^2]$ или даже обоих векторов $e_{1,n-1}$, $e_2 \in [F^2]$.

11. В алгебре $\mathfrak{A}$ регулярными будут, как нетрудно показать, те аффиноры U_0, у которых все характеристические числа различны между собой; аффиноры алгебры $\mathfrak{A}$, принадлежащие относительно U_0 к корню 0, не отличимы друг от друга инвариантным образом. Поэтому мы примем, что в картановской подалгебре Γ алгебры $\mathfrak{A}$, построенной с помощью аффинора U_0, базис выбран произвольно. Тогда общий аффинор алгебры Γ запишется так:

$$H = \mu_1 P_1 + \mu_2 P_2 + \ldots + \mu_g P_g,$$

где g — размерность алгебры $\Gamma, P_1, P_2, \ldots, P_g$ — аффиноры базиса, а $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_g$ — произвольные скаляры; λ_x и λ_{xy}, через которые согласно (69), (70) выражаются веса алгебры $\mathfrak{A}$, представятся как линейные формы от $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_g$. Покажем, что зная алгебру $\mathfrak{A}$, можно найти все формы λ_x.

Выбор вектора e_{1n} определяет его вес $\lambda_1 - \lambda_n$; одна из форм λ_x, например, λ_n, может быть задана произвольно {см. (71), (72)}. Таким образом, формы λ_1 и λ_n найдены.

Введём в рассмотрение ещё два определяемых алгеброй подпространства:

$$\begin{aligned} W_1 &= (Q_{1,n-1} + P_{1n}) \cap Q_{1n} = \{ e_{1y} \},\ y > j_{1+s};\\ W_2 &= (Q_{2n} + P_{1n}) \cap Q_{1n} = \{ e_{xn} \},\ x \leqslant i_t. \end{aligned} \tag{112}$$

Пусть весовые векторы $e_{x_1 n}, e_{x_2 n} \in W_n$; тогда $g(x_1) = g(x_2)$, если в алгебре $\mathfrak{A}$ существуют такие корневые аффиноры U_1, U_2, что $U_1 e_{x_1 n} = e_{x_2 n}$, $U_2 e_{x_2 n} = e_{x_1 n}$, если же аффинор U_1 имеется в алгебре $\mathfrak{A}$, но аффинора U_2 в ней нет, то $g(x_1) > g(x_2)$. Для весовых векторов $e_{xn} \in W_n$ их индексы $x = 1, 2, \ldots, i_t$ устанавливаем так, чтобы при $g(x_1) > g(x_2)$ также и $x_1 > x_2$; для векторов e_{xn} с одинаковыми $g(x)$ нумерацию выбираем произвольно {допустимое изменение нумерации b)}. Так как вес вектора e_{xn} есть $\lambda_x - \lambda_n$, а форма λ_n уже найдена, то нам станут известны все формы

$$\lambda_x,\ x = 1, 2, \ldots, i_t \tag{113}$$

вместе со значениями их индексов.

Аналогичным образом убеждаемся, что по весам векторов подпространства W_1 найдутся все формы

$$\lambda_x,\ x = 1 + j_{1+s},\ 2 + j_{1+s}, \ldots, n; \tag{114}$$

при этом для каждой из форм (114) будет известно значение разности $n - x$; число же n останется пока неизвестным.

В случае, когда $m \geqslant 4$, среди форм (114) имеются совпадающие с некоторыми из форм (113) {так как $i_t > j_{1+s}$, см. п. 2, стр. 105}; число n определится как количество всех различных между собой форм (113), (114). Выписав в порядке возрастания их номеров формы

(113), а за ними в таком же порядке отличные от них формы (114), мы получим все формы

$$\lambda_x,\ x = 1, 2, \ldots, n, \tag{115}$$

причём для каждой из них окажется известным значение её индекса x.

Если же $m \leqslant 3$, а особый случай (108) не имеет места, то

$$i_t \leqslant j_{1+s},\quad i_{q-1} > j_2. \tag{116}$$

Здесь надо использовать подпространства $R_{\xi\eta}$; по (105)

$$R_{1n} = \{e_{1x},\ e_{xn}\},\ j_1 < x \leqslant i_q;$$

$$R_{1,\,n-1} = \{e_{1x},\ e_{x,\,n-1}\},\ j_1 < x \leqslant x_0;\ R_{2n} = \{e_{2x},\ e_{xn}\},\ y_0 < x \leqslant i_q,$$

где

$$\begin{gathered} x_0 = i_q \text{ при } n - j_q > 1,\ x_0 = i_{q-1} \text{ при } n - j_q = 1; \\ y_0 = j_1 \text{ при } i_1 > 1,\ y_0 = j_2 \text{ при } i_1 = 1, \end{gathered} \tag{117}$$

так что

$$\begin{gathered} W_1^* = R_{1,\,n-1} \cap R_{1n} = \{e_{1x}\},\ j_1 < x \leqslant x_0; \\ W_2^* = R_{2n} \cap R_{1n} = \{e_{xn}\}\, y_0 < x \leqslant i_q. \end{gathered} \tag{118}$$

Так как всегда $x_0 > y_0$ {см. (116), (117)}, то по подпространствам W_1^* и W_n^* мы сможем, как выше, разыскать все формы

$$\lambda_x,\ x = 1 + j_1,\ 2 + j_1, \ldots, i_q, \tag{119}$$

причём для каждой из форм (119) нам станет известно значение разности $x - j_1$.

При $m = 3$ число $s < t$, вследствие чего {см. (8)}

$$j_1 < i_{1+s} \leqslant i_t;\ i_q > j_t \geqslant j_{1+s}; \tag{120}$$

поэтому среди форм (113), (119), равно как и среди форм (114), (119), имеются одинаковые; j_1 определится как число форм (113), отличных от всех форм (119), n — как число всех различных между собой форм (113), (114), (119). Поступая далее снова как в случае, когда $m \leqslant 4$, найдём все формы (115), причём для каждой из них будет известен её индекс x.

При $m = 2$ формами (113), (119) и (114) исчерпываются все отличные от нуля формы λ_x (п. 6).

Можно показать, что и в особом случае (108) могут быть найдены все формы λ_x вместе с их индексами; при этом необходимо воспользоваться допустимым изменением нумерации $\mathfrak{d}$).

12. Итак, при $m \geqslant 3$ тензор структуры алгебры F позволяет разыскать все формы (115) вместе со значениями их индексов; вследствие этого для любого из весовых векторов $e_{xy} \in F$ (и не $\in \mathfrak{z}^*$ при $m = 3$) по его весу (69) найдётся номер x той строки и номер y того столбца, которым он принадлежит.

Расположив векторы e_{xy} по строкам и столбцам в соответствии с их индексами, мы по размерам ступеней ломаной, ограничивающей полученную фигуру слева и снизу, найдём (с точностью до перехода от F к DF) все числа $i_1, \ldots, j_q$ шифра (1) алгебры F, а также и их индексы.

При $m=3$ в указанной фигуре после расстановки всех e_{xy} не $\in \mathfrak{z}^*$ может остаться свободное пространство; в нём следует {в каком угодно порядке в силу допустимого изменения нумерации c)} расположить весовые векторы $e_{xy} \in \mathfrak{z}^*$, что и определит для каждого из них значения индексов x, y.

При $m=2$ число $s \geqslant t$, так что

$$i_t \leqslant i_s \leqslant j_1, \quad j_{1+s} \geqslant j_{1+t} \geqslant i_q; \tag{121}$$

для форм (113) известны индексы x, для форм (119), (114) — соответственно разности $x-j_1$, $n-x$. Поэтому веса (69) определят для каждого из весовых векторов $e_{xy} \in F^*$ при $x \leqslant i_t$ — значения индекса x и разности $y-j_1$, а при $y > j_{1+s}$ — значения разностей $x-j_1$ и $n-y$; для векторов $e_{xy} \in [F^2]$ станут известными индекс x и разность $n-y$.

Расположив векторы $e_{xy} \in F^*$ с $x \leqslant i_t$ по строкам и столбцам, а затем сделав то же для векторов $e_{xy} \in F^*$, у которых $y > j_{1+s}$, мы найдём все числа

$$t, q-s; \tag{122}$$

$$i_x, \; i_x - j_1, \; x = 1, 2, \ldots, t; \tag{123}$$

$$i_x - j_1, \; n - j_x, \; x = 1+s, 2+s, \ldots, q, \tag{124}$$

причём для чисел (123) будут известны значения их индексов x, а для чисел (124) — значения разностей $q-x$.

После этого формула для размерности центра {см. [3], (135)} позволит нам найти (с значительной степенью произвола) числа n, j_1 и q, равно как и все недостающие числа из шифра (1), затем, так же, как при $m=3$, и значения индексов x, y для весовых векторов $e_{xy} \in \mathfrak{z}^*$. Итак,

ε) *если стандартная нульалгебра F задана абстрактно своим тензором структуры при любом базисе её пространства $\sum_{\mathfrak{F}}$, то, могут быть найдены значения индексов x, y для всех весовых векторов θe_{xy} алгебры дифференцирований $\mathfrak{A}$ алгебры F. При этом имеется неизбежная, указанная выше* (пп. 10, 12), *степень произвола.*

Мы убедились также, что тензор структуры стандартной нульалгебры F задаёт (с точностью до перехода от F к DF) при $m \geqslant 3$ все числа её шифра (1) вместе с их индексами, а при $m=2$ — все числа (122), (123) и (124). Тем самым установлены необходимые условия изоморфизма двух стандартных нульалгебр, т. е. дано новое доказательство теоремы [3], $\varkappa$) в основной её части.

Можно показать, кроме того, что в условиях предложения ε) весовые векторы θe_{xy} могут быть так пронормированы, что правила для их коммутирования станут такими же, как и для координатных диад e_{xy}.

Московский педагогический институт
им. В. И. Ленина

Поступило
30 IX 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Б. Гуревич, Некоторые арифметические инварианты матричных алгебр Ли и критерий их полной приводимости, Изв. АН СССР, сер. мат., 13. стр. 403—416, 1949. 2. Г. Б. Гуревич, Стандартные алгебры Ли, Мат. сб., т. 35 (77), стр. 437—460, 1954. 3. Г. Б. Гуревич, Условия изоморфизма стандартных нульалгебр, Тр. Моск. мат. об-ва, т. 6, стр. 165—193, 1957. 4. Г. Б. Гуревич, Алгебра группы автоморфизмов произвольной стандартной нульалгебры, Тр. III мат. съезда, т. 1, стр. 21—22, 1956.