Н. Н. Красовский, О гладком сечении дисперсивной динамической системы, *Изв. вузов. Матем.*, 1957, номер 1, 167–173

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ
1957 МАТЕМАТИКА № 1

Н. Н. Красовский

О ГЛАДКОМ СЕЧЕНИИ ДИСПЕРСИВНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \dots, x_n) \quad (i = 1, \dots, n), \tag{1}$$

где функции X_i определены в области G евклидова пространства E_n и в каждой ограниченной области $H_\mu (\overline{H}_\mu \subset G)$ удовлетворяют условиям *

$$|X_i(x_1'', \dots, x_n'') - X_i(x_1', \dots, x_n')| \leqslant L_\mu \| x'' - x' \|, \tag{2}$$

$$(x \equiv \{x_1, \dots, x_n\}, \ \|x\| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}, \ L_\mu = \mathrm{const}, \ i = 1, \dots, n).$$

При этих условиях точка $x_0 \equiv \{x_{10}, \dots, x_{n0}\} \in G$ определяет единственное решение $x_i(x_{10}, \dots, x_{n0}, t)$ $(i = 1, \dots, n)$ (или сокращенно — $x(x_0, t)$), определенное в G при $t_1 < t < t_2$ $(t_1 < 0, \ 0 < t_2)$. Совокупность траекторий $x(x_0, t)$, заполняющих G, образует *динамическую систему* ([1], стр. 26), если все траектории определены в G при $-\infty < t < \infty$, что и будем предполагать ниже. Введем обозначения:

1) $U(x_0, \delta)$ — множество точек $\|x - x_0\| < \delta$.

2) $f[H, t]$ — множество точек $x(x_0, t)$ при $x_0 \in H$.

Динамическая система называется *дисперсивной* ([1] стр. 429), [2], если для любых точек x_0', x_0'' из G существуют числа $\delta' > 0$, $\delta'' > 0$ и T такие, что $U(x_0'', \delta'') \cap f[U(x_0', \delta'), t]$ пусто при всех $|t| \geqslant T$. В теории дисперсивных систем, имеющей в частности приложения в задачах устойчивости по Ляпунову [3, 2], одно из центральных мест занимает проблема существования гладкого сечения. Многообразие $S \subset G$ называется *сечением класса* C^σ $(\sigma = 1, 2, \dots)$ системы (1) [2], если: 1) S есть поверхность $v(x) = \mathrm{const}$, где v — функция класса C^σ в G **, 2) каждая траектория $x(x_0, t)$ при $x_0 \in G$ пересекает S в одной и только одной точке, 3) на S выполняется неравенство

$$\frac{dv(x(x_0, t))}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{dv}{dx_i} X_i \neq 0. \tag{3}$$

В работе [2] доказано, что дисперсивная система (1) имеет сечение S класса C^σ, если X_i имеют класс C^σ. В заметке [4] дано упрощенное доказательство этого факта. Цель настоящей заметки — доказать существование сколь угодно гладкого сечения, предполагая

* Символом $\overline{H}$ будем обозначать замкнутую область H, символами $H_1 \cup H_2$, $H_1 \cap H_2$, $H_1 \setminus H_2$ — сумму, пересечение и разность множеств H_1, H_2 — соответственно.

** Т. е. v имеет в области G непрерывные частные производные до σ-го порядка включительно.

лишь, что функции X_i удовлетворяют условиям (2). * (термин „сколь угодно гладкое сечение“ будем понимать в том смысле, что функция v имеет в области G производные всех порядков).

Теорема. *Дисперсивная динамическая система* (1), *где функции X_i удовлетворяют условиям* (2), *имеет сколь угодно гладкое сечение S.*

Докажем сначала одну лемму. Пусть дуга $x(x_0, t) \in H_\mu$ при $0 \leqslant t \leqslant T$ (H_μ — ограничена и $\overline{H}_\mu \subset G$).

Лемма. *Для любого $\gamma > 0$ существует функция $V(x_1, \dots, x_n)$, непрерывная в G вместе со всеми частными производными и удовлетворяющая условиям*

$$V(x) = 0 \text{ при } \|x - x(x_0, t)\| > \gamma \ (0 \leqslant t \leqslant T), \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{dV}{dx_i} X_i > 0 \\ &\text{при} \\ &\|x - x(x_0, t)\| < \alpha \ (0 \leqslant t \leqslant T) \text{ и } x \text{ не } \in U[x(x_0, T), \gamma] \\ &(\alpha = \alpha(x_0) = \text{const}, \ \alpha > 0), \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

$$\frac{dV}{dt} \geqslant 0 \text{ при } x \in \{G \setminus U[x(x_0, T), \gamma]\}. \tag{6}$$

(Символ dV/dt в (5) и (6) означает полную производную по времени $dV[x(x_0, t)]/dt$ вдоль траектории $x(x_0, t)$).

Доказательство леммы. Дисперсивная система (1) не имеет, очевидно, особых точек и периодических решений, кроме того, величины dx_i/dt ($i = 1, \dots, n$) в области H_μ равномерно ограничены, поэтому можно указать числа $\tau > 0$ и $\eta > 0$ ($\eta < \gamma$) такие, что $x(x_0, t) \in H_\mu$ при $-\tau \leqslant t \leqslant T + \tau$; $x(x_0, t) \in U[x(x_0, T), \gamma]$ при $T \leqslant t \leqslant T + \tau$; множество точек $\{\|x - x(x_0, t)\| < \eta$ при $T \leqslant t \leqslant T + \tau\}$ не пересекается с множеством точек $\{\|x - x(x_0, t)\| < \eta$ при $-\tau \leqslant t \leqslant T$ и x не $\in U[x(x_0, T), \gamma]\}$ **.

Рассмотрим многочлены $y(t) = \{y_1(t), \dots, y_n(t)\}$, удовлетворяющие неравенствам

$$\|x(x_0, t) - y(t)\| < \varepsilon, \left\| \frac{dx(x_0, t)}{dt} - \frac{dy}{dt} \right\| < \varepsilon \tag{7}$$

при $-\tau \leqslant t \leqslant T + \tau$, где оценка числа $\varepsilon > 0$ будет дана ниже.

Определим вспомогательную функцию $w(x, t)$ формулами

$$\begin{aligned} w(x, t) = (t + \tau)^p \exp\{[(t + \tau)(t - T - \tau)]^{-1}\} \times \\ \times \exp\{[\|x - y(t)\|^2 \exp(-2Qt) - \beta^2]^{-1}\} \end{aligned} \tag{8}$$

при

$$-\tau < t < T + \tau, \ \|x - y(t)\| < \beta \exp Qt, \tag{9}$$

$$w(x, t) = 0 \text{ при остальных } x \text{ и } t. \tag{10}$$

---

* В работе [2] система (1) рассматривается с общей точки зрения на многообразии класса C^r. Метод доказательства, предложенный ниже, можно распространить и на этот случай.

** Будем полагать еще $\eta > 0$ столь малым, что η — окрестность дуги $x(x_0, t)$ ($-\tau \leqslant t \leqslant T + \tau$) лежит в H_μ, а η — окрестность $x(x_0, t)$ ($T \leqslant t \leqslant T + \tau$) — в $U[x(x_0, T), \gamma]$.

Здесь

$$Q = 8nL_{\mu}, \quad \beta = \frac{\eta}{2}\exp\left[-Q(T+\tau)\right],$$

p — целое число, удовлетворяющее неравенству

$$p > \frac{(T+\tau)^2}{\tau^2\left(\frac{T}{2}+\tau\right)^2} + 8Q\left(1+\frac{n}{\beta}\right)\exp^2 2Q(T+\tau). \tag{11}$$

Отметим свойства $w(x, t)$, полагая, что в условиях (7) $\varepsilon < \eta/2$. a) Функция w непрерывна и имеет непрерывные частные производные всех порядков при всех x и t. Действительно, в области (9) все функции, входящие в (8), этим свойством обладают, но и на границе области (9) эти функции также бесконечно дифференцируемы, так как функция

$$\varphi(r) = \exp\{[(r-a)(r-b)]^{-1}\}\ (a<r<b), \quad \varphi(r)=0\ (r\leqslant a,\ b\leqslant r)$$

непрерывно дифференцируема по r произвольное число раз, что проверяется раскрытием неопределенностей при $r=a+0$ и $r=b-0$. b) $w=0$ при $\|x-x(x_0, t)\|>\gamma$ $(0\leqslant t\leqslant T)$, что следует из (7), (8) и (9) по выбору β, η, ε. c) Производная $dw/dt = \sum(\partial w/\partial x_i)X_i + \partial w/\partial t$ удовлетворяет условиям

$$\frac{dw}{dt} > 0 \text{ при } \begin{pmatrix}\|x-x(x_0, t)\| < \alpha \quad (-\tau < t < T) \\ \text{и } x \text{ не } \in U[x(x_0, T), \gamma],\ \alpha > 0 - \text{const}\end{pmatrix}, \tag{12}$$

$$\frac{dw}{dt} \geqslant 0 \text{ при } x \text{ не } \in \{G \setminus U[x(x_0, T), \gamma]\}, \tag{13}$$

если только ε в условиях (7) выбрано достаточно малым. Докажем это. В области (8) имеем

$$\frac{dw}{dt} = w\left\{\frac{p}{t+\tau} + \frac{T-2t}{(t+\tau)^2(t-T-\tau)^2} + \right.$$

$$+2\left[Q\|x-y(t)\|^2 - \sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i(t))\left(\frac{dx_i}{dt} - \frac{dy_i(t)}{dt}\right)\exp(-2Qt)\times\right.$$

$$\left.\times\left[\|x-y(t)\|^2\exp(-2Qt) - \beta^2\right]^{-2}\right\}. \tag{14}$$

Из неравенства (11) следует, что

$$\frac{dw}{dt} > \frac{pw}{2(t+\tau)} \text{ при } -\tau < t < T,\ \|x-y(t)\| \leqslant \frac{\beta}{2}\exp Qt.$$

Следовательно, если кроме $\varepsilon < \eta/2$ потребовать

$$\varepsilon < \frac{\beta}{4}\exp(-2Q\tau),$$

то при

$$\alpha = \frac{\beta}{4}\exp(-2Q\tau)$$

условие (13) будет выполнено.

Рассмотрим выражение

$$\psi = Q\|x-y(t)\|^2 - \sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i(t))\left(\frac{dx_i}{dt} - \frac{dy_i(t)}{dt}\right)$$

при

$$-\tau < t < T, \frac{\beta}{2}\exp Qt < \|x - y(t)\| < \beta \exp Qt. \tag{15}$$

Имеем оценку

$$\left|\frac{dx_i}{dt} - \frac{dy_i}{dt}\right| \leqslant \left|\frac{dx_i}{dt} - \frac{dx_i(x_0, t)}{dt}\right| + \left|\frac{dx_i(x_0, t)}{dt} - \frac{dy_i}{dt}\right| \leqslant$$

$$\leqslant |X_i(x) - X_i(x(x_0, t))| + \varepsilon \leqslant L_\mu \|x - x(x_0, t)\| + \varepsilon \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon + L_\mu[\varepsilon + \beta \exp Qt].$$

Следовательно, в области (15) имеем оценку

$$\psi \geqslant \frac{Q\beta^2}{4}\exp 2Qt - n\beta \exp Qt(\varepsilon + L_\mu \varepsilon + L_\mu \beta \exp Qt). \tag{16}$$

Из неравенства (16) по выбору Q следует, что при $\varepsilon > 0$ достаточно малом и в области (15) будет $dw/dt > 0$, но последнее и означает, что выполняется условие (13). Итак, свойства a), b), c) функции w доказаны.

Перейдем теперь к построению функции $V(x)$. Рассмотрим последовательность функций

$$z_l(x, t) = \frac{1}{l}\sum_{m=-\infty}^{m=\infty} w\left(x, t - \frac{m\vartheta}{l}\right) \quad (l = 1, 2, \ldots) \tag{17}$$

($\vartheta > 0$ — фиксированное число, $l = 1, 2, \ldots$). Очевидно, для функций z_l сохраняются свойства a), b), c) функций w. Более того, частные производные функций z_l ограничены равностепенно по l (каждая производная — своей постоянной). Действительно, если

$$|\partial^\sigma w/\partial x_1^{\sigma_1} \ldots \partial x_n^{\sigma_n} \partial t^{\sigma_{n+1}}| < N_\sigma, \text{ то } |\partial^\sigma z_l/\partial x_1^{\sigma_1} \ldots \partial x_n^{\sigma_n} \partial t^{\sigma_{n+1}}| < K_\sigma N_\sigma,$$

где K_σ не зависит от l, так как, хотя с ростом l число слагаемых в (17), отличных от нуля в данной точке, растет пропорционально l, сумма приобретает множитель $1/l$. Аналогичным рассуждением проверяется для каждой точки x из области (12) существование постоянной $\Delta(x) > 0$ такой, что в этой точке

$$dz_l/dt > \Delta(x) \text{ при всех } l > l(x). \tag{18}$$

Кроме того, функции $z_l(x, t)$ являются очевидно периодическими функциями t периода ϑ/l. Функции z_l и $\partial^\sigma z_l/\partial x_1^{\sigma_1} \ldots \partial x_n^{\sigma_n} \partial t^{\sigma_{n+1}}$ образуют семейства $M(\sigma_1, \ldots, \sigma_{n+1})$ равномерно ограниченных и равностепенно непрерывных функций. В каждой подпоследовательности семейства $M(\sigma_1, \ldots, \sigma_{n+1})$ есть поэтому равномерно сходящаяся подпоследовательность. Следовательно, можно выделить диагональную подпоследовательность $z_k (k = l_\nu, \nu = 1, 2, \ldots)$ такую, что функции z_k и все их производные будут сходиться равномерно к некоторой функции V и ее производным *. Покажем, что функция V удовлетворяет условиям леммы. Действительно, так как период функций z_k, по времени равный ϑ/k, стремится к нулю с ростом k, то функция V не зависит от t, т. е. $V = V(x_1, \ldots, x_n)$. Из равномерной сходимости z_k и $\partial^\sigma z_k/\partial x_1^{\sigma_1} \ldots \partial x_n^{\sigma_n} \partial t^{\sigma_{n+1}}$ следует непрерывность и бесконечная дифференцируемость V. Выполнение условий (4), (5), (6) следует из заме-

* Естественно, что мера равномерности сходимости для каждой последовательности $\partial^\sigma z_k/\partial x_1^{\sigma_1} \ldots \partial x_n^{\sigma_n} \partial t^{\sigma_{n+1}}$ может оказаться своей.

чания, что V и dV/dt есть пределы функций z_k и dz_k/dt, которые в силу свойств a), b), c) этим условиям удовлетворяют, причем в силу (18) условие c) выполняется в каждой точке x из (12) равномерно по k, при всех достаточно больших k. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Пусть $\{G_m\}$ $(m=1, 2, \ldots)$ — последовательность ограниченных областей, удовлетворяющих условиям: 1) $\overline{G}_m \subset G$, 2) $\overline{G}_m \subset G_{m+1}$, 3) $\lim G_m = G$ при $m \to \infty$, 4) для каждого $k=1, 2, \ldots$ существует число T_k такое, что $f[\overline{G}_{2k}, t] \subset G_{2k+1}$ при $0 \leqslant t \leqslant T_k$ и $f[\overline{G}_{2k}, t] \cap \overline{G}_{2k}$ пусто при $t \geqslant T_k$ (последнее возможно именно вследствие *дисперсивности* системы.)

Пусть $x_0 \in \overline{G}_1$. По лемме существует функция $V(x)$, удовлетворяющая условиям (4) — (6), где $T = T_1$, и число $\gamma > 0$ можно считать столь малым, что $U(x_0, \gamma) \subset G_2$, $\{$множество $\|x - x(x_0, t)\| \leqslant \gamma$ при $0 \leqslant t \leqslant T_1\} \subset \{f[G_2, t]$ при $0 < t < T_1\} \subset G_3$ и

$$U[x(x_0, T_1), \gamma] \subset f[G_2, T_1] \subset G_3.$$

Вследствие компактности $\overline{G}_1$ существует конечное множество точек из $\overline{G}_1$ (которые обозначим $x_0^{(q)}$ $(q=1, \ldots, N_1)$), удовлетворяющих перечисленным выше условиям, и таких, что

$$\overline{G}_1 \subset \bigcup_q U[x_0^{(q)}, \alpha_q] \subset G_2,$$

$$\{f[\overline{G}_1, t] \text{ при } 0 \leqslant t \leqslant T_1\} \subset \{\text{множество } \|x - x(x_0^{(q)}, t)\| < \alpha_q \text{ при } q = 1, \ldots, N_1,\ 0 \leqslant t \leqslant T_1\},$$

где $\alpha_q = \alpha(x_0^{(q)})$ — число из условий (5) леммы для функции $V_q(x)$, соответствующей точке $x_0^{(q)}$. Тогда функция

$$\omega_1(x) = \sum_{q=1}^{N_1} V_q(x)$$

будет удовлетворять условиям $\omega_1 = 0$ вне G_3, $d\omega_1/dt > 0$ при

$$x \in \left[\{f[\overline{G}_1, t] \text{ при } 0 \leqslant t \leqslant T_1\} \setminus \left(\bigcup_q U[x(x_0^{(q)}, T_1), \gamma_q]\right)\right],$$

$$d\omega_1/dt \geqslant 0 \text{ при } x \in \left\{G \setminus \bigcup_q U[x(x_0^{(q)}, T_1), \gamma_q]\right\}.$$

Дальнейшее построение функций $\omega_k(x)$ $(k=1, 2, \ldots)$ проведем по индукции.

Пусть построена функция $\omega_k(x)$, удовлетворяющая условиям:

A) Функция ω_k имеет в G непрерывные частные производные всех порядков, причем существуют постоянные $P_{\sigma m}$

$$(\sigma = 1, \ldots, k;\ m = 1, 2, \ldots, 2k),$$

удовлетворяющие неравенствам

$$\left|\frac{\partial^\sigma \omega_k}{\partial x_1^{\sigma_1} \ldots \partial x_n^{\sigma_n}}\right| < \left[1 + \frac{1}{2} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{k-\sigma}\right] P_{\sigma m} \text{ при } x \in G_m. \tag{19}$$

B) Существуют области F_k и $R_k \subset G_{2k+1}$, удовлетворяющие соотношениям: $d\omega_k/dt \geqslant 0$ при $x \in \{G_{2k+1} \setminus F_k\}$, причем $f[G_{2k}, T_k] \subset F_k, \overline{F}_k \subset R_k$ и $f[R_k, t] \cap \overline{G}_{2k}$ пусто при $t \geqslant 0$.

C) $d\omega_k/dt > 0$ при $x \in \overline{G}_{2k-1}$.

D) $d\omega_k/dt > d > 0$ при $x \in \{f[\bar{F}_{k-1}, t] \cap [G_{2k+1} \setminus F_k]$ (при $0 \leqslant t \leqslant T_k)\}$. Очевидно, функция ω_1 будет удовлетворять всем этим условиям, если положить

$$F_1 = \bigcup_q U[x(x_0^{(q)}, T_1), \gamma_q].$$

Покажем, что можно построить функцию ω_{k+1}, которая также будет удовлетворять условиям $A(-D)$. Построим сначала две вспомогательных функции $\omega_{k+1}^{(1)}$ и $\omega_{k+1}^{(2)}$.

Функция $\omega_{k+1}^{(1)}$ строится так же, как строилась функция ω_1, с той разницей, что вместо областей G_1, G_2 и G_3 рассматриваются соответственно G_{2k+1}, G_{2k+2}, G_{2k+3}, а число T_1 заменяется числом T_{k+1}. Умножая построенную таким образом функцию на достаточно малый постоянный положительный множитель, можно еще добиться выполнения неравенств

$$\left| \frac{\partial^\sigma \omega_{k+1}^{(1)}}{\partial x_1^{\sigma_1} \dots \partial x_n^{\sigma_n}} \right| < \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1-\sigma} P_{\sigma m} \quad (\sigma = 1, \dots, k;\ m = 1, \dots, 2k) \tag{20}$$

при $x \in G_m$.

Функция $\omega_{k+1}^{(2)}$ строится следующим образом: Пусть $x_0 \in \bar{F}_k$. Положив, что $H_\mu = \{f[R_k, t]$ при $0 < t < T_{k+1}\}$, $T = T_{k+1}$, построим функцию $V(x)$, удовлетворяющую условиям леммы, причем $\gamma > 0$ будем считать столь малым, чтобы точки x, где $V(x) \neq 0$, лежали в области H_μ, а

$$U[x(x_0, T_{k+1}), \gamma] \subset f[G_{2k+2}, T_{k+1}].$$

Вследствие компактности $\bar{F}_k$ можно выбрать конечное число

$$(q = 1, \dots, N_{k+1}^{(2)})$$

точек $\tilde{x}_0^{(q)} \in \bar{F}_k$ таких, что

$$\bar{F}_k \subset \left\{\bigcup_q U[\tilde{x}_0^{(q)}, \alpha(\tilde{x}_0^{(q)})]\right\} \subset R_k,$$

$$\{\text{множество } \|x - x(\tilde{x}_0^{(q)}, t)\| \leqslant \tilde{\gamma}_q \text{ при } q = 1, \dots, N_{k+1}^{(2)},\ 0 \leqslant t \leqslant T_{k+1}\} \subset$$
$$\subset \{f[R_k, t] \text{ при } t \geqslant 0\},\ \{f[\bar{F}_k, t] \text{ при } 0 \leqslant t \leqslant T_{k+1}\} \subset$$
$$\subset \{\text{множество } \|x - x(\tilde{x}_0^{(q)}, t)\| < \alpha(\tilde{x}_0^{(q)}) \text{ при } q = 1, \dots, N_{k+1}^{(2)},$$
$$0 \leqslant t \leqslant T_{k+1}\},$$

и удовлетворяющих условиям, указанным в предыдущей фразе. Положим теперь

$$\omega_{k+1}^{(2)} = Q_{k+1} \sum_{q=1}^{N_{k+1}^{(2)}} V_q^{(2)}(x)\ ^*.$$

По построению $\omega_{k+1}^{(2)}$ ясно, что $\omega_{k+1}^{(2)} = 0$ при $x \in G_{2k}$ и, кроме того, $d\omega_{k+1}^{(2)}/dt > 0$ при

$$x \in \left[\{f[\bar{F}_k, t] \text{ при } 0 \leqslant t \leqslant T_{k+1}\} \setminus \left\{\bigcup_q U[x(\tilde{x}_0^{(q)}, T_{k+1}), \tilde{\gamma}_q]\right\}\right].$$

* Здесь $V_q^{(2)}$ — функции, соответствующие по лемме точкам $\tilde{x}_0^{(q)}$.

Теперь выберем постоянный множитель Q_{k+1} таким образом, чтобы в области

$$\{f[\bar{F}_k, t] \text{ при } 0 \leqslant t \leqslant T_{k+1}\} \setminus \left\{\bigcup_q U[x(\hat{\tilde{x}}_0^{(q)}, T_{k+1}), \hat{\tilde{\gamma}}_q]\right\}$$

выполнялось неравенство

$$d\omega_{k+1}^{(2)}/dt > d + M_k,$$

где $M_k = \max|d\omega_k/dt|$ при $x \in G_{2k+1}$. Теперь нетрудно проверить, что функция $\omega_{k+1} = \omega_k + \omega_{k+1}^{(1)} + \omega_{k+1}^{(2)}$ удовлетворяет условиям $A(-D)$, где следует заменить k на $k+1$. Итак, мы построили по индукции последовательность функций ω_k, удовлетворяющих условиям $A(-D)$.

Последовательность ω_k, равно как и последовательности из частных производных, образуют (вследствие (19)) семейства равномерно ограниченных и равностепенно непрерывных функций. Поэтому можно выделить диагональную подпоследовательность ω_{k_ν}, сходящуюся равномерно к некоторой функции $v_1(x_1, \ldots, x_n)$, причем производные $\partial^\sigma \omega_{k_\nu}/\partial x_1^{\sigma_1} \ldots \partial x_n^{\sigma_n}$ также сходятся равномерно к соответствующим производным функции v_1.

Функция v_1, как это ясно из ее построения, удовлетворяет условиям

$$dv_1/dt = \sum(\partial v_1/\partial x_i) X_i > 0$$

при $x \in G$, причем на каждой траектории $x(x_0, t)$ есть точка $t = t_1$ такая, что $dv_1(x(x_0, t))/dt > d > 0$ при $t > t_1$, т. е. $v_1 \to \infty$ при $t \to \infty$ вдоль любой траектории.

Заменяя t на $-t$ в системе (1) аналогичным путем, можно построить функцию $v_2(x)$, обладающую в силу системы (1), при замене t на $-t$, теми же свойствами, что и v_1, в силу (1).

Теперь очевидно, что поверхность $v(x) = \text{const}$, где $v = v_1 - v_2$ есть сколь угодно гладкое сечение S системы (1). В самом деле, вдоль любой траектории $x(x_0, t)$ функция v меняется монотонно, и при $t \to \infty$ имеем $v \to \infty$, а при $t \to -\infty$ имеем $v \to -\infty$, т. е. каждая траектория пересекает S в одной и только одной точке. Теорема доказана.

Уральский политехнический институт
им. С. М. Кирова

Поступило
10 X 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Немыцкий, В. В. Степанов, Качественная теория дифференциальных уравнений, М. — Л., Гостехиздат, 1949. 2. Е. А. Барбашин, Метод сечений в теории динамических систем, Мат. сб., т. 29 (71), в. 2, 1951. 3. А. М. Ляпунов, Общая задача об устойчивости движения, М. — Л., Гостехиздат, 1950. 4. Н. Н. Красовский, К вопросу об обращении теорем второго метода А. М. Ляпунова исследования устойчивости движения, Усп. мат. наук., т. XI, в. 3 (69), 1956.