В. М. Борок, О системах линейных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами, *Изв. вузов. Матем.*, 1957, номер 1, 45–66

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1957 МАТЕМАТИКА № 1

В. М. Борок

О СИСТЕМАХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Введение

В настоящей статье рассматриваются системы линейных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами.

В § 1 вводится понятие эквивалентности двух систем вида (1) (см. ниже). Две системы являются эквивалентными, если каждое решение одной из них можно получить из некоторого решения другой системы в результате применения фиксированного дифференциального оператора. Далее находится (в алгебраической форме) необходимое и достаточное условие эквивалентности двух систем и устанавливаются некоторые свойства эквивалентных систем. Теорема 4 § 1 устанавливает эквивалентность любой системы вида (1) одному уравнению того же вида (или системе из нескольких таких уравнений, каждое из которых интегрируется независимо от остальных).

В § 2 из совокупности всех систем вида (1) выделяется класс систем, имеющих нормальный тип. Доказывается, что задача Коши для любой системы вида (1) может быть сведена к задаче Коши для системы нормального типа. Такое сведение дает во многих случаях возможность понижать порядок системы.

Результаты, излагаемые в этой статье, были опубликованы ранее без подробных доказательств в заметках автора [10] и [11].

§ 1. Эквивалентные системы

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами вида

$$\frac{\partial^{n_i} u_i(x, t)}{\partial t^{n_i}} = \sum_{j=1}^{N_1} \sum_{(m_s)} A^{ij}_{(m_s)} \frac{\partial^{m_0+m_1+\ldots+m_n} u_j(x, t)}{\partial t^{m_0} \partial x_1^{m_1} \ldots \partial x_n^{m_n}} \tag{1}$$

$$(i = 1, \ldots, N_1, \; x = (x_1, \ldots, x_n)).$$

Здесь $\sum\limits_{(m_s)}$ означает суммирование по всевозможным совокупностям из $n+1$ целых индексов $(m_0, \ldots, m_n)$, причем $m_0 < n_j$, $m_k < M$ $(k = 1, \ldots, n)$.

Считая производные по времени t от неизвестных функций, входящих в систему (1), новыми неизвестными функциями:

$$u_{N_1+1}(x, t) = \frac{\partial u_1(x, t)}{\partial t}, \ldots, u_{N_1+n_1-1}(x, t) = \frac{\partial^{n_1-1} u_1(x, t)}{\partial t^{n_1-1}}, \ldots,$$

$$u_N(x, t) = \frac{\partial^{n_{N_1}-1} u_{N_1}(x, t)}{\partial t^{n_{N_1}}} \qquad (N = \sum_{i=1}^{N_1} n_i),$$

мы можем привести систему (1) к виду

$$\frac{\partial u(x,\ t)}{\partial t} = P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,\ t), \tag{2}$$

где

$$u(x,\ t) = \{u_1(x,\ t), \ldots,\ u_N(x,\ t)\},\quad x = (x_1,\ \ldots,\ x_n).$$

$P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)$ — квадратная матрица N-го порядка, элементами которой являются полиномы от $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ с постоянными коэффициентами.

Условимся относительно следующего обозначения: если $R\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)$ — матрица, элементами которой являются „полиномы" от „переменных" $i\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, i\frac{\partial}{\partial x_n}$, то через $R(s)$ будем обозначать матрицу, элементами которой являются полиномы от $s_1, \ldots, s_n$, и которая получается из матрицы $R\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)$ путем замены „переменного" $i\frac{\partial}{\partial x_j}$ на s_j $(j = 1,\ \ldots,\ n)$. Обратно, если $R(s)$ — матрица, элементами которой являются полиномы от $s_1, \ldots, s_n$, то через $R\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)$ будем обозначать матрицу, полученную из $R(s)$ путем замены переменного s_j на $i\frac{\partial}{\partial x_j}$ $(j = 1, \ldots, n)$.

Определение. *Система (2) называется эквивалентной системе*

$$\frac{\partial v(x,\ t)}{\partial t} = Q\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)v(x,\ t), \tag{3}$$

если обе эти системы содержат одинаковое число неизвестных функций, и *существует такой невырожденный оператор что,*

$$T\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)\quad (\det T(s) \not\equiv 0),$$

если $u(x,\ t)$ — какое-либо решение системы (2), то функция

$$v(x,\ t) = T\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,\ t)$$

является решением системы (3).

Теорема 1. *Если система (2) эквивалентна системе (3), то матрица $Q(s)$ подобна матрице $P(s)$.*

Доказательство. Согласно предположению, теоремы, существует такой невырожденный оператор $T\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)$, что, если $u(x,\ t)$ — какое-либо решение системы (2), то функция

$$v(x,\ t) = T\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,\ t)$$

является решением системы (3). Применяя к обеим частям равенства (2) оператор $T\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)$, получим

$$\frac{\partial T\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x, t)}{\partial t}=T\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,\ t). \qquad (4)$$

Но функция

$$v(x,\ t)=T\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,\ t)$$

является решением системы (3), поэтому

$$\frac{\partial v(x,\ t)}{\partial t}=Q\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)v(x,\ t)=Q\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)T\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,\ t). \qquad (5)$$

Сравнивая (4) и (5), получаем

$$T\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,\ t)=Q\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)T\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,\ t), \qquad (6)$$

где $u(x,\ t)$ — любое решение системы (2). Применяя к обеим частям равенства (6) преобразование Фурье по x, получаем

$$T(s)P(s)\tilde{u}(s,\ t)=Q(s)\,T(s)\tilde{u}(s,\ t), \qquad (7)$$

где $\tilde{u}(s,\ t)$ — преобразование Фурье решения $u(x,\ t)$ системы (2). Следовательно, $\tilde{u}(s,\ t)$ является решением системы

$$\frac{dv(s,\ t)}{\partial t}=P(s)\,v(s,\ t). \qquad (8)$$

Тогда $\tilde{u}(s,\ t)$ является решением задачи Коши для системы (8), удовлетворяющим начальному условию $v(s,\ 0)=\tilde{u}(s,\ 0)$. Поэтому

$$\tilde{u}(s,\ t)=e^{tP(s)}\tilde{u}(s,\ 0),$$

если $\tilde{u}(s,\ 0)$ определяет функционал над пространством Φ основных вектор-функций, в котором функция $e^{tP(s)}$ является мультипликатором ([1]). Во всяком случае, в качестве $\tilde{u}(s,\ 0)$ можно взять любую ограниченную (при $s=\infty$) функцию, поскольку такая функция определяет функционал в любом основном пространстве. Полагая, что $t=0$ и

$$\tilde{u}(s,\ 0)=\{0,\ \ldots,\ 0,\ 1,\ 0,\ \ldots,\ 0\},$$

из (7) получаем

$$T(s)P(s)=Q(s)T(s)$$

или

$$Q(s)=T(s)P(s)\,T^{-1}(s),$$

что и требовалось.

Теорема 2. *Если матрица $Q(s)$ подобна матрице $P(s)$, то система (2) эквивалентна системе (3).*

Доказательство. Пусть

$$Q(s)=T(s)P(s)\,T^{-1}(s) \quad (\det T(s)\neq 0). \qquad (9)$$

Как известно ([2]), элементы матрицы $T(s)$ должны принадлежать тому же полю, что и элементы матриц $P(s)$ и $Q(s)$, т. е. в нашем случае, полю отношений полиномов от $s_1,\ \ldots,\ s_n$. Однако, можно считать, что элементы $T(s)$ являются полиномами от $s_1, \ldots, s_n$, т. к. в противном случае можно вместо $T(s)$ рассмотреть матрицу

$$T_1(s) = \begin{Vmatrix} \tau(s) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \tau(s) & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \tau(s) \end{Vmatrix} T(s),$$

где $\tau(s)$ — общий знаменатель элементов матрицы $T(s)$. Ясно, что

$$\det T_1(s) \not\equiv 0$$

и

$$Q(s) = T_1(s) P(s) T_1^{-1}(s).$$

Пусть $u(x, t)$ — решение системы (2). Применяя к обеим частям равенства (2) оператор $T\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)$, получаем

$$\frac{\partial T\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x, t)}{\partial t} = T\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x, t). \tag{10}$$

Обозначая

$$v(x, t) = T\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x, t)$$

и учитывая, что из (9) следует равенство

$$T(s) P(s) = Q(s) \cdot T(s),$$

из (10) получаем

$$\frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = Q\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) v(x, t).$$

Таким образом, функция $v(x, t)$ является решением системы (3), и, следовательно, система (2) эквивалентна системе (3).

Следствие 1. *Если система (2) эквивалентна системе (3), то система (3) эквивалентна системе (2).*

Доказательство вытекает из теоремы 2, поскольку, если матрица $Q(s)$ подобна матрице $P(s)$, то и матрица $P(s)$ подобна матрице $Q(s)$.

Следствие 2. ***Необходимым и достаточным условием эквивалентности систем (2) и (3) является подобие матриц $P(s)$ и $Q(s)$.***

Замечание 1. Характеристические корни эквивалентных систем вида (2) (с их кратностями) совпадают. Поэтому свойства систем вида (2), основанные лишь на свойствах характеристических корней, совпадают у всех эквивалентных систем. Таким свойством, например, является принадлежность системы вида (2) к параболическому, гиперболическому или корректному по Петровскому типу ([3]).

Замечание 2. Решение $u(x, t)$ системы (2) может не иметь достаточного числа обычных производных для того, чтобы к нему можно было в обычном смысле применять оператор $T\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)$. Поэтому следует рассматривать $u(x, t)$ как обобщенную функцию над некоторым пространством Φ основных функций и применять к ней оператор $T\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)$, как это допускается в теории обобщенных функций ([1]).

Замечание 3. Пусть системы (2) и (3) эквивалентны, и имеет место равенство

$$Q(s)=T(s)P(s)T^{-1}(s),$$

причем $\det T(s)\not\equiv 0$, и элементы матрицы $T(s)$ суть полиномы от $s_1, \ldots, s_n$. (Методы построения преобразующей матрицы $T(s)$ указаны, например, в [4]). Тогда в качестве оператора, переводящего решения системы (2) в решения системы (3), может служить оператор $T\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)$. Оператором, переводящим решения системы (3) в решения системы (2), может служить оператор

$$R\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)=T^{-1}\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)\cdot\tau\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)E,$$

где E — единичная матрица, $\tau(s)$ — общий знаменатель элементов матрицы $T^{-1}(s)$.

Теорема 3. *Если системы* (2) *и* (3) *эквивалентны, то каждое решение $v(x, t)$ системы* (3) *получается в результате применения невырожденного оператора $T\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)$ к некоторому решению $u(x,t)$ системы* (2) *и обратно, каждое решение $u(x, t)$ системы* (2) *получается в результате применения невырожденного оператора $R\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)$ к некоторому решению $v(x, t)$ системы* (3).

Доказательство. Поскольку система (2) эквивалентна системе (3), то найдется невырожденный оператор

$$T\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)(\det T(s)\not\equiv 0)$$

такой, что функция

$$v(x, t)=T\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x, t)$$

является решением системы (3), если $u(x, t)$ — решение системы (2). Пусть $v_0(x, t)$ — какое-либо решение системы (3). Рассмотрим систему

$$T\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x, t)=v_0(x, t). \tag{11}$$

Эта система имеет решение в классе обобщенных функций конечного порядка* в силу следующей теоремы Эренпрейса [5].

Какова бы ни была обобщенная вектор-функция конечного порядка S и матрица P, элементами которой являются полиномы от производных с постоянными коэффициентами, существует обобщенная вектор-функция конечного порядка T такая, что $PT=S$, если $\det P\not\equiv 0$.

* Т. е. непрерывных функций, к которым применены дифференциальные операторы конечного порядка.

Покажем, что решение $u(x, t)$ системы (11) является решением системы (2). Считая рассматриваемые функции обобщенными и переходя к преобразованиям Фурье по $x_1, \ldots, x_n$, можем записать

$$\frac{d\tilde{u}(s, t)}{dt} = T^{-1}(s)\,T(s)\frac{d\tilde{u}}{dt} = T^{-1}(s)\,\frac{d\tilde{v}_0(s, t)}{dt} = T^{-1}(s)\,Q(s)\tilde{v}_0(s) =$$

$$= T^{-1}(s)\,T(s)\,P(s)\,T^{-1}(s)\,T(s)\tilde{u}(s, t) = P(s)\tilde{u}(s, t).$$

(Здесь $\tilde{u}(s, t)$, $\tilde{v}_0(s, t)$ — преобразования Фурье функций $u(x, t)$ и $v_0(x, t)$ соответственно. Мы воспользовались равенствами

$$\tilde{v}_0(s, t) = T(s)\tilde{u}(s, t)$$

и

$$\frac{d\tilde{v}_0(s, t)}{dt} = Q(s)\,\tilde{v}_0(s, t),$$

которые получаются в результате применения преобразования Фурье к равенствам (11) и (3) соответственно). Возвращаясь к переменным $x_1, \ldots, x_n$ (т. е. производя обратное преобразование Фурье), получаем

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x, t).$$

Таким образом, функция $u(x, t)$ является решением системы (2) и, следовательно, любое решение $v(x, t)$ системы (3) получается в результате применения оператора $T\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)$ к некоторому решению $u(x, t)$ системы (2).

Обратно, поскольку система (3) эквивалентна системе (2), то найдется оператор

$$R\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)(\det R(s) \not\equiv 0)$$

такой, что, если $v(x, t)$ — решение системы (3), то $u(x, t) = R\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)v(x, t)$ — решение системы (2). Как и выше, легко устанавливается, что, если $u_0(x, t)$ — какое-то решение системы (2), то

$$u_0(x, t) = R\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)v(x, t),$$

где $v(x, t)$ — решение системы (3), чем заканчивается доказательство теоремы.

Эквивалентность систем (2) и (3) не гарантирует, вообще говоря, взаимно однозначного соответствия между решениями этих систем. Такое соответствие имеет место, например, в том случае, когда

$$\det T(s) = \text{const}.$$

Тогда, если оператор $T\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)$ переводит решения системы (2) в решения системы (3), то оператор

$$R\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) \equiv T^{-1}\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

переводит решения системы (3) в решения системы (2).

В общем случае можно разбить совокупность решений системы (2) и системы (3) на классы, между которыми уже устанавливается взаимнооднозначное соответствие.

Разбиение на непересекающиеся классы эквивалентных решений произведем следующим образом. Пусть $T\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)$ — оператор, переводящий каждое решение системы (2) в решение системы (3), а $R\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)$ — оператор, переводящий каждое решение системы (3) в решение системы (2), и пусть

$$\tau(s)E = T(s)R(s) \ (= R(s)T(s)).$$

(Произведение операторов $T(s)$ и $R(s)$ имеет такой вид, т. к. в качестве $R(s)$ всегда можно взять

$$T^{-1}(s)\cdot(\tau(s)E),$$

где $\tau(s)$ — общий знаменатель элементов матрицы $T^{-1}(s)$). Два решения $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ системы (2) (или системы (3)) называются эквивалентными тогда и только тогда, если при некоторых целых $m_1 \geqslant 0$ и $m_2 \geqslant 0$ имеет место равенство

$$\tau^{m_1}\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)E\cdot u_1(x, t) = \tau^{m_2}\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)E\cdot u_2(x, t).$$

Возникает вопрос, не удовлетворяют ли всегда любые два решения системы вида (2) этому условию. Покажем, что это не так. Пусть $n=1$ (т. е. пространственное переменное одно), и любые два решения системы (2) эквивалентны. Тогда каждое решение этой системы эквивалентно нулевому решению; следовательно, найдется такое целое положительное число m (зависящее от решения $u(x, t)$), что

$$\tau^{m}\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)E\cdot u(x, t) = 0.$$

Переходя к преобразованиям Фурье, получаем

$$\tau^{m}(s)E\cdot\hat{u}(s, t) = 0.$$

Тогда любая компонента вектор-функции $\hat{u}(s,t)$ есть функционал, сосредоточенный в конечном числе точек, а именно, в нулях полинома $\tau(s)$. Отсюда следует ([6]), что любая компонента вектор-функции $\hat{u}(s, t)$ имеет вид

$$\hat{u}_j(s, t) = \sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{p_k} c_{jl}(t)\,\delta^{(l)}(s - s_k).$$

(p_k — кратность корня s_k полинома $\tau^m(s)$, $k=1,\ldots, K$, $j=1,\ldots, N$). Отсюда любая компонента решения $u(x, t)$ системы (2) должна иметь вид

$$u_j(x, t) = \sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{p_k} c_{jl}(t)\,x^l e^{is_k x} \qquad (j=1,\ldots, N).$$

Но очевидно, что существуют системы уравнений вида (2), у которых есть решения, не имеющие такого вида.

Ясно, что введенное соотношение эквивалентности обладает свойствами возвратности, симметрии и транзитивности, и поэтому многообразие решений системы (2) (и системы (3)) разбивается на непересекающиеся между собой классы эквивалентных функций ([1]).

Покажем, что между классами эквивалентных решений системы (2) и системы (3) можно установить взаимно однозначное соответствие; при этом класс U_1 решений системы (2) оператором $T\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)$ переводится в класс V_1 решений системы (3), а оператор $R\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)$ переводит обратно класс v_1 в класс u_1.

В самом деле, пусть

$$u_1(x, t) \in U_1$$

и

$$u_2(x, t) \in U_1,$$

и пусть

$$\tau^{m_1}\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)E\cdot u_1 = \tau^{m_2}\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)E\cdot u_2.$$

Применяя оператор $T\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)$ к обеим частям последнего равенства и обозначая

$$v_1 = T\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u_1$$

и

$$v_2 = T\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u_2,$$

получим

$$\tau^{m_1}\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)E\cdot v_1 = \tau^{m_1}\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)E\cdot v_2.$$

Таким образом, решения $v_1(x, t)$ и $v_2(x, t)$ системы (1), в которые оператор $T\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)$ перевел решения $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ системы (2), эквивалентны. Следовательно,

$$T\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)U_1 \subset V_1.$$

Пусть теперь $v(x, t) \in V_1$. Тогда найдутся такие целые положительные числа m_1 и m_2, что

$$\tau^{m_1}\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)E\cdot v_1 = \tau^{m_2}\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)Ev. \tag{12}$$

В силу теоремы 3,

$$v(x, t) = T\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x, t),$$

где $u(x, t)$ — решение системы (2). Поэтому, из (12) следует

$$\tau^{m_1}\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)E\cdot T\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u_1(x, t) = \tau^{m_2}\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)E\cdot T\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x, t).$$

Применяя к обеим частям последнего равенства оператор $R\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)$, получим

$$\tau^{m_1+1}\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)E\cdot u_1(x, t) = \tau^{m_2+1}\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)E\cdot u(x, t).$$

Следовательно, $u(x, t) \in U_1$. Таким образом,

$$T\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)U_1 = V_1.$$

Отсюда

$$R\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)T\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)U_1=R\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)U_1,$$

или

$$R\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)V_1=\tau\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)E\cdot U_1=U_1,$$

что и требовалось.

Определение 2. *Две системы вида (1) будем называть эквивалентными, если эквивалентны соответствующие им системы вида (2).*

Теорема 4. *Любая система дифференциальных уравнений в частных производных вида (1) эквивалентна одному уравнению в частных производных с постоянными коэффициентами вида*

$$\frac{\partial^N u(x,t)}{\partial t^N}=\sum_{m=1}^{N}P_m\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial^{N-m}u(x,t)}{\partial t^{N-m}} \tag{13}$$

(или системе из нескольких уравнений вида

$$\frac{\partial^{N_k}u(x,t)}{\partial t^{N_k}}=\sum_{m=1}^{N_k}P_{mk}\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial^{N_k-m}u_k(x,t)}{\partial t^{N_k-m}}, \tag{14}$$

$$k=1,\ldots,p;\quad \sum_{k=1}^{p}N_k=N,$$

каждое из которых интегрируется независимо от остальных).

Доказательство. Систему вида (1) сведем к системе вида (2). Пусть $E_1(\lambda, s),\ldots, E_N(\lambda, s)$ — инвариантные множители ([2]) матрицы $P(s)$, и пусть

$$E_j(\lambda, s)=\lambda^{k_j}-P_{1j}(s)\lambda^{k_j-1}-\ldots-P_{k_j,j}(s),$$

где $P_{mj}(s)\,(m=1,\ldots,k_j)$ — полином от $s_1,\ldots,s_n$

$$(j=1,\ldots,N_j\sum_{j=1}^{N}k_j=N).$$

Допустим, что

$$E_1(\lambda, s)\equiv\ldots\equiv E_j(\lambda, s)\equiv 1,\ E_{j+1}(\lambda, s)\not\equiv 1,$$

и построим квазидиагональную матрицу

$$Q(s)=\left\|\begin{array}{c:c:c:c} E_1(s) & & & \\ \hdashline & E_2(s) & & \\ \hdashline & & \ddots & \\ \hdashline & & & E_{N-j}(s) \end{array}\right\|; \tag{15}$$

здесь в недиагональных блоках все элементы равны нулю, а диагональный блок $E_p(s)$ $(p=1,\ldots,N-j)$ строится по правилу:

$$E_p(s)=\left\|\begin{matrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ P_{k_{j+p},\, j+p}(s) & P_{k_{j+p}-1,\, j+p}(s) & \dots & P_{2,\, j+p}(s) & P_{1,\, j+p}(s) \end{matrix}\right\|. \tag{16}$$

Как известно, матрица $P(s)$ и $Q(s)$ подобны; матрица $Q(s)$ является естественной нормальной формой матрицы $P(s)$ ([2]). Поэтому, в силу теоремы 2 и следствия 1 к теореме 2, системы (2) и

$$\frac{\partial v(x,\ t)}{\partial t}=Q\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)v(x,\ t) \tag{17}$$

эквивалентны.

В силу квазидиагонального вида матрицы $Q(s)$, из (15) и (16) получаем, что система (17) распадается на $N-j$ систем, каждая из которых интегрируется независимо от остальных, и имеет вид

$$\frac{\partial v_{(p)}(x,\ t)}{dt}=E_p\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)v_{(p)}(x,\ t), \tag{18}$$

где

$$v_{(p)}(x,\ t)=\{v_{k_{j+1}+\dots+k_{j+p-1}+1}(x,\ t),\ \dots,\ v_{k_{j+1}+\dots+k_{j+p}}(x,\ t)\}.$$

Система (18) относительно вектор-функции $v_{(p)}(x,\ t)$, очевидно, сводится к одному уравнению относительно функции

$$w_p(x,\ t)\equiv v_{k_{j+1}+\dots+k_{j+p-1}+1}(x,\ t):$$

$$\frac{\partial^{k_{j+p}}w_p(x,\ t)}{\partial t^{k_{j+p}}}=\sum_{m=1}^{k_{j+p}}P_{m\, j+p}\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial^{k_{j+p}-m}w_p(x,\ t)}{dt^{k_{j+p}-m}},$$

что и заканчивает доказательство теоремы 4.

Пример 1. Любая система вида:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1(x,\ t)}{\partial t}=\dfrac{\partial u_1(x,\ t)}{\partial x}+H_1\left(i\dfrac{\partial}{\partial x}\right)u_2(x,\ t), \\ \dfrac{\partial u_2(x,\ t)}{\partial t}=-\dfrac{\partial u_2(x,\ t)}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial u_3(x,\ t)}{\partial t}=H_2\left(i\dfrac{\partial}{\partial x}\right)u_2(x,\ t)+\dfrac{\partial u_3(x,\ t)}{\partial x}, \end{cases} \tag{19}$$

где $H_1\left(i\dfrac{\partial}{\partial x}\right)$ и $H_2\left(i\dfrac{\partial}{\partial x}\right)$ — произвольные дифференциальные операторы, может быть сведена к системе

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v_1(x,\ t)}{\partial t}=-\dfrac{\partial v_1(x,\ t)}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial^2 v_2(x,\ t)}{\partial t^2}=\dfrac{\partial^2 v_2(x,\ t)}{\partial x^2} \end{cases}$$

или к любой другой системе вида (19), например, к системе

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1(x,\ t)}{\partial t}=\dfrac{\partial u_1(x,\ t)}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial u_2(x,\ t)}{\partial t}=-\dfrac{\partial u_2(x,\ t)}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial u_3(x,\ t)}{\partial t}=\dfrac{\partial u_3(x,\ t)}{\partial x}. \end{cases}$$

Пример 2. Система*

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} - 2\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y} = 0; \\
2\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = 0
\end{cases}
\tag{20}
$$

сводится к уравнению $\Delta\Delta v = 0$.

Для этого систему (20) запишем в виде:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u_1}{\partial x} = u_3, \\
\dfrac{\partial u_2}{\partial x} = u_4, \\
\dfrac{\partial u_3}{\partial x} = \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + 2\dfrac{\partial u_4}{\partial y}, \\
\dfrac{\partial u_4}{\partial x} = \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial v^2} + 2\dfrac{\partial u_3}{\partial y}.
\end{cases}
\tag{21}
$$

Применяя к решению

$$u(x, y) = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$$

системы (2) оператор $T\left(i\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$

$$
\left(T(s) = \begin{Vmatrix} 0 & 2is & -1 & 0 \\ s^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s^2 & 0 \\ -s^4 & 0 & 0 & 2is^3 \end{Vmatrix} \right),
$$

получим, что функция

$$v(x, y) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\} = T\left(i\frac{\partial}{\partial y}\right) u(x, y)$$

является решением системы

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial v_1}{\partial x} = v_2, \\
\dfrac{\partial v_2}{\partial x} = v_3, \\
\dfrac{\partial v_3}{\partial x} = v_4, \\
\dfrac{\partial v_4}{\partial x} = -\dfrac{\partial^4 v_1}{\partial v^4} - 2\dfrac{\partial^2 v_3}{\partial y^2},
\end{cases}
$$

или функция $v_1(x, y)$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta\Delta v_1 = 0.$$

В качестве $R(s)$ можно взять матрицу

$$
\begin{Vmatrix} 0 & 2is & 0 & 0 \\ s^2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2is & 0 \\ 0 & s^2 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.
$$

* Эта система приведена в работе [8] в качестве примера эллиптической системы, для которой задача Дирихле некорректна.

Тогда

$$T(s)R(s)=2is^3\cdot E$$

и

$$\tau\left(i\frac{\partial}{\partial y}\right)=-2\frac{\partial^3}{\partial y^3}.$$

Поэтому два решения

$$u(x\mu)=\{u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4\}$$

и

$$v(x\mu)=\{v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4\}$$

системы (21) являются эквивалентными тогда и только тогда, если

$$(-2)^{3m_1}\frac{\partial^{3m_1}}{\partial y^{3m_1}}\cdot E\cdot U=(-2)^{3m_2}\frac{\partial^{3m_2}}{\partial y^{3m_2}}E\cdot v.$$

Отсюда получаем, что решение $u(x\mu)$ эквивалентно решению $v(x\mu)$, если

$$u_i=(-2)^{3m}\frac{\partial^{3m}v_i}{\partial y^{3m}}+\sum_{k=0}^{3m}c_k(x)y^k \quad (i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

при каком-либо целом положительном m (предположено $m_2\geqslant m_1$).

Определение. *Корни полинома относительно* λ

$$\det\left(\left\|\begin{matrix}\lambda^{n_1} & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda^{n_2} & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda^{n_{N_1}}\end{matrix}\right\|-\left\|\sum_{\langle m_s\rangle}A^{ij}_{\langle m_s\rangle}\lambda^{m_0}(-is_1)^{m_1}\dots(-is_n)^{m_n}\right\|\right) \tag{22}$$

называются характеристическими корнями системы (1).

Установим, что характеристические корни (с их кратностями) эквивалентных систем вида (1) совпадают. В самом деле, достаточно установить, что при сведении системы вида (1) к системе вида (2) характеристические корни не меняются.

Запишем характеристический определитель для системы, которая получается из системы 1 при введении новой функции

$$u_{N_1+1}(x,\ t)=\frac{\partial u_k(x,\ t)}{\partial t}:$$

$$D_1=\left|\begin{matrix}\lambda^{n_1}-\sum\limits_{\langle m_s\rangle}A^{11}_{\langle m_s\rangle}\lambda^{m_0}(-is)^{\langle m_s\rangle}\dots & -\sum\limits_{\substack{\langle m_s\rangle\\ m_0=0}}A^{1k}_{\langle m_s\rangle}\lambda^{m_0-1}(-is)^{\langle m_s\rangle}\dots & \dots-\sum\limits_{\substack{\langle m_s\rangle\\ m_0=0}}A^{1k}_{\langle m_s\rangle}(-is)^{\langle m_s\rangle}\\ \dots & \dots & \dots\\ -\sum\limits_{\langle m_s\rangle}\cdot A^{N_1-1}_{\langle m_s\rangle}\lambda^{m_0}(-is)^{\langle m_s\rangle}\dots & -\sum\limits_{\substack{\langle m_s\rangle\\ m_0=0}}A^{N_1k}_{\langle m_s\rangle}\lambda^{m_0-1}(-is)^{m_s}\dots & \dots-\sum\limits_{\substack{\langle m_s\rangle\\ m_0=0}}A^{N_1k}_{\langle m_s\rangle}(-is)^{\langle m_s\rangle}\\ 0\quad\dots & -1\quad\dots & \lambda\end{matrix}\right|=D,$$

где

$$(-is)^{<m_s>}=(-is_1)^{m_1}\dots(-is_n)^{m_n},$$

а D означает характеристический определитель (22) системы (1).

Таким образом, при введении новой функции

$$u_{N_1+1}=\frac{\partial u_k(x,\ t)}{\partial t}$$

характеристический определитель системы не изменяется. Поскольку сведение системы (1) к системе (2) может быть осуществлено в результате конечного числа таких операций, при этом сведении характеристические корни не меняются, что и требовалось.

Определение. *Система вида (1) называется гиперболической, параболической или корректной по Петровскому, если соответствующая ей система (2) является соответственно гиперболической, параболической или корректной по Петровскому (в смысле определений, данных в [3]).*

Теорема 5. *Эквивалентные системы вида (1) имеют одинаковый тип (гиперболический, параболический или корректный по Петровскому).*

Доказательство следует из замечания 1 к теореме 2 и определений типа системы вида (1), поскольку тип системы, согласно этим определениям, зависит только от поведения характеристических корней системы.

Покажем, что свойство эллиптичности при переходе от системы вида (1) к одному уравнению (системе вида (14)) также сохраняется.

Определение ([9]). *Система*

$$\sum_{j,k_1,\dots,k_n} a_{ij}^{(k_1,\dots,k_n)}\frac{\partial^k u_j}{\partial x_1^{k_1}\dots\partial x_n^{k_n}}=f_i\quad (i,\ j=1,\dots,\ N;\ \ k=k_1+\dots+k_n\leqslant n_j)$$

называется эллиптической, если детерминант

$$\left|\sum_{\sum_{i=1}^{n} k_i=n_j} a_{ij}^{\{k_1,\dots,k_n\}}\alpha_1^{k_1}\dots\alpha_n^{k_n}\right|$$

не обращается в нуль ни при каких действительных $\alpha_1,\dots,\alpha_n$, *если не все они равны нулю.*

Теорема 6. *Если система (1) эллиптическая, то каждое из уравнений системы (14), которой она эквивалентна, также является эллиптическим.*

Доказательство. Запишем систему (1) в виде

$$\left[\left\|\begin{matrix}\frac{\partial^{n_1}}{dt^{n_1}} & 0 & \dots & 0\\ 0 & \frac{\partial^{n_2}}{dt^{n_2}} & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & \frac{\partial^{n_N}}{\partial t^{n_N}}\end{matrix}\right\| - P\left(\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial t}\right)\right]u(x,\ t)=0.$$

Матрицу, заключенную в квадратных скобках слева (ниже мы ее будем обозначать $[\| \|]$), можно представить в виде суммы двух матриц:

$$P_1\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) + P_2\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right),$$

где j-тый столбец матрицы

$$P_1\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)$$

состоит из однородных „полиномов" относительно „переменных"

$$\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$$

степени однородности n_j, (n_j — порядок старших производных от компоненты $u_j(x, t)$ функции $u(x, t)$, входящих в систему (1) ($j = 1, \ldots, n$). Условие эллиптичности системы (1) тогда означает, что $\det P_1(\lambda, s) \neq 0$ при всех действительных $\lambda, s_1, \ldots, s_n$, если не все они обращаются в нуль. Но

$$\det[\| \|] = \det P_1(\lambda, s) + \ldots, \tag{23}$$

причем $\det P_1(\lambda, s)$ — однородный полином относительно $\lambda, s_1, \ldots, s_n$ порядка $n_1 + \ldots + n_N$, а точками обозначен полином, степень которого по совокупности переменных $\lambda, s_1, \ldots, s_n$ меньше, чем $n_1 + \ldots + n_N$.

Как было установлено выше, эквивалентные системы имеют одинаковые характеристические определители. Отсюда следует, что

$$\det[\| \|] = \det(\lambda E - Q(is)). \tag{24}$$

Но, в силу вида матрицы $Q(is)$, имеем

$$\det(\lambda E - Q(is)) = E_{j+1}(\lambda, is) \ldots E_N(\lambda, is)$$

(обозначения здесь те же, что и в доказательстве теоремы 4).

Представив $E_k(\lambda, is)$ в виде

$$E_k(\lambda, is) = E'_k(\lambda, is) + E''_k(\lambda, is) \quad (k = j+1, \ldots, N),$$

где $E'_k(\lambda, is)$ — однородный по совокупности переменных $\lambda, s_1, \ldots, s_n$ полином, а $E''_k(\lambda, is)$ имеет по совокупности переменных меньшую степень, чем $E'_k(\lambda, is)$, и сравнивая (23) и (24), получаем, что

$$\det P_1(\lambda, s) = \prod_{k=j+1}^{N} E'_k(\lambda, is).$$

В силу предположения об эллиптичности системы (1), получаем, что $E'_k(\lambda, is) \neq 0$ ($k = j+1, \ldots, N$) при всех действительных $\lambda, s_1, \ldots, s_n$, не обращающихся в нуль одновременно. Но это и означает эллиптичность каждого из уравнений

$$E_k\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u_k(x, t) = 0,$$

к которым сводится система (1). Теорема доказана.

§ 2. Приведение системы линейных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами к системе нормального типа

Рассмотрим систему (1). Пусть $\lambda_1(s), \ldots, \lambda_N(s) \Big(s = (s_1, \ldots, s_n);$ $s_k = \sigma_k + i\tau_k;\ k = 1, \ldots, n;\ N = \sum_{i=1}^{N_1} n_i \Big)$ — характеристические корни этой системы, т. е. корни многочлена

$$\lambda^N + P_1(s)\lambda^{N-1} + \ldots + P_N(s) \equiv$$

$$\equiv \begin{vmatrix} \lambda^{n_1} - \sum\limits_{<m_s>} A''_{<m_s>} \lambda^{m_0}(-is_1)^{m_1} \ldots (-is_n)^{m_n} & \ldots & - \sum\limits_{<m_s>} A^{1N_1}_{<m_s>} \lambda^{m_0}(-is_1)^{m_1} \ldots (-is_n)^{m_n} \\ \ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots\ldots \\ - \sum\limits_{<m_s>} A^{N_1}_{<m_s>} \lambda^{m_0}(-is_1)^{m_1} \ldots (-is_n)^{m_n} & \ldots & \lambda^{n_{N_1}} - \sum\limits_{<m_s>} A^{N_1 N_1}_{<m_s>} \lambda^{m_0}(-is_1)^{m_1} \ldots (is_n)^{m_n} \end{vmatrix}, \qquad (25$$

где $P_i(s)$ $(i = 1, \ldots, N)$ — многочлены относительно $s_1, \ldots, s_n$, и пусть при

$$|s| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |s_i|^2} \geqslant 1,$$

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant N} \operatorname{Re} \lambda_j(s) \leqslant c_k |s|^k. \qquad (26)$$

Как показано в [1], число k во всяком случае может быть выбрано не превосходящим порядка системы по пространственным переменным, то есть в нашем случае $k \leqslant Mn$.

Определение 1 ([3]). *Приведенным порядком p_0 системы (1) называется число*

$$p_0 = \inf k, \qquad (27)$$

где нижняя грань берется по всем k, для которых имеет место (26).

Приведенный порядок системы есть всегда число рациональное и может быть найден по формуле

$$p_0 = \max_{1 \leqslant i \leqslant N} \frac{p_i}{i}, \qquad (28^*)$$

где p_i — степень многочлена $p_i(s)$ (см. тождество (25)) по совокупности пространственных переменных ([10]).

Определение 2. *Система (1) с приведенным порядком* $p_0=\frac{m}{k}$ $\left(\text{дробь } \frac{m}{k} \text{ несократима}\right)$ *имеет нормальный тип, если*

1) все m_0 равны нулю;
2) $n_i \leqslant k$ $(i=1, \ldots, N_1)$;
3) $\sum\limits_{i=1}^{n} m_i \leqslant m.$

Задача Коши для системы (1) ставится следующим образом: ищется такая система функций $u_1(x, t), \ldots, u_{N_1}(x, t)$, которая удовлетворяет системе (1) и начальным условиям

$$\frac{\partial^k u_i(x, 0)}{\partial t^k}=\varphi_{ki}(x) \qquad \begin{matrix} k=0, \ldots, n_i-1; \\ i=1, \ldots, N_1. \end{matrix} \tag{29}$$

Теорема 1. *Задача Коши для всякой системы вида (1) может быть сведена к задаче Коши для системы нормального типа.*

Доказательство. Согласно теореме 4 § 1, систему (1) можно свести к системе уравнений вида:

$$\frac{\partial^{k_j} u_j(x_1, \ldots, x_n, t)}{\partial t^{k_j}}=\sum_{l=1}^{k_j} P_{lj}\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial^{k_j-l} u_j(x_1, \ldots, x_n, t)}{\partial t^{k_j-l}}, \tag{30}$$

$\left(j=1, \ldots, p, \quad 1 \leqslant p \leqslant N, \sum\limits_{j=1}^{p} k_j=N, \; P_{lj}\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) \text{ — полином от } i\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, i\frac{\partial}{\partial x_n}\right).$

Пусть система (1) обычным образом сводится к системе

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}=P\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x, t), \tag{31}$$

а система (30) — к системе

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}=Q\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u(x, t), \tag{32}$$

и пусть оператор $R\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)$ переводит каждое решение системы (32) в решение системы (31). Задача Коши (1) — (29) сводится к следующей задаче Коши: требуется найти функции $u_1(x, t), \ldots, u_p(x, t)$, удовлетворяющие системе (30) и начальным условиям:

$$\left.\frac{\partial^k u_j(x, t)}{\partial t^k}\right|_{t=0}=\psi_{jk}(x) \quad \begin{pmatrix} k=0, \ldots, k_j-1 \\ j=1, \ldots, p \end{pmatrix}. \tag{33}$$

При этом функции $\psi_{jk}(x)$ следующим образом связаны с функциями $\varphi_{kl}(x)$: вектор-функция

$$\psi(x)=\{\psi_{10}(x), \ldots, \psi_{1k_1-1}(x), \psi_{20}(x), \ldots, \psi_{p0}(x), \ldots, \psi_{pk_p-1}(x)\}$$

должна быть решением системы

$$R\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x)=\varphi(x),$$

где

$$\varphi(x)=\{\varphi_{10}(x),\ldots,\varphi_{1n_1-1}(x),\ldots,\varphi_{N_1 0}(x),\ldots,\psi_{N_1 n_{N_1}-1}(x)\}.$$

Такое решение $\psi(x)$ существует в силу теоремы Эренпрейса ([5]).

Как было установлено в § 1, характеристические корни исходной системы (1) не меняются при сведении ее к уравнению (13) (системе (14)), следовательно, приведенный порядок p_0 у обеих систем одинаков. Пусть $p_0=\frac{m}{k}$, и дробь $\frac{m}{k}$ несократима.

Приведение системы (30) к системе нормального типа можно произвести следующим образом: введем новые искомые функции

$$u_{j_1}(x,t)=\frac{\partial u_j(x,t)}{\partial t},\ldots,u_{jk_j-1}(x,t)=\frac{\partial^{k_j-1}u_j(x,t)}{\partial t^{k_j-1}};\qquad (34')$$

$$\left.\begin{aligned}
&u_{jk_j-2}^{<r_1^1\ldots r_n^1>}(x,t)=\frac{\partial^m u_{jk_j-2}(x,t)}{\partial x_1^{r_1^1}\ldots\partial x_n^{r_n^1}}\qquad\left(\sum_{i=1}^{n}r_i^1=m\right),\\
&u_{jk_j-3}^{<r_1^1\ldots r_n^1>}(x,t)=\frac{\partial^m u_{jk_j-3}(x,t)}{\partial x_1^{r_1^1}\ldots\partial x_n^{r_n^1}},\\
&u_{jk_j-3}^{<r_1^1\ldots r_n^1;\,r_1^2\ldots r_n^2>}(x,t)=\frac{\partial^{2m}u_{jk_j-3}(x,t)}{\partial x_1^{r_1^1+r_1^2}\ldots\partial x_n^{r_n^1+r_n^2}}\qquad\left(\begin{aligned}\sum_i r_i^1=m\\ \sum_i r_i^2=m\end{aligned}\right),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&u_j^{<r_1^1\ldots r_n^1>}(x,t)=\frac{\partial^m u_j(x,t)}{\partial x_1^{r_1^1}\ldots\partial x_n^{r_n^1}},\ldots,\\
&u_j^{<r_1^1\ldots r_n^1;\,\ldots;\,r_1^{k_j-1}\ldots r_n^{k_j-1}>}(x,t)=\frac{\partial^{(k_j-1)m}u_j(x,t)}{\partial x_1^{r_1^1+\ldots+r_1^{k_j-1}}\ldots\partial x_n^{r_n^1+\ldots+r_n^{k_j-1}}}
\end{aligned}\right\}\qquad (34'')$$

$$\left(j=1,\ldots,p;\; x=(x_1,\ldots,x_n),\;\sum_{i=1}^{n}r_i^l=m\quad l=1,\ldots,k_j-1\right).$$

В силу формулы (28′), степень p_{lj} полинома $P_{lj}(s)$ по совокупности переменных $s_1,\ldots,s_n$ удовлетворяет неравенству $p_{lj}\leqslant l\frac{m}{k}\leqslant lm$. Поэтому мы можем написать:

$$P_{lj}\left(i\frac{\partial}{\partial x_1},\ \dots,\ i\frac{\partial}{\partial x_n}\right)=P_{lj}^1\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)+$$

$$+\sum_{<r_1^1\dots r_n^1>}\frac{\partial^m}{\partial x_1^{r_1^1}\dots\partial x_n^{r_n^1}}P_{lj}^{<r_1^1\dots r_n^1>}\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)+$$

$$+\dots+\sum_{<r_1^1\dots r_n^1;\ \dots;\ r_1^{l-1}\dots r_n^{l-1}>}\frac{\partial^{m(l-1)}}{\partial x_1^{r_1^1+\dots+r_1^{l-1}}\dots\partial x_n^{r_n^1+\dots+r_n^{l-1}}}\times$$

$$\times P_{lj}^{<r_1^1\dots r_n^1;\ \dots;\ r_1^{l-1}\dots r_n^{l-1}>}\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right),$$

$$\left(\sum r_i^k=m,\ k=1,\ \dots,\ l-1\right),$$

где степень полинома $P_{lj}^{<r_1^1\dots r_n^1;\ \dots;\ r_1^L\dots r_n^L>}(s)$ $(1\leqslant L\leqslant l-1)$ по совокупности переменных $s_1,\ \dots,\ s_n$ не превосходит m.

Тогда систему (30) можно написать в виде:

$$\left\{\begin{array}{ll}
\dfrac{\partial v_{jr}(x,\ t)}{\partial t}=u_{jr+1}(x,\ t) & (35')\\
\qquad r=0,\ \dots,\ k_j-k-1), & \\
\dfrac{\partial^h u_{jkj-h}(x,\ t)}{\partial t^h}=\displaystyle\sum_{l=1}^{k_j}\Big[P_{lj}^1\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u_{jk_j-l}(x,\ t)+\dots+ & \\
+\displaystyle\sum_{<r_1^1\dots r_n^{l-1}>}P_{lj}^{<r_1^1\dots r_n^{l-1}>}\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)u_{jk_j-l}^{<r_1^1\dots r_n^{l-1}>}(x,\ t)\Big] & (35'')\\
\left(h=1,\ \dots,\ k,\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n}r_i^\alpha=m\quad \alpha=1,\ \dots,\ l-1\right), & \\
\dfrac{\partial u_{jk_j-\varkappa}^{<r_1^1\dots r_n^1;\ \dots;\ r_1^q\dots r_n^q>}(x,\ t)}{\partial t}=\dfrac{\partial^m u_{jk_j-\varkappa+1}^{<r_1^1\dots r_n^1;\ \dots;\ r_1^{q-1}\dots r_n^{q-1}>}(x,\ t)}{\partial x_1^{r_1^q}\dots\partial x_n^{r_n^q}} & (35''')\\
\left(2\leqslant q+1\leqslant\varkappa\leqslant k_j;\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n}r_i^\alpha=m,\quad \alpha=1,\ \dots,\ q\right) & \\
\qquad (j=1,\ \dots,\ p;\ u_{j_0}(x,\ t)\equiv u_j(x,\ t)). &
\end{array}\right.$$

Для того, чтобы убедиться, что система (35′)—(35″)—(35‴) имеет нормальный тип, нужно показать, что ее приведенный порядок равен $\frac{m}{k}$, т. к. свойства 1), 2) и 3) для нее в этом случае, очевидно, выполнены.

Переход от системы (30) к системе (35′) — (35″) — (35‴) можно осуществить с помощью конечного числа операций, каждая из которых преобразует систему (30) путем введения новой функции $v_k = \frac{\partial u_k}{\partial t}$ либо новой функции $v_{kj} = \frac{\partial u_k}{\partial x_j}$. Проверим, что при каждой такой операции, приводящей систему вида (1) (а системы (30) и (35′) — (35″) — (35‴) имеют именно такой вид) к системе того же вида, сохраняются все характеристические корни системы и могут добавиться разве лишь нулевые корни. Это показывает непосредственный подсчет. В самом деле, как было показано в § 1, при введении новой функции $v_k = \frac{\partial u_k}{\partial t}$ характеристический определитель не меняется. Следовательно, в этом случае характеристические корни совпадают.

В результате же введения новой искомой функции $v_{kj} = \frac{\partial u_k(x, t)}{\partial x_j}$, получим систему, характеристический определитель которой имеет вид:

$$D_1 = \left| \begin{array}{ccccc} \lambda^{n_1} - \sum\limits_{<m_s>} A^{11}_{<m_s>}(\lambda s) \ldots & - \sum\limits_{\substack{<m_s> \\ m_j = 0}} A^{1k}_{<m_s>}(\lambda s) \ldots & \ldots - \sum\limits_{<m_s>} A^{1N_1}_{<m_s>}(\lambda s) & - \sum\limits_{\substack{<m_s> \\ m_j > 0}} A^{1k}_{<m_s>}(\lambda s)_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ - \sum\limits_{<m_s>} A^{N_1 1}_{<m_s>}(\lambda s) \ldots & - \sum\limits_{\substack{<m_s> \\ m_j = 0}} A^{N_1 k}_{<m_s>}(\lambda s) \ldots \lambda^{n_{N_1}} - & \ldots - \sum\limits_{<m_s>} A^{N_1 N_1}_{<m_s>}(\lambda s) & - \sum\limits_{\substack{<m_s> \\ m_j > 0}} A^{N_k}_{<m_s>}(\lambda s)_1 \end{array} \right| = \lambda D$$

(здесь символ (λs) означает $\lambda^{m_0}(-is_1)^{m_1} \ldots (-is_n)^{m_n}$, а $(\lambda s)_1 = \lambda^{m_0}(-is_1)^{m_1} \ldots (-is_j)^{m_j - 1} \ldots (-is_n)^{m_n}$).

Таким образом, в этом случае добавляется нулевой характеристический корень.

Поскольку совокупность характеристических корней системы (35′) — (35″) — (35‴) может отличаться от совокупности характеристических корней системы (30) только нулевыми корнями, мы можем заключить, что эти системы имеют одинаковый приведенный порядок $p_0 = \frac{m}{k}$. Таким образом, система (35′) — (35″) — (35‴) является системой нормального типа.

Для того, чтобы задача Коши для системы (35′) — (35″) — (35‴) была эквивалентна задаче Коши для системы (30), нужно поставить дополнительные начальные условия вполне аналогично тому, как это делается при сведении задачи Коши для линейной системы типа Ковалевской к задаче Коши для линейной системы первого порядка.

Если функции $u_1(x, t), \ldots, u_p(x, t)$ удовлетворяют системе (30) и начальным условиям (33), то, очевидно, функции

$$u_j(x, t);$$

$$u_{jk}(x, t) \qquad (k=1, \ldots, k_j-1);$$

$$u_{jk_j-k}^{<r_1^1 \ldots r_n^1>}(x, t), \ldots, u_{jk_j-k}^{<r_1^1 \ldots r_n^1; \ldots; r_1^{k-1} \ldots r_n^{k-1}>}(x, t) \tag{36}$$

$$(k=2, \ldots, k_j)$$

$$(j=1, \ldots, p)$$

удовлетворяют системе (35′) — (35″) — (35‴) и начальным условиям

$$u_{j\alpha}(x, 0)=\psi_{j\alpha}(x) \tag{37'}$$

$$(\alpha=0, \ldots, k_j-k-1; \; j=1, \ldots, p)$$

$$\frac{\partial^\beta u_{j\alpha}(x, 0)}{\partial t^\beta}=\psi_{j\alpha+\beta}(x) \tag{37''}$$

$$(\beta=0, \ldots, k_j-\alpha-1; \; \alpha=k_j-k, \ldots, k_j-1; \; j=1, \ldots, p)$$

$$u_{jk_j-\alpha}^{<r_1^1 \ldots r_n^1; \ldots; r_1^q \ldots r_n^q>}(x, 0)=\frac{\partial^{qm} \psi_{jk_j-\alpha}(x)}{\partial x_1^{r_1^1+\ldots+r_1^q} \ldots \partial x_n^{r_n^1+\ldots+r_n^q}} \tag{37'''}$$

$$(q=1, \ldots, \alpha-1, \quad \alpha=2, \ldots, k_j, \; j=1, \ldots, p).$$

Покажем, что и обратно, если функции (36) удовлетворяют системе (35′) — (35″) — (35‴) и начальным условиям (37′) — (37″) — (37‴), то функции $u_1(x, t), \ldots, u_p(x, t)$ удовлетворяют системе (30) и начальным условиям (33).

Действительно, из соотношения (35″) следует, что

$$\frac{\partial u_{jk_j-1}(x, t)}{\partial t}=\frac{\partial^2 u_{jk_j-2}(x, t)}{\partial t^2}=\ldots=\frac{\partial^k u_{jk_j-k}}{\partial t^k}, \tag{38}$$

отсюда получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[u_{jk_j-1}(x, t)-\frac{\partial}{\partial t} u_{jk_j-2}(x, t)\right]=0,$$

но т. к. в силу (37″) выражение в квадратных скобках равно нулю при $t=0$, получаем

$$u_{jk_j-1}(x, t)=\frac{\partial}{\partial t} u_{jk_j-2}(x, t)$$

и т. д.

Таким образом, с учетом (35′), получаем

$$\frac{\partial u_{jr}(x, t)}{\partial t}=u_j^{r+1}(x, t) \quad \text{для } r=0, \ldots, k_j-2, \; j=1, \ldots, p. \tag{39}$$

Воспользовавшись далее соотношением (35‴) при $q=1$, получаем

$$\frac{\partial u_{jk_j-\varkappa}^{<r_1^1\ldots r_n^1>}(x,\,t)}{\partial t}=\frac{\partial^m u_{jk_j-\varkappa+1}(x,\,t)}{\partial x_1^{r_1^1}\ldots\partial x_n^{r_n^1}}\quad\text{при } \varkappa=2,\,\ldots,\,k_j.$$

Отсюда и из (39) имеем

$$\frac{\partial u_{jk_j-\varkappa}^{<r_1^1\ldots r_n^1>}}{\partial t}=\frac{\partial^{m+1}u_{jk_j-\varkappa}}{\partial t\,\partial x_1^{r_1^1}\ldots\partial x_n^{r_n^1}},$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[u_{jk_j-\varkappa}^{<r_1^1\ldots r_n^1>}-\frac{\partial^m u_{jk_j-\varkappa}}{\partial x_1^{r_1^1}\ldots\partial x_n^{r_n^1}}\right]=0,$$

$$(\varkappa=2,\,\ldots,\,k_j).$$

Т. к., в силу (37‴), выражение в квадратных скобках обращается в нуль при $t=0$, из последнего равенства получаем

$$u_{jk_j-\varkappa}^{<r_1^1\ldots r_n^1>}=\frac{\partial^m u_{jk_j-\varkappa}}{\partial x_1^{r_1^1}\ldots\partial x_n^{r_n}}. \tag{40}$$

Воспользовавшись теперь соотношением (37‴) при $q=2$ ($\varkappa\geqslant 3$) и используя (39) и (40), получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}u_{jk_j-\varkappa}^{<r_1^1\ldots r_n^1;\,r_1^2\ldots r_n^2>}=\frac{\partial^m u_{jk_j-\varkappa+1}^{<r_1^1\ldots r_n^1>}}{\partial x_1^{r_1^2}\ldots\partial x_n^{r_n^2}}=\frac{\partial^{2m}u_{jk_j-\varkappa+1}}{\partial x_1^{r_1^1+r_1^2}\ldots\partial x_n^{r_n^1+r_n^2}}=$$

$$=\frac{\partial^{2m+1}u_{jk_j-\varkappa}}{\partial t\,\partial x_1^{r_1^1+r_1^2}\ldots\partial x_n^{r_n^1+r_n^2}}$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[u_{jk_j-\varkappa}^{<r_1^1\ldots r_n^1;\,r_1^2\ldots r_n^2>}-\frac{\partial^{2m}u_{jk_j-\varkappa}}{\partial x_1^{r_1^1+r_1^2}\ldots\partial x_n^{r_n^1+r_n^2}}\right]=0.$$

Опять, используя (37‴), заключаем, что

$$u_{jk_j-\varkappa}^{<r_1^1\ldots r_n^1;\,r_1^2\ldots r_n^2>}=\frac{\partial^{2m}u_{jk_j-\varkappa}}{\partial x_1^{r_1^1+r_1^2}\ldots\partial x_n^{r_n^1+r_n^2}}.$$

Продолжая этот процесс, докажем, что имеют место равенства (34″). Выполнения равенств (34′) доказано выше (они совпадают с соотношениями (39)). Подставляя в (35) (например, при $h=k$) вместо функций

$$u_{ja}(x,\ t)\ (\alpha = 1, \dots, k_j)$$

и

$$u_{jk_j-\beta}^{<r_1^1 \dots r_n^1;\ \dots;\ r_1^q \dots r_n^q>}(x,\ t) \quad (q = 1, \dots, \beta - 1;\ \beta = 2, \dots, k_j,$$

$$j = 1, \dots, p)$$

их выражения через производные функций $u_1(x,\ t), \dots, u_p(x,\ t)$, получим, что функции $u_1(x,\ t), \dots, u_p(x,\ t)$ удовлетворяют системе (32). Начальные условия (33), очевидно, выполняются в силу условий (37′) и (37″). Таким образом, задача Коши (32)—(33), к которой мы выше свели исходную задачу Коши (1)—(29), эквивалентна задаче Коши (35′)—(35″)—(35‴)—(37′)—(37″)—(37‴), что и заканчивает доказательство теоремы.

Следствие. *Если для системы вида (1) $p_0 = 0$, то она может быть сведена к системе обыкновенных дифференциальных уравнений.*

Доказательство. Считая $p_0 = \frac{0}{1}$, по доказанному можем свести исходную систему к системе вида (1) с матрицей

$$p\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right) \equiv P,$$

элементами которой являются постоянные числа.

Замечание. Сведение системы вида (1) к системе нормального типа часто позволяет понижать порядок системы. Так, если p_0 — целое число, то из всех систем вида (1) с приведенным порядком p_0 наименьший порядок по пространственным переменным будет иметь система нормального типа. В самом деле, известно ([1]), что, если p_0 — порядок системы (1), а p_0 — ее приведенный порядок, то $p_0 \leqslant p$. Поскольку система нормального типа с приведенным порядком p_0, в случае, когда p_0 — целое число, есть система порядка p_0, то она и имеет среди всех систем с заданным p_0 наименьший порядок.

г. Москва

Поступило
21 IX 57.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, Преобразования Фурье быстро растущих функций и вопросы единственности задачи Коши, УМН, т. VIII, в. 6 (58), 1953. 2. А. И. Мальцев, Основы линейной алгебры, Гостехиздат, 1948. 3. Г. Е. Шилов, Об условиях корректности задачи Коши для систем дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами, УМН, т. X, в. 4 (66), 1955. 4. Ф. Р. Гантмахер, Теория матриц, Гостехиздат, 1953. 5. L. Ehrenpreis, Solution of some problems of division. Part I. Amer. T. Math., 76, № 4, 1954. 6. L. Schwartz, Théorie des distributions, t. I, II, Paris, pp. 99, 1951. 7. Б. Л. Ван-дер-Варден, Современная алгебра, ч. I, Гостехиздат, 1947. 8. А. В. Бицадзе, О единственности задачи Дирихле для эллиптических уравнений с частными производными, УМН, т. III, в. 6 (28), 1948. 9. И. Г. Петровский, О некоторых проблемах теории уравнений с частными производными, УМН, т. I, в. 3—4, 1946. 10. В. М. Борок, Приведение системы линейных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами к нормальному типу, ДАН СССР, т. 115, в. I, 1957. 11. В. М. Борок, Приведение эволюционной системы линейных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами к одному уравнению, ДАН СССР, т. 114, в. 6, 1957.