В. И. Ушаков, Структурно-системные изоморфизмы непериодических локально нильпотентных групп, *Изв. вузов. Матем.*, 1957, номер 1, 223–226

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ
1957 МАТЕМАТИКА № 1

В. И. Ушаков

СТРУКТУРНО-СИСТЕМНЫЕ ИЗОМОРФИЗМЫ НЕПЕРИОДИЧЕСКИХ ЛОКАЛЬНО НИЛЬПОТЕНТНЫХ ГРУПП

В работе Канторовича и Плоткина [1] доказано, что в случае групп без кручения нильпотентность (а следовательно, и локальная нильпотентность) есть структурное свойство. Естественно попытаться обобщить этот результат на случай произвольных нильпотентных групп. Примеры показывают, однако, что эти попытки обречены на неудачу: абелева группа, являющаяся прямым произведением двух циклических групп 3-го порядка, структурно изоморфна симметрической группе 3-й степени, которая не имеет центра (утверждение Биркгофа [8], что группа, структурно изоморфная абелевой группе, метабелева, является, таким образом, ошибочным).

Такие примеры имеются и для непериодических нильпотентных групп. Рассмотрим, например, абелеву группу G, представимую в виде прямого произведения циклической группы 9-го порядка и бесконечной циклической группы, с одной стороны, и группу G' с образующими a и b и определяющими соотношениями $a^9=1$, $bab^{-1}=a^4$ — с другой. Как показал Бэр [3], структуры их подгрупп изоморфны; в то же время верхний центральный ряд группы G' стабилизируется после первого шага, не доходя до самой группы.

Положение существенным образом изменится, если мы будем рассматривать структурно-системные изоморфизмы непериодических нильпотентных и локально нильпотентных групп.

Напомним, что две ассоциативные системы (полугруппы) называются структурно-системно изоморфными, если изоморфны структуры их подсистем, т. е. между элементами этих структур можно установить такое взаимно однозначное соответствие, при котором сохраняется отношение частичной упорядоченности. Структурно-системным изоморфизмом группы G называется изоморфное отображение φ структуры ее подсистем на структуру подсистем некоторой, вообще говоря, системы G^{φ} (как показала Петропавловская [2], структурно-системный образ периодической группы не всегда является группой).

Впервые структурно-системные изоморфизмы групп рассматривались Петропавловской [2], которая доказала, что всякая непериодическая абелева группа определяется структурой своих подсистем, т. е. из структурно-системного изоморфизма между непериодической абелевой группой G и системой G' следует, что G и G' изоморфны.

Будем рассматривать структурно-системные изоморфизмы непериодических нильпотентных групп (изучение структурно-системных изоморфизмов периодических групп не дает ничего нового, так как в этом случае структура подсистем совпадает со структурой подгрупп).

Известно (Бэр [4]), что совокупность всех элементов конечного порядка произвольной нильпотентной группы G образует нормальный делитель, который мы будем называть периодической частью группы G и обозначать через $P(G)$. Фактор-группа $G/P(G)$ уже не содержит элементов конечного порядка, т. е. является группой без кручения.

Имеет место следующая лемма:

Лемма. *Пусть G — непериодическая нильпотентная группа, G^φ — ее образ при структурно системном изоморфизме φ. Тогда, если порядки всех элементов $P(G)$ ограничены в совокупности, то G^φ будет непериодической группой, обладающей возрастающим центральным рядом.*

Доказательство. Тот факт, что G^φ — непериодическая группа, следует из теорем 1.9 и 1.6 работы Петропавловской [2].

Докажем, что центр $Z_1 = Z(G)$ группы G содержит элементы бесконечного порядка.

Допустим, что это не так. Тогда найдется такое первое $i \geqslant 1$, что Z_{i+1}/Z_i — непериодическая группа (Z_i — i-й — гиперцентр группы G). Пусть z_{i+1} — элемент из Z_{i+1}, никакая степень которого не лежит в Z_i. Так как Z_{i+1}/Z_i — центр группы G/Z_i, то для любого $g \in G$ будет $[z_{i+1}, g] = z_i \in Z_i$ (через $[z_{i+1}, g]$ обозначен коммутатор элементов z_{i+1} и g). Рассмотрим фактор-группу $\overline{G} = G/Z_{i-1}$. Будем иметь

$$[\overline{z}_{i+1}, \overline{g}] = \overline{z}_i \in \overline{Z}_i = Z_i / Z_{i-1},$$

где

$$\overline{z}_{i+1} = z_{i+1} Z_{i-1}, \ \overline{g} = g Z_{i-1}, \ \overline{z}_i = z_i Z_{i-1}.$$

Так как $\overline{Z}_i$ — центр группы $\overline{G}$, то $\overline{z}_{i+1}\overline{z}_i = \overline{z}_i \overline{z}_{i+1}$. Отсюда вытекает перестановочность элементов $\overline{z}_{i+1}$ и $\overline{g}^{-1}\overline{z}_{i+1}\overline{g}$. В силу периодичности Z_i найдется такое k, что для любого g будет $[z_{i+1}, g]^k = 1$ (если порядки элементов $P(G)$ ограничены числом n, то в качестве k достаточно взять $n! = 1 \cdot 2 \dots n$). Но тогда для любого $\overline{g} \in \overline{G}$

$$[\overline{z}^k_{i+1}, \overline{g}] = [\overline{z}_{i+1}, \overline{g}]^k = \overline{1} \ (\overline{1} \text{ — единица группы } \overline{G}),$$

откуда $z^k_{i+1} \in Z_i$ против предположения.

Таким образом, $Z(G)$ — непериодическая группа.

Докажем теперь, что $Z(G)^\varphi = Z(G^\varphi)$.

Рассмотрим подгруппу

$$\{g', Z(G)^\varphi\},$$

где g' — произвольный элемент из G^φ. Пусть элемент $g \in G$ таков, что

$$\{g, Z(G)\}^\varphi = \{g', Z(G)^\varphi\}.$$

Так как $\{g, Z(G)\}$ — непериодическая абелева группа, то, согласно теореме 2.9 из работы [2], подгруппа $\{g', Z(G)^\varphi\}$ такая же. Следовательно, $Z(G)^\varphi \subseteq Z(G^\varphi)$. Так как $Z(G)^\varphi$ содержит элементы бесконечного порядка и содержится в центре группы G^φ, то, применив к группе G^φ обратный изоморфизм φ^{-1}, получим при помощи аналогичных рассуждений, что

$$Z(G^\varphi)^{\varphi^{-1}} \subseteq Z(G),$$

откуда $Z(G^\varphi) \subseteq Z(G)^\varphi$.

Так как для нильпотентных групп без кручения наша лемма вытекает из теоремы Канторовича и Плоткина, то можно считать, что $P(G) \neq E$. Известно (Черников [6]), что всякий отличный от E нормальный делитель группы, обладающий возрастающим центральным рядом, имеет нетривиальное пересечение с ее центром. Отсюда вытекает, что

$$H = P(G) \cap Z(G) \neq E$$

(E — единичная подгруппа).

Согласно теореме 1.8 из работы [2], $P(G)^\varphi$ является периодической подгруппой G^φ. Эта подгруппа содержит все элементы конечного порядка группы G^φ, ибо в противном случае из рассмотрения обратного изоморфизма φ^{-1} немедленно вытекало бы существование в группе G элемента конечного порядка, не принадлежащего $P(G)$. Таким образом, нами установлено существование периодической части группы G^φ и равенство

$$P(G^\varphi) = P(G)^\varphi.$$

А тогда, согласно определению структурно-системного изоморфизма

$$H^\varphi = P(G)^\varphi \cap Z(G)^\varphi = P(G^\varphi) \cap Z(G^\varphi).$$

Изоморфизм φ индуцирует структурно-системный изоморфизм фактор-групп G/H и G^φ/H^φ. Так как G/H удовлетворяет условию леммы, то к ней применимы аналогичные рассуждения, позволяющие построить с помощью трансфинитной индукции возрастающие центральные ряды

$$E = H_0 \subset H_1 = H \subset H_2 \subset \cdots \subset H_\alpha \subset H_{\alpha+1} \subset \cdots \subset H_\gamma = P(G),$$

$$E = H_0^\varphi \subset H_1^\varphi = H^\varphi \subset H_2^\varphi \subset \cdots \subset H_\alpha^\varphi \subset H_{\alpha+1}^\varphi \subset \cdots \subset H_\gamma^\varphi = P(G^\varphi),$$

где

$$H_{\alpha+1}/H_\alpha = P(G/H_\alpha) \cap Z(G/H_\alpha),$$

а на предельных местах стоят объединения предшествующих членов.

Так как $G/P(G)$ — нильпотентная группа без кручения, то остается применить теорему Канторовича и Плоткина.

Условия леммы заведомо выполняются для непериодических нильпотентных групп с конечным числом образующих. В самом деле, известно (Бэр [5]), что, если фактор-группа нильпотентной группы по коммутанту имеет конечное число образующих, то группа удовлетворяет условию максимальности для подгрупп и, следовательно, любая ее подгруппа обладает конечным числом образующих. Отсюда следует (так как всякая периодическая нильпотентная группа локально конечна), что периодическая часть $P(G)$ нильпотентной группы G с конечным числом образующих конечна.

Согласно доказанной лемме, структурно-системный образ G^φ непериодической нильпотентной группы G с конечным числом образующих является непериодической группой, обладающей возрастающим центральным рядом.

Очевидно, далее, что группа G^φ имеет конечное число образующих, а потому, ввиду локальной нильпотентности групп с возрастающим центральным рядом, она нильпотентна.

Сделанное замечание позволяет доказать следующую теорему:

Теорема. *Пусть G — локально нильпотентная непериодическая группа, G^φ — ее образ при структурно-системном изоморфизме φ. Тогда G^φ будет локально нильпотентной непериодической группой.*

Доказательство. Возьмем в G локальную систему $\{G_\alpha\}$, состоящую из нильпотентных групп с конечным числом образующих. Если некоторые G_α не содержат элементов бесконечного порядка, то рассмотрим локальную систему подгрупп $\{G_\alpha'\}$, $G_\alpha'=\{G_\alpha, g\}$, где g — элемент бесконечного порядка группы G. Мы получим, таким образом, локальную систему, составленную из непериодических нильпотентных групп с конечным числом образующих. Очевидно, что $\{G_\alpha'^{\varphi}\}$ будет локальной системой подгрупп группы G^{φ}. Так как все $G_\alpha'^{\varphi}$, по доказанному, нильпотентны, то G^{φ} локально нильпотентна.

Заметим, что доказанная теорема аналогична теореме Плоткина из [7] о том, что в случае групп, ранг которых $\geqslant 2$, локальная нильпотентность есть структурное свойство и находится к ней в таком же отношении, в каком теорема Петропавловской ([2], теор. 2.9) к теореме Бэра ([3], теорема 13.1).

Вопрос о том, определяется ли непериодическая локально нильпотентная группа структурой своих подсистем, остается пока открытым*.

В заключение автор выражает глубокую благодарность А. Г. Курошу за внимание к этой работе.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
14 X 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. П. Г. Канторович, Б. М. Плоткин, Структуры с аддитивным базисом, Мат. сб., 35, стр. 187—192, 1954. 2. Р. В. Петропавловская, Об определяемости группы структурой ее подсистем, Мат. сб., 29, стр. 63—78, 1951. 3. R. Baer, The significance of the system of subgroups for the structure of the group, Amer. J. Math., 61, pp. 1—44, 1939. 4. R. Baer, Nilpotent groupsand their generalization, Trans. Amer. Math. Soc., 47, pp. 393—434, 1940. 5. R. Baer, Representation of groups as quotient groups, Trans. Amer. Math. Soc., 58, pp. 295—419, 1945. 6. С. Н. Черников, К теории полных групп, Мат. сб., 22, стр. 319—348, 1948. 7. Б. И. Плоткин, Радикальные группы, Док. дис., МГУ, 1955. 8. Г. Биркгоф, Теория структур, М., 1952.

* Решение его для локально нильпотентных групп без кручения см. в статье А. С. Пекелиса, опубликованной в этом номере. Ред.