

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

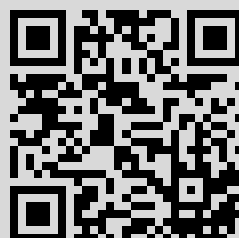
Г. Я. Попов, О спаренных интегро-дифференциальных уравнениях изгиба лежащей на упругом полупространстве неограниченной плиты кусочно-постоянной жесткости, *Изв. вузов. Матем.*, 1957, номер 1, 195–209

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 176.52.29.84

5 марта 2023 г., 23:45:18



Г. Я. Попов

О СПАРЕННЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ ИЗГИБА ЛЕЖАЩЕЙ НА УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ НЕОГРАНИЧЕННОЙ ПЛИТЫ КУСОЧНО-ПОСТОЯННОЙ ЖЕСТКОСТИ

Задача об изгибе неограниченной плиты постоянной жесткости в предположении отсутствия трения и сцепления между плитой и полупространством, насколько нам известно, решена О. Я. Шехтер [1].

Однако решение аналогичной задачи для случая плиты кусочно-постоянной жесткости в литературе отсутствует. В настоящей работе показывается, что данная задача сводится к решению спаренных интегро-дифференциальных уравнений; даётся точное решение в замкнутом виде этих уравнений*.

§ 1. Пусть на упругом полупространстве ($z \geq 0$) с характеристиками упругости E , ν покоится тонкая плита неограниченных размеров такая, что при $x < 0$ ($-\infty < y < \infty$) она имеет жесткость D_1 , а при $x > 0$ ($-\infty < y < \infty$) — жесткость D_2 . Если нагрузка, действующая на плиту, задана в виде

$$q(x, y) = q_\lambda(x) \cos \lambda y, \quad -\infty < x, y < \infty, \quad (1.1)$$

то напряжения под плитой представятся в таком же виде:

$$p(x, y) = p_\lambda(x) \cos \lambda y, \quad -\infty < x, y < \infty. \quad (1.2)$$

Функции $q_\lambda(x)$ и $p_\lambda(x)$ будем называть „амплитудами“ нагрузки и напряжений, соответственно.

Смещения граничной плоскости ($z=0$) полупространства ($z \geq 0$), а также и прогибы плиты (из условия контакта), как нетрудно убедиться, [6] представятся в виде

$$w(x, y) = u(x) \cos \lambda y, \quad -\infty < x, y < \infty, \quad (1.3)$$

где „амплитуда“ прогибов плиты $u(x)$ равна

$$u(x) = \theta \int_{-\infty}^{\infty} K_0(\lambda |x - \xi|) p(\xi) d\xi, \quad \theta = \frac{2(1-\nu^2)}{\pi E}. \quad (1.4)$$

Здесь через $K_0(z)$ обозначена функция Макдональда. В дальнейшем всюду будем считать, что $\lambda > 0$.

* К этим же уравнениям сводится также и задача об изгибе двух полубесконечных плит ($x > 0$, $x < 0$, соответственно), лежащих на упругом полупространстве и сочлененных каким-либо образом между собой.

Прогобы плиты, как известно, должны удовлетворять уравнениям:

$$\begin{aligned} D_1 \Delta \Delta w(x, y) &= q(x, y) - p(x, y), \quad x < 0, \\ D \Delta \Delta w(x, y) &= q(x, y) - p(x, y), \quad x > 0. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Учитывая (1.1—1.6) после элементарных выкладок, приходим к спаренным интегродифференциальным уравнениям для „амплитуды“, напряженной под плитой*

$$\left\{ \begin{aligned} c_1^3 p_\lambda(x) + \left(\frac{d^2}{dx^2} - \lambda^2 \right)^2 \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_0(\lambda |x - \xi|) p_\lambda(\xi) d\xi &= c_1^3 q_\lambda(x), \quad x < 0, \\ c_2^3 p_\lambda(x) + \left(\frac{d^2}{dx^2} - \lambda^2 \right)^2 \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_0(\lambda |x - \xi|) p_\lambda(\xi) d\xi &= c_2^3 q_\lambda(x), \quad x > 0, \end{aligned} \right. \quad (1.6)$$

где

$$c_j = [\pi^0 D_j]^{-1}, \quad j = 1, 2.$$

Мы получим решение системы (1.6) для любой, представимой в виде интеграла Фурье „амплитуды“ нагрузки $q_\lambda(x)$, если решим систему (1.6) для случая, когда

$$q_\lambda(x) = e^{i\lambda x}, \quad -\infty < x < \infty. \quad (1.7)$$

Решение системы (1.6) для случая (1.7) удобно представить в виде суммы решений системы (1.6), полученных для случаев:

$$q_\lambda(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ e^{i\lambda x}, & x > 0; \end{cases} \quad (1.8)$$

$$q_\lambda(x) = \begin{cases} e^{i\lambda x}, & x < 0; \\ 0, & x > 0. \end{cases} \quad (1.9)$$

Мы здесь изложим приём нахождения решения системы (1.6) для случая (1.8), т.е. для такой системы:

$$\left\{ \begin{aligned} c_1^3 \varphi_\xi(x) + \left(\frac{d^2}{dx^2} - \lambda^2 \right)^2 \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_0(\lambda |x - \xi|) \varphi_\xi(\xi) d\xi &= 0, \quad x < 0, \\ c_2^3 \varphi_\xi(x) + \left(\frac{d^2}{dx^2} - \lambda^2 \right)^2 \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_0(\lambda |x - \xi|) \varphi_\xi(\xi) d\xi &= e^{i\lambda x}, \quad x > 0, \\ \operatorname{Im} [\xi] &> 0. \end{aligned} \right. \quad (1.10)$$

Аналогично найдётся решение системы (1.6) для случая (1.9)

* Ясно, что с решением полученных спаренных уравнений ещё не решается полностью задача о нахождении напряжений под плитой, так как нужно ещё удовлетворить тем или иным условиям сопряжения в точке изменения жесткостей либо же в точке сочленения двух полубесконечных плит. На условиях сопряжения в случае неограниченной плиты кусочно-постоянной жесткости мы остановимся в конце заметки.

§ 2. Будем искать решение системы (1.10) в классе абсолютно интегрируемых функций, т. е.

$$\varphi_{\xi}(x) \in L(-\infty, \infty). \quad (2.1)$$

Приём нахождения решения заключается в формальном переносе известной процедуры решения интегральных уравнений Винера—Хопфа [3], [4], [5] на систему (1.10) с последующим обоснованием.

Представим систему (1.10) в таком виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1^3 \varphi_{\xi}(x) + \left(\frac{d^2}{dx^2} - \lambda^2 \right)^2 \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_0(\lambda |x - \xi|) \varphi_{\xi}(\xi) d\xi = b_{\xi}^{+}(x), \\ c_2^3 \varphi_{\xi}(x) + \left(\frac{d^2}{dx^2} - \lambda^2 \right)^2 \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_0(\lambda |x - \xi|) \varphi_{\xi}(\xi) d\xi = f^{+}(x) + b_{\xi}^{-}(x), \end{array} \right. \quad (2.2)$$

где

$$f^{+}(x) = 0, \quad x < 0; \quad f^{+}(x) = e^{i\xi x}, \quad x \geq 0, \quad \text{Im}[\xi] > 0,$$

$b_{\xi}^{\pm}(x)$ — неизвестные функции такие, что

$$b_{\xi}^{+}(x) \equiv 0, \quad x < 0; \quad b_{\xi}^{-}(x) \equiv 0, \quad x > 0. \quad (2.3)$$

Введем, далее, обозначения для преобразований Фурье функций, фигурирующих в (2.2):

$$\Phi_{\xi}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{\xi}(x) e^{i\omega x} dx, \quad B_{\xi}^{-}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} b_{\xi}^{-}(x) e^{i\omega x} dx, \quad (2.4)$$

$$B_{\xi}^{+}(\omega) = \int_0^{\infty} b_{\xi}^{+}(x) e^{i\omega x} dx, \quad \omega = u + iv.$$

При этом функции $B_{\xi}^{\pm}(\omega)$ будут регулярны соответственно в верхней и нижней полуплоскости в силу (2.3).

Умножив оба уравнения (2.2) на e^{iux} и проинтегрировав в интервале $(-\infty, \infty)$, вместо (2.2) получим

$$\Phi_{\xi}(u) R_1(u) = B_{\xi}^{+}(u), \quad -\infty < u < \infty, \quad (2.5)$$

$$\Phi_{\xi}(u) R_2(u) = i(u + \xi)^{-1} + B_{\xi}^{-}(u).$$

Здесь мы воспользовались известным соотношением

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_0(\lambda x) e^{iux} dx = \pi(u^2 + \lambda^2)^{-\frac{1}{2}} \quad (2.6)$$

и ввели обозначения *

$$R_j(u) = c_j^3 + (u^2 + \lambda^2)^{\frac{3}{2}}, \quad j = 1, 2. \quad (2.7)$$

Из (2.5) видно, что

$$\Phi_\xi(u) = \frac{B_\xi^+(w)}{R_1(u)} = \frac{i(u + \xi)^{-1} + B_\xi^-(u)}{R_2(u)}. \quad (2.8)$$

Откуда следует, что

$$\frac{R_2(u)}{R_1(u)} B_\xi^+(u) - B_\xi^-(u) = \frac{i}{u + \xi}. \quad (2.9)$$

Пусть, далее произведена факторизация аналитической функции $R_1(w)R_2^{-1}(w)$, т. е. найдены такие аналитические функции $\psi^\pm(w)$, регулярные и отличные от нуля соответственно в верхней и в нижней полуплоскости (включая границу), что

$$R_1(w)R_2^{-1}(w) = \psi^+(w)\psi^-(w). \quad (2.10)$$

С учетом (2.10) соотношение (2.9) можно представить в виде

$$\frac{B_\xi^+(w)}{\psi^+(w)} - \psi^-(w)B_\xi^-(w) = \frac{i\psi^-(w)}{w + \xi}. \quad (2.11)$$

И, далее

$$\frac{B_\xi^+(w)}{\psi^+(w)} - \kappa_\xi^+(w) = \psi^-(w)B_\xi^-(w) + \kappa_\xi^-(w), \quad (2.12)$$

где функция

$$\kappa_\xi^+(w) = i\psi^-(-\xi)w + \xi^{-1} \quad (2.13)$$

регулярна в верхней полуплоскости; и функция

$$\kappa_\xi^-(w) = i[\psi^-(w) - \psi^-(-\xi)](w + \xi)^{-1} \quad (2.14)$$

регулярна в нижней полуплоскости.

Таким образом, приходим к тому, что левая и правая часть (2.12) суть части некоторой целой функции, поскольку первая представляет из себя регулярную функцию в верхней полуплоскости (включая границу), а вторая же обладает аналогичным свойством в нижней полуплоскости.

Примем, что указанная целая функция представляет из себя полином $P(w)$ не выше второй степени, т. е.

$$P(w) = O(w^2), \quad w \rightarrow \infty. \quad (2.15)$$

Тогда из (2.12) найдем, что

$$B_\xi^+(w) = [\kappa_\xi^+(w) + P(w)]\psi^+(w), \quad (2.16)$$

$$B_\xi^-(w) = [P(w) - \kappa_\xi^-(w)][\psi^-(w)]^{-1}. \quad (2.17)$$

* Условимся во всём дальнейшем выбирать ту однозначную ветвь функции $z = \sqrt{w^2 + \lambda^2}$, которая определена в области полученной из плоскости w путём удаления лучей $(-i\infty, -i\lambda)$ и $(i\lambda, i\infty)$, и которая принимает положительные значения, когда w вещественно.

Подставив (2.15) в (2.8) с учетом (2.13), найдем

$$\Phi_{\xi}(w) = \frac{\psi^{+}(w)}{R_1(w)} \left[\frac{i \psi^{-}(-\xi)}{w + \xi} + P(w) \right] \quad (2.18)$$

и, следовательно,

$$\varphi_{\xi}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi^{+}(u)}{R_1(u)} \left[\frac{i \psi^{-}(-\xi)}{u + \xi} + P(u) \right] e^{-iux} du, \quad -\infty < x < \infty. \quad (2.19)$$

§ 3. Прежде чем доказывать, что полученное формально решение (2.19) системы (1.10) действительно является решением последней, остановимся на нахождении функций $\psi^{\pm}(w)$. При этом мы воспользуемся тем, что факторизацию выражения

$$\frac{(w^2 + \lambda^2)^{3/2}}{c_j^3 + (w^2 + \lambda^2)^{3/2}} = \psi_j(w) \psi_j(-w), \quad j = 1, 2, \quad (3.1)$$

даст аналитическая функция

$$\psi_j(w) = \prod_{k=1}^3 \chi_j^{(k)}(w); \quad \psi_j(\infty) = 1; \quad j = 1, 2, \quad (3.2)$$

регулярная и отличная от нуля в верхней полуплоскости (включая и границу).

При этом функция $\chi_j^{(k)}(w)$ равна

$$\chi_j^{(k)}(w) = \chi_j^{(k)}(i \lambda \cos \tau) =$$

$$= \sqrt{\frac{\cos \tau + 1}{\cos \tau + \cos \sigma_j^{(k)}}} \exp \left[\frac{1}{2\pi} \int_{\tau - \sigma_j^{(k)}}^{\tau + \sigma_j^{(k)}} \frac{u}{\sin u} du \right], \quad (3.3)$$

$$\lambda \sin \sigma_j^{(k)} = a_j^{(k)}, \quad j = 1, 2, \quad k = 1, 2, 3,$$

где числа $a_j^{(k)}$ входят в разложение

$$R_j(w) = c_j^3 + (w^2 + \lambda^2)^{3/2} = \prod_{k=1}^3 (V \overline{w^2 + \lambda^2} - a_j^{(k)}), \quad j = 1, 2 \quad (3.4)$$

и равны

$$a_j^{(1)} = c_j \epsilon, \quad a_j^{(2)} = c_j \bar{\epsilon}, \quad a_j^{(3)} = -c_j, \quad j = 1, 2; \quad (2\epsilon = 1 + i\sqrt{3}). \quad (3.5)$$

Нетрудно видеть из (3.5), что

$$\operatorname{Re}[a_j^{(k)}] > 0, \quad k = 1, 2; \quad \operatorname{Re}[a_j^{(3)}] < 0; \quad j = 1, 2. \quad (3.6)$$

Функция $\chi_j^{(k)}(w)$, заданная в виде (3.3), является регулярной и отличной от нуля в верхней полуплоскости, включая и границу.

Коль скоро найдена функция $\psi_j(w)$, дающая факторизацию выражения (3.2), нетрудно найти* функции, дающие факторизацию нужного здесь выражения (2.10), а именно:

$$\psi^+(w) = \psi(w) = \psi_2(w) \psi_1^{-1}(w); \quad (3.7)$$

$$\psi^-(w) = \psi(-w) = \psi_2(-w) \psi_1^{-1}(-w).$$

Из соотношений (3.2), (3.7) следует:

$$\psi(\infty) = 1. \quad (3.8)$$

Если ввести обозначение**

$$\Lambda(w) = \psi(w) R_1^{-1}(w) = [\psi(-w) R_2(w)]^{-1}, \quad (3.9)$$

то формулы (2.19) и (2.18) можно написать так:

$$\Phi_\xi(w) = \Lambda(w) [i(w + \xi)^{-1} \psi(\xi) + P(w)], \quad (3.10)$$

$$\varphi_\xi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Lambda(u) [i(u + \xi)^{-1} \psi(\xi) + P(u)] e^{iux} du, \quad (3.11)$$

$$-\infty < x < \infty.$$

Покажем теперь, что функция (3.11) является абсолютно-интегрируемой в интервале $(-\infty, \infty)$, и что её преобразованием Фурье служит функция (3.10), т. е., что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_\xi(x) e^{iux} dx = \Phi_\xi(u), \quad -\infty < u < \infty. \quad (3.12)$$

Для этого сперва заметим, что функция $\Lambda(w)$, как это следует из (3.9), имеет такие и только такие особые точки:

- 1) две точки ветвления $w = i\lambda$, $w = -i\lambda$,
- 2) два полюса в нижней полуплоскости α_j , $j = 1, 2$, совпадающих

* Чтобы убедиться в том, что функция (3.2) действительно удовлетворяет соотношению (3.1), достаточно, воспользовавшись соотношением (3.4), разложить правую часть (3.1) на множители:

$$\frac{(w^2 + \lambda^2)^{3/2}}{c_j^3 + (w^2 + \lambda^2)^{3/2}} = \prod_{k=1}^3 \left[\frac{V \overline{w^2 + \lambda^2}}{V \overline{w^2 + \lambda^2} - a_j^{(k)}} \right], \quad j = 1, 2,$$

а затем воспользоваться результатом В. А. Фока ([2] стр. 87), который заключается в том, что функция, заданная в виде (3.3), доставляет факторизацию выражения

$$\frac{V \overline{w^2 + \lambda^2}}{V \overline{w^2 + \lambda^2} - a_j^{(k)}} = \chi_j^{(k)}(w) \chi_j^{(k)}(-w),$$

и что

$$\chi_j^{(k)}(\infty) = 1.$$

** Последнее равенство в (3.9) доказывается так:

$$\frac{\psi(w)}{R_1(w)} = \frac{\psi(w)}{R_1(w)} \frac{R_2(w)}{R_2(w)} = \frac{\psi(w)}{\psi(w) \psi(-w) R_2(w)} = \frac{1}{\psi(-w) R_2(w)}.$$

с корнями $R_1(w)$, т. е.

$$\alpha_j = \sqrt{[a_1^{(j)}]^2 - \lambda^2}, \quad \text{Im}[\alpha_j] < 0, \quad j = 1, 2, \quad (3.13)$$

3) два полюса в верхней полуплоскости β_j , $j=1, 2$, совпадающих с корнями $R_2(w)$, т. е. *

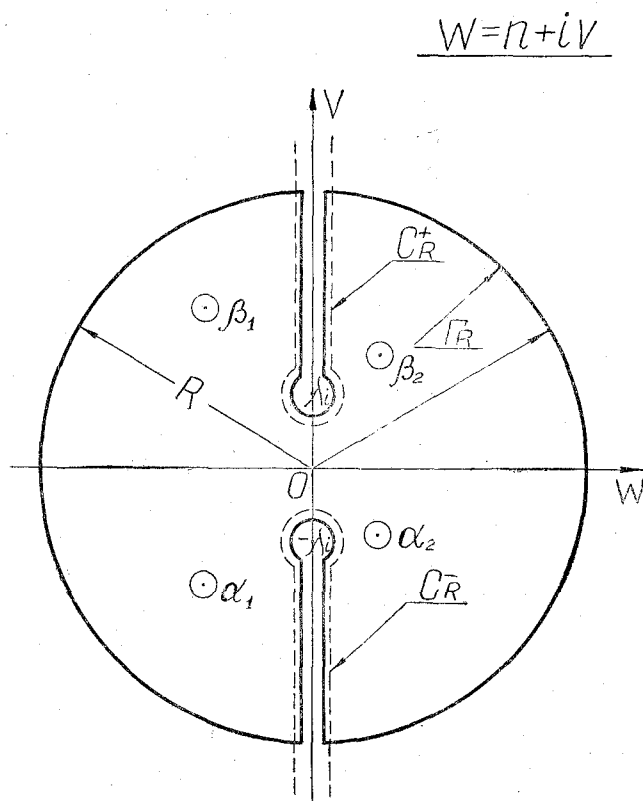
$$\beta_j = \sqrt{[a_2^{(j)}]^2 - \lambda^2}, \quad \text{Im}[\beta_j] > 0, \quad j = 1, 2. \quad (3.14)$$

Обозначим вычеты функции $\Delta(w)$ в полюсах α_j, β_j через $\overline{\lambda(\alpha_j)}, \overline{\lambda(\beta_j)}, j=1, 2$.

На основании теоремы Коши можем записать

$$\Phi_{\xi}(w) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_D} \Lambda(z) \left[\frac{i\psi(z)}{z+w} + P(z) \right] \frac{dz}{z-w} - \text{Res} [\Phi_{\xi}(w)]. \quad (3.15)$$

Контур Γ_R показан на фиг. 1.



Фиг. 1.

* Такое количество полюсов объясняется следующим. Во-первых, функции $R_j(w)$ $j=1, 2$ можно представить в виде (3.4). Затем, из условия (было выше оговорено) выделения однозначной ветви функции $z = \sqrt{w^2 + \lambda^2}$ следует, что она отображает плоскость переменного w с разрезами вдоль лучей $(-i\infty, -i\lambda)$ и $(i\lambda, i\infty)$ на правую полуплоскость переменного z . Наконец, нужно учитывать справедливость (3.6).

Из (3.15) при $R \rightarrow \infty$ с учетом (3.9) и (3.8) получаем

$$\begin{aligned} \Phi_{\xi}(w) = & \sum_{j=1}^2 \left[\frac{i\psi(\xi)}{\beta_j + \xi} + P(\beta_j) \right] \frac{\bar{\lambda}(\beta_j)}{w - \beta_j} + \sum_{j=1}^2 \frac{\bar{\lambda}(\alpha_j)}{w - \alpha_j} \left[\frac{i\psi(\xi)}{\alpha_j + \xi} + P(\alpha_j) \right] + \\ & + \frac{1}{R_2(-\xi)(w + \xi)} - \frac{i}{\pi} \int_{\lambda}^{\infty} \frac{P_1(s, \lambda)}{\psi(is)} \left[\frac{i\psi(\xi)}{\xi - is} + P(-is) \right] \frac{ds}{w + is} - \\ & - \frac{i}{\pi} \int_{\gamma}^{\infty} \left[\frac{i\psi(\xi)}{\xi + is} + P(is) \right] \frac{P_2(s, \lambda) \psi(is)}{w - is} ds. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Разность значений функций $\Delta(z)$ на противоположных берегах вычислялась по легко проверяемым формулам

$$\Delta(-is + 0) - \Delta(-is - 0) = -2iP_2(s, \lambda)\psi^{-1}(is), \quad (3.17)$$

$$\Delta(is + 0) - \Delta(is - 0) = 2iP_1(s, \lambda)\psi(is), \quad (3.18)$$

где

$$P_j(s, \lambda) = \frac{(s^2 + \lambda^2)^{3/2}}{e_j^6 + (s^2 - \lambda^2)}; \quad j = 1, 2. \quad (3.19)$$

Теперь преобразуем формулу (3.11).

Для этого при $x < 0$ путь интегрирования нужно продеформировать в петлю C_R^+ (см. фиг. 1) и воспользоваться формулой (3.18), а при $x > 0$ в петлю C_R^- (см. фиг. 1) и воспользоваться формулой (3.17), в результате получим:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_{\lambda}^{\infty} P_1(s, \lambda) \psi(is) \left[\frac{i\psi(\xi)}{\xi + is} + P(is) \right] e^{sx} ds + \\ + i \sum_{j=1}^2 \left[\frac{i\psi(\xi)}{\beta_j + \xi} + P(\beta_j) \right] \bar{\lambda}(\beta_j) e^{-i\beta_j x}, & x < 0, \\ - \frac{1}{\pi} \int_{\lambda}^{\infty} \frac{P_2(s, \lambda)}{\psi(is)} \left[\frac{i\psi(\xi)}{\xi - is} + P(-is) \right] e^{-sx} ds - \\ - i \sum_{j=1}^2 \left[\frac{i\psi(\xi)}{\alpha_j + \xi} + P(\alpha_j) \right] \bar{\lambda}(\alpha_j) e^{-i\alpha_j x} + e \frac{i\xi x}{R_2(\xi)}, & x > 0. \end{cases} \quad (3.20)$$

Откуда, если учесть (3.13) и (3.14), следует, что действительно $\psi_{\xi}(x)$ является абсолютно интегрируемой функцией.

В справедливости (3.12) можно теперь убедиться, если (3.20) проинтегрировать с весом e^{iux} в интервале $(-\infty, \infty)$ и учесть соотношение (3.16).

Для дальнейшего нам понадобится функция $\bar{u}(x)$, связанная с „амплитудой“ прогибов $u(x)$ плиты, как будет видно из дальнейшего соотношения

$$\bar{u}(x) = \theta \pi u(x), \quad (3.21)$$

и равная

$$\begin{aligned} \bar{u}(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi_{\xi}(u)}{\sqrt{u^2 + \lambda^2}} e^{-iux} du = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Lambda(u)}{\sqrt{u^2 + \lambda^2}} \left[\frac{i\psi(\xi)}{w + \xi} + P(w) \right] e^{-iux} du. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Формулу (3.22) преобразуем посредством деформирования пути интегрирования при $x < 0$ в петлю c_R^+ , а при $x > 0$ в петлю c_R^- (см. фиг. 1), в результате вместо (3.22) получим:

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} -\frac{c_1^3}{\pi} \int_{\lambda}^{\infty} \frac{P_1(s, \lambda) \psi(is)}{(s^2 - \lambda^2)^2} \left[\frac{i\psi(\xi)}{\xi + is} + P(is) \right] e^{sx} + \\ + i \sum_{j=1}^2 \left[\frac{i\psi(\xi)}{\beta_j + \xi} + P(\beta_j) \right] \frac{\bar{\lambda}(\beta_j) e^{-i\beta_j x}}{\sqrt{\beta_j^2 + \lambda^2}}, \quad x < 0, \\ \frac{c_1^3}{\pi} \int_{\lambda}^{\infty} \frac{P_2(s, \lambda)}{\psi(i, s)} \left[\frac{i\psi(\xi)}{\xi - is} + P(-is) \right] \frac{e^{-sx}}{(s^2 - \lambda^2)^2} - \\ - i \sum_{j=1}^2 \left[\frac{i\psi(\xi)}{\alpha_j + \xi} + P(\alpha_j) \right] \frac{\bar{\lambda}(\alpha_j) e^{-i\alpha_j x}}{\sqrt{\alpha_j^2 + \lambda^2}} + \frac{e^{i\xi x}}{R_2(\xi) \sqrt{\xi^2 + \lambda^2}}, \quad x > 0. \end{cases} \quad (3.23)$$

Теперь немного осталось добавить для того, чтобы доказать, что функция, взятая в виде (3.20) или (3.11), действительно удовлетворяет системе (1.10) при любом x ($-\infty < x < \infty$), кроме, быть может, $x = 0$, причём $P(w)$ выбирается не выше второй степени.

Подставим $\varphi_{\xi}(x)$, взятую в виде (3.11), в оба уравнения системы (1.10).

Изменив порядок интегрирования во вторых членах левой части, вместо (1.10), имея в виду (2.6) и (3.22), получим

$$\begin{aligned} c_1^3 \varphi_{\xi}(x) + \left(\frac{d^2}{dx^2} - \lambda^2 \right)^2 \bar{u}(x) &= 0, \quad x < 0, \\ c_2^3 \varphi_{\xi}(x) + \left(\frac{d^2}{dx^2} - \lambda^2 \right)^2 \bar{u}(x) &= e^{i\xi x}, \quad x > 0. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Изменение порядка интегрирования, которое мы совершили в условно сходящихся интегралах

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_0(\lambda |x - \xi|) d\xi \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{\xi}(u) e^{-iux} dx = \\ & = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi_{\xi}(u)}{\sqrt{u^2 + \lambda^2}} e^{-iux} du \end{aligned} \quad (3.25)$$

при получении из системы (1.10) соотношений (3.24), обосновывается следующим образом.

Известно, что

$$K_0(x) \in L^2(-\infty, \infty),$$

и что функция $(u^2 + \lambda^2)^{-\frac{1}{2}}$ является преобразованием Фурье функции $\pi^{-1} K_0(\lambda x)$.

Нами доказано, что функция

$$\varphi_{\xi}(x) \in L(-\infty, \infty),$$

и что $\Phi_{\xi}(u)$ является её преобразованием Фурье.

Следовательно, на основании теоремы 65 из [3], функции

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_0(\lambda |x - \xi|) \varphi_{\xi}(\xi) d\xi \quad \text{и} \quad \Phi_{\xi}(u) [u^2 + \lambda^2]^{-1/2}$$

суть преобразования Фурье из класса $L^2(-\infty, \infty)$, и поэтому должны быть связаны формулой [3];

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_0(\lambda |x - \xi|) \varphi_{\xi}(\xi) d\xi = \\ & = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi_{\xi}(u)}{\sqrt{u^2 + \lambda^2}} \cdot \frac{e^{-iux} - 1}{-iu} \cdot du. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Поскольку интеграл в правой части абсолютно сходится как до, так и после дифференцирования, и подинтегральное выражение непрерывно дифференцируемо на всей действительной оси по обоим переменным x и u , то после дифференцирования под знаком интеграла в (3.26) получаем соотношение (3.25), которое и требовалось доказать*.

Теперь, чтобы доказать соотношения (3.24), нужно подставить туда $\varphi_{\xi}(x)$ в виде (3.20) и $\bar{u}(x)$ в виде (3.23).

После выполнения нужных дифференцирований, законность которых (за исключением точки $x=0$) нетрудно усмотреть, и вспоминая, что α_1, α_2 суть корни $R_1(w)$, а β_1, β_2 суть корни $R_2(w)$, убеждаемся, что соотношения (3.24) удовлетворяются (за исключением, быть может, точки $x=0$), а тем самым доказывается, что функция (3.11) или (3.20) действительно является решением спаренных уравнений (1.10).

* Между прочим, из доказанного соотношения (3.25) и из формулы (1.4) для „амплитуды“ прогибов следует соотношение (3.21).

Чтобы получить решение последних для случая (1.7), как уже отмечалось, еще нужно найти решение системы (1.6) при (1.9), т. е. (что равносильно) решить систему

$$c_1^3 \varphi_\omega(x) + \left(\frac{d^2}{dx^2} - \lambda^2 \right)^2 \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_0(\lambda|x-\xi|) \varphi_\omega(\xi) d\xi = e^{i\omega x},$$

$$x < 0, \quad \text{Im}[\omega] < 0,$$
(3.27)

$$c_2^3 \varphi_\omega(x) + \left(\frac{d^2}{dx^2} - \lambda^2 \right)^2 \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_0(\lambda|x-\xi|) \varphi_\omega(\xi) d\xi = 0, \quad x > 0,$$

которая решается точно так же, как и система (1.10). Мы здесь приведем только окончательную формулу:

$$\varphi_\omega(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta(u) \left[P(u) - \frac{i}{\psi(-\omega)} \frac{1}{u+\omega} \right] e^{-iux} du,$$
(3.28)

$$\text{Im}[\omega] < 0.$$

§ 4. Как уже отмечалось, на решении системы (1.6) задача о нахождении напряжений под плитой не заканчивается.

Нужно ещё удовлетворить условиям сопряжения по линии $x=0$, которые будут различными в зависимости от того, решается ли задача об одной неограниченной плиты со скачкообразным изменением жесткости по линии $x=0$, либо же задача о двух полубесконечных плитах, сочлененных так или иначе по той же линии.

Оказывается, что, располагаясь произвольным полиномом $P(\omega)$, вошедшим в решения (3.11) и (3.28), можно удовлетворить всем условиям сопряжения. Покажем это на примере неограниченной плиты с изменением жесткости по линии $x=0$.

В этом случае, как известно, условия сопряжения, при учёте (1.3) и (3.21), выпишутся так:

$$\begin{aligned} \bar{u}(+0) &= \bar{u}(-0), \quad \bar{u}'(+0) = \bar{u}'(-0), \\ \bar{u}''(+0) &= \bar{u}''(-0), \quad \bar{u}'''(+0) = \bar{u}'''(-0), \end{aligned}$$
(4.1)

т. е. мы должны требовать непрерывности в точке $x=0$ функции $\bar{u}(x)$ до третьей производной включительно. Однако, чтобы эти условия выполнялись, как это видно, например, из формулы (3.22), с учётом (3.9) и (3.8), достаточно положить

$$P(\omega) \equiv 0$$
(4.2)

Из формулы для „амплитуды“ напряжений под плитой (3.11) на основании (4.2) следует, что она будет функцией непрерывной* во всем промежутке $(-\infty, \infty)$.

В заключение мы получим формулу для напряжений под плитой, когда она нагружена сосредоточенной силой в точке $y=0$, $x=\eta > 0$.

* Если рассматривать задачу о двух полубесконечных плитах, соединенных так или иначе между собой по линии $x=0$, то полином $P(\omega)$ нужно брать отличным от нуля, и напряжения под плитой будут обладать особенностями по линии $x=0$. Подробный анализ этого случая мы проведем в отдельной заметке.

Для этого нам понадобится решение $\varphi_u(x)$ системы (1.6) при правой части вида (1.7), которое на основании (1.10) и (3.27) можно, учитывая (4.2), представить в виде

$$\varphi_u(x) = c_1^3 \varphi_w(x) + c_2^3 \varphi_\xi(x), \quad \text{Im}[\xi, w] = 0,$$

т. е.

$$\begin{aligned} \varphi_u(x) = & -\frac{ic_1^3}{2\pi} \int_{-\infty-\delta i}^{\infty-\delta i} \Lambda(w) \frac{e^{-iwx} dw}{\psi(-u)(u+w)} + \\ & + \frac{ic_2^3}{2\pi} \int_{-\infty+\delta i}^{\infty+\delta i} \Lambda(w) \frac{\psi(u)}{u+w} e^{-iwx} dw, \quad \delta > 0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

При достаточно малом положительном δ совершенная в формулах (3.11) и (3.28) сдвигка пути интегрирования законна.

Далее, можно убедиться, что „амплитуду“ нагрузки $q_\lambda(x)$ типа

$$q_\lambda^0(x) = \begin{cases} 0, & x < \eta \\ b, & \eta < x < \eta + \Delta\eta \\ 0, & x > \eta + \Delta\eta \end{cases} \quad (4.4)$$

можно представить в виде интеграла Фурье:

$$q_\lambda^0(x) = \frac{b}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\eta u}}{iu} (1 - e^{-i\Delta\eta u}) e^{iux} du. \quad (4.5)$$

Тогда соответствующую „амплитуду“ напряжений под плитой получим по формуле

$$P_\lambda^0(x) = \frac{b}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\eta u}}{iu} (1 - e^{-i\Delta\eta u}) \varphi_u(x) du. \quad (4.6)$$

Подставив (4.3) в (4.6), изменим там порядок интегрирования*, затем, воспользовавшись леммой Жордана убедимся, что первые повторные интегралы тождественно равны нулю, т. е. получим

$$P_\lambda^0(x) = -\frac{ic_2^3}{2\pi} \int_{-\infty+i\delta}^{\infty+i\delta} \Lambda(w) e^{-iwx} dw \frac{b}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{-i\Delta\eta u}}{iu} \cdot \frac{\psi(u)}{w+u} e^{-i\eta u} du, \quad (4.7)$$

$$\eta > 0.$$

Преобразуем второй интеграл в формуле (4.7)

$$I(w; \eta) = \frac{b}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{-i\Delta\eta u}}{iu} \cdot \frac{\psi(u)}{w+u} e^{-i\eta u} du$$

путем деформирования пути интегрирования по действительной оси

* Законность чего легко обосновать, если перед подстановкой (4.3) в (4.6) сделать там замену $w = s \pm \delta i$, в результате чего оба повторных интеграла окажутся абсолютно сходящимися.

в петлю c_R^- (см. фиг. 1), в результате чего получим

$$I(w; \eta) = \frac{b\gamma}{\pi} \int_{\lambda}^{\infty} \frac{1 - e^{-\Delta\eta s}}{s} \frac{P_2(s, \lambda)}{\psi(is)} \frac{e^{-\eta s}}{w - is} ds -$$

$$- ib \sum_{j=1}^2 \frac{\bar{\lambda}(z_j) R_1(\alpha_j)}{w + \alpha_j} \cdot \frac{1 - e^{-i\Delta\eta\alpha_j}}{i\alpha_j} e^{-i\eta\alpha_j} + \frac{b(1 - e^{i\Delta\eta w})}{w} \psi(-w) e^{i\eta w}. \quad (4.8)$$

При получении (4.8) нужно иметь в виду, что на основании (2.10), (3.7) и (3.9) справедливо равенство

$$\psi(w) = \frac{R_1(w)}{R_2(w) \psi(-w)} = R_1(w) \Lambda(w), \quad (4.9)$$

и что

$$\psi(-is + 0) - \psi(-is - 0) = 2\gamma i \frac{P_2(s, \lambda)}{\psi(is)}, \quad (4.10)$$

где

$$\gamma = c_2^3 - c_1^3. \quad (4.11)$$

Введём обозначение

$$J(x; \lambda, z) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Lambda(u)}{u - z} e^{-iux} du, \quad \text{Im}[z] > 0. \quad (4.12)$$

Подставив теперь (4.8) в (4.7) и изменив там порядок интегрирования, учитывая при этом возможность положить $\delta = 0$, а также (3.9) и (4.12), получим

$$P_{\lambda}^0(x) = \frac{b\gamma c_2^3}{\pi} \int_{\lambda}^{\infty} \frac{1 - e^{-\Delta\eta s}}{s} \frac{P_2(s, \lambda)}{\varphi(is)} J(x; \lambda, is) e^{-\eta s} ds -$$

$$- \frac{ibc_2^3}{\pi} \sum_{j=1}^2 \bar{\lambda}(\alpha_j) R_1(\alpha_j) J(x; \lambda, -\alpha_j) \frac{1 - e^{-i\Delta\eta\alpha_j}}{i\alpha_j} e^{-i\eta\alpha_j} +$$

$$+ \frac{ic_2^3 b}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{i\Delta\eta u}}{u} \cdot \frac{e^{-i(x-\eta)u}}{R_2(u)} du. \quad (4.13)$$

Пользуясь формулой (4.13), нетрудно получить формулу для напряжений $P_0(x, y)$ под плитой для случая сосредоточенной нагрузки, распределенной с интенсивностью Q вдоль участка $(-a, a)$, параллельного оси Y и удаленного от неё на расстоянии $\eta > 0$. Для этого нужно, во-первых, учесть, что такая нагрузка представима в виде

$$q_0(x, y) = \delta(x - \eta) \frac{2Q}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin a\lambda \cos \lambda y}{\lambda} d\lambda, \quad -\infty < x, y < \infty,$$

где $\delta(t)$ — импульсная функция Дирака.

Затем, полагая $\lim b \Delta\eta = Q$, $\Delta\eta \rightarrow 0$ и учитывая

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-\mu}}{\mu} = 1,$$

нужно совершить предельный переход $\Delta\eta \rightarrow 0$ в формуле (5.13) и проинтегрировать потом с весом $\frac{2Q}{\pi\lambda} \sin a\lambda$ в интервале $(0, \infty)$. В результате всего этого получим

$$\begin{aligned} P_0(x, y) = & \frac{2Q\gamma c_2^3}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{\sin \lambda a \cos \lambda y}{\lambda} d\lambda \int_\lambda^\infty \frac{P_2(s, \lambda)}{\psi(is)} J(x; \lambda, is) e^{-\eta s} ds - \\ & - \frac{2Qic_2^3}{\pi^2} \sum_{j=1}^2 \int_0^\infty \frac{\sin \lambda a}{\lambda} \cos \lambda y J(x; \lambda, -\alpha_j) \bar{\lambda}(\alpha_j) R_1(\alpha_j) e^{-i\eta\alpha_j} d\lambda + \\ & + \frac{c_2^3}{2\pi^2} Q \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\sin \lambda a}{\lambda} \frac{\cos \lambda y \cos(x - \eta) u}{R_2(u)} du d\lambda, \\ & -\infty < x, \quad y < \infty. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Наконец, если в последней формуле совершить предельный переход $a \rightarrow 0$, полагая $\lim 2aQ = P$, то получим формулу для напряжений $P(x, y)$ под плитой, когда к ней приложена сосредоточенная сила P в точке $x = \eta > 0$, $y = 0$:

$$\begin{aligned} P(x, y) = & \frac{P\gamma c_2^3}{\pi^2} \int_0^\infty \cos \lambda y d\lambda \int_\lambda^\infty \frac{P_2(s, \lambda)}{\psi(is)} J(x; \lambda, is) e^{-\eta s} ds - \\ & - i \frac{Pc_2^3}{\pi} \sum_{j=1}^2 \int_0^\infty J(x; \lambda, -\alpha_j) \bar{\lambda}(\alpha_j) R_1(\alpha_j) e^{-i\eta\alpha_j} \cos \lambda y d\lambda + \\ & + \frac{c_2^3 P}{2\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\cos(x - \eta) u \cos \lambda y}{c_2^3 + (u^2 + \lambda^2)^{3/2}} d\lambda du, \quad -\infty < x, \quad y < \infty. \end{aligned} \quad (4.15)$$

В заключение пользуюсь случаем выразить сердечную благодарность М. Г. Крейну за ценные советы по данной работе.

Одесский инженерно-строительный институт

Поступило
30 IX 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. О. Я. Шехтер, Расчет бесконечной фундаментной плиты на упругом полупространстве, Свайные и естественные основания, Сб. № 10, тр. НИС треста глубинных работ, 1939. 2. Г. А. Гринберг, В. А. Фок, К теории береговой рефракции электромагнитных волн, Исследования по распространению радиоволн,

II, 1948. 3. Е. Титчмарш, Введение в теорию интегралов Фурье, 1948.
4. И. И. Гохберг, М. Г. Крейн, О парном интегральном уравнении и его транспонированном, Теорет. и прикл. мат-ка, Львов (в печати).
5. И. М. Рапопорт, О некоторых интегральных и интегро-дифференциальных уравнениях, Сб. тр. ин-та мат., № 12, Киев. 6. В. Л. Рвачёв, Давление на упругое полупространство штампа, имеющего в плане форму полосы, ПММ, т. XX, 6. 2, 1956. 7. И. М. Рыжик, И. С. Градштейн, Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений, 1957. 8. Г. Я. Попов, Об интегральном уравнении, к которому приводится задача о расчёте полубесконечной плиты, лежащей на упругом полупространстве, ПММ (в печати).
