Г. Е. Изотов, О совместном приведении квадратичной и эрмитовой форм, *Изв. вузов. Матем.*, 1957, номер 1, 143–159

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1957 МАТЕМАТИКА № 1

Г. Е. Изотов

О СОВМЕСТНОМ ПРИВЕДЕНИИ КВАДРАТИЧНОЙ И ЭРМИТОВОЙ ФОРМ

Введение

Целью настоящей работы является решение задачи совместного приведения к каноническому виду квадратичной формы ([5], § 20)

$$\beta(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = B_{ab}\mathbf{X}^a\mathbf{X}^b = \mathbf{X}\mathbf{B}(\mathbf{X}),$$

где

$$B_a = B_{ab}X^b, \quad B_{ba} = B_{ab}, \tag{1}$$

и эрмитовой формы ([5], § 25)

$$\sigma(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = S_{a\bar{b}}\, X^a \overline{X}^b = \mathbf{X}\mathbf{S}(\mathbf{X}),$$

где

$$S_a = S_{a\bar{b}}\, \overline{X}^b, \quad S_{b\bar{a}} = \overline{S}_{a\bar{b}}, \tag{2}$$

в комплексном центроаффинном пространстве R_n. Эта задача, в частности, важна потому, что составляет алгебраическую основу построения теории гиперповерхностей второго порядка бипланарного пространства эллиптического типа ([4], [6], [7]), дающего возможность, как показал А. П. Норден [3], действительного представления геометрий комплексных пространств и геометрической интерпретации отображений с помощью аналитических функций многих комплексных переменных. Изложение вышеуказанной теории автор настоящей работы надеется сделать в особой статье.

Задачи совместного приведения пары квадратичных форм, пары эрмитовых форм, пары линейной и эрмитовой форм изложены в ряде работ (напр. [1], [5], [8], [9]). Автор не нашел работ, в которых рассмотрена задача совместного приведения квадратичной и эрмитовой форм, сформулированная в начале настоящего введения.

В дальнейшем изложении считаются известными основные факты теории квадратичных и эрмитовых форм, причем автор придерживается терминологии, употребленной в [5].

§ 1. Совместное приведение квадратичной и эрмитовой форм R_n. Постановка задачи

Задачу совместного приведения пары форм (1), (2) R_n к каноническому виду с помощью центроаффинных преобразований сведем к задаче нахождения векторов $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$, удовлетворяющих при любых значениях величины $\mathbf{X}$ условиям

$$\left.\begin{aligned} \sigma(\mathbf{X}, \mathbf{U}) &= \mu\beta(\mathbf{X}, \mathbf{V}), \\ \sigma(\mathbf{X}, \mathbf{V}) &= \nu\beta(\mathbf{X}, \mathbf{U}) \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

или, что то же, *основной системе* уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{S}(\overline{\mathbf{U}}) - \mu\mathbf{B}(\mathbf{V}) &= 0, \\ -\overline{\mathbf{V}}\overline{\mathbf{B}}(\overline{\mathbf{U}}) + \overline{\mathbf{S}}(\mathbf{V}) &= 0, \end{aligned}\right\} \text{ т. е. } \left.\begin{aligned} S_{a\bar{b}}\overline{U}^b - \mu B_{ab}V^b &= 0, \\ -\bar{\nu}\overline{B}_{ab}\overline{U}^b + \overline{S}_{a\bar{b}}\, V^b &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Корни *(главные числа) характеристического уравнения* относительно $\mu\bar{\nu}$

$$P_n(\mu\bar{\nu}) \equiv \begin{vmatrix} (S_{a\bar{b}}) & -\mu(B_{ab}) \\ -\bar{\nu}(\bar{B}_{ab}) & (\bar{S}_{a\bar{b}}) \end{vmatrix} = 0 \qquad (5)$$

определяют нетривиальные решения **U**, **V** системы (4).

Нам потребуются следующие свойства характеристического уравнения:

1) Степень (5) $\leqslant n$, что видно после разложения определителя, входящего в (5), по минорам, образованным элементами n первых строк его. Коэффициенты при $(\mu\bar{\nu})^k$ — сумма $(C_n^k)^2$ членов вида

$$(-1)^{\frac{(1+n)n}{2}+a_1+\ldots+a_{n-k}+(n+b_1)+\ldots+(n+b_k)} \begin{vmatrix} S_{1\bar{a}_1} \ldots S_{1\bar{a}_{n-k}} & B_{1b_1} \ldots B_{1b_k} \\ \cdot \;\ldots\; \cdot & \cdot \;\ldots\; \cdot \\ \cdot \;\ldots\; \cdot & \cdot \;\ldots\; \cdot \\ S_{n\bar{a}_1} \ldots S_{n\bar{a}_{n-k}} & B_{nb_1} \ldots B_{nbk} \end{vmatrix} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} \bar{B}_{1c_1} & \ldots & \bar{B}_{1c_k} & \bar{S}_{1\bar{d}_1} & \ldots & \bar{S}_{1\bar{d}_{n-k}} \\ \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \bar{B}_{nc_1} & \ldots & \bar{B}_{nck} & \bar{S}_{n\bar{d}_1} & \ldots & \bar{S}_{n\bar{d}_{n-k}}, \end{vmatrix}$$

где $c_1, \ldots, c_k$ — k чисел из $1, 2, \ldots, n$, отличных от чисел $a_1, \ldots, a_{n-k}$; $d_1, \ldots, d_{n-k}$ — $(n-k)$ чисел из $1, 2, \ldots, n$, отличных от чисел $b_1, \ldots, b_k$.

2) (5) инвариантно, что следует из геометрического характера постановки задачи. Для получения инвариантной записи коэффициентов уравнения заметим, что каждый член упомянутой в предыдущем свойстве суммы, после введения двух n-векторов ([2], стр. 33) $\varepsilon^{a_1\ldots a_n}$ и $\varepsilon^{\bar{a}_1\ldots\bar{a}_n}$ 1-го и 2-го классов соответственно ([5], стр. 293 и след.), может быть записан в форме

$$\varepsilon^{e_1\ldots e_n} S_{e_1\bar{a}_1} \ldots S_{e_{n-k}\bar{a}_{n-k}} B_{e_{n-k+1}b_1} \ldots B_{e_n b_k} \times$$

$$\times \varepsilon^{\bar{f}_1\ldots\bar{f}_n} \bar{B}_{\bar{f}_1 c_1} \ldots \bar{B}_{\bar{f}_k c_k} \bar{S}_{\bar{f}_{k+1}\bar{d}_1} \ldots \bar{S}_{\bar{f}_n \bar{d}_{n-k}}$$

и представляет из себя компоненту $2n$-валентного эрмитова тензора $H_{b_1\ldots b_k d_1\ldots d_{n-k}\bar{a}_1\ldots\bar{a}_{n-k}\bar{c}_1\ldots\bar{c}_k}$, кососимметричного по индексам как первого, так и второго классов. Таким образом, коэффициент при $(\mu\bar{\nu})^k$ имеет вид

$$\frac{(C_n^k)^2}{(n!)^2} \varepsilon^{c_1\ldots c_n} \varepsilon^{\bar{d}_1\ldots\bar{d}_n} H_{c_1\ldots c_n\bar{d}_1\ldots\bar{d}_n}.$$

3) Коэффициенты (5) действительны, т. к. векторы **U**, **V**, удовлетворяющие системе уравнений (4), удовлетворяют и системе уравнений

$$\left.\begin{aligned} \overline{\mathbf{S}}(\mathbf{U}) - \overline{\mu}\,\overline{\mathbf{B}}(\overline{\mathbf{V}}) = 0, \\ -\nu\mathbf{B}(\mathbf{U}) + \mathbf{S}(\overline{\mathbf{V}}) = 0, \end{aligned}\right\}$$

т. е., если $P_n(\mu\overline{\nu}) = 0$, то и $P_n(\overline{\mu}\nu) = 0$, что доказывает свойство.

4) При нечетном n (5) имеет, по крайней мере, один положительный корень, что вытекает из теорем Виэта и различия знаков свободного члена и коэффициента старшего члена уравнения при нечетном n.

5) Если матрицы рассматриваемых форм имеют жорданов вид

$$(B_{ab}) = \begin{pmatrix} \underset{1}{B} & & \\ & \ddots & \\ & & \underset{k}{B} \end{pmatrix}, \qquad (S_{a\overline{b}}) = \begin{pmatrix} \underset{1}{S} & & \\ & \ddots & \\ & & \underset{k}{S} \end{pmatrix}$$

с одинаковым числом блоков k, причем блоки $\underset{i}{B}$, $\underset{i}{S}$ с одинаковыми индексами имеют равные порядки, то левая часть (5) *(характеристический полином)* распадается на k множителей $\underset{i}{P}(\mu\overline{\nu})$, каждый из которых является характеристическим полиномом пары форм с матрицами $\underset{i}{B}$ и $\underset{i}{S}$. Для $k = 2$ свойство доказывается путем разложения определителя, входящего в (5), по правилу Лапласа, при $k > 2$ применяется метод математической индукции.

Определение. *Решение* **U**, **V** *основной системы, полученное после подстановки в последнюю чисел* μ, $\overline{\nu}$ ($\mu\overline{\nu}$ — *главное число*), *назовем соответствующим главному числу* $\mu\overline{\nu}$.

Теорема 1. *Если векторы* **U**, **V** *являются решениями системы (4), то векторы* $\mathbf{U}' = \rho\mathbf{U}$, $\mathbf{V}' = \tau\mathbf{V}$ *удовлетворяют системе уравнений*

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{S}(\overline{\mathbf{U}}') - \mu'\mathbf{B}(\mathbf{V}') = 0, \\ -\overline{\nu}'\,\overline{\mathbf{B}}(\overline{\mathbf{U}}') + \overline{\mathbf{S}}(\mathbf{U}') = 0, \end{aligned}\right\}$$

причем $\mu'\overline{\nu}' = \mu\overline{\nu}$.

Для доказательства теоремы достаточно подсчитать $\mathbf{S}(\overline{\mathbf{U}}')$ и $\overline{\mathbf{S}}(\mathbf{V}')$.

Примечание. Множители ρ, τ можно всегда выбрать так, чтобы $\overline{\nu}' = \overline{\mu}'$.

Определение. *Если решение* **U**, **V** *основной системы определяет независимые векторы, то направления, определенные ими, назовем взаимными, в противном случае векторы* **U**, **V** *определяют двойное направление*.

Основная система для определения вектора **U** двойного направления принимает вид:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{S}(\overline{\mathbf{U}}) - \lambda\mathbf{B}(\mathbf{U}) = 0, \\ -\overline{\lambda}\,\overline{\mathbf{B}}(\overline{\mathbf{U}}) + \overline{\mathbf{S}}(\mathbf{U}) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (4')$$

Теорема 2. *Каждому главному числу соответствует, по крайней мере, одно решение основной системы.* Доказательство теоремы совершенно очевидно.

Легко видеть, что если решение $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ основной системы соответствует главному числу μ_ν, то решение $\mathbf{V}$, $\mathbf{U}$ соответствует комплексно-сопряженному главному числу $\overline{\mu}_\nu$.

Определение. *Два решения основной системы, определяющие пары взаимных направлений, отличающиеся не только порядком элементов, или различные двойные направления назовем независимыми.*

В нижеследующих теоремах рассмотрены некоторые свойства независимых решений.

Теорема 3. *Если формы неособенные, то независимые решения основной системы не определяют общих направлений.*

Теорема 4. *Если формы неособенные, то различным комплексно несопряженным главным числам соответствуют независимые решения основной системы.*

Эти теоремы доказываются от противного, исходя из системы (4).

Теорема 5. *Направления, соответствующие различным комплексно несопряженным главным числам неособенных форм, сопряжены относительно обеих форм.*

Допустим, что $\mathbf{U}_1$, $\mathbf{V}_1$ и $\mathbf{U}_2$, $\mathbf{V}_2$ — решения основной системы, соответствующие условию теоремы. Согласно (3) и примечанию к теореме 1, имеем соотношения:

$$\left.\begin{aligned}\sigma(\mathbf{U}_2, \mathbf{U}_1) &= \mu\beta(\mathbf{U}_2, \mathbf{V}_1),\\ \sigma(\mathbf{V}_2, \mathbf{V}_1) &= \overline{\mu}\beta(\mathbf{V}_2, \mathbf{U}_1),\end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned}\sigma(\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2) &= \mu'\beta(\mathbf{U}_1, \mathbf{V}_2),\\ \sigma(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2) &= \overline{\mu'}\beta(\mathbf{V}_1, \mathbf{U}_2),\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

откуда

$$\left.\begin{aligned}\sigma(\mathbf{U}_2, \mathbf{U}_1)\sigma(\mathbf{V}_2, \mathbf{V}_1) &= \mu\overline{\mu}\beta(\mathbf{U}_2, \mathbf{V}_1)\beta(\mathbf{V}_2, \mathbf{U}_1),\\ \sigma(\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2)\sigma(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2) &= \mu'\overline{\mu'}\beta(\mathbf{U}_1, \mathbf{V}_2)\beta(\mathbf{V}_1, \mathbf{U}_2),\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

т. е.

$$\mu\overline{\mu}\sigma(\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2)\sigma(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2) = \mu'\overline{\mu'}\sigma(\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2)\sigma(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2)$$

и

$$\operatorname{Im}\sigma(\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2)\sigma(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2) = 0.$$

Но тогда из (7) следует, что

$$(\mu\overline{\mu} - \mu'\overline{\mu'})\beta(\mathbf{U}_1, \mathbf{V}_2)\beta(\mathbf{U}_2, \mathbf{V}_1) = 0,$$

т. е., на основании (6),

$$\sigma(\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2) = \sigma(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2) = \beta(\mathbf{U}_1, \mathbf{V}_2) = \beta(\mathbf{U}_2, \mathbf{V}_1) = 0.$$

Аналогично доказывается, что

$$\sigma(\mathbf{U}_1, \mathbf{V}_2) = \sigma(\mathbf{U}_2, \mathbf{V}_1) = \beta(\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2) = \beta(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2) = 0,$$

т. е. теорема справедлива.

Теорема 6. *Если решения* $\underset{k}{\mathbf{U}}$, $\underset{k}{\mathbf{V}}$ $(k=1, 2, \ldots, r)$ *основной системы, соответствующие одному и тому же главному числу, независимы, то комбинация*

$$\mathbf{U}=\sum_{k=1}^{k=r} \alpha_k \underset{k}{\mathbf{U}}, \quad \mathbf{V}=\sum_{k=1}^{k=r} \bar{\alpha}_k \underset{k}{\mathbf{V}}$$

также является решением основной системы, соответствующим тому же главному числу. Для доказательства достаточно подсчитать $\mathbf{S}(\bar{\mathbf{U}})$ и $\bar{\mathbf{S}}(\mathbf{V})$.

Следствие. *Линейная комбинация с действительными коэффициентами независимых двойных направлений, соответствующих одному и тому же главному числу, является двойным направлением, соответствующим тому же главному числу.* Оговорка о действительности коэффициентов необходима, т. к., вообще говоря, не существуют пучки двойных направлений, соответствующих одному и тому же главному числу, что следует из примера

$$(B_{ab})=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \quad (S_{a\bar{b}})=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & -a\end{pmatrix}.$$

Принимая взаимные, двойные и некоторые дополнительные направления за координатные, приведем пары форм к виду, принятому за *канонический*. При этом матрицы форм примут диагонально-блочный вид. Структура блоков, расположенных по главной диагонали, дана в §§ 3—6.

§ 2. Вырождение форм

Совместное приведение пары форм (1), (2) следует начать с исследования рангов матриц форм.

1. Допустим, что ранг (1) равен r, $r<n$, ранг (2) равен k, $k<n$, и пересечением нулевых пучков E_{n-r} и E_{n-k} (первым всегда стоит объект, относящийся к квадратичной форме, вторым — к эрмитовой форме) является пучок E_m общих нулевых направлений. Если l — ранг системы векторов, образованной базисами пучков E_{n-r} и E_{n-k}, то $m=2n-r-k-l$ ([5], стр. 69). Включив базис пучка E_m в число координатных векторов, приведем матрицы форм к виду:

$$\begin{pmatrix}(B_{ij}) & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}(S_{i\bar{j}}) & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \quad (i, j=1, 2, \ldots, n-m). \tag{8}$$

В этом случае $P_n(\mu\bar{\nu})\equiv 0$.

Определение. *Пару форм с матрицами* (B_{ij}), $(S_{i\bar{j}})$, *входящими в* (8), *(характеристический полином этой пары) назовем ядром исходной пары форм (ядром характеристического полинома исходной пары форм) или просто я д р о м.*

Дальнейшее приведение пары форм сводится к приведению ядра. При этом сохраним первоначальные обозначения.

2. Допустим, что пара форм (1), (2) не имеет общих нулевых направлений и ранг (2) равен k, $k<n$.

В нулевом пучке E_{n-k} (2) можно выделить $n-k$ независимых, попарно сопряженных относительно формы (1) векторов, из которых p, $p\leqslant n-k$, образуют асимптотический относительно (1) пучок E_p, $n-k-p$ не являются асимптотическими для (1) и поэтому образуют пучок E_{n-k-p}, не касающийся асимптотического конуса (1). Приняв за координатные векторы базис пучка E_{n-k-p} и сопряженные им относительно (1), выделим в матрицах форм блоки порядков $n-k-p$

$$E, \quad 0 \tag{9}$$

(здесь и далее E — единичная матрица).

При дальнейших рассуждениях сохраним первоначальные обозначения. Приняв за координатные векторы $\mathbf{U}$, $\mathbf{U} \subset E_p$, $\mathbf{V}$ (не являющийся двойным или одним из взаимных и удовлетворяющий условию $\beta(\mathbf{U}, \mathbf{V}) \neq 0$) и базис плоскости $\beta(\mathbf{X}, \mathbf{V})=0$, $\sigma(\mathbf{X}, \mathbf{V})=0$, приведем матрицы форм к виду (см. (15)):

$$\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & B_{23} & \ldots & B_{2n} \\ 0 & B_{32} & & & \\ \vdots & \vdots & & \boxed{(B_{ij})} & \\ 0 & B_{n2} & & & \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & S_{2\bar{2}} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & \boxed{(S_{i\bar{j}})} & \\ 0 & 0 & & & \end{Vmatrix}. \tag{10}$$

(5) имеет вид

$$P_n(\mu\bar{\nu}) = P_2(\mu\bar{\nu}) P_{n-2}(\mu\bar{\nu}), \tag{11}$$

где $P_2(\mu\bar{\nu})$ и $P_{n-2}(\mu\bar{\nu})$, соответственно, — характеристические полиномы блоков

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S_{2\bar{2}} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad (B_{ij}), \ (S_{i\bar{j}}).$$

Направлению $\mathbf{U}$ соответствует двукратное нулевое главное число.

Повторив описанную операцию с матрицами (B_{ij}) и $(S_{i\bar{j}})$ $p-1$ раз, мы исчерпаем пучок E_p. Легко видеть, что пучку E_{n-k} соответствует нулевое главное число кратности $n-k-p+2p=n-k+p$.

3. Допустим, что ранг (1) равен r, $r<n$ (сохраняем первоначальные обозначения), (2)-полного ранга.

В нулевом пучке E_{n-r} (1) можно выделить $n-r$ векторов, попарно сопряженных относительно (2), из которых t образуют асимптотический относительно формы (2) пучок E_t, $n-r-t$ образуют пучок E_{n-r-t}, не касающийся асимптотического конуса последней. Пучку E_{n-r-t} соответствуют следующие блоки матриц форм

$$0, \quad \mathcal{E}_{n-r-t} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \varepsilon_{n-r-t} \end{pmatrix} \quad (\varepsilon_i = \pm 1) \tag{12}$$

порядков $n-r-t$.

При дальнейших рассуждениях сохраним первоначальные обозначения. Приняв за координатные векторы $\mathbf{U}(\mathbf{U} \subset E_t)$, $\mathbf{V}$ (не являющийся двойным или одним из взаимных и удовлетворяющий условию $\sigma(\mathbf{U}, \mathbf{V}) \neq 0$) и базис плоскости $\sigma(\mathbf{X}, \mathbf{U})=0$, $\sigma(\mathbf{X}, \mathbf{V})=0$, приведем матрицы форм к виду:

$$\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & B_{23} & \ldots & B_{2n} \\ 0 & B_{32} & & & \\ \vdots & \vdots & & \boxed{(B_{ij})} & \\ 0 & B_{n2} & & & \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & S_{2\bar{2}} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & \boxed{(S_{i\bar{j}})} & \\ 0 & 0 & & & \end{Vmatrix}. \tag{13}$$

(5) имеет вид (11), где $P_2(\mu\bar{\nu})$ — характеристический полином блоков

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & S_{2\bar{2}} \end{pmatrix},$$

и направлению U соответствует двукратное бесконечное главное число (т. е. коэффициенты двух старших членов (5) обращаются в нуль).

Повторив описанную операцию с матрицами (B_{ij}) и $(S_{i\bar{j}})$ $t-1$ раз, мы исчерпаем пучок E_t и придем к рассмотрению пары неособенных форм.

Пучку E_{n-r} соответствует бесконечное главное число кратности $n-r-t+2t=n-r+t$.

§ 3. Положительные главные числа

Допустим, что пара неособенных форм (1), (2) имеет положительные главные числа.

Теорема 7. *Положительному главному числу a^2 соответствует решение основной системы, определяющее коллинеарные векторы* U, V *(т. е. двойное направление).*

Т. к. a^2 — главное число, то найдутся U′, V′, удовлетворяющие условиям (см. (4) и примечание к теореме 1):

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{S}(\mathbf{U}') - a\mathbf{B}(\mathbf{V}') = 0, \\ -a\mathbf{B}(\mathbf{U}') + \mathbf{S}(\overline{\mathbf{V}}') = 0, \end{aligned}\right\}$$

т. е.

$$\mathbf{S}(\rho\overline{\mathbf{U}}' + \bar{\tau}\mathbf{V}') - a\mathbf{B}(\tau\mathbf{U}' + \rho\mathbf{V}') = 0$$

и, действительно, если даже U′, V′ неколлинеарны, имеются $\mathbf{U} = \mathbf{V} = \bar{\rho}\mathbf{U}' + \rho\mathbf{V}'$, удовлетворяющие условиям теоремы.

Докажем некоторые свойства двойных направлений.

Теорема 8. *Пучок E_r, содержащий r независимых двойных направлений, соответствующих одному и тому же положительному главному числу a^2, содержит r независимых, попарно сопряженных относительно обеих форм, двойных направлений, соответствующих этому же главному числу.*

Если рассматриваемые двойные направления $\underset{1}{\mathbf{U}}, \ldots, \underset{r}{\mathbf{U}}$ образуют асимптотический относительно обеих форм (*общий асимптотический*) пучок E_r, то утверждение теоремы справедливо.

Предположим, что E_r — не общий асимптотический пучок. Возьмем неасимптотический вектор $\underset{1}{\mathbf{V}}$ этого пучка

$$\underset{1}{\mathbf{V}} = \sum_{k=1}^{k=r} \alpha_k \underset{k}{\mathbf{U}},$$

где α_k — действительные числа (см. следствие теоремы 6). Гиперплоскость $\beta(\mathbf{X}, \underset{1}{\mathbf{V}}) = 0$ совпадает с гиперплоскостью $\sigma(\mathbf{X}, \underset{1}{\mathbf{V}}) = 0$, не содержит V и, следовательно, пересечется с E_r по E_{r-1}, где E_{r-1} — пучок $r-1$ измерения. Если последний — неасимптотический, то вышеописанную операцию можем повторять до тех пор, пока выделив k, $k \leqslant r$, независимых сопряженных относительно обеих форм (*общих сопряженных*) двойных направлений $\underset{1}{\mathbf{V}}, \ldots, \underset{k}{\mathbf{V}}$, не получим $(r-k)$-мерный общий асимптотический пучок E_{r-k}, сопряженный векторам $\underset{1}{\mathbf{V}}, \ldots, \underset{k}{\mathbf{V}}$ относительно обеих форм. Взяв в пучке E_{r-k} любой базис $\underset{k+1}{\mathbf{V}}, \ldots, \underset{r}{\mathbf{V}}$, мы получим r независимых двойных направлений $\underset{1}{\mathbf{V}}, \ldots, \underset{r}{\mathbf{V}}$, удовлетворяющих условиям теоремы.

Включив выделенные направления $\underset{1}{\mathbf{V}}, \ldots, \underset{k}{\mathbf{V}}$ в число координатных, мы приведем матрицы форм к жорданову виду, т. к.

$$B_{ii}=1, \quad B_{ij}=0, \quad S_{i\bar{i}}=a_i, \quad S_{i\bar{j}}=0$$

$$(i=1, 2, \ldots, k; \quad j \neq 1, 2, \ldots, n; \quad i \neq j).$$

Из (4′) следует, что $a_i = \pm a$. Знак a_i совпадает со знаком $\sigma(\underset{i}{\mathbf{V}}, \underset{i}{\mathbf{V}})$. Таким образом, матрицы форм примут вид

$$\begin{pmatrix} E_k & 0 \\ 0 & (B_{ij}) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a\mathcal{E}_k & 0 \\ 0 & (S_{i\bar{j}}) \end{pmatrix} \tag{14}$$

и дальнейшее решение задачи сводится к совместному приведению матриц (B_{ij}) и $(S_{i\bar{j}})$. Сохраняя для последних первоначальные обозначения и принимая за координатные векторы базис плоскости $\beta(\mathbf{X}, \mathbf{V})=0$ (в том числе вектор $\mathbf{V}$, $\mathbf{V} \subset E_{r-k}$) и произвольный вектор $\mathbf{W}$ (не определяющий двойное или одно из взаимных направлений), приведем матрицы форм к виду:

$$\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & B_{23} & \ldots & B_{2n} \\ 0 & B_{32} & & & \\ \vdots & \vdots & & \boxed{(B_{ij})} & \\ 0 & B_{n2} & & & \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} 0 & S_{1\bar{2}} & 0 & \ldots & 0 \\ S_{2\bar{1}} & S_{2\bar{2}} & S_{2\bar{3}} & \ldots & S_{2\bar{n}} \\ 0 & S_{3\bar{2}} & & & \\ \vdots & \vdots & & \boxed{(S_{i\bar{j}})} & \\ 0 & S_{n\bar{2}} & & & \end{Vmatrix}. \tag{15}$$

(5) имеет вид (11), где $P_2(\mu\bar{\nu})$ и $P_{n-2}(\mu\bar{\nu})$ соответственно — характеристические полиномы блоков

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & S_{1\bar{2}} \\ S_{2\bar{1}} & S_{2\bar{2}} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad (B_{ij}), \quad (S_{i\bar{j}}).$$

Т. к. $P_2(\mu\bar{\nu})=(S_{1\bar{2}}S_{2\bar{1}}-\mu\bar{\nu})^2$, то, в силу свойства 5 (см. стр. 145),

$$S_{1\bar{2}}S_{21}=a^2,$$

т. е. в рассматриваемом случае имеем, по крайней мере, двукратное главное число.

Матрицы форм допускают дальнейшее частичное упрощение, если за координатные выбраны векторы $\mathbf{V}$, $\mathbf{W}$ (причем $\sigma(\mathbf{W}, \mathbf{W})=0$) и базис плоскости $\sigma(\mathbf{X}, \mathbf{V})=0$, $\sigma(\mathbf{X}, \mathbf{W})=0$:

$$\left\|\begin{array}{ccccc}0 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 1 & 1 & B_{23} & \dots & B_{2n}\\ 0 & B_{32} & & & \\ \cdot & \cdot & & (B_{ij}) & \\ \cdot & \cdot & & & \\ 0 & B_{n2} & & & \end{array}\right\|, \quad \left\|\begin{array}{ccccc}0 & S_{1\bar{2}} & 0 & \dots & 0\\ S_{2\bar{1}} & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & & & \\ \cdot & \cdot & & (S_{i\bar{j}}) & \\ \cdot & \cdot & & & \\ 0 & 0 & & & \end{array}\right\|. \tag{16}$$

Направление $\mathbf{W}$ назовем дополнительным к пучку асимптотических двойных направлений, в дальнейшем — просто *дополнительным.*

Повторив вышеописанную операцию с матрицами (B_{ij}) и $(S_{i\bar{j}})$ $r-k-1$ раз, мы исчерпаем пучок E_{r-k}. Этот процесс можно продолжать до исчерпания положительных главных чисел.

Легко доказывается

Теорема 9. *Наибольшее число r независимых двойных направлений $\underset{1}{\mathbf{V}}, \dots, \underset{r}{\mathbf{V}}$ и $r-k$ независимых дополнительных направлений $\underset{1}{\mathbf{W}}, \dots, \underset{r-k}{\mathbf{W}}$, т. е. $2r-k$, соответствующих данному положительному главному числу, равно его кратности.*

Следствие. *Простому положительному главному числу соответствует единственное двойное направление.*

Теорема 10. *Простому положительному главному числу не соответствуют взаимные направления.* Теорему можно доказать от противного, используя теорему 7 и предыдущее следствие.

Итак, *положительному главному числу a^2 кратности s, для которого ранг основной системы равен r*

$$\left(\frac{s}{2} \leqslant n-r \leqslant s \quad или \quad \frac{s+1}{2} \leqslant n-r \leqslant s\right),$$

соответствуют блоки

$$E, \quad a\mathcal{E} \tag{17}$$

порядков $2n-2r-s$ и $s+r-n$ пар строк и столбцов, вид которых определен формулами (15).

Указанную операцию мы можем повторить с каждым положительным главным числом до исчерпания их.

§ 4. Комплексные главные числа

Допустим, что пара неособенных форм (1), (2) не имеет положительных главных чисел, но имеет комплексные главные числа.

Теорема 11. *Решение системы (4), определяющее коллинеарные векторы* $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$, *соответствует положительному главному числу.* Для доказательства достаточно рассмотреть (4) при условии $\mathbf{V}=\rho\mathbf{U}$.

Итак, комплексному главному числу соответствуют взаимные направления $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$, связанные условием (см. (3))

$$\sigma(\mathbf{U}, \mathbf{U}) = -\frac{\mu\bar{\nu}}{\nu\bar{\nu}}\,\sigma(\mathbf{V}, \mathbf{V}), \tag{18}$$

откуда

$$\sigma(\mathbf{U}, \mathbf{U}) = \sigma(\mathbf{V}, \mathbf{V}) = \beta(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = 0.$$

Возможны два случая:

1. $\sigma(\mathbf{U}, \mathbf{V}) \neq 0$. Приняв за координатные векторы $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ и базис плоскости $\beta(\mathbf{X}, \mathbf{U})=0$, $\beta(\mathbf{X}, \mathbf{V})=0$, приведем матрицы форм к виду:

$$\left\|\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \; \dots \; 0 \\ 0 & 1 & 0 \; \dots \; 0 \\ \hline 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & (B_{ij}) \\ 0 & 0 & \end{array}\right\|, \quad \left\|\begin{array}{cc|c} 0 & a & 0 \; \dots \; 0 \\ \bar{a} & 0 & 0 \; \dots \; 0 \\ \hline 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & (S_{i\bar{j}}) \\ 0 & 0 & \end{array}\right\|, \tag{19}$$

где a^2 и $\overline{a^2}$ являются главными числами, соответствующими взаимным направлениям **U**, **V**. Дальнейшее решение задачи сводится к совместному приведению матриц (B_{ij}) и $(S_{i\bar{j}})$.

2. $\sigma(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = 0$. Принимая за координатные векторы базис плоскости $\beta(\mathbf{X}, \mathbf{U}) = 0$, $\beta(\mathbf{X}, \mathbf{V}) = 0$ (в том числе векторы **U**, **V**) и любые векторы **W**, **T**, не являющиеся взаимными, приведем матрицы форм к виду:

$$\left\|\begin{array}{cccc|ccc} 0 & 0 & B_{13} & B_{14} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & B_{23} & B_{24} & 0 & \dots & 0 \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & B_{34} & B_{35} & \dots & B_{3n} \\ B_{41} & B_{42} & B_{43} & B_{44} & B_{45} & \dots & B_{4n} \\ \hline 0 & 0 & B_{53} & B_{54} & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & (B_{ij}) & \\ 0 & 0 & B_{n3} & B_{n4} & & & \end{array}\right\|,$$

$$\left\|\begin{array}{cccc|ccc} 0 & 0 & S_{1\bar{3}} & S_{1\bar{4}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & S_{2\bar{3}} & S_{2\bar{4}} & 0 & \dots & 0 \\ S_{3\bar{1}} & S_{3\bar{2}} & S_{3\bar{3}} & S_{3\bar{4}} & S_{3\bar{5}} & \dots & S_{3\bar{n}} \\ S_{4\bar{1}} & S_{4\bar{2}} & S_{4\bar{3}} & S_{4\bar{4}} & S_{4\bar{5}} & \dots & S_{4\bar{n}} \\ \hline 0 & 0 & S_{5\bar{3}} & S_{5\bar{4}} & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & (S_{i\bar{j}}) & \\ 0 & 0 & S_{n\bar{3}} & S_{n\bar{4}} & & & \end{array}\right\|. \tag{20}$$

При этом

$$P_n(\mu\bar{\nu}) = P_4(\mu\bar{\nu}) P_{n-4}(\mu\bar{\nu}),$$

где $P_4(\mu\bar{\nu})$ — характеристический полином блоков, выделенных в (20) штрихами, а $P_{n-4}(\mu\bar{\nu})$ — характеристический полином блоков (B_{ij}) и $(S_{i\bar{j}})$. Легко видеть, что уравнение $P_4(\mu\bar{\nu}) = 0$ имеет двукратные комплексно сопряженные главные числа, которым соответствуют направления **U**, **V**.

Матрицы (20) несколько упрощаются, если за координатные выберем векторы **U**, **V**, **W**, **T** (причем $\sigma(\mathbf{W}, \mathbf{U}) = 0$, $\sigma(\mathbf{T}, \mathbf{V}) = 0$) и базис плоскости $\sigma(\mathbf{X}, \mathbf{U}) = 0$, $\sigma(\mathbf{X}, \mathbf{V}) = 0$, $\sigma(\mathbf{X}, \mathbf{W}) = 0$, $\sigma(\mathbf{X}, \mathbf{T}) = 0$:

$$\left\| \begin{array}{cccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & B_{34} & B_{35} & \dots & B_{3n} \\ 0 & 1 & B_{43} & 1 & B_{45} & \dots & B_{4n} \\ \hline 0 & 0 & B_{53} & B_{54} & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & (B_{ij}) & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ 0 & 0 & B_{n3} & B_{n4} & & & \end{array} \right\|, \tag{21}$$

$$\left\| \begin{array}{cccc|ccc} 0 & 0 & 0 & S_{1\bar{4}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & S_{2\bar{3}} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & S_{3\bar{2}} & S_{3\bar{3}} & S_{3\bar{4}} & 0 & \dots & 0 \\ S_{4\bar{1}} & 0 & S_{4\bar{3}} & S_{4\bar{4}} & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & (S_{i\bar{j}}) & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & \end{array} \right\|,$$

причем $S_{\overline{14}}\ S_{\overline{32}}$ и $S_{\overline{41}}\ S_{\overline{23}}$ — рассматриваемые главные числа.

Определение. *Направления* **U**, **V** *назовем асимптотическими взаимными направлениями, направления* **W**, **T** — *дополнительными к пучку асимптотических взаимных направлений, в дальнейшем — просто дополнительными.*

Описанный процесс мы можем повторить с матрицами (B_{ij}) и $(S_{i\bar{j}})$ до исчерпания комплексных главных чисел.

§ 5. Отрицательные главные числа

Допустим, что пара неособенных форм (1), (2) имеет только отрицательные главные числа. Согласно теореме 11 отрицательному главному числу соответствуют только взаимные главные направления **U**, **V**, также связанные соотношением (17), принимающим, после соответствующего нормирования векторов **U**, **V**, вид

$$\sigma(\mathbf{U}, \mathbf{U}) = -\sigma(\mathbf{V}, \mathbf{V}) = a. \tag{18'}$$

Если $\sigma(\mathbf{U}, \mathbf{U}) \neq 0$, то и $\beta(\mathbf{U}, \mathbf{V}) \neq 0$ (см. (3)), и возможны два случая:

1. $\sigma(\mathbf{U}, \mathbf{V}) \neq 0$. Тогда и (см. (3))

$$\beta(\mathbf{U}, \mathbf{U}) \neq 0, \quad \beta(\mathbf{V}, \mathbf{V}) \neq 0.$$

Положив

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{W} &= \alpha\mathbf{U} + \beta\mathbf{V}, \\ \mathbf{T} &= \gamma\mathbf{U} + \delta\mathbf{V}, \end{aligned} \right\}$$

получим, что плоскости измерений $n-2$

$$\left. \begin{aligned} \sigma(\mathbf{X}, \mathbf{U}) &= 0, \\ \sigma(\mathbf{V}, \mathbf{V}) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ и } \left. \begin{aligned} \sigma(\mathbf{X}, \mathbf{W}) &= 0, \\ \sigma(\mathbf{X}, \mathbf{T}) &= 0 \end{aligned} \right\} \tag{22}$$

совпадают. За $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\gamma}{\delta}$ возьмем корни уравнения

$$\beta(\mathbf{U},\ \mathbf{U})r^2+2\beta(\mathbf{U},\ \mathbf{V})r+\beta(\mathbf{V},\ \mathbf{V})=0,$$

различные в силу неособенности (1). Выбрав за координатные такие векторы $\mathbf{W}$, $\mathbf{T}$ и базис плоскости (22), получим следующие блоки матриц форм, соответствующие направлениям $\mathbf{W}$, $\mathbf{T}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & c \end{pmatrix}$$

и главные числа, соответствующие выбранным $\mathbf{W}$, $\mathbf{T}$, будут иметь вид

$$ac+b\bar{b}\pm\sqrt{acb\bar{b}},$$

т. е. при $ac>0$ главные числа положительны, при $ac<0$, $b\neq 0$ главные числа комплексны. И то, и другое противоречит условию.

2. $\sigma(\mathbf{U},\ \mathbf{V})=0$ (случай $ac<0$, $b=0$ предыдущего допущения войдет сюда). В силу (3),

$$\beta(\mathbf{U},\ \mathbf{U})=\beta(\mathbf{V},\ \mathbf{V})=0.$$

Положив

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{W}&=\mathbf{V}+\mathbf{U}, \\ \mathbf{T}&=i(\mathbf{V}-\mathbf{U}), \end{aligned}\right\}$$

примем векторы $\mathbf{W}$, $\mathbf{T}$ и базис плоскости (22) за координатные, выделим в матрицах форм блоки

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & ai \\ -ai & 0 \end{pmatrix}, \tag{19'}$$

причем $-a^2$ — главное число кратности $\geqslant 2$ (см. свойство 5, стр. 145).

Если $\sigma(\mathbf{U},\ \mathbf{U})=0$, то дальнейшие рассуждения полностью совпадают с ранее проведенными для случая комплексных главных чисел.

В силу указанного в последних двух параграфах, может быть сформулирована следующая

Теорема 12. *Паре комплексно-сопряженных главных чисел a^2, $\bar{a}^2$ или отрицательному главному числу $-a^2$ кратности s (в последнем случае s — обязательно четное число), для которых ранг основной системы равен $2n-r$ $\left(\text{всегда } \frac{s}{2}\leqslant r\leqslant s \text{ или } \frac{s+1}{2}\leqslant r\leqslant s\right)$, соответствуют r пар взаимных направлений, обладающих тем свойством, что направления различных пар взаимно сопряжены относительно обеих форм; у $2r-s$ пар из упомянутых r пар направлениями каждой пары служат асимптотические несопряженные направления (2), сопряженные относительно (1); у $s-r$ пар направлениями каждой пары являются общие асимптотические направления обеих форм, образующие $2(s-r)$-мерный общий асимптотический пучок обеих форм.*

Включая указанные r пар взаимных и $s-r$ пар дополнительных направлений в число координатных, мы выделим в матрицах форм $2r-s$ блоков вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & a \\ \bar{a} & 0 \end{pmatrix} \tag{19*}$$

и $\frac{s-r}{2}$ четверок строк и столбцов вида, указанного в формулах (21).

Следствие. *Паре комплексно-сопряженных простых главных чисел соответствует единственная пара взаимных направлений.*

§ 6. Совместное приведение квадратичной и эрмитовой форм в R_n. Результаты исследования

В результате исследования, проведенного в §§ 1—5, можно сделать следующий вывод: *матрицы пары форм* (1), (2) *в* R_n *можно привести к жорданову виду.* Диагональные блоки таких матриц имеют следующий вид: общему нулевому пучку E_m обеих форм соответствуют блоки

$$0, \quad 0$$

порядков m; нулевому пучку E_p (2), не касающемуся асимптотического конуса (1), соответствуют блоки (9) порядков p; нулевому пучку E_t (1), не касающемуся асимптотического конуса (2), соответствуют блоки (12) порядков t; положительному главному числу a^2 кратности s, для которого ранг (4) равен $n-r\left(\frac{s}{2}\leqslant r\leqslant s\right.$ или $\left.\frac{s+1}{2}\leqslant r\leqslant s\right)$, соответствуют блоки (17) порядков $2r-s$; паре комплексно-сопряженных главных чисел или отрицательному главному числу кратности s (в последнем случае s — обязательно четное число), для которых ранг (4) равен $2n-r$ $\left(\frac{s}{2}\leqslant r\leqslant s\right.$ или $\left.\frac{s+1}{2}\leqslant r\leqslant s\right)$, соответствуют $2r-s$ блоков вида (19*); q-мерному общему асимптотическому пучку E_q двойных (сюда же мы относим асимптотические направления одной формы, являющиеся нулевыми для другой — см. (10), (12)) и взаимных направлений соответствуют блоки измерения $2q$, структура которых в данной работе не изучена. Можно указать лишь частичное приведение этих блоков. Действительно, если

$$E_q = E_{q_1} + E_{q_2} + E_{q_3} + E_{q_4},$$

где E_{q_1} — нулевой пучок (2) и асимптотический для (1); E_{q_2} — нулевой пучок (1) и асимптотический для (2); E_{q_3} — пучок двойных асимптотических направлений; E_{q_4} — пучок взаимных асимптотических направлений, то они приводятся к следующему виду: блоки, отмеченные штрихами в формуле (21) окаймляются (окаймление будем производить слева и сверху) $\frac{q_4-2}{2}$ четверками строк и столбцов вида, указанного в формулах (21), q_3-1 парами строк и столбцов вида, указанного в формулах (16), q_2-1 парами строк и столбцов вида, указанного в формулах (13), q_1-1 парами строк и столбцов вида, указанного в формулах (10).

§ 7. Классификация пар форм R_n

1. Пары рассматриваемых форм R_n объединим в $n+1$ *тип* в зависимости от ранга r_β (1).

Каждый тип пар форм разделяется на *группы* в зависимости от вида (2) (т. е. её ранга и сигнатуры). Число групп, образующих каждый тип, одинаково, за исключением того типа, для которого $r_\beta=0$ (число групп последнего на единицу меньше), и равно $\frac{(n+2)^2}{4}$ при четном n и $\frac{(n+1)(n+3)}{4}$ при нечетном n.

Группа пар форм, вообще говоря, разделяется на *классы* в зависимости от взаимного расположения пучков введенных нами направлений. Если группа не подразделяется на классы, то будем считать, что она состоит из одного класса.

Выделение и перечисление тех классов, пары форм которых не имеют общих асимптотических пучков двойных и взаимных направлений, или имеют единственное двойное общее асимптотическое направление (последнее может быть нулевым для одной из форм), можно произвести аналогично тому, как это сделано в разделе 2 настоящего параграфа. Что касается пар форм, имеющих общий асимптотический пучок двойных и взаимных направлений, то к одному классу будем относить пары форм, имеющие, при прочих равных условиях, одинаковое измерение пучков E_p, E_t (см. разделы 2, 3 § 2) и равные разности $s-r$ для каждого положительного, комплексного и отрицательного главных чисел (где s — кратность главного числа, $(n-r)$ — ранг (4) для него). Конечно, может оказаться, что после решения задачи совместного приведения (1), (2) в R_n до конца, последние классы потребуют дополнительного подразделения.

2. В таблицах 1, 2 приведена классификация пар форм R_2 [7], причем введены следующие обозначения: комплексные и отрицательные главные числа — $(b \pm ai)^2$; положительные — a^2, b^2; ранг (1) — r_β; ранг (2) — r_σ; характеристический полином — P_2; главное число ядра — a^2; ранг (4), составленной для главного числа a^2 — $\rho(a^2)$. Исследование сигнатуры (2) для R_2 равносильно определению знака её дискриминанта. Принят во внимание также тот факт, что, если матрицы форм имеют вид

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & a\end{pmatrix},$$

то их можно привести к виду

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0 & a\\ a & 0\end{pmatrix}.$$

3. Пары форм R_3 разбиваются, в соответствии со сказанным в разделе 1 настоящего параграфа, на 4 типа, содержащие 23 группы, разделенные на 116 классов [7].

При выделении классов пар форм R_3 целесообразно использовать *главные сечения* R_n некоторым R_m, определенном m направлениями репера R_n, относительно которого пара форм имеет канонический вид. В рассматриваемом случае используется классификация пар форм R_2. Номера классов пар форм главных сечений (см. таблицы 1, 2) расположим в следующей последовательности: на первом месте поместим номер класса главного сечения, определенного направлениями $\underset{2}{\mathbf{e}}$, $\underset{3}{\mathbf{e}}$ указанного репера, на втором — направлениями $\underset{3}{\mathbf{e}}$, $\underset{1}{\mathbf{e}}$, на третьем — направлениями $\underset{1}{\mathbf{e}}$, $\underset{2}{\mathbf{e}}$. Если, например, матрицы пары имеют вид

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \tag{23}$$

и $a>0$, то при $a^2>1$ номера пар форм, полученных в главных сечениях суть 1, 6, 8 (см. таблицу 1), при $a^2=1$ — 1, 5, 8, при $a^2<1$ —

Таблица 1

Пары форм R_2. Типы 1, 2

Тип	Признак типа	Группа	Признак группы	Класс	Признак класса	Канонич. квадратичная матрица	Канонич. эрмитова матрица
1	$r_\beta=0$	1	$r_\sigma=1$	1	$P_2(\mu\bar{\nu})\equiv 0,\quad a^2=\infty$	$\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$
		2	$\lvert S_{a\bar{b}}\rvert<0$	2	$a^2=b^2=\infty$		$\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$
		3	$\lvert S_{a\bar{b}}\rvert>0$	3	$a^2=b^2=\infty$		$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$
2	$r_\beta=1$	4	$r_\sigma=0$	4	$P_2(\mu\bar{\nu})\equiv 0,\quad a^2=0$	$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$
		5	$r_\sigma=1$	5	$P_2(\mu\bar{\nu})\equiv 0,\ a^2\leqslant 1$		$\begin{pmatrix}a&0\\0&0\end{pmatrix}$
				6	$P_2(\mu\bar{\nu})\equiv 0,\quad a^2>1$		
				7	$a^2=0,\quad b^2=\infty$		$\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$
		6	$\lvert S_{a\bar{b}}\rvert<0$	8	$a^2\geqslant 1,\quad b^2=\infty$		$\begin{pmatrix}a&0\\0&-1\end{pmatrix}$
				9	$a^2<1,\quad b^2=\infty$		
				10	$a^2=b^2=\infty$		$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$
		7	$\lvert S_{a\bar{b}}\rvert>0$	11	$a^2<1,\quad b^2=\infty$		$\begin{pmatrix}a&0\\0&1\end{pmatrix}$
				12	$a^2\geqslant 1,\quad b^2=\infty$		

Таблица 2

Пары форм R_2. Тип 3

Тип	Признак типа	Группа	Признак группы	Класс	Признак класса	Канонич. квадратичная матрица	Канонич. эрмитова матрица
3	$r_\beta = 2$	8	$r_\sigma = 0$	13	$a^2 = b^2 = 0$	$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$
		9	$r_\sigma = 1$	14	$a^2 \leqslant 1, \quad b^2 = 0$	$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}a & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$
				15	$a^2 > 1, \quad b^2 = 0$		
				16	$a^2 = b^2 = 0$	$\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$
		10	$\lvert S_{a\bar{b}} \rvert < 0$	17	Комплексные главные числа $(b \pm ai)^2$	$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0 & b+ai\\b-ai & 0\end{pmatrix}$
				18	Двукратное отрицательное, главное число $-a^2$		$\begin{pmatrix}0 & ai\\-ai & 0\end{pmatrix}$
				19	$a^2 > 1, \quad b^2 \geqslant 1$ или $a^2 < 1, \quad b^2 \leqslant 1; \; a^2 \neq b^2$		$\begin{pmatrix}a & 0\\0 & -b\end{pmatrix}$
				20	$a^2 > 1, \quad b^2 < 1$		
				21	$a^2 = b^2, \; \rho(a^2) = 3$	$\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & a\\a & 0\end{pmatrix}$
				22	$a^2 = b^2, \quad \rho(a^2) = 2$	$\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0 & a\\a & 0\end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix}a & 0\\0 & -a\end{pmatrix}$
		11	$\lvert S_{a\bar{b}} \rvert > 0$	23	$a^2 < 1, \quad b^2 \leqslant 1$	$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}a & 0\\0 & b\end{pmatrix}$
				24	$a^2 > 1, \quad b^2 < 1$		
				25	$a^2 \geqslant 1, \quad b^2 \geqslant 1$		

1, 5, 9. Т. о. паре форм (23) отвечают три различных класса пар форм R_3.

Описанный прием выделения классов пар форм R_3 можно применить для классификации пар форм R_n, $n > 3$, имея классификацию пар форм R_m, $m < n$.

Казанский государственный университет
им. В. И. Ульянова-Ленина

Поступило в редакцию „Ученые записки КГУ" 18 VI 1956 г. В редакцию „Математика" передано 7 X 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Бохер, Введение в высшую алгебру, ГТТИ, М.—Л., 1933. 2. А. П. Норден, Пространства аффинной связности, ГИТТЛ, М.—Л., 1950. 3. А. П. Норден, Пространства линейной конгруэнции, Мат. сб., т. 24, (66): 3, 1949. 4. А. П. Норден, О комплексном представлении тензоров бипланарного пространства, Уч. зап. КГУ, т. 114, кн. 8, 1954. 5. П. А. Широков, Тензорное исчисление, ч. 1. ОНТИ, М.—Л., 1934. 6. А. П. Широков, Геометрия обобщенных биаксиальных пространств, Уч. зап. КГУ, т. 114, кн. 2, 1954. 7. Г. Е. Изотов, Поверхности второго порядка бипланарного пространства, Дисс. Казань, КГУ, 1955. 8. P. Muth, Theorie und anwendung der Elementartheiler, Leipzig, 1899. 9. J. Williamson, Simultaneous reduction of a square matrix and an Hermitian matrix to canonical form, Amer. J. Math., vol. 61, n. 1, 1939.