С. Н. Слугин, Приближенное решение интегро-дифференциальных уравнений на основе метода Чаплыгина, *Изв. вузов. Матем.*, 1957, номер 1, 211–221

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ
1957 МАТЕМАТИКА № 1

С. Н. Слугин

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ОСНОВЕ МЕТОДА ЧАПЛЫГИНА

Методы типа С. А. Чаплыгина [1] были разработаны для многих видов уравнений, в частности, — для интегро-дифференциальных [2, 3]. В настоящей работе проведено построение „абстрактного" алгорифма верхних и нижних последовательных приближений решения операторного уравнения в полуупорядоченном пространстве [4] и приложение полученного алгорифма к задаче Коши для интегро-дифференциальных уравнений и их систем с обыкновенными производными. Предложенная здесь схема метода в известной степени обобщает подобные схемы, рассмотренные в [3, 5, 6]. Уравнения либо условия, накладываемые на них, имеют более общий вид, чем в работах [2, 3] (в частности, здесь охватывается случай интегральных уравнений), но условия Коши заданы в точке, являющейся нижним пределом интеграла, фигурирующего в уравнении.

§ 1. Абстрактная схема метода

В основу настоящего параграфа положены теорема 1 [6] и замечание об упрощении алгорифма ([5], стр. 38).

Пусть X, $У$ — K-пространства [4] (достаточно, чтобы аксиома о грани выполнялась хотя бы для счетного множества). Задано уравнение $P(x)=0$, где оператор P переводит X в $У$.

1. Алгорифм. Монотонность приближений.

Пусть на $[u_0, v_0]$ задан оператор P, причем $P(u_0) \leqslant 0 \leqslant P(v_0)$ и для каждого $[c, d] \subseteq [u_0, v_0]$ существуют аддитивные положительно-обратимые операторы $\Gamma(c, d)$ и $T(c, d)$ такие, что на всем $[c, d]$

$$\Gamma(c, d)(x-c) \geqslant P(x)-P(c), \quad T(c, d)(d-x) \geqslant P(d)-P(x). \tag{1}$$

Пусть существует аддитивный оператор $\Gamma \geqslant \Gamma(c, d)$, $\Gamma \geqslant T(c, d)$ для всех $[c, d]$, и выполняется хотя бы одно из условий:

a) Γ и P монотонно-непрерывны,

b) Γ положительно-обратим (т. е. $\Gamma^{-1}>0$), а $\Gamma^{-1}P$ монотонно-непрерывен.

Зададим алгорифм

$$u_{n+1}=u_n-\Gamma_n^{-1}(z_n), \quad v_{n+1}=v_n-T_n^{-1}(w_n), \; n=0, 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

где $\Gamma_n=\Gamma(u_n, v_n)$, $T_n=T(u_n, v_n)$, а z_n, w_n — произвольные элементы, удовлетворяющие неравенствам

$$P(u_n) \leqslant z_n \leqslant 0 \leqslant w_n \leqslant P(v_n).$$

Тогда для элементов u_n, v_n выполняются неравенства

$$u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant u \leqslant v \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n, \tag{3}$$

где u, v — наименьшее и наибольшее на $[u_0, v_0]$ решения уравнения $P(x)=0$.

2. Единственность решения. Пусть существует аддитивный оператор Λ такой, что для $\Delta x > 0$

$$P(x+\Delta x) - P(x) \geqslant \Lambda(\Delta x),$$

и выполняется хотя бы одно из условий:

c) Λ положительно обратим,

d) $(I - \Gamma^{-1}\Lambda)^n (v_0 - u_0) \searrow 0$ при $n \to \infty$ (I-тождественный оператор, V^n — n-ая итерация оператора V).

Тогда $u=v$.

3. Сходимость к решению. Определим

$$z_n = H_n P(u_n), \quad w_n = L_n P(v_n).$$

Пусть существует оператор H, для которого

$$H_n(t) \leqslant H(t) < 0 < H(s) \leqslant L_n(s) \tag{4}$$

при $t < 0 < s$, любом n, и выполняется хотя бы одно из условий:

e) Γ, H и P монотонно — непрерывны,

f) $\Gamma^{-1}HP$ монотонно — непрерывен, и нуль является единственным решением уравнения $H(t)=0$ (в частности, при H аддитивном обратимом).

Тогда $u_n \nearrow u$, $v_n \searrow v$.

4. Оценка быстроты сходимости. Для единственности решения и, одновременно, сходимости алгорифма к решению достаточно (вместо условий пп. 2, 3) существования оператора H, для которого выполняются неравенства (4) и условие

g) H аддитивен, положителен,

$$\delta_n = (I - \Gamma^{-1}H\Lambda)^n (v_0 - u_0) \searrow 0 \quad \text{при } n \to \infty.$$

Тогда $v_n - u_n \leqslant \delta_n$.

Доказательство 1. Вначале докажем, что в теореме 1 [6] условие b) настоящего параграфа (обеспечивающее сходимость алгорифмов этой теоремы к решениям) может быть заменено условием a). Действительно, если пользоваться алгорифмом теоремы 1 [6], начиная с $x_0 = u_0$, $y_0 = v_0$,

$$x_{n+1} = x_n - \Gamma_n^{-1} P(x_n), \quad y_{n+1} = y_n - T_n^{-1} P(y_n), \tag{5}$$

то, не требуя условия b), можно доказать, что

$$x_0 \leqslant y_{n+1} \leqslant y_n, \qquad P(y_n) \geqslant 0.$$

Отсюда следует соотношение $y_n - y_{n+1} \searrow 0$ и существование $\lim y_n = v$. Но по условию теоремы 1 [6]

$$\Gamma(y_n - y_{n+1}) \geqslant T_n(y_n - y_{n+1}) = P(y_n) \geqslant 0.$$

Используя условие a), находим отсюда, что $P(v)=0$. Аналогично доказывается, что $x_n \nearrow u$, $P(u)=0$.

Теперь сравним приближения u_1, v_1, полученные по формулам (2), с x_1, y_1, полученными из (5), причем $x_0 = u_0$, $y_0 = v_0$,

$$T_0(v_0 - v_1) = w_0 \leqslant P(v_0) = T_0(v_0 - y_1).$$

Так как T_0^{-1} монотонно-возрастает, то отсюда следует $y_1 \leqslant v_1$. Согласно теореме 1 [6] элемент y_1 (а следовательно и v_1) находится на $[u_0, v_0]$ — отрезке выполнения всех условий теоремы. Так как $w_0 \geqslant 0$, $T_0^{-1} > 0$, то

$$v_1 = v_0 - T_0^{-1}(w_0) \leqslant v_0, \quad v_0 - v_1 \geqslant 0.$$

Значит,

$$P(v_0) - P(v_1) \leqslant T_0(v_0 - v_1) = w_0 \leqslant P(v_0), \quad P(v_1) \geqslant 0,$$

Аналогично доказываем, что $u_0 \leqslant u_1 \leqslant x_1$, $P(u_1) \leqslant 0$. Итак, на $[u_1, v_1] \subseteq [u_0, v_0]$ выполнены все условия теоремы 1 [6] для первоначальных приближений. Продолжая указанный процесс сравнения алгорифмов (2) и (5) (теперь уже начиная с $x_0 = u_1$, $y_0 = v_1$ и т. д.) приходим к неравенствам (3) и, сверх того, устанавливаем, что $P(u_n) \leqslant 0 \leqslant P(v_n)$.

2. Выполнение условия c) по теореме 1 [6] гарантирует единственность решения. Пусть выполнено d). Используя алгорифм (5), получим

$$\Gamma(y_n - y_{n+1} - x_n + x_{n+1}) \geqslant T_n(y_n - y_{n+1}) - \Gamma_n(x_n - x_{n+1}) =$$
$$= P(y_n) - P(x_n) \geqslant \Lambda(y_n - x_n),$$

$$y_{n+1} - x_{n+1} \leqslant (I - \Gamma^{-1}\Lambda)(y_n - x_n).$$

Так как оператор $I - \Gamma^{-1}\Lambda$ монотонно возрастает, что отсюда следует

$$y_n - x_n \leqslant (I - \Gamma^{-1}\Lambda)^n (v_0 - u_0) \searrow 0, \quad u = v.$$

3. Из неравенств (4) следует

$$\Gamma(v_n - v_{n+1}) \geqslant T_n(v_n - v_{n+1}) = L_n P(v_n) \geqslant HP(v_n) \geqslant 0,$$

$$\Gamma(v_n - v_{n+1}) \geqslant HP(v_n) \geqslant 0. \tag{6}$$

Отсюда, пользуясь условием e), получаем

$$HP(v) = 0.$$

Если бы $P(v) \neq 0$, то необходимо должно быть $P(v) > 0$, так как $P(v_n) \geqslant 0$ и P монотонно-непрерывен. Тогда $HP(v) > 0$ — противоречие.

Если же брать условие f), то из него, а также из неравенств

$$v_n - v_{n+1} \geqslant \Gamma^{-1} HP(v_n) \geqslant 0,$$

следующих из (6), находим, что

$$\Gamma^{-1} HP(v) = 0.$$

Так как Γ аддитивен, то $HP(v) = 0$, т. е. $P(v) = 0$. Аналогично проводятся рассуждения для u_n.

4. Учитывая положительность оператора $I - \Gamma^{-1} H\Lambda$ на множестве элементов $(v_n - u_n)$, находим

$$\Gamma(v_n - v_{n+1} - u_n + u_{n+1}) \geqslant T_n(v_n - v_{n+1}) - \Gamma_n(u_n - u_{n+1}) =$$
$$= L_n P(v_n) - H_n P(u_n) \geqslant H[P(v_n) - P(u_n)] \geqslant H\Lambda(v_n - u_n),$$

$$v_n - u_n \leqslant (I - \Gamma^{-1} H\Lambda)^n (v_0 - u_0).$$

Алгорифм (2) отличается от (5) введением z_n, w_n вместо $P(u_n)$, $P(v_n)$. Это введение делается для упрощения вычислений, т. к. в качестве z_n и w_n могут быть выбраны более простые выражения, нежели $P(u_n)$, $P(v_n)$, и этим вычисления могут быть значительно облегчены.

Исследование сходимости к решению носит скорее теоретический характер, показывая лишь широкие возможности неограниченного приближения к решению. Практически лучшей оценкой приближений остается характерная для метода чаплыгинского типа оценка $v_n - u_n$.

Предложенная схема охватывает, в частности, аналог комбинированного метода касательных и секущих [3], сходящегося быстрее, чем алгорифмы работы [5].

§ 2. Интегро-дифференциальное уравнение

1. Вначале рассмотрим уравнение

$$F[y] \equiv F(t, y, y', \ldots, y^{(m)}, J) = 0, \tag{7}$$

$$J = \int_a^b K(t, \tau, y, \ldots, y^{(m)})\, d\tau, \quad a \leqslant t \leqslant b,$$

$$y^{(k)}(a) = \alpha_k \qquad (k = 0, \ldots, m-1). \tag{8}$$

В частности, при $m = 0$ (условия (8) отбрасываются) уравнение становится интегральным.

Пусть существуют функции u_0, v_0, для которых выполнены (8) и неравенства

$$(v_0 - u_0)^{(m)} \geqslant 0, \quad F[u_0] \leqslant 0 \leqslant F[v_0].$$

В качестве элементов K-пространства X примем все вещественные функции $x(t)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$, которые будем считать производными порядка m от функций $y(t)$, удовлетворяющих условиям (8). Выделим $[u_0^{(m)}, v_0^{(m)}]$, т. е. будем иметь впредь дело лишь с такими функциями $y(t)$, для которых $u_0^{(k)} \leqslant y^{(k)} \leqslant v_0^{(k)}$ $(k = 0, \ldots, m)$. Пусть на этом отрезке выполняются следующие условия для непрерывных производных:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial y^{(k)}} \leqslant 0 \ (k = 0, \ldots, m-1), \quad \frac{\partial F}{\partial y^{(m)}} \leqslant 1, \\ &\frac{\partial F}{\partial J} \leqslant 0 \leqslant \frac{\partial K}{\partial y^{(k)}} \quad (k = 0, \ldots, m), \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

а функции F и K непрерывны по всем $y^{(k)}$; F, кроме этого, также по J.

Обозначим через $\Delta y^{(m)}$ разность функций, входящих в данный отрезок. Так как

$$\Delta y^{(k)}(a) = 0,$$

то все $\Delta y^{(k)} \geqslant 0$, $\Delta y^{(k)} \to 0$ при $\Delta y^{(m)} \geqslant 0$, $\Delta y^{(m)} \to 0$. По теореме о конечных приращениях при $\Delta y^{(m)} \geqslant 0$

$$\Delta J = \int_a^b \sum_{k=0}^m \frac{\partial K}{\partial s_k} \Delta y^{(k)}\, d\tau \geqslant 0.$$

По тем же соображениям

$$\Delta F = F[y + \Delta y] - F[y] \leqslant \Delta y^{(m)},$$

как это видно из (9).

Следовательно, за операторы Γ_n, T_n можно принять тождественный, и алгорифм (2) приобретает вид

$$(u_n - u_{n+1})^{(m)} = z_n, \quad (v_n - v_{n+1})^{(m)} = w_n,$$

$$F[u_n] \leqslant z_n \leqslant 0 \leqslant w_n \leqslant F[v_n],$$

u_{n+1}, v_{n+1} удовлетворяют условиям (8). При этом будет

$$u_n^{(k)} \leqslant u^{(k)} \leqslant v^{(k)} \leqslant v_n^{(k)}$$

на всем $]a, b]$, где u, v — наименьшее и наибольшее (со старшими производными) решения уравнения (7)

2. Установим достаточные условия единственности решения. Пусть

$$-A_k \leqslant \frac{\partial F}{\partial y^{(k)}}, \quad \frac{\partial K}{\partial y^{(k)}} \leqslant B_k \quad (k=0, \ldots, m), \quad -A_{m+1} \leqslant \frac{\partial F}{\partial J},$$

причем $A_m < 0$. Тогда при $\Delta y^{(m)} \geqslant 0$

$$\Delta F \geqslant -\sum_{k=0}^{m} A_k \Delta y^{(k)} - A_{m+1} \sum_{k=0}^{m} B_k \int_a^b \Delta y^{(k)}\, d\tau.$$

Используя выражения $\Delta y^{(k)}$ через $\Delta y^{(m)}$ и обозначая

$$A = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{A_k (b-a)^{m-k-1}}{(m-k-1)!}, \qquad B = A_{m+1} \sum_{k=0}^{m} \frac{B_k (b-a)^{m-k}}{(m-k)!},$$

найдем (здесь $\Delta x = \Delta y^{(m)}$)

$$\Delta F \geqslant -A_m \Delta x - A \int_a^t \Delta x\, d\tau - B \int_a^b \Delta x\, d\tau. \tag{10}$$

Для суммы A неравенство проверяется легко, а для суммы B оно следует из неравенств при $k=0, \ldots, m-1$,

$$\int_a^b \Delta y^{(k)}\, d\tau = \frac{1}{(m-k-1)!} \int_a^b \int_a^t (t-\tau)^{m-k-1} \Delta y^{(m)}\, d\tau\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(m-k-1)!} \int_a^b (t-a)^{m-k-1} \int_a^t \Delta y^{(m)}\, d\tau\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(m-k-1)!} \int_a^b (t-a)^{m-k-1}\, dt \int_a^b \Delta y^{(m)}\, d\tau = \frac{(b-a)^{m-k}}{(m-k)!} \int_a^b \Delta y^{(m)}\, d\tau.$$

И тем более из (10) следует

$$\Delta F \geqslant -A_m \Delta x - (A+B) \int_a^b \Delta x\, d\tau = \Lambda(\Delta x).$$

Нетрудно проверить, что для выполнения условия c) или d), достаточно потребовать, чтобы

$$(A+B)(b-a) < -A_m. \tag{11}$$

Если F, K, $u_0^{(m)}$, $v_0^{(m)}$ непрерывны, то решение $u^{(m)}=v^{(m)}$ непрерывно. Это следует из условия d), которое обеспечивает здесь равномерную сходимость приближений (при $z_n=P(u_n)$, $w_n=P(v_n)$; если же z_n, w_n — произвольные, то применяем теорему Дини).

3. В случае дифференциального уравнения, условие (11) не требуется, т. к. в этом случае принимаем (см. (10))

$$\Lambda(\Delta x)=-A_m\,\Delta x-A\int_a^t \Delta x\,d\tau.$$

$\Lambda^{-1}>0$ при любом A; т. е. условие с) выполняется. Но при этом не гарантируется непрерывность старшей производной решения.

4. Для уравнения, разрешенного относительно $y^{(m)}$,

$$F[y]\equiv y^{(m)}-\lambda f(t,\ y,\ \ldots,\ y^{(p)},\ J)=0, \tag{12}$$

$$J=\int_a^b K(t,\ \tau,\ y,\ \ldots,\ y^{(p)})\,d\tau,$$

$$a\leqslant t\leqslant b,\qquad 0\leqslant p\leqslant m-1,\quad \lambda>0,$$

и начальных условий (8), можно построить алгорифм при более слабых ограничениях, накладываемых на $\dfrac{\partial f}{\partial y^{(k)}}$.

Примем $x=y^{(p)}(t)$. Пусть

$$(v_0-u_0)^{(p)}\geqslant 0,\quad F[u_0]\leqslant 0\leqslant F[v_0],$$

u_0, v_0 удовлетворяют условиям (8), и на $[u_0^{(p)},\ v_0^{(p)}]$ непрерывные производные удовлетворяют неравенствам

$$\frac{\partial K}{\partial y^{(k)}}\geqslant 0,\quad \frac{\partial f}{\partial y^{(k)}}\geqslant A_k\quad (k=0,\ \ldots,\ p),\quad \frac{\partial f}{\partial J}\geqslant 0.$$

Тогда можно принять при всех n $\Gamma_n=T_n=\Gamma$, где

$$\Gamma(\Delta y^{(p)})=\Delta y^{(m)}-\lambda\sum_{k=0}^{p}A_k\,\Delta y^{(k)},$$

если $[a,\ b]$ входит в промежуток применимости теоремы Чаплыгина о дифференциальных неравенствах p-го порядка, т. е. при $a\leqslant t\leqslant b$ из соотношений

$$\Gamma(\Delta y^{(p)})\geqslant 0,\qquad \Delta y^{(k)}(a)=0$$

следует $\Delta y^{(p)}\geqslant 0$. Иначе говоря, требуем положительную обратимость оператора Γ (в пространстве функций $y^{(p)}$). Например, при $p=m-1$ и $A_k=0$ $(k=0,\ \ldots,\ m-2)$ теорема выполняется всюду. Случай $m=2$, $p=\lambda=1$, $A_0\geqslant 0$ исследован в [3]. В каждом конкретном случае следует рассматривать вопрос о положительной обратимости оператора Γ.

Для выполнения условия b) о монотонной непрерывности оператора $\Gamma^{-1}P$ на $[u_0^{(p)},\ v_0^{(p)}]$ достаточно потребовать непрерывность f и K по всем $y^{(k)}$, а f также по J, т. к.

$$\Gamma^{-1}(\Delta y^{(m)})\to 0\quad\text{при } \Delta y^{(p)}\to 0.$$

Действительно, если

$$\Delta y^{(m)} - \lambda \sum_{k=0}^{p} A_k \Delta y^{(k)} = \varphi(t), \quad \Delta y^{(k)}(a) = 0 \quad (k = 0, \ldots, m-1),$$

то

$$\Delta y = \int_a^t R(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau, \qquad R_t^{(k)}(\tau, \tau) = \begin{cases} 0 \text{ при } k = 0, \ldots, m-2, \\ 1 \text{ при } k = m-1, \end{cases}$$

$$\Delta y^{(p)}(t) = \int_a^t R_t^{(p)}(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau = \Gamma^{-1}(\varphi),$$

$$\Gamma^{-1}(\Delta y)^{(m)} = R_t^{(p)}(t, \tau) \Delta y^{(m-1)} \Big|_a^t - \int_a^t R_t^{(p+1)}(t, \tau) \Delta y^{(m-1)}(\tau) d\tau.$$

При $p = m-1$ прекращаем дальнейшие выкладки. Если же $p > m-1$, то проинтегрированный член обращается в нуль; продолжая таким же образом интегрирование по частям, приходим к выводу, что при $\Delta y^{(p)} \to 0$,

$$\Gamma^{-1}(\Delta y^{(m)}) = \pm \Delta y^{(p)}(t) \mp \int_a^t R_t^{(m)} \cdot \Delta y^{(p)} d\tau \to 0.$$

Алгорифм

$$\left.\begin{aligned} (u_n - u_{n+1})^{(m)} - \lambda \sum_{k=0}^{p} A_k (u_n - u_{n+1})^{(k)} = z_n, \\ (v_n - v_{n+1})^{(m)} - \lambda \sum_{k=0}^{p} A_k (v_n - v_{n+1})^{(k)} = w_n, \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

$$F[u_n] \leqslant z_n \leqslant 0 \leqslant w_n \leqslant F[v_n],$$

начальные условия для $u_n - u_{n+1}$ и $v_n - v_{n+1}$ нулевые.

5. Для улучшения сходимости можно пользоваться алгорифмом (13) с заменой A_k на A_{kn}, где

$$\frac{\partial f}{\partial y^{(k)}} \geqslant A_{kn} \text{ на } [u_n^{(p)}, v_n^{(p)}], \quad A_{k(n-1)} \leqslant A_{kn}.$$

6. Рассмотрим один из тех случаев, когда в алгорифме берутся не операторы $\Gamma_n = T_n$, для которых $\Gamma_n(\Delta x) \geqslant \Delta P$, а другие, один из которых удовлетворяет б о л е е с л а б ы м условиям (1). При этом получается алгорифм, обладающий простотой алгорифма с постоянными коэффициентами, но быстрее сходящийся (здесь — для верхних приближений).

Пусть в уравнении (12) $p = m-1$,

$$\frac{\partial f}{\partial y^{(k)}} \geqslant 0 \ (k = 0, \ldots, m-2), \quad \frac{\partial f}{\partial J} \geqslant 0, \quad \frac{\partial K}{\partial y^{(k)}} \geqslant 0 \ (k = 0, \ldots, m-1) \quad (14)$$

и, кроме того, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^{(m-1)\,2}} \geqslant 0$.

Если $\varphi''(x) \geqslant 0$, то при $c < x < d$

$$\frac{\varphi(d) - \varphi(c)}{d - c}(d - x) \leqslant \varphi(d) - \varphi(x).$$

Поэтому при $c^{(m-1)}(t) \leqslant y^{(m-1)} \leqslant d^{(m-1)}(t)$

$$S \cdot (d - y)^{(m-1)} \equiv \frac{f[d] - f_c[d]}{(d - c)^{(m-1)}}(d - y)^{(m-1)} \leqslant f[d] - f_y[d], \tag{15}$$

где обозначено

$$f[d] = f\left(t, d, \ldots, d^{(m-1)}, \int_a^b K(t, \tau, d, \ldots, d^{(m-1)})\, d\tau\right),$$

а выражения $f_c[d]$ и $f_y[d]$ отличаются от $f[d]$ тем, что на месте $d^{(m-1)}$ стоит $c^{(m-1)}$ или, соответственно, $y^{(m-1)}$, но под интегралом оставлены по-прежнему все $d^{(k)}(k = 0, \ldots, m-1)$. Остальные аргументы $d^{(k)}(k = 0, \ldots, m-2)$ функции f также сохранены прежними.

В силу неравенств (14),

$$f_y[d] - f[y] \geqslant 0.$$

Отсюда и из (15) находим

$$S(d - y)^{(m-1)} \leqslant f[d] - f[y].$$

Примем (см. (1)) на рассматриваемом отрезке функций $y^{(m-1)}$

$$T(\Delta y^{(m-1)}) = \Delta y^{(m)} - \lambda B \Delta y^{(m-1)},$$

где число $B \leqslant S$. Тогда

$$T((d - y)^{(m-1)}) \geqslant F[d] - F[y].$$

Алгорифм

$$(u_n - u_{n+1})^{(m)} - \lambda A_n (u_n - u_{n+1})^{(m-1)} = z_n,$$

$$(v_n - v_{n+1})^{(m)} - \lambda B_n (v_n - v_{n+1})^{(m-1)} = w_n,$$

где числа A_n и B_n выбираются при условиях

$$A_n \leqslant \frac{df}{\partial u_n^{(m-1)}}, \quad B_n \leqslant \frac{f[v_n] - f_{u_n}[v_n]}{(v_n - u_n)^{(m-1)}},$$

причем, чтобы не замедлять процесса, лучше брать

$$A_{n-1} \leqslant A_n, \quad B_{n-1} \leqslant B_n.$$

7. Найдем достаточные условия единственности решения уравнения (12), пользуясь условием с). Пусть на $[u_0^{(p)}, v_0^{(p)}]$ (впрочем, достаточно хотя бы на одном $[u_n^{(p)}, v_n^{(p)}]$)

$$\frac{\partial K}{\partial y^{(k)}} \leqslant B_k, \quad \frac{\partial f}{\partial y^{(k)}} \leqslant C_k \ (k = 0, \ldots, p), \quad C_p = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial J} \leqslant C_{p+1},$$

все числа B_k, C_k, C_{p+1} неотрицательны. Обозначая

$$\sum_{k=0}^{p-1} \frac{C_k (b - a)^{p-k-1}}{(p - k - 1)!} + C_{p+1} \sum_{k=0}^{p} \frac{B_k (b - a)^{p-k}}{(p - k)!} = C,$$

так же, как в п. 2, установим, что при $\Delta y^{(p)} \geqslant 0$,

$$\Delta F \geqslant \Delta y^{(m)} - \lambda C \int_a^b \Delta y^{(p)}\, d\tau = \Lambda(\Delta y^{(p)}).$$

Найдем условие, при котором $\Lambda^{-1} > 0$. Обозначим $\Delta x = \Delta y^{(p)}$, и пусть $\Lambda(\Delta x) = \varphi(t) \geqslant 0$. После $(m-p)$-кратного интегрирования на $[a, t]$ получим

$$\Delta x - A(t) \int_a^b \Delta x\, d\tau = \psi(t) \geqslant 0, \tag{16}$$

где $\psi(t)$ — результат указанного интегрирования функции $\varphi(t)$, и

$$A(t) = \lambda C \frac{(t-a)^{m-p}}{(m-p)!}.$$

Очевидно, при $A(t)(b-a) < 1$ на всем $[a, b]$, а следовательно, при

$$\lambda < \frac{(m-p)!}{C(b-a)^{m-p+1}}$$

из неравенства (16) следует $\Delta x \geqslant 0$. По условию c) решение единственно.

Для дифференциальных уравнений последнего ограничения, разумеется, не нужно.

§ 3. Система интегро-дифференциальных уравнений

1. Рассмотрим систему:

$$y_i' = \lambda_i f_i(t, y_1, \ldots, y_m, J_i),$$

$$J_i = \int_a^b K_i(t, \tau, y_1, \ldots, y_m, y_1', \ldots, y_m')\, d\tau,$$

$$a \leqslant t \leqslant b, \quad \lambda_i > 0, \quad y_i(a) = \alpha_i \quad (i = 1, \ldots, m).$$

Частными случаями этой системы являются системы дифференциальных или интегральных уравнений.

K-пространством X здесь будем считать множество всех совокупностей $y' = \{y_1', \ldots, y_m'\}$ производных. Выделим $[u_0', v_0']$, в котором все функции удовлетворяют данным начальным условиям, и

$$u_{i0}' \leqslant v_{i0}', \quad F_i[u_0] \leqslant 0 \leqslant F_i[v_0], \quad i = 1, \ldots, m.$$

Здесь и в дальнейшем обозначено

$$F_i[y_n] = y_{in}' - \lambda_i f_i(t, y_{1n}, \ldots, y_{mn}, J_{in}),$$

$$J_{in} = \int_a^b K_i(t, \tau, y_{1n}, \ldots, y_{mn}')\, d\tau.$$

Пусть на данном $[u_0', v_0']$ неотрицательны все производные $\frac{\partial f_i}{\partial y_k}, \frac{\partial f_i}{\partial J_i}, \frac{\partial K_i}{\partial y_k}, \frac{\partial K_i}{\partial y_k}$, а функции f_i непрерывны по всем y_k и J_i функции K_i — по всем y_k, y_k'.

В качестве всех $\Gamma_n = T_n = \Gamma$ можно принять тождественный оператор. Алгорифм

$$u'_{i\,(n+1)} = u'_{in} - z_{in}, \quad v'_{i\,(n+1)} = v'_{in} - w_{in},$$
$$F_i[u_n] \leqslant z_{in} \leqslant 0 \leqslant w_{in} \leqslant F_i[v_n],$$

приближения удовлетворяют данным начальным условиям. u'_{in}, v'_{in} монотонно приближаются к u_i' и v_i' — наименьшему и наибольшему (с производной) решениям системы.

2. Для установления достаточных условий единственности воспользуемся условием d). Пусть

$$\frac{\partial f_i}{\partial y_k} \leqslant A_{ik}, \quad \frac{\partial K_i}{\partial y_k} \leqslant B_{ik}, \quad \frac{\partial K_i}{\partial y_k'} \leqslant C_{ik}, \quad \frac{\partial f_i}{\partial J_i} \leqslant D_i.$$

Тогда при всех $\Delta y_k' \geqslant 0$

$$\Delta f_i \leqslant \sum_{k=1}^{m} \left(A_{ik} \int_a^t \Delta y_k' \, d\tau + E_{ik} \int_a^b \Delta y_k' \, d\tau \right). \tag{17}$$

Здесь $E_{ik} = D_i [B_{ik}(b-a) + C_{ik}]$. И тем более

$$\Delta f_i \leqslant \sum_{k=1}^{m} (A_{ik} + E_{ik}) \int_a^b \Delta y_k' \, d\tau.$$

В качестве оператора $I - \Gamma^{-1}\Lambda = I - \Lambda$ можно принять совокупность линейных интегральных преобразований

$$\lambda_i \sum_{k=1}^{m} (A_{ik} + E_{ik}) \int_a^b \Delta y_k' \, d\tau \leqslant \lambda_i (A_i + E_i) \max_{t,k} \Delta y_k'(t) =$$
$$= q_i \max_{t,k} \Delta y_k'(t); \quad A_i = \sum_{k=1}^{m} A_{ik}, \quad E_i = \sum_{k=1}^{m} E_{ik}.$$

Последовательность $(I - \Lambda)^n (v_0 - u_0)'$ мажорируется последовательностью совокупностей чисел $q_i^n \max(v_0 - u_0)'$. Если $q_i < 1$, т. е.

$$\lambda_i < \frac{1}{(A_i + E_i)(b-a)},$$

то система имеет единственное решение. Если при этом все f_i, K_i, u'_{i0}, v'_{i0} непрерывны, то производные решений также непрерывны.

3. Для системы дифференциальных уравнений последнего ограничения не требуется, т. к. в этом случае $E_i = 0$, и из (17) следует, что последовательность $(I - \Lambda)^n (v_0 - u_0)'$ мажорируется последовательностью совокупностей чисел $\frac{q_i^n}{n!} \max(v_0 - u_0)'$ и поэтому сходится при любых λ_i.

4. Так же, как в § 2, могут быть построены алгорифмы чаплыгинского типа и при более слабых ограничениях, накладываемых на $\frac{\partial f_i}{\partial y_k}$.

Казанский государственный университет
им. В. И. Ульянова-Ленина

Поступило
30 IX 1957

ЛИТЕРАТУРА

1. С. А. Чаплыгин, Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений, М.—Л., 1950. 2. С. С. Мусина, Приближенное решение нелинейных интегро-дифференциальных уравнений с обыкновенными производными, Уч. зап. Казан. ГУ, т. 113, кн. 10, стр. 169—187, 1953. 3. С. Н. Слугин, Применения метода С. А. Чаплыгина приближенного решения операторных уравнений, Канд. дисс., Казань, 1954. 4. Л. В. Канторович, Б. З. Вулих, А. Г. Пинскер, Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, М.—Л., 1950. 5. А. Н. Балуев, О методе С. А. Чаплыгина, Вест. Лен. ун-та, № 13, в. 3, стр. 27—42, 1956. 6. С. Н. Слугин, Приближенное решение операторных уравнений на основе метода С. А. Чаплыгина, ДАН 103, № 4, стр. 565—568, 1955.