Р. Букоша, Отсутствие периодических орбит у одного класса двумерных систем Колмогорова, *Изв. вузов. Матем.*, 2018, номер 1, 3–9

Известия вузов. Математика
2018, №1, с. 3–9

http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

Р. БУКОША

ОТСУТСТВИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ОРБИТ У ОДНОГО КЛАССА ДВУМЕРНЫХ СИСТЕМ КОЛМОГОРОВА

Аннотация. Для двумерной системы Колмогорова, где $R(x,y)$, $S(x,y)$, $P(x,y)$, $Q(x,y)$, $M(x,y)$, $N(x,y)$ — однородные многочлены степеней m, a, n, n, b, b соответственно, получено явное выражение первого интеграла. Затем на его основе доказано отсутствие периодических орбит и предельных циклов. Приведен пример применения этих результатов.

Ключевые слова: система Колмогорова, первый интеграл, периодическая орбита, предельный цикл.

Введение

Системой Колмогорова называют автономную систему дифференциальных уравнений на плоскости вида

$$x' = \frac{dx}{dt} = xF(x,y), \quad y' = \frac{dy}{dt} = yG(x,y), \tag{1}$$

где производные берутся по времени, а F и G — две функции переменных x и y. Ее часто используют при моделировании взаимного влияния двух биологических видов в общей экологической нише [1]–[3]. Существует множество других теорий природных явлений, где используются системы Колмогорова, включая математическую экологию и динамику популяций [4]–[7], динамику химических реакций, физику плазмы [8], гидродинамику [9], экономику и др. В классической модели Лотки–Вольтерра–Гаузе функции F и G линейны, и, как хорошо известно, предельных циклов в этой модели нет. Конечно, здесь может быть одна критическая точка внутри квадранта ($x > 0$, $y > 0$), которая может быть центром, но изолированных периодических решений здесь нет. Напомним, что в фазовой плоскости предельный цикл системы (1) есть изолированная периодическая орбита системы (1). Одно из наиболее важных направлений в качественной теории плоских динамических систем [10]–[15] связано со второй частью нерешенной шестнадцатой проблемой Гильберта. Существует обширная литература по предельным циклам. Большая ее часть посвящена выявлению этих циклов, их количеству и устойчивости. Гораздо более редки работы, где они выписываются в явном виде [16]–[18].

Система (1) интегрируема на открытом подмножестве Ω плоскости $\mathbb{R}^2$ непостоянная C^1-функция $H : \Omega \to \mathbb{R}$, называемая первым интегралом этой системы на Ω, которая постоянна на содержащихся в Ω траекториях системы (1), т. е. если

$$\frac{dH(x,y)}{dt} = \frac{\partial H(x,y)}{\partial x} xF(x,y) + \frac{\partial H(x,y)}{\partial y} yG(x,y) \equiv 0 \text{ в точках } \Omega.$$

Поступила 08.08.2016

При этом $H = h$ есть общее решение этого уравнения, где h — произвольная постоянная. Хорошо известно, что для систем дифференциальных уравнений на плоскости существование первого интеграла определяет фазовый портрет [19].

В данной статье исследуется интегрируемость и периодические орбиты двумерной системы Колмогорова вида

$$x' = x\left(\frac{R(x,y)}{S(x,y)} + \sqrt{P(x,y)}\exp\left(\frac{M(x,y)}{N(x,y)}\right)\right), \quad y' = y\left(\frac{R(x,y)}{S(x,y)} + \sqrt{Q(x,y)}\exp\left(\frac{M(x,y)}{N(x,y)}\right)\right), \tag{2}$$

где $R(x,y)$, $S(x,y)$, $P(x,y)$, $Q(x,y)$, $M(x,y)$, $N(x,y)$ — однородные многочлены степеней m, a, n, n, b, b соответственно.

Определим тригонометрические функции

$$f_1(\theta) = \sqrt{P(\cos\theta,\sin\theta)}\left(\cos^2\theta\right)\exp\left(\frac{M(\cos\theta,\sin\theta)}{N(\cos\theta,\sin\theta)}\right) + \\ + \sqrt{Q(\cos\theta,\sin\theta)}\left(\sin^2\theta\right)\exp\left(\frac{M(\cos\theta,\sin\theta)}{N(\cos\theta,\sin\theta)}\right),$$

$$f_2(\theta) = \frac{R(\cos\theta,\sin\theta)}{S(\cos\theta,\sin\theta)},$$

$$f_3(\theta) = \left(\sqrt{Q(\cos\theta,\sin\theta)} - \sqrt{P(\cos\theta,\sin\theta)}\right)(\cos\theta\sin\theta)\exp\left(\frac{M(\cos\theta,\sin\theta)}{N(\cos\theta,\sin\theta)}\right).$$

1. Основной результат

Теорема. *Для системы Колмогорова (2) справедливы следующие утверждения.*

(1) *Если $f_3(\theta)N(\cos\theta,\sin\theta)S(\cos\theta,\sin\theta) \neq 0$, $P(\cos\theta,\sin\theta) \geq 0$, $Q(\cos\theta,\sin\theta) \geq 0$ и $\frac{1}{2}n + a - m \neq 0$, то система (2) имеет первый интеграл*

$$H(x,y) = \left(x^2+y^2\right)^{\frac{n+2a-2m}{4}}\exp\left(\left(m - \frac{1}{2}n - a\right)\int_0^{\arctan\frac{y}{x}} A(\omega)\,d\omega\right) - \\ - \left(\frac{1}{2}n + a - m\right)\int_0^{\arctan\frac{y}{x}}\exp\left(\left(m - \frac{1}{2}n - a\right)\int_0^{w} A(\omega)\,d\omega\right)B(w)\,dw,$$

где $A(\theta) = \frac{f_1(\theta)}{f_3(\theta)}$, $B(\theta) = \frac{f_2(\theta)}{f_3(\theta)}$, а траектории системы дифференциальных уравнений (2) в декартовых координатах имеют уравнения

$$x^2+y^2 = \begin{pmatrix} h\exp\left(\left(\frac{1}{2}n + a - m\right)\int_0^{\arctan\frac{y}{x}} A(\omega)\,d\omega\right) + \\ + \left(\frac{1}{2}n + a - m\right)\exp\left(\left(\frac{1}{2}n + a - m\right)\int_0^{\arctan\frac{y}{x}} A(\omega)\,d\omega\right) \\ \int_0^{\arctan\frac{y}{x}}\exp\left(\left(m - \frac{1}{2}n - a\right)\int_0^{w} A(\omega)\,d\omega\right)B(w)\,dw \end{pmatrix}^{\frac{4}{n+2a-2m}},$$

где $h \in \mathbb{R}$. При этом система (2) не имеет предельных циклов.

(2) *Если $f_3(\theta)N(\cos\theta,\sin\theta)S(\cos\theta,\sin\theta) \neq 0$, $P(\cos\theta,\sin\theta) \geq 0$, $Q(\cos\theta,\sin\theta) \geq 0$ и $\frac{1}{2}n + a - m = 0$, то система (2) имеет первый интеграл*

$$H(x,y) = \left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left(-\int_0^{\arctan\frac{y}{x}}\left(A(\omega) + B(\omega)\right)d\omega\right),$$

а кривые, образованные траекториями системы дифференциальных уравнений (2), *в декартовых координатах записываются как*

$$\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}} - h\exp\left(\int_0^{\arctan\frac{y}{x}} \left(A\left(\omega\right)+B\left(\omega\right)\right)d\omega\right)=0,$$

где $h\in\mathbb{R}$, *и система* (2) *не имеет предельных циклов.*

(3) *Если* $f_3\left(\theta\right)=0$ *для всех* $\theta\in\mathbb{R}$, *то система* (2) *имеет первый интеграл* $H=\frac{y}{x}$, *и траектории системы* (2) *записываются в декартовых координатах как* $y-hx=0$, *где* $h\in\mathbb{R}$. *Система* (2) *не имеет предельных циклов.*

Доказательство. Перепишем систему (2) в полярных координатах (r,θ), т. е. положим $x=r\cos\theta$ и $y=r\sin\theta$. Получим

$$r'=f_1\left(\theta\right)r^{\frac{1}{2}n+1}+f_2\left(\theta\right)r^{m-a+1},\quad \theta'=f_3\left(\theta\right)r^{\frac{1}{2}n}, \tag{3}$$

где тригонометрические функции $f_1\left(\theta\right)$, $f_2\left(\theta\right)$, $f_3\left(\theta\right)$ определены во введении, $r'=dr/dt$ и $\theta'=d\theta/dt$.

Пусть $f_3\left(\theta\right)N\left(\cos\theta,\sin\theta\right)S\left(\cos\theta,\sin\theta\right)\neq 0$, $P\left(\cos\theta,\sin\theta\right)\geq 0$, $Q\left(\cos\theta,\sin\theta\right)\geq 0$ для $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ и $\frac{1}{2}n+a-m\neq 0$.

Будем считать координату θ независимой переменной. Тогда система (3) приобретает вид

$$\frac{dr}{d\theta}=A\left(\theta\right)r+B\left(\theta\right)r^{1-\frac{1}{2}n+a-m},$$

где $A\left(\theta\right)=\frac{f_1(\theta)}{f_3(\theta)}$, $B\left(\theta\right)=\frac{f_2(\theta)}{f_3(\theta)}$, — это уравнение Бернулли. Стандартная замена переменных $\rho=r^{\frac{1}{2}n+a-m}$ приводит к линейному уравнению

$$\frac{d\rho}{d\theta}=\left(\frac{1}{2}n+a-m\right)\left(A\left(\theta\right)\rho+B\left(\theta\right)\right). \tag{4}$$

Общее решение уравнения (4) есть

$$\rho\left(\theta\right)=\exp\left(\left(\frac{1}{2}n+a-m\right)\int_0^{\theta}A\left(\omega\right)d\omega\right)\times$$
$$\times\left(\alpha+\left(\frac{1}{2}n+a-m\right)\int_0^{\theta}\exp\left(\left(m-\frac{1}{2}n-a\right)\int_0^{w}A\left(\omega\right)d\omega\right)B\left(w\right)dw\right),$$

где $\alpha\in\mathbb{R}$. Отсюда первый интеграл равен

$$H\left(x,y\right)=\left(x^2+y^2\right)^{\frac{n+2a-2m}{4}}\exp\left(\left(m-\frac{1}{2}n-a\right)\int_0^{\arctan\frac{y}{x}}A\left(\omega\right)d\omega\right)-$$
$$-\left(\frac{1}{2}n+a-m\right)\int_0^{\arctan\frac{y}{x}}\exp\left(\left(m-\frac{1}{2}n-a\right)\int_0^{w}A\left(\omega\right)d\omega\right)B\left(w\right)dw.$$

Пусть Γ — периодическая орбита, окружающая точку равновесия, лежащую в одном из открытых квадрантов, и пусть $h_\Gamma=H\left(\Gamma\right)$. Кривые $H=h$ с $h\in\mathbb{R}$, образованные траекториями системы (2), в декартовых координатах записываются так:

$$x^2+y^2=\begin{pmatrix} h\exp\left(\left(\frac{1}{2}n+a-m\right)\int_0^{\arctan\frac{y}{x}}A\left(\omega\right)d\omega\right)+ \\ +\left(\frac{1}{2}n+a-m\right)\exp\left(\left(\frac{1}{2}n+a-m\right)\int_0^{\arctan\frac{y}{x}}A\left(\omega\right)d\omega\right) \\ \int_0^{\arctan\frac{y}{x}}\exp\left(\left(m-\frac{1}{2}n-a\right)\int_0^{w}A\left(\omega\right)d\omega\right)B\left(w\right)dw \end{pmatrix}^{\frac{4}{n+2a-2m}}.$$

где $h \in \mathbb{R}$.

Поэтому периодическая орбита Γ содержится в кривой

$$x^2+y^2=\begin{pmatrix} h_\Gamma \exp\left(\left(\frac{1}{2}n+a-m\right)\int_0^{\arctan\frac{y}{x}} A(\omega)\,d\omega\right)+ \\ +\left(\frac{1}{2}n+a-m\right)\exp\left(\left(\frac{1}{2}n+a-m\right)\int_0^{\arctan\frac{y}{x}} A(\omega)\,d\omega\right) \\ \int_0^{\arctan\frac{y}{x}} \exp\left(\left(m-\frac{1}{2}n-a\right)\int_0^{w} A(\omega)\,d\omega\right) B(w)\,dw \end{pmatrix}^{\frac{4}{n+2a-2m}}.$$

Но эта кривая не может содержать периодическую орбиту Γ. Следовательно, квадрант $(x>0,\ y>0)$ не содержит предельных циклов, поскольку в нем вышеуказанная кривая имеет не более одной точки пересечения с прямой $y=\beta x$ при любом $\beta \in\,]0,+\infty[$.

Чтобы установить это, достаточно подсчитать абсциссы точек пересечения этой кривой с прямой $y=\beta x$ при $\beta \in\,]0,+\infty[$. Эти абсциссы равны

$$x=\frac{1}{\sqrt{1+\beta^2}}\begin{pmatrix} h_\Gamma \exp\left(\left(\frac{1}{2}n+a-m\right)\int_0^{\arctan\beta} A(\omega)\,d\omega\right)+ \\ +\left(\frac{1}{2}n+a-m\right)\exp\left(\left(\frac{1}{2}n+a-m\right)\int_0^{\arctan\beta} A(\omega)\,d\omega\right) \\ \int_0^{\arctan\beta} \exp\left(\left(m-\frac{1}{2}n-a\right)\int_0^{w} A(\omega)\,d\omega\right) B(w)\,dw \end{pmatrix}^{\frac{2}{n+2a-2m}},$$

и на каждой полупрямой OX^+ лежит не более одного значения x. Следовательно, в квадранте $(x>0,\ y>0)$ лежит не более одной точки пересечения, а кривая не может содержать периодическую орбиту.

Тем самым доказано утверждение (1) теоремы.

Допустим теперь, что $f_3(\theta)\,N(\cos\theta,\sin\theta)\,S(\cos\theta,\sin\theta) \neq 0$, $P(\cos\theta,\sin\theta) \geq 0$, $Q(\cos\theta,\sin\theta) \geq 0$ и $\frac{1}{2}n+a=m$.

Взяв в качестве независимой переменной координату θ, запишем систему (3) в виде

$$\frac{dr}{d\theta}=\left(A(\theta)+B(\theta)\right)r. \tag{5}$$

Общее решение уравнения (5) есть $r(\theta)=\alpha\exp\left(\int\limits_0^\theta \left(A(\omega)+B(\omega)\right)d\omega\right)$, где $\alpha\in\mathbb{R}$. Первый интеграл равен

$$H(x,y)=\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left(-\int_0^{\arctan\frac{y}{x}}\left(A(\omega)+B(\omega)\right)d\omega\right).$$

Пусть Γ — периодическая орбита, окружающая точку равновесия, расположенную в квадранте $(x>0,\ y>0)$, причем $h_\Gamma=H(\gamma)$. Кривые $H=h$, $h\in\mathbb{R}$, образованные траекториями системы (2), в декартовых координатах запишутся так:

$$\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}-h\exp\left(\int_0^{\arctan\frac{y}{x}}\left(A(\omega)+B(\omega)\right)d\omega\right)=0.$$

Поэтому периодическая орбита Γ содержится в кривой

$$r(\theta)=h_\Gamma\exp\left(\int_0^{\arctan\frac{y}{x}}\left(A(\omega)+B(\omega)\right)d\omega\right).$$

Но эта кривая не может содержать периодических орбит, и, следовательно, квадрант $(x>0,\ y>0)$ не может содержать предельных циклов, потому что вышеуказанная кривая имеет в этом квадранте не более одной точки пересечения с каждой прямой $y=\beta x$, $\beta\in\,]0,+\infty[$.

Чтобы установить этот факт, нужно вычислить абсциссы точек пересечения этой кривой с прямыми $y = \beta x$, $\beta \in]0, +\infty[$. Они равны

$$x = \frac{h_\Gamma}{\sqrt{(1+\beta^2)}} \exp\left(\int_0^{\arctan \beta} (A(\omega) + B(\omega))\, d\omega \right).$$

Не более одного значения x лежит на каждой полупрямой OX^+, и, соответственно, не более одной точки лежит в квадранте ($x > 0$, $y > 0$). Таким образом, эта кривая не может содержать периодических орбит.

Тем самым доказано утверждение (2) теоремы.

Теперь предположим, что $f_3(\theta) = 0$ для всех $\theta \in \mathbb{R}$, тогда из (3) следует равенство $\theta' = 0$. Поэтому проходящие через начало координат прямые инвариантны относительно действия системы (2). Значит, $\frac{y}{x}$ есть первый интеграл этой системы, и ее траектории имеют вид $y - hx = 0$, $h \in \mathbb{R}$. Поэтому в рассматриваемом случае нет ни периодических орбит, ни предельных циклов.

Этим завершается доказательство предложения (3) теоремы. $\square$

2. Пример

Наш результат иллюстрирует

Пример. Положим $R(x,y) = x^5 + x^3y^2$, $S(x,y) = x^2 + y^2$, $P(x,y) = 9x^2 + 8y^2$, $Q(x,y) = x^2 + y^2$, $M(x,y) = 3x^2 + y^2$ и $N(x,y) = x^2 + y^2$. Тогда система (2) записывается в виде

$$\begin{aligned} x' &= x\left(\frac{x^5 + x^3y^2}{x^2+y^2} + \sqrt{9x^2+8y^2} \exp\left(\frac{3x^2+y^2}{x^2+y^2} \right) \right), \\ y' &= y\left(\frac{x^5 + x^3y^2}{x^2+y^2} + \sqrt{x^2+y^2} \exp\left(\frac{3x^2+y^2}{x^2+y^2} \right) \right), \end{aligned} \tag{6}$$

а двумерная система Колмогорова (6) в полярных координатах (r, θ) имеет вид

$$\begin{aligned} r' &= \left(\sin^2\theta + \left(\cos^2\theta\right)\sqrt{8+\cos^2\theta} \right)\left(\exp\left(2+\cos^2\theta\right) \right) r^2 + \left(\cos^3\theta\right) r^4, \\ \theta' &= (\cos\theta \sin\theta)\left(1 - \sqrt{8+\cos^2\theta} \right)\left(\exp\left(2+\cos^2\theta\right) \right) r, \end{aligned}$$

здесь $f_1(\theta) = \left(\sin^2\theta + \left(\cos^2\theta\right)\sqrt{8+\cos^2\theta} \right)\left(\exp\left(2+\cos^2\theta\right) \right)$, $f_2(\theta) = \cos^3\theta$ and $f_3(\theta) = (\cos\theta\sin\theta)\left(1 - \sqrt{8+\cos^2\theta}\right)\left(\exp\left(2+\cos^2\theta\right)\right)$. Поскольку в квадранте ($x > 0$, $y > 0$) выполнены условия случая a) теоремы, то двумерная система Колмогорова (6) имеет первый интеграл

$$H(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2} \exp\left(2\int_0^{\arctan\frac{y}{x}} A(\omega)\, d\omega \right) + 2\int_0^{\arctan\frac{y}{x}} \exp\left(2\int_0^{w} A(\omega)\, d\omega \right) B(w)\, dw,$$

где $A(\omega) = \frac{\sin^2\omega + \left(\cos^2\omega\right)\sqrt{8+\cos^2\omega}}{(\cos\omega\sin\omega)\left(1-\sqrt{8+\cos^2\omega}\right)}$, $B(\omega) = \frac{\cos^2\omega}{(\sin\omega)\left(1-\sqrt{8+\cos^2\omega}\right)\left(\exp(2+\cos^2\omega)\right)}$.

Кривые $H = h$, $h \in \mathbb{R}$, образованные траекториями системы (6) в декартовых координатах имеют вид

$$\frac{1}{x^2+y^2} = \exp\left(-2\int_0^{\arctan\frac{y}{x}} A(\omega)\, d\omega \right)\left(h - 2\int_0^{\arctan\frac{y}{x}} \exp\left(2\int^{w} A(\omega)\, d\omega \right) B(w)\, dw \right),$$

где $h \in \mathbb{R}$. Очевидно, система (6) не имеет ни периодических орбит, ни предельных циклов.

Заключение

Использованный в данной статье элементарный метод может оказаться плодотворным в исследованиях и более общих двумерных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Возможно, он позволит найти явный вид их первых интегралов и охарактеризовать их траектории.

Литература

[1] Gao P. *Hamiltonian structure and first integrals for the Lotka–Volterra systems*, Phys. Lett. A **273** (1–2), 85–96 (2000).

[2] Li C., Llibre J. *The cyclicity of period annulus of a quadratic reversible Lotka–Volterra system*, Nonlinearity **22** (12), 2971–2979 (2009).

[3] Llibre J., Valls C. *Polynomial, rational and analytic first integrals for a family of* 3*-dimensional Lotka–Volterra systems*, Z. Angew. Math. Phys. **62** (5), 761–777 (2011).

[4] Huang X. *Limit in a Kolmogorov-type model*, Internat. J. Math. and Math Sci. **13** (3), 555–566 (1990).

[5] Llibre J., Salhi T. *On the dynamics of a class of Kolmogorov systems*, J. Appl. Math. and Comput. **225**, 242–245 (2013).

[6] Llyod N.G., Pearson J.M., Sáez E., Szánto I. *Limit cycles of a cubic Kolmogorov system*, Appl. Math. Lett. **9** (1), 15–18 (1996).

[7] May R.M. *Stability and complexity in model ecosystems* (Princeton, New Jersey, 1974).

[8] Lavel G., Pellat R. *Plasma physics*, in: *Proceedings of Summer School of Theoretical Physics* (Gordon and Breach, New York, 1975).

[9] Busse F.H. *Transition to turbulence via the statistical limit cycle route*, in: *Synergetics* (Springer-Verlag, Berlin, 1978), p. 39.

[10] Boukoucha R. *On the dynamics of a class of Kolmogorov systems*, Sib. Elektron. Mat. Izv. **13**, 734–739 (2016).

[11] Boukoucha R., Bendjeddou A. *On the dynamics of a class of rational Kolmogorov systems*, J. Nonlinear Math. Phys. **23** (1), 21–27 (2016).

[12] Chavarriga J., García I. A. *Existence of limit cycles for real quadratic differential systems with an invariant cubic*, Pacific J. Math. **223** (2), 201–218 (2006).

[13] Al-Dosary Khalil I.T. *Non-algebraic limit cycles for parameterized planar polynomial systems*, Int. J. Math. **18** (2), 179–189 (2007).

[14] Dumortier F., Llibre J., Artés J. *Qualitative theory of planar differential systems* (Springer, Universitex, Berlin, 2006).

[15] Llibre J., Yu J., Zhang X. *On the limit cycle of the polynomial differential systems with a linear node and homogeneous nonlinearities*, Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg. **24**, No. 5, Article ID 1450065 (2014).

[16] Bendjeddou A., Boukoucha R. *Explicit non-algebraic limit cycles of a class of polynomial systems*, FJAM **91** (2), 133–142 (2015).

[17] Bendjeddou A., Boukoucha R. *Explicit limit cycles of a cubic polynomial differential systems*, Stud. Univ. Babes-Bolyai Math. **61** (1), 77–85 (2016).

[18] Gasull A., Giacomini H., Torregrosa J. *Explicit non-algebraic limit cycles for polynomial systems*, J. Comput. Appl. Math. **200** (1), 448–457 (2007).

[19] Cairó L., Llibre J. *Phase portraits of cubic polynomial vector fields of Lotka–Volterra type having a rational first integral of degree* 2, J. Phys. A **40** (24), 6329–6348 (2007).

Рашид Букоша

Университет Беджайи, Беджайя, 06000, Алжир,

`e-mail:` rachid_boukecha@yahoo.fr

R. Boukoucha

On the non-existence of periodic orbits for a class of two-dimensional Kolmogorov systems

Abstract. For two-dimensional Kolmogorov system, where $R(x,y)$, $S(x,y)$, $P(x,y)$, $Q(x,y)$, $M(x,y)$, and $N(x,y)$ are homogeneous polynomials of degrees m, a, n, n, b, and b, respectively, we obtain an explicit expression of the first integral and prove the non-existence of periodic orbits and of limit cycles. We adduce an example of applicability of our result.

Keywords: Kolmogorov system, first integral, periodic orbits, limit cycle.

Rachid Boukoucha

University of Bejaia, 06000 Bejaia, Algeria,

e-mail: rachid_boukecha@yahoo.fr