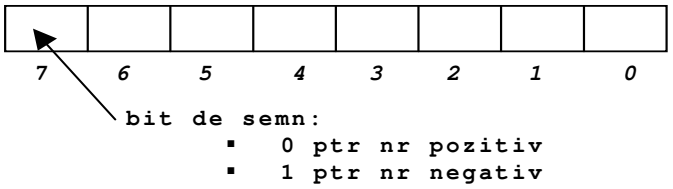
Operații pe biți

1. Reprezentarea internă a numerelor întregi

Reprezentarea în memorie a numerelor întregi se face printr-o secvență de cifre de **0** și **1**. Această secvență poate avea o lungime de **8**, **16** sau **32** de biți.

Forma de memorare a întregilor se numește *cod complementar*. În funcție de lungimea reprezentării se stabilește domeniu valorilor care pot fi stocate.

Modului de reprezentare (în cod complementar) va fi prezentat în cele ce urmează, folosind reprezentarea pe o lungime de **8** biți, valabilă pentru tipul shortint în Pascal, respectiv char în C/C++.



Se observă că numerotarea pozițiilor se face de la dreapta la stânga (de la **0** la **7**), poziția **7** fiind bit de semn (**0** pentru numerele pozitive și **1** pentru numerele negative).
Rezultă că doar **7** biți (pozițiile **0−6**) se folosesc pentru reprezentarea valorii absolute a numărului.

Numerele întregi pozitive se convertesc în baza **2**, și se face completarea cu cifre **0** nesemnificative, până la completarea celor **7** biți.

Exemplu:
Să determinăm forma de reprezentare a numărului întreg **5**.
$5_{10} = 101_2$
Vor fi necesare **4** cifre de **0** nesemnificative, pentru completarea primelor **7** biții, iar poziția **7** (bitul **8**) va fi **0** deoarece numărul este pozitiv.
Deci reprezentarea internă este următoarea:

0	0	0	0	0	1	0	1
7	6	5	4	3	2	1	0

Nu în același mod se face reprezentarea numerelor întregi negative. Pentru aceasta este necesară efectuarea următorilor pași:

1) determinarea reprezentării interne a numărului ce repezintă valoarea absolută a numărului inițial. Acesta are bitul de semn egal cu **0**.
2) se calculează complementul față de **1** a reprezentării obținute la pasul anterior (bitul **1** devine **0**, iar bitul **0** devine **1**)
3) se adună **1** (adunarea se face în baza **2**) la valoarea obținută.

Exemplu:
Pentru determinarea reprezentării numărului **−5** se procedează în felul următor:
Reprezentarea valorii absolute a numărului **−5** este **00000101.** Complementul față de **1** este:
11111010

Numărul obținut după adunarea cu **1** este :
11111011
Deci reprezentarea valorii întregi **−5** pe **8** biți este:

1	1	1	1	1	0	1	1
7	*6*	*5*	*4*	*3*	*2*	*1*	*0*

După cum observăm bitul de semn este **1** ceea ce ne indică faptul că avem de a face cu un număr negativ.

Putem trage concluzia că numerele întregi care se poate reprezenta pe **8** biți sunt cuprinse între $\mathbf{10000000}_2$ și $\mathbf{01111111}_2$, adică $\mathbf{-128}_{10}$, $\mathbf{127}_{10}$.

Așa cum am spus și la începutul cursului, numerele întregi se pot reprezenta în cod complementar, având la dispoziție **16, 32** sau chiar și **64** de biți. Mecanismul este același, însă valorile numerelor cresc.

2. Operatori la nivel de bit

Operatorii pe biți se pot aplica datelor ce fac parte din tipurile întregi. Operațiile se efectuează asupra biților din reprezentarea internă a numerelor.

Operatorul de negație
not (Pascal) respectiv **~** (C/C++)

Este un operator unar care întoarce numărul întreg a cărui reprezentare internă se obține din reprezentarea internă a numărului inițial, prin complementarea față de **1** a fiecărui bit(**1**→**0** și **0**→**1**).

Exemplu:

```
not 5=-6          |          ~ 5 == -6
```

Reprezentarea lui **5** este **00000101**. Complementând acest număr obțin reprezentarea **11111010** care corespunde numărului întreg $\tilde{}$**6**. Să verificăm:
Numărul $\tilde{}$**6** se reprezintă intern astfel:
$\mathbf{6}_2$ **= 00000110**, complementând obținem **11111001** și adunând **1** (în baza **2**) se obține în final **11111010** adică exact reprezentarea internă returnată a numărului returnat de operația **not 5** respectiv **~5**.

Operatorul de conjuncție
and respectiv **&**

Este un operator binar care returnează numărul întreg a cărui reprezentare internă se obține prin conjuncția biților care apar în reprezentarea internă a operanzilor. Conjuncția se face cu toate perechile de biți situați pe aceeași poziție.

Exemplu:

```
5 and 3 = 1       |          5 & 3 == 1
```

Să verificăm:
Reprezentarea internă a lui **5** este **00000101**, iar a lui **3** este **00000011**.

```
00000101 and          |  00000101 &
00000011              |  00000011
00000001              |  00000001
```

Această reprezentare este dată de numărul întreg **1**.

Operatorul de disjuncție
or respectiv **|**

Este un operator binar care returnează numărul întreg a cărui reprezentare internă se obține prin disjuncția biților care apar în reprezentarea internă a operanzilor. Disjuncția se face între biții situați pe aceeași poziție.

Exemplu:

```
15 or 3=15            |  15 | 3==15
```

Să verificăm:
Reprezentarea internă a lui **15** este **00001111** iar a lui **3** este **00000011**.

```
00001111 or           |  00001111 |
00000011              |  00000011
00001111              |  00001111
```

Această reprezentare este dată de numărul întreg **15**.

Operatorul "sau exclusiv"
xor respectiv **^**

Este un operator binar care returnează numărul întreg a cărui reprezentare internă se obține prin operația or exclusiv asupra biților care apar în reprezenarea internă a operanzilor. Operația se face între biții situați pe aceeași poziție.

Exemplu:

```
15 xor 3=12           |  15 ^ 3=12
```

Să verificăm:
Reprezentarea internă a lui **15** este **00001111** iar a lui **3** este **00000011**.

```
00001111 xor          |  00001111 ^
00000011              |  00000011
00001100              |  00001100
```

Această reprezentare este dată de numărul întreg **12**.

Operatorul shift left
shl respectiv **<<**

Este un operator binar care returnează numărul întreg a cărui reprezentare este obținută din reprezentarea internă a primului operand prin deplasare la stânga cu un număr de biți egal cu al doilea operand.

Exemplu:

4 shl 2=16	**4 << 2==16**

Să verificăm:
Reprezentarea internă a lui **4** este **00000100**. Prin deplasare la stânga cu doi biți se obține **00010000**, care este reprezentarea internă a lui **16**.
Acest operator poate fi folosit pentru calculul numerelor întregi de forma 2^n prin efectuarea operațiilor de forma **1 shl n**. (**1<<n**)

Operatorul shift right
shr respectiv **>>**

Este un operator binar care returnează numărul întreg a cărui reprezentare este obținută din reprezentarea internă a primului operand prin deplasare la dreapta cu un număr de biți egal cu al doilea operand.
Prin deplasarea la dreapta, primii biții din reprezentarea internă a numărului (pozițiile **1**,**2**, ş.a.m.d.) se pierd iar ultimii se completează cu zero.

Exemplu:

14 shr **2**=**3**	**14 >> 2==3**

Să verificăm:
Reprezentara internă a numărului **14** este **000001110**. Prin deplasare la dreapta cu doi biți a reprezentării lui **14** se obține **00000011**, care este reprezentarea internă a lui **3**.
Operația **n shr 1** (**n>>1**) este echivalentă cu împărțirea întreagă la **2**.

3. Operații la nivel de biți

Transformarea unui bit în 1

Pornim de la valoarea întreagă **X=50**. Reprezentarea acestuia pe **8** biți este **00110010**. Presupunem că dorim setarea bitului **2** la valoarea **1**. Pentru aceasta vom folosi o mască logică în care doar bitul **2** este **1** restul biților fiind **0**, adică **M=00000100**. Valoarea lui **M** este **1 shl 2** (2^2). Operația de disjuncție **SAU** aplicată asupra lui **X** şi a lui **M**, conduce la obținerea rezultatului dorit.

X 00**1**10010 **OR** M 00000100 Rez 00110**1**10	X 00**1**10010 **|** M 00000100 Rez 00110**1**10

Generalizând, dacă se doreşte ca valorii X, să i se seteze la valoarea **1**, bitul B (**0≤B≤7**), atunci masca logică este **1 shl B**.

X or (1 shl B)	**X | (1 << B)**

Transformarea unui bit în 0

Să luăm ca exemplu **X= 109**, pentru a vedea cum se setează un bit la valoarea **0**. Reprezentarea internă a lui este **01101101**. Se cere să se seteze bitul **5** la valoarea **0**. De data aceasta masca va conține toți biții de **1**, excepție bitul **5**. Aspura lui **X** şi **M** vom aplica **ŞI** logic.

```
X   01101101 AND
M   11011111
Rez 01001101
```

```
X   01101101 &
M   11011111
Rez 01001101
```

Presupunem că dorim să setăm la **0** valoarea bitului **B**(**0**≤**B**≤**7**). Pentru determinarea valorii măştii **M**, plecăm de la valoarea **255** din care scădem **1** shl **B**.

```
X and (255 - (1 shl B))
```

```
X & (255 - (1 << B))
```

Masca mai poate fi obținută şi aplicând sau exclusiv în locul scăderii, **255 xor (1 shl B)**. Rescriem rezultatul sub forma:

```
X and (255 xor(1 shl B))
```

```
X & (255 ^(1 << B))
```

Testarea valorii unui bit

Plecăm de la valoarea **X=47**. Reprezentarea internă a lui este **00101111**. Presupunem că dorim să cunoaştem valoarea bitului **3** şi bitului **6**. Vom folosi măştile M_1=**00001000** şi M_2=**01000000**. Vom aplica de fiecare dată **ŞI** logic între **X** şi cele două măşti:

```
X   00101111 AND
M1  00001000
Rez 00001000
```

```
X   00101111 &
M1  00001000
Rez 00001000
```

Respectiv

```
X   00101111 AND
M2  01000000
Rez 00000000
```

```
X   00101111 &
M2  01000000
Rez 00000000
```

Generalizând, testarea se va realiza prin :

```
X and (1 shl B) <> 0
```

```
X & (1 << B) != 0
```

Testarea valorilor ultimilor biți

Pornim de la valoarea întreagă **X=50**. Reprezentarea acestuia pe **8** biți este **00110010**. Presupunem că dorim să cunoaştem restul la împărțirea întreagă a lui **X** la **8**, adică **X mod 8** respectiv **x%8**. Valoarea ultimilor **3** biți din reprezentarea internă a lui lui, reprezintă tocmai acest rest. Pentru aceasta vom folosi o mască în care ultimii trei biții sunt **1** restul **0**. Aceasta mască are valoarea **7**, adică **00000111**. Vom aplica operația **ŞI** logic.

```
X   00110010 AND
M   00000111
Rez 00000010
```

```
X   00110010 &
M   00000111
Rez 00000010
```

Pe caz general, dacă dorim să cunoaştem valoarea ultimilor **B** biți(care este egal cu restul împărțirii lui **X** la 2^B) vom exprima astfel:

```
X and (1 shl B - 1)
```

```
X & (1 << B - 1)
```

Aplicații

Problema 1.

Realizați un subprogram care determină numărul de cifre de **1** din reprezentarea binară a unui număr natural nenul **n** mai mic ca **2000000000**.

Soluția 1:
Numărul îl vom reține într-o variabilă **longint** respectiv **long** şi vom parcurge secvențial biții lui.

```
function nr( n:longint):byte;
var nm,i:byte;
begin
 nm:=0;
 for i:=0 to 31 do
  if n  and (1 shl i) <>0 then
    inc(nm);
 nr:=nm;
end;
```

```
int nr (long n){
  int nm=0;
  for ( int i=0; i<32; i++)
    if (n & (1 << i)) nm++;
  return nm;
}
```

Soluția 2:
O altă soluție, mai rapidă este folosirea operației **ŞI** logic între valorile lui **n** şi a lui **n-1**.
Această operație anulează cel mai nesemnificativ bit de **1** a lui **n**. Să luam ca exemplu valoarea lui **n**:

```
n           =(110011101000100)2
n-1         =(110011101000011)2
n and (n-1)=(110011101000000)2
```

```
n          =(110011101000100)2
n-1        =(110011101000011)2
n & (n-1) =(110011101000000)2
```

De aici şi ideea algoritmului următor:

```
function nr( n:longint):byte;
var nm:byte;
begin
 nm:=0;
 repeat
   n:=n and(n-1); inc(nm);
 until n = 0;
 nr:=nm;
end;
```

```
int nr (long n){
  int nm=0;
  do {
    n &= n-1;
    nm++;}
  while (n);
  return nm;
}
```

Rezultatul este mai bun la cea de a doua metodă deoarece execută un număr de paşi egali cu numărul de cifre de **1** din reprezentare.

Problema 2.

Realizați un subprogram care verifică dacă un număr natural nenul **n** este o putere a lui **2**.

Soluție:
Dacă **n** este o putere a lui **2**, va avea o singură cifră de **1** în reprezentarea binară. Dacă ne bazăm pe observația de la problema anterioară, obținem:

```
function pow2( n:longint):boolean;
begin
 pow2 := n and(n-1) = 0;
end;
```

```
long pow2 (long n)
{
   return (n & (n-1)==0);
}
```

Problema 3.

Realizați un subprogram care identifică cea mai mare putere a lui **2** care îl divide pe **n**, număr natural nenul.

Soluția 1:
Problema se reduce la determinarea celui mai nesemnificativ bit de **1** din reprezentarea binară a lui n. Prima soluție caută poziția, pornind cu bitul **0**.

```
function pow(n:longint):longint;
var i:integer;
begin
 i:=0;
 while n and (1 shl i)=0 do inc(i);
 pow := 1 shl i;
end;
```

```
long pow (long n){
  int i=0;
  while (!(n & (1<<i))) i++;
  return 1 << i ;
}
```

Soluția 2

Se bazează pe observația că **n and (n-1)** are ca rezultat numărul din care lipseşte cel mai nesemnificativ bit de **0**. Atunci aplicând **XOR** intre valoarea inițală a lui n şi ce a lui **n and(n-1)** vom obține valoarea cerută.

Exemplu:

n $=(101000100)_2$
n and (n-1) $=(101000000)_2$
n xor(n and (n-1)) $=(000000100)_2$

n $=(101000100)_2$
n & (n-1) $=(101000000)_2$
n ^(n & (n-1)) $=(000000100)_2$

```
function pow( n:longint):longint;
begin
 pow := n xor(n and(n-1));
end;
```

```
long pow (long n){

   return n^(n & (n-1)) ;
}
```

Problema 4.

Realizați un subprogram care identifică numărul de ordine al celui mai semnificativ bit de **1** al lui **n** număr natural nenul.

Soluție

Să luăm ca exemplu următorul şir de operații:

n=$(10000000)_2$
n=n or (n shr 1)
n=$(11000000)_2$
n=n or (n shr 2)
n=$(11110000)_2$
n=n or (n shr 4)
n=$(11111111)_2$

n=$(10000000)_2$
n=n | (n >> 1)
n=$(11000000)_2$
n=n | (n >> 2)
n=$(11110000)_2$
n=n | (n >> 4)
n=$(11111111)_2$

Se observă că aplicând o secvență asemănătoare de instrucțiuni putem transforma un număr **n** în alt număr în care numărul de biți de **1** este egal cu **1** + indexul celui mai semnificativ bit de **1**.

```
function index( n:longint):byte;
begin
 n := n or (n shr 1);
 n := n or (n shr 2);
 n := n or (n shr 4);
 n := n or (n shr 8);
 n := n or (n shr 16);
 index:= nr(n)-1;
end;
```

```
int index(long n){
 n = n | (n >> 1);
 n = n | (n >> 2);
 n = n | (n >> 4);
 n = n | (n >> 8);
 n = n | (n >> 16);
 return nr(n) - 1;
}
```

Problema 5

Gigel trebuie să cumpere n medicamente, numerotate de la 1 la n. Doctorul i-a dat m rețete de două tipuri, codificate cu numerele 1, 2 astfel:

1 - rețetă necompensată, adică prețul medicamentelor de pe rețetă se achită integral de către cumpărător;

2 - rețetă compensată **50**%, adică prețul medicamentelor înscrise pe rețetă se înjumătățește.

Se ştie că pe rețete nu există un alt medicament decât cele numeroatete de la 1 la n şi o rețetă nu conține două medicamente identice.

Dacă o rețetă este folosită atunci se vor cumpăra toate medicamentele înscrise pe ea.

Cerință

Scrieți un program care să determine suma minimă de bani necesară pentru a cumpăra exact câte unul din fiecare dintre cele n medicamente, folosindu-se de rețetele avute la dispoziție.

Date de intrare

Fişierul de intrare reteta.in are următorul format :

- pe prima linie sunt scrise numerele naturale n şi m;
- pe următoarele m linii sunt descrise cele m rețete, câte o rețetă pe o linie. Linia care descrie o rețetă conține tipul rețetei (1 necompensată sau 2 compensată), urmat de un număr natural q reprezentând numărul de medicamente de pe rețetă, apoi de q numere distincte din mulțimea {1, 2, ..., n} reprezentând medicamentele înscrise pe acea rețetă;
- pe ultima linie a fişierului de intrare sunt scrise n numere naturale separate prin câte un spațiu, reprezentând în ordinea de la 1 la n, prețul medicamentelor.

Toate numerele de pe aceeaşi linie sunt separate prin câte un spațiu.

Date de ieşire

Fişierul de ieşire reteta.out va conține o singură linie pe care va fi scris un număr real cu o singură zecimală, reprezentând suma minimă determinată.

Restricții

$1 \le N \le 20$

$1 \le M \le 15$

$1 \le$ prețul oricărui medicament ≤ 200

Pentru datele de test există întotdeauna soluție.

Exemplu

reteta.in	reteta.out	**Explicație**
4 5 2 1 3 2 2 2 3 1 1 1 1 3 4 1 2 1 1 3 8 20 2 16	45.0	Soluția s-a obținut prin folosirea primei şi celei de a patra rețete. O altă soluție, dar de cost mai mare, s-ar fi obținut dacă se folosea rețeta a patra şi cea de a cincea.

Timp maxim de execuție/test: **1** secundă

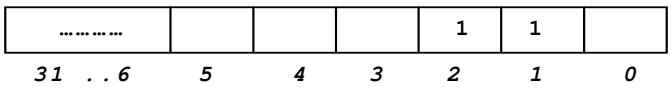
Soluție

Problema admite o soluție de complexitate exponențială O(2^m). Se generează fiecare submulțime a mulțimii rețetelor. Se identifică acele submulțimi pentru care medicamentele înscrise pe rețete includ toate cele **n** medicamente, fără să repete vreunul.

Se va păstra ca soluție submulțimea de rețete care are cost total minim. În continuare vă este prezentată o rezolvare folosind lucru pe biți.

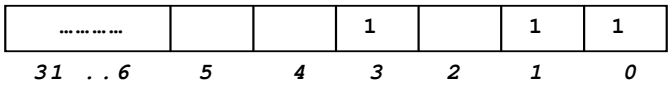
O rețetă se va codifica cu ajutorului unui întreg (**longint-long**). Fiecare bit **x** (**0≤x≤19**)va codifica prezenta-absența medicamentului **x+1** de pe rețetă. Cum există **m** rețete, vectorul **L** va codifica prin elementul **L[i]** rețeta **i+1**, **0 ≤ i≤ m−1** .

Plecând de la exemplu din enunț, a doua rețetă ce vonține medicamentele **2** şi **3** se va codifica prin elementul **L[1]** şi va acea valoarea **6**.



În acelaşi mod, pentru generarea submulțimilor de rețete ce vor fi folosite, ne vom folosi de vectorii caracteristici asociați acestora. Pentru aceasta vom utiliza reprezentarea binară a tuturor numerelor de la **0** la $\mathbf{2^m-1}$.

Dacă variabila **s** are valoarea **11** atunci ea cuprinde prima, a doua şi a patra rețetă. Medicamentele pe care acestea le conțin sunt codificate în **L[0]**, **L[1]** şi **L[3]**.



Variabila **u** va reprezenta o mască logică care indică medicamentele prinse pe rețetele ce aparțin submulțimii curente.

```
const INF=2000000000;
var L,T,C:array[0..20]of longint;
    P:array[0..20]of real;
    n,m,i,j,k,nr_med,x,s,u:longint;
    ok:boolean;
    sum,min:real;
    f:text;
begin

 assign( f, 'reteta.in');reset(f);
 read(f,n,m);
 for  i:=0 to m-1 do begin
   read(f, T[i] , nr_med  );
   for j:=1 to nr_med do begin
      read(f, x);
      L[i]:=L[i] or (1 shl(x-1));
    end;
 end;
 for i:=0 to n-1 do read(f, C[i]);
 close ( f );
```

```
#include <stdio.h>
#include <string.h>

long L[20],T[20],C[20],n,m,i,j;
long k,nr_med,x,s,u,corect;
double P[20],sum,min;

int main (){

 freopen ( "reteta.in" , "r" , stdin );
 scanf ( "%d %d" , &n , &m );
 for ( i=0 ; i<m ; i++ ) {
  scanf ( "%d %d" , &T[i] , &nr_med  );
  for ( j=0 ; j<nr_med ; j++ ) {
    scanf ( "%d" , &x );
    L[i] |= 1<<(x-1);
  }
 }
 for (i=0;i<n;i++) scanf ("%d",&C[i]);
fclose ( stdin );
```

```
 for i:=0 to m-1 do begin
  sum := 0;
  for  j:=0 to n-1 do
   sum:=sum+((L[i] shr j) and 1)*C[j];
   P[i]:=sum/T[i];
 end;


 min:=INF;
 for s:=0 to 1 shl m -1 do begin
  sum:=0; u := 0; ok:=true; i:=0;
  while (i<m) and ok do begin
   if (s shr i) and 1 = 1 then
      if (u and L[i])<>0 then
          ok:=false
      else begin
          sum:=sum+P[i];
          u:=u or L[i];
      end;
      inc(i);
  end;
  if ok and (sum<min) and
  ( u=( 1 shl n)-1) then min:=sum;
 end;


 assign(f,'reteta.out'); rewrite(f);
  if (INF-min>0.1)then
    writeln (f, min:0:1)
  else
    writeln(f,'imposibil');
 close ( f );
end.
```

```
for ( i=0 ; i<m ; i++ ) {
  sum = 0;
  for ( j=0 ; j<n ; j++ )
    sum += ((L[i]>>j)&1) * C[j];
    P[i]=sum/T[i];
  }
  int pp=0;

  min=2000000000;
  for (s=0 ; s<=(1<<m)-1 ; s++)
   {
    sum=0; u = 0; corect=1;
    for (i=0 ; i<m && corect ; i++ )
      if ((s>>i)&1)
         if (u&L[i]) corect=0;
         else
         {
          sum += P[i];
           u |= L[i];
         }

if (corect && sum<min && u==(1<<n)-1)
           min=sum;
    }

freopen ( "reteta.out","w",stdout);
 if (min!=2000000000)
  printf ( "%.1lf\n" , min );
 else printf ( "imposibil\n" );
 fclose ( stdout );
return 0;
}
```

Problema 6

Presupunem că avem **n** numere prime notate $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sortate strict crescător. Formăm un şir strict crescător **b** ale cărui elemente sunt toţi multiplii acestor **n** numere prime astfel încât, multipli comuni apar o singură dată. Presupunem că numerotarea poziţiilor elementelor din şirul **b** începe tot cu **1**.

Cerinţă
Scrieţi un program care citeşte din fişierul de intrare valoarea lui **n** şi apoi cele **n** elemente ale şirului **a**, determină elementul de pe poziţia **m** din şirul **b** şi afişează în fişierul de ieşire valoarea acestuia.

Date de intrare
Fişierul de intrare **numar.in** conţine
- pe prima linie două numere naturale separate printr-un spaţiu care reprezintă primul valoarea lui **n** şi al doilea valoarea lui m;
- pe a doua linie **n** numere naturale prime separate prin câte un spaţiu care reprezintă valorile elementelor şirului **a**. Aceste valori sunt dispuse în ordine strict crescătoare iar ultima dintre ele este mai mică decât un milion.

Date de ieşire
Fişierul de ieşire **numar.out** va conţine pe prima linie o singură valoare care reprezintă termenul de pe poziţia **m** din şirul **b**.

Restricţii şi precizări

- $a_n<1000000$

Exemple:

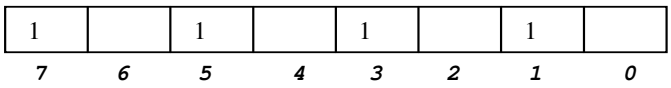
numar.in	numar.out	Explicaţii
3 10 2 3 5	14	Şirul b e format din valorile: 2,3,4,5,6,8,9,10,12,14,15,16,18,20,21,22… Pe poziţia 10 se află numărul 14
4 20 7 23 37 131	98	
3 11111 977 1009 1031	3726237	

Timp maxim de executare/test: **1** secundă.
Soluţie

Soluţia următoare nu reprezintă soluţia oficială a problemei. Însă, datorită optimizării memoriei reuşeşte să obţină un punctaj foarte bun.

Fiecare multiplu este marcat prin intermediul unui bit. În loc să ne folosit de un vector de booleene, sau **0-1** ca să însemnăm un număr ca fiind multiplu al unei valori din cele citite, ne vom folosi de un vetor de **byte-unsigned char**, în care vor fi setaţi fiecare din cei **8** biţi ai fiecărei valori.

Astfel, se va marca fiecare multiplu al valorilor citite. Să luăm ca exemplu valoarea **2**. Trebuie marcate valorile multiplu de **2**, deci ***2, 4, 6, 8,*** **10 ,12** ş.a.m.d. În primul element al vectorului **v**, vor marca primii **4** multipli, deci **v[0]=170**



Procedeul continuă până sunt marcați toți multipli numerelor citite. Dacă dorim să setăm cu **1** bitul corespunzător valorii **x**, atunci va trebui ca în cadrul elementului **v[(x-1)div 8]** să marcăm bitul **(x-1)mod 8.**

După procesul de marcare, urmează regăsirea multiplului cu numărul de ordine **m**, care va fi identificat prin traversarea secvențială a biților elementelor vectorului **v**.

```
program numar;
var f,g:text;
   a:array[0..200] of longint;
   v:array[0..60000] of byte;
   x,i,j,nr,n,y,m:longint;
begin
 assign(f,'numar.in'); reset(f);
 assign(g,'numar.out'); rewrite(g);
 readln(f,n,m);
 for i:=1 to n do read(f,a[i]);

 for i:=1 to n do begin
  x:=0; j:=1;
  while (j<m)and(x<400000) do begin
    x:=x+a[i];
    v[(x-1) shr 3]:=
  v[(x-1)shr 3]or(1 shl((x-1)and 7));
    inc(j);
   end;
 end;

 nr:=0;  i:=0;
 while nr<m do begin
    for j:=0 to 7 do begin
     x:=1 shl j;
     if (v[i]shr j) and 1=1 then
     begin
       inc(nr);
       if nr=m then y:=i*8 + j + 1;
     end;
    end;
    inc(i);
  end;
  writeln(g,y);
  close(g); close(f);
end.
```

```
#include <stdio.h>

int a[201];
unsigned char v[60001];
long  x,i,j,nr,n,y,m;

int main(){
 freopen("numar.in","r",stdin);
 freopen("numar.out","w",stdout);
 scanf("%ld%ld",&n,&m);
 for (i=1; i<=n; i++)
            scanf("%ld",&a[i]);

for (i=1; i<=n; i++) {
  x=0; j=1;
  while ((j<m)&&(x<400000)) {
    x += a[i];
    v[(x-1) >> 3]=
  v[(x-1) >> 3] | (1 << ((x-1) & 7));
    j++;
   }
 }

 nr=0;  i=0;
 while (nr<m) {
   for (j=0;j<=7;j++) {
     if (((v[i] >> j) & 1)==1) {
        nr++;
        if (nr==m)  y=i*8 + j + 1;
      }
   }
   i++;
 }
 printf("%ld", y);
 fclose(stdout); fclose(stdin);
 return 0;
}
```