Linii şi segmente

Capitolul

17

- Ecuaţia dreptei şi a planului
- Poziţiile punctelor faţă de o dreaptă
- Poziţiile punctelor faţă de un plan
- Coliniaritate şi coplanaritate
- Intersecţii
- Arii şi volume
- Convexitate
- Rezumat
- Implementări sugerate
- Probleme propuse
- Soluţiile problemelor

În cadrul acestui capitol vom prezenta câteva noţiuni elementare referitoare la geometria analitică. Pentru început vom introduce ecuaţia dreptei şi vom arăta modul în care aceasta poate fi determinată pe baza a două puncte date. Vom continua cu descrierea modului în care poate fi determinată poziţia unui punct relativ la o anumită dreaptă. De asemenea, vom prezenta modul în care poate fi determinată aria unui triunghi şi volumul unei piramide. În final, vom arăta modul în care poate fi verificată convexitatea unui poligon.

17.1. Ecuaţia dreptei şi a planului

În cadrul acestei secţiuni vom prezenta câteva ecuaţii fundamentale pentru geometria analitică. Vom introduce ecuaţia dreptei în plan şi în spaţiu, precum şi ecuaţia unui plan.

17.1.1. Ecuaţia dreptei în plan

După cum se ştie, o dreaptă este determinată în mod unic prin două puncte distincte ale sale. În plan, o ecuaţie care poate descrie o dreaptă are forma $a \cdot x + b \cdot y + c = 0$.

Punctele de pe dreaptă sunt cele ale căror coordonate satisfac o astfel de ecuație. După cum se poate observa, ecuația are trei parametri: a, b şi c. O dreapta este complet definită în cazul în care se cunosc valorile acestor trei parametri.

Dacă valoarea a este nulă, atunci dreapta va fi paralelă cu axa Oy, iar dacă valoarea b este nulă, atunci dreapta va fi paralelă cu axa Ox. Aceste două valori nu pot fi concomitent nule.

Se pune problema determinării ecuației dreptei în momentul în care se cunosc coordonatele a două puncte distincte de pe dreapta respectivă. Formula pe baza căreia poate fi determinată dreapta este următoarea:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

unde (x_1, y_1) şi (x_2, y_2) sunt coordonatele celor două puncte. Cu alte cuvinte, avem:

$$a = y_1 - y_2$$
$$b = x_2 - x_1$$
$$c = x_2 \cdot y_1 - y_2 \cdot x_1.$$

17.1.2. Ecuația dreptei în spațiu

Pentru a identifica o linie în spațiu avem nevoie tot de coordonatele a două puncte (de data aceasta, pentru fiecare punct sunt trei coordonate). O dreaptă în spațiu poate fi descrisă prin formula:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

Aşadar, pentru a identifica o anumită dreaptă, vom avea întotdeauna nevoie de două ecuații. Este evident faptul că o astfel de ecuație descrie o dreaptă care trece prin punctul de coordonate (x_0, y_0, z_0). Ca urmare, dacă cunoaştem coordonatele a două puncte, putem alege oricare dintre ele pentru a stabili valorile x_0, y_0 şi z_0.

Cu ajutorul coordonatelor celuilalt punct putem stabili valorile a, b şi c. În urma unor calcule se obține relația:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{z - z_1}{x_2 - x_1}.$$

În concluzie, vom avea:

$$x_0 = x_1 \qquad y_0 = y_1 \qquad z_0 = z_1$$
$$a = x_2 - x_1 \qquad b = y_2 - y_1 \qquad c = z_2 - z_1.$$

Punctele de pe dreaptă sunt cele ale căror coordonate satisfac o astfel de ecuaţie. După cum se poate observa, ecuaţia are trei parametri: a, b şi c. O dreaptă este complet definită în cazul în care se cunosc valorile acestor trei parametri.

17.1.3. Ecuaţia planului

Pentru a identifica un plan avem nevoie de trei puncte necoliniare ale acestuia. Ecuaţia planului este foarte asemănătoare cu cea a dreptei, singura diferenţă constând în apariţia unei noi variabile pentru cea de-a treia dimensiune. Aşadar, în spaţiul tridimensional, un plan poate fi descris printr-o ecuaţie de forma $a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z + d = 0$.

Punctele din plan sunt cele ale căror coordonate satisfac o astfel de ecuaţie. De această dată ecuaţia are patru parametri: a, b, c şi d. Un plan este complet definit în cazul în care se cunosc valorile acestor patru parametri.

Dacă valoarea a este nulă, atunci dreapta va fi paralelă cu planul Oyz, dacă valoarea b este nulă, atunci dreapta va fi paralelă cu planul Oxz, iar dacă valoarea c este nulă, atunci dreapta va fi paralelă cu planul Oxy. Doar una dintre aceste trei valori poate fi nulă.

Se pune problema determinării ecuaţiei planului în momentul în care se cunosc coordonatele a trei puncte necoliniare care fac parte din planul respectiv. Formula pe baza căreia poate fi determinat planul este următoarea:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

unde (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) şi (x_3, y_3, z_3) sunt coordonatele celor trei puncte. Cu alte cuvinte, obţinem:

$$a = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = y_1 \cdot z_2 + y_2 \cdot z_3 + y_3 \cdot z_1 - y_1 \cdot z_3 - y_2 \cdot z_1 - y_3 \cdot z_2;$$

$$b = -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = x_1 \cdot z_3 + x_2 \cdot z_1 + x_3 \cdot z_2 - x_1 \cdot z_2 - x_2 \cdot z_3 - x_3 \cdot z_1;$$

$$c = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_3 + x_3 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_3 - x_2 \cdot y_1 - x_3 \cdot y_2;$$

$$d = -\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = x_1 \cdot y_3 \cdot z_2 + x_2 \cdot y_1 \cdot z_3 + x_3 \cdot y_2 \cdot z_1 - x_1 \cdot y_2 \cdot z_3 - x_2 \cdot y_3 \cdot z_1 - x_3 \cdot y_1 \cdot z_3$$

.

17.2. Pozițiile punctelor față de o dreaptă

Punctele care satisfac ecuația unei drepte se vor afla pe dreapta respectivă. Pentru toate celelalte, valoarea expresiei $a \cdot x + b \cdot y + c$ va fi nenulă. În funcție de semnul acestei valori putem stabili semiplanul în care se află punctul respectiv.

Putem spune că punctele pentru care valoarea este pozitivă se află "deasupra" dreptei, iar celelalte se află "sub" ea. Din nefericire, aceste noțiuni nu pot fi folosite, deoarece depind de orientarea dreptei. De exemplu, pentru o dreaptă verticală noțiunile respective nu au sens.

Totuşi, putem spune că două puncte pentru care valorile expresiei amintite au acelaşi semn se află de aceeaşi parte a dreptei (în acelaşi semiplan). Aşadar, pentru a verifica dacă două puncte se află sau nu de aceeaşi parte a unei drepte, trebuie doar să verificăm condiția:

$$(a \cdot x_1 + b \cdot y_1 + c) \cdot (a \cdot x_2 + b \cdot y_2 + c) > 0.$$

În cazul în care valoarea expresiei $(a \cdot x_1 + b \cdot y_1 + c) \cdot (a \cdot x_2 + b \cdot y_2 + c)$ este nulă, putem trage concluzia că cel puțin unul dintre cele două puncte se află pe dreaptă.

17.3. Pozițiile punctelor față de un plan

Situația este foarte asemănătoare în spațiu. Punctele care satisfac ecuația unui plan se vor afla în planul respectiv, iar pentru toate celelalte, valoarea expresiei $a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z + d$ va fi nenulă. În funcție de semnul acestei valori putem stabili semispațiul în care se află punctul respectiv.

Din nou nu are sens să folosim noțiuni de tipul "deasupra" sau "sub". Totuşi, şi în acest caz putem spune că două puncte pentru care valorile expresiei amintite au acelaşi semn se află de aceeaşi parte a planului (în acelaşi semispațiu). Aşadar, pentru a verifica dacă două puncte se află sau nu de aceeaşi parte a unui plan, trebuie doar să verificăm condiția:

$$(a \cdot x_1 + b \cdot y_1 + c \cdot z_1 + d) \cdot (a \cdot x_2 + b \cdot y_2 + c \cdot z_1 + d) > 0.$$

În cazul în care expresia $(a \cdot x_1 + b \cdot y_1 + c \cdot z_1 + d) \cdot (a \cdot x_2 + b \cdot y_2 + c \cdot z_1 + d)$ are valoarea 0, atunci cel puțin unul dintre cele două puncte se află în planul considerat.

17.4. Coliniaritate şi coplanaritate

În cadrul acestei secțiuni vom arăta modul în care poate fi verificată coliniaritatea punctelor şi coplanaritatea punctelor şi dreptelor.

17.4.1. Puncte coliniare în plan

Pentru ca trei sau mai multe puncte să fie coliniare, ele trebuie să satisfacă ecuaţia unei aceleiaşi drepte. După cum am arătat anterior, dacă se cunosc coordonatele a două puncte, ecuaţia dreptei care trece prin aceste puncte poate fi obţinută pe baza formulei:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 .$$

Dacă înlocuim variabilele x şi y cu coordonatele unui al treilea punct, atunci vom obţine valoarea 0 doar dacă punctul respectiv se află pe aceeaşi dreaptă ca şi cele două puncte utilizate pentru determinarea ecuaţiei.

Ca urmare, trei puncte din plan vor fi coliniare dacă şi numai dacă este satisfăcută condiţia:

$$\begin{vmatrix} x_3 & y_3 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

sau condiţia echivalentă:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 .$$

17.4.2. Puncte coliniare în spaţiu

La fel ca şi în plan, trei puncte vor fi coliniare dacă şi numai dacă satisfac ecuaţia unei aceleiaşi drepte. Folosind formulele pentru determinarea ecuaţiei unei astfel de drepte, vom obţine condiţia care trebuie satisfăcută pentru ca trei puncte din spaţiu să fie coliniare:

$$\frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{z_3 - z_1}{x_2 - x_1} .$$

17.4.3. Puncte coplanare în spaţiu

Pentru ca patru sau mai multe puncte să fie coplanare, ele trebuie să satisfacă ecuaţia unui aceluiaşi plan. De această dată vom folosi formula pentru determinarea ecuaţiei planului:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot$$

Dacă înlocuim variabilele x, y şi z cu coordonatele unui al patrulea punct, atunci vom obține valoarea 0 doar dacă punctul respectiv se află în acelaşi plan ca şi cele trei puncte utilizate pentru determinarea ecuației.

Ca urmare, patru puncte din spațiu vor fi coplanare dacă şi numai dacă este satisfăcută condiția:

$$\begin{vmatrix} x_4 & y_4 & z_4 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

sau condiția echivalentă:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot$$

17.4.4. Drepte coplanare în spațiu

Pentru a verifica dacă două drepte sunt coplanare este suficient să alegem câte două puncte de pe fiecare dintre ele şi să verificăm dacă aceste patru puncte se află în acelaşi plan.

Pentru a determina coordonatele unui punct de pe o dreaptă este suficient să alegem o valoare pentru una din variabile şi să rezolvăm ecuația dreptei în această situație. De exemplu, dacă stabilim o valoare pentru variabila x (am stabilit coordonata orizontală a unui punct), este suficient să determinăm valorile y şi z corespunzătoare.

17.5. Intersecții

În cadrul acestei secțiuni vom descrie modul în care pot fi determinate sau verificate intersecțiile dintre drepte, segmente şi planuri.

17.5.1. Intersecția a două drepte în plan

Două drepte se vor intersecta doar în cazul în care ele au un punct comun. Pentru a determina un astfel de punct va trebui să rezolvăm un simplu sistem de două ecuaţii cu două necunoscute:

$$\begin{cases} a_1 \cdot x + b_1 \cdot y + c_1 = 0 \\ a_2 \cdot x + b_2 \cdot y + c_2 = 0 \end{cases},$$

unde a_1, b_1, c_1, respectiv a_2, b_2, c_2, sunt coeficienţii ecuaţiilor celor două drepte.

În cazul în care sistemul are o singură soluţie, atunci cele două drepte sunt concurente. Dacă nu avem nici o soluţie, atunci putem trage concluzia că cele două drepte sunt paralele, iar dacă avem o infinitate de soluţii, atunci cele două drepte sunt identice.

Se poate observa faptul că două drepte de ecuaţii $a_1 \cdot x + b_1 \cdot y + c_1 = 0$ şi $a_2 \cdot x + b_2 \cdot y + c_2 = 0$ vor fi paralele dacă şi numai dacă avem:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}.$$

De asemenea, cele două drepte vor fi identice dacă şi raportul dintre c_1 şi c_2 este acelaşi. Aşadar, în situaţia în care avem:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2},$$

Cele două ecuaţii descriu, de fapt, aceeaşi dreaptă.

Cu alte cuvinte, două ecuaţii vor descrie aceeaşi dreaptă dacă au coeficienţii proporţionali.

17.5.2. Intersecţia a două drepte în spaţiu

La fel ca şi în plan, pentru a determina punctele de intersecţie a două drepte în spaţiu va trebui să rezolvăm un sistem de ecuaţii:

$$\begin{cases} \dfrac{x - x_{01}}{a_1} = \dfrac{y - y_{01}}{b_1} = \dfrac{z - z_{01}}{c_1} \\ \dfrac{x - x_{02}}{a_2} = \dfrac{y - y_{02}}{b_2} = \dfrac{z - z_{02}}{c_2} \end{cases}.$$

În cazul în care sistemul are o singură soluţie, atunci cele două drepte sunt concurente (şi, evident, coplanare). Dacă nu avem nici o soluţie, atunci nu putem trage imediat concluzia că cele două drepte sunt paralele, dar dacă avem o infinitate de soluţii, atunci cele două drepte sunt identice.

Se observă că sistemul are, de fapt, patru ecuaţii şi trei necunoscute, deci este foarte posibil să nu obţinem soluţii.

În spaţiu, două drepte vor fi paralele doar dacă nu se intersectează şi fac parte din acelaşi plan.

17.5.3. Punct în interiorul unui segment

În multe cazuri este necesar să verificăm dacă un anumit punct se află sau nu în interiorul unui segment. Să presupunem că avem un segment cu extremitățile în punctele de coordonate (x_1, y_1) şi (x_2, y_2) şi un al treilea punct de coordonate (x_3, y_3).

Există mai multe variante care ne permit să verificăm dacă punctul de coordonate (x_3, y_3) se află sau nu pe segmentul dat. Una dintre ele se bazează pe observația că suma distanțelor de la punctul de coordonate (x_3, y_3) la extremitățile segmentului trebuie să fie egală cu lungimea segmentului (distanța dintre extremități).

Pentru a determina distanța dintre două puncte se poate utiliza formula:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} .$$

17.5.4. Intersecția a două segmente în plan

O primă condiție pentru ca două segmente să se intersecteze este ca dreptele lor suport să nu fie paralele.

În cazul în care dreptele suport sunt concurente este suficient să verificăm dacă punctul lor de intersecție se află pe ambele segmente. Cea mai simplă modalitate de verificare constă în determinarea ecuațiilor dreptelor suport pentru fiecare dintre segmente şi verificarea faptului că pentru fiecare dintre drepte, extremitățile celuilalt segment se află în semiplane diferite.

Să presupunem că primul segment are extremitățile în punctele (x_1, y_1) şi (x_2, y_2), iar al doilea în punctele (x_3, y_3) şi (x_4, y_4).

Cu ajutorul primelor două puncte vom determina coeficienții a_1, b_1 şi c_1 ai primei drepte, iar cu ajutorul ultimelor două puncte vom determina coeficienții a_2, b_2 şi c_2 ai celei de-a doua drepte.

Punctele (x_3, y_3) şi (x_4, y_4) trebuie să se afle în semiplane diferite determinate de dreapta de ecuație $a_1 \cdot x + b_1 \cdot y + c_1 = 0$. Aşadar, va trebui să avem:

$$(a_1 \cdot x_3 + b_1 \cdot y_3 + c_1) \cdot (a_1 \cdot x_4 + b_1 \cdot y_4 + c_1) < 0.$$

De asemenea, punctele (x_1, y_1) şi (x_2, y_2) trebuie să se afle în semiplane diferite determinate de dreapta de ecuație $a_2 \cdot x + b_2 \cdot y + c_2 = 0$. Aşadar, va trebui să avem:

$$(a_2 \cdot x_1 + b_2 \cdot y_2 + c_2) \cdot (a_2 \cdot x_2 + b_2 \cdot y_2 + c_2) < 0.$$

O situație specială apare în cazul în care valoarea uneia dintre expresiile $(a_1 \cdot x_3 + b_1 \cdot y_3 + c_1) \cdot (a_1 \cdot x_4 + b_1 \cdot y_4 + c_1)$ şi $(a_2 \cdot x_1 + b_2 \cdot y_2 + c_2) \cdot (a_2 \cdot x_2 + b_2 \cdot y_2 + c_2)$ este nulă. În acest caz cel puțin trei dintre cele patru puncte sunt coliniare. Aşadar, extremitatea unui segment se află cu siguranță pe dreapta suport al celuilalt, dar nu suntem siguri dacă ea se află şi pe segment. Aşadar, va trebui să verificăm dacă punctul se află sau nu pe segment, folosind metoda descrisă anterior.

Există şi posibilitatea ca toate cele patru puncte să fie coliniare. Segmentele vor avea aceeaşi dreaptă suport, dar nu ştim cu siguranță dacă ele se şi suprapun parțial. Din nou sunt necesare verificări suplimentare.

17.5.5. Intersecţia planelor

Determinarea dreptei de intersecţie a două plane (dacă aceasta există) poate fi determinată pe baza ecuaţiilor celor două plane. Vom avea două ecuaţie şi trei necunoscute, deci soluţiile vor putea fi descrise printr-o funcţie care depinde de o variabilă (aşadar vom avea ecuaţia unei drepte).

Pentru a determina eventualul punct de intersecţie a trei plane, va trebui să verificăm dacă există vreun punct care satisface ecuaţiile tuturor celor trei plane. Ca urmare, vom rezolva un sistem de trei ecuaţii (ecuaţiile planelor) cu trei necunoscute (coordonatele punctului de intersecţie).

17.6. Arii şi volume

În cadrul acestei secţiuni vom prezenta o modalitate prin care pot fi determinate ariile triunghiurilor în plan, precum şi volumele piramidelor în spaţiu.

17.6.1. Aria triunghiului în plan

În plan, trei puncte necoliniare vor determina întotdeauna un triunghi. Aria acestuia poate fi calculată fie folosind formula lui *Heron* (ceea ce duce la operaţii costisitoare cu numere reale), fie folosind o formulă mai simplă şi anume:

$$A = \frac{1}{2} \cdot |D_A|, \text{ unde } D_A = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Se observă că determinantul este identic cu cel utilizat pentru a verifica dacă trei puncte sunt coliniare. Este evident că dacă punctele sunt coliniare, triunghiul degenerează într-un segment, deci aria va fi 0 (la fel cu valoarea determinantului). În caz contrar, valoarea determinantului este utilizată pentru calculul ariei.

17.6.2. Volumul piramidei în spaţiu

În spaţiu, patru puncte necoplanare vor determina întotdeauna o piramidă. Formula de calcul este foarte asemănătoare cu cea folosită pentru a determina aria unui triunghi în plan:

$$V = \frac{1}{6} \cdot |D_V|, \text{ unde } D_V = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}.$$

Din nou, se observă că determinantul este identic cu cel utilizat pentru a verifica dacă patru puncte sunt coplanare. Este evident că dacă punctele sunt coplanare, piramida degenerează într-un triunghi, deci volumul său va fi 0 (la fel cu valoarea determinantului). În caz contrar, valoarea determinantului este utilizată pentru calculul volumului.

17.6.3. Punct în interiorul triunghiului

Uneori este necesar să stabilim dacă un anumit punct *P* se află sau nu în interiorul unui anumit triunghi. Pentru a rezolva această problemă avem la dispoziție mai multe variante; vom prezenta acum două dintre ele.

O posibilitate constă în considerarea celor trei laturi ale triunghiului şi verificarea faptului că, pentru fiecare latură a triunghiului, punctul *P* se află de aceeaşi parte a dreptei suport a laturii ca şi punctul triunghiului care nu face parte din latura respectivă.

Cu alte cuvinte, punctul se va afla în interiorul triunghiului dacă şi numai dacă pentru fiecare vârf al triunghiului, punctul *P* şi vârful respectiv se află de aceeaşi parte a dreptei suport a laturii opuse vârfului considerat.

O a doua variantă constă în utilizarea calculului ariilor. Punctul *P* se va afla în interiorul triunghiului dacă şi numai dacă ariile celor trei triunghiuri determinate de punctul *P* împreună cu perechi de vârfuri ale triunghiului au o arie totală egală cu cea a triunghiului.

Situațiile speciale apar în cazul în care punctul *P* se află pe o latură sau este chiar un vârf al triunghiului.

Se poate verifica foarte uşor dacă punctul *P* este un vârf prin compararea coordonatelor sale cu coordonatele vârfurilor triunghiului. De asemenea, această situație poate fi detectată şi folosind formulele pentru calculul ariei. Punctul *P* va fi unul dintre vârfuri dacă două dintre cele trei triunghiuri determinate de el împreună cu perechile de vârfuri au valoarea 0.

Faptul că punctul *P* se află pe una dintre laturi se va verifica folosind metoda utilizată pentru a verifica dacă un punct se află pe un anumit segment. Dacă utilizăm calculul ariilor, atunci una dintre cele trei triunghiuri determinate de el împreună cu perechile de vârfuri va avea valoarea 0.

17.6.4. Punct în interiorul piramidei

Pentru situația în care dorim să verificăm dacă un punct se află sau nu în interiorul unei piramide avem din nou mai multe variante dintre care vom prezenta doar două.

O posibilitate constă în considerarea celor patru fețe ale piramidei şi verificarea faptului că, pentru fiecare față a piramidei, punctul *P* se află de aceeaşi parte a planului care o conține ca şi punctul piramidei care nu face parte din fața respectivă.

Cu alte cuvinte, punctul se va afla în interiorul piramidei dacă şi numai dacă pentru fiecare vârf al piramidei, punctul *P* şi vârful respectiv se află de aceeaşi parte a planului care conține fața opusă vârfului considerat.

O a doua variantă constă în utilizarea calculului volumelor. Punctul P se va afla în interiorul piramidei dacă şi numai dacă volumele celor patru piramide determinate de punctul P împreună cu grupuri de vârfuri ale piramidei au un volum total egal cu cel al piramidei.

Situațiile speciale apar în cazul în care punctul P se află pe o față, pe o latură sau este chiar un vârf al triunghiului.

Faptul că punctul P este un vârf, se poate verifica foarte uşor prin compararea coordonatelor sale cu coordonatele vârfurilor piramidei. De asemenea, această situație poate fi detectată şi folosind formulele pentru calculul volumelor. Punctul P va fi unul dintre vârfuri dacă trei dintre cele patru piramide determinate de el împreună cu grupuri de trei vârfuri au valoarea 0.

Pentru celelalte două cazuri, verificarea apartenenței punctului la o latură sau la o față este mai complicată, necesitând cunoştințe suplimentare de geometrie analitică în spațiu. Totuşi, situația poate fi detectată foarte simplu dacă folosim volumele piramidelor. Punctul P se va afla pe o latură a piramidei dacă două dintre cele patru volume calculate vor avea valoarea 0 şi pe o față dacă unul dintre cele patru volume are valoarea 0.

17.7. Convexitate

Uneori este util să verificăm dacă un poligon este sau nu convex. Pentru aceasta avem nevoie de coordonatele vârfurilor sale, date în ordine trigonometrică sau antitrigonometrică.

Vom considera toate grupurile de trei vârfuri consecutive; vom identifica cele trei vârfuri prin coordonatele lor: $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ şi $P_3 = (x_3, y_3)$. La fiecare pas vom verifica semnul determinantului folosit pentru calculul ariei:

$$D_A = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

La fiecare pas, P_2 va deveni P_1, P_3 va deveni P_2, iar P_3 va fi următorul vârf (cel care urmează după P_2 şi P_3). Pentru ca poligonul să fie convex trebuie ca toți determinanții să aibă acelaşi semn.

Dacă poligonul conține puncte coliniare consecutive, anumiți determinanți vor avea valoarea 0. În funcție de situație, poligonul va fi sau nu considerat convex. Dacă se consideră că un poligon este convex în cazul în care conține puncte consecutive coliniare, atunci aceşti determinanți vor fi ignorați. Dacă se consideră că un astfel de poligon nu poate fi convex, atunci în momentul în care este obținut un astfel de determinant se poate afirma cu siguranță că el nu este convex.

O altă posibilitate de verificare a convexității constă în considerarea tuturor laturilor şi verificarea faptului că toate celelalte puncte ale poligonului se află de aceeaşi parte a dreptei suport a laturii respective.

17.8. Rezumat

În cadrul acestui capitol am prezentat câteva noțiuni elementare de geometrie analitică. Am introdus ecuația dreptei şi ecuația planului, am arătat modul în care poate fi verificată poziția a două puncte față de o dreaptă sau față de un plan, precum şi modul în care poate fi verificată coliniaritatea punctelor şi coplanaritatea punctelor şi dreptelor.

De asemenea, am arătat modul în care pot fi determinate intersecțiile diferitelor elemente geometrice, precum şi modalitatea prin care pot fi calculate ariile triunghiurilor şi volumele piramidelor. În plus, am descris modul în care putem verifica dacă un punct se află sau nu în interiorul unui triunghi sau al unei piramide.

În final am arătat o modalitate foarte simplă prin care putem verifica dacă un anumit poligon este sau nu convex.

17.9. Implementări sugerate

Pentru a vă însuşi mai bine cunoştințele de geometrie analitică prezentate, vă sugerăm să realizați implementări pentru:

1. determinarea ecuației unei drepte în plan dacă se cunosc coordonatele a două dintre punctele sale;
2. determinarea ecuației unui plan în spațiu dacă se cunosc coordonatele a trei puncte necoliniare din planul respectiv;
3. verificarea faptului dacă un punct face sau nu parte dintr-un segment;
4. determinarea punctului de intersecție a două segmente (dacă acesta există);
5. verificarea coliniarității unor puncte;
6. verificarea coplanarității unor puncte;
7. determinarea ariei unui triunghi;
8. determinarea volumului unei piramide;
9. verificarea poziției unui punct relativ la un triunghi (în interior, pe o latură, într-un vârf sau în exterior);
10. verificarea poziției unui punct relativ la o piramidă (în interior, pe o față, pe o latură, într-un vârf sau în exterior);
11. verificarea convexității unui poligon.

17.10. Probleme propuse

În continuare vom prezenta enunţurile câtorva probleme pe care vi le propunem spre rezolvare. Toate aceste probleme pot fi rezolvate folosind informaţiile prezentate în cadrul acestui capitol. Cunoştinţele suplimentare necesare sunt minime.

17.10.1. Pitici

Descrierea problemei

În pădurea cu alune aveau case mai mulţi pitici. Unii dintre ei purtau scufii roşii, iar ceilalţi purtau scufii albastre. Regele piticilor era singurul care purta scufie galbenă.

Din nefericire, au apărut conflicte între piticii cu scufii roşii şi cei cu scufii albastre. Pentru a-şi putea păstra scufia galbenă, regele trebuie să găsească o soluţie pentru a aplana acest conflict. El doreşte să construiască o potecă prin pădure care să separe casele piticilor cu scufii roşii de casele piticilor cu scufii albastre,

Pentru aceasta toţi sfetnicii trebuie să propună poziţii ale potecii. Se cunosc coordonatele tuturor căsuţelor piticilor şi fiecare sfetnic va propune coordonatele a două puncte care se vor afla pe dreapta care reprezintă poteca.

O potecă va fi validă dacă şi numai dacă toate casele piticilor cu scufii roşii se vor afla de o parte a potecii şi toate casele piticilor cu scufii albastre se vor afla de cealaltă parte. Evident, o potecă nu va fi validă dacă va trece exact prin casa unui pitic (indiferent de culoarea scufiei acestuia), deoarece regele nu doreşte să creeze scufii suplimentare.

Va trebui să stabiliţi care dintre potecile propuse de sfetnici sunt valide.

Date de intrare

Prima linie a fişierului de intrare **`PITICI.IN`** conţine numărul *M* al piticilor cu scufii roşii. Următoarele *M* linii conţin perechi de numere, separate printr-un spaţiu, reprezentând coordonatele căsuţei unui pitic cu scufie roşie.

Următoarea linie conţine numărul *N* al piticilor cu scufii albastre, iar următoarele *N* linii conţin perechi de numere, separate printr-un spaţiu, reprezentând coordonatele căsuţei unui pitic cu scufie albastră.

Următoarea linie va conţine numărul *K* al sfetnicilor, iar pe următoarele *K* linii se vor afla câte patru numere, separate prin spaţii, reprezentând coordonatele celor două puncte care vor determina dreapta propusă de sfetnic.

Date de ieşire

Fişierul de ieşire **`PITICI.OUT`** va conţine *K* linii, fiecare corespunzând unei poteci propuse de un sfetnic. În cazul în care poteca este validă, linia va conţine mesajul `DA`, iar în cazul în care poteca nu este validă, linia va conţine mesajul `NU`.

Mesajul de pe prima linie va corespunde primei poteci descrise în fişierul de intrare, mesajul de pe a doua linie va corespunde celei de-a doua poteci etc.

Restricții şi precizări
- $1 \leq M, N \leq 500$;
- $1 \leq K \leq 100$.
- nu pot exista două căsuțe la aceleaşi coordonate;
- toate coordonatele sunt numere întregi cuprinse între 0 şi 1000;
- cele două puncte care vor descrie o potecă vor fi întotdeauna distincte.

Exemplu

PITICI.IN	**PITICI.OUT**
2	NU
0 0	DA
0 2	NU
2	
2 0	
2 2	
3	
0 1 2 1	
1 0 1 2	
0 0 1 2	

Timp de execuție: 1 secundă/test

17.10.2. Titani

Descrierea problemei

Zeus s-a hotărât să distrugă toți titanii de pe *Pământ*. El a studiat pozițiile acestora şi şi-a dat seama că cel mai bine ar fi să trimită un fulger care să afecteze o porțiune triunghiulară. Fulgerul va distruge toți titanii care se află în interiorul triunghiului, pe laturi sau în vârfuri.

Se cunosc numărul titanilor, coordonatele acestora, precum şi coordonatele vârfurilor regiunii triunghiulare care va fi afectată de fulger. Va trebui să determinați numărul titanilor care vor fi distruşi.

Date de intrare

Prima linie a fişierului de intrare **`TITANI.IN`** va conține şase numere, separate prin spații, reprezentând coordonatele regiunii triunghiulare care va fi afectată. Cea de-a doua linie conține numărul *N* al titanilor, iar următoarele *N* linii conțin perechi de numere, separate printr-un spațiu, reprezentând coordonatele unui titan.

Date de ieşire
Fişierul de ieşire **`TITANI.OUT`** va conţine o singură linie pe care se va afla numărul titanilor distruşi.

Restricţii şi precizări
- $1 \leq N \leq 10000$;
- există posibilitatea ca doi sau mai mulţi titani să se afle la aceleaşi coordonate;
- toate coordonatele sunt numere întregi cuprinse între 0 şi 1000;
- cele trei puncte care vor descrie regiunea triunghiulară nu vor fi coliniare.

Exemplu

TITANI.IN	**TITANI.OUT**

`0 0 0 2 2 0`
`4`
`0 0`
`0 1`
`1 1`
`2 2`
	`3`

Timp de execuţie: 1 secundă/test

17.10.3. Romulani

Descrierea problemei
Navele klingoniene care staţionau în *Zona Neutră* au fost surprinse într-o ambuscadă de către romulani. Aceştia din urmă şi-au dispus navele în grupuri de câte patru. Orice navă klingoniană aflată în interiorul piramidei determinate de un grup de nave romulane va fi distrusă. Nava va fi distrusă chiar dacă se află pe o faţă sau pe o muchie a piramidei.

Se cunosc coordonatele navelor klingoniene, precum şi cele ale navelor romulane. De asemenea, se cunoaşte componenţa grupurilor de nave romulane. Va trebui să stabiliţi numărul navelor klingoniene care vor reuşi să evite distrugerea.

Date de intrare
Prima linie a fişierului de intrare **`ROMULANI.IN`** va conţine numărul K al grupurilor de nave romulane. Pe fiecare dintre următoarele K linii se vor afla câte douăsprezece numere, separate prin spaţii, reprezentând coordonatele spaţiale ale navelor romulane dintr-un grup.

Următoarea linie a fişierului va conține numărul N al navelor klingoniene, iar pe următoarele N linii se vor afla câte trei numere, separate prin spații, reprezentând coordonatele spațiale ale unei nave klingoniene.

Date de ieşire
Fişierul de ieşire **ROMULANI.OUT** va conține o singură linie pe care se va afla un singur număr care reprezintă numărul navelor klingoniene care nu vor fi distruse.

Restricții şi precizări
- $1 \leq K \leq 100$;
- $1 \leq N \leq 5000$;
- nu există posibilitatea ca două sau mai multe nave (indiferent de rasa căreia îi aparțin) să se afle la aceleaşi coordonate;
- toate coordonatele sunt numere întregi cuprinse între 0 şi 1000;
- cele patru puncte care reprezintă coordonatele unui grup de nave romulane nu vor fi niciodată coplanare.

Exemplu

ROMULANI.IN	ROMULANI.OUT
2 0 0 0 0 1 0 0 0 1 1 0 0 1 1 1 1 2 1 1 1 2 2 1 1 1 0 0 3	1

Timp de execuție: 3 secunde/test

17.11. Soluțiile problemelor

Vom prezenta acum soluțiile problemelor propuse în cadrul secțiunii precedente. Pentru fiecare dintre acestea va fi descrisă metoda de rezolvare şi va fi analizată complexitatea algoritmului prezentat.

17.11.1. Pitici

Problema se reduce la a verifica, pentru fiecare dintre poteci (drepte) dacă punctele corespunzătoare căsuțelor piticilor cu scufii roşii se află de o parte a dreptei şi punctele corespunzătoare căsuțelor piticilor cu scufii albastre se află de cealaltă parte a dreptei.

Pentru aceasta vom determina ecuațiile dreptelor şi vom înlocui variabilele x şi y ale acestora cu coordonatele căsuțelor piticilor. Pentru căsuțele piticilor cu scufii roşii va trebui ca rezultatul să aibă un anumit semn, iar pentru căsuțele piticilor cu scufii albastre acesta va trebui să aibă semn opus.

O variantă este să determinăm semnul pentru căsuţa primului pitic cu scufie roşie. Apoi vom determina semnele pentru căsuţele tuturor celorlalţi pitici cu scufii roşii. Dacă apare un semn diferit putem trage imediat concluzia că poteca nu este validă. Evident, dacă obţinem o valoare 0, dreapta corespunzătoare potecii va trece prin punctul corespunzător căsuţei unui pitic, deci nici în această situaţie poteca nu este validă.

Dacă nu am identificat nici o situaţie care să ducă la concluzia că poteca nu este validă, putem fi siguri că toţi piticii cu scufii roşii au căsuţele de aceeaşi parte a dreptei.

În continuare, vom determina semnele pentru căsuţele piticilor cu scufii albastre. Dacă apare valoarea 0 sau acelaşi semn ca şi pentru piticii cu scufii roşii, rezultă imediat că poteca nu este validă.

Dacă nu am identificat nici acum o situaţie care să ducă la concluzia că poteca nu este validă, putem fi siguri că toţi piticii cu scufii albastre au căsuţele de cealaltă parte a dreptei.

Ca urmare, în acest moment putem concluziona că poteca respectivă este validă.

Analiza complexităţii

Citirea datelor de intrare implică citirea celor M perechi de coordonate ale căsuţelor piticilor cu scufii roşii, a celor N perechi de coordonate ale căsuţelor piticilor cu scufii albastre, precum şi coordonatele perechilor de puncte care determină cele K drepte corespunzătoare potecilor propuse de sfetnici. Aşadar, ordinul de complexitate al operaţiei de citire a datelor de intrare este **O(M + N + K)**.

Pentru fiecare dintre cele K poteci vom verifica, pe baza coordonatelor celor două puncte date, ecuaţiile dreptelor corespunzătoare. Pentru o potecă, ordinul de complexitate al acestei operaţii este $O(1)$. În cel mai defavorabil caz, se verifică semnele corespunzătoare tuturor căsuţelor piticilor cu scufii roşii şi tuturor căsuţelor piticilor cu scufii albastre. Aşadar, pentru o dreaptă vom verifica semnele pentru $M + N$ căsuţe, operaţie al cărei ordin de complexitate este $O(M + N)$. După verificare, vom scrie în fişierul de ieşire mesajul corespunzător, operaţie al cărei ordin de complexitate este $O(1)$. Rezultă imediat că operaţia de verificare a validităţii unei poteci are ordinul de complexitate $O(1) + O(M + N) + O(1) = O(M + N)$. În total vom efectua K astfel de verificări, ordinul de complexitate al întregi operaţii fiind $O(K) \cdot O(M + N) =$ **O(K · (M + N))**.

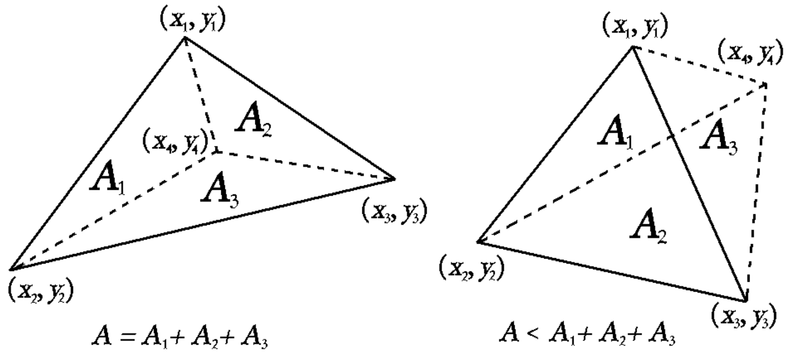
Scrierea datelor în fişierul de ieşire se realizează pe parcursul verificărilor, deci nu se consumă timp suplimentar pentru această operaţie.

În concluzie, ordinul de complexitate al algoritmului de rezolvare a acestei probleme este $O(M + N + K) + O(K \cdot (M + N)) =$ **O(K · (M + N))**.

17.11.2. Titani

Problema se reduce la a verifica, pentru fiecare punct corespunzător unui titan, dacă punctul respectiv se află sau nu în interiorul triunghiului considerat şi să numărăm punctele din interiorul triunghiului.

Aşa cum am arătat în cadrul acestui capitol, o variantă simplă de rezolvare se bazează pe faptul că dacă un punct se află în interiorul triunghiului, pe una din laturi sau este un vârf, atunci suma ariilor celor trei triunghiuri determinate de punctul respectiv şi perechi de vârfuri ale triunghiului dat este egală cu aria triunghiului dat (vezi figura următoare).



Aşadar, pentru fiecare punct în parte vom determina ariile triunghiurilor determinate de punctul respectiv şi două vârfuri ale triunghiului. Dacă suma celor trei arii este egală cu aria triunghiului, atunci punctul se află în interiorul triunghiului, pe una dintre laturi sau într-un vârf.

Dacă se cunosc coordonatele vârfurilor unui triunghi, atunci formula de calcul a ariei acestuia este:

$$\left|\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}\right|.$$

În final vom scrie în fişierul de ieşire numărul punctelor aflate în interiorul triunghiului.

Trebuie menționat faptul că, pentru a reduce timpul de execuție, este indicat să calculăm aria triunghiului dat o singură dată, la început.

Analiza complexității

Citirea coordonatelor vârfurilor triunghiului constă în citirea a şase numere întregi, deci se realizează în timp constant.

Verificarea faptului dacă un punct se află sau nu în interiorul triunghiului considerat se realizează cu ajutorul unui număr constant de operații aritmetice. Această operație poate fi realizată pe măsura citirii coordonatelor punctelor. Aşadar, ordinul de complexitate al operațiilor de citire a datelor şi determinare a soluției este **O(N)**.

Datele de ieşire constau într-un singur număr, aşadar ordinul de complexitate al operației de scriere a acestora este **O(1)**.

În concluzie, algoritmul de rezolvare a acestei probleme are ordinul de complexitate $O(1) + O(N) + O(1) =$ **O(N)**.

17.11.3. Romulani

Aceasta este o simplă generalizare a problemei anterioare pentru spaţiul tridimensional. Există o mică diferenţă, şi anume faptul că va trebui să verificăm dacă un punct se află în interiorul mai multor piramide.

De data aceasta vom lucra cu volume în locul ariilor, operaţiile devenind puţin mai complicate.

Pentru fiecare navă klingoniană vom verifica, pe rând, dacă se află în interiorul uneia dintre piramide. Dacă identificăm o astfel de situaţie, putem trage imediat concluzia că nava va fi distrusă. Dacă am efectuat verificări pentru toate piramidele şi nu am găsit nici una care să conţină punctul respectiv în interior, atunci nava klingoniană nu va fi distrusă.

Din nou, pentru a reduce timpul de execuţie, este indicat să calculăm o singură dată volumele piramidelor determinate de grupurile de nave romulane, la început.

Analiza complexităţii

Citirea coordonatelor vârfurilor unei piramide constă în citirea a douăsprezece numere întregi, deci se realizează în timp constant. În total vom citi date pentru K piramide, deci ordinul de complexitate al acestei operaţii este **O(K)**.

Verificarea faptului dacă un punct se află sau nu în interiorul unei piramide se realizează cu ajutorul unui număr constant de operaţii aritmetice. Va trebui să efectuăm verificări, în cel mai defavorabil caz, pentru K piramide, deci ordinul de complexitate al operaţiei prin care se verifică dacă o navă klingoniană este sau nu distrusă este $O(K)$.

Această operaţie poate fi realizată pe măsura citirii coordonatelor punctelor corespunzătoare navelor klingoniene. Aşadar, ordinul de complexitate al operaţiilor de citire a datelor şi determinare a soluţiei este $O(N) \cdot O(K) =$ **O(N · K)**.

Datele de ieşire constau într-un singur număr, aşadar ordinul de complexitate al operaţiei de scriere a acestora este **O(1)**.

În concluzie, algoritmul de rezolvare a acestei probleme are ordinul de complexitate $O(K) + O(N \cdot K) + O(1) =$ **O(N · K)**.