

Seminar

# Panjerjev razred

Lana Herman

Tin Markon

Mentor: prof. dr. Janez Bernik

Univerza v Ljubljani

Fakulteta za matematiko in fiziko

Marec, 2019

## Kazalo

1	Problem	2
2	Rešitev	2

## 1 Problem

Za verjetnostno masno funkcijo  $p : \mathbb{N}_0 \rightarrow [0, 1]$  slučajne spremenljivke z vrednostmi v  $\mathbb{N}_0$  pravimo, da je v Panjerjevem razredu, če obstajata realni števili  $a$  in  $b$  taki da je

$$p_k = p_{k-1} \left( a + \frac{b}{k} \right), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Dokaži, da je  $p$  v Panjerjevem razredu, če in samo če je ene izmed sledečih oblik (povsod teče  $n$  po  $\mathbb{N}_0$ ):

1.  $p_n = \delta_0(n)$  (Diracova masa v 0).
2.  $p_n = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$  za nek  $\lambda \in (0, \infty)$  (Poissonova porazdelitev).
3.  $p_n = \binom{\alpha+n-1}{n} p^n (1-p)^\alpha$  za neka  $\alpha \in (0, \infty), p \in (0, 1)$   
(Tu je  $\binom{\alpha+n-1}{n}$  posplošeni binomski simbol, ki se izraža  $\binom{\alpha+n-1}{n} = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha)}$ .)
4.  $p_n = \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n}$  za neka  $p \in (0, 1), N \in \mathbb{N}$  (binomska porazdelitev).

## 2 Rešitev

( $\Leftarrow$ ) Najprej predpostavimo, da so Diracova masa v 0, Poissonova porazdelitev, negativna binomska porazdelitev ter binomska porazdelitev v Panjerjevem razredu. Iščemo taki realni števili  $a$  in  $b$ , da bo veljala enakost  $p_k = p_{k-1} \left( a + \frac{b}{k} \right)$ .

1.  $p_1 = p_0(a+b) = 0 = p_2 = p_3 = \dots = p_k, \quad \forall k \in \mathbb{N}$ , sledi  $a+b=0, a=-b$
2.  $\frac{p_k}{p_{k-1}} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda} (k-1)!}{\lambda^{k-1} e^{-\lambda} k!} = \frac{\lambda}{k}$ , sledi  $a=0, b=\lambda$
3. Ker velja  $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)!$  za  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ , in  $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$  za  $\forall \alpha > 0$ , velja  

$$\binom{n+\alpha-1}{n} = \frac{(n+\alpha-1)!}{n!(\alpha-1)!} = \frac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha)}.$$

$$\frac{p_n}{p_{n-1}} = \frac{\binom{n+\alpha-1}{n} p^n (1-p)^\alpha}{\binom{n-1+\alpha-1}{n-1} p^{n-1} (1-p)^\alpha} = \dots = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{n\Gamma(\alpha+n-1)} p = \frac{(\alpha+n-1)\Gamma(\alpha+n-1)}{n\Gamma(\alpha+n-1)} p =$$

$$p + p(\alpha-1) \frac{1}{n}, \text{ sledi } a=p, b=p(\alpha-1)$$
4.  $\frac{p_n}{p_{n-1}} = \frac{\binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n}}{\binom{N}{n-1} p^{n-1} (1-p)^{N-n+1}} = \dots = \frac{p}{1-p} (N+1) \frac{1}{n} - \frac{p}{1-p}, \text{ sledi } a =$ 

$$-\frac{p}{1-p}, b = \frac{p}{1-p} (N+1)$$

( $\Rightarrow$ ) Sedaj predpostavimo, da obstajata taki realni števili  $a$  in  $b$ , da velja enakost  $p_k = p_{k-1}(a + \frac{b}{k})$ . Dokazati moramo, da je  $p$  v Panjerjevem razredu, če je Diracova masa v 0, Poissonova porazdelitev, negativna binomska porazdelitev ali binomska porazdelitev.

Ker mora biti  $p_k \geq 0$  za  $\forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow a + b \geq 0$ .

1.  $a + b = 0$ :

$$p_1 = p_0(a + b) = 0 = p_2 = p_3 = \dots = p_k.$$

Ker mora veljati

$$1 = \sum_{k=0}^{\infty} p_k,$$

sledi  $p_0 = 1$  in tako dobimo Diracovo maso v točki 0.

2.  $a + b > 0$ :

- $0 < a < 1$ : Določimo novo spremenljivko  $\alpha = \frac{a+b}{a}$ , sledi  $b = a(\alpha - 1)$ ,

$$\begin{aligned} p_1 &= p_0(a + b) = p_0 a \alpha, \\ p_2 &= p_1(a + \frac{b}{2}) = p_1 a (\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}) = p_0 a^2 \alpha (\alpha + 1) \frac{1}{2}, \\ &\vdots \\ p_k &= p_0 a^k \frac{1}{k!} \frac{(\alpha + k - 1)!}{(\alpha - 1)!} = p_0 a^k \binom{\alpha + k - 1}{k}. \end{aligned}$$

Veljati mora

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha + k - 1}{k} p_0 a^k = p_0 \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha + k - 1}{k} a^k = 1.$$

Velja tudi:

$$\begin{aligned} \binom{\alpha + k - 1}{k} &= \frac{(\alpha + k - 1)(\alpha + k - 2) \dots (\alpha + k - (k - 1))(\alpha + k - k)(\alpha - 1)!}{k!(\alpha - 1)!} = \\ &= (-1)^k \frac{(-\alpha)(-\alpha - 1) \dots (-\alpha - k + 1)}{k!} = (-1)^k \binom{-\alpha}{k}. \end{aligned}$$

Torej je:

$$p_0 \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha + k - 1}{k} a^k = p_0 \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\alpha}{k} (-1)^k a^k = p_0 \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\alpha}{k} (-a)^k = p_0 (1 + (-a))^{-\alpha},$$

kjer smo upoštevali binomsko vrsto in dejstvo, da je  $|a| < 1$ . Iz tega sledi enakost  $p_0 = (1 - a)^\alpha$ . Od tod dobimo negativno binomsko porazdelitev.

- $a = 0$ : Velja  $p_k = p_{k-1} \frac{b}{k}$ . Če razpišemo, dobimo:

$$\begin{aligned} p_1 &= p_0 b, \\ p_2 &= p_0 \frac{b^2}{2}, \\ &\dots \\ p_k &= p_0 \frac{b^k}{k!}. \end{aligned}$$

Ker mora veljati

$$\sum_{k=0}^n p_k = 1, \text{ sledi } \sum_{k=0}^{\infty} p_0 \frac{b^k}{k!} = p_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b^k}{k!} = p_0 e^b = 1.$$

Torej velja enakost  $p_0 = e^{-b}$  in  $p_k = e^{-b} \frac{b^k}{k!}$ , kar pa je ravno Poissonova porazdelitev s parametrom  $b$ .

- $a < 0$ :  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p_k}{p_{k-1}} = \lim_{k \rightarrow \infty} (a + \frac{b}{k}) = a < 0$ , iz česar sledi, da obstaja tak  $N \in \mathbb{N}$ , da velja  $a + \frac{b}{N+1} = 0$  (vsi členi od nekega  $N$  dalje so enaki 0, ker mora biti verjetnostna masna funkcija nenegativna). Če izrazimo  $b$ , dobimo  $b = -a(N+1)$ . To vstavimo v Panjerjevo zvezo  $p_k = p_{k-1}(a + \frac{b}{k})$ :

$$\begin{aligned} p_1 &= p_0(a - a(N+1)) = p_0 a(-1)N, \\ p_2 &= p_1(a - a \frac{N+1}{2}) = p_0 a^2 \frac{1}{2} (-1)^2 N(N-1), \\ &\vdots \\ p_k &= p_0 a^k \frac{1}{k!} N(N-1) \cdots (N-k+1) (-1)^k \\ &= p_0 a^k \frac{1}{k!} \frac{N!}{(N-k)!} (-1)^k = p_0 (-a)^k \binom{N}{k}. \end{aligned}$$

Vemo, da mora veljati

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1 \rightarrow \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} p_0 (-a)^k = p_0 \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} (-a)^k = p_0 (1-a)^N = 1 \rightarrow p_0 = (1-a)^{-N}.$$

(Uporabili smo binomski izrek.)

Če vstavimo  $a = \frac{-p}{1-p}$  dobimo:

$$p_k = \binom{N}{k} (1 + \frac{p}{1-p})^{-N} (\frac{p}{1-p})^k = \binom{N}{k} (\frac{1}{1-p})^{-N} \frac{p^k}{(1-p)^k} = \binom{N}{k} (1-p)^{N-k} p^k,$$

kar pa je ravno binomska porazdelitev.