Seminar

Panjerjev razred

Lana Herman
Tin Markon
Mentor: prof. dr. Janez Bernik

Univerza v Ljubljani
Fakulteta za matematiko in fiziko

Marec, 2019

Kazalo

1 Problem

Za verjetnostno masno funkcijo $p : \mathbb{N}_0 \to [0,1]$ slučajne spremenljivke z vrednostmi v $\mathbb{N}_0$ pravimo, da je v Panjerjevem razredu, če obstajata realni števili a in b taki da je

$$p_k = p_{k-1}(a + \frac{b}{k}), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Dokaži, da je p v Panjerjevem razredu, če in samo če je ene izmed sledečih oblik (povsod teče n po $\mathbb{N}_0$):

1. $p_n = \delta_0(n)$ *(Diracova masa v 0).*
2. $p_n = \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$ *za nek $\lambda \in (0,\infty)$ (Poissonova porazdelitev).*
3. $p_n = \binom{\alpha+n-1}{n}p^n(1-p)^\alpha$ *za neka $\alpha \in (0,\infty), p \in (0,1)$*
   (Tu je $\binom{\alpha+n-1}{n}$ posplošeni binomski simbol, ki se izraža $\binom{\alpha+n-1}{n} = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha)}$.
4. $p_n = \binom{N}{n}p^n(1-p)^{N-n}$ *za neka $p \in (0,1), N \in \mathbb{N}$ (binomska porazdelitev).*

2 Rešitev

($\Leftarrow$) Najprej predpostavimo, da so Diracova masa v 0, Poissonova porazdelitev, negativna binomska porazdelitev ter binosmak porazdelitev v Panjerjevem razredu. Iščemo taki realni števili a in b, da bo veljala enakost $p_k = p_{k-1}(a+\frac{b}{k})$.

1. $p_1 = p_0(a+b) = 0 = p_2 = p_3 = \ldots = p_k, \quad \forall k \in \mathbb{N}$, sledi $a+b=0, a=-b$
2. $\frac{p_k}{p_{k-1}} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}(k-1)!}{\lambda^{k-1}e^{-\lambda}k!} = \frac{\lambda}{k}$, sledi $a=0, b=\lambda$
3. Ker velja $\Gamma(n) = (n-1)!$ za $\forall n \in \mathbb{N}$, in $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ za $\forall \alpha > 0$, velja $\binom{n+\alpha-1}{n} = \frac{(n+\alpha-1)!}{n!(\alpha-1)!} = \frac{\Gamma(n+\alpha)}{n!\Gamma(\alpha)}$.
   $\frac{p_n}{p_{n-1}} = \frac{\binom{n+\alpha-1}{n}p^n(1-p)^\alpha}{\binom{n-1+\alpha-1}{n-1}p^{n-1}(1-p)^\alpha} = \ldots = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{n\Gamma(\alpha+n-1)}p = \frac{(\alpha+n-1)\Gamma(\alpha+n-1)}{n\Gamma(\alpha+n-1)}p = p + p(\alpha-1)\frac{1}{n}$, sledi $a=p, b=p(\alpha-1)$
4. $\frac{p_n}{p_{n-1}} = \frac{\binom{N}{n}p^n(1-p)^{N-n}}{\binom{N}{n-1}p^{n-1}(1-p)^{N-n+1}} = \ldots = \frac{p}{1-p}(N+1)\frac{1}{n} - \frac{p}{1-p}$, sledi $a = -\frac{p}{1-p}, b = \frac{p}{1-p}(N+1)$

($\Rightarrow$) Sedaj predpostavimo, da obstajata taki realni števili a in b, da velja enakost $p_k = p_{k-1}(a + \frac{b}{k})$. Dokazati moramo, da je p v Panjerjevem razredu, če je Diracova masa v 0, Poissonova porazdelitev, negativna binomska porazdelitev ali binomska porazdelitev.

Ker mora biti $p_k \geq 0$ za $\forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow a + b \geq 0$.

1. $a + b = 0$:

$$p_1 = p_0(a+b) = 0 = p_2 = p_3 = \ldots = p_k.$$

Ker mora veljati

$$1 = \sum_{k=0}^{\infty} p_k,$$

sledi $p_0 = 1$ in tako dobimo Diracovo maso v točki 0.

2. $a + b > 0$:

- $0 < a < 1$: Določimo novo spremenljivko $\alpha = \frac{a+b}{a}$, sledi $b = a(\alpha - 1)$,

$$p_1 = p_0(a+b) = p_0 a\alpha,$$
$$p_2 = p_1(a + \frac{b}{2}) = p_1 a(\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}) = p_0 a^2 \alpha(\alpha+1)\frac{1}{2},$$
$$\vdots$$
$$p_k = p_0 a^k \frac{1}{k!}\frac{(\alpha+k-1)!}{(\alpha-1)!} = p_0 a^k \binom{\alpha+k-1}{k}.$$

Veljati mora

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha+k-1}{k} p_0 a^k = p_0 \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha+k-1}{k} a^k = 1.$$

Velja tudi:

$$\binom{\alpha+k-1}{k} = \frac{(\alpha+k-1)(\alpha+k-2)\ldots(\alpha+k-(k-1))(\alpha+k-k)(\alpha-1)!}{k!(\alpha-1)!} =$$

$$= (-1)^k \frac{(-\alpha)(-\alpha-1)\ldots(-\alpha-k+1)}{k!} = (-1)^k \binom{-\alpha}{k}.$$

Torej je:

$$p_0 \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha+k-1}{k} a^k = p_0 \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\alpha}{k} (-1)^k a^k = p_0 \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\alpha}{k} (-a)^k = p_0(1+(-a))^{-\alpha},$$

kjer smo upoštevali binomsko vrsto in dejstvo, da je $|a| < 1$. Iz tega sledi enakost $p_0 = (1-a)^{\alpha}$. Od tod dobimo negativno binomsko porazdelitev.

- a $= 0$: Velja $p_k = p_{k-1}\frac{b}{k}$. Če razpišemo, dobimo:

$$
\begin{aligned}
p_1 &= p_0 b,\\
p_2 &= p_0 \tfrac{b^2}{2},\\
&\dots\\
p_k &= p_0 \tfrac{b^k}{k!}.
\end{aligned}
$$

  Ker mora veljati

$$\sum_{k=0}^{n} p_k = 1, \text{ sledi } \sum_{k=0}^{\infty} p_0 \frac{b^k}{k!} = p_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b^k}{k!} = p_0 e^b = 1.$$

  Torej velja enakost $p_0 = e^{-b}$ in $p_k = e^{-b}\frac{b^k}{k!}$, kar pa je ravno Poissonova porazdelitev s parametrom b.

- a < 0: $\lim_{k\to\infty} \frac{p_k}{p_{k-1}} = \lim_{k\to\infty}(a + \frac{b}{k}) = a < 0$, iz česar sledi, da obstaja tak N $\in \mathbb{N}$, da velja $a + \frac{b}{N+1} = 0$ (vsi členi od nekega N dalje so enaki 0, ker mora biti verjetnostna masna funkcija nenegativna). Če izrazimo b, dobimo $b = -a(N+1)$. To vstavimo v Panjerjevo zvezo $p_k = p_{k-1}(a + \frac{b}{k})$:

$$
\begin{aligned}
p_1 &= p_0(a - a(N+1)) = p_0 a(-1)N,\\
p_2 &= p_1(a - a\tfrac{N+1}{2}) = p_0 a^2 \tfrac{1}{2}(-1)^2 N(N-1),\\
&\vdots\\
p_k &= p_0 a^k \tfrac{1}{k!} N(N-1)\cdots(N-k+1)(-1)^k\\
&= p_0 a^k \tfrac{1}{k!}\tfrac{N!}{(N-k)!}(-1)^k = p_0(-a)^k\tbinom{N}{k}.
\end{aligned}
$$

  Vemo, da mora veljati

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1 \to \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} p_0(-a)^k = p_0 \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k}(-a)^k = p_0(1-a)^N = 1 \to p_0 = (1-a)^{-N}.$$

  (Uporabili smo binomski izrek.)

  Če vstavimo $a = \frac{-p}{1-p}$ dobimo:

  $p_k = \binom{N}{k}(1+\frac{p}{1-p})^{-N}(\frac{p}{1-p})^k = \binom{N}{k}(\frac{1}{1-p})^{-N}\frac{p^k}{(1-p)^k} = \binom{N}{k}(1-p)^{N-k}p^k$,

  kar pa je ravno binomska porazdelitev.