Somatórios

Diogo Araujo Miranda[1]

[1]ICEI - Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais (PUC-MG)

1. Definição e Notações

Somatórios podem ser encontrados em todos lugares. Na matemática, somatório é definido como uma adição de quaisquer números chamados de termos ou parcelas, sendo seu resultado a soma total. Nós podemos escrever um somatório como $a_1 + a_2 + ... + a_n$ utilizando a notação "três pontos". A sua vantagem é que podemos "ver" a soma, como se ela tivesse sido escrita por inteiro. Uma outra maneira de exprimir a soma anterior é com a forma delimitada por

$$\sum_{k=1}^{n} a_k,$$

chamada de "notação sigma", pois utilizamos letra maiúscula $\sum$. Nesta notação, k nos diz a respeito do índice que identifica cada elemento em uma soma. O n nos indica a condição de parada do índice. E na frente do somatório indica-se a lei de formação do mesmo, delimitado nesse caso por a_k.

2. Manipulação de Somas

Para manipular uma soma deve-se ter em mente que é preciso deixa-la simples para a melhor compreensão. Com isso surge algumas propriedades, essa leis são simplesmente divididades em:

$$\sum_{n \in l} c.a_n = c.\sum_{n \in l} a_n; \text{ (lei distributiva)}$$
$$\sum_{n \in l} (a_n + b_n) = \sum_{n \in l} a_n + \sum_{n \in l} b_n; \text{ (lei associativa)}$$
$$\sum_{n \in l} a_n = \sum_{p(n) \in l} a_{p(n)}; \text{ (lei comutativa)}$$

A distributividade diz a respeito de mover uma constante c na $\sum$. A associatividade nos permite quebrar a $\sum$ em outras duas. Já a comutatividade nos permite reordenar os termos sem alterar a soma.

3. Exemplo: Soma de uma progressão aritmética

Sendo uma progressão aritmética $\sum_{0 \le i \le n} a + b.i$ aplica-se a comutatividade para somar do maior para o menor, trocando i por $n - i$: $\sum\limits_{0 \le i \le n} [a + b.n - b.i]$; Pode-se afirmar:

$$2S = \sum_{0 \le i \le n} [a + b.i] + \sum_{0 \le i \le n} [a + b.n - b.i] \rightarrow 2S = \sum_{0 \le i \le n} [a + b.i + a + b.n - b.i]$$
$$\rightarrow 2S = \sum_{0 \le i \le n} [2a + b.n] \rightarrow 2S = [2a + b.n].\sum_{0 \le i \le n} 1 \rightarrow 2S = (2a + b.n)(n + 1) \rightarrow$$

$$S = \frac{(2a + b.n)(n + 1)}{2}$$