

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO**  
**CENTRO TECNOLÓGICO**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL**

Diogo Folador Rossi

Estratégias de adaptação do incremento de tempo na  
integração numérica em análise dinâmica de estruturas

Dissertação de Mestrado

Vitória  
Março de 2013

Diogo Folador Rossi

# Estratégias de adaptação do incremento de tempo na integração numérica em análise dinâmica de estruturas

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Engenharia Civil do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil, área de Estruturas.

Orientador: Prof. Dr. Eng. Walnório Graça Ferreira

Vitória  
Março de 2013

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)  
(Biblioteca Setorial Tecnológica,  
Universidade Federal do Espírito Santo, ES, Brasil)

---

Rossi, Diogo Folador, 1988-  
R831e      Estratégias de adaptação do incremento de tempo na  
integração numérica em análise dinâmica de estruturas / Diogo  
Folador Rossi. – 2013.  
                196 f. : il.

Orientador: Walnório Graça Ferreira.  
Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade  
Federal do Espírito Santo, Centro Tecnológico.

1. Dinâmica estrutural. 2. Integração numérica. 3. Controle  
automático. 4. Soluções numéricas. 5. Método dos elementos  
finitos. 6. Programação (Computadores). I. Ferreira, Walnório  
Graça. II. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro  
Tecnológico. III. Título.

---

CDU: 624

**Diogo Folador Rossi**

**ESTRATÉGIAS DE ADAPTAÇÃO DO INCREMENTO DE TEMPO NA  
INTEGRAÇÃO NUMÉRICA EM ANÁLISE DINÂMICA DE  
ESTRUTURAS**

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Engenharia Civil do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Espírito, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil, área de Estruturas.

Aprovada no dia **22 de março de 2013** por:

Prof. Dr. Walnório Graça Ferreira  
Doutor em Engenharia Civil  
Orientador - UFES

Prof. Dra. Adenilcia Fernanda G. Calenzani  
Doutora em Engenharia Civil  
Membro Interno - UFES

Prof. Dr. Webe João Mansur  
Doutor em Engenharia Civil  
Membro Externo - UFRJ

A toda minha família e, principalmente, a  
meus pais Clovis e Alaize.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço a minha família, que sempre me ajudou e me apoiou em muitas escolhas e com a qual compartilhei muitos momentos de felicidade. Agradeço principalmente a meus pais, que me deram condições e oportunidade de estudar e de chegar até onde cheguei.

Sou eternamente grato aos grandes professores que tive em todo o período de formação, maiores responsáveis pelo desenvolvimento de um cidadão, desde o início da educação científica: a Maria de Lourdes Oliveira, Renato Fundão e Luciano Vignatti, pela física e matemática no ensino médio; a Carlos Alberto Manfré, Magno Branco Alves, Jose Armínio Ferreira, Cláudia Galarda Varassin e Márcio Cerqueira, nas disciplinas básicas da engenharia; a Brunella Sily Bumachar, Karla Conde, Luiz Herkenhoff Coelho, Adenilcia Fernanda Calenzani e Lorenzo Augusto Luchi, nas disciplinas profissionalizantes da área de estruturas.

Ao professor Pedro Augusto Cezar Oliveira de Sá, pelo ensino de resistência dos materiais e o precioso aprendizado sobre o programa Ansys, e ao professor Élcio Cassimiro Alves, pelo ensino do método dos elementos finitos e o aprendizado sobre o programa Matlab.

Ao professor Walnório Graça Ferreira, por todo conhecimento transmitido na introdução ao estudo da dinâmica das estruturas e pelas horas dedicadas à orientação dessa dissertação.

Ao colega Marco Túlio Fernandes, pelas ideias e orientação acerca do tema dessa pesquisa e ao professor Webe João Mansur, que muito nos acolheu e orientou nas viagens à COPPE.

A todos os colegas da UFES com quem pude conviver durante esse tempo.

A CAPES, pela bolsa de estudos e o apoio financeiro.

“O marinheiro, a quem a exata determinação da longitude preserva o naufrágio, deve a vida a uma teoria concebida, vinte séculos mais cedo, por homens de gênio que tinham em vista meras especulações geométricas”.

*Condorcet*

## RESUMO

Esse trabalho apresenta o uso de métodos de adaptação automática dos incrementos de tempo utilizados na integração numérica passo-a-passo das análises dinâmicas de sistemas estruturais, no domínio do tempo, em estruturas de um e de múltiplos graus de liberdade. Buscou-se comparar as performances das diferentes estratégias adaptativas estudadas. Inicialmente, foi feita uma revisão dos principais processos adotados na solução numérica das equações de equilíbrio dinâmico de sistemas de um grau de liberdade, se concentrando na família de métodos de Newmark, discutindo seus mais amplos aspectos. Posteriormente foi tratado o problema de estruturas de múltiplos graus de liberdade, descrevendo a formação das matrizes estruturais envolvidas através do conceito do método dos elementos finitos e da análise matricial de estruturas, considerando o amortecimento estrutural do tipo viscoso e proporcional, e generalizando os processos de solução numérica das equações dinâmicas. Em seguida foi descrito o escopo de um programa computacional que aplicasse a teoria desenvolvida em análise de estruturas de pórticos planos, o qual foi construído no ambiente de programação do software Matlab. As estratégias de adaptação do incremento de tempo são analisadas na sequência, escolhendo-se três algoritmos principais a serem abordados na implementação, dentre os vários disponíveis, por se basearem em conceitos distintos uns dos outros. Por fim, são apresentados exemplos numéricos resolvidos, onde se comparam as performances das diferentes estratégias adaptativas e se propõem melhorias e diretrizes de aplicação das mesmas.

**Palavras chave:** Análise dinâmica de estruturas. Adaptação no tempo. Métodos de integração direta. Método dos elementos finitos.

## ABSTRACT

This work presents methods of automatic adaptive time increment used in numerical step-by-step integration analyses of structural systems, in time domain, for single and multi-degree-of-freedom structures. The main purpose was to compare the different strategies performances. Initially, the major processes formulations adopted in the numerical solution of dynamic equilibrium equations were shown for single-degree-of-freedom systems, focusing on the Newmark family of integration methods, discussing about its various aspects. Later, the problem of multi-degree-of-freedom systems was discussed, by describing the structural matrix formulations, considering viscous and proportional structural damping, and generalizing the numerical solution of dynamic equations. Then, it is described a computational program that apply the developed theory on plane frame structures analysis, which was built in the programming software Matlab. The adaptive strategies of time increment are then analyzed, having three major algorithms been chosen to be addressed in the implementation, among the various others available, because they are based on three different concepts. Finally, several numerical examples are presented, on which the performances of the different adaptive strategies are compared, and improvements and guidelines for application are suggested.

**Keywords:** Structural dynamics analysis. Time adaptive integration. Direct integration methods. Finite element method.

## LISTA DE FIGURAS

2.1 – Sistema de um grau de liberdade.....	27
2.2 – Componentes do sistema.....	28
2.3 – Ação das forças.....	28
2.4 – Notação para os métodos passo-a-passo .....	29
2.5 – Notações para o método das diferenças centrais .....	34
2.6 – Histórico de resposta de deslocamentos.....	38
2.7 – Aceleração média constante e aceleração linear .....	39
2.8 – Variações da aceleração num intervalo de tempo.....	42
2.9 – Forças do sistema dinâmico não linear .....	46
3.1 – Representação do deslocamento $D_k$ .....	54
4.1 – Elemento quadrilateral quadrático de 8 nós .....	76
4.2 – Elemento de barra de pórtico plano .....	77
4.3 – Deformações de flexão na seção transversal.....	81
4.4 – Elemento de barra com inclinação $\phi$ .....	83
4.5 – Opções de cargas: Impulso constante e impulso triangular simétrico .....	90
4.6 – Opções de carga: Impulso triangular decrescente e carga senoidal .....	90
5.1 – Funções de Controle da estratégia de adaptatividade .....	100
5.2 – Estratégia de Hulbert e Jang .....	113
5.3 – Representação de uma curva paramétrica no espaço .....	115
5.4 – Intervalos de regularização da curvatura.....	120
5.5 – Algoritmo de regularização por máximo valor em intervalos .....	121
5.6 – Regularização de curvatura por máximo valor em intervalos .....	123
5.7 – Verificação adicional da regularização por máximo valor em intervalos .....	124
5.8 – Comparação entre as funções $e^{-x}$ e $1/(1 + x)$ .....	125
6.1 – Modelo para simulação de sistema SDOF .....	127
6.2 – Respostas dinâmicas e erros absolutos do sistema SDOF Cenário (1) .....	131
6.3 – Variação dos passos de tempo nas análises do sistema SDOF Cenário (1) .....	132
6.4 – Erro local normalizado e histórico curvaturas para o Cenário (1) .....	133
6.5 – Respostas dinâmicas e variação de $\Delta t$ do sistema SDOF Cenário (2) .....	134
6.6 – Histórico de curvaturas para o sistema SDOF Cenário (2).....	135
6.7 – Erro local normalizado e erros absolutos do sistema SDOF Cenário (2) .....	136
6.8 – Resultados das análises do sistema SDOF do cenário (3) .....	137

6.9 – Resultados das análises do sistema SDOF do cenário (4) .....	138
6.10 – Resultados das análises do sistema SDOF do cenário (5) .....	140
6.11 – Modelo para simulação de Shear Building .....	142
6.12 – Carregamentos atuantes nos sistemas Shear Buildings .....	143
6.13 – Respostas dinâmicas e variação de $\Delta t$ do Shear Building Exemplo (1).....	144
6.14 – Curvaturas e Períodos característicos do Shear Building Exemplo (1) .....	145
6.15 – Variação dos passos de tempo usando diferentes valores de $\Delta t_1$ .....	146
6.16 – Respostas dinâmicas e variação de $\Delta t$ do Shear Building Exemplo (2).....	147
6.17 – Erros normalizados e Curvaturas do Shear Building Exemplo (2).....	148
6.18 – Variação dos Períodos Característicos do Shear Building Exemplo (2) .....	149
6.19 – Modelo de viga simplesmente apoiada sob carga senoidal .....	149
6.20 – Provável função de controle usada no algoritmo do Ansys .....	152
6.21 – Resultados das análises da viga para o primeiro caso de carregamento ....	153
6.22 – Variação da curvatura para diferentes valores de $\alpha$ .....	155
6.23 – Resultados das análises da viga para o segundo caso de carregamento....	156
6.24 – Pórtico plano metálico .....	157
6.25 – Carga dinâmica aplicada sobre o pórtico .....	157
6.26 – Diferentes discretizações do modelo do pórtico em elementos finitos .....	158
6.27 – Resultados das análises do pórtico sob o primeiro carregamento .....	160
6.28 – Históricos de curvatura para os dois modelos de pórtico .....	161
6.29 – Curvaturas dos modelos de pórtico a partir do instante $t = 0.05s$ .....	161
6.30 – Representação do pórtico com carregamento e sua discretização .....	162
6.31 – Primeira combinação de múltiplos carregamentos analisada.....	163
6.32 – Segunda combinação de múltiplos carregamentos analisada.....	163
6.33 – Resultados das análises do pórtico sob os múltiplos carregamentos .....	164

## **LISTA DE TABELAS**

6.1 – Cenários de parâmetros para os sistemas SDOF .....	129
6.2 – Dados dos algoritmos dos sistemas SDOF adotados em cada cenário .....	130
6.3 – Resultados numéricos dos sistemas SDOF .....	141
6.4 – Propriedades dos exemplos de Shear Building.....	142
6.5 – Parâmetros usados nos exemplos de Shear Building .....	144
6.6 – Frequências modais da viga biapoiada calculadas numericamente.....	150
6.7 – Frequências naturais do pórtico calculadas numericamente.....	159
A.1 – Funções dos códigos em cada arquivo.....	177
A.2 – Significado das variáveis mais importantes utilizadas nos programas.....	178

## LISTA DE ABREVIASÕES E SÍMBOLOS

$\alpha_f, \alpha_m, \rho_\infty$	Parâmetros do Método Generalizado- $\alpha$
$\alpha, c_p, c_t$	Parâmetros da estratégia de Cintra
$A, I$	Área e momento de inércia da seção transversal das barras do pórtico
<b>a</b>	Vetor aceleração da curva parametrizada
$a_0, a_1$	Constantes de proporcionalidade do amortecimento de Rayleigh
$c$	Constante de amortecimento viscoso do caso de um grau de liberdade
<b>C</b>	Matriz de amortecimento da estrutura
<b>C</b>	Matriz da Lei de Hooke generalizada
$\gamma, \beta$	Parâmetros do método de Newmark
$\Delta t$	Incremento ou intervalo de tempo de integração
$D$	Deslocamento nodal
<b>d</b>	Vetor de deslocamentos nodais do elemento finito isolado
<b>D</b>	Vetor de deslocamentos nodais da estrutura
$\hat{\mathbf{D}}$	Autovetor dos modos de vibração em múltiplos graus de liberdade
$\Delta \mathbf{D}$	Vetor de incrementos de deslocamentos da estrutura
$\epsilon, \boldsymbol{\epsilon}$	Deformação e vetor do estado de deformação
$E$	Módulo de elasticidade do material
$\mathbf{e}_i, RL_i$	Erro local e erro local normalizado do passo $i$
<b>E</b>	Matriz constitutiva do material
$\phi, \theta$	Ângulo de inclinação da barra e ângulo de rotação ou de fase
$\Phi, \Pi$	Campo de deslocamentos e energia potencial do elemento finito
$f$	Frequência natural de oscilação livre em ciclos por segundo (Hertz)
$f_{inc}, f_{dec}$	Fatores de amplificação e de redução do incremento de tempo
$F, \mathbf{F}$	Força escalar e vetor de forças
$\xi$	Taxa de amortecimento viscoso
$\kappa$	Curvatura de uma curva parametrizada
$k, \bar{k}$	Constante de rigidez elástica e constante de rigidez efetiva
<b>k, <math>\bar{\mathbf{k}}</math></b>	Matriz de rigidez da estrutura e matriz de rigidez efetiva
$\lambda, \bar{\xi}_p, \bar{\xi}_m, \varepsilon$	Parâmetros da estratégia de Bergan e Mollestad
$L, \bar{m}$	Comprimento da barra e massa uniformemente distribuída da barra
$lb, p_{inc}, p_{dec}$	Parâmetros da estratégia de Hulbert e Jang

$m$	Massa da partícula concentrada no nó
$\mathbf{m}$	Matriz de massa da estrutura
$n$	Número de graus de liberdade da estrutura
$\mathbf{N}$	Matriz das funções de interpolação do elemento finito
$\omega$	Frequência natural de oscilação livre (angular) em rad por segundo
$\bar{\omega}, \bar{T}, \bar{\xi}$	Frequência aparente, período aparente e taxa de incremento de tempo
$\boldsymbol{\omega}$	Vetor de frequências naturais no caso de múltiplos graus de liberdade
$p$	Carga dinâmica sobre o nó
$\mathbf{p}$	Vetor de cargas dinâmicas sobre a estrutura
$\Delta p, \bar{\Delta p}$	Incremento de carga e carregamento efetivo incremental
$\Delta \mathbf{p}, \bar{\Delta \mathbf{p}}$	Vetor do incremento de carga e de carregamento efetivo incremental
$\rho, \zeta$	Massa específica e parâmetro de amortecimento do material
$r$	Raio de curvatura de curvas planas
$\mathbf{r}$	Curva parametrizada
$\mathbf{R}$	Matriz de mudança de base ou de rotação
$\sigma, \boldsymbol{\sigma}$	Tensão e vetor do estado de tensão
$s$	Comprimento de arco percorrido sobre a curva parametrizada
$t$	Instante de Tempo   Variável Tempo
$T$	Período natural de oscilação livre do sistema
$\mathbf{T}$	Vetor tangente unitário à curva parametrizada
$u, v, w$	Deslocamentos de um ponto da estrutura nas direções $x, y, z$
$V$	Volume do elemento finito ou da estrutura
$\mathbf{v}$	Vetor velocidade da curva parametrizada
$x, y, z$	Coordenadas espaciais
SDOF	Sigla para indicar sistema de um grau de liberdade
MDOF	Sigla para indicar sistema de múltiplos graus de liberdade

**Notação utilizada:** Nesta dissertação utiliza-se, em geral, o negrito para representar os vetores e matrizes (notação matricial). Um ponto superposto em alguma variável, “ $\dot{\cdot}$ ”, indica uma diferenciação com relação ao tempo  $t$ . A norma euclidiana de um vetor  $\mathbf{u}$  é representada por  $\|\mathbf{u}\|$ . Índices subscritos ou sobreescritos fazem, ainda, uma caracterização mais detalhada das variáveis representadas por letras, quando for necessário.

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>Introdução.....</b>	<b>16</b>
1.1	Visão geral sobre análise dinâmica das estruturas.....	16
1.2	Motivação e Objetivos.....	18
1.3	Estado da Arte .....	19
1.3.1	Métodos passo-a-passo .....	19
1.3.2	Adaptatividade .....	20
1.4	Descrição sumária .....	24
<b>2</b>	<b>Análise de sistemas de um grau de liberdade.....</b>	<b>27</b>
2.1	Equação de movimento .....	27
2.2	Aspectos gerais sobre os métodos de integração .....	29
2.2.1	Aspectos computacionais.....	30
2.2.2	Definições adotadas e a questão da estabilidade .....	32
2.3	Método das diferenças centrais .....	34
2.4	Métodos de integração .....	37
2.4.1	Aceleração constante – Procedimento de Euler-Gauss .....	38
2.4.2	Aceleração linear.....	40
2.5	Métodos de Newmark-beta.....	41
2.5.1	Escolha dos Parâmetros $\gamma$ e $\beta$ .....	41
2.5.2	Estabilidade do Método .....	42
2.6	Formulação incremental para análise não linear .....	46
2.7	Conversão para formulação explícita .....	48
2.7.1	Conversão do Método de Newmark-beta.....	48
2.7.2	Conversão do Método das Diferenças Centrais .....	49
2.7.3	Considerações sobre as definições adotadas .....	51
<b>3</b>	<b>Análise de sistemas de múltiplos graus de liberdade .....</b>	<b>53</b>
3.1	Equação de movimento .....	53

3.2 Matriz de rigidez e funções de interpolação.....	57
3.3 Matrizes de massa.....	61
3.4 Matrizes de amortecimento.....	65
3.4.1 Vibrações livres não amortecidas e o problema de autovetores .....	65
3.4.2 Equações desacopladas e amortecimento proporcional .....	68
3.4.3 Taxas de amortecimento modais .....	70
3.5 Métodos de integração no tempo .....	71
3.5.1 Generalização do Método de Newmark .....	72
3.5.2 Generalização do Método das Diferenças Centrais .....	74
3.5.3 Considerações sobre os métodos de integração .....	74
<b>4    Implementação do programa .....</b>	<b>76</b>
4.1 Formulação do elemento .....	76
4.2 Matrizes de rigidez e de massa do elemento.....	80
4.3 Aplicação do elemento ao programa .....	85
4.3.1 Matrizes de massa e de rigidez simbólicas .....	85
4.3.2 Geometria e cargas.....	89
4.3.3 Análise dinâmica, adaptatividade e obtenção das respostas.....	90
4.4 Considerações sobre discretização e matrizes de massa .....	92
<b>5    Adaptatividade no tempo .....</b>	<b>95</b>
5.1 Aspectos importantes sobre algoritmos adaptativos.....	96
5.2 Estratégia de Bergan & Mollestad .....	97
5.2.1 Estimativa inicial do tamanho do incremento de tempo .....	98
5.2.2 Algoritmo de adaptatividade .....	99
5.2.3 Aspectos computacionais e prescrição de parâmetros .....	100
5.3 Estratégia de Hulbert & Jang .....	102
5.3.1 O Método Generalizado - $\alpha$ .....	102
5.3.2 Amortecimento dos modos de alta frequência .....	103

5.3.3 Estimativas de erro local .....	105
5.3.4 Estratégia de controle do incremento de tempo .....	108
5.3.4.1 Cálculo da tolerância ao erro .....	108
5.3.4.2 Algoritmo de adaptatividade .....	110
5.3.4.3 Aplicação a problemas com condições iniciais quiescentes .....	113
5.4 Estratégia de Cintra .....	114
5.4.1 O conceito de curvatura .....	114
5.4.2 Curvatura do histórico de deslocamentos e algoritmo adaptativo .....	117
5.4.3 Regularização da curvatura .....	119
5.4.3.1 Regularização por arredondamento .....	119
5.4.3.2 Regularização por máximo valor em intervalos .....	120
5.4.4 Prescrição de parâmetros do algoritmo.....	122
5.4.4.1 Curvatura inicial no intervalo $\Delta t_{reg}$ .....	122
5.4.4.2 Correlação entre curvatura e passo de tempo.....	124
5.4.4.3 Aplicação a problemas com condições quiescentes.....	126
<b>6 Exemplos numéricos .....</b>	<b>127</b>
6.1 Sistemas de um grau de liberdade .....	127
6.2 Shear Building de três pisos .....	141
6.3 Viga Biapoiada.....	149
6.4 Pórtico de três barras.....	157
<b>7 Conclusões e sugestões para trabalhos futuros .....</b>	<b>166</b>
7.1 Conclusões.....	167
7.2 Sugestões para trabalhos futuros .....	170
<b>8 Referências Bibliográficas .....</b>	<b>172</b>
Apêndice .....	177

## 1 INTRODUÇÃO

Um dos objetivos mais importantes do estudo das vibrações estruturais é a determinação da resposta dinâmica de uma determinada estrutura em termos de deslocamentos e esforços internos solicitantes, em face de um carregamento externo atuante. O conhecimento dessas grandezas permite o dimensionamento e a verificação de tais estruturas de forma otimizada e precisa, quando submetidas a cargas variáveis. A consideração de cargas variáveis e a necessidade de se realizar análises dinâmicas em estruturas são de extrema importância em certas situações, como em projetos de pontes e torres, por exemplo, e também em projetos de estruturas em locais sujeitos a terremotos ou edificações sujeitas a vibrações devidas às ações humanas, entre outras.

Os procedimentos desenvolvidos para a solução de análises na área de dinâmica das estruturas têm sido aprimorados ao longo do tempo, se concentrando principalmente no campo dos métodos numéricos, motivados pelo avanço do uso de computadores com grande capacidade de processamento. Dentre os principais aprimoramentos proporcionados a tais métodos estão a redução do esforço computacional envolvido e o aumento de precisão da resposta obtida, refletindo em menor tempo necessário para a realização de uma análise satisfatória. Visto que tais métodos numéricos permitem o estudo de um fenômeno temporal a partir de uma discretização da solução em intervalos ou incrementos de tempo ( $\Delta t$ ) e que a magnitude deste intervalo tem forte impacto sobre o tempo de processamento e a precisão da resposta, uma das formas de atingir os aprimoramentos citados é promover um controle desse incremento de tempo na execução da análise. Faz parte dos objetivos desse trabalho estudar técnicas que promovam esse controle do intervalo de tempo, além de também estudar e revisar os procedimentos usados para encontrar a resposta de sistemas dinâmicos, entre outros.

### 1.1 VISÃO GERAL SOBRE ANÁLISE DINÂMICA DAS ESTRUTURAS

Em resumo, existem duas abordagens gerais que podem ser usadas na determinação da resposta dinâmica de estruturas. A primeira envolve a avaliação da

contribuição independente de várias respostas que são combinadas para obter a resposta total, usando o conceito de superposição de efeitos. Vários são os métodos descritos na literatura que fazem uso dessa abordagem. Clough e Penzien (1995) descrevem alguns desses métodos, considerando vários tipos de carregamentos específicos e também de carregamentos quaisquer, como o método da Integral de Duhamel (que trabalha com as equações no domínio do tempo) e o método da Transformada de Fourier (procedimento realizado no domínio da frequência). Em geral, tais métodos fazem uso de equações algébricas, que podem ser implementadas numericamente, mas que também permitem encontrar as expressões analíticas das respostas dinâmicas. Por causa do uso da superposição de efeitos na obtenção do resultado final, tais métodos não podem ser usados em estruturas de comportamento não linear, ficando limitados somente à análise de sistemas lineares.

A segunda abordagem geral da solução de problemas dinâmicos de estruturas é o uso de procedimentos numéricos iterativos do tipo “passo-a-passo”, que podem ser aplicados em sistemas de comportamento não linear, já que não fazem o uso de superposição de efeitos. Existem vários métodos numéricos desse tipo, mas a ideia central presente em todos eles é dividir o carregamento e o histórico de resposta da estrutura em uma sequência de intervalos de tempo de comprimento definido ( $\Delta t$ ), sendo calculada a resposta em cada intervalo de forma iterativa a partir das condições iniciais (deslocamento e velocidade) existentes no início daquele intervalo, e a partir da variação do carregamento atuante durante o mesmo. Com isso, a solução para cada iteração se torna uma análise independente, não havendo necessidade de combinar diferentes contribuições de outras soluções através de superposição. Se necessário, o comportamento não linear pode então ser considerado simplesmente assumindo que as propriedades da estrutura permanecem constantes durante os incrementos de tempo. Esses métodos fazem uso de equações de iteração que permitem encontrar a solução numérica da resposta, não fornecendo soluções analíticas como nos métodos de superposição aplicáveis apenas a sistemas lineares.

Os métodos numéricos do tipo “passo-a-passo” podem ser aplicados a análises lineares e proporcionam a única abordagem geral a ser aplicada a análises não

lineares, acabando por serem os mais utilizados em situações práticas para respostas dinâmicas no domínio do tempo. Tais métodos também tem a vantagem de permitirem considerar tipos mais gerais de carregamento dinâmico (descritos por valores pontuais em vez de simples funções). O presente trabalho se baseia exclusivamente na implementação e aperfeiçoamento desses métodos numéricos, não sendo considerados os métodos analíticos anteriormente citados.

O tratamento de problemas dinâmicos ainda é normalmente abordado na literatura dividido em duas grandes partes: a primeira dedicada somente ao estudo de sistemas de um grau de liberdade, referenciados por 1GL ou, de forma mais comum, por SDOF (do inglês *single degree of freedom*) e a segunda parte tratando de sistemas de múltiplos graus de liberdade, referenciados por MGL ou MDOF (do inglês *multi degree of freedom*). O motivo de se estudar sistemas de um grau de liberdade detalhadamente antes de abordar estruturas mais complexas ocorre por duas razões principais: (1) o comportamento dinâmico de muitas estruturas na prática pode ser expresso em termos de uma única coordenada, sendo o tratamento de sistemas SDOF diretamente aplicável nesses casos e, (2) as soluções para sistemas SDOF podem ser facilmente estendidas a sistemas MDOF simplesmente substituindo as grandezas escalares por matrizes.

## 1.2 MOTIVAÇÃO E OBJETIVOS

Frente ao que foi exposto, o presente trabalho tem como um dos objetivos centrais revisar e estudar os procedimentos utilizados para formulação matemática e a solução numérica, com métodos passo-a-passo, da análise dinâmica de sistemas estruturais, visando, dessa forma, à aplicação desses métodos em sistemas com um ou múltiplos graus de liberdade. Objetiva-se, especificamente, criar um programa simples que aplique os métodos de solução citados em problemas de pórticos planos sob cargas dinâmicas, com uma saída gráfica que permita a visualização de resultados práticos de forma didática.

Como já descrito também, os métodos passo-a-passo permitem o estudo do fenômeno dinâmico a partir de uma discretização da solução em intervalos de tempo

definidos ( $\Delta t$ ), onde a magnitude deste intervalo (que deve também atender a critérios de convergência) tem forte impacto sobre o tempo de processamento e está relacionado com a precisão da resposta a ser obtida. Uma das práticas correntes, quando da solução de problemas dinâmicos por esses métodos, é a utilização de intervalos de tempo com valor constante ao longo de toda análise. Entretanto, outra prática possível, chamada *adaptatividade*, permite o controle destes intervalos de tempo automaticamente ao longo da simulação, de forma a aperfeiçoar a relação existente entre qualidade de resposta e o tempo demandado.

Com isso, este trabalho tem como objetivo principal, ainda, estabelecer diretrizes sobre a implementação de rotinas computacionais que permitam essa adaptação automática do passo de integração ( $\Delta t$ ) e promovam um controle desse incremento de tempo no decorrer da execução da análise, aprimorando a eficiência dos algoritmos no que diz respeito à precisão e processamento. Objetiva-se implementar algumas estratégias de adaptatividade já disponíveis na literatura ao programa de pôrticos planos que será desenvolvido, com algumas poucas modificações, e comparar os resultados fornecidos pelas mesmas.

### **1.3 ESTADO DA ARTE**

A pesquisa dessa dissertação se baseou em conhecimentos existentes acerca de dois tópicos principais: os métodos de integração passo-a-passo, aplicados a dinâmica das estruturas; e a adaptatividade do incremento de tempo utilizada sobre esses métodos.

#### **1.3.1 Métodos passo-a-passo**

A abordagem dos métodos numéricos de integração passo-a-passo se desenvolveu ao longo do tempo em diferentes aplicações e com suas mais variadas características discutidas e analisadas profundamente em muitas obras, de forma que já existe um vasto e abrangente acervo na literatura científica incluindo o desenvolvimento matemático desses métodos, sua precisão, estabilidade,

convergência e implementação. Alguns textos sobre dinâmica das estruturas foram selecionados como referência, a exemplo dos livros de Chopra (1995), Clough e Penzien (1995), Rao (1990), Humar (2002), entre outros. Livros que tratam sobre o método dos elementos finitos, como os de Bathe (1996), Hughes (1987) e Cook *et al.* (1989), também trazem informações sobre métodos de integração numérica, aplicados principalmente a sistemas MDOF. Sechim (2001) fez uma abordagem das principais técnicas numéricas de análise dinâmica no domínio do tempo para estruturas de um e de múltiplos graus de liberdade, comparando-as entre si. Rodrigues (1984) desenvolveu um programa para análise dinâmica de estruturas reticuladas usando o elemento finito de barra quadrático, aplicando ambas as abordagens da superposição modal e da integração direta, com dois processos numéricos particulares. Diversos outros trabalhos referenciados trazem muitas informações acertas desses métodos.

Os textos de inovação científica sobre o tema são dos mais variados, e apenas alguns são discutidos nessa dissertação. Destacam-se, em especial, o trabalho de Newmark (1959), que originou uma família de métodos dependentes de dois parâmetros livres, e suas generalizações, desenvolvidas por Hilber, Hughes e Taylor (1977) e Wood, Bossak e Zienkiewicz (1980) (cujos métodos ficaram conhecidos como HHT- $\alpha$  e WBZ- $\alpha$ , respectivamente) e mais tarde por Chung e Hulbert (1993), que criaram o Método Generalizado- $\alpha$ . Uma atenção especial foi dada ao método original de Newmark, por ser o de mais fácil assimilação e implementação.

### **1.3.2 Adaptatividade**

A estratégia de adaptação automática do incremento de tempo vem sendo utilizada já há algum tempo como ferramenta de otimização de desempenho em análises numéricas de problemas dinâmicos, sendo que alguns métodos de controle do passo de tempo são largamente discutidos na literatura.

Em 1979, Hibbit e Karlsson (apud OUGHOURLIAN e POWELL, 1982; BERGAN e MOLLESTAD, 1985; HULBERT e JANG, 1995; SILVEIRA, 2001; CINTRA, 2008) propuseram um algoritmo para aplicações não lineares, baseado no cálculo do

balanço de forças desequilibradas (cálculo do resíduo) da equação de equilíbrio, tomada no ponto médio do passo de tempo, usando as soluções encontradas no início e no final do intervalo. Se o resíduo excedesse um valor especificado, o incremento de tempo seria reduzido à metade do seu tamanho atual e a análise retornaria ao instante inicial do último passo, descartando a resposta inicialmente obtida naquele intervalo. Por outro lado, se a força residual se tornasse menor do que outro valor especificado por dois passos consecutivos, então o tamanho do incremento de tempo aumentava. Segundo os trabalhos consultados, esta abordagem funciona bem na prática e em problemas não lineares, entretanto gera um alto custo computacional devido ao cálculo do resíduo de forças.

Oughourlian e Powell (1982) notaram que o algoritmo de Hibbitt e Karlsson fazia o uso de iterações na obtenção da convergência em cada intervalo e propuseram um método mais simples para o cálculo do resíduo no meio do passo, em problemas lineares, a partir de um produto envolvendo a matriz de rigidez e o vetor de velocidade incremental (cuja expressão foi dada apenas no processo de integração da aceleração constante). Os autores também sugeriram uma técnica similar em problemas não lineares, nos quais a força residual era estimada usando a matriz de rigidez tangente. Apesar de algumas observações terem sido feitas sobre o algoritmo original de Hibbitt e Karlsson, estas não foram muito significantes quando comparadas com o custo computacional total do método (apud BERGAN e MOLLESTAD, 1985, p. 300; HULBERT e JANG, 1995, p. 156).

A despeito do que afirmam Silveira (2001) e Cintra (2008), as estratégias de adaptação desenvolvidas até o momento não sugeriam apenas o refinamento (diminuição) do incremento de tempo (geralmente por um fator de 0,5) como também permitiam o aumento desse intervalo (geralmente por um fator de 2,0) caso o erro calculado fosse menor do que uma dada tolerância por dois passos consecutivos.

Felippa e Park (1979) e Park e Underwood (1980) discutiram uma estratégia de seleção do tamanho do intervalo de tempo aplicada ao clássico Método das Diferenças Centrais, baseada na “máxima frequência aparente perturbada”, que era calculada a partir da razão entre a aceleração e o deslocamento incrementais para todos os graus de liberdade, tomando o maior valor entre elas. Tais autores

expuseram ainda quatro técnicas que modificam as equações originais do método das diferenças centrais para adaptá-lo às mudanças no tamanho do passo de tempo, sendo feitas considerações a respeito da melhor técnica a ser usada em função do amortecimento presente no problema. Uma análise da estabilidade dessas técnicas foi feita no segundo trabalho citado, onde se mostrou, ainda, que as estratégias até então convencionais para seleção do máximo incremento de tempo eram imprecisas e/ou muito custosas quando é requerida baixa precisão, e que o método da “frequência aparente” proposto se mostrou estável e mais adequado nesses casos. Na segunda parte de seu artigo, Underwood e Park (1980) esquematizam o algoritmo de mudança automática no incremento de tempo, mostrando sua implementação e aplicando-o a vários exemplos.

Seguindo o conceito de frequência aparente, Bergan e Mollestad (1985) propuseram um esquema de adaptação automática do incremento de tempo baseado na “frequência aparente atual”, que é estimada usando uma expressão semelhante ao quociente de Rayleigh. O esquema ajustava o passo de tempo de forma a capturar a resposta da estrutura para modos de vibração abaixo da frequência dominante estimada. A estratégia foi aplicada ao método de integração geral de Newmark (1959), com o modelo de amortecimento proporcional. No intuito de evitar alterações constantes do incremento de tempo, os autores introduziram o uso de uma “função de controle”. Estratégias que tentam evitar excessivas alterações no tamanho do incremento já haviam sido observadas também por Underwood e Park (1980).

Zienkiewicz *et al.* (1984) propuseram uma abordagem diferente para a seleção do passo de tempo baseada numa expressão simplificada como indicador de erro local, obtida com um baixo custo computacional. Observando que esse indicador de erro não tinha grande precisão (sempre o superestimava), e que o método baseado na “frequência aparente atual” de Bergan e Mollestad não era adequado para problemas onde essa frequência é quase nula, Zienkiewicz e Xie (1991) elaboraram outro algoritmo com um indicador de erro local mais preciso aplicado ao processo de integração de Newmark. Zeng *et al.* (1992) apresentaram uma expressão de erro idêntica, com uma dedução ligeiramente mais simples e intuitiva. Li *et al.* (1993) desenvolveram um novo estimador, resultado da diferença entre a solução obtida por um método de integração comum (novamente o método de Newmark) e uma

solução aproximada de maior ordem, que assume que a derivada da aceleração varia linearmente dentro do passo de tempo. Os três métodos de adaptatividade citados computavam o erro local e o comparavam com um dado intervalo de tolerância, reduzindo, mantendo ou aumentando o passo de tempo conforme o erro se posicionava dentro ou fora desse intervalo.

Baseados na mesma abordagem de estimativas do erro local, Hulbert e Jang (1995) propuseram um algoritmo do controle do passo de tempo aplicado ao processo de integração do Método Generalizado- $\alpha$ , desenvolvido pouco tempo antes por Chung e Hulbert (1993). Silveira (2001) aplicou essa estratégia adaptativa em seu trabalho sobre análise dinâmica de linhas de ancoragem, porém modificada para se adequar ao Método Generalizado- $\alpha$  Explícito, criado por Hulbert e Chung (1996) tomando como base o método de seu trabalho anterior, para o qual desenvolveram um "preditor-corretor explícito" (PCE). Mais tarde, Chung *et al.* (2003) desenvolveram um estimador de erro diferenciado do tipo *a priori*, isto é, que não exigia o conhecimento da resposta local para estimar o erro, o qual foi aplicado também ao Método Generalizado- $\alpha$  na definição da estratégia de adaptação no tempo.

O Método Generalizado- $\alpha$  Explícito com a estratégia de adaptatividade proposta por Hulbert e Jang foi apresentado ainda do trabalho de Cintra e Silveira (2007), que incorporaram o procedimento a um sistema computacional responsável pela análise dinâmica de linhas de ancoragem e *risers*, desenvolvido por Ferreira (2005).

Zhang e Whiten (2001) também desenvolveram uma estratégia adaptativa baseada no cálculo do erro local, com uma tolerância criada a partir das informações incrementais de deslocamento e velocidade. Porém, o trabalho não deixou claro como o método é aplicado em sistemas estruturais de múltiplos graus de liberdade (visto que o mesmo foi desenvolvido para simulações com partículas discretas), além do que a metodologia proposta obtém o erro local comparando as soluções encontradas usando dois tamanhos diferentes do passo de tempo (um passo completo, de tamanho pré-determinado, e dois meio-passos), calculando a resposta duas vezes para definir o erro, o que Zienkiewicz e Xie (1991) e Zeng *et al.* (1992) já haviam alegado ser um procedimento de alto custo, e que Gear (1971, p. 81) afirma ser uma técnica usualmente restrita aos métodos de integração de Runge-Kutta, já

que existem técnicas melhores para os outros métodos. Por estas razões, o estudo desta estratégia não foi feito de forma aprofundada nesta pesquisa.

Recentemente, Cintra (2008) introduziu uma estratégia de adaptação que utiliza um estimador de refinamento baseado no indicador geométrico de curvatura do histórico de deslocamentos. O estimador formulado demanda pouco esforço computacional, sendo facilmente aplicado aos diversos métodos de integração direta existentes. Outros trabalhos recentes também foram feitos por Söderlind (2002), que revisou avanços no desenvolvimento de algoritmos de adaptatividade local, e por Noels *et al.* (2002), que propuseram estratégias de adaptação automática no tempo também baseadas em estimadores de erro de integração, aplicadas a métodos implícitos de análises dinâmicas não lineares.

Este trabalho se propõe a explorar com maiores detalhes três estratégias de adaptatividade específicas. São discutidas as propostas de Bergan e Mollestad (1985), Hulbert e Jang (1995), e Cintra (2008), as quais abordam conceitos distintos das outras (“frequência aparente”, “erro local” e “indicador de curvatura”, respectivamente).

## 1.4 DESCRIÇÃO SUMÁRIA

A dissertação está organizada de maneira a tornar possível ao leitor uma visão geral acerca da formulação matemática usada na análise dinâmica de estruturas de sistemas SDOF e MDOF no que diz respeito aos métodos numéricos iterativos. Uma vez atingido esse objetivo, são apresentados os procedimentos de adaptação no tempo, no contexto de integração numérica aplicável à dinâmica estrutural. Por fim, exemplos de aplicação são apresentados e discutidos, comparando os resultados dos algoritmos com e sem adaptatividade.

O Capítulo 2 apresenta a formulação matemática para a análise dinâmica de sistemas com um grau de liberdade (SDOF). Mostra-se o modelo massa-mola-amortecedor que se usa na representação do sistema e a formulação da equação de movimento envolvida. São apresentados alguns métodos de integração usados para

encontrar a solução numérica das equações, especificamente aqueles pertencentes à família de métodos de integração de Newmark (1959), e são discutidos os conceitos de formulação incremental (que permite o uso dos métodos em análises não lineares) e a conversão dos algoritmos da forma implícita para a forma explícita.

O Capítulo 3 apresenta a formulação matemática para a análise dinâmica de sistemas com múltiplos graus de liberdade (MDOF). Após a dedução da equação de movimento a ser trabalhada, é feita a discussão sobre a formação das matrizes estruturais envolvidas. As matrizes de massa e de rigidez são obtidas com o uso de conceitos do método dos elementos finitos, como o de funções de interpolação. Já a matriz de amortecimento é obtida com o modelo do amortecimento proporcional de Rayleigh, para o qual é apresentada a possibilidade de desacoplamento das equações de movimento pela decomposição modal, onde os modos naturais de vibração são obtidos no estudo das vibrações livres não amortecidas, através do problema de autovetores. Por fim, os métodos de integração das equações de sistemas SDOF são estendidos aos sistemas MDOF, tornando possível a solução desses últimos por simples iterações passo-a-passo.

O Capítulo 4 apresenta a metodologia para o desenvolvimento do programa de análise dinâmica estrutural em pórticos sob cargas variáveis. É feita a formulação das funções de interpolação do elemento de pórtico plano e a aplicação do mesmo ao problema discutido.

O Capítulo 5 é dedicado aos métodos de adaptatividade do incremento de tempo em dinâmica estrutural. São feitas considerações gerais sobre os aspectos mais importantes das estratégias adaptativas e, posteriormente, são discutidas três estratégias de adaptação temporal encontradas na literatura, nomeadamente as propostas de Bergan e Mollestad (1985), Hulbert e Jang (1995), e de Cintra (2008), baseadas nos conceitos de “frequência aparente atual”, “estimador de erro local” e “indicador de curvatura”, respectivamente.

No Capítulo 6 são apresentados vários exemplos numéricos que fazem utilização da formulação desenvolvida. São resolvidos sistemas de um grau de liberdade, com e sem amortecimento (do tipo viscoso), e sistemas de múltiplos graus de liberdade

com amortecimento proporcional. Nos casos de múltiplos graus de liberdade são considerados sistemas simples de massas discretas interconectadas apenas lateralmente deslocáveis (edifícios do tipo “*shear building*”) e também sistemas mais complexos, constituídos de barras de pórticos planos. As análises são realizadas fazendo uso de incrementos de tempo constantes e também de passos variáveis, através da aplicação das estratégias adaptativas estudadas. No caso dos pórticos planos, as respostas são comparadas ainda com os resultados obtidos através do software computacional Ansys 11.0 (ANSYS, INC., 2007), que trabalha com o método dos elementos finitos.

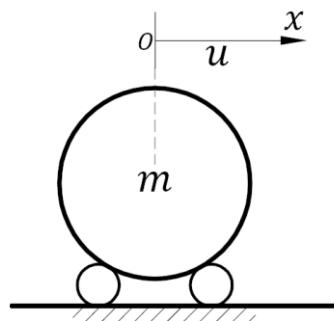
No Capítulo 7 são mostradas as conclusões finais e as sugestões para trabalhos futuros.

No Apêndice desta dissertação estão anexados os códigos das rotinas computacionais desenvolvidas, escritas na linguagem de programação do software de cálculo numérico Matlab.

## 2 ANÁLISE DE SISTEMAS DE UM GRAU DE LIBERDADE

O sistema estrutural de um nó (e um grau de liberdade associado a esse nó) pode ser representado por uma partícula de massa  $m$  concentrada no nó, à qual é permitido sofrer apenas um deslocamento horizontal  $u$  sobre um dado eixo  $x$ . Arbitrando a direção positiva do eixo  $x$  como sendo à direita, a partir de uma dada origem no ponto  $O$ , o sistema estrutural pode ser externamente representado como visto na Figura 2.1 seguinte:

Figura 2.1 – Sistema de um grau de liberdade



Para determinar o comportamento desse sistema, deve-se escrever a equação de movimento associada ao mesmo, usando o “princípio fundamental da dinâmica” descrito pela segunda Lei de Newton, como visto a seguir.

### 2.1 EQUAÇÃO DE MOVIMENTO

O princípio fundamental da dinâmica permite relacionar a força resultante  $F_R$  atuante sobre a partícula com a sua aceleração  $\ddot{u}$  numa forma de proporcionalidade direta, onde a constante de proporcionalidade é a massa da partícula, como visto na equação (2.1):

$$F_R = m \ddot{u} \quad (2.1)$$

A força resultante  $F_R$  pode sofrer a contribuição de diversos fatores internos e externos, dependendo das condições do sistema estudado. As figuras seguintes mostram o conjunto de forças que podem agir sobre a partícula em questão.

Figura 2.2 – Componentes do sistema

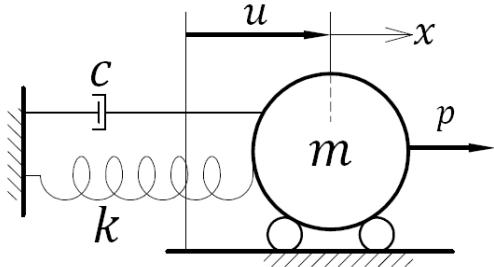
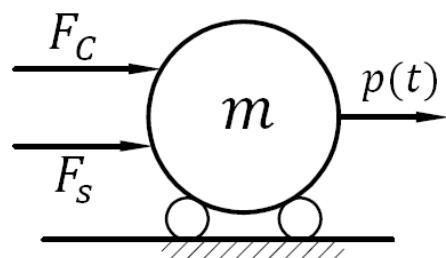


Figura 2.3 – Ação das forças



As forças atuantes são o carregamento externo aplicado  $p(t)$ , a força de amortecimento  $F_c$  e a força elástica  $F_s$ , esta última representada por uma mola de constante de rigidez  $k$ . Assim a equação de movimento é dada por:

$$p(t) + F_c + F_s = m \ddot{u} \quad (2.2)$$

Assumindo um amortecimento viscoso, a força  $F_c$  é dada pelo produto da constante de amortecimento  $c$  e a velocidade  $\dot{u}$ , agindo sempre na direção oposta ao movimento:

$$F_c = -c \dot{u} \quad (2.3)$$

Já a força elástica é dada pelo produto da rigidez elástica  $k$  e o deslocamento  $u$ , com sinal inverso ao sinal do deslocamento:

$$F_s = -k u \quad (2.4)$$

Quando as equações (2.3) e (2.4) são combinadas com a equação (2.2) a equação de movimento do sistema SDOF é finalmente dada por:

$$m \ddot{u} + c \dot{u} + k u = p(t) \quad (2.5)$$

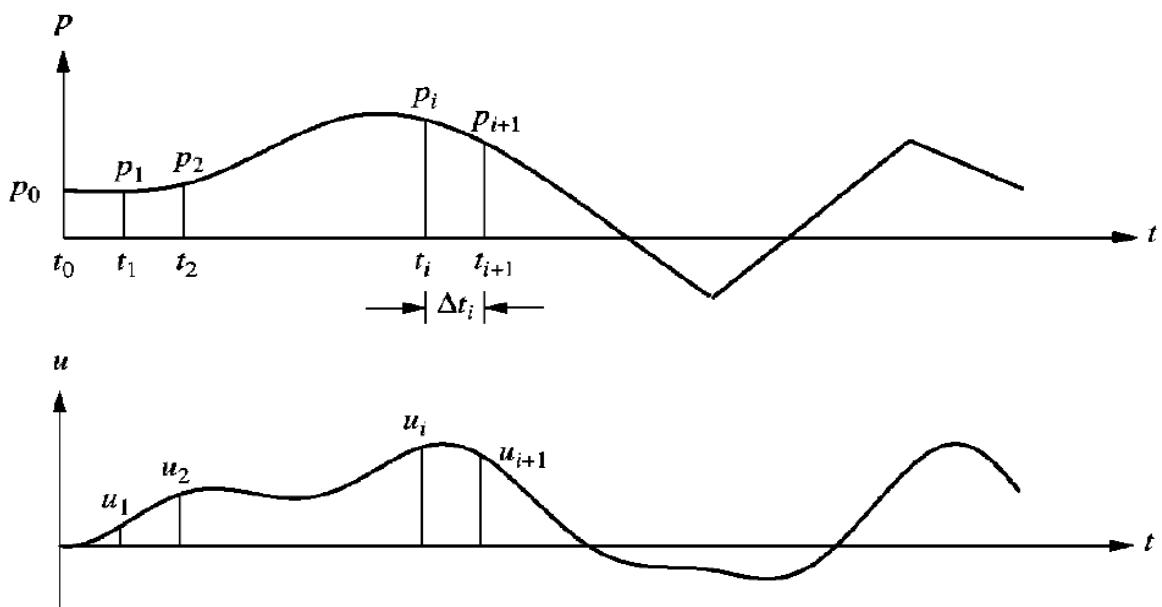
Para resolver essa equação deve ser aplicado algum método de integração conhecido. Neste trabalho serão abordados os procedimentos numéricos de integração direta no tempo do tipo passo-a-passo, descritos nas seções a seguir. Antes, porém, é importante fazer algumas observações a respeito de aspectos gerais acerca desses métodos.

## 2.2 ASPECTOS GERAIS SOBRE OS MÉTODOS DE INTEGRAÇÃO

Como dito no capítulo anterior, os métodos numéricos do tipo passo-a-passo permitem a obtenção do histórico de resposta para a equação de movimento sem o uso da superposição de efeitos. Para tanto, a variável tempo  $t$  é discretizada e o equilíbrio é alcançado por um processo de integração sequencial. Dessa forma os deslocamentos da estrutura são computados em instantes de tempo separados por incrementos de tempo de integração. A equação de movimento assume, dessa maneira, a forma discreta seguinte, em um dado instante de tempo  $t_i$ :

$$m \ddot{u}_i + c \dot{u}_i + k u_i = p_i \quad (2.6)$$

Figura 2.4 – Notação para os métodos passo-a-passo



Fonte: Chopra (1995, p. 156)

A Figura 2.4 mostra como é feita a discretização para a carga e o deslocamento. É importante citar que esse tipo de abordagem permite encontrar soluções que satisfazem aproximadamente as equações de movimento durante cada passo, visto que o carregamento também é aproximado em valores discretos, e que os métodos de solução utilizados usam mecanismos aproximados de diferenciação ou de integração numérica. Com isso, ressalta-se que, na equação (2.6),  $u_i$ ,  $\dot{u}_i$  e  $\ddot{u}_i$  serão aproximações das soluções exatas  $u(t_i)$ ,  $\dot{u}(t_i)$  e  $\ddot{u}(t_i)$ , respectivamente.

### 2.2.1 Aspectos computacionais

Para melhor detalhar os procedimentos particulares de solução da última equação (2.6), é importante citar alguns fatos básicos acerca de aproximações numéricas dos métodos do tipo passo-a-passo em geral:

1. Os métodos são classificados como explícitos ou implícitos, dependendo da forma como a resposta ao longo do passo é obtida. Segundo Clough e Penzien (1995, p. 116), um método explícito é definido como aquele em que os novos valores da resposta calculados em cada passo dependem somente de quantidades obtidas nos passos anteriores, assim a análise é feita diretamente de um dado passo para o passo seguinte. Os algoritmos explícitos encontram a resposta no passo  $i$  usando uma expressão na forma geral:

$$u_i = f(u_{i-1}, \dot{u}_{i-1}, \ddot{u}_{i-1}, u_{i-2}, \dot{u}_{i-2}, \dots) \quad (2.7)$$

Já num método implícito, as expressões que fornecem os novos valores para um dado passo incluem um ou mais valores pertencentes àquele passo, assim são necessárias tentativas iniciais para os valores das grandezas desconhecidas calculadas, que devem ser refinados por iterações sucessivas dentro de um mesmo incremento. Com isso, a expressão geral usada em algoritmos implícitos para encontrar a resposta num passo  $i$  usa informações do próprio passo  $i$  e é dada na forma geral seguinte.

$$u_i = f(\dot{u}_i, \ddot{u}_i, u_{i-1}, \dot{u}_{i-1}, \dots) \quad (2.8)$$

A menos que os cálculos realizados em cada passo sejam muito simples, o custo computacional de se realizar várias iterações dentro de um mesmo incremento de tempo pode ser muito alto. Portanto, em geral, é desejável converter um método implícito para uma forma explícita sempre que possível (CLOUGH e PENZIEN, 1995, p. 117).

Existem, entretanto, outras definições usadas na literatura para classificar um método como implícito ou explícito, e que serão mais bem elucidadas na seção seguinte.

2. O principal fator que é considerado na seleção de um método passo-a-passo é a eficiência, que se trata do esforço computacional requerido para atingir um desejável nível de acurácia. Segundo Clough e Penzien (1995, p. 117),

Acurácia somente não deve ser um critério de seleção do método porque, em geral, qualquer grau de acurácia desejado pode ser obtido por qualquer método se o incremento de tempo for tomado pequeno o suficiente (mas com um óbvio correspondente aumento de custo) (tradução nossa).

3. Outros fatores que devem ser observados na escolha do método numérico são a estabilidade e a economia. Segundo Cintra (2008, p. 12),

Na prática estes dois fatores constituem as principais diferenças entre os algoritmos explícitos e implícitos. A estabilidade pode ser entendida como sendo a capacidade de um algoritmo não amplificar erros provenientes de truncamentos numéricos ou de integrações imprecisas de modos de frequência alta. O termo economia aqui apresentado está relacionado com os custos das operações realizadas na avaliação de um passo de integração.

Uma maneira de aumentar a estabilidade de qualquer método de integração temporal é reduzir o comprimento do incremento de tempo  $\Delta t$ . Entretanto, se essa redução for muito grande, a análise pode se tornar antieconômica, devido ao número excessivo de passos de tempo que será necessário para completá-la.

4. Certos erros resultantes de algum aspecto específico podem se manifestar em certos efeitos, como o amortecimento artificial, por exemplo, no qual o procedimento numérico remove ou adiciona energia ao sistema durante a obtenção da resposta.

Os tópicos aqui mencionados, assim como outros, serão aprofundados ao longo desse texto à medida que for necessário. Alguns pontos adicionais serão incluídos nas descrições dos métodos mais relevantes selecionados.

## 2.2.2 Definições adotadas e a questão da estabilidade

A definição usada para classificar um método numérico passo-a-passo como sendo implícito ou explícito, citada no tópico 1 da seção anterior, é a adotada por Clough e Penzien em sua obra, que aborda, detalhadamente, diversos aspectos sobre dinâmica das estruturas. Outros autores, como Cintra (2008), Noels *et al.* (2002), Silveira (2001) e Cook *et al.* (1989) adotam a mesma definição em seus trabalhos, a qual permite, como será visto na seção 2.7, que um método originalmente concebido como implícito possa ter suas equações convenientemente transformadas numa forma explícita, evitando a necessidade de realizar iterações dentro de um mesmo passo de tempo.

Entretanto, existe outra definição, presente na literatura, usada para classificar um método como implícito ou explícito. Bathe (1996, p. 770), Rao (1990, p. 526), Chopra (1995, p. 162), Shrikhande (2008, p. 151) e Humar (2002, p. 419), por exemplo, classificam um método de integração como explícito quando a resposta do sistema para um dado passo  $i$  é encontrada escrevendo-se a equação de equilíbrio (2.6) para o passo  $i - 1$ . Já um método implícito é definido, segundo os mesmos autores, como aquele onde a resposta para um passo  $i$  é encontrada baseando-se na equação de equilíbrio escrita para o próprio passo  $i$ . Portanto, segundo essa última definição, ver-se-á nas próximas seções que o Método das Diferenças Centrais, por exemplo, é explícito, independente de como são exibidas suas equações (necessitando de iterações ou não). Já o método de Newmark seria classificado somente como implícito, mesmo que suas equações sejam mostradas numa forma que não exija uso de iterações.

Levando em conta também os sistemas estruturais MDOF, Hughes (1987, p. 461) chega a definir, ainda, que um método é chamado de explícito quando a solução avança de um passo para o próximo sem exigir iterações e, adicionalmente, sem a necessidade de que um sistema de equações lineares simultâneas seja resolvido, o que facilita muito a execução do método, mas exige que a *matriz de rigidez efetiva*, definida na seção 3.5, seja diagonal, permitindo a obtenção direta da resposta. No caso do Método das Diferenças Centrais, essa condição só é estritamente satisfeita quando se usa o modelo de *matriz de massa concentrada* (ver seção 3.3) e quando

a matriz de amortecimento também é diagonal (seção 3.5.2). Mesmo com essas restrições, o autor permite classificar esse método como explícito (HUGHES, 1987, p. 493), ainda que tais matrizes não sejam diagonais. Cook *et al.* (1989, p. 397), Shrikhande (2008, p. 152) e Chopra (1995, p. 568) também alertam para o fato de que as matrizes de massa e de amortecimento devem ser diagonais para que esse método extraia na totalidade os benefícios de um método explícito. Para o Método de Newmark essa situação não ocorre, pois a *matriz de rigidez tangente* da estrutura, que em geral não é diagonal, entra na composição da matriz de rigidez efetiva (seção 3.5.1), o que não acontece no caso do Método das Diferenças Centrais.

Outra questão relacionada com a classificação dos métodos é a situação da estabilidade. Um método é classificado como *incondicionalmente estável* quando os erros de integração não são amplificados de um passo de tempo para o próximo, não importando o quanto grande o intervalo de tempo  $\Delta t$  é escolhido. Já um método é *condicionalmente estável* quando tem sua estabilidade condicionada ao uso de um incremento de tempo de integração crítico ( $\Delta t_{crit}$ ) acima do qual o método se torna instável. Diversos autores pesquisados, como Cintra (2008), Silveira (2001), Noels *et al.* (2002), Bergan e Mollestad (1985) e Zienkiewicz e Xie (1991), afirmam, de forma generalizada, que os métodos explícitos são condicionalmente estáveis e que métodos implícitos são incondicionalmente estáveis. No entanto, ao usar qualquer uma das duas definições citadas anteriormente para classificar um método como implícito ou explícito percebe-se (como será visto) que a estabilidade do processo não depende desta classificação e sim de parâmetros internos ao método. O clássico método de Newmark (seção 2.5), por exemplo, tem sua estabilidade condicional determinada por parâmetros de controle previamente escolhidos, e não pelo fato de ser classificado como implícito ou explícito.

Neste texto, será adotada a definição apresentada por Clough e Penzien ao classificar os métodos numéricos, ou seja, será considerada a expressão final utilizada na obtenção da resposta do sistema em um dado incremento de tempo, que pode ser modificada de forma a precisar ou não de iterações na realização da análise (isto é, pode ser modificada de forma a se tornar implícita ou explícita).

## 2.3 MÉTODO DAS DIFERENÇAS CENTRAIS

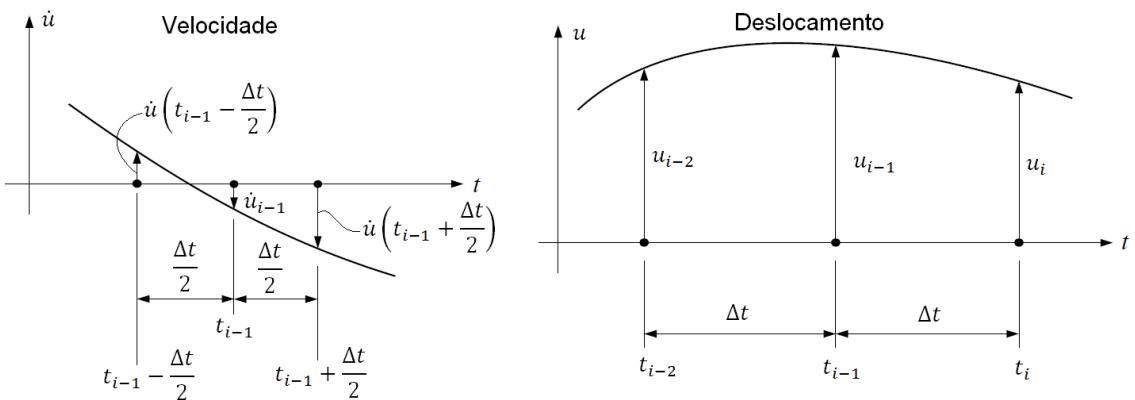
Este método é baseado numa aproximação em diferenças finitas para as derivadas temporais do deslocamento  $u$  (isto é, para a velocidade  $\dot{u}$  e aceleração  $\ddot{u}$ ). O método não faz exatamente uma integração numérica ao longo do passo, mas sim uma diferenciação numérica aproximada. As fórmulas são deduzidas considerando um incremento de tempo  $\Delta t$  constante. Para expressar a aceleração, a velocidade é aproximada no meio dos passos de tempo, antes e depois do instante  $t_{i-1}$ :

$$\dot{u}(t_{i-1} - \frac{\Delta t}{2}) = \frac{u_{i-1} - u_{i-2}}{\Delta t} \quad \dot{u}(t_{i-1} + \frac{\Delta t}{2}) = \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta t} \quad (2.9)$$

onde os valores de velocidades e deslocamentos são ilustrados na Figura 2.5. Com isso a aceleração no ponto central entre esses dois instantes ( $t_{i-1}$ ) é dada por uma expressão equivalente, usando as duas velocidades.

$$\ddot{u}_{i-1} = \frac{\dot{u}\left(t_{i-1} + \frac{\Delta t}{2}\right) - \dot{u}\left(t_{i-1} - \frac{\Delta t}{2}\right)}{\Delta t} = \frac{u_i - 2u_{i-1} + u_{i-2}}{\Delta t^2} \quad (2.10)$$

Figura 2.5 – Notações para o método das diferenças centrais



Fonte: Adaptado de Clough e Penzien (1995, p. 118)

De forma semelhante, a velocidade no instante  $t_{i-1}$  é aproximada por uma expressão em diferenças finitas considerando o intervalo de comprimento  $2\Delta t$  entre os instantes  $t_{i-2}$  e  $t_i$ .

$$\dot{u}_{i-1} = \frac{u_i - u_{i-2}}{2\Delta t} \quad (2.11)$$

As expressões (2.10) e (2.11) são as hipóteses básicas do método e podem ser trabalhadas de forma a expressar a velocidade e deslocamento finais em termos de outras grandezas.

Resolvendo a equação (2.10) para  $u_i$ , somando  $u_i$  aos dois lados da expressão resultante e dividindo-a por 2, obtém-se:

$$u_i = u_{i-1} + \frac{u_i - u_{i-2}}{2} + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{u}_{i-1} \quad (2.12)$$

Usando a equação (2.11) na (2.12), chega-se a:

$$u_i = u_{i-1} + \Delta t \dot{u}_{i-1} + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{u}_{i-1} \quad (2.13)$$

Escrevendo agora a equação (2.13) para  $i = i + 1$  (isto é, para o deslocamento no instante  $t_{i+1}$ ), subtraindo-a posteriormente da própria equação (2.13), e resolvendo a expressão resultante para  $\dot{u}_i$ , fica-se com:

$$\dot{u}_i = \dot{u}_{i-1} + \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta t} + \frac{\Delta t}{2} (\ddot{u}_{i-1} - \ddot{u}_i) \quad (2.14)$$

Usando a equação (2.10), tomada também para  $i = i + 1$ , na equação (2.14), obtém-se, finalmente:

$$\dot{u}_i = \dot{u}_{i-1} + \frac{\Delta t}{2} (\ddot{u}_{i-1} + \ddot{u}_i) \quad (2.15)$$

As expressões (2.13) e (2.15) são as equações de integração fundamentais para o método das diferenças centrais. Percebe-se que a equação que expressa o deslocamento  $u_i$  é explícita, de acordo com a definição adotada neste texto (seção 2.2.1), enquanto que a equação que expressa a velocidade é implícita, já que usa uma informação pertencente ao próprio passo corrente, que é a aceleração no final do incremento de tempo,  $\ddot{u}_i$ .

A aceleração inicial  $\ddot{u}_{i-1}$  também é necessária para a realização da análise e pode ser obtida a partir da equação de equilíbrio dinâmico dada na expressão (2.6), escrita no tempo  $t = t_{i-1}$ , isto é:

$$\ddot{u}_{i-1} = \frac{1}{m}(p_{i-1} - c \dot{u}_{i-1} - k u_{i-1}) \quad (2.16)$$

Já a aceleração final  $\ddot{u}_i$  é obtida por meio de iterações, caracterizando o método como implícito: Começando com um valor arbitrário para  $\ddot{u}_i$ , valores para  $\dot{u}_i$  e  $u_i$  são obtidos das equações (2.13) e (2.15), assim um valor refinado de  $\ddot{u}_i$  é calculado da condição de equilíbrio dinâmico no tempo  $t = t_i$  usando uma expressão equivalente a da equação (2.16), o que leva a um valor mais refinado da velocidade  $\dot{u}_i$  (o deslocamento  $u_i$  não muda, pois não depende de  $\ddot{u}_i$ , já que sua equação é explícita). Eventualmente, essa iteração converge para um valor fixo da aceleração e velocidade finais neste passo, e a análise pode assim proceder para o passo seguinte.

Apesar desse método ter sido descrito acima como implícito (de acordo com a definição adotada), muitos autores se referem a ele como sendo explícito, visto que as hipóteses iniciais do método, dadas pelas expressões de diferenças finitas (2.10) e (2.11), podem ser substituídas diretamente na equação de equilíbrio dinâmico no instante  $t = t_{i-1}$  para extrair explicitamente o valor de  $u_i$ , dependente apenas de deslocamentos de passos anteriores (HUMAR, 2002, p. 418).

O método das diferenças centrais é condicionalmente estável, ou seja, existe um valor crítico para a escolha do tamanho do incremento de tempo adotado ( $\Delta t_{crit}$ ) acima do qual o método se torna instável, propagando erros de um passo de tempo para o seguinte. Definindo  $T$  como o período de oscilação livre do sistema, tem-se que o valor desse passo de tempo crítico é dado por, de acordo com Chopra (1995, p.162):

$$\Delta t_{crit} = \frac{T}{\pi} \quad (2.17)$$

Entretanto, esse valor não é tão restritivo, visto que qualquer análise simples sempre requer mais que 3 passos por período de vibração natural do sistema, para obter resultados com um mínimo de acurácia. O período de vibração é calculado por

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{onde} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.18)$$

e onde  $\omega$  é chamada *frequência natural* de oscilação livre do sistema SDOF.

## 2.4 MÉTODOS DE INTEGRAÇÃO

Outra abordagem muito usada em métodos passo-a-passo é o uso de equações integrais que são aproximadas numericamente a partir de algumas hipóteses assumidas sobre a variação dos parâmetros ao longo do passo. Os métodos descritos a seguir se baseiam no conceito de integração das grandezas dinâmicas dentro do incremento de tempo, a partir das condições iniciais de cada passo até as condições finais, ao término do intervalo de comprimento  $\Delta t$ . O conceito essencial é representado pelas seguintes equações:

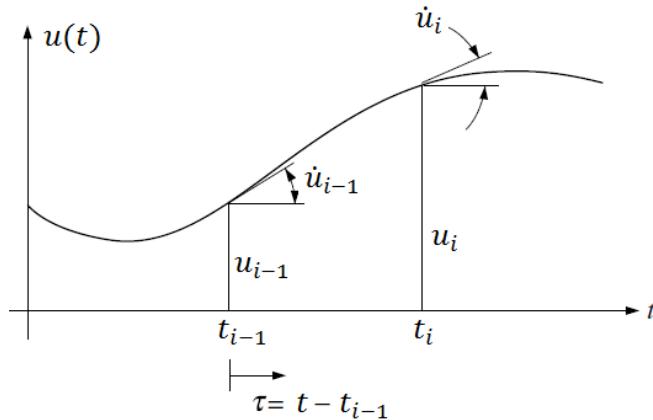
$$\dot{u}_i = \dot{u}_{i-1} + \int_0^{\Delta t} \ddot{u}(\tau) d\tau \quad (2.19)$$

$$u_i = u_{i-1} + \int_0^{\Delta t} \dot{u}(\tau) d\tau \quad (2.20)$$

As equações (2.19) e (2.20) expressam a velocidade e deslocamento finais em termos dos valores iniciais destas grandezas somadas com uma expressão integral. A Figura 2.6 seguinte ilustra a variável de integração  $\tau$  tomada ao longo do passo  $i$  de duração  $\Delta t$ . A variação da velocidade depende da integral da aceleração  $\ddot{u}$  e a variação do deslocamento depende da integral da velocidade  $\dot{u}$  correspondente. Para realizar esse tipo de análise é necessário primeiramente assumir como a aceleração varia durante o passo. Essa suposição controla a variação da velocidade, assim como torna possível proceder o próximo passo da análise. As equações de integração (2.19) e (2.20) são as expressões fundamentais para esse

tipo de método, assim como as equações (2.13) e (2.15) o eram no Método das Diferenças Centrais.

Figura 2.6 – Histórico de resposta de deslocamentos



Fonte: Adaptado de Clough e Penzien (1995, p. 113)

#### 2.4.1 Aceleração constante – Procedimento de Euler-Gauss

O método mais simples, conhecido como método de Euler-Gauss, é baseado na suposição de que a aceleração tem um valor constante fixo no intervalo do passo  $i$ . A consequência dessa suposição é que a velocidade deve variar linearmente e que o deslocamento varia segundo uma curva quadrática durante o incremento  $\Delta t$ . É assumido que a aceleração constante desse método seja igual à média entre os valores finais e iniciais tomados durante o passo. Dessa forma, a expressão para a aceleração fica igual a da equação (2.21) seguinte, e os valores finais da velocidade e deslocamento, obtidos combinando a equação (2.21) com a (2.19) e (2.20), são dados nas equações (2.22) e (2.23), respectivamente.

$$\ddot{u}_{med} = \frac{1}{2}(\ddot{u}_{i-1} + \ddot{u}_i) \quad (2.21)$$

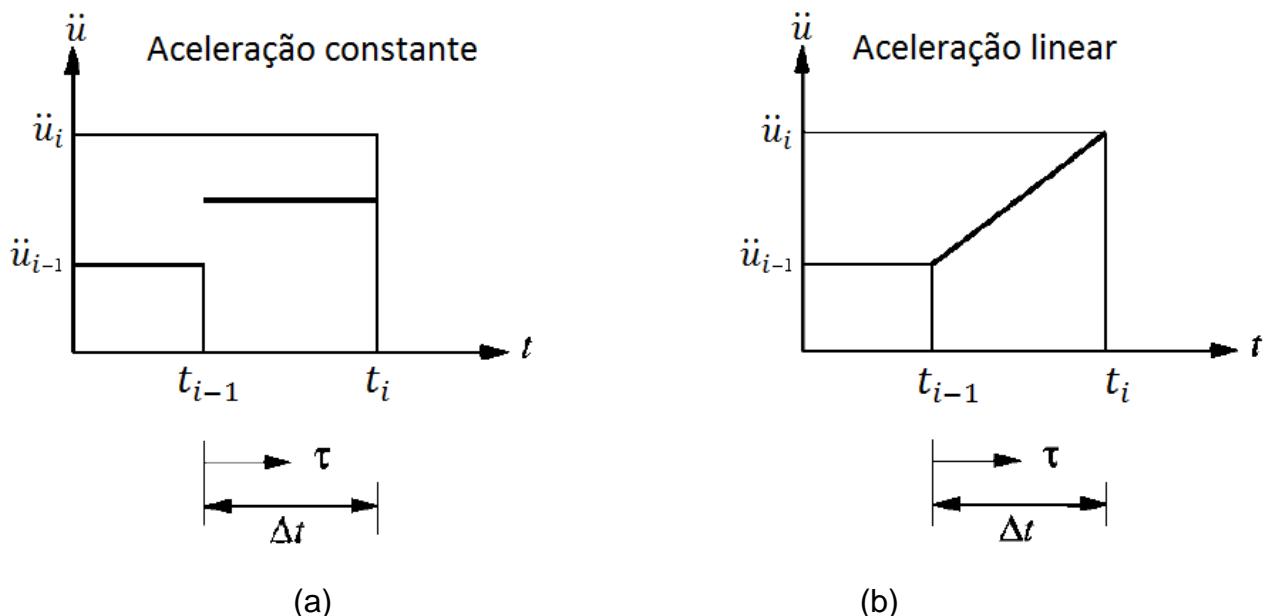
$$\dot{u}_i = \dot{u}_{i-1} + \frac{\Delta t}{2}(\ddot{u}_{i-1} + \ddot{u}_i) \quad (2.22)$$

$$u_i = u_{i-1} + \Delta t \dot{u}_{i-1} + \frac{\Delta t^2}{4}(\ddot{u}_{i-1} + \ddot{u}_i) \quad (2.23)$$

Para iniciar esse tipo de análise em qualquer passo, é necessário primeiro encontrar as acelerações inicial e final,  $\ddot{u}_{i-1}$  e  $\ddot{u}_i$ , para o cálculo da aceleração constante  $\ddot{u}_{mád}$ . A aceleração inicial pode ser obtida a partir da equação de equilíbrio dinâmico dada na expressão (2.16). Já a aceleração final é obtida por meio de iterações, caracterizando o método também como implícito: Começando com um valor arbitrário para  $\ddot{u}_i$ , valores para  $\dot{u}_i$  e  $u_i$  são obtidos das equações (2.22) e (2.23), assim um valor refinado de  $\ddot{u}_i$  é calculado da condição de equilíbrio dinâmico no tempo  $t = t_i$  usando uma expressão equivalente a da equação (2.16), o que leva a valores mais refinados da velocidade  $\dot{u}_i$  e deslocamento  $u_i$ . Após a iteração convergir para um valor fixo da aceleração final neste passo, a análise pode então proceder para o passo seguinte.

“A grande vantagem desse método de aceleração constante é que ele é incondicionalmente estável; isto é, os erros não são amplificados de um passo para o próximo não importando o quão grande o intervalo de tempo é escolhido” (CLOUGH e PENZIEN, 1995, p. 121, tradução nossa). A Figura 2.7-(a) a seguir ilustra como varia a aceleração dentro das hipóteses do método da aceleração constante.

Figura 2.7 – Aceleração média constante e aceleração linear



Fonte: Adaptado de Chopra (1995, p. 165)

## 2.4.2 Aceleração linear

Outro método muito aplicado na prática se baseia na suposição de que a aceleração varia linearmente durante o incremento de tempo entre seu valor inicial  $\ddot{u}_{i-1}$  e final  $\ddot{u}_i$ . A Figura 2.7-(b) anterior ilustra como varia a aceleração dentro das hipóteses desse método. Dessa forma, a expressão para a aceleração em cada instante  $\tau$  durante o passo de tempo é dada pela equação de uma reta igual à expressão (2.24) seguinte, e os valores finais da velocidade e deslocamento, obtidos combinando a equação (2.24) com a (2.19) e (2.20), são dados nas equações (2.25) e (2.26), respectivamente.

$$\ddot{u}(\tau) = \ddot{u}_{i-1} + \left( \frac{\ddot{u}_i - \ddot{u}_{i-1}}{\Delta t} \right) \tau \quad (2.24)$$

$$\dot{u}_i = \dot{u}_{i-1} + \frac{\Delta t}{2} (\ddot{u}_{i-1} + \ddot{u}_i) \quad (2.25)$$

$$u_i = u_{i-1} + \Delta t \dot{u}_{i-1} + \frac{\Delta t^2}{3} \ddot{u}_{i-1} + \frac{\Delta t^2}{6} \ddot{u}_i \quad (2.26)$$

Novamente percebe-se que a formulação é implícita, visto que devem ser feitas iterações para se chegar ao valor final da aceleração  $\ddot{u}_i$ , necessário à realização da análise (o valor de  $\ddot{u}_{i-1}$  é novamente obtido da equação (2.16)).

Diferente do que ocorre com o método da aceleração constante, o método da aceleração linear é apenas condicionalmente estável, ele será instável a menos que (CLOUGH e PENZIEN, 1995, p. 122)

$$\Delta t \leq \frac{T\sqrt{3}}{\pi} \quad (2.27)$$

Onde  $T$  é o período de oscilação livre do sistema, dado na equação (2.18).

## 2.5 MÉTODOS DE NEWMARK-BETA

Uma formulação mais geral para os métodos de integração foi proposta por Newmark (1959), a qual engloba todos os métodos precedentes como casos especiais, e que pode ser aplicado em muitas outras versões. No método de Newmark, a equações básicas de integração exibidas nas expressões (2.19) e (2.20), para a velocidade e deslocamento finais, são dadas por:

$$\dot{u}_i = \dot{u}_{i-1} + (1 - \gamma) \Delta t \ddot{u}_{i-1} + \gamma \Delta t \ddot{u}_i \quad (2.28)$$

$$u_i = u_{i-1} + \Delta t \dot{u}_{i-1} + \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \Delta t^2 \ddot{u}_{i-1} + \beta \Delta t^2 \ddot{u}_i \quad (2.29)$$

Onde  $\gamma$  e  $\beta$  são constantes pré-escolhidas, geralmente tomadas entre 0 e 1. Nestas equações, fica claro que o fator  $\gamma$  provoca uma ponderação linear entre a influência das acelerações final e inicial na variação da velocidade. Da mesma forma, o fator  $\beta$  promove uma ponderação entre as influências dessas acelerações na variação do deslocamento.

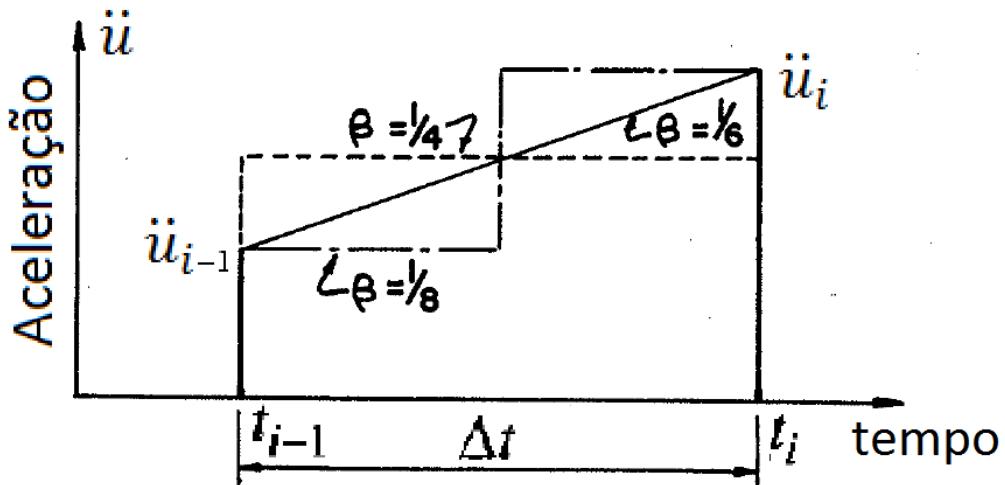
### 2.5.1 Escolha dos Parâmetros $\gamma$ e $\beta$

Através do estudo do desempenho desta formulação, Newmark demonstrou que o fator  $\gamma$  controla a quantidade de amortecimento artificial induzido por esse procedimento, e que não há amortecimento artificial se  $\gamma = 1/2$ , sendo esse o valor recomendado para as análises padrões. Se  $\gamma > 1/2$ , um amortecimento positivo é introduzido, o que reduzirá a amplitude da resposta mesmo sem haver amortecimento real no problema. Newmark afirmou ainda que se  $\gamma = 0$ , o processo inclui um amortecimento negativo, envolvendo uma vibração extra, causada unicamente pelo método numérico. Já Goudreau e Taylor (1973) afirmam que o amortecimento negativo é introduzido também para  $\gamma < 1/2$ , “levando, em última instância, a uma resposta ilimitada, mesmo que seja oscilatória” (p. 76, tradução nossa).

Adotando  $\gamma = 1/2$  e  $\beta = 0$ , as equações (2.28) e (2.29) ficam iguais as (2.15) e (2.13), respectivamente, ou seja, para  $\beta = 0$ , o método se reduz ao método das diferenças centrais. Já adotando  $\gamma = 1/2$  e  $\beta = 1/4$ , as equações (2.28) e (2.29) ficam iguais as (2.22) e (2.23), e o método se transforma no da aceleração constante média. Fazendo ainda  $\gamma = 1/2$  e  $\beta = 1/6$ , essas duas equações ficam iguais as (2.25) e (2.26), e o método se reduz ao da aceleração linear. Newmark (1959) notou também que ao tomar  $\gamma = 1/2$  e  $\beta = 1/8$  a aceleração no passo assume o valor de uma função constante por intervalos, com valores uniformes iguais à aceleração inicial na primeira metade do passo e à aceleração final na segunda metade (Figura 2.8). Em seu trabalho, citou ainda que o caso  $\beta = 0$  (diferenças centrais) corresponde à

[...] pulsos duplos de aceleração no começo e fim do intervalo de tempo com cada pulso duplo consistindo de uma parte igual a  $1/2$  da aceleração multiplicada pelo intervalo de tempo, um ocorrendo logo antes do fim do intervalo precedente e o outro logo depois do início do intervalo seguinte (NEWMARK, 1959, p. 78, tradução nossa).

Figura 2.8 – Variações da aceleração num intervalo de tempo



Fonte: Adaptado de Newmark (1959, p. 77)

## 2.5.2 Estabilidade do Método

A estabilidade dos métodos Newmark-Beta depende da escolha dos parâmetros  $\gamma$  e  $\beta$ . De acordo com Cook *et al.* (1989, p. 408), e também com as observações, já citadas, feitas por Newmark (1959) e Goudreau e Taylor (1973), o método é instável

para  $0 \leq \gamma < 1/2$ . Segundo os primeiros autores e também Hughes (1987, p. 492) o método será incondicionalmente estável se

$$\gamma \geq \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \beta \geq \frac{\gamma}{2} \quad (2.30)$$

Adicionalmente, é citado que, nos casos em que  $\gamma \geq 1/2$  e  $\beta < \gamma/2$  o método de Newmark só será estável se:

$$\Delta t \leq \frac{T}{\pi} \left[ \frac{\xi(\gamma - \frac{1}{2}) + \sqrt{\gamma/2 - \beta + \xi^2(\gamma - \frac{1}{2})^2}}{\gamma - 2\beta} \right] \quad (2.31)$$

Onde  $\xi$  é a taxa de amortecimento viscoso do sistema SDOF, dada por:

$$\xi = \frac{c}{c_{cr}} \quad \text{onde} \quad c_{cr} = 2 m \omega \quad (2.32)$$

Na qual  $c_{cr}$  é chamado *coeficiente de amortecimento crítico* e  $\omega$  é a frequência natural dada na equação (2.18).

Percebe-se assim que, para  $\gamma = 1/2$  e  $\beta = 1/4$ , a condição (2.30) é atendida, justificando o fato do método da aceleração constante ser incondicionalmente estável. Particularmente para essa escolha de parâmetros, a equação (2.31) se transforma numa divisão por zero, o que mostra que  $\Delta t$  pode ser tomado como infinito sem prejudicar a estabilidade, confirmando a estabilidade incondicional. Para o caso  $\gamma = 1/2$  e  $\beta > \gamma/2$  essa equação fornece valores complexos, tornando o seu uso sem o sentido físico. Fazendo  $\gamma = 1/2$  e  $\beta = 0$ , a equação (2.31) gera a mesma condição da equação (2.17) para o método das diferenças centrais. Já fazendo  $\gamma = 1/2$  e  $\beta = 1/6$ , esta equação gera a mesma condição da equação (2.27), do método da aceleração linear.

Nota-se ainda que, quando  $\gamma = 1/2$ , o amortecimento viscoso dado pela taxa  $\xi$  não exerce nenhum efeito sobre a estabilidade, isto é, não altera o incremento de tempo crítico ( $\Delta t_{crit}$ ) da equação (2.31) para o grupo de métodos condicionalmente estáveis. Quando  $\gamma > 1/2$  o efeito do amortecimento é o aumento desse incremento de tempo. Por isso o valor de  $\Delta t_{crit}$  para o caso não amortecido ( $\xi = 0$ ) serve como

um valor conservador quando as taxas de amortecimento não estão disponíveis (o que é comum de acontecer para sistemas MDOF). Tal fato foi notado nas obras de Cook *et al.* (1989) e Hughes (1987), e talvez seja a justificativa sobre a qual Chopra (1995, p. 167) e Krieg e Key (1973, p. 278) exibem como condição única para a estabilidade a equação simplificada a seguir

$$\Delta t \leq \frac{T}{\pi\sqrt{2(\gamma - 2\beta)}} \quad (2.33)$$

que é obtida ao fazer  $\xi = 0$  na equação (2.31). A expressão acima também é a única que aparece no trabalho original de Newmark (1959, p. 75), porém restrita ao caso  $\gamma = 1/2$ , o que a torna um valor exato e não conservador. Apesar de apresentarem esta equação como condição única de estabilidade, Chopra (1995) e Krieg e Key (1973) não chegam a citar que o método é instável para  $\gamma < 1/2$  e que valores complexos no denominador da equação (2.33) correspondem aos casos incondicionalmente estáveis.

Em se tratando de análise dinâmica não linear, Belytschko e Schoeberle (apud HUGHES, 1977) demonstraram um teorema garantindo estabilidade incondicional para o método da aceleração constante média ( $\gamma = 1/2$  e  $\beta = 1/4$ ) em problemas envolvendo materiais de comportamento não linear (não-linearidade física) e pequenas deformações. Em 1977, Hughes publicou uma nota generalizando o trabalho de Belytschko e Schoeberle para os casos  $\beta > 1/4$  e incluindo grandes deformações (não-linearidade geométrica), mostrando que a condição (2.30) para  $\gamma = 1/2$  vale também em sistemas não-lineares.

Para o caso de sistemas MDOF é interessante que o método aplicado introduza o artifício da “dissipação numérica dos componentes modais de alta frequência” (esse artifício será mais bem explicado na seção 5.3.2 do Capítulo 5) e, com objetivo de maximizar esse recurso, Hughes (1987, p. 500) sugere que a escolha dos parâmetros  $\gamma$  e  $\beta$  seja feita da seguinte forma, para estabilidade incondicional:

$$\gamma \geq \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \beta \geq \frac{1}{4} \left( \gamma + \frac{1}{2} \right)^2 \quad (2.34)$$

E para estabilidade condicional, quando a expressão (2.34) não é atendida, toma-se:

$$\Delta t \leq \frac{T}{\pi} \left[ \frac{\xi \left( \gamma - \frac{1}{2} \right) + \sqrt{\frac{1}{4} \left( \gamma + \frac{1}{2} \right)^2 - \beta + \xi^2 (\beta - \gamma/2)}}{\frac{1}{2} \left( \gamma + \frac{1}{2} \right)^2 - 2\beta} \right] \quad (2.35)$$

A expressão (2.34) também é referenciada por Cook *et al.* (1989, p. 408) quando citam a dissipação numérica mencionada, sendo a única condição de estabilidade exibida por Rao (1990, p. 549) e por Bathe (1996, p. 809-810) para o método de Newmark, e ainda a única referenciada por Felipe Silva (2006, p. 49) e Andréa Silva (2009, p. 182). Ambas as expressões (2.34) e (2.35) acima são demonstradas também no trabalho de Goudreau e Taylor (1973, p. 76) apenas para o caso  $\xi = 0$ . Durante esta pesquisa, a equação (2.35) somente foi encontrada na obra de Hughes (1987).

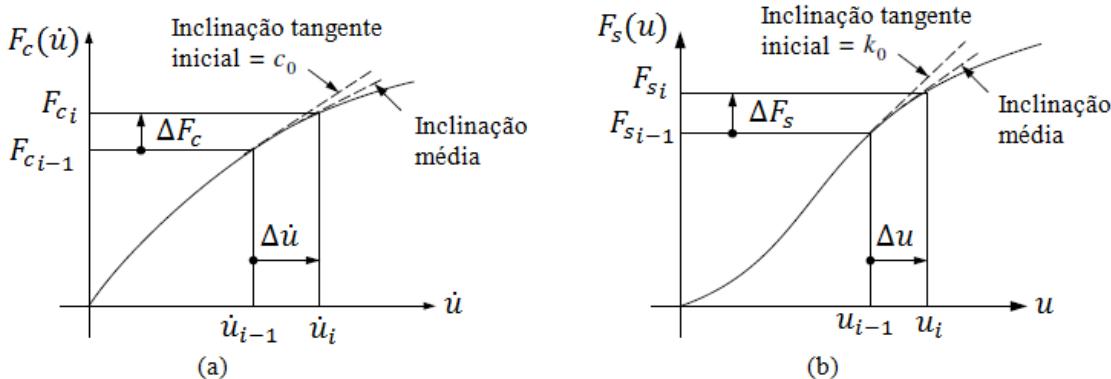
Com o que foi exposto nessa seção, vê-se que a estabilidade do método de Newmark-Beta depende da escolha dos parâmetros  $\gamma$  e  $\beta$ , mostrando que a afirmação de que “métodos explícitos são condicionalmente estáveis e métodos implícitos são incondicionalmente estáveis”, exposta na seção 2.2.2, não é sempre verdadeira, pois, independente da classificação do método de Newmark como implícito ou explícito, sua estabilidade é condicionada pela escolha dos parâmetros de controle, e não por esta classificação.

É muito importante conhecer o intervalo de tempo crítico dado nas equações (2.31), (2.33) e (2.35), e as condições de estabilidade condicional do algoritmo de Newmark, já que esses aspectos têm influência direta sobre as estratégias de adaptatividade do incremento de tempo a serem tratadas no Capítulo 5, tema central desta pesquisa, pois determinam o maior incremento de tempo que estratégia pode permitir à integração.

## 2.6 FORMULAÇÃO INCREMENTAL PARA ANÁLISE NÃO LINEAR

Os procedimentos tratados nas seções 2.3, 2.4 e 2.5 são aplicáveis a análises de sistemas lineares nos quais as forças atuantes são expressas em termos dos valores totais da velocidade e deslocamento que se desenvolveram na estrutura até o presente instante. Entretanto, para análises não lineares, é assumido que as propriedades físicas do sistema permanecem constantes somente durante um curto incremento de tempo ou de deformação. Por isso, é importante reformular as expressões propostas em termos de equações incrementais de movimento, como descrito a seguir.

Figura 2.9 – Forças do sistema dinâmico não linear



Fonte: Adaptado de Clough e Penzien (1995, p. 125)

Supondo que as propriedades de rigidez elástica e de amortecimento sejam funções do tempo, como mostrado na Figura 2.9, então a equação de equilíbrio no instante  $t = t_i$  é dada por:

$$m \ddot{u}_i + c(t_i) \dot{u}_i + k(t_i) u_i = p_i \quad (2.36)$$

Já no instante  $t = t_{i-1}$  o equilíbrio é dado por:

$$m \ddot{u}_{i-1} + c(t_{i-1}) \dot{u}_{i-1} + k(t_{i-1}) u_{i-1} = p_{i-1} \quad (2.37)$$

Subtraindo a equação (2.37) de (2.36), obtém-se

$$m \Delta \ddot{u} + c_0 \Delta \dot{u} + k_0 \Delta u = \Delta p \quad (2.38)$$

Onde  $\Delta u$ ,  $\Delta \dot{u}$  e  $\Delta \ddot{u}$  são as variações do deslocamento, velocidade e aceleração (Figura 2.9);  $\Delta p$  é a variação da carga igual à diferença entre  $p_i$  e  $p_{i-1}$ ; e  $c_0$  e  $k_0$  são os valores de  $c(t)$  e  $k(t)$  sobre os quais se assume que se mantenham constantes

entre os instantes  $t_{i-1}$  e  $t_i$ . Os termos  $c_0$  e  $k_0$  podem ser aproximados como os valores médios das propriedades de amortecimento e de rigidez que variam durante o intervalo  $\Delta t$ , como indicado pelas inclinações médias nas Figura 2.9 (a) e (b), respectivamente. Porém, segundo Clough e Penzien (1995, p. 126), “na prática, essas inclinações médias são obtidas somente por iterações [...] Para evitar aplicar essas iterações, é comum usar na prática as inclinações tangentes iniciais” (tradução nossa). As inclinações tangentes iniciais para as forças exibidas na Figura 2.9 são dadas por:

$$c_0 = \frac{\partial F_c}{\partial \dot{u}} \Big|_{t_{i-1}} \quad k_0 = \frac{\partial F_s}{\partial u} \Big|_{t_{i-1}} \quad (2.39)$$

Reescrevendo as equações do método geral de Newmark e introduzindo a notação incremental, as expressões básicas (2.28) e (2.29) se tornam:

$$\Delta \dot{u} = (1 - \gamma) \Delta t \ddot{u}_{i-1} + \gamma \Delta t \ddot{u}_i \quad (2.40)$$

$$\Delta u = \Delta t \dot{u}_{i-1} + \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \Delta t^2 \ddot{u}_{i-1} + \beta \Delta t^2 \ddot{u}_i \quad (2.41)$$

E a equação equilíbrio dinâmico que fornece o valor refinado da aceleração no final do passo fica (o valor de  $\ddot{u}_{i-1}$  é obtido da equação (2.16)):

$$\ddot{u}_i = \frac{1}{m} (\Delta p - c_0 \Delta \dot{u} - k_0 \Delta u) - \dot{u}_{i-1} \quad (2.42)$$

As equações reformuladas com o uso da notação incremental funcionam tanto para análises lineares quanto para não lineares. Quando o sistema for linear, as grandezas  $c_0$  e  $k_0$  permanecem constantes durante toda análise.

A velocidade e o deslocamento no final do passo de tempo são então obtidos por:

$$\dot{u}_i = \dot{u}_{i-1} + \Delta \dot{u} \quad (2.43)$$

$$u_i = u_{i-1} + \Delta u \quad (2.44)$$

## 2.7 CONVERSÃO PARA FORMULAÇÃO EXPLÍCITA

Como dito anteriormente, as formulações implícitas dos métodos expostos são inconvenientes em geral, porque é necessário realizar iterações para determinar a aceleração no final do passo de tempo. Por essa razão esses métodos são usualmente convertidos na forma explícita. O objetivo dessa conversão é expressar a aceleração final em termos de outras grandezas conhecidas.

De fato, ao observar as equações (2.40), (2.41) e (2.42) do método geral de Newmark (na forma incremental) observa-se que elas formam um sistema de três equações lineares que possui três incógnitas, nomeadamente as variações da velocidade e deslocamento e a aceleração no final do passo. Dessa forma, fica claro que é possível usar um método alternativo de solução dessas equações que não recorra ao uso de iterações, como algum método de eliminação de variáveis, por exemplo, ou a inversão da matriz quadrada de ordem 3 que compõe os coeficientes do sistema de equações. Porém, com o objetivo de expandir a conversão para a forma explícita aos sistemas MDOF, é conveniente usar uma maneira específica de substituição de variáveis, como explicado a seguir.

### 2.7.1 Conversão do Método de Newmark-beta

Resolvendo a equação (2.41) para  $\ddot{u}_i$  e substituindo na equação (2.40) encontra-se:

$$\Delta \dot{u} = \frac{\gamma \Delta u}{\beta \Delta t} + \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right) \Delta t \ddot{u}_{i-1} - \frac{\gamma}{\beta} \dot{u}_{i-1} \quad (2.45)$$

Tomando novamente a solução da equação (2.41) para  $\ddot{u}_i$  e subtraindo-a de  $\ddot{u}_{i-1}$  chega-se a:

$$\Delta \ddot{u} = \left[ \Delta u - \Delta t \dot{u}_{i-1} - \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{u}_{i-1} \right] \frac{1}{\beta \Delta t^2} \quad (2.46)$$

Substituindo (2.45) e (2.46) na equação de equilíbrio (2.38) obtém-se:

$$\bar{k} \Delta u = \bar{\Delta p} \quad (2.47)$$

que tem a forma de uma equação de equilíbrio estático, envolvendo a *rigidez efetiva*  $\bar{k}$  e o *carregamento efetivo incremental*  $\bar{\Delta p}$ , dados, respectivamente por:

$$\bar{k} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} m + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} c_0 + k_0 \quad (2.48)$$

$$\bar{\Delta p} = \Delta p + m \left( \frac{\dot{u}_{i-1}}{\beta \Delta t} + \frac{\ddot{u}_{i-1}}{2\beta} \right) + c_0 \left[ \left( \frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) \Delta t \ddot{u}_{i-1} + \frac{\gamma}{\beta} \dot{u}_{i-1} \right] \quad (2.49)$$

Ao resolver a equação (2.47) para o incremento de deslocamento  $\Delta u$ , o incremento de velocidade  $\Delta \dot{u}$  pode ser calculado através da equação (2.45). O deslocamento e velocidade finais podem então ser obtidos pelas equações (2.43) e (2.44). Já a aceleração final poderia ser encontrada através da equação (2.42), ou usando a (2.46), mas como podem ocorrer mudanças nos parâmetros  $c_0$  e  $k_0$  devido a não linearidade, a aceleração no início do próximo passo é obtida por imposição da condição de equilíbrio, semelhantemente à equação (2.16), da seguinte forma:

$$\ddot{u}_{i-1} = \frac{1}{m} (p_{i-1} - c_0 \dot{u}_{i-1} - k_0 u_{i-1}) \quad (2.50)$$

## 2.7.2 Conversão do Método das Diferenças Centrais

A conversão das equações do método geral de Newmark para a forma explícita, efetuada anteriormente, não pode ser usada livremente para o Método das Diferenças Centrais, descrito na seção 2.3, apesar dele ser um caso particular do método de Newmark. Isso ocorre porque o método das diferenças centrais é obtido ao fazer  $\beta = 0$  na equação (2.29), o que gera uma indeterminação nas expressões (2.48) e (2.49) anteriores. Para contornar esse problema, a equação de equilíbrio incremental (2.38) deve ser escrita não mais para o intervalo de tempo entre os instantes  $t_{i-1}$  e  $t_i$ , mas sim entre os instantes  $t_{i-2}$  e  $t_{i-1}$ . Dessa forma, as variações  $\Delta u$ ,  $\Delta \dot{u}$ ,  $\Delta \ddot{u}$  e  $\Delta p$  passam a simbolizar os incrementos de deslocamento, velocidade, aceleração e carregamento para o intervalo entre  $t_{i-2}$  e  $t_{i-1}$ , e as inclinações tangentes iniciais  $c_0$  e  $k_0$  são tomadas agora para o instante  $t_{i-2}$ . O incremento de

deslocamento do passo atual (entre os instantes  $t_{i-1}$  e  $t_i$ ), cujo valor deve ser encontrado é, portanto, simbolizado agora por  $\bar{\Delta}u$  na descrição a seguir.

Trabalhando com as hipóteses das equações (2.10) e (2.11) do método das diferenças centrais, para que essas expressões sejam dadas em função de  $\bar{\Delta}u$  e  $\Delta u$ , faz-se:

$$\ddot{u}_{i-1} = \frac{u_i - 2u_{i-1} + u_{i-2}}{\Delta t^2} = \frac{(u_i - u_{i-1}) - (u_{i-1} - u_{i-2})}{\Delta t^2} = \frac{\bar{\Delta}u}{\Delta t^2} - \frac{\Delta u}{\Delta t^2} \quad (2.51)$$

$$\dot{u}_{i-1} = \frac{u_i - u_{i-2}}{2\Delta t} = \frac{u_i - u_{i-1} + u_{i-1} - u_{i-2}}{2\Delta t} = \frac{\bar{\Delta}u}{2\Delta t} + \frac{\Delta u}{2\Delta t} \quad (2.52)$$

Escrevendo agora a equação incremental (2.41) do método de Newmark para o caso  $\beta = 0$ , resolvendo-a tanto para  $\dot{u}_{i-1}$  quanto para  $\ddot{u}_{i-1}$  e subtraindo a equações resultantes de  $\dot{u}_{i-2}$  e  $\ddot{u}_{i-2}$ , respectivamente, obtém-se as seguintes expressões para os incrementos de velocidade e aceleração entre os instantes  $t_{i-2}$  e  $t_{i-1}$ :

$$\Delta \dot{u} = \left( \bar{\Delta}u - \Delta t \dot{u}_{i-2} - \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{u}_{i-1} \right) \frac{1}{\Delta t} \quad (2.53)$$

$$\Delta \ddot{u} = \left( \bar{\Delta}u - \Delta t \dot{u}_{i-1} - \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{u}_{i-2} \right) \frac{2}{\Delta t^2} \quad (2.54)$$

Substituindo as expressões (2.51) e (2.52), respectivamente, nas (2.53) e (2.54), obtém as seguintes equações, que não dependem de  $\dot{u}_{i-1}$  nem de  $\ddot{u}_{i-1}$ :

$$\Delta \dot{u} = \left( \frac{\bar{\Delta}u}{2} + \frac{\Delta u}{2} - \Delta t \dot{u}_{i-2} \right) \frac{1}{\Delta t} \quad (2.55)$$

$$\Delta \ddot{u} = (\bar{\Delta}u - \Delta u - \Delta t^2 \ddot{u}_{i-2}) \frac{1}{\Delta t^2} \quad (2.56)$$

Usando essas duas últimas expressões na equação de equilíbrio incremental (2.38), encontra-se uma fórmula idêntica à equação (2.47) (porém com  $\Delta u$  simbolizado

agora por  $\bar{\Delta u}$ ) onde a *rigidez efetiva* e o *carregamento efetivo incremental* serão dados por:

$$\bar{k} = \frac{m}{\Delta t^2} + \frac{c}{2\Delta t} \quad (2.57)$$

$$\bar{\Delta p} = \Delta p - k_0 \Delta u + m \left( \frac{\Delta u}{\Delta t^2} + \ddot{u}_{i-2} \right) + c_0 \left( \dot{u}_{i-2} - \frac{\Delta u}{2\Delta t} \right) \quad (2.58)$$

Nas quais  $\Delta u = u_{i-1} - u_{i-2}$ . Observa-se nas fórmulas acima que, para encontrar o deslocamento no final do passo atual, é preciso conhecer a velocidade e aceleração apenas no início do passo anterior (no instante  $t_{i-2}$ ) e não no início do passo atual. De fato, a velocidade e aceleração no início do passo atual só são encontradas após ser descoberto o deslocamento no final do passo, através das equações (2.51) e (2.52).

### 2.7.3 Considerações sobre as definições adotadas

Observa-se que a forma de encontrar a expressão explícita para o Método das Diferenças Centrais usou a equação de equilíbrio escrita no intervalo anterior ao passo de tempo atual no qual se obterá a resposta, enquanto que no método de Newmark, tratado anteriormente, foi usada a equação de equilíbrio no passo corrente. Por essa razão, muitos autores se referem ao Método das Diferenças Centrais com sendo naturalmente explícito, e ao método geral de Newmark ( $\beta \neq 0$ ) como implícito (mesmo que suas equações evitem iterações) se baseando na definição alternativa tratada na seção 2.2.2, a qual não é adotada neste texto.

Outra observação que pode ser feita sobre as equações das seções anteriores diz respeito à forma da como é escrita a rigidez efetiva  $\bar{k}$  nas expressões (2.48) e (2.57). Nota-se que no método geral de Newmark ( $\beta \neq 0$ ) essa rigidez depende da rigidez tangente  $k_0$ , enquanto que no método das diferenças centrais esse valor não entra no cálculo de  $\bar{k}$ . Em se tratando de sistemas de múltiplos graus de liberdade (quando as grandezas escalares dessas equações forem substituídas por matrizes e vetores) será visto na seção 3.5 do capítulo seguinte que este fato permite aplicar o

Método das Diferenças Centrais e encontrar diretamente a resposta num passo qualquer (com algumas hipóteses assumidas) sem precisar resolver um sistema de equações lineares simultâneas, enquanto que no método geral de Newmark ( $\beta \neq 0$ ) isso não é acontece, exigindo sempre a resolução de um sistema linear. Tal consequência motiva a definição adotada por Hughes (1987, p. 461) e Chopra (1995, p. 568-570) para métodos estritamente explícitos, notada também por Shrikhande (2008) e Cook *et al.* (1989).

Como já dito, a classificação dos métodos numéricos usada nessa dissertação será a mesma descrita por Cook *et al.* (1989) e Clough e Penzien (1995), que considera a expressão final utilizada para encontrar a resposta em um dado incremento de tempo, a qual pode ser modificada de forma a ficar explícita ou implícita, como já mostrado.

Uma última observação sobre os métodos tratados diz respeito à quantidade de informação necessária para determinar a resposta no passo de tempo atual. Segundo Cook *et al.* (1989), se a solução computada num instante  $t_i$  é completamente determinada pelas respostas conhecidas no passo imediatamente anterior (no instante  $t_{i-1}$ ) o método é conhecido como um “método de passo simples” (ou, no original do inglês, *single-step method*); se, por outro lado, a resposta em um passo  $i$  utiliza a informação de vários passos anteriores do histórico de deslocamentos para avançar a integração no tempo, então o mesmo é conhecido como “um método de passos múltiplos” (em inglês, *multi-step method*). Se as equações contém informação apenas de dois passos anteriores (dos instantes  $t_{i-1}$  e  $t_{i-2}$ ), como no Método das Diferenças Centrais, por exemplo (equação (2.58)), o método será classificado como de “passo duplo” (*two-step method*), que é um caso particular dos métodos de passos múltiplos. Métodos de passos múltiplos requerem procedimentos especiais para início da análise dinâmica, enquanto que métodos de passo simples (como o de Newmark com  $\beta \neq 0$ , por exemplo) permitem iniciar a análise diretamente.

### 3 ANÁLISE DE SISTEMAS DE MÚLTIPLOS GRAUS DE LIBERDADE

Os sistemas estruturais de múltiplos graus de liberdade são aqueles que requerem mais de uma coordenada para definir seu estado de configuração e constituem a maioria dos sistemas dinâmicos que existem na realidade. As estruturas em si possuem infinitos graus de liberdade, visto que constituem corpos sólidos contínuos e deformáveis em quase toda sua extensão. A análise de estruturas de infinitos graus de liberdade é, no entanto, geralmente substituída pela análise de sistemas com um número finito de graus de liberdade, através do conceito de elementos finitos e da análise matricial de estruturas.

No método dos elementos finitos, um problema com um número infinito de graus de liberdade é reduzido para um com um número finito de graus de liberdade, levando a um conjunto de equações lineares ou não lineares simultâneas em termos dos graus de liberdade desconhecidos do problema. No caso mais simples, isso é alcançado dividindo o domínio do problema em um número de subdomínios (ou elementos finitos) com a conectividade entre os elementos proporcionada através de pontos nodais em comum. O valor dos parâmetros desconhecidos em tais pontos nodais representam os graus de liberdade do problema. (GALAMBOS, 1998, p. 789, tradução nossa)

Assim, um sistema estrutural de múltiplos graus de liberdade pode ser representado, entre outros, por uma viga, um pórtico ou uma placa de vários nós (pontos nodais) e vários graus de liberdade associados a esses nós. No caso mais generalista, os graus de liberdade associados a um nó em particular são as translações e rotações que aquele nó pode sofrer, definidos assim como *deslocamentos nodais*.

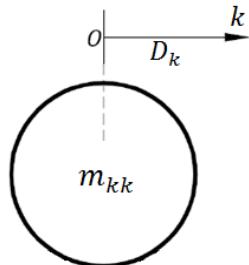
Para determinar o comportamento de sistemas desse tipo, deve-se novamente resolver a equação de movimento associada aos mesmos, assim como feito nos casos SDOF.

#### 3.1 EQUAÇÃO DE MOVIMENTO

Analogamente aos sistemas de um grau de liberdade, a equação de movimento é obtida escrevendo a expressão da força resultante  $F_{R_k}$  na direção de um deslocamento  $D_k$  qualquer (ou “grau de liberdade”  $D_k$  qualquer, que pode ser uma translação ou rotação). Para isso é usada uma expressão semelhante à equação

(2.2), mostrada na igualdade (3.1) a seguir. A Figura 3.1 tenta representar o deslocamento  $D_k$  que ocorre no nó  $O$  em uma dada “direção  $k$ ”.

Figura 3.1 – Representação do deslocamento  $D_k$



$$F_{R_k} = p_k(t) + F_{c_k} + F_{s_k} \quad (3.1)$$

Ao se considerar todos os  $n$  deslocamentos possíveis, a equação (3.1) pode então ser estendida para a seguinte expressão matricial:

$$\mathbf{F}_R = \mathbf{p}(t) + \mathbf{F}_c + \mathbf{F}_s \quad (3.2)$$

Sabendo que os deslocamentos não são independentes entre si, uma vez que a estrutura é contínua e, portanto, há interação entre os elementos, conclui-se que a força de rigidez elástica  $F_{s_k}$  que age no sentido do deslocamento  $D_k$  depende geralmente de todos os demais  $n$  deslocamentos da estrutura, sendo dada, analogamente à equação (2.4), por:

$$F_{s_k} = -k_{k1} D_1 - k_{k2} D_2 - \cdots - k_{kk} D_k - \cdots - k_{kn} D_n \quad (3.3)$$

e, na forma matricial, considerando a força elástica para todos os  $n$  deslocamentos nodais, tem-se:

$$\mathbf{F}_s = -\mathbf{k} \mathbf{D} \quad (3.4)$$

Na equação (3.3) é assumido que o comportamento estrutural é linear, para que se aplique o princípio da superposição e os efeitos dos deslocamentos sejam somados. Na equação (3.4) a matriz  $\mathbf{k}$  é chamada *matriz de rigidez* da estrutura e seus coeficientes  $k_{ij}$  são denominados *coeficientes de rigidez*. A partir da expressão (3.3) podem-se encontrar os coeficientes  $k_{ij}$  de forma simples: calcula-se a força que age

sobre o deslocamento  $D_i$  devida a um deslocamento unitário  $D_j$ , enquanto os demais deslocamentos permanecem nulos; o valor dessa força será o valor de  $k_{ij}$ , que pode ser obtida através dos métodos clássicos da mecânica dos corpos sólidos deformáveis (FÉODOSIEV, 1977).

A ideia sobre a rigidez elástica pode ser estendida para o amortecimento. Dessa forma, a força de amortecimento viscoso agindo sobre o deslocamento  $D_k$  depende de todos os demais deslocamentos e varia segundo suas velocidades, de forma análoga à equação (2.3):

$$F_{c_k} = -c_{k1} \dot{D}_1 - c_{k2} \dot{D}_2 - \cdots - c_{kk} \dot{D}_k - \cdots - c_{kn} \dot{D}_n \quad (3.5)$$

Matricialmente, escrevendo a equação (3.5) para todos os  $n$  deslocamentos, obtém-se:

$$\mathbf{F}_c = -\mathbf{c} \dot{\mathbf{D}} \quad (3.6)$$

onde  $\mathbf{c}$  é a *matriz de amortecimento* da estrutura, composta pelos coeficientes  $c_{ij}$ . Analisando a equação (3.5) pode-se definir um coeficiente  $c_{ij}$  qualquer como sendo a força que age sobre o deslocamento  $D_i$  devida a uma velocidade unitária associada ao deslocamento  $D_j$ , isto é, devido à  $\dot{D}_j = 1$ , enquanto as demais velocidades permanecem nulas. O cálculo dessa força, no entanto, é impraticável. “Por essa razão, o amortecimento é geralmente escrito em termos de taxas de amortecimento estabelecidas por experimentos em estruturas similares, ao invés de uma matriz de amortecimento explícita  $\mathbf{c}$ ” (CLOUGH e PENZIEN, 1995, p. 189, tradução nossa). Porém, quando uma expressão explícita para a matriz de amortecimento é necessária (como o que ocorre com o método numérico tratado mais adiante), uma forma de definir  $\mathbf{c}$  pode ser obtida computando as taxas de amortecimento mencionadas, como descrito na seção 3.4.

A mesma ideia sobre a rigidez elástica e a força de amortecimento também pode ser usada ao tratar da força resultante total  $F_{R_k}$  (chamado em alguns textos de *força de inércia*) agindo sobre o deslocamento  $D_k$ : A força pode ser generalizada e passa a

depender das acelerações de todos os  $n$  deslocamentos, com equação análoga à expressão (2.1):

$$F_{R_k} = m_{k1} \ddot{D}_1 + m_{k2} \ddot{D}_2 + \cdots + m_{kk} \ddot{D}_k + \cdots + m_{kn} \ddot{D}_n \quad (3.7)$$

Ou, na forma matricial, para  $k = 1, 2, \dots, n$

$$\mathbf{F}_R = \mathbf{m} \ddot{\mathbf{D}} \quad (3.8)$$

na qual  $\mathbf{m}$  é definida como a *matriz de massa*. Os elementos  $m_{ij}$  da matriz  $\mathbf{m}$  são denominados *coeficientes de influência de massa* e correspondem à força que age sobre o deslocamento  $D_i$  devida a uma aceleração unitária agindo no deslocamento  $D_j$ , isto é, devido à  $\ddot{D}_j = 1$ , enquanto as demais acelerações permanecem nulas. Apesar da definição da matriz de massa através da equação (3.7) observa-se que

É um pouco anti-intuitivo imaginar a resistência à mudança de velocidade em um elemento como sendo dependente dos demais. É de aceitação mais imediata que esta dependa apenas do próprio elemento, e que, portanto,  $F_{R_k} = m_{kk} \ddot{D}_k$ . Com isso, a matriz  $\mathbf{m}$  seria uma matriz diagonal. De fato, essa consideração também é válida, sendo um caso especial para  $\mathbf{m}$ , chamado de *matriz de massa concentrada* (CAMARGO, 2008, p. 76)

No entanto, a determinação mais aprimorada da matriz de massa (que não usa o conceito de massa concentrada) depende de como a aceleração varia ao longo dos elementos que compõem a estrutura. Essa variação usa o conceito de *funções de interpolação*, que também é usado para determinar os coeficientes  $k_{ij}$  da matriz de rigidez, como alternativa no caso de elementos não abordados na mecânica dos corpos sólidos deformáveis. Esse conceito será exposto na seção 3.2 seguinte usando a metodologia de elementos finitos, e a derivação dos coeficientes de influência de massa (fazendo o uso dessas funções de interpolação) é feita na seção 3.3 mais adiante.

Quando as equações (3.4), (3.6) e (3.8) são combinadas com a equação (3.2) a equação de movimento do sistema MDOF é finalmente dada por:

$$\mathbf{m} \ddot{\mathbf{D}} + \mathbf{c} \dot{\mathbf{D}} + \mathbf{k} \mathbf{D} = \mathbf{p}(t) \quad (3.9)$$

### 3.2 MATRIZ DE RIGIDEZ E FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO

A aplicação do método dos elementos finitos à análise estática de estruturas se baseia em escrever a equação do funcional de energia potencial de deformação de uma dada estrutura (ou de um dado elemento finito estrutural) e encontrar a configuração de equilíbrio que faz essa energia “estacionária” (máxima ou mínima). Se a configuração for de energia mínima, o equilíbrio será estável. Dessa forma, a função de energia potencial  $\Pi$  de uma estrutura com material de comportamento elástico linear isotrópico pode ser escrita combinando a energia elástica interna, devida aos deslocamentos nodais, com o trabalho realizado pelas cargas nodais externas  $\mathbf{p}$  ao longo desses deslocamentos, na seguinte forma matricial:

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{D}^T \mathbf{k} \mathbf{D} - \mathbf{D}^T \mathbf{p} \quad (3.10)$$

Minimizando esse funcional, isto é, procurando a configuração que fornece energia potencial estacionária, procura-se então a condição em que:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial D_1} = \frac{\partial \Pi}{\partial D_2} = \dots = \frac{\partial \Pi}{\partial D_n} = 0 \quad (3.11)$$

ou, usando a notação expressa na equação (3.12) seguinte, a condição da equação (3.11) fica assim resumida na equação (3.13), na qual  $\mathbf{0}$  é o vetor de elementos nulos.

$$\left\{ \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{D}} \right\} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Pi}{\partial D_1} & \frac{\partial \Pi}{\partial D_2} & \dots & \frac{\partial \Pi}{\partial D_n} \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

$$\left\{ \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{D}} \right\} = \mathbf{0} \quad (3.13)$$

Calculando  $\left\{ \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{D}} \right\}$  para a função da equação (3.10) e igualando-o a  $\mathbf{0}$  chega-se a:

$$\mathbf{k} \mathbf{D} = \mathbf{p} \quad (3.14)$$

que tem a forma de uma equação de equilíbrio estático envolvendo a matriz de rigidez  $\mathbf{k}$  e o carregamento externo  $\mathbf{p}$ , ficando semelhante à equação (3.4).

Por outro lado, para elementos cuja matriz  $\mathbf{k}$  não é facilmente obtida através dos métodos da mecânica dos corpos sólidos deformáveis, o funcional de energia potencial  $\Pi$  da estrutura com material de comportamento elástico linear isotrópico, em termos de deformações elásticas volumétricas, pode ser escrito com outra expressão para a energia elástica interna, na forma simplificada a seguir:

$$\Pi = \int_V \left( \frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{E} \boldsymbol{\epsilon} \right) dV - \mathbf{D}^T \mathbf{p} \quad (3.15)$$

onde  $\boldsymbol{\epsilon}$  é a função do estado de deformação dos pontos da estrutura e  $\mathbf{E}$  é a matriz constitutiva do material, originada da relação  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E} \boldsymbol{\epsilon}$ , na qual  $\boldsymbol{\sigma}$  é o estado de tensão. O vetor do estado de deformação, e o correspondente vetor do estado de tensão, são dados explicitamente por:

$$\boldsymbol{\epsilon} = [\epsilon_x \quad \epsilon_y \quad \epsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{xz} \quad \gamma_{yz}]^T \quad (3.16)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{xz} \quad \tau_{yz}]^T \quad (3.17)$$

Já a matriz  $\mathbf{E}$  pode ser obtida da relação  $\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{C} \boldsymbol{\sigma}$ , fazendo  $\mathbf{E} = \mathbf{C}^{-1}$ , onde  $\mathbf{C}$  representa a matriz da Lei de Hooke generalizada, como demonstrada por Féodosiev (1977, p. 266), por exemplo.

Para obter o vetor  $\boldsymbol{\epsilon}$  da equação (3.16), usa-se o fato de que o campo de deslocamentos de um corpo sólido deformável tridimensional é uma função vetorial  $\boldsymbol{\Phi}$  de três variáveis  $(x, y, z)$  e três componentes  $u$ ,  $v$  e  $w$ , cuja representação é resumida na equação (3.18) seguinte e cuja relação com  $\boldsymbol{\epsilon}$  é dada na equação (3.19) mais adiante, onde  $\partial$  é um operador diferencial:

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\delta}} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \boldsymbol{\delta} \boldsymbol{\Phi} \quad (3.19)$$

Na formulação de elementos finitos, as componentes do campo de deslocamento  $u$ ,  $v$  e  $w$  são dadas como combinações lineares de *funções de interpolação*  $N_i(x, y, z)$  comum às três componentes, cujos coeficientes são os valores dos deslocamentos nodais  $u_i$ ,  $v_i$  e  $w_i$ . Assim, as funções  $u$ ,  $v$  e  $w$  são dadas, nessa formulação, por:

$$u(x, y, z) = \sum_{i=1}^n u_i N_i(x, y, z) \quad (3.20)$$

$$v(x, y, z) = \sum_{i=1}^n v_i N_i(x, y, z) \quad (3.21)$$

$$w(x, y, z) = \sum_{i=1}^n w_i N_i(x, y, z) \quad (3.22)$$

E ao escrever as equações (3.20), (3.21) e (3.22) numa forma matricial, tem-se:

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \dots & N_n & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \dots & 0 & N_n & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \dots & 0 & 0 & N_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ \vdots \\ u_n \\ v_n \\ w_n \end{bmatrix} = \mathbf{N} \mathbf{D} \quad (3.23)$$

Aplicando as relações de deformação-deslocamento da equação (3.19) na equação (3.23), fica-se então com:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \partial \boldsymbol{\phi} = \partial \mathbf{N} \mathbf{D} = \mathbf{B} \mathbf{D} \quad (3.24)$$

Onde  $\mathbf{B} = \partial \mathbf{N}$ . Voltando à equação (3.15) do funcional  $\Pi$ , usando a expressão (3.24) para descrever o estado de deformação  $\boldsymbol{\epsilon}$  e lembrando que  $\mathbf{D}$  é um vetor de valores constantes, obtém-se:

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{D}^T \left( \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} dV \right) \mathbf{D} - \mathbf{D}^T \mathbf{p} \quad (3.25)$$

E por analogia dessa última equação com a (3.10), tem-se que, após minimizar o funcional ( $\left\{ \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{D}} \right\} = \mathbf{0}$ ) obter-se-á uma equação idêntica à (3.14), com a matriz de rigidez substituída pela seguinte expressão integral:

$$\mathbf{k} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} dV \quad (3.26)$$

As funções de interpolação  $N_i(x, y, z)$  usadas para construir  $\mathbf{B}$  podem ser quaisquer funções que satisfaçam as condições impostas sobre os nós dos elementos, e normalmente são tomadas como polinômios. Segundo Bathe (1996, p.195)

A classe mais natural de funções para usar na aproximação dos deslocamentos dos elementos são as polinomiais porque elas são comumente empregadas para aproximar funções desconhecidas, e quanto maior é o grau do polinômio melhor é a aproximação que se pode esperar. Adicionalmente, polinômios são fáceis de derivar; isto é, se funções polinomiais aproximam os deslocamentos da estrutura, pode-se facilmente calcular as deformações. (tradução nossa)

“Os campos de aproximação precisam ser aplicáveis e devem ser fáceis de manipular. Somente funções polinomiais, e ocasionalmente funções seno e cosseno, são simples o bastante para aplicações práticas” (COOK *et al.*, 1989, p. 81, tradução nossa). Os polinômios de interpolação usados no método dos elementos finitos podem ter uma ou mais variáveis independentes, dependendo do número de dimensões do elemento. No presente trabalho, desenvolveu-se um algoritmo que implementa um elemento finito de barra de pórtico plano, cuja descrição será feita no

próximo capítulo. Dessa forma, os polinômios de interpolação usados serão descritos em uma única dimensão, já que é necessária apenas uma variável livre para descrever todos os pontos ao longo do comprimento de uma barra. Adicionalmente, o campo de deslocamentos na direção transversal ao eixo das barras tem sua descrição um pouco diferente daquela exibida nas equações (3.21) e (3.23), devido às hipóteses assumidas pela mecânica dos sólidos deformáveis no tratamento desses elementos, as quais levam em conta também as rotações da linha elástica do eixo da barra.

### 3.3 MATRIZES DE MASSA

As mesmas funções de interpolação usadas na derivação da matriz de rigidez pelo conceito de elementos finitos podem avaliar também a matriz de massa  $\mathbf{m}$  e seus coeficientes de influência  $m_{ij}$ . Para isso, assume-se que o campo de deslocamentos  $\boldsymbol{\phi}$  seja função não apenas das variáveis  $(x, y, z)$ , mas também do tempo  $t$ , que é a variável independente associada aos graus de liberdade  $\mathbf{D}$ . Assim o campo de acelerações será dado, com as mesmas funções  $N_i(x, y, z)$  usadas no problema estático, por:

$$\ddot{\boldsymbol{\phi}} = \mathbf{N} \ddot{\mathbf{D}} \quad (3.27)$$

Já o vetor dos *somatórios das forças totais*  $\mathbf{F}_{TOT}$ , que agem sobre a estrutura segundo as componentes  $u$ ,  $v$  e  $w$  (é importante não confundir  $\mathbf{F}_{TOT}$  com o vetor de forças resultantes nodais  $\mathbf{F}_R$ , pois  $\mathbf{F}_{TOT}$  tem três componentes apenas) pode ser obtido pela integral das forças resultantes elementares agindo sobre os elementos infinitesimais de tal estrutura. Para isso, a força resultante que age num volume infinitesimal  $dV$  do elemento (de massa  $dm$ ) é encontrada por uma relação semelhante ao princípio fundamental da dinâmica, na forma seguinte:

$$d\mathbf{F}_{TOT} = dm \ddot{\boldsymbol{\phi}} = \rho dV \mathbf{N} \ddot{\mathbf{D}} \quad (3.28)$$

na qual  $\rho$  é a massa específica do material. A integral da expressão (3.28) acima, tomada ao longo do volume  $V$  do elemento, resulta no vetor  $\mathbf{F}_{TOT}$ . No entanto, para encontrar a expressão que fornece o vetor de forças resultantes nodais  $\mathbf{F}_R$ , recorre-se ao conceito de *trabalhos equivalentes* (COOK *et al.*, 1989, p. 119): O trabalho

realizado pelas forças nodais  $\mathbf{F}_R$  ao longo de pequenos deslocamentos nodais  $\mathbf{D}$ , (que é dado por  $\mathbf{D}^T \mathbf{F}_R$ ), deve ser igual ao trabalho realizado pelas forças resultantes distribuídas  $d\mathbf{F}_{TOT}$  ao longo do campo de deslocamentos  $\Phi$  associado com os nós do elemento. Esse último trabalho é obtido com a integral de  $\Phi^T d\mathbf{F}_{TOT}$  ao longo de  $V$ . Dessa forma, o conceito dos trabalhos equivalentes permite escrever:

$$\mathbf{D}^T \mathbf{F}_R = \int_V \Phi^T d\mathbf{F}_{TOT} = \int_V \Phi^T \rho \mathbf{N} \ddot{\mathbf{D}} dV \quad (3.29)$$

Ao combinar o campo de deslocamentos obtido pela formulação de elementos finitos, dado na equação (3.23), com a equação (3.29), e sabendo que  $\mathbf{D}$  e  $\ddot{\mathbf{D}}$  não são funções de  $(x, y, z)$  (podendo sair da integral), obtém-se a seguinte expressão para  $\mathbf{F}_R$ :

$$\mathbf{F}_R = \left( \int_V \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} dV \right) \ddot{\mathbf{D}} \quad (3.30)$$

E por analogia direta da equação anterior com a equação (3.8), percebe-se que a matriz de massa  $\mathbf{m}$  é dada pela seguinte expressão integral:

$$\mathbf{m} = \int_V \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV \quad (3.31)$$

A matriz de massa calculada pela equação (3.31) é chamada *matriz de massa consistente* pelo fato de ser calculada baseando-se nas mesmas funções de interpolação  $N_i(x, y, z)$  usadas na matriz de rigidez do elemento.

## Massa Concentrada

Existe uma outra formulação possível para a matriz de massa.

Como já mostrado, a matriz de massa, de modo geral, é composta por elementos não necessariamente nulos e depende do sistema. Entretanto, a divisão da estrutura em  $N$  elementos causa intuitivamente uma impressão de que a massa individual de cada elemento é que teria influência na resposta final. Isso gera, inclusive, a impressão de que seriam necessárias  $N$  massas (uma para cada elemento), fazendo um “vetor de massas” mais adequado do que uma matriz. [...] supor a massa de cada elemento concentrada em seu ponto de deslocamento não é um procedimento errado, e na verdade, é o procedimento mais simples para definir a matriz de massa. Uma matriz assim formada é chamada *matriz de massa concentrada*. (CAMARGO, 2008, p. 78)

Segundo Clough e Penzien (1995, p. 196), “a abordagem consistente deveria levar a uma maior acurácia nos resultados, mas na prática o ganho é geralmente pequeno [...] esta vantagem raramente supera o esforço adicional necessário” (tradução nossa). Bathe (1996) também cita como uma vantagem importante no uso da matriz de massa concentrada o fato da matriz se tornar diagonal, e as operações numéricas para a solução das equações dinâmicas serem reduzidas significativamente.

Outros autores, como Cook *et al.* (1989, p. 408) e Shrikhande (2008, p. 152) afirmam ainda que o uso de matrizes de massa diagonais (juntamente com matrizes de amortecimento nulas ou também diagonais) evita a necessidade de resolver sistemas de equações lineares simultâneas para métodos de integração explícitos como o das Diferenças Centrais, aproveitando ao máximo os benefícios do método e se tornando um procedimento bastante indicado em situações práticas.

Na avaliação da matriz de massa concentrada, Clough e Penzien (1995) afirmam que o procedimento usual para definir os pontos de massas a serem localizados em cada nó é assumir que a estrutura é dividida em segmentos, com os nós servindo como pontos de conexão. De forma semelhante, Bathe (1996) propõe obter essa matriz concentrando partes iguais da massa total do elemento sobre os pontos nodais. Clough e Penzien ainda afirmam que, se mais de um grau de liberdade translacional é especificado sobre o ponto nodal, a mesma massa pontual será associada com cada grau de liberdade e, ainda, que a massa associada a qualquer grau de liberdade rotacional será nula, por causa da hipótese de que uma massa pontual não possui inércia rotacional. Portanto, a matriz de massa concentrada será uma matriz diagonal que incluirá zeros nos elementos da diagonal associados aos graus de liberdade rotacionais, possuindo a aparência da equação (3.32) seguinte.

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_n \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

Cook *et al.* (1989, p. 370), no entanto, afirmam que partículas concentradas não possuem inércia rotacional a menos que esta seja assimilada arbitrariamente, e que isso é feito em certos casos para os graus de liberdade rotacionais de barras e placas. Tais autores afirmam ainda que as formulações consistente e concentrada da matriz de massa tem diferentes méritos, e que várias considerações devem ser feitas ao se decidir qual delas, ou combinação delas, é melhor aplicável a uma análise em particular. Também afirmam que a matriz de massa concentrada construída pelo método intuitivo é largamente usada, mas que, para elementos de maior ordem ou de forma irregular, a intuição pode ser arriscada, sendo necessários esquemas sistemáticos na construção de tais matrizes.

No presente trabalho, optou-se por usar a formulação de matriz de massa consistente, dada pela equação (3.31), no algoritmo que implementa o elemento finito de barra de pórtico plano. Essa escolha se deu por vários motivos, incluindo o fato de essa formulação ser mais compatível com a definição da matriz de rigidez, pois se observou que o uso da matriz de massa concentrada, ao eliminar os graus de liberdade rotacionais (incluindo zeros em elementos da sua diagonal), torna necessária a exclusão dessas rotações também na avaliação das propriedades de rigidez, contidas na matriz  $\mathbf{k}$ . Essa exclusão deve ser feita pelo processo de *condensação estática* (CHOPRA, 1995, p. 334; CLOUGH e PENZIEN, 1995, p. 197; HUGHES, 1987, p. 573), que é uma das considerações necessárias a ser levada em conta quando se opta pelo uso de massas concentradas. O uso da matriz de massa consistente, no entanto, elimina a necessidade de aplicar esse processo. Cook *et al.* (1989, p. 375) ainda afirmam que matrizes consistentes são mais precisas para problemas de flexão como aqueles que envolvem elementos de barras (que é exatamente o caso tratado nessa dissertação), além de possuírem uma propriedade conveniente com relação às frequências naturais de vibração e os intervalos de tempo crítico dos métodos de integração (explicada no final da seção 4.4). Tal formulação também é escolhida pelo fato de ser mais generalista e não precisar de esquemas específicos para sua construção.

### 3.4 MATRIZES DE AMORTECIMENTO

De forma totalmente análoga ao que é feito com a matriz de massa, pode-se usar as mesmas funções de interpolação da derivação da matriz de rigidez para encontrar a matriz de amortecimento  $\mathbf{c}$ , chegando à seguinte expressão:

$$\mathbf{c} = \int_V \zeta \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV \quad (3.33)$$

onde  $\zeta$  é o parâmetro de amortecimento do material, análogo à viscosidade. Apesar dessa formulação, no entanto, é impossível definir na prática o parâmetro  $\zeta$  e o amortecimento é geralmente um problema constante na maioria das análises dinâmicas realizadas na realidade. Segundo Cook *et al.* (1989, p. 376)

o amortecimento em estruturas não é do tipo viscoso [...] Esses mecanismos não são bem conhecidos. Além disso, são ainda difíceis de incorporar nas equações de dinâmica das estruturas, ou fazem tais equações computacionalmente difíceis de resolver. Por essa razão, o mecanismo de amortecimento real é usualmente aproximado pelo amortecimento viscoso. (tradução nossa)

Semelhantemente, Bathe (1996, p. 166) afirma que

Na prática é difícil, se não impossível, determinar os parâmetros de amortecimento para abordagens gerais em elementos finitos, em particular porque esses parâmetros são dependentes das frequências. Por essa razão, a matriz  $\mathbf{c}$  é em geral não abordada como matriz de amortecimento, mas é construída usando a matriz de massa e a matriz de rigidez do elemento, junto com resultados experimentais acerca do amortecimento. (tradução nossa)

Clough e Penzien (1995) também afirmam, como já salientado, que o amortecimento é geralmente escrito em termos de taxas de amortecimento estabelecidas por experimentos em estruturas similares. É necessário, portanto, conhecer como tais taxas de amortecimento se relacionam com a matriz  $\mathbf{c}$ .

#### 3.4.1 Vibrações livres não amortecidas e o problema de autovetores

A equação de movimento (3.9) para sistemas MDOF, no caso particular de estrutura sem amortecimento ( $\mathbf{c} = \mathbf{0}$ ) e em vibração livre ( $\mathbf{p}(t) = \mathbf{0}$ ) é dada por:

$$\mathbf{m} \ddot{\mathbf{D}} + \mathbf{k} \mathbf{D} = \mathbf{0} \quad (3.34)$$

Por analogia com soluções conhecidas de sistemas SDOF em vibração livre não amortecida, pode-se assumir um movimento harmônico para a solução da equação (3.34), com frequência de oscilação  $\omega$  e ângulo de fase  $\theta$ , sendo dada então por:

$$\mathbf{D}(t) = \hat{\mathbf{D}} \sin(\omega t + \theta) \quad (3.35)$$

Ao substituir a função (3.35) na equação (3.34), obtém-se a expressão abaixo:

$$(\mathbf{k} - \omega^2 \mathbf{m}) \hat{\mathbf{D}} = \mathbf{0} \quad (3.36)$$

que é conhecida como *problema generalizado de autovetores e autovalores*. As soluções para  $\omega^2$  são conhecidas como autovalores do problema, e as soluções para os deslocamentos  $\hat{\mathbf{D}}$  são os autovetores associados. De acordo com a *regra de crammer*, para que a equação (3.36) tenha alguma solução não trivial para  $\hat{\mathbf{D}}$  é necessário que (BOLDRINI *et al.*, 1980):

$$\det(\mathbf{k} - \omega^2 \mathbf{m}) = 0 \quad (3.37)$$

Sendo esta última expressão conhecida como *equação característica* do problema de autovetores. Essa equação tem o mesmo número  $n$  de soluções que a ordem da matriz  $\mathbf{k}$ , que são os autovalores  $\omega^2$  do problema, cujas raízes fornecem as frequências naturais de oscilação livre  $\omega$  da estrutura, normalmente dispostas em ordem crescente no *vetor de frequências naturais*, explicitado a seguir, onde a frequência mais baixa,  $\omega_1$  é chamada *frequência fundamental*:

$$\boldsymbol{\omega} = [\omega_1 \quad \omega_2 \quad \cdots \quad \omega_n]^T \quad (3.38)$$

Segundo Clough e Penzien (1995, p. 202), é possível mostrar que, para matrizes  $\mathbf{k}$  e  $\mathbf{m}$  reais, simétricas e positivas definidas, o que se refere a sistemas estáveis (e é o que em geral acontece), todas as frequências naturais  $\omega$  serão reais e positivas.

Depois de resolver a equação (3.37) podem-se encontrar os  $n$  autovetores do sistema substituindo os valores  $\omega$  na equação (3.36) e resolvendo o sistema linear obtido para cada  $\omega_i$  encontrado. Como o sistema é homogêneo, o mesmo possuirá

infinitas soluções, logo se percebe que existem infinitos autovetores associados a cada autovalor  $\omega_i^2$ . Os autovetores de referência podem ser tomados com relação a qualquer valor das variáveis livres do sistema linear, e qualquer múltiplo de um autovetor também será outro autovetor. As soluções encontradas para  $\hat{\mathbf{D}}$  são comumente chamadas de *modos de vibração livre do sistema*, já que exibem os deslocamentos da estrutura quando em vibração livre.

É possível demonstrar que, já que as matrizes de massa e rigidez do sistema são simétricas, positivas definidas e reais, os  $n$  autovetores encontrados no problema mencionado são *linearmente independentes*. Assim, eles podem servir como coordenadas generalizadas para expressar qualquer conjunto de deslocamentos ou, em outras palavras, eles formam uma *base* de vetores do espaço vetorial de deslocamentos (BOLDRINI *et al.*, 1980) e qualquer deslocamento poderá ser escrito como uma combinação linear desses vetores, o que permite escrever a equação seguinte:

$$\mathbf{D} = \hat{\mathbf{D}}_1 Y_1 + \hat{\mathbf{D}}_2 Y_2 + \cdots + \hat{\mathbf{D}}_n Y_n \quad (3.39)$$

Camargo (2008) ainda demonstra que, já que as matrizes de massa e rigidez do sistema são simétricas e reais, os autovetores encontrados nesse problema são *ortogonais* em relação a essas matrizes, isto é, dados dois autovetores  $\hat{\mathbf{D}}_s$  e  $\hat{\mathbf{D}}_r$  distintos quaisquer, tem-se

$$\hat{\mathbf{D}}_s^T \mathbf{m} \hat{\mathbf{D}}_r = 0 \quad \text{e} \quad \hat{\mathbf{D}}_s^T \mathbf{k} \hat{\mathbf{D}}_r = 0 \quad (3.40)$$

e com esse fato adicional, é dito que o conjunto dos  $n$  autovetores formam uma *base ortogonal*. Em geral, autovetores associados a matrizes simétricas formam bases ortogonais (BOLDRINI *et al.*, 1980, p. 261). Por outro lado, para um modo de vibração  $i$  qualquer, define-se a *massa generalizada* e a *rigidez generalizada* correspondente ao mesmo, respectivamente, como

$$M_i = \hat{\mathbf{D}}_i^T \mathbf{m} \hat{\mathbf{D}}_i \quad \text{e} \quad K_i = \hat{\mathbf{D}}_i^T \mathbf{k} \hat{\mathbf{D}}_i \quad (3.41)$$

O procedimento de encontrar os deslocamentos da resposta dinâmica escrevendo-os como combinação linear dos modos de vibração, a exemplo da equação (3.39), é chamado de *Método da Superposição Modal*, o qual se inclui nos métodos de superposição de efeitos citados na seção 1.1.

### 3.4.2 Equações desacopladas e amortecimento proporcional

Substituindo a expressão (3.39) na equação (3.9), pré-multiplicando o resultado pelo transposto  $\hat{\mathbf{D}}_i^T$  de algum autovetor específico e usando as propriedades expostas na equação (3.40), junto com as definições da equação (3.41), chega-se a:

$$M_i \ddot{Y}_i + \hat{\mathbf{D}}_i^T \mathbf{c} (\hat{\mathbf{D}}_1 \dot{Y}_1 + \hat{\mathbf{D}}_2 \dot{Y}_2 + \dots + \hat{\mathbf{D}}_n \dot{Y}_n) + K_i Y_i = \hat{\mathbf{D}}_i^T \mathbf{p}(t) \quad (3.42)$$

Definido a *carga generalizada* e o *coeficiente de amortecimento generalizado* para um modo de vibração  $i$  qualquer, respectivamente, como

$$P_i(t) = \hat{\mathbf{D}}_i^T \mathbf{p}(t) \quad \text{e} \quad C_i = \hat{\mathbf{D}}_i^T \mathbf{c} \hat{\mathbf{D}}_i \quad (3.43)$$

e assumindo que os autovetores do problema de vibração livre são ortogonais também em relação à matriz de amortecimento  $\mathbf{c}$ , isto é, dados dois autovetores  $\hat{\mathbf{D}}_s$  e  $\hat{\mathbf{D}}_r$  distintos, tem-se

$$\hat{\mathbf{D}}_s^T \mathbf{c} \hat{\mathbf{D}}_r = 0 \quad (3.44)$$

então a equação (3.42) se transforma em:

$$M_i \ddot{Y}_i + C_i \dot{Y}_i + K_i Y_i = P_i(t) \quad (3.45)$$

A equação (3.45) acima é semelhante à equação (2.5) para sistemas SDOF e pode ser resolvida da mesma forma, independentemente, para cada um dos  $n$  modos de vibração natural, encontrando  $n$  funções  $Y_i$ . Ao provocar o aparecimento de  $n$  equações de movimento independentes, que podem ser resolvidas separadamente, é dito que o sistema inicial foi *desacoplado*. Para que isso fosse feito, assumiu-se

que a propriedade (3.44) é verdadeira, e isso sugere uma forma específica de determinar a matriz de amortecimento  $\mathbf{c}$ .

A forma mais simples de construir a matriz  $\mathbf{c}$  com a característica (3.44) é fazendo-a diretamente proporcional à matriz de massa ou à matriz de rigidez, pelo fato dessas duas matrizes já possuírem à mesma característica, conforme exposto na expressão (3.40). Sabendo disso, uma formulação muito comum para abordar o amortecimento de sistemas MDOF, chamado de *amortecimento proporcional de Rayleigh*, é construir a matriz  $\mathbf{c}$  como combinação linear das matrizes  $\mathbf{m}$  e  $\mathbf{k}$ , isto é:

$$\mathbf{c} = a_0 \mathbf{m} + a_1 \mathbf{k} \quad (3.46)$$

onde as constantes de proporcionalidade  $a_0$  e  $a_1$  possuem, respectivamente, as dimensões de  $s^{-1}$  e  $s$ . Para determinar  $a_0$  e  $a_1$ , procede-se à pré e pós-multiplicação da equação (3.46), respectivamente, pelo transposto  $\hat{\mathbf{D}}_i^T$  de algum autovetor específico e pelo próprio  $\hat{\mathbf{D}}_i$ , usando as definições (3.41) e a segunda das definições (3.43), obtendo assim:

$$C_i = a_0 M_i + a_1 K_i \quad (3.47)$$

Conhecendo os valores de  $M_i$ ,  $K_i$  e  $C_i$  para dois modos de vibração distintos, constrói-se um sistema de duas equações e duas incógnitas através da expressão (3.47) dada acima, cuja solução fornecerá os valores de  $a_0$  e  $a_1$ .

Por outro lado, quando o amortecimento do sistema é representado por uma matriz  $\mathbf{c}$  em relação à qual a propriedade (3.44) não seja válida, ele é dito *amortecimento não proporcional*. Nesse caso, o sistema de equações modais de movimento não é mais desacoplável e o clássico método da superposição modal não pode ser empregado. Calenzani (2002) fez um estudo de análise de sistemas dinâmicos no domínio da frequência com amortecimento não proporcional. Dependendo das características do sistema estudado, o modelo adequado para a consideração do amortecimento deve ser escolhido. Nesta pesquisa, só será considerado a aplicação do amortecimento proporcional de Rayleigh aos exemplos e métodos desenvolvidos.

### 3.4.3 Taxas de amortecimento modais

Analogamente aos sistemas SDOF (equação (2.32)), a taxa de amortecimento modal  $\xi_i$  é definida, para um  $i$ -ésimo modo de vibração qualquer, da seguinte forma:

$$\xi_i = \frac{C_i}{2M_i\omega_i} \quad (3.48)$$

Já que, segundo Clough e Penzien (1995, p.189), “o amortecimento é geralmente escrito em termos de taxas de amortecimento estabelecidas por experimentos”, então é mais conveniente escrever a equação (3.47) em termos de taxas de amortecimento modais. Resolvendo a expressão (3.48) para  $C_i$ , substituindo o resultado na (3.47) e sabendo que a relação de  $M_i$  com  $K_i$  é aquela dada na equação (3.49) seguinte (relação obtida após pré-multiplicar a equação (3.36), para um modo  $i$  qualquer, pelo transposto  $\hat{\mathbf{D}}_i^T$  de seu autovetor) obtém-se então a expressão (3.50) adiante:

$$K_i = M_i \omega_i^2 \quad (3.49)$$

$$\xi_i = \frac{1}{2\omega_i} a_0 + \frac{\omega_i}{2} a_1 \quad (3.50)$$

Conhecendo a taxa de amortecimento e a frequência natural de vibração livre para dois modos de vibração  $\alpha$  e  $\beta$  distintos, podem-se obter os valores de  $a_0$  e  $a_1$  resolvendo o sistema de duas equações obtido com a expressão (3.50), o que fornece o seguinte resultado:

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = 2 \frac{\omega_\alpha \omega_\beta}{\omega_\beta^2 - \omega_\alpha^2} \begin{bmatrix} \omega_\beta & -\omega_\alpha \\ -\frac{1}{\omega_\beta} & \frac{1}{\omega_\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_\alpha \\ \xi_\beta \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

Quando estes dois fatores estiverem calculados, a matriz de amortecimento  $\mathbf{c}$  pode ser obtida pela expressão (3.46), considerando o amortecimento de Rayleigh. Ferreira *et al.* (2000) afirmam que em sistemas estruturais onde o mecanismo de perda de energia está uniformemente distribuído em toda a estrutura, pode-se adotar uma distribuição das forças de amortecimento similar àquela das forças

elásticas e de inércia, e a matriz de amortecimento nesses casos é dada exatamente de acordo com o amortecimento proporcional de Rayleigh.

Segundo Clough e Penzien (1995, p.236),

Pelo fato de informações detalhadas a respeito da variação da taxa de amortecimento com a frequência ser raramente disponível, usualmente é assumido que as mesmas taxas de amortecimentos se aplicam para ambas frequências de controle; ou seja,  $\xi_\alpha = \xi_\beta = \xi$ . Nesse caso, os fatores de proporcionalidade são dados numa versão simplificada da [equação (3.51)]:

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \frac{2\xi}{\omega_\alpha + \omega_\beta} \begin{bmatrix} \omega_\alpha \omega_\beta \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

Ao aplicar esse procedimento de derivação da matriz de amortecimento proporcional na prática, é recomendado que  $\omega_\alpha$  geralmente seja tomada como a frequência fundamental do sistema MDOF e que  $\omega_\beta$  seja tomada entre as frequências mais altas que contribuem significativamente para a resposta dinâmica. (tradução nossa)

### 3.5 MÉTODOS DE INTEGRAÇÃO NO TEMPO

Após encontrar as matrizes da estrutura, como exposto nas seções anteriores, pode ser definido o problema de vibrações em sistemas de múltiplos graus de liberdade escrevendo a equação de equilíbrio dinâmico (3.9). Ao dividir o carregamento em vários pontos específicos (para que a solução possa ser obtida numericamente com um método passo-a-passo) e computar os deslocamentos da estrutura em instantes de tempo discretos, a equação de movimento assumirá uma forma semelhante à equação (2.6), dada por:

$$\mathbf{m} \ddot{\mathbf{D}}_i + \mathbf{c} \dot{\mathbf{D}}_i + \mathbf{k} \mathbf{D}_i = \mathbf{p}_i \quad (3.53)$$

Sabendo que é mais conveniente escrever essa equação usando a formulação incremental, para que o procedimento de solução numérica seja mais generalista (aplicável a ambas as análises linear e não linear, como dito anteriormente) obtém-se, usando metodologia análoga àquela exposta na seção 2.6:

$$\mathbf{m} \Delta \ddot{\mathbf{D}} + \mathbf{c}_0 \Delta \dot{\mathbf{D}} + \mathbf{k}_0 \Delta \mathbf{D} = \Delta \mathbf{p} \quad (3.54)$$

onde  $\mathbf{c}_0$  e  $\mathbf{k}_0$  são as matrizes de amortecimento e de rigidez tangentes iniciais, cujos coeficientes de influência são dados (analogamente às inclinações tangentes iniciais das forças exibidas na Figura 2.9) da seguinte forma:

$$c_{0ij} = \left. \frac{\partial F_{ci}}{\partial \dot{D}_j} \right|_{t_{i-1}} \quad k_{0ij} = \left. \frac{\partial F_{si}}{\partial D_j} \right|_{t_{i-1}} \quad (3.55)$$

E quando o sistema for linear, as matrizes  $\mathbf{c}_0$  e  $\mathbf{k}_0$  permanecem constantes durante toda solução, ficando iguais a  $\mathbf{c}$  e  $\mathbf{k}$ . O processo de solução numérica da equação (3.54) pode ser encontrado fazendo uma comparação direta com a formulação de sistemas SDOF apresentada no Capítulo 2.

### 3.5.1 Generalização do Método de Newmark

Usando o método de Newmark (para  $\beta \neq 0$ ), os resultados finais do equacionamento são análogos às expressões dadas nas equações (2.45) à (2.50), substituindo as grandezas escalares pelas correspondentes matrizes. Dessa forma, a expressão incremental explícita para  $\Delta\mathbf{D}$ , que apresenta a forma de uma equação de equilíbrio estático, será dada por:

$$\bar{\mathbf{k}} \Delta\mathbf{D} = \bar{\Delta\mathbf{p}} \quad (3.56)$$

onde a *matriz de rigidez efetiva*  $\bar{\mathbf{k}}$  e o *vetor de carregamento efetivo incremental*  $\bar{\Delta\mathbf{p}}$  são dados, respectivamente, por:

$$\bar{\mathbf{k}} = \frac{1}{\beta\Delta t^2} \mathbf{m} + \frac{\gamma}{\beta\Delta t} \mathbf{c}_0 + \mathbf{k}_0 \quad (3.57)$$

$$\bar{\Delta\mathbf{p}} = \Delta\mathbf{p} + \mathbf{m} \left( \frac{1}{\beta\Delta t} \dot{\mathbf{D}}_{i-1} + \frac{1}{2\beta} \ddot{\mathbf{D}}_{i-1} \right) + \mathbf{c}_0 \left[ \left( \frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) \Delta t \ddot{\mathbf{D}}_{i-1} + \frac{\gamma}{\beta} \dot{\mathbf{D}}_{i-1} \right] \quad (3.58)$$

Ao resolver a equação (3.56) para o incremento de deslocamento  $\Delta\mathbf{D}$ , o incremento de velocidade  $\Delta\dot{\mathbf{D}}$  pode ser calculado através da equação seguinte, semelhante à expressão (2.45):

$$\Delta\dot{\mathbf{D}} = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \Delta\mathbf{D} + \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right) \Delta t \ddot{\mathbf{D}}_{i-1} - \frac{\gamma}{\beta} \dot{\mathbf{D}}_{i-1} \quad (3.59)$$

e a aceleração no início do passo é encontrada através da equação (3.60) dada a seguir, análoga à (2.50), no intuito de impor a condição de equilíbrio para evitar a acumulação de possíveis erros provenientes de uma análise dinâmica não linear, como dito anteriormente.

$$\ddot{\mathbf{D}}_{i-1} = \mathbf{m}^{-1}(\mathbf{p}_{i-1} - \mathbf{c}_0 \dot{\mathbf{D}}_{i-1} - \mathbf{k}_0 \mathbf{D}_{i-1}) \quad (3.60)$$

Após obter os incrementos  $\Delta\mathbf{D}$  e  $\Delta\dot{\mathbf{D}}$ , a velocidade e o deslocamento no final do passo de tempo são obtidos por equações idênticas as (2.43) e (2.44):

$$\dot{\mathbf{D}}_i = \dot{\mathbf{D}}_{i-1} + \Delta\dot{\mathbf{D}} \quad (3.61)$$

$$\mathbf{D}_i = \mathbf{D}_{i-1} + \Delta\mathbf{D} \quad (3.62)$$

Ao fazer  $\gamma = 1/2$  e  $\beta = 1/4$  nas equações anteriores, o método de Newmark se reduz ao método que considera a aceleração média constante ao longo do passo, analogamente ao que foi mostrado na seção 2.5. Já adotando  $\gamma = 1/2$  e  $\beta = 1/6$ , as equações ficam equivalentes ao método da aceleração linear. A hipótese da aceleração constante tem a grande vantagem de ser um procedimento de integração incondicionalmente estável, enquanto o método da aceleração linear exige que o comprimento do passo de tempo  $\Delta t$  seja menor ou igual a  $0.551 T_J$ , para que haja estabilidade, onde  $T_J$  é o período de vibração livre associado à maior frequência, obtida resolvendo o problema de autovetor (ou seja, é o período de vibração mais curto), que contribui para a formação da resposta (CHOPRA, 1995, p. 567-570).

### 3.5.2 Generalização do Método das Diferenças Centrais

Para  $\beta = 0$ , o que corresponde ao Método das Diferenças Centrais, as equações (3.56) à (3.58) devem ser substituídas pelas equações seguintes, onde as duas últimas são análogas às expressões (2.57) e (2.58) do capítulo anterior.

$$\bar{\mathbf{k}} \bar{\Delta\mathbf{D}} = \bar{\Delta\mathbf{p}} \quad (3.63)$$

$$\bar{\mathbf{k}} = \frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{m} + \frac{1}{2\Delta t} \mathbf{c} \quad (3.64)$$

$$\bar{\Delta\mathbf{p}} = \Delta\mathbf{p} - \mathbf{k}_0 \Delta\mathbf{D} + \mathbf{m} \left( \frac{1}{\Delta t^2} \Delta\mathbf{D} + \ddot{\mathbf{D}}_{i-2} \right) + \mathbf{c}_0 \left( \dot{\mathbf{D}}_{i-2} - \frac{1}{2\Delta t} \Delta\mathbf{D} \right) \quad (3.65)$$

Nestas fórmulas,  $\Delta\mathbf{D}$  simboliza a variação de deslocamento no passo anterior, isto é,  $\Delta\mathbf{D} = \mathbf{D}_{i-1} - \mathbf{D}_{i-2}$  enquanto que o incremento de deslocamento do passo atual é representado aqui por  $\bar{\Delta\mathbf{D}}$ . Tais fórmulas devem ser usadas visto que  $\beta = 0$  causa uma indeterminação nas equações (3.57) e (3.58). Por fim, os vetores de aceleração e velocidade no início do passo são encontrados, neste método, pelas equações seguintes, análogas às (2.51) e (2.52) do capítulo anterior.

$$\ddot{\mathbf{D}}_{i-1} = \frac{\bar{\Delta\mathbf{D}}}{\Delta t^2} - \frac{\Delta\mathbf{D}}{\Delta t^2} \quad (3.66)$$

$$\dot{\mathbf{D}}_{i-1} = \frac{\bar{\Delta\mathbf{D}}}{2\Delta t} + \frac{\Delta\mathbf{D}}{2\Delta t} \quad (3.67)$$

O Método das Diferenças Centrais só será estável para  $\Delta t \leq T_J/\pi$  (CHOPRA, 1995, p. 568).

### 3.5.3 Considerações sobre os métodos de integração

Os valores do passo de tempo crítico ( $\Delta t_{crit}$ ) para sistemas MDOF, citados neste capítulo, também podem ser encontrados usando a equação (2.31) do capítulo anterior, substituindo  $T$  por  $T_J$ , e escolhendo os valores apropriados para  $\gamma$  e  $\beta$ . Na

verdade, as condições de estabilidade das equações mostradas na seção 2.5.2 são exatamente as mesmas a serem aplicadas em sistemas MDOF, porém devem ser satisfeitas para todos os modos de vibração e, por isso, toma-se o menor período  $T_J$  (associado à máxima frequência) para a definição do máximo incremento de tempo necessário à estabilidade, pois esse é o valor crítico (HUGHES, 1987, p. 493).

Por fim, nota-se que, caso se use o modelo de massa concentrada para a matriz  $\mathbf{m}$  (tornando-a diagonal) e a matriz de amortecimento  $\mathbf{c}$  também for tomada como diagonal, então o sistema linear da equação (3.63) do Método das Diferenças Centrais é naturalmente desacoplado e sua solução pode ser obtida diretamente sem necessidade de fatorar a matriz de coeficientes, pois as incógnitas já estarão separadas. Isso é possível uma vez que a matriz de rigidez  $\mathbf{k}_0$  (que geralmente não é diagonal) não entra na composição da matriz de rigidez efetiva  $\bar{\mathbf{k}}$  neste caso, o que não acontece no método de Newmark, cuja matriz  $\bar{\mathbf{k}}$  é dada na equação (3.57) e claramente possui contribuição da matriz  $\mathbf{k}_0$ . Assim, o método geral de Newmark sempre exige a solução de um sistema de equações algébricas lineares no caso de estruturas MDOF, gerando outra definição de método implícito, presente na literatura, já citada nas seções 2.2.2 e 2.7.3. Cook *et al.* (1989, p. 398-399) mostram uma forma alternativa do Método das Diferenças Centrais que não requer a resolução de um sistema de equações simultâneas mesmo quando a matriz  $\mathbf{c}$  não é diagonal, requerendo que isso ocorra apenas para a matriz  $\mathbf{m}$  (massa concentrada).

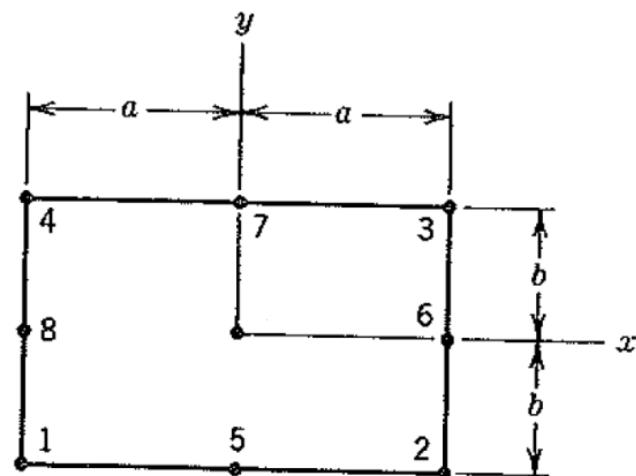
## 4 IMPLEMENTAÇÃO DO PROGRAMA

Ao construir um programa computacional que faça análise dinâmica estrutural em pórticos planos sob cargas variáveis, deve-se definir antes quais serão as características do elemento finito implementado. As seções a seguir tratam da formulação do elemento escolhido e a organização do programa numérico desenvolvido.

### 4.1 FORMULAÇÃO DO ELEMENTO

Inicialmente, tentou-se implementar um elemento finito plano quadrilateral quadrático de 8 nós, com dois deslocamentos possíveis por nó, que descreva um corpo sólido em estado plano de tensão/deformação, ilustrado na Figura 4.1 abaixo. O elemento é chamado “quadrático” porque seus lados possuem 3 nós cada um, necessitando de funções polinomiais quadráticas para interpolá-los.

Figura 4.1 – Elemento quadrilateral quadrático de 8 nós



Fonte: Adaptado de Cook, Malkus e Plesha (1989, p. 107)

Nesse caso, como o elemento é plano, ter-se-ia o campo de deslocamentos possuindo apenas duas componentes, sendo dado, analogamente à equação (3.18), pela primeira das equações (4.1) seguintes, e a relação de  $\epsilon$  com  $\phi$  seria dada pela equação (3.19), porém com  $\epsilon = [\epsilon_x \quad \epsilon_y \quad \gamma_{xy}]^T$  e com o operador diferencial  $\partial$  restrito ao problema de duas dimensões (2D) isto é, como mostrado na segunda das

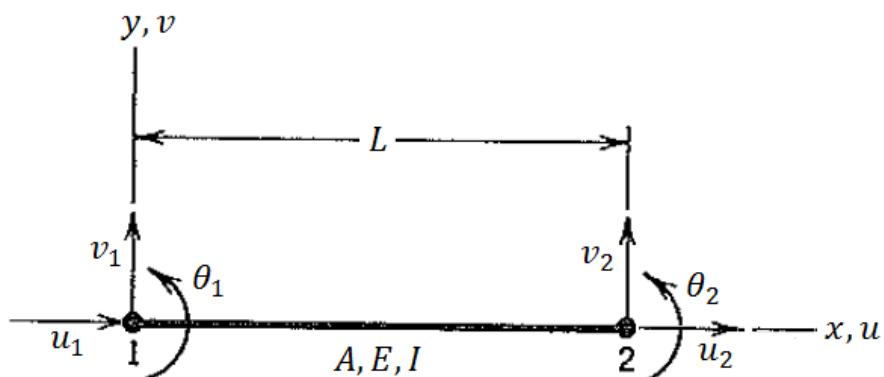
equações (4.1) seguintes. Já o campo  $\Phi$  teria suas componentes  $u$  e  $v$  dadas, na formulação de elementos finitos, pela equação (4.2) adiante:

$$\Phi = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\partial} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^8 u_i N_i(x, y) \quad v(x, y) = \sum_{i=1}^8 v_i N_i(x, y) \quad (4.2)$$

Esse elemento, no entanto, foi descartado ao longo da realização da pesquisa por apresentar alguns problemas iniciais que impediam o avanço da mesma para a etapa de adaptatividade no tempo. Os problemas incluíam dificuldades nos cálculos de autovalores de frequências naturais e a necessidade de muitos elementos (e consequentemente muitos graus de liberdade) para modelar estruturas simples, como pórticos planos compostos de poucas barras. Por isso, optou-se em seguida por utilizar o elemento finito de “barra de pórtico plano”, descrito por apenas 2 nós em cada barra/elemento e com 3 deslocamentos possíveis em cada nó (translações  $u$  e  $v$  e rotação  $\theta$ ), como mostra a Figura 4.2. Este elemento foi escolhido em definitivo para testar as rotinas finais (as propriedades da seção transversal da barra são consideradas constantes ao longo do seu comprimento).

Figura 4.2 – Elemento de barra de pórtico plano



Fonte: Adaptado de Cook, Malkus e Plesha (1989, p. 113)

Para descrever o elemento de barra da Figura 4.2, no entanto, é preciso fazer algumas adaptações nas equações escritas no Capítulo 3, já que os deslocamentos na direção ortogonal ao eixo da barra tem sua descrição um pouco diferente daquela exibida nas equações (3.21) e (3.23), pois recebem contribuição também das rotações nos nós, além das translações.

O campo de deslocamentos desse elemento ainda possui duas componentes, sendo dado, portanto, ainda pela primeira das equações (4.1). As componentes  $u$  e  $v$ , porém, não são mais dadas pelas equações (4.2), pois, enquanto a componente  $u$  é interpolada por apenas dois deslocamentos nodais ( $u_1$  e  $u_2$ ) a componente  $v$  necessita de quatro informações, nomeadamente as translações  $v_1$  e  $v_2$  e as rotações  $\theta_1$  e  $\theta_2$ . Por isso, esses deslocamentos são descritos pelas seguintes expressões:

$$u(x) = u_1 N_1(x) + u_2 N_2(x) \quad (4.3)$$

$$v(x) = v_1 N_3(x) + \theta_1 N_4(x) + v_2 N_5(x) + \theta_2 N_6(x) \quad (4.4)$$

Escrevendo essas expressões numa forma matricial, tem-se, de forma parecida com a equação (3.23):

$$\Phi = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 \\ 0 & N_3 & N_4 & 0 & N_5 & N_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \mathbf{N} \mathbf{D} \quad (4.5)$$

E seguindo o que foi citado na seção 3.2, supõe-se expressões polinomiais para as funções  $N_i(x)$ . Enquanto as funções de interpolação  $N_1$  e  $N_2$  da componente  $u$  podem ser descritas por polinômios lineares (já que devem interpolar dois deslocamentos apenas) as quatro funções da componente  $v$  são definidas por curvas cúbicas, pois devem reunir os quatro dados necessários à sua descrição. Com isso, a forma geral dessas funções é dada pelos polinômios das seguintes equações (4.6) e (4.7). Para encontrar os coeficientes desconhecidos desses

polinômios, usam-se as condições de contorno das funções  $N_i$ , baseando-se nos deslocamentos sobre os nós.

$$N_i(x) = a_1 + a_2x \quad (i = 1, 2) \quad (4.6)$$

$$N_i(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3 \quad (i = 3, 4, 5, 6) \quad (4.7)$$

Assumindo que a rotação  $\theta$  do eixo da barra seja pequena, de forma que se faça  $\theta = dv/dx$ , as condições sobre os deslocamentos são:

Nó 1: ( $x = 0$ )

$$u(x) = u_1$$

$$v(x) = v_1$$

$$\frac{dv}{dx}(x) = \theta_1$$

Nó 2: ( $x = L$ )

$$u(x) = u_2$$

$$v(x) = v_2$$

$$\frac{dv}{dx}(x) = \theta_2$$

(4.8)

E esses valores geram as seguintes condições de contorno para as funções  $N_i$  (de acordo com as equações (4.3) e (4.4)):

$$x = 0 : \quad N_1 = N_3 = \frac{dN_4}{dx} = 1 \quad (4.9)$$

$$N_2 = N_4 = N_5 = N_6 = \frac{dN_3}{dx} = \frac{dN_5}{dx} = \frac{dN_6}{dx} = 0$$


---

$$x = L : \quad N_2 = N_5 = \frac{dN_6}{dx} = 1 \quad (4.10)$$

$$N_1 = N_3 = N_4 = N_6 = \frac{dN_3}{dx} = \frac{dN_4}{dx} = \frac{dN_5}{dx} = 0$$

Observa-se que só é necessário conhecer duas condições para as funções  $N_1$  e  $N_2$  (não necessitando saber o valor de suas derivadas), pois elas são polinômios lineares. Depois de usar as condições de contorno dadas acima para descobrir os

coeficientes  $a_i$ 's de cada uma das funções  $N_i$ , têm-se as funções de interpolação do elemento de barra de pórtico plano sendo finalmente dadas por:

$$\begin{aligned} N_1 &= 1 - \frac{x}{L} & N_2 &= \frac{x}{L} \\ N_3 &= 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} & N_4 &= x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \\ N_5 &= \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} & N_6 &= -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \end{aligned} \quad (4.11)$$

## 4.2 MATRIZES DE RIGIDEZ E DE MASSA DO ELEMENTO

Para encontrar as matrizes de rigidez e de massa do elemento, procede-se à abordagem demonstrada nas seções 3.2 e 3.3 do capítulo anterior. No entanto, o vetor do estado de deformação usado para modelar o funcional de energia potencial  $\Pi$ , que seria dado por  $\epsilon = [\epsilon_x \ \epsilon_y \ \gamma_{xy}]^T$  (num problema de estado plano de tensão/deformação) é simplificado para  $\epsilon = [\epsilon_x]$ . A razão disso se baseia nas hipóteses assumidas pela mecânica dos sólidos deformáveis no tratamento de elementos de barras, que expõe o seguinte:

1. A deformação  $\epsilon_y$  é sempre nula, visto que (como mostra a equação (3.19)) ela é dada pela derivada parcial  $\partial v / \partial y$ , que é nula porque a componente  $v$  não é função de  $y$ , como visto na seção anterior;
2. A deformação  $\gamma_{xy}$  é desprezada em problemas de barras, elementos nos quais os efeitos de flexão são predominantes sobre os de cisalhamento, e por isso as tensões tangenciais (que causam as deformações angulares  $\gamma_{xy}$ ) são usualmente negligenciadas no cálculo dos deslocamentos.

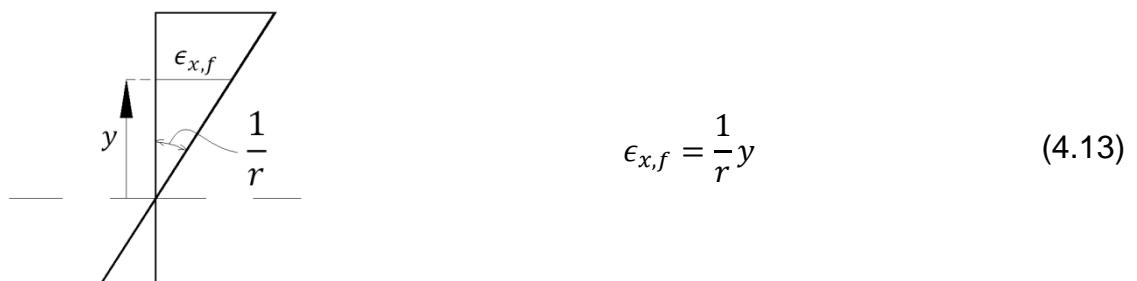
Com isso, a matriz constitutiva do material também fica simplificada, passando a ser dada somente pelo seu módulo de elasticidade, isto é,  $E = E$ , e a lei de Hooke fica reduzida à:  $\epsilon_x = \sigma_x/E$ .

Entretanto, por conveniência, a deformação  $\epsilon_x$  será separada em duas componentes, que representam contribuições independentes das solicitações axiais e de flexão. Simbolizando essas duas contribuições por  $\epsilon_{x,a}$  e  $\epsilon_{x,f}$ , respectivamente, tem-se que  $\epsilon_x = \epsilon_{x,a} + \epsilon_{x,f}$ , sendo que é conveniente (como será mostrado) representar o vetor do estado de deformação separando essas duas parcelas, da seguinte maneira:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_{x,a} \\ \epsilon_{x,f} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

E cada uma dessas parcelas se relaciona de forma diferente com as componentes  $u$  e  $v$  do campo de deslocamentos  $\Phi$ : A relação de  $\epsilon_{x,a}$  com o deslocamento axial  $u$  segue a mesma regra já mostrada na equação (3.19) para estado triplo de tensão, exibida na primeira das equações (4.14) a seguir; já a relação de  $\epsilon_{x,f}$  com  $v$  é obtida da dependência entre essa deformação, a ordenada  $y$  do ponto onde é medida essa deformação (tomada a partir do centroide da seção transversal, por onde passa a Linha Neutra) e a curvatura da linha elástica da barra ( $1/r$ ). Essa dependência é ilustrada na Figura 4.3 e exibida na equação (4.13) abaixo, de onde a relação com o deslocamento  $v$  (dada na segunda das equações (4.14)) é obtida ao considerar a curvatura  $1/r$  igual a  $\partial^2 v / \partial x^2$ , que é uma das hipóteses assumidas na mecânica dos sólidos deformáveis.

Figura 4.3 – Deformações de flexão na seção transversal



$$\epsilon_{x,a} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \epsilon_{x,f} = y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (4.14)$$

A representação do vetor  $\boldsymbol{\epsilon}$  na forma exibida na equação (4.12) não altera o resultado final da expressão (3.15) usada para modelar o funcional de energia

potencial  $\Pi$  (isto é, não altera o resultado obtido ao considerar  $\epsilon = [\epsilon_x] = [\epsilon_{x,a} + \epsilon_{x,f}]$ ), mas é mais conveniente, pois permite expressar a relação de  $\epsilon$  com  $\phi$  da mesma forma que na equação (3.19), ou seja:  $\epsilon = \partial \phi$ , onde o operador  $\partial$  é agora representado por:

$$\partial = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & y \frac{\partial^2}{\partial x^2} \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

Com isso, usando a expressão (4.5) para  $\phi$ , a relação de  $\epsilon$  com  $\mathbf{D}$  continua idêntica à equação (3.24), onde  $\mathbf{B} = \partial \mathbf{N}$ . Para o elemento de barra de pórtico, o cálculo de  $\mathbf{B}$  é feito com a matriz  $\mathbf{N}$  dada na equação (4.5), com as funções  $N_i$  exibidas nas expressões (4.11).

Assim, a matriz de rigidez  $\mathbf{k}$  é então obtida a partir da integral volumétrica da equação (3.26) do capítulo anterior. Fazendo o elemento de volume  $dV$  igual ao produto  $dA dx$ , integrando as funções em  $x$  desde  $x = 0$  até  $x = L$  e os termos variantes ao longo de  $dA$  seguindo as definições exibidas a seguir:

$$\int_A dA = A \quad \int_A y^2 dA = I \quad (4.16)$$

(Definições essas que denotam a área  $A$  e o momento de inércia  $I$  da seção transversal da barra) e considerando, como já dito,  $E = E$ , chega-se na forma final da matriz de rigidez de pórtico plano dada a seguir.

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

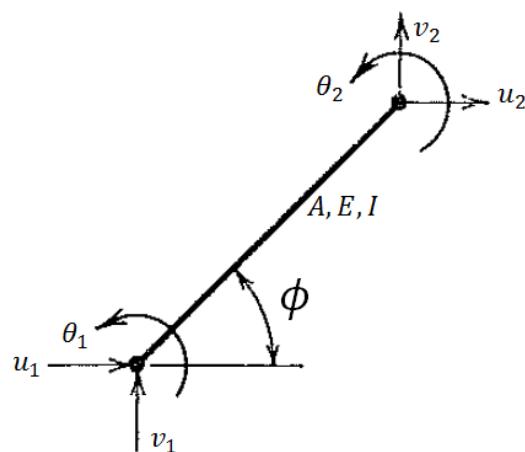
Para obter a matriz de massa  $\mathbf{m}$ , usa-se a matriz  $\mathbf{N}$  na integral da equação (3.31), fazendo, porém, o elemento de volume  $dV$  igual ao produto  $A dx$ , já que as funções envolvidas variam apenas com  $x$ . Resolvendo a integral entre os limites  $x = 0$  e  $x = L$  e fazendo o produto  $\rho A$  igual à  $\bar{m}$  (que denota a massa uniformemente distribuída por unidade de comprimento da barra), tem-se a forma final da matriz de massa consistente de pórtico plano dada a seguir:

$$\mathbf{m} = \frac{\bar{m}L}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 54 & -13L \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 13L & -3L^2 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 156 & -22L \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

### Mudança de base

As matrizes mostradas nas equações (4.17) e (4.18) anteriores são válidas para trabalhar com deslocamentos compatíveis com os eixos exibidos na Figura 4.2, isto é, translações nas direções longitudinal e perpendicular à barra e rotações no plano do elemento. Quando, porém, a barra tem uma inclinação  $\phi$  com relação à horizontal e os deslocamentos são medidos em relação aos eixos horizontal e vertical (eixos globais, como mostrado na Figura 4.4 seguinte), então o vetor  $\mathbf{D}$  deve ter suas coordenadas transformadas para a base de eixos locais do elemento, antes de interagir com as matrizes estruturais  $\mathbf{m}$  e  $\mathbf{k}$  e formar os vetores de força  $\mathbf{F}$ .

Figura 4.4 – Elemento de barra com inclinação  $\phi$



Fonte: Adaptado de Cook, Malkus e Plesha (1989, p. 26)

Dado um vetor de deslocamentos  $[u \ v \ \theta]^T$ , cujos elementos representam as coordenadas das duas translações e da rotação no plano segundo os eixos globais, então a matriz que muda essas coordenadas e as coloca em relação a uma base de eixos inclinada de um ângulo  $\phi$  (com a horizontal) é a seguinte:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

Assim, para o vetor  $\mathbf{D} = [u_1 \ v_1 \ \theta_1 \ u_2 \ v_2 \ \theta_2]^T$  a matriz de mudança de base deve considerar os deslocamentos nos nós 1 e 2 do elemento, sendo dada por (usando a matriz  $\mathbf{R}$  acima e duas matrizes nulas  $\mathbf{0}$  quadradas de ordem 3):

$$\mathbf{R}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R} \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

O vetor obtido ao fazer a multiplicação  $\mathbf{R}_t \mathbf{D}$  pode interagir então com as matrizes  $\mathbf{m}$  e  $\mathbf{k}$  das equações (4.17) e (4.18) para obter os vetores de força  $\mathbf{F}_R$  e  $\mathbf{F}_S$ . Esses vetores de força, no entanto, serão dados segundo os eixos locais inclinados do elemento (compatíveis com a Figura 4.2), devendo, portanto, ter suas coordenadas novamente alternadas para a base de eixos globais, através da multiplicação de uma matriz de mudança de base que é a inversa daquela mostrada na equação (4.20). Percebe-se, porém, que a inversa dessa matriz é igual a sua transposta  $\mathbf{R}_t^T$ , o que caracteriza uma *matriz ortogonal* (BOLDRINI *et al.*, 1980, p. 254).

Portanto, as matrizes estruturais finais do elemento inclinado com ângulo  $\phi$ , que multiplicam o vetor  $\mathbf{D}$  e suas derivadas (dados todos segundo eixos globais) e obtêm os vetores de força  $\mathbf{F}$  (também em eixos globais) são as seguintes:

$$\mathbf{m}_l = \mathbf{R}_t^T \mathbf{m} \mathbf{R}_t \quad \mathbf{k}_l = \mathbf{R}_t^T \mathbf{k} \mathbf{R}_t \quad (4.21)$$

Onde as matrizes  $\mathbf{m}$  e  $\mathbf{k}$  são aquelas obtidas para a barra com eixo na horizontal, ilustrada na Figura 4.2, e a matriz  $\mathbf{R}_t$  é dada na equação (4.20).

## 4.3 APLICAÇÃO DO ELEMENTO AO PROGRAMA

A aplicação do elemento formulado na análise dinâmica de estruturas planas exige, como passo inicial, a declaração de suas matrizes de rigidez e de massa em termos das variáveis do problema, exibidas nas equações (4.17) e (4.18). Para obtê-las no programa computacional, no entanto, o procedimento descrito a seguir se propõe a achar primeiramente as matrizes  $\mathbf{N}$  e  $\mathbf{B}$ , com os métodos descritos anteriormente, e usá-las em seguida para determinar as matrizes estruturais. Isso tornará o programa mais generalista e eliminará a necessidade de declarar as matrizes  $\mathbf{m}$  e  $\mathbf{k}$  termo a termo, além de possibilitar obter a deformada de todas as barras da estrutura através das funções contidas em  $\mathbf{N}$ .

### 4.3.1 Matrizes de massa e de rigidez simbólicas

No intuito de automatizar a obtenção simbólica da matriz  $\mathbf{N}$  no programa computacional, pode-se considerar que todas as seis funções  $N_i$  são representadas por polinômios cúbicos como aquele descrito na equação (4.7), cuja derivada é dada a seguir:

$$\frac{dN_i}{dx} = a_2 + a_3 2x + a_4 3x^2 \quad (4.22)$$

Calculando o valor do polinômio e de sua derivada, sequencialmente, para os pontos  $x = 0$  e  $x = L$ , obtém-se o seguinte sistema de equações algébricas lineares cujas incógnitas são os coeficientes  $a_i$ :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2 \cdot L & 3 \cdot L^2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{Q}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}}_{\mathbf{a}} = \underbrace{\begin{pmatrix} N_i(0) \\ \frac{d}{dx} N_i(0) \\ N_i(L) \\ \frac{d}{dx} N_i(L) \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}_i} \quad (4.23)$$

A particularidade para as funções  $N_1$  e  $N_2$  é que a solução desse sistema deve fornecer  $a_3 = a_4 = 0$ . Resolvendo o sistema, obtém-se:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{L^2} & -\frac{2}{L} & \frac{3}{L^2} & -\frac{1}{L} \\ \frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} & -\frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} \end{pmatrix}}_{Q^{-1}} \cdot \begin{pmatrix} N_i(0) \\ \frac{d}{dx}N_i(0) \\ N_i(L) \\ \frac{d}{dx}N_i(L) \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

E observando as condições de contorno exibidas nas equações (4.9) e (4.10) pode-se determinar o vetor de termos independentes  $\mathbf{b}_i$  dado na equação (4.24) para cada uma das seis funções  $N_i$ . Para as funções  $N_1$  e  $N_2$ , em particular, acrescenta-se a aquelas condições o valor de suas derivadas (que não foram exibidas anteriormente) dadas pelas constantes a seguir:

$$\frac{dN_1}{dx} = -\frac{1}{L} \quad \frac{dN_2}{dx} = \frac{1}{L} \quad (4.25)$$

Tais valores podem ser obtidos diretamente das expressões de  $N_1$  e  $N_2$  (mostradas na equação (4.11)) ou lembrando que a derivada da componente de deslocamentos  $u$  expressa a deformação axial devida à solicitação normal, que é constante no caso de cargas nodais, dada pela seguinte expressão:

$$\frac{du}{dx} = \frac{\Delta L}{L} = \frac{u_2 - u_1}{L} \quad (4.26)$$

Comparando essa fórmula com a equação de  $u(x)$  mostrada em (4.3), chega-se às condições exibidas em (4.25). Com isso, tem-se para os vetores  $\mathbf{b}_i$ .

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{L} \\ 0 \\ -\frac{1}{L} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \\ 1 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b}_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad (4.27)$$

Para a obtenção simbólica da matriz  $\mathbf{N}$ , pode-se considerar o vetor-linha  $\mathbf{X}$  seguinte, que contém os multiplicadores dos coeficientes do polinômio de interpolação  $N_i(x)$ , visto na equação (4.7):

$$\mathbf{X} = [1 \quad x \quad x^2 \quad x^3] \quad (4.28)$$

As linhas da matriz  $\mathbf{Q}$  do sistema linear dado na equação (4.23) serão então iguais a esse vetor-linha  $\mathbf{X}$  (e sua correspondente derivada  $d\mathbf{X}/dx$ ) tomados nos pontos  $x = 0$  e  $x = L$ , sequencialmente.

Multiplicando esse vetor  $\mathbf{X}$  pela solução  $\mathbf{a} = [a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4]^T$  dos coeficientes de  $N_i$ , dada pela equação (4.24), obtém-se a própria expressão de  $N_i(x)$ , isto é:

$$N_i(x) = \mathbf{X} \mathbf{a} = \mathbf{X} \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{b}_i \quad (4.29)$$

Sendo essa expressão calculada para  $i = 1, 2, \dots, 6$  usando o correspondente vetor de termos independentes  $\mathbf{b}_i$  explicitado nas equações (4.27). Dessa forma, obtém-se as funções  $N_i$  e constrói-se a matriz  $\mathbf{N}$  da equação (4.5), explicitada a seguir:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 \\ 0 & N_3 & N_4 & 0 & N_5 & N_6 \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

Através dessa matriz  $\mathbf{N}$  pode-se obter a matriz  $\mathbf{m}$ , simbolicamente, com o procedimento descrito anteriormente, usando a equação (3.31): faz-se  $dV = A dx$ ,  $\rho A = \bar{m}$ , e integra-se entre os limites  $x = 0$  e  $x = L$ , isto é:

$$\mathbf{m} = \bar{m} \int_0^L \mathbf{N}^T \mathbf{N} dx \quad (4.31)$$

Cujo resultado é a matriz da equação (4.18).

A matriz  $\mathbf{B}$  poderá então ser obtida por diferenciações das funções  $N_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ) usando a relação:  $\mathbf{B} = \partial \mathbf{N}$ , com  $\partial$  dado na equação (4.15). Entretanto, para o cálculo simbólico da matriz  $\mathbf{k}$ , convém representar  $\mathbf{B}$  na forma (4.32) dada a seguir, separando o vetor dependente de  $y$  das derivadas das funções  $N_i$ , armazenadas

numa nova matriz  $\bar{\mathbf{B}}$ . Tal representação é necessária porque o vetor  $[1 \ y]$  será integrado ao longo da área da seção, resultando nas propriedades definidas nas relações (4.16) (área  $A$  e inércia  $I$ ). Essas propriedades são inseridas no cálculo simbólico através de uma outra matriz  $\mathbf{S}$ , exibida na equação (4.34) mais adiante, pois a integração não é capaz de gerar automaticamente tais propriedades, já que as mesmas são uma definição e não um resultado obtido.

$$\mathbf{B} = [1 \ y] \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{dN_1}{dx} & 0 & 0 & \frac{dN_2}{dx} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d^2N_3}{dx^2} & \frac{d^2N_4}{dx^2} & 0 & \frac{d^2N_5}{dx^2} & \frac{d^2N_6}{dx^2} \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{B}}} = [1 \ y] \bar{\mathbf{B}} \quad (4.32)$$

Ao usar a matriz  $\mathbf{B}$  dada acima na equação (3.26) fazendo  $dV = dA \ dx$  e integrando de  $x = 0$  a  $x = L$ , obtém-se finalmente (já assumindo  $\mathbf{E} = E$ ):

$$\mathbf{k} = E \int_0^L \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{S} \bar{\mathbf{B}} \, dx \quad (4.33)$$

Onde a matriz  $\mathbf{S}$  é dada por:

$$\mathbf{S} = \int_A \left( \begin{bmatrix} 1 \\ y \end{bmatrix} [1 \ y] \right) dA = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

Na qual se usa o fato adicional de que:

$$\int_A y \, dA = 0 \quad (4.35)$$

Pois  $y$  é medido a partir do centroide da seção.

O resultado da equação (4.33) será então a matriz da equação (4.17).

### 4.3.2 Geometria e cargas

Após a etapa de achar as expressões das matrizes do elemento utilizado na análise, o próximo passo no programa computacional é fazer a declaração da geometria da estrutura, que se resume em dizer o número de nós do pórtico, o número de barras, as coordenadas dos nós e os nós inicial e final de cada barra. Através dessas informações são obtidos os comprimentos de todas as barras e os ângulos de inclinação dessas com relação à horizontal, conforme a Figura 4.4.

Com os números dos nós especificados em cada elemento, os números dos deslocamentos correspondentes a um nó “ $k$ ” qualquer (translação  $u$  em  $x$ , translação  $v$  em  $y$  e rotação  $\theta$ ) são facilmente alocados no vetor de deslocamentos  $\mathbf{D}$  da estrutura da seguinte forma:

$$u_k = D_{3k-2} \quad v_k = D_{3k-1} \quad \theta_k = D_{3k} \quad (4.36)$$

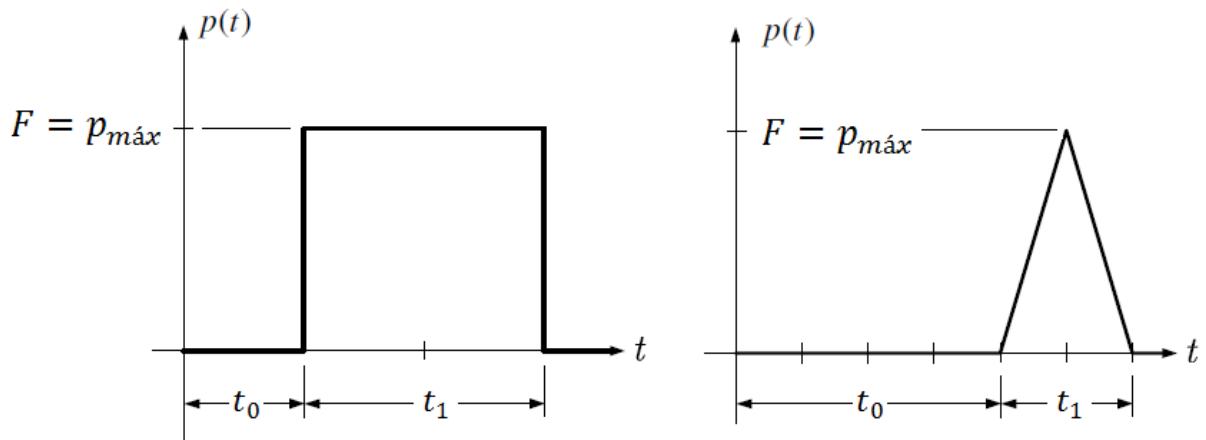
Após a declaração das propriedades do material e das seções (que se assume serem as mesmas em todas as barras do pórtico) e com a matriz de rigidez e de massa do elemento, obtidas simbolicamente, pode-se obter numericamente as matrizes locais de todos os elementos do pórtico aplicando as matrizes  $\mathbf{R}_t$  seguindo as relações (4.21) e, a partir delas, obter a matrizes globais  $\mathbf{K}_G$  e  $\mathbf{M}_G$ , somando as propriedades correspondentes a cada deslocamento nodal que seja comum a um ou mais elementos. O deslocamento nodal do elemento é identificado no vetor de deslocamentos nodais  $\mathbf{D}$  da estrutura através do número do nó, declarado como dado de entrada, e das relações (4.36).

O último passo para iniciar a análise dinâmica da estrutura é determinar o vetor de cargas nodais máximas  $\mathbf{F}$ . Esse vetor representará o valor máximo que as cargas variáveis  $\mathbf{p}(t)$  poderão assumir ao longo do tempo. A forma de variação dessas cargas foi limitada a quatro esquemas possíveis, como ilustrados nas Figura 4.5 e Figura 4.6 seguintes.

A maneira de introduzir as cargas no programa computacional deve ser tal que só haja cargas concentradas nos nós, necessitando ser dito o número total de cargas,

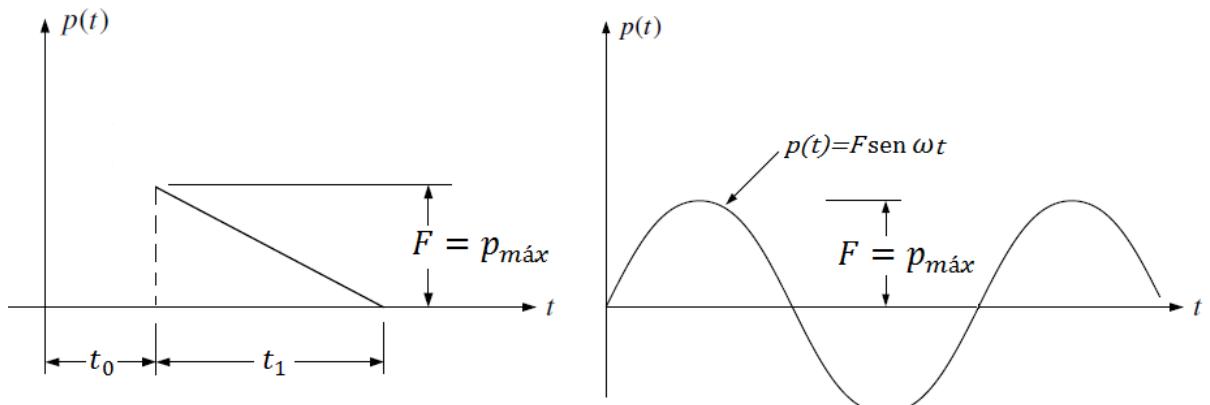
os nós nos quais atuarão essas cargas, as direções correspondentes (se serão forças em  $x$  ou  $y$  ou momentos) e os parâmetros que definem o histórico de cargas, segundo as Figura 4.5 e Figura 4.6 (instante de início  $t_0$ , período de duração  $t_1$  e frequência angular  $\omega$ ).

Figura 4.5 – Opções de cargas: Impulso constante e impulso triangular simétrico



Fonte: Adaptado de Camargo (2008, p. 105)

Figura 4.6 – Opções de carga: Impulso triangular decrescente e carga senoidal



Fonte: Adaptado de Clough e Penzien (1995)

#### 4.3.3 Análise dinâmica, adaptatividade e obtenção das respostas

Após a introdução de todos os dados necessários à caracterização do problema, a análise dinâmica do programa computacional é finalmente realizada através da aplicação de algum método numérico descrito no Capítulo 3. Foi escolhido o método de Newmark-Beta, descrito na seção 3.5, para o qual se devem escolher valores de  $\gamma$  e  $\beta$ , considerando um dos esquemas de variação de carga  $p(t)$  descritos nas

figuras anteriores. O método geral de Newmark foi escolhido em detrimento do método particular das Diferenças Centrais, pois é mais generalista (pode gerar vários outros métodos particulares apenas alterando o valor dos parâmetros  $\gamma$  e  $\beta$ ) e não necessita de procedimentos especiais para início da análise dinâmica, visto que é um método de “passo simples” (seção 2.7.3). Além disso, o Método das Diferenças Centrais tem suas equações deduzidas para a utilização de um incremento de tempo  $\Delta t$  constante (seção 2.3) necessitando ser adaptado ao caso de se utilizar passos de tempo variáveis (ou usando uma das expressões sugeridas por Park e Underwood (1980)), enquanto que no método de Newmark basta substituir o valor constante  $\Delta t$  das equações (3.57), (3.58) e (3.59) pelo valor temporário  $\Delta t_i$ , o qual denota o tamanho do incremento de tempo adotado apenas para o passo  $i$  (essa simplicidade também é uma consequência da atuação do método como sendo de passo simples). O método de Newmark-Beta também é conveniente por possuir uma forma bem definida para suas matrizes efetivas na conversão para a forma explícita (seção 3.5.1) o que não foi observado em métodos mais recentes, como o HHT- $\alpha$ , o WBZ- $\alpha$  e o Método Generalizado- $\alpha$ , os quais possuem ainda o artifício da dissipação numérica (explicada no capítulo seguinte) que não é observada no algoritmo de Newmark.

Junto ao método de integração serão implementadas estratégias que promovam o controle do incremento de tempo  $\Delta t$  das equações de obtenção da resposta. Sabe-se que o procedimento mais comum é estabelecer um valor único para esse incremento, que é mantido constante durante toda análise. Porém, o método mais vantajoso, em termos do desempenho global do processo de integração, é a utilização de passos de tempo de tamanho variável, usando estratégias de controle automático do incremento de tempo. Três dessas estratégias de adaptatividade serão discutidas no capítulo seguinte, sendo escolhidas para serem aplicadas ao programa desenvolvido por se basearem em três conceitos distintos.

Depois de realizada a análise dinâmica e encontrando o vetor  $\mathbf{D}(t)$  para um instante de tempo  $t$  específico, podem-se obter todos os vetores  $\mathbf{d}(t)$ , que denotam os vetores de deslocamentos nodais de cada elemento separadamente (ou seja, todos os vetores  $\mathbf{d}(t)$  terão 6 termos, que correspondem aos deslocamentos nodais dos 2 nós de cada elemento). Os termos de  $\mathbf{d}(t)$  são obtidos pelos termos

correspondentes no vetor  $\mathbf{D}(t)$ , recuperados com as identidades da Figura 4.4 e das relações (4.36).

Depois de obtido o vetor  $\mathbf{d}(t)$  de cada elemento, os mesmos podem ser colocados em coordenadas dos eixos locais, através da matriz  $\mathbf{R}_t$ , dada na equação (4.20), isto é:

$$\bar{\mathbf{d}}(t) = \mathbf{R}_t \mathbf{d}(t) \quad (4.37)$$

Os campos de deslocamentos são então encontrados através da relação  $\boldsymbol{\phi} = \mathbf{N} \bar{\mathbf{d}}(t)$ , válida no sistema de eixos locais (inclinados) de cada elemento finito. A partir destes, os deslocamentos dos pontos das barras no sistema de eixos globais podem ser obtidos através da mudança de base da equação (4.38) a seguir, executada com a matriz  $\mathbf{R}_2$  dada abaixo.

$$\boldsymbol{\Phi}_G = \mathbf{R}_2 \boldsymbol{\phi} = \mathbf{R}_2 (\mathbf{N} \bar{\mathbf{d}}(t)) \quad (4.38)$$

Onde:

$$\mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

Assim, a deformada da estrutura em cada instante  $t$  pode ser traçada somando esses deslocamentos às coordenadas dos pontos da estrutura indeformada.

No Apêndice desse trabalho encontram-se os códigos fontes das rotinas computacionais desenvolvidas ao longo da pesquisa no ambiente de programação do software de cálculo numérico Matlab, as quais implementam os programas descritos nessa seção.

#### **4.4 CONSIDERAÇÕES SOBRE DISCRETIZAÇÃO E MATRIZES DE MASSA**

Como se observou no início do Capítulo 3, as estruturas reais possuem infinitos graus de liberdade, sendo em suas análises geralmente substituídas por sistemas

com um número finito de graus de liberdade, através do conceito de elementos finitos e da formulação matricial de estruturas. Quanto maior é o número de elementos no qual será feita a divisão do domínio do problema, maior é o número de graus de liberdade a ser tratado na análise e, geralmente, maior é a precisão nos resultados.

A aplicação do método dos elementos finitos a problemas de estruturas reticuladas, (isto é, formadas por elementos de barra) como os pórticos planos tratados nesta pesquisa, possui, entretanto, uma particularidade conveniente sob uma análise estática: quando as cargas são concentradas nos nós (como se assumiu) as funções de interpolação do elemento são a solução exata das equações diferenciais associadas ao mesmo, ao invés de serem aproximações. Isso significa que elementos de barra não necessitam ser discretizados (isto é, divididos em vários elementos menores) quando se realiza uma análise estática: os deslocamentos obtidos ao longo da barra usando apenas um único elemento, e suas funções de interpolação (com apenas os nós inicial e final), serão os mesmos obtidos ao se dividir o elemento em vários nós, e os deslocamentos desses nós intermediários podem ser encontrados sem a necessidade de aumentar o número de graus de liberdade do problema, já que as funções de interpolação são soluções exatas. Esse mesmo fato não ocorre com outros tipos de elemento, como aquele exibido na Figura 4.1, cujas funções apenas aproximam o campo de deslocamentos. Essa particularidade dos elementos de barra também mostra que a matriz de rigidez exposta na equação (4.17) é exata, e também pode ser obtida através dos métodos analíticos clássicos da mecânica dos corpos sólidos deformáveis.

Entretanto, a mesma particularidade da matriz de rigidez de barras não ocorre com as matrizes de massa desses elementos, mesmo quando se usa a abordagem consistente. O uso de artifícios como o de trabalhos equivalentes torna aproximado seu processo de obtenção. Por isso, a resposta dinâmica encontrada com os métodos descritos anteriormente sempre fornecem resultados aproximados, e exigem uma discretização mais refinada para obter maior precisão, ainda que a estrutura esteja submetida apenas a cargas concentradas.

Observou-se, na seção 3.4, que o número de frequências naturais do problema de autovalores é igual ao número de graus de liberdade do sistema, logo, quanto maior arbitra-se esse número, mais modos de vibração haverá numa análise dinâmica, o que mostra que nem todas essas frequências são representativas do comportamento real da estrutura. Isso fornece a ideia de que a análise dinâmica feita por elementos finitos é aproximada mesmo para elementos de barra, e quanto maior é a discretização do domínio do problema, mais aproximadas serão as soluções em termos de frequências naturais e de respostas dinâmicas. Meirovitch (1986, Cap. 5) fez uma abordagem de algumas soluções analíticas exatas das equações diferenciais de problemas dinâmicos, escritas para sistemas contínuos, incluindo alguns elementos lineares, as quais foram comparadas com as soluções numéricas obtidas com modelos discretos.

Segundo Cook *et al.* (1989, p. 375), uma característica importante acerca da formulação consistente da matriz de massa é que a solução para as frequências naturais de uma estrutura modelada com esse tipo de matriz são limites superiores das soluções exatas, situando-se, numericamente, sempre acima destas. Cook *et al.* (1989, p. 380) ilustraram essa propriedade através de um exemplo numérico envolvendo elementos de barra de treliça. Esse fato faz com que o intervalo de tempo crítico calculado com as considerações da seção 3.5.3 fique sempre abaixo do valor real (pois quanto maior é uma dada frequência  $\omega_j$ , menor será o período  $T_j$ ) fazendo com que o valor de  $\Delta t_{crit}$  seja mais conservador, garantindo a estabilidade do processo de integração. Isso também contribuiu para motivar a escolha da formulação consistente da matriz de massa na confecção do programa computacional.

## 5 ADAPTATIVIDADE NO TEMPO

O desenvolvimento de programas e métodos de simulações numéricas na solução de problemas em engenharia recorre, em algum momento, à análise de custo computacional para qualquer ferramenta desenvolvida. Essa etapa é quase sempre necessária, já que as tarefas realizadas por esses métodos envolvem inúmeros cálculos e são, em geral, bastante dispendiosas computacionalmente, o que faz com que qualquer melhoria significativa obtida nesses processos se reflita em grandes reduções de tempo de análise, ocasionando ganho de desempenho do programa.

No processo de integração numérica de uma análise dinâmica estrutural, um dos fatores que tem fundamental importância sobre a eficiência do método é o comprimento do intervalo de tempo escolhido na discretização temporal. Esta variável é responsável pelo grau de refinamento da solução numérica, pois quanto menor é o valor do incremento de tempo adotado, mais avaliações instantâneas da resposta da estrutura são realizadas em um dado intervalo, e esse número maior de avaliações permite uma descrição mais detalhada e precisa do comportamento estrutural do modelo, mas acaba por aumentar, em contrapartida, o tempo gasto pela rotina computacional responsável pelo trabalho de integração. A escolha do incremento de tempo deve considerar o conflito entre essas duas demandas: precisão e custo computacional (além de atender também a critérios de convergência e estabilidade). O tamanho ótimo para o passo de tempo é aquele que maximiza a precisão enquanto minimiza o custo computacional. Esse valor pode alterar-se durante a execução da análise, devido a mudanças nas funções de carga e a não linearidades do sistema. No entanto, a tarefa de escolher o passo de tempo a ser usado geralmente é feita mediante a experiência do analista ou através de tentativas, e quase sempre um passo de tempo de tamanho constante é utilizado durante toda a análise.

A *adaptatividade* pode ser definida como uma estratégia de programação que busca calcular o tamanho ótimo do passo de tempo e ajustá-lo de forma automática durante o processo de solução, aumentando a eficiência computacional da análise. Neste capítulo serão descritas três estratégias diferentes de adaptatividade

encontradas na literatura, que se baseiam em conceitos distintos umas das outras. Na seção 5.2 é exposta a estratégia de Bergan e Mollestad (1985), que usa o conceito da “frequência aparente atual” e “funções de controle” no algoritmo adaptativo. Na seção 5.3 é explicada a abordagem de Hulbert e Jang (1995), a qual é originalmente aplicada ao Método Generalizado- $\alpha$  e se baseia numa estimativa de erro local em cada passo. Por fim, na seção 5.4, é discutida a proposta de Cintra (2008), embasada no cálculo do indicador geométrico de curvatura do histórico de deslocamentos. Antes, porém, é necessário adicionar alguns aspectos práticos gerais acerca do desempenho dos algoritmos de adaptatividade.

## 5.1 ASPECTOS IMPORTANTES SOBRE ALGORITMOS ADAPTATIVOS

O propósito principal de uma estratégia adaptativa geralmente é procurar o máximo tamanho de passo de tempo enquanto se mantém uma precisão pré-determinada. Para que se obtenha sucesso na solução desse problema, uma das premissas básicas a ser observada durante a implementação da estratégia é que o custo dessa adaptação não comprometa a eficiência do algoritmo. Com isto em pauta, Bergan e Mollestad (1985) sugeriram uma lista de sete critérios para projeto e avaliação dos algoritmos de controle do passo de tempo. Sumariamente, esses critérios são:

1. O tamanho do passo de tempo não deve ser influenciado pelo tamanho do passo de tempo inicial, isto é, o passo de tempo ajustado durante a análise deve ser independente do tamanho declarado para o passo inicial;
2. O passo de tempo deve permanecer constante durante uma resposta estacionária e linear (regime permanente);
3. O passo de tempo não deve ser influenciado pelas unidades físicas escolhidas ou pelo número de graus de liberdade nas equações dinâmicas;
4. Todos os parâmetros de entrada do algoritmo devem ser simples de declarar;
5. O custo computacional adicional devido à técnica de controle do passo de tempo deve ser o mínimo possível, de forma a não comprometer o desempenho total;
6. O algoritmo deve reagir instantaneamente às mudanças súbitas na resposta dinâmica;
7. O passo de tempo não deve ser alterado sem necessidade;

Ainda é adicionado aos critérios anteriores o fato de que o passo de tempo não deve ser influenciado por fatores de escala das funções de carga, em problemas lineares. A discussão sobre esses aspectos foi feita de forma detalhada no trabalho de Bergan e Mollestad (1985, p. 301-302).

## 5.2 ESTRATÉGIA DE BERGAN & MOLLESTAD

O uso do quociente de Rayleigh é um conhecido método de cálculo dos autovalores da equação (3.36) quando os correspondentes autovetores são conhecidos ou podem ser estimados de alguma forma (COOK *et al.*, 1989, p. 379; BATHE, 1996, p. 892; HUGHES, 1987, p. 435). A estratégia de Bergan e Mollestad propõe usar uma expressão similar a esse quociente, definida como “frequência característica atual”, dada pela seguinte equação, para um dado passo *i*:

$$\bar{\omega}_i^2 = \frac{\Delta \mathbf{D}^T \mathbf{k}_0 \Delta \mathbf{D}}{\Delta \mathbf{D}^T \mathbf{m} \Delta \mathbf{D}} \quad (5.1)$$

Onde  $\mathbf{k}_0$  e  $\mathbf{m}$  são as matrizes de rigidez tangente e a matriz de massa da estrutura, respectivamente, e  $\Delta \mathbf{D} = \mathbf{D}_i - \mathbf{D}_{i-1}$  (seção 3.5). De forma geral, essa frequência não é igual a nenhum autovalor particular da equação (3.36), “mas reflete de alguma forma a resposta incremental para todos os modos de vibração” (BERGAN e MOLLESTAD, 1985, p. 304, tradução nossa), resultando, portanto, numa estimativa da frequência dominante na resposta. A estratégia de adaptação automática é feita com base nessa frequência, conforme explicado nas seções seguintes. O algoritmo descrito foi aplicado com sucesso nos trabalhos de Andréa Silva (2009, p. 183-188) e Galvão (2004, p. 108-111), com algumas modificações introduzidas por Jacob (1990, p. 69-72), e também faz parte das opções de passo de tempo automático disponíveis no software computacional Ansys 11.0 (ANSYS, INC., 2007, Cap. 15) usado como ferramenta de comparação dos resultados obtidos no Capítulo 6. Crisfield (1997, p. 468) relatou ainda uma aplicação bem sucedida dessa estratégia em problemas dinâmicos não lineares, ressaltando a facilidade de sua implementação.

### 5.2.1 Estimativa inicial do tamanho do incremento de tempo

Com base na frequência da equação (5.1) é definido o “período característico atual” para um dado passo  $i$ , de forma análoga àquela que aparece na equação (2.18), da maneira seguinte:

$$\bar{T}_i = \frac{2\pi}{\sqrt{|\bar{\omega}_i^2|}} \quad (5.2)$$

A razão para se usar o módulo de  $\bar{\omega}_i^2$  é que essa quantidade, no caso de uma rigidez tangencial negativa, pode resultar num valor negativo, e é mais pertinente manter a medida de período  $\bar{T}_i$  como uma quantidade real, segundo os proponentes da estratégia. Os autores ainda notaram que o período  $\bar{T}_i$  varia com o tempo numa resposta não estacionária de um sistema MDOF, seguindo a rigidez e a resposta atuais, e geralmente não corresponde a nenhuma medida de tempo decorrido entre amplitudes nulas.

Com base no período característico atual é estimado um valor para o tamanho do incremento de tempo do passo subsequente, da seguinte forma:

$$\Delta t_{i+1}^* = \lambda \bar{T}_i \quad (5.3)$$

Onde o asterisco indica que esse valor é uma estimativa preliminar para o tamanho passo de tempo  $\Delta t_{i+1}$ .  $\lambda$  é uma constante pré-determinada nomeada como “parâmetro de comprimento do passo” e, segundo Bergan e Mollestad, pode-se usar técnicas específicas de integração no tempo para construir diagramas que ajudem a selecionar o correto valor de  $\lambda$  (de acordo com a precisão desejada) sendo tais diagramas já prontamente disponíveis na literatura. Os autores ainda afirmam que valores típicos de  $\lambda$  estariam no intervalo de 0,005 a 0,1 para algoritmos incondicionalmente estáveis, e que uma boa precisão pode ser normalmente obtida com  $\lambda = 0,05$ . No software computacional Ansys 11.0 é usado exatamente o valor fixo  $\lambda = 0,05 = 1/20$  nessa estratégia adaptativa, o que corresponde a considerar 20 passos de tempo para um período característico completo (ANSYS, INC., 2007, sec. 15.7.4).

### 5.2.2 Algoritmo de adaptatividade

Usar a expressão (5.3) anterior para predizer o valor final do tamanho do passo de tempo implica que esse incremento será alterado constantemente e, como discutido na seção 5.1, isso não é desejável, justificando o fato do valor  $\Delta t_{i+1}^*$  ser apenas uma estimativa. Alterar o comprimento do passo de forma constante implica em alterar também a matriz de rigidez efetiva  $\bar{\mathbf{k}}$  (equação (3.57)) e a necessidade de sua constante fatoração na etapa de resolver o sistema linear (3.56) para obter o valor de  $\Delta \mathbf{D}$ , o que aumenta o custo do método. A mudança constante do passo de tempo só não introduz custo computacional extra em análises não lineares, nas quais é necessário que a matriz de rigidez tangente  $\mathbf{k}_0$  seja alterada repetidamente, o que provoca inevitáveis alterações na matriz  $\bar{\mathbf{k}}$ .

Com o intuito de criar um mecanismo de suavização na alteração automática do incremento de tempo, Bergan e Mollestad introduziram o uso de uma “função de controle”, que encontra o valor final do tamanho do passo de tempo relacionando-o com o passo anterior da seguinte forma:

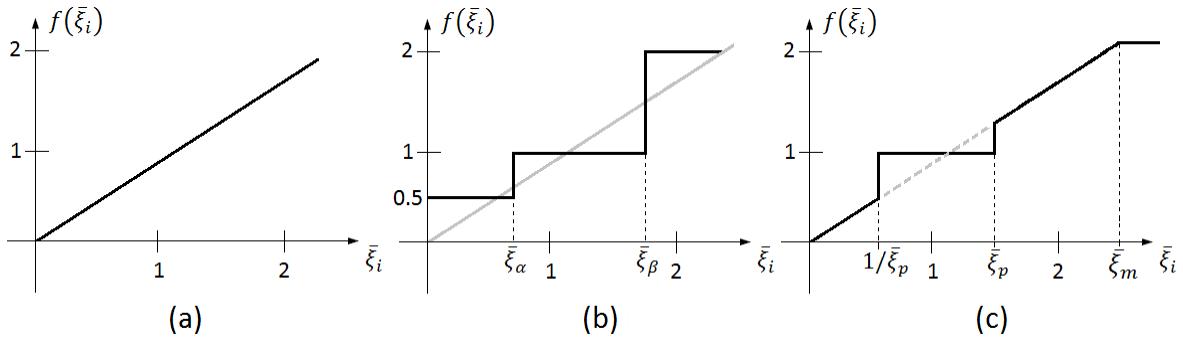
$$\Delta t_{i+1} = f(\bar{\xi}_i) \Delta t_i \quad (5.4)$$

Onde  $f$  é a função de controle e  $\bar{\xi}_i$  é chamada “taxa de incremento de tempo atual”, definida em função de  $\Delta t_{i+1}^*$  por:

$$\bar{\xi}_i = \frac{\Delta t_{i+1}^*}{\Delta t_i} = \frac{\lambda \bar{T}_i}{\Delta t_i} \quad (5.5)$$

Os proponentes da estratégia discutiram formas de determinar a função  $f(\bar{\xi}_i)$  que melhor atendesse aos requisitos de um método de adaptatividade. Na Figura 5.1 a seguir são mostrados três gráficos que ilustram possíveis formas da expressão de  $f(\bar{\xi}_i)$  discutidos pelos autores.

Figura 5.1 – Funções de Controle da estratégia de adaptatividade



Fonte: Adaptado de Bergan e Mollestad (1985, p. 307)

Na Figura 5.1-(a), tem-se  $f(\bar{\xi}_i) = \bar{\xi}_i$ , o que implica que  $\Delta t_{i+1} = \Delta t_{i+1}^*$  na expressão (5.4) e o comprimento do incremento é alterado em todos os passos, o que já se mostrou ser interessante apenas em análises não lineares.

Na Figura 5.1-(b),  $f(\bar{\xi}_i)$  é uma função constante por intervalos, que simplesmente multiplica ou divide o passo de tempo por 2, mantendo-o constante ( $f(\bar{\xi}_i) = 1$ ) num intervalo de valores de  $\bar{\xi}_i$  entre  $\bar{\xi}_\alpha$  e  $\bar{\xi}_\beta$ , significando que o incremento de tempo não se modifica a menos que exista uma maior diferença entre  $\Delta t_{i+1}^*$  e  $\Delta t_i$ .

A Figura 5.1-(c) é uma combinação da Figura 5.1-(a) com a Figura 5.1-(b), onde o patamar constante em torno de  $\bar{\xi}_i = 1$ , definido por um valor  $\bar{\xi}_p$ , serve como proteção contra mudanças desnecessárias no tamanho do passo de tempo. Fora desse patamar, o ajuste do passo ocorre exatamente de acordo com a equação (5.3), a exceção de que o máximo aumento foi limitado a um fator de  $\bar{\xi}_m$ . Bergan e Mollestad (1985, p. 308) afirmam que essa terceira função de controle é mais versátil e melhor do que as duas anteriores.

### 5.2.3 Aspectos computacionais e prescrição de parâmetros

Algumas particularidades da estratégia proposta receberam comentários especiais e pertinentes nos trabalhos consultados. As primeiras observações necessárias dizem respeito aos cálculos finais da frequência característica  $\bar{\omega}_i^2$  e do consequente período  $\bar{T}_i$ . Os outros comentários tratam de prescrições dos parâmetros de entrada do algoritmo.

Primeiramente, notou-se que quando  $\Delta\mathbf{D}$  se torna muito pequeno, ou se anula (situação que pode ocorrer quando a resposta passa por amplitudes máximas, nas quais as velocidades são iguais à zero) a frequência calculada pela equação (5.1) pode ser tornar muito grande ou assumir valores não razoáveis. Entretanto, é simples detectar essas situações, e nesse caso  $\bar{\omega}_i^2$  deve ser atribuída ao seu valor no passo anterior, isto é:

$$\bar{\omega}_i^2 = \bar{\omega}_{i-1}^2 \quad \text{quando} \quad \|\Delta\mathbf{D}_i\| < \varepsilon \|\Delta\mathbf{D}_{i-1}\| \quad (5.6)$$

onde:  $\Delta\mathbf{D}_i = \Delta\mathbf{D} = \mathbf{D}_i - \mathbf{D}_{i-1}$  (segundo a notação anterior) e onde  $\varepsilon$  é uma constante de baixo valor. Bergan e Mollestad sugeriram o valor 0.1 para essa constante, afirmando que esse número “deve ser tão pequeno que apenas situações de potenciais imprecisões numéricas sejam identificadas pela condição” (5.6).

Com relação aos dados de entrada do algoritmo, tem-se que os parâmetros necessários adicionais na estratégia adaptativa são apenas o tamanho do primeiro intervalo de tempo ( $\Delta t_1$ ), o valor do parâmetro de comprimento do passo ( $\lambda$ ) e as constantes  $\xi_p$  e  $\xi_m$  que especificam a função de controle particular a ser usada.

É conveniente que  $\Delta t_1$  seja declarado com um valor inferior àquele que é esperado ser o passo de tempo ideal, o que é particularmente importante de se fazer em problemas transientes, nos quais os eventos dinâmicos mais notáveis ocorrem logo no início da análise (os autores observaram que o custo extra de se tomar um valor conservativo nesse caso é pequeno, já que o passo de tempo é rapidamente ajustado pelo algoritmo ao seu valor ideal). A declaração correta do parâmetro de comprimento do passo  $\lambda$  depende do método de integração em particular a ser usado e da precisão requerida. No entanto, como já dito, uma boa precisão pode ser normalmente obtida fazendo  $\lambda = 0.05$ . A respeito da função de controle selecionada, deve ser declarado o valor da constante  $\xi_p$  que define a largura do patamar na Figura 5.1-(c) e, segundo os autores, valores típicos desse parâmetro seriam 1.3 ou 1.4. Já uma boa escolha para o valor da máxima amplificação do passo de tempo, determinada por  $\xi_m$ , seria de 2.0, e esse parâmetro pode muito bem ser mantido como um valor fixo, não constituindo um dado de entrada.

Para alguns tipos de problemas pode ser necessário, ainda, prescrever limites extras para os tamanhos dos passos de tempo. Quando o carregamento varia muito rapidamente ou quando o método numérico possui algum incremento de tempo crítico que condiciona a estabilidade ( $\Delta t_{crit}$ ), por exemplo, é necessário especificar um valor máximo para o passo ( $\Delta t_{máx}$ ) de forma a assegurar que os instantes discretos de tempo permaneçam suficientemente próximos. Outras situações podem exigir, ainda, um limite inferior para o incremento ( $\Delta t_{mín}$ ), de maneira que não ocorram excessivas integrações numéricas que aumentem o custo do método.

### **5.3 ESTRATÉGIA DE HULBERT & JANG**

A estratégia de adaptatividade de Hulbert e Jang (1995) propõe usar um esquema de controle do tamanho do passo de tempo baseado na abordagem de estimativas de erro locais (seção 5.3.3). O trabalho dos autores foi desenvolvido usando o algoritmo de integração temporal do Método Generalizado- $\alpha$  (seção 5.3.1), criado pouco tempo antes por Chung e Hulbert (1993), o qual exibe uma combinação otimizada de amortecimento numérico dos modos de baixa frequência e de alta frequência, quando se trabalha com um coeficiente de dissipação específico (seção 5.3.2). O Método Generalizado- $\alpha$  inclui também, como casos especiais, os métodos de Newmark (1959), o método de Hilber, Hughes e Taylor (1977), conhecido como HHT- $\alpha$ , e o método de Wood, Bossak e Zienkiewicz (1980), conhecido como WBZ- $\alpha$ . O trabalho de Hulbert e Jang se concentrou em três pontos principais: (1) Desenvolver um estimador de erro local simples e preciso; (2) criar um algoritmo de controle do passo de tempo baseado nas estimativas de erro local normalizadas e; (3) especificar uma tolerância para esse erro e outros parâmetros simples no controle do passo de tempo.

#### **5.3.1 O Método Generalizado - $\alpha$**

As equações básicas do algoritmo de integração do Método Generalizado- $\alpha$ , na forma implícita, são dadas pelas mesmas equações (2.28) e (2.29) do método de Newmark (substituindo os escalares  $u$  e  $\dot{u}$  pelos vetores  $\mathbf{D}$  e  $\dot{\mathbf{D}}$ , para tratar de

sistemas MDOF) em conjunto com uma equação de equilíbrio dinâmico modificada, dada a seguir:

$$\mathbf{m} \ddot{\mathbf{D}}_{i-\alpha_m} + \mathbf{c} \dot{\mathbf{D}}_{i-\alpha_f} + \mathbf{k} \mathbf{D}_{i-\alpha_f} = \mathbf{p}_{i-\alpha_f} \quad (5.7)$$

na qual é definido que

$$\mathbf{D}_{i-\alpha_f} = (1 - \alpha_f) \mathbf{D}_i + \alpha_f \mathbf{D}_{i-1} \quad (5.8)$$

$$\dot{\mathbf{D}}_{i-\alpha_f} = (1 - \alpha_f) \dot{\mathbf{D}}_i + \alpha_f \dot{\mathbf{D}}_{i-1} \quad (5.9)$$

$$\ddot{\mathbf{D}}_{i-\alpha_m} = (1 - \alpha_m) \ddot{\mathbf{D}}_i + \alpha_m \ddot{\mathbf{D}}_{i-1} \quad (5.10)$$

$$\mathbf{p}_{i-\alpha_f} = \mathbf{p}(t_{i-\alpha_f}) \quad (5.11)$$

$$t_{i-\alpha_f} = (1 - \alpha_f) t_i + \alpha_f t_{i-1} \quad (5.12)$$

onde  $\alpha_f$  e  $\alpha_m$  são parâmetros livres pré-escolhidos. A equação de equilíbrio modificada (5.7) é uma combinação das equações de equilíbrio dos métodos HHT- $\alpha$  e WBZ- $\alpha$ . Com isso, o Método Generalizado- $\alpha$  possui quatro parâmetros livres ( $\alpha_m$ ,  $\alpha_f$ ,  $\gamma$  e  $\beta$ ), sendo reduzido aos métodos anteriormente desenvolvidos através da escolha correta dos valores de  $\alpha_f$  e  $\alpha_m$ : fazendo  $\alpha_m = 0$  o método se reduz ao HHT- $\alpha$ ; O valor  $\alpha_f = 0$  produz o método WBZ- $\alpha$ ; já o método original de Newmark é obtido ao fazer  $\alpha_m = \alpha_f = 0$ . Chung e Hulbert (1993) mostraram ainda que outras escolhas para os parâmetros do algoritmo poderiam produzir uma melhor característica de dissipação numérica e de precisão, e desenvolveram uma forma de relacionar os quatro valores de maneira atingir esses objetivos.

### 5.3.2 Amortecimento dos modos de alta frequência

Como se observou no início da seção 4.4 o número de frequências naturais do problema de autovalores é igual ao número de graus de liberdade do sistema e, por

isso, quanto maior for esse número, mais modos de vibração haverá numa análise dinâmica, sendo muitos desses modos não tão representativos no comportamento estrutural, fato pelo qual alguns podem inclusive ser eliminados na combinação da superposição modal (equação (3.39)) através da técnica de *truncamento modal* (CLOUGH e PENZIEN, 1995, p. 225). Em se tratando das maiores frequências obtidas, tem-se que

Pelo fato de que os mais altos modos de vibração das equações estruturais semidiscretas são artefatos do processo de discretização e não representativos do comportamento das equações diferenciais parciais governantes, geralmente vê-se como desejável e frequentemente é considerado absolutamente necessário haver presente alguma forma de amortecimento numérico para remover a participação dos componentes modais de alta frequência. Em termos do método de Newmark,  $\gamma > 1/2$  é necessário para introduzir dissipação nessas altas frequências (HUGHES, 1987, p. 498-499, tradução nossa).

Hughes (1987) sugere ainda uma forma específica de escolher os parâmetros  $\gamma$  e  $\beta$  no método de Newmark de maneira que haja maximização da dissipação numérica das altas frequências, em ambos os casos condicional e incondicionalmente estáveis, a qual já foi reportada nas equações (2.34) e (2.35).

Segundo Chung e Hulbert (1993, p. 372), o Método Generalizado- $\alpha$  será mais preciso (terá precisão de segunda ordem, enquanto o método de Newmark tem precisão apenas de primeira ordem) se a relação entre os parâmetros  $\gamma$ ,  $\alpha_m$  e  $\alpha_f$  for escolhida de acordo com a primeira das equações (5.13) a seguir. Adicionalmente, a relação entre  $\beta$ ,  $\alpha_m$  e  $\alpha_f$  que faz o método maximizar o artifício da dissipação dos modos de alta frequência é dado na segunda das equações (5.13), a qual também pode ser obtida combinando a primeira delas com a equação (2.34) já apresentada anteriormente.

$$\gamma = \frac{1}{2} - \alpha_m + \alpha_f \quad \beta = \frac{1}{4} (1 - \alpha_m + \alpha_f)^2 \quad (5.13)$$

Ainda segundo Chung e Hulbert (1993, p. 371), a dissipação numérica das altas frequências não deve incorrer, no entanto, em perda de precisão, nem introduzir excessivo amortecimento numérico nos importantes modos de baixa frequência que contribuem significativamente para a resposta. Denotando  $\rho_\infty$  como o parâmetro que

define a dissipação numérica nas altas frequências (que deve ser declarado como dado de entrada, podendo variar entre 0 e 1) os autores concluíram que, para um dado valor fixo de  $\rho_\infty$ , o amortecimento das baixas frequências é minimizado ao se escolher  $\alpha_m$  e  $\alpha_f$  segundo as relações seguintes:

$$\alpha_m = \frac{2\rho_\infty - 1}{\rho_\infty + 1} \quad \alpha_f = \frac{\rho_\infty}{\rho_\infty + 1} \quad (5.14)$$

Com isso, os quatro parâmetros livres do Método Generalizado- $\alpha$  podem ser relacionados a uma única variável,  $\rho_\infty$ , através das equações (5.13) e (5.14), sendo que o método assim aplicado possui: (1) estabilidade incondicional, (2) precisão de segunda ordem e (3) uma combinação otimizada entre a dissipação numérica das altas e baixas frequências.

O Método Generalizado- $\alpha$  otimizado dessa forma permite que o amortecimento dos modos de alta frequência varie desde o caso sem dissipação ( $\rho_\infty = 1$ ) até o chamado *caso de aniquilamento assintótico* ( $\rho_\infty = 0$ ) no qual as respostas nas altas frequências são aniquiladas após o primeiro passo de tempo.

### 5.3.3 Estimativas de erro local

O *erro de truncamento local* tem sido largamente usado no desenvolvimento de vários estimadores de erro em algoritmos de adaptatividade. Esses estimadores podem receber denominações específicas dependendo da forma com que são definidos ao longo dos passos de integração. Os chamados estimadores de erro *a posteriori* são obtidos pelo conhecimento da resposta numérica no instante em que o estimador é calculado e, portanto, são usados para verificar a solução já processada com o passo de tempo em vigor. Em contrapartida, os estimadores de refinamento *a priori* podem determinar os tamanhos dos passos de tempo subsequentes sem necessidade do conhecimento da resposta numérica, de forma que o incremento de integração é selecionado adaptativamente, evitando processos de re-análise muitas vezes requeridos quando se utiliza estimadores de refinamento *a posteriori*. Vários algoritmos de adaptatividade já citados, como os de Zienkiewicz *et al.* (1984),

Zienkiewicz e Xie (1991), Zeng *et al.* (1992) e Li *et al.* (1993) usam estimadores de erro *a posteriori*. A própria estratégia de Hulbert e Jang (1995) usa um estimador desse tipo, aplicado ao Método Generalizado- $\alpha$ , como será visto logo a seguir. Estimadores *a posteriori* também foram alvo de estudo no trabalho de Romero e Lacoma (2006), que apresentaram uma metodologia para a formulação de estimativas de refinamento aplicáveis aos métodos de integração correntemente utilizados em dinâmica estrutural, executando-a sobre o algoritmo de Newmark como exemplo ilustrativo. Já Chung *et al.* (2003), por outro lado, desenvolveram um estimador de erro do tipo *a priori*, aplicando-o também ao Método Generalizado- $\alpha$ . Outro estimador desse tipo foi apresentado ainda no trabalho de Ruge (1999).

A solução global exata do problema dinâmico da equação (3.9), denotada agora por  $\mathbf{D}^{EX}$ , só pode ser encontrada analiticamente, e geralmente é desconhecida devido à dificuldade em sua obtenção. Por outro lado, a solução local aproximada, denotada por  $\underline{\mathbf{D}}(t)$ , é uma função analítica que satisfaz as seguintes equações:

$$\mathbf{m} \ddot{\mathbf{D}}(t) + \mathbf{c} \dot{\mathbf{D}}(t) + \mathbf{k} \mathbf{D}(t) = \mathbf{p}(t) \quad (5.15)$$

$$\underline{\mathbf{D}}(t_{i-1}) = \mathbf{D}_{i-1} \quad \dot{\underline{\mathbf{D}}}(t_{i-1}) = \dot{\mathbf{D}}_{i-1} \quad \ddot{\underline{\mathbf{D}}}(t_{i-1}) = \ddot{\mathbf{D}}_{i-1} \quad (5.16)$$

Dessa forma, o erro global exato  $\mathbf{e}_i^{EX}$  e o erro de truncamento local  $\mathbf{e}_i$  no instante  $t = t_i$  podem ser definidos, respectivamente, por:

$$\mathbf{e}_i^{EX} = \mathbf{D}_i - \mathbf{D}^{EX}(t_i) \quad (5.17)$$

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{D}_i - \underline{\mathbf{D}}(t_i) \quad (5.18)$$

Onde  $\mathbf{D}_i$  é a solução numérica do problema. Como já citado, os algoritmos de adaptatividade tem se baseado no erro de truncamento local  $\mathbf{e}_i$ , já que esse é mais facilmente manuseável do que o erro global exato  $\mathbf{e}_i^{EX}$ .

A estratégia de Hulbert e Jang (1995) se propôs a utilizar expansões em série de Taylor no desenvolvimento de uma expressão para  $\underline{\mathbf{D}}(t_i)$  (e o consequente cálculo

de  $\mathbf{e}_i$ ) aplicada ao Método Generalizado- $\alpha$ . Os autores encontraram, assim, a seguinte equação que define o erro local:

$$\mathbf{e}_i = \Delta t_i^2 \left[ \left( \beta - \frac{1 - \alpha_m}{6(1 - \alpha_f)} \right) \Delta \ddot{\mathbf{D}} + \left( \frac{1}{6(1 - \alpha_f)} - \frac{1}{2} \right) \mathbf{w}_{i-1} \right] \quad (5.19)$$

onde  $\Delta \ddot{\mathbf{D}} = \ddot{\mathbf{D}}_i - \ddot{\mathbf{D}}_{i-1}$  (seção 3.5) e  $\mathbf{w}_{i-1}$  é o vetor dado pela expressão a seguir:

$$\mathbf{w}_{i-1} = \frac{\alpha_m - \alpha_f}{(1 - \alpha_f)^2} \Delta \ddot{\mathbf{D}} - \frac{\alpha_f}{1 - \alpha_f} \mathbf{w}_{i-2} \quad (5.20)$$

na qual  $\mathbf{w}_0 = \mathbf{0}$ . Aplicando essa proposta de erro ao método original de Newmark (isto é, fazendo  $\alpha_m = \alpha_f = 0$  no Método Generalizado- $\alpha$ ) a equação (5.19) fica reduzida a seguinte expressão:

$$\mathbf{e}_i = \Delta t_i^2 \left( \beta - \frac{1}{6} \right) \Delta \ddot{\mathbf{D}} \quad (5.21)$$

onde não é mais necessário determinar o vetor  $\mathbf{w}_i$ . A equação (5.21) é idêntica à expressão do erro local desenvolvida nos trabalhos de Zienkiewicz e Xie (1991, p. 873) e Zeng *et al.* (1992, p. 559), os quais aplicaram apenas o método de Newmark, onde também foram consideradas expansões em séries de Taylor no intuito de encontrar fórmulas para a solução local aproximada. Tal equação só não pode ser usada no caso  $\beta = 1/6$ , situação na qual o erro resulta nulo em todos os passos de tempo. Essa exceção também foi notada por Zeng *et al.* (1992) e justificada com o fato de que esse valor de  $\beta$  faz o método numérico corresponder ao da aceleração linear, mas que, por outro lado, se forem usadas funções de maior ordem ao aproximar a aceleração, outras estimativas de erro local, mais eficientes, podem ser obtidas nesse método, o que foi feito pouco tempo depois por Li *et al.* (1993).

Nessa dissertação foi usada a equação (5.21) (com  $\beta \neq 1/6$ ) para definir o erro local da estratégia de Hulbert e Jang, visto que o algoritmo de integração escolhido foi o método de Newmark.

Por fim, observa-se que, tanto no trabalho de Silveira (2001, p. 78) quanto no de Cintra (2008, p. 26), a expressão exibida para erro local do Método Generalizado- $\alpha$  não é exatamente igual à equação (5.19), apesar de ambos os trabalhos referenciarem o artigo de Hulbert e Jang (1995). A expressão considerada nessa dissertação foi, no entanto, aquela encontrada nas publicações originais, dadas pelas equações (5.19) a (5.21).

### **5.3.4 Estratégia de controle do incremento de tempo**

Após expor a expressão de erro local usada na estratégia adaptativa (cuja simplicidade satisfaz o critério 6 citado na seção 5.1) o algoritmo de Hulbert e Jang se propõe a definir o correspondente “erro normalizado” e calcular uma certa tolerância a esse erro (seção 5.3.4.1), a qual deverá estabelecer um intervalo de valores aceitáveis para a localização do mesmo, de forma a permitir a aplicação do algoritmo de adaptação (seção 5.3.4.2). Por fim, devem ser feitas algumas ressalvas sobre a utilização da estratégia em problemas com condições iniciais quiescentes (seção 5.3.4.3).

#### **5.3.4.1 Cálculo da tolerância ao erro**

Segundo Hulbert e Jang (1995), uma das dificuldades mais comuns no projeto de algoritmos adaptativos é a escolha de tolerâncias para o erro local que sejam mais apropriadas ao problema. Os autores afirmam, no entanto, que para casos de vibrações livres não amortecidas, pode-se relacionar a tolerância ao erro com quantidades conhecidas, a exemplo do período de vibração  $T$ , sendo a razão  $\Delta t/T$  frequentemente usada como medida de seleção do passo de tempo.

A prática comum mostra que deve haver um mínimo de 10 passos de tempo por período da máxima frequência de interesse na resposta (para problemas não lineares e para simulações de longa duração, essa razão é tipicamente maior, mas raramente excede o valor 200) (HULBERT e JANG, 1995, p. 160, tradução nossa).

Para obter essa relação (entre tolerância e razão  $\Delta t/T$ ), a norma do erro local necessita ser divida por um fator de escala apropriado. A escolha desse fator é uma

etapa importante, já que o mesmo tem influência direta na estratégia de controle do incremento de tempo. Uma opção possível é usar a norma  $\|\Delta\mathbf{D}_i\|$ , onde  $\Delta\mathbf{D}_i = \mathbf{D}_i - \mathbf{D}_{i-1}$  (notação da seção 5.2.3). Entretanto, para evitar que o erro normalizado resulte muito alto, fora da realidade (quando  $\|\Delta\mathbf{D}_i\|$  é próximo de zero), os cálculos dessa norma em passos antecedentes devem ser usados. Os autores proponentes sugeriram assim a seguinte expressão para o erro local normalizado:

$$RL_i = \frac{\|\mathbf{e}_i\|}{sclfac_i} \quad (5.22)$$

Onde o cálculo do fator  $sclfac_i$  pode assumir dois esquemas possíveis: o primeiro, dado por  $sclfac^d$  (equação (5.23) a seguir), considera apenas valores antecedentes de  $\|\Delta\mathbf{D}\|$ , nos quais  $sclfac_0^d = 0$ .

$$sclfac_i^d = \max\left(\|\Delta\mathbf{D}_i\|, \frac{9}{10}sclfac_{i-1}^d\right) \quad (5.23)$$

Já o segundo, dado por  $sclfac^a$  (primeira das equações (5.24) a seguir) leva em conta valores médios de  $\|\Delta\mathbf{D}\|$ , onde a média é tomada sobre  $n_{sp}$  passos, sendo  $n_{sp}$  o número recíproco de  $\Delta t/T$ , isto é, dado pela segunda das equações (5.24) a seguir.

$$sclfac_i^a = \Delta t_i \left( \sum_{k=i-n_{sp}+1}^i \frac{\|\Delta\mathbf{D}_k/\Delta t_{k+1}\|}{n_{sp}} \right), \quad n_{sp} = \text{int}\left(\frac{T}{\Delta t}\right) \quad (5.24)$$

Considerando um sistema SDOF em vibração livre não amortecida, e afirmando que os resultados obtidos estendem a abordagem para problemas mais gerais, Hulbert e Jang definiram formas de prescrever a tolerância ao erro normalizado relacionando-a com a razão alvo  $(\Delta t/T)^{alvo}$ , pré-especificada nos dados de entrada do algoritmo. Usando o esquema de normalização determinado por  $sclfac^d$ , a correspondente tolerância admissível pode ser computada através das equações a seguir, para um dado valor de  $\Delta t/T$  declarado pelo usuário:

$$tol^d = C^d \left(\frac{\Delta t}{T}\right)^2, \quad C^d = (2\pi)^2 \left|c_1 \frac{1-\alpha_f}{1-\alpha_m}\right|, \quad c_1 = \beta - \frac{1-\alpha_m}{6(1-\alpha_f)} \quad (5.25)$$

Aplicando essas equações ao caso restrito do método original de Newmark ( $\alpha_m = \alpha_f = 0$ ), a fórmula para a constante  $C^d$  fica reduzida à seguinte:

$$C^d = (2\pi)^2 \left| \beta - \frac{1}{6} \right| \quad (5.26)$$

Por outro lado, usando o esquema de normalização definido por  $sclfac^a$ , os autores afirmam que não é possível deduzir uma expressão analítica que relate a tolerância  $tol$  com a razão  $\Delta t/T$ , sendo essa relação determinada apenas numericamente. Fazendo ajustes de curvas, foi proposta a seguinte equação, que expõe uma dependência entre a tolerância citada e o coeficiente de dissipação numérica ( $\rho_\infty$ ) do Método Generalizado- $\alpha$ .

$$tol^a = C^a \left( \frac{\Delta t}{T} \right)^2 , \quad C^a = 19.0 - 38.3 \rho_\infty + 35.8 \rho_\infty^2 - 11.2 \rho_\infty^3 \quad (5.27)$$

Já que essa última expressão não pode ser aplicada ao método de Newmark (o qual não tem correspondência com o coeficiente  $\rho_\infty$ ) foi considerado, nesta pesquisa, apenas o primeiro esquema de normalização de erro apresentado (definido por  $sclfac^d$ ), e a partir daqui pode ser retirando o índice sobreescrito “ $d$ ” das equações (5.23) e (5.25), já que o outro esquema não será mais citado (manter-se-á esse índice apenas na constante  $C^d$ ).

### 5.3.4.2 Algoritmo de adaptatividade

Dado um valor alvo  $(\Delta t/T)^{alvo}$  e uma estimativa inicial para o passo de tempo ( $\Delta t_1$ ), a estratégia de adaptatividade aplicada à integração numérica pode ser então executada. Inicialmente é calculada a tolerância apropriada para o erro a partir das equações (5.25) e (5.26). Em seguida requer-se que o erro relativo normalizado (obtido em cada passo de tempo pela equação (5.22)) se situe dentro do seguinte intervalo de valores:

$$lb \times tol \leq RL_i \leq tol \quad (5.28)$$

onde  $lb$  é um fator multiplicador para a fronteira inferior do intervalo de tolerância.

Quando a condição (5.28) é atendida, a solução daquele passo é considerada aceitável e o processo de integração pode continuar sem necessidade de se alterar o tamanho do intervalo de tempo.

Caso ocorra a situação  $RL_i < lb \times tol$ , o tamanho do passo de tempo pode ser aumentado, já que o erro relativo é considerado muito pequeno, se situando abaixo do limite inferior do intervalo de tolerância. No entanto, esse aumento do incremento de tempo só acontecerá nos passos subsequentes, e a solução obtida para o passo atual também é tomada como aceitável. Segundo os autores, devido à natureza periódica do erro local, os tamanhos dos intervalos também seriam periódicos, e como não é desejável alterar o passo de tempo muito frequentemente, foi introduzido um contador “*count*” para registrar o número de vezes que a situação  $RL_i < lb \times tol$  ocorre consecutivamente. Se esse contador exceder um valor especificado, “*lcount*”, somente então o tamanho do intervalo de tempo é aumentado (no passo seguinte) de acordo com as equações a seguir:

$$\Delta t_{i+1} = f_{inc} \times \Delta t_i \quad , \quad f_{inc} = \left( \frac{tol}{RL_i^{\max}} \right)^{1/p_{inc}} \quad (5.29)$$

Onde  $p_{inc}$  é definido com um “parâmetro relacionado com a razão de convergência do erro local normalizado” e  $RL_i^{\max}$  é o máximo valor de  $RL$  que ocorreu desde que o contador *count* foi zerado. O contador é zerado toda vez que uma mudança ocorre no tamanho do passo de tempo (aumento ou diminuição) ou quando a condição (5.28) é satisfeita.

Caso ocorra  $RL_i > tol$ , onde o erro é obtido com o passo de tempo vigente,  $\Delta t_i^{old}$ , então o tamanho desse incremento deve ser reduzido: a solução atual é descartada e um novo valor da resposta é calculado usando um incremento de tempo menor,  $\Delta t_i^{new}$ . Dois casos podem ocorrer para definir como é feita essa redução: no primeiro deles, se o intervalo de tempo foi aumentado no passo precedente, então a nova tentativa para  $\Delta t$  do passo atual é tomada como igual ao seu valor antes do aumento ter ocorrido; no outro caso, isto é, se o intervalo de tempo não aumentou no passo

anterior (ou seja, se diminuiu ou permaneceu constante) então o novo incremento de tempo é computado de acordo com as equações a seguir:

$$\Delta t_i^{new} = f_{dec} \times \Delta t_i^{old} \quad , \quad f_{dec} = \left( \frac{tol}{RL_i} \right)^{1/p_{dec}} \quad (5.30)$$

Onde  $p_{dec}$  foi definido da mesma forma que  $p_{inc}$ . Como dito, a solução no instante  $t_i = t_{i-1} + \Delta t_i^{old}$  é descartada e uma nova é obtida usando  $\Delta t_i^{new}$ , definindo um novo valor para  $RL_i$  e reiniciando a estratégia adaptativa naquele passo. Esse refinamento do valor de  $\Delta t$  pode ocorrer repetidas vezes num mesmo incremento de tempo.

O algoritmo de controle adaptativo descrito acima possui alguns parâmetros não especificados, dados por  $lb$ ,  $p_{inc}$ ,  $p_{dec}$  e  $lcount$ . No estudo de Hulbert e Jang, foram definidos os valores  $lb = 0.75$  e  $p_{inc} = p_{dec} = 2$ . Já o valor de  $lcount$  pode ser determinado a partir do valor de entrada  $(\Delta t/T)^{alvo}$ .

Sabendo que o intervalo de tempo não deve ter o mesmo comportamento oscilatório do erro local (para satisfazer o critério de passos constantes em respostas estacionárias, determinado por Bergan e Mollestad), então  $lcount$  deve ser maior que o número de passos iguais existentes entre os máximos valores de  $RL$ . Segundo os autores, já que o período entre valores máximos de  $RL$  é igual à metade do período de vibração natural em um sistema SDOF, então uma sugestão para o valor de  $lcount$  seria a de que esse fosse maior do que  $T/(2\Delta t)$ . Um critério que resulta em menos amplificações do passo de tempo, e que foi proposto e aplicado pelos proponentes, é dado pela seguinte equação.

$$lcount = \text{int} \left( \frac{1}{(\Delta t/T)^{alvo}} \right) \quad (5.31)$$

O presente trabalho também aplicou o critério da equação acima.

A Figura 5.2 da página seguinte mostra um resumo da estratégia adaptativa de Hulbert e Jang.

Figura 5.2 – Estratégia de Hulbert e Jang

```

1 Dado  $(\Delta t/T)^{alvo}$  calcula-se  $tol$  Equação (5.25)
2 Dados  $D_0$ ,  $\dot{D}_0$ , calcula-se  $\ddot{D}_0$  Equação (3.60)
3 Dado  $\Delta t_1$  inicia-se o processo de integração iterativo:
4  $t_0 = 0$  ;  $i = 1$  ;  $count = 0$ 
5 Processo iterativo
6    $t_i = t_{i-1} + \Delta t_i$ 
7   calcula-se  $\Delta D$ ,  $\Delta \dot{D}$  e  $\Delta \ddot{D}$  - Método de Newmark
8   calcula-se  $e_i$ ,  $sclfac_i$  e  $RL_i$  Equações (5.21) - (5.23)
9   se  $lb \times tol \leq RL_i \leq tol$ 
10     $\Delta t_{i+1} = \Delta t_i$ 
11     $count = 0$ 
12     $i = i + 1$ 
13  se  $RL_i < lb \times tol$ 
14     $count = count + 1$ 
15    se  $count > lcount$ 
16       $\Delta t_{i+1} = f_{inc} \cdot \Delta t_i$  Equações (5.29)
17       $count = 0$ 
18       $i = i + 1$ 
19    senão
20       $\Delta t_{i+1} = \Delta t_i$ 
21       $i = i + 1$ 
22    fim se
23  se  $RL_i > tol$ 
24    se  $\Delta t_i > \Delta t_{i-1}$ 
25       $\Delta t_i = \Delta t_{i-1}$ 
26    senão
27       $\Delta t_i = f_{dec} \cdot \Delta t_i$  Equações (5.30)
28       $count = 0$ 
29    fim se
30  fim se
31

```

### 5.3.4.3 Aplicação a problemas com condições iniciais quiescentes

A estratégia de controle do intervalo de tempo descrita anteriormente não pode ser usada no cálculo do tamanho do primeiro passo quando as condições e o carregamento iniciais são nulos (condições quiescentes). A dificuldade nesse primeiro incremento é que o erro normalizado é independente de  $\Delta t$  quando as condições iniciais são quiescentes. No trabalho original de Hulbert e Jang foi mostrado que o erro relativo (para ambos os esquemas de normalização, que usam tanto  $sclfac^d$  como  $sclfac^a$ ) será único e igual a:

$$RL_1 = \frac{\beta - \frac{1}{6}}{\beta} \quad (5.32)$$

E como  $\beta$  é uma constante do algoritmo de integração, a estratégia adaptativa acaba por não ser usada. Por essa razão, não se altera o tamanho do incremento de tempo do primeiro passo,  $\Delta t_1$ , em problemas com condições iniciais quiescentes, sendo esse valor dado como parâmetro de entrada.

No segundo passo, o valor  $\Delta t_1$  deve ser usado como tentativa inicial no tamanho do intervalo e, se o erro exceder a tolerância especificada, o passo deve ser reduzido. Entretanto, devido a condições iniciais quiescentes, o valor  $\|\Delta \mathbf{D}_2\|$ , obtido com incremento reduzido, pode não ser grande o suficiente para ser usado como fator de normalização e percebe-se que um denominador pequeno na equação (5.22) resulta num erro muito alto, gerando, como consequência, um valor muito reduzido para  $\Delta t_2$ . Para evitar essa situação, mantém-se o fator de normalização constante durante o segundo passo, com um valor igual a  $\|\mathbf{D}_2^0 - \mathbf{D}_1\|$ , onde  $\mathbf{D}_2^0$  é o deslocamento computado para o instante  $t_2$  usando a estimativa inicial do passo de tempo,  $\Delta t_1$ .

## 5.4 ESTRATÉGIA DE CINTRA

A estratégia adaptativa idealizada por Cintra (2008) foi baseada no indicador geométrico de curvatura do histórico de deslocamentos da estrutura. Os conceitos preliminares sobre curvatura de uma curva parametrizada são brevemente apresentados na seção 5.4.1 a seguir, os quais envolvem aspectos de geometria diferencial e cálculo vetorial. Em seguida, a expressão da curvatura do histórico de deslocamentos é apresentada na seção 5.4.2, juntamente com a ideia central do algoritmo adaptativo. Na seção 5.4.3 são apresentados alguns processos de regularização da curvatura propostos pelo autor da estratégia, os quais são necessários para permitir um maior controle da alteração do incremento de tempo. Por fim, são feitas algumas correções e considerações acerca dos parâmetros do algoritmo na seção 5.4.4.

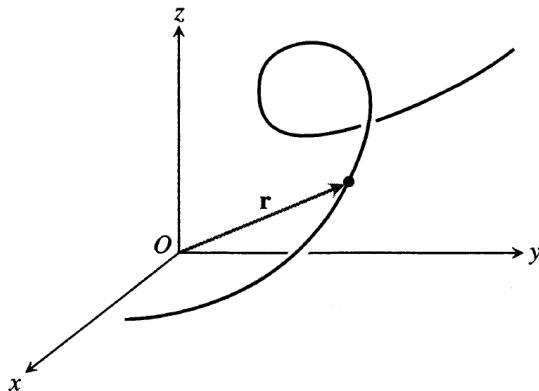
### 5.4.1 O conceito de curvatura

De maneira geral, uma curva parametrizada pode ser entendida como um conjunto de pontos descrito por uma única variável (ou parâmetro). Assim sendo, curvas com

imagens em conjuntos de  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$  fazem parte de um espaço restrito de curvas de  $\mathbb{R}^n$  que podem ser visualizadas ou plotadas num sistema cartesiano (Figura 5.3). Ao conjunto de pontos mapeados por uma curva dá-se o nome de *trajetória*, pois o mesmo pode descrever um possível caminho percorrido por uma partícula num espaço de duas ou três dimensões. Duas curvas podem então descrever a mesma trajetória dependendo da parametrização utilizada, isto é, da maneira como ela é escrita. Assim, uma curva em  $\mathbb{R}^n$  pode ser definida como a seguinte função vetorial:

$$\begin{aligned}\mathbf{r} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto \mathbf{r}(t)\end{aligned}\tag{5.33}$$

Figura 5.3 – Representação de uma curva paramétrica no espaço



Fonte: Adaptado de Thomas et al. (2003, p. 208)

Sendo  $\mathbf{r}$  uma curva parametrizada, o vetor  $\mathbf{v}(t_\alpha) = d\mathbf{r}/dt|_{t=t_\alpha}$  é chamado de *vetor velocidade* da curva  $\mathbf{r}$  no instante  $t_\alpha$ . Quando  $\mathbf{v}(t_\alpha) \neq \mathbf{0}$ , a direção desse vetor define uma reta tangente à trajetória da curva no ponto  $\mathbf{r}(t_\alpha)$ . A curva traçada por  $\mathbf{r}(t)$  é dita *lisa* se  $\mathbf{v}(t)$  for existente, contínua e nunca igual a  $\mathbf{0}$  (isto é, se  $\mathbf{r}(t)$  possuir primeira derivada existente, contínua e essa nunca se anular). Uma forma mais conveniente de trabalhar com esse vetor é transformando-o num vetor tangente unitário  $\mathbf{T}(t)$  (THOMAS et al., 2003, Cap. 10). Normalizando o vetor  $\mathbf{v}$ , pode-se escrever  $\mathbf{T}$ , para uma curva lisa, da seguinte forma:

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{v}(t)}{\|\mathbf{v}(t)\|}\tag{5.34}$$

Outra quantidade importante a ser considerada quando se trabalha com curvas parametrizadas é o comprimento de arco percorrido sobre a trajetória da curva

quando se varia o parâmetro  $t$ . Sendo  $t_\alpha$  um instante fixo, pode-se definir a função de comprimento de arco descrito desde o ponto base  $\mathbf{r}(t_\alpha)$  até um ponto qualquer  $\mathbf{r}(t)$  da forma a seguir:

$$s(t) = \int_{t_\alpha}^t \|\mathbf{v}(\varphi)\| d\varphi \quad (5.35)$$

De onde se conclui que  $ds/dt = \|\mathbf{v}(t)\|$ . Como  $\mathbf{T}$  é um vetor unitário, seu comprimento permanece constante e apenas sua direção muda à medida que uma hipotética partícula se move ao longo da trajetória da curva. A taxa na qual a direção de  $\mathbf{T}$  muda (por unidade de comprimento percorrido) é definida como a *curvatura* da curva, sendo dada pela seguinte equação, usando a variável comprimento de arco  $s$  (e calculada como função do parâmetro  $t$ ):

$$\kappa(t) = \left\| \frac{d\mathbf{T}}{ds}(t) \right\| \quad (5.36)$$

Através das regras de derivação de funções compostas e funções inversas, aplicadas à definição (5.36), obtém-se a seguinte fórmula para calcular a curvatura:

$$\kappa(t) = \left\| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right\| = \left\| \frac{d\mathbf{T}}{dt} \frac{dt}{ds} \right\| = \left\| \frac{d\mathbf{T}}{dt} \frac{1}{ds/dt} \right\| = \frac{\|d\mathbf{T}/dt\|}{\|\mathbf{v}(t)\|} \quad (5.37)$$

A expressão (5.37) pode ser usada para mostrar, por exemplo, que a curvatura de uma trajetória reta é sempre nula, ou que a curvatura de uma trajetória circular de raio  $r$  é constante e igual a  $1/r$  (isto é, inversamente proporcional ao raio, como se espera intuitivamente; razão pela qual se define, muitas vezes, o *raio de curvatura* instantâneo de curvas planas como o inverso da curvatura – seção 4.2).

Usando a regra de derivação de quociente de funções, aplicada à equação (5.34), obtém-se o valor de  $d\mathbf{T}/dt$ . Tirando a norma desse valor e substituindo-a na equação (5.37), chega-se na seguinte expressão de cálculo para  $\kappa(t)$ .

$$\kappa(t) = \frac{\|\|\mathbf{v}\| \mathbf{a} - \|\mathbf{a}\| \mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|^3} \quad (5.38)$$

Onde  $\mathbf{a}(t) = d\mathbf{v}/dt = d^2\mathbf{r}/dt^2$  é o *vetor aceleração*. Thomas et al. (2003, p. 234) exibem ainda uma fórmula vetorial para o cálculo da curvatura, dada por:

$$\kappa = \frac{\|\mathbf{v} \times \mathbf{a}\|}{\|\mathbf{v}\|^3} \quad (5.39)$$

Na qual o símbolo “ $\times$ ” representa a operação de *produto vetorial*. É possível ainda provar que a equação (5.39) acima pode ser escrita na forma apresentada por Kreyszig (2006, p. 400), recomendada no trabalho de Cintra (2008), dada por:

$$\kappa(t) = \frac{\sqrt{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a})^2}}{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})^{3/2}} \quad (5.40)$$

Onde a operação representada pelo símbolo “ $\cdot$ ” é chamada de *produto interno* ou *produto escalar*. A vantagem de se utilizar a equação (5.40) no cálculo da curvatura está relacionada a aspectos de economia computacional e é por isso que foi recomendada.

Sendo  $\mathbf{r}(t)$  uma curva parametrizada, a função  $\kappa(t)$  fornece um valor positivo que indica o quanto curvo é o traçado de  $\mathbf{r}$ . O valor da curvatura será praticamente nulo nos instantes em que o traçado de  $\mathbf{r}$  se assemelhar ao de uma reta. Para os demais instantes, o valor de  $\kappa$  irá crescer ou decrescer de acordo com a tendência de curvatura da função  $\mathbf{r}(t)$ . Essa informação é simples, porém bastante valiosa, podendo ser usada numa estratégia adaptativa.

#### 5.4.2 Curvatura do histórico de deslocamentos e algoritmo adaptativo

Uma alternativa aos processos de refinamento da resposta dinâmica tratados anteriormente seria utilizar o valor da curvatura do histórico de deslocamentos. Particularmente, pode-se parametrizar uma curva  $\mathbf{r}$  de maneira que ela represente esse histórico simplesmente fazendo  $\mathbf{r}(t)$  ser dada pela primeira das equações a seguir, onde  $\mathbf{D}$  é o mesmo vetor de deslocamentos nodais da estrutura visto nos capítulos anteriores. Dessa forma,  $\mathbf{r}$  será uma curva do espaço  $\mathbb{R}^{n+1}$ , onde  $n$  é o

número de graus de liberdade da estrutura. Semelhantemente, tem-se  $\mathbf{v}(t)$  e  $\mathbf{a}(t)$  dadas pelas derivadas temporais correspondentes:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} t \\ \mathbf{D}(t) \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ \dot{\mathbf{D}}(t) \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \ddot{\mathbf{D}}(t) \end{bmatrix} \quad (5.41)$$

O *indicador geométrico de curvatura do histórico de deslocamentos* deve ser então calculado pela fórmula apresentada por Kreyszig, dada na equação (5.40), substituindo as funções vetoriais exibidas acima, obtendo assim:

$$\kappa(t) = \frac{\sqrt{(1 + \dot{\mathbf{D}} \cdot \dot{\mathbf{D}})(\ddot{\mathbf{D}} \cdot \ddot{\mathbf{D}}) - (\dot{\mathbf{D}} \cdot \ddot{\mathbf{D}})^2}}{(1 + \dot{\mathbf{D}} \cdot \dot{\mathbf{D}})^{3/2}} \quad (5.42)$$

Essa informação pode ser utilizada de maneira a controlar o valor do incremento de tempo adotado em processos de integração numérica, numa estratégia adaptativa. Como visto, a quantidade  $\kappa$  será pequena quando os traçados de  $\mathbf{D}$  se assemelharem aos de uma reta, e será maior quando mais curvos forem esses traçados. Sabe-se que o registro da resposta dinâmica em trechos de traçados aproximadamente retilíneos requer poucos pontos para sua descrição, enquanto que nas regiões de maior curvatura o mesmo nível de precisão requer uma quantidade maior de pontos plotados. Isso sugere que um menor intervalo de tempo ( $\Delta t$ ) seja usado nas regiões de grande curvatura, onde deve haver um maior detalhamento para assegurar a qualidade da resposta. Já em regiões de menor curvatura pode acontecer o contrário: usa-se um intervalo  $\Delta t$  mais extenso, pois a qualidade da resposta é garantida com poucos pontos.

Uma vez que o valor da curvatura é sempre positivo, uma forma de se estabelecer a relação entre  $\kappa$  e  $\Delta t$  é fazendo uso da função exponencial. Cintra (2008, p. 36) sugere a seguinte correlação:

$$\Delta t_{i+1} = \Delta t_{\max} e^{-c_p \kappa_i} \quad (5.43)$$

Onde  $c_p$  é uma constante positiva e  $\kappa_i = \kappa(t_i)$ . Usando essa equação obtém-se, para qualquer valor de curvatura, um correspondente incremento de integração

variando de um valor máximo definido ( $\Delta t_{máx}$ ) a zero, no caso limite onde a curvatura é infinita. Entretanto, o valor do incremento extraído dessa relação não deve ser utilizado na solução dos próximos passos sem que algumas correções sejam feitas.

Conforme já observado, a alteração de  $\Delta t$  deve ocorrer de forma controlada, mas a correlação (5.43) não garante que esse controle aconteça. Visando a solução deste problema, Cintra propôs alguns mecanismos que fazem um processamento dos valores da curvatura antes do seu uso. A partir desse processamento são geradas sequências de curvaturas uniformes ditas “regularizadas”. Uma vez que estas sequências tenham sido geradas, só então as mesmas podem ser utilizadas para a alteração do incremento de tempo. Algumas técnicas propostas de regularização de curvatura são apresentadas na próxima seção.

### 5.4.3 Regularização da curvatura

Em alguns casos, a curva  $\kappa(t)$  pode apresentar um comportamento oscilatório indesejável que perturba a regularidade do algoritmo de integração empregado. Com o objetivo de tratar essa oscilação, Cintra (2008) sugeriu o emprego de metodologias de regularização da função que descreve a curvatura. Observando que a complexidade destas técnicas está relacionada com a robustez e desempenho de suas implementações, o autor apresentou as duas metodologias de regularização tratadas a seguir.

#### 5.4.3.1 Regularização por arredondamento

Essa técnica consiste na utilização de uma função de arredondamento ( $floor(x)$ , que retorna a parte inteira do número  $x$ ) com o objetivo de evitar a troca do incremento de tempo para variações de curvatura dentro de intervalos de tamanho  $\Delta\kappa$ . Usa-se a seguinte fórmula:

$$\Delta t_{i+1} = \Delta t_{máx} e^{-c_p [\Delta\kappa \text{ floor}(\frac{\kappa_i}{\Delta\kappa})]} \quad (5.44)$$

A implementação desta técnica é simples e atua diretamente na função que relaciona curvatura com incremento de tempo. Segundo Cintra (2008, p. 38), com o uso dessa expressão

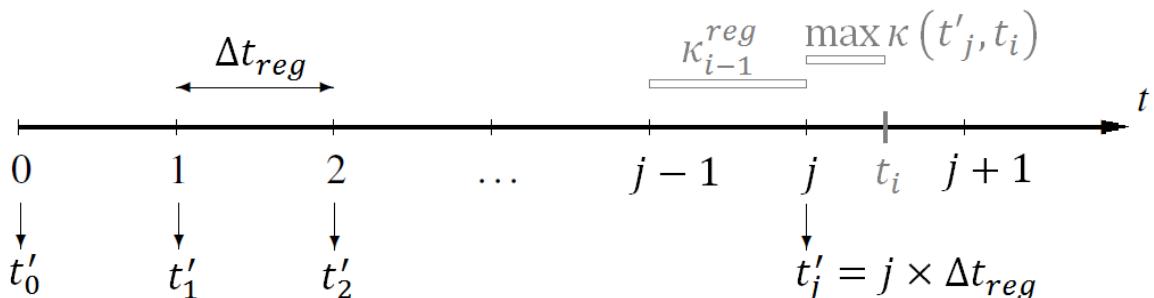
São gerados patamares de incrementos de tempo para intervalos correspondentes de curvatura. Desta forma, variações em  $\kappa(t)$  que ocorrem dentro destes intervalos não acarretam mudanças para  $\Delta t$ . A utilização desta estratégia de regularização é indicada para os casos onde as mudanças de curvatura ocorrem de maneira menos constante ao longo do tempo. Quando essa condição não é atendida e, portanto, as oscilações de curvatura são de grandes amplitudes ou bastante frequentes, o uso desta técnica de regularização continua a resultar em mudanças constantes para  $\Delta t$ , sendo desta forma não eficaz.

#### 5.4.3.2 Regularização por máximo valor em intervalos

Esta estratégia utiliza um procedimento de regularização de curvatura em intervalos periódicos de tempo. Durante a integração numérica, e para todos os instantes, o valor da curvatura é investigado e comparado com o máximo valor ocorrido no intervalo correspondente àquele instante. O maior valor dentre estes é então utilizado na consulta do incremento de tempo na integração do passo corrente, de acordo com a Equação (5.43). Diferente da estratégia apresentada anteriormente, essa técnica mantém inalterada a equação que relaciona curvatura e incremento de tempo, o que muda é a forma com que o parâmetro  $\kappa$  é fornecido à função de consulta de  $\Delta t$ . Cintra sugeriu que o tamanho do intervalo de regularização ( $\Delta t_{reg}$ ) seja função do incremento de tempo crítico ( $\Delta t_{crit}$ ), que é uma quantidade constante.

A Figura 5.5 na página seguinte apresenta o escopo do algoritmo que implementa esta técnica de regularização. O processo iterativo é ilustrado na Figura 5.4 abaixo.

Figura 5.4 – Intervalos de regularização da curvatura



Fonte: Adaptado de Cintra (2008, p. 39)

Figura 5.5 – Algoritmo de regularização por máximo valor em intervalos

```

1 Dado  $c_t$  calcula-se:  $\Delta t_{reg} = c_t \Delta t_{crit}$ 
2 Dado  $\Delta t_1$  inicia-se o processo iterativo:
3  $t_0 = 0$  ;  $i = 1$  ;  $j = 0$ 
4 Processo iterativo
5  $t_i = t_{i-1} + \Delta t_i$ 
6 Se  $t_i > t'_{j+1}$ 
7  $j = \text{floor}(t_i / \Delta t_{reg})$ 
8  $\kappa_i^{reg} = \alpha \kappa_{i-1}^{reg} + (1 - \alpha) \max \kappa(t'_j, t_i)$ 
9 Senão
10 Se  $\max \kappa(t'_j, t_i) > \kappa_{i-1}^{reg}$ 
11  $\kappa_i^{reg} = \max \kappa(t'_j, t_i)$ 
12 Senão
13  $\kappa_i^{reg} = \kappa_{i-1}^{reg}$ 
14 Fim Se
15 Fim Se
16  $\Delta t_{i+1} = \Delta t_{\max} e^{-c_p \kappa_i^{reg}}$  Equação (5.43)
17  $i = i + 1$ 
18 Fim

```

Onde:

$\Delta t_{reg}$  ⇒ Intervalo de regularização

$c_t$  ⇒ Constante inteira positiva

$\max \kappa(t'_j, t_i)$  ⇒ Máximo valor de  $\kappa(t)$  entre os instantes  $t'_j$  e  $t_i$

$\alpha$  ⇒ Coeficiente de ponderação ( $0 \leq \alpha \leq 1$ )

O algoritmo apresentado faz recorrência à informação de curvatura máxima observada no intervalo de tempo que imediatamente precede o corrente ( $\kappa_{i-1}^{reg}$  na linha 8 da Figura 5.5). Esse artifício é usado para minimizar o número de trocas do incremento de tempo nos primeiros instantes do intervalo de regularização ( $\Delta t_{reg}$ ), o que é necessário pelo fato de que o valor máximo de curvatura entre os instantes  $t'_j$  e  $t_i$ ,  $\max \kappa(t'_j, t_i)$ , tem pouca representatividade do comportamento da curva  $\kappa(t)$  quando o instante  $t_i$  é próximo de  $t'_j$ , sendo que essa baixa representatividade pode acarretar mudanças constantes no intervalo de integração, o que não é desejado.

O uso desta técnica de regularização permite que a informação de curvatura seja regularizada antes que ela venha a ser utilizada no controle do incremento de tempo, fazendo as alterações ocorrerem de maneira mais controlada e gradativa. A técnica assegura ainda que os valores de curvatura regularizados sejam sempre

maiores que os não-regularizados, garantindo que em nenhum instante o valor de incremento de tempo seja utilizado em desacordo com o valor real de curvatura apresentado ao longo do histórico de integração. Por esses motivos, essa técnica é mais indicada que a anterior, sendo escolhida nas implementações.

#### **5.4.4 Prescrição de parâmetros do algoritmo**

Algumas observações foram feitas acerca dos parâmetros do algoritmo de Cintra (2008), necessárias para sua correta execução. A primeira delas diz respeito à maneira como se relaciona a curvatura no intervalo de regularização corrente com o valor máximo do intervalo anterior (no esquema mostrado na seção 5.4.3.2) e também como se dá o comportamento dessa curvatura durante  $\Delta t_{reg}$ . A segunda observação tenta discutir a maneira exata de correlacionar os valores de  $\kappa$  com  $\Delta t$ , usando uma equação mais razoável que a função exponencial. O último ponto observado trata da aplicação da estratégia a problemas com condições iniciais quiescentes.

##### **5.4.4.1 Curvatura inicial no intervalo $\Delta t_{reg}$**

Primeiramente, vê-se que a equação que faz recorrência à curvatura máxima do intervalo de regularização precedente é aquela dada na 8<sup>a</sup> linha do código mostrado na Figura 5.5, repetida a seguir, na qual  $\alpha$  é um coeficiente de ponderação:

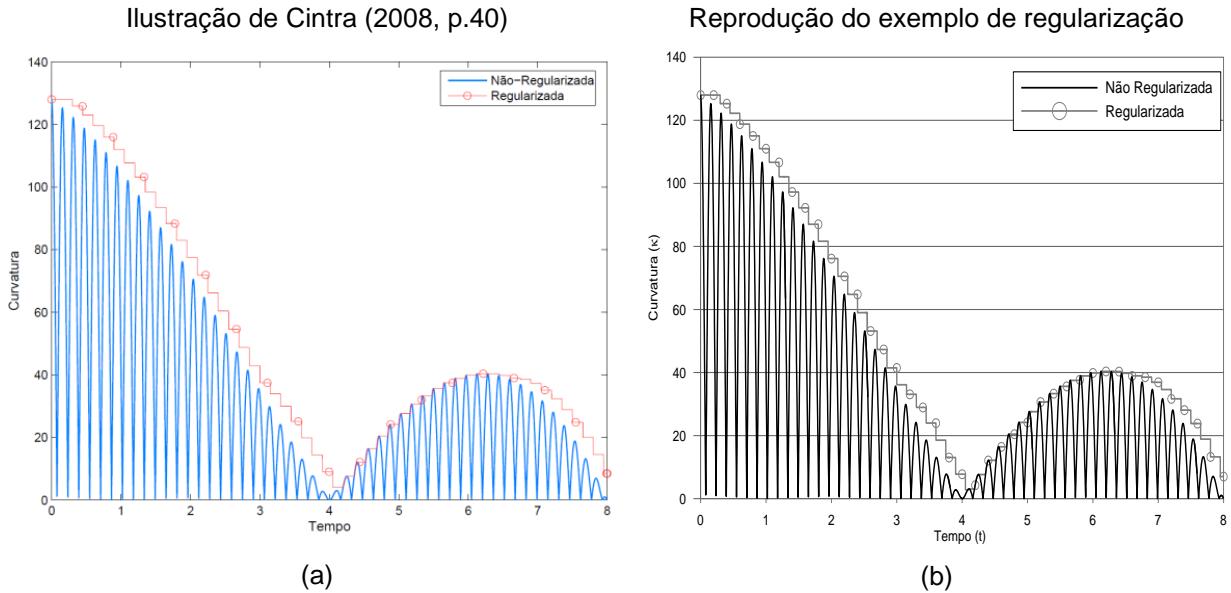
$$\kappa_i^{reg} = \alpha \kappa_{i-1}^{reg} + (1 - \alpha) \max \kappa(t'_i, t_i) \quad (5.45)$$

No trabalho de Cintra (2008) foi ilustrada a aplicação da técnica da Figura 5.5 em um caso onde a curvatura é descrita de maneira hipotética a partir de uma função oscilatória, descrita pela seguinte expressão:

$$\kappa(t) = |(t+4)(t-4)(t-8)||\cos(20t)| \quad (5.46)$$

Essa ilustração é exibida na Figura 5.6-(a) a seguir.

Figura 5.6 – Regularização de curvatura por máximo valor em intervalos



Conseguiu-se reproduzir aproximadamente esse gráfico executando o algoritmo com  $\Delta t_{reg} = 0.15s$ , porém substituindo a equação (5.45) (e somente se conseguiu dessa forma) pela simples expressão:

$$\kappa_i^{reg} = \max \kappa(t'_{j-1}, t'_j) \quad (5.47)$$

Dessa maneira, o valor da curvatura regularizada no instante inicial do intervalo de regularização ficou igual à simplesmente o valor máximo de  $\kappa$  ocorrido no intervalo anterior. Esse gráfico está exposto na Figura 5.6-(b).

Entretanto, no trabalho original de Cintra (2008, p. 92) foi mostrada uma curva de  $\kappa^{reg}$  (na aplicação da técnica a um exemplo de fraturamento dinâmico) na qual a equação usada nos instantes iniciais do intervalo de regularização é provavelmente ainda a expressão (5.45). Usou-se o valor  $\Delta t_{reg} = 10^{-5}s$ , mas não foi fornecido o valor de  $\alpha$ . Com isso, observou-se que não ficou muito clara a maneira de determinar o coeficiente de ponderação  $\alpha$  e nem se esse coeficiente é constante ou variável ao longo da integração. Ainda que haja essa incompatibilidade, foi considerada, nessa dissertação, a relação original dada na equação (5.45). O valor de  $\alpha$  foi considerado constante durante toda a análise e pesquisado experimentalmente caso a caso.

Notou-se também que quando o comprimento do intervalo de regularização fica próximo do incremento de tempo crítico, e continua-se usando a expressão (5.45) nos instantes iniciais desse intervalo, pode ocorrer que nem sempre os valores de curvatura regularizados sejam maiores que os não-regularizados, como era esperado na estratégia descrita na seção 5.4.3.2. Para contornar esse problema, propõe-se inserir a seguinte verificação junto à linha 8 do código mostrado naquela seção:

Figura 5.7 – Verificação adicional da regularização por máximo valor em intervalos

$$\begin{aligned}
 1 & \quad \kappa_i^{reg} = \alpha \kappa_{i-1}^{reg} + (1 - \alpha) \max \kappa(t'_j, t_i) \\
 2 & \quad \text{Se } \max \kappa(t'_j, t_i) > \kappa_i^{reg} \\
 3 & \quad \kappa_i^{reg} = \max \kappa(t'_j, t_i) \\
 4 & \quad \text{Fim Se}
 \end{aligned}$$

Essa verificação adicional garante definitivamente que as curvaturas regularizadas  $\kappa^{reg}$  sejam sempre iguais ou maiores que as não-regularizadas  $\kappa$ .

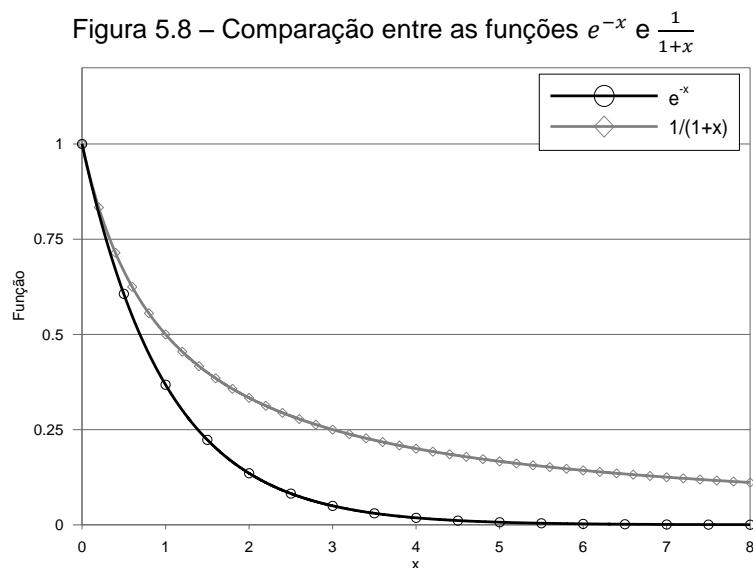
#### 5.4.4.2 Correlação entre curvatura e passo de tempo

O outro ponto observado tem relação com a determinação do parâmetro  $c_p$  da equação (5.43). Observa-se que, pelo fato de se usar uma correlação exponencial, o valor de  $\Delta t$  pode se tornar muito pequeno no caso de uma curvatura muito grande (para um valor não muito pequeno de  $c_p$ ). Num exemplo do trabalho de Cintra (2008, p. 92) é exibido um valor de curvatura máximo na ordem de  $\kappa_{\max} = 1.3 \times 10^5$ , que é um número muito grande para se trabalhar com a função exponencial: o valor  $e^{1.3 \times 10^5}$  é muito maior que o maior número possível de ser representado em variáveis de ponto flutuante com precisão dupla, nos softwares comerciais (no Matlab, por exemplo, esse número máximo é aproximadamente  $1.79 \times 10^{308}$ , que é aproximadamente igual a  $e^{709.78}$ ). Em geral, os valores de curvatura do histórico de deslocamento em análises dinâmicas de pórticos (discretizados em muitos graus de liberdade) chegam a esses grandes patamares (Capítulo 6, Exemplo 6.4) e isso faz com que o número  $e^{\kappa_i}$  fique igual a infinito ( $+\infty$ ) nas computações numéricas. Para solucionar esse problema nesses casos, o parâmetro  $c_p$  deve atuar reduzindo o valor de  $\kappa_i$  na equação (5.43).

Nos experimentos realizados, entretanto, observou-se que o uso da função exponencial acarreta grande dificuldade na escolha do valor de  $c_p$ , já que a curvatura instantânea pode variar desde o valor nulo até valores muito altos, fazendo a exponencial crescer muito rapidamente. Com base nisso, sugere-se uma nova forma de correlacionar o incremento de tempo com o indicador geométrico de curvatura: sabendo que o valor de  $\Delta t$  deve ser inversamente proporcional à  $\kappa$ , e que o mesmo deve variar de um valor máximo definido ( $\Delta t_{máx}$ ) a zero (no caso limite onde a curvatura é infinita) propõe-se a seguinte correlação entre essas duas variáveis:

$$\Delta t_{i+1} = \frac{\Delta t_{máx}}{(1 + c_p \kappa_i)} \quad (5.48)$$

Essa correlação se mostrou mais adequada pelo fato de que a função  $1/(1+x)$  decresce mais lentamente do que a função  $e^{-x}$ , como se observa na Figura 5.8 abaixo. A determinação do parâmetro  $c_p$  é de mais fácil obtenção nesse caso.



Outra correlação entre curvatura e incremento de tempo foi ainda sugerida no trabalho de Cintra (2008, p. 47-48) dada por uma função definida por partes, onde um trecho apresentaria a forma de uma raiz quadrada e o outro a de uma exponencial. Além desta, também foi sugerida como opção a associação da exponencial com a função degrau, que cria patamares de curvatura (equação

(5.44)). Nesta pesquisa, no entanto, foi considerada apenas a correlação da Equação (5.48) com a regularização anteriormente apresentada na seção 5.4.3.2.

#### **5.4.4.3 Aplicação a problemas com condições quiescentes**

Outra restrição também pode ser feita na estratégia de Cintra quando se calcula o tamanho do incremento de tempo para o primeiro passo ( $\Delta t_1$ ) em problemas com condições iniciais quiescentes. O fato é que quando os deslocamentos, velocidades e cargas são nulos (e, por consequência, a aceleração também) a curvatura calculada com a equação (5.42) também resulta nula e isso provoca uma escolha do passo de tempo inicial igual ao valor máximo ( $\Delta t_{máx}$ ) logo no primeiro incremento. Como geralmente os fenômenos dinâmicos mais importantes ocorrem nos primeiros instantes da análise, não é conveniente tomar o passo inicial muito extenso. Por essa razão, sugere-se usar o valor de  $\Delta t_1$  dado pelo usuário como parâmetro de entrada, em problemas com condições iniciais quiescentes. Portanto, não se altera o tamanho do incremento de tempo do primeiro passo, assim como também é feito na estratégia adaptativa de Hulbert e Jang.

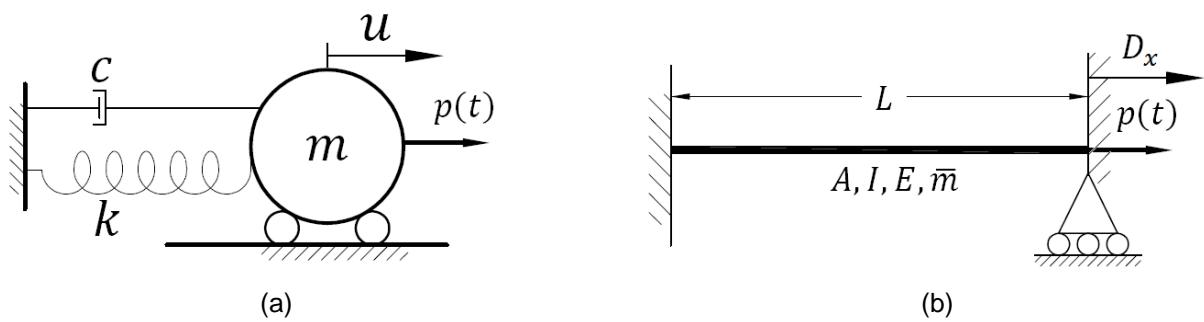
## 6 EXEMPLOS NUMÉRICOS

Nesse capítulo serão apresentados exemplos de aplicações numéricas dos métodos descritos nos capítulos anteriores em análise de dinâmica estrutural. Serão comparadas várias situações da geometria das estruturas analisadas, os carregamentos envolvidos, os parâmetros do método de integração e as performances das diferentes estratégias de adaptatividade. Inicialmente serão resolvidos sistemas SDOF de solução analítica conhecida, com alguns cenários variados para as propriedades do problema. Posteriormente serão abordados sistemas MDOF com um nível maior de complexidade.

### 6.1 SISTEMAS DE UM GRAU DE LIBERDADE

O sistema dinâmico de um grau de liberdade ilustrado na Figura 6.1-(a) a seguir pode ser simulado no programa descrito no Capítulo 4 através da viga de barra simples, com um único deslocamento não restrinido, ilustrada na Figura 6.1-(b). A equação que descreve esse problema é a simples expressão (2.5) mostrada no início desse trabalho.

Figura 6.1 – Modelo para simulação de sistema SDOF



As constantes da equação dinâmica desse sistema serão dadas em função dos parâmetros da viga correspondente, cujas matrizes estruturais possuirão, cada uma, um único elemento. Seguindo as expressões das matrizes dadas nas equações (4.17) e (4.18), essas constantes são obtidas pelas seguintes identidades:

$$m = \frac{\rho A L}{3} \quad k = \frac{E A}{L} \quad (6.1)$$

Tomando  $A = L = 1$ , tem-se, de forma simplificada,  $k = E$  e  $m = \rho/3$ . Já a constante de amortecimento  $c$  deve ser calculada em função de  $\xi$  e  $\omega$  pela equação (2.32).

Para resolver o sistema de um grau de liberdade corretamente, as sub-rotinas originais do programa de pórtico plano que calculam a matriz de amortecimento e que fazem a integração numérica devem ainda ser adaptadas, respectivamente, para considerar a situação de amortecimento do caso SDOF e as possíveis condições iniciais não nulas do sistema ( $u_0$  e  $\dot{u}_0$ , que não são comuns de se considerar em pórticos MDOF). Essas rotinas modificadas, no entanto, não foram expostas no Apêndice, o qual exibe apenas os códigos para pórtico plano padrão.

As soluções analíticas da equação (2.5) considerando  $c < c_{cr}$  ( $\xi < 1$ ), para o caso de vibração livre ( $p(t) = 0$ ) e de carga impulsiva constante ( $p(t) = p_0$ ) são dadas, respectivamente, pelas fórmulas a seguir (CLOUGH e PENZIEN, 1995, p. 27,78):

$$u(t) = \left[ u_0 \cos(\omega_D t) + \left( \frac{\dot{u}_0 + u_0 \xi \omega}{\omega_D} \right) \sin(\omega_D t) \right] e^{-\xi \omega t} \quad (6.2)$$

$$u(t) = \left\{ \left( u_0 - \frac{p_0}{k} \right) \cos(\omega_D t) + \left[ \frac{\dot{u}_0 + \left( u_0 - \frac{p_0}{k} \right) \xi \omega}{\omega_D} \right] \sin(\omega_D t) \right\} e^{-\xi \omega t} + \frac{p_0}{k} \quad (6.3)$$

Onde  $\omega_D$  é chamada *frequência de vibração livre amortecida*, dada por:

$$\omega_D = \omega \sqrt{1 - \xi^2} \quad (6.4)$$

Já a solução analítica para o caso de carga harmônica senoidal ( $p(t) = p_0 \sin(\omega_F t)$ ) é descrita por (CAMARGO, 2008, p. 51):

$$u(t) = A_1 \cos(\omega_F t) + A_2 \sin(\omega_F t) + B_1 e^{-\xi \omega t} \cos(\omega_D t) + B_2 e^{-\xi \omega t} \sin(\omega_D t) \quad (6.5)$$

Onde:

$$A_1 = \frac{-(2\xi\bar{\beta})p_0}{k \left[ (1 - \bar{\beta}^2)^2 + (2\xi\bar{\beta})^2 \right]} \quad A_2 = -\frac{(1 - \bar{\beta}^2)p_0}{k \left[ (1 - \bar{\beta}^2)^2 + (2\xi\bar{\beta})^2 \right]} \quad (6.6)$$

$$\bar{\beta} = \frac{\omega_F}{\omega} \quad B_1 = u_0 - A_1 \quad B_2 = \frac{\dot{u}_0 - \omega_F A_2 + (u_0 - A_1)\xi \omega}{\omega_D} \quad (6.7)$$

O sistema SDOF foi analisado considerando cinco cenários diferentes para as propriedades do problema, dados na Tabela 6.1 a seguir. O cenário (1) foi analisado anteriormente por Zienkiewicz e Xie (1991). Já o cenário (3), (4) e (5) foram analisados, respectivamente, por Zeng *et al.* (1992), Li *et al.* (1993) e Hulbert e Jang (1995). O cenário (2) foi analisado em todos estes três últimos trabalhos citados.

Tabela 6.1 – Cenários de parâmetros para os sistemas SDOF

Cenário	$m$	$k$	$c$	$u_0$	$\dot{u}_0$	$p_0$	$\omega_F$
(1)	1.0	1.0	0.6	0	0	1.0	–
(2)	1.0	$\pi^2/4$	0	1.0	0	0	–
(3)	1.0	$\pi^2/4$	$\pi/20$	0	0	1.0	$\pi/4$
(4)	1.0	$\pi^2/4$	$\pi/50$	0	0	1.0	$\pi/4$
(5)	1.0	$\pi^2/4$	$\pi/20$	0	0	$\pi^2/4$	–

Nos cenários (1) e (5), o sistema está sob cargas impulsivas constantes, de valores  $p_0 = 1$  e  $p_0 = \pi^2/4$ , respectivamente. Com isso, a resposta analítica exata para esses casos é obtida com a equação (6.3) anterior. O cenário (2) é um caso de vibração livre, cuja solução exata é dada na equação (6.2). Já nos cenários (3) e (4) os sistemas estão sob a mesma carga senoidal e a solução para estes é dada nas equações (6.5), (6.6) e (6.7).

Os dados dos algoritmos numéricos usados na solução dos cenários estão listados na Tabela 6.2 a seguir. No método de integração de Newmark, considerou-se  $\gamma = 1/2$  em todos os cenários. Já o valor de  $\beta$  foi escolhido aleatoriamente de modo que o método não fosse incondicionalmente estável ( $\beta < \gamma/2$ ) e que não equivalesse ao método da aceleração linear ( $\beta = 1/6$ ). Isso se deu pelo fato de que o algoritmo adaptativo de Hulbert e Jang não pode ser aplicado ao método da aceleração linear (o erro local é sempre nulo) como visto na seção 5.3.3. Adicionalmente, a estratégia de Cintra exige que seja fornecido um incremento de tempo máximo ( $\Delta t_{máx}$ ), que deve ser declarado pelo usuário em métodos incondicionalmente estáveis, mas que pode ser atribuído ao valor crítico  $\Delta t_{crit}$  nos esquemas condicionalmente estáveis, facilitando a entrada de dados. Os valores

aleatórios escolhidos para  $\beta$ , 1/8 e 1/5, fornecem, respectivamente, os incrementos  $\Delta t_{crit}$  iguais a  $\frac{T\sqrt{2}}{\pi}$  e  $\frac{T\sqrt{5}}{\pi}$  (equação (2.33)).

O parâmetro  $\bar{\xi}_m$  da estratégia de Bergan e Mollestad foi mantido constante e igual a 2.0. Já os valores  $lb$ ,  $p_{inc}$  e  $p_{dec}$  do algoritmo de Hulbert e Jang foram tomados como  $lb = 0.75$  e  $p_{inc} = p_{dec} = 2$  em todos os cenários. Os dados de  $c_p$ ,  $c_t$  e  $\alpha$  da estratégia de Cintra foram escolhidos caso a caso por meio de experimentação, já que não há recomendação para esses valores no trabalho original que propõe o método.

Tabela 6.2 – Dados dos algoritmos dos sistemas SDOF adotados em cada cenário

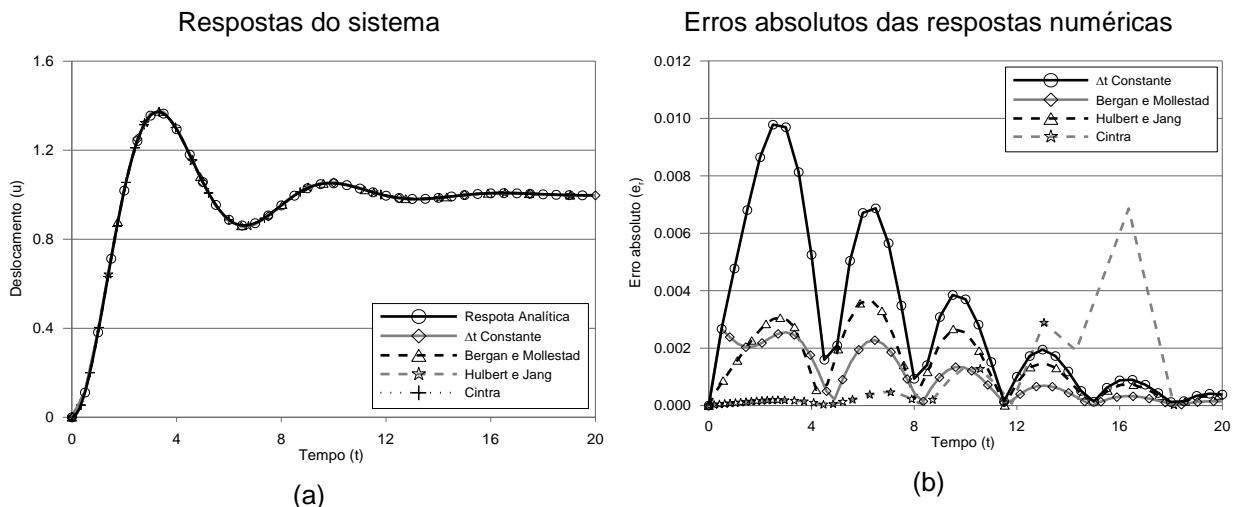
Parâmetros	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
Parâmetros Gerais	$\omega$	1.0	$\pi/2$	$\pi/2$	$\pi/2$
	$T$	$2\pi$	4.0	4.0	4.0
	$\xi$	0.3	0	0.05	0.02
	$\beta$	1/8	1/5	1/8	1/5
	$\Delta t_{crit}$	$2\sqrt{2}$	$4\sqrt{5}/\pi$	$4\sqrt{2}/\pi$	$4\sqrt{5}/\pi$
	$\Delta t_1$	0.5	0.01	0.04	0.04
Bergan e Mollestad	$\lambda$	0.05	0.002	0.05	0.05
	$\bar{\xi}_p$	1.3	1.4	1.3	1.2
	$\Delta t^*$	0.31415	0.008	0.2	0.2
Hulbert e Jang	$(\Delta t/T)^{alvo}$	1/10	1/100	1/10	1/20
	$tol$	0.0164	$1.3 \times 10^{-4}$	0.0164	0.004112
	$lb \times tol$	0.0123	$9.9 \times 10^{-5}$	0.0123	0.003084
Cintra	$c_p$	40	40	25	30
	$c_t$	1.0	1.0	2.0	1.0
	$\alpha$	0.2	1.0	0.8	0.95
	$\Delta t_{reg}$	2.8284	2.8470	3.6013	2.8470

As respostas do sistema para o cenário (1), obtidas de forma analítica e numérica, com e sem adaptatividade, estão ilustradas na Figura 6.2-(a) a seguir. Na estratégia sem adaptatividade foi usado o incremento de tempo constante igual ao incremento inicial  $\Delta t_1$  dado na Tabela 6.2 (o mesmo foi feito em todos os cenários). Observa-se que, nesse caso, a diferença entre as soluções é pequena e as respostas são praticamente coincidentes, muito próximas da resposta analítica. Para comparar a qualidade das respostas numéricas, portanto, foi calculado o erro absoluto ( $e_r$ ), que mede a distância entre a solução numérica  $u_i$  e a solução exata  $u^{ex}(t_i)$  extraída das expressões analíticas, conforme a equação abaixo:

$$e_{r_i} = |u_i - u^{ex}(t_i)| \quad (6.8)$$

A variação do erro absoluto com o tempo é exibida na Figura 6.2-(b).

Figura 6.2 – Respostas dinâmicas e erros absolutos do sistema SDOF Cenário (1)



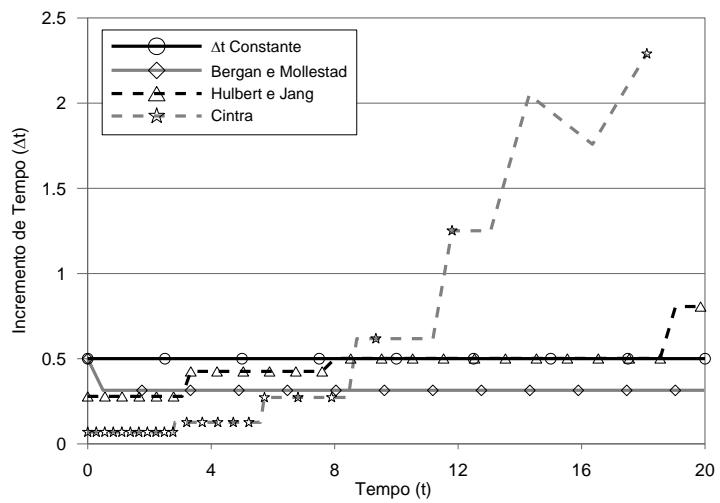
Ainda que as respostas sejam próximas, nota-se que o valor do erro numérico é geralmente maior quando se usa um passo de tempo constante do que quando se aplicam os métodos adaptativos durante a integração. Os maiores valores desse erro ocorrem nos instantes iniciais da análise, que é exatamente quando se desencadeiam os fenômenos dinâmicos mais importantes, antes da resposta ser dissipada pelo amortecimento.

Na estratégia de Bergan e Mollestad é observado que o erro do primeiro incremento de tempo é idêntico ao erro do método que aplica passos constantes, enquanto que

nas outras duas estratégias adaptativas esse erro é menor. Isso ocorre pelo fato de que a estratégia de Bergan e Mollestad usa o incremento de tempo inicial  $\Delta t_1$ , declarado pelo usuário, na integração do primeiro passo, enquanto que as estratégias de Hulbert e Jang e Cintra são iniciadas já ajustando esse incremento, de acordo com a tolerância ao erro local e a curvatura inicial, respectivamente. Caso as condições iniciais fossem quiescentes (carga nula em  $t = 0$ ), todas as estratégias usariam o incremento inicial  $\Delta t_1$  na integração do primeiro passo (como visto no Capítulo 5) e assim todas apresentariam o mesmo erro absoluto nesse primeiro intervalo.

Observa-se ainda que a estratégia de Cintra exibe o menor erro nos instantes iniciais da análise, o qual cresce a medida que a solução avança no tempo, se tornando maior que os demais nos instantes finais. A estratégia de Hulbert e Jang apresenta um erro maior nos primeiros instantes, enquanto o erro na estratégia de Bergan e Mollestad geralmente se situa entre os dois anteriores. Esse comportamento segue a variação dos incrementos de tempo, a qual é mostrada na Figura 6.3 a seguir.

Figura 6.3 – Variação dos passos de tempo nas análises do sistema SDOF Cenário (1)

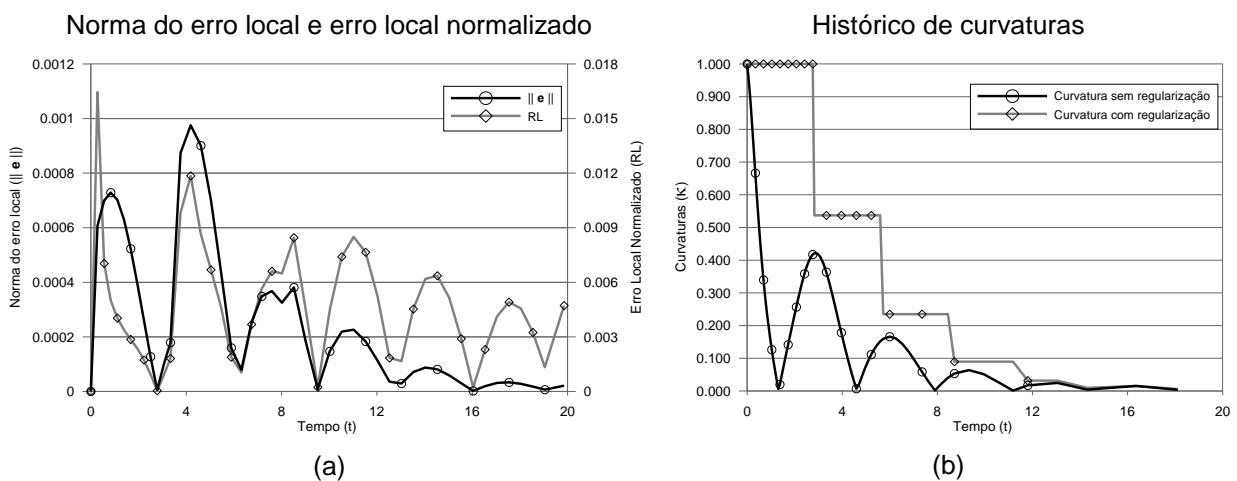


Analizando o gráfico acima, nota-se que na estratégia de Hulbert e Jang os passos de tempo se iniciam perto da metade da declaração inicial ( $\Delta t_1$ ) e tendem a aumentar com o decorrer da análise, de acordo com o comportamento do erro local normalizado. Observa-se que durante certo período o valor de  $\Delta t$  se igualou à estimativa inicial ( $\Delta t = 0.5$ ) antes de aumentar novamente, seguindo a tendência de

atingir o valor alvo dado pela razão  $(\Delta t/T)^{alvo}$ , que seria de aproximadamente  $\Delta t = 0.628$ . O erro normalizado  $RL$  se situa, em muitos passos, abaixo do limite inferior de tolerância  $lb \times tol = 0.0123$  do intervalo admissível da equação (5.28), como mostra a Figura 6.4-(a) mais adiante. Isso explica porque o incremento aumenta de valor com o passar do tempo. A Figura 6.4-(a) mostra ainda que o erro  $RL$  nunca excede a tolerância  $tol = 0.0164$ , como prevê o algoritmo. Esse gráfico exibe também a variação no tempo da norma do erro local  $\|\epsilon\|$ , usado na estratégia de Hulbert e Jang (o eixo vertical esquerdo mostra os valores de  $\|\epsilon\|$  e o eixo direito mostra os valores de  $RL$ ).

Ainda de acordo com a Figura 6.3, os passos de tempo da estratégia de Cintra se iniciam muito inferiores aos demais, se tornando muito maiores quando a solução avança no tempo. Isso ocorre porque a curvatura possui um valor inicial relativamente alto, que vai sendo reduzido substancialmente à medida que a resposta é dissipada pelo amortecimento nos instantes mais avançados. A Figura 6.4-(b) a seguir exibe o histórico de curvaturas, com e sem regularização, aplicado na estratégia de Cintra. Observou-se que o histórico de curvaturas regularizadas em patamares constantes (que geram os patamares de valores constantes de  $\Delta t$  no gráfico da Figura 6.3) é muito sensível a variações no parâmetro  $\alpha$ , que nesse cenário foi tomado igual a 0.2.

Figura 6.4 – Erro local normalizado e histórico curvaturas para o Cenário (1)

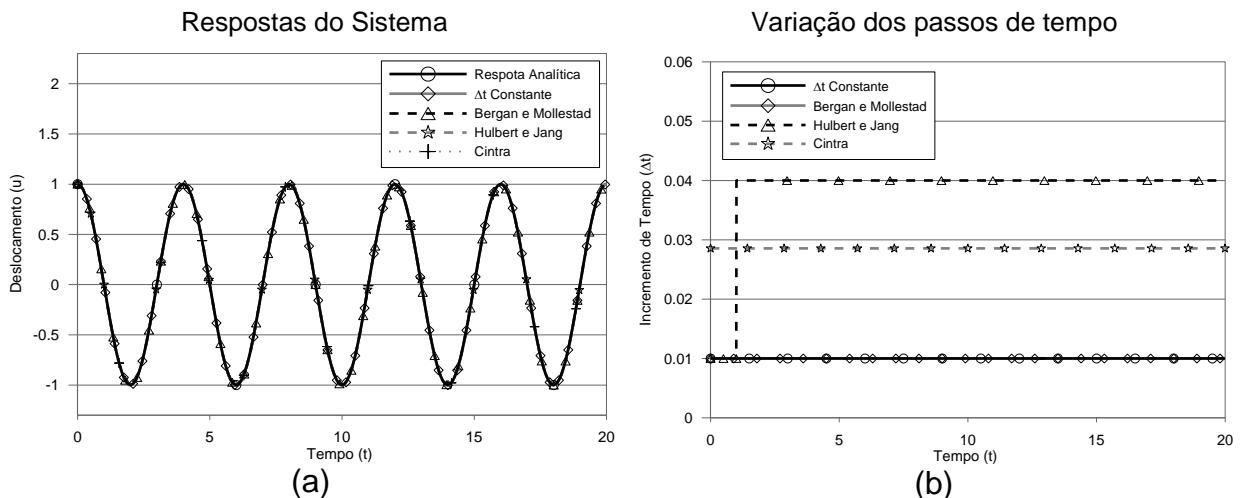


A Figura 6.3 mostra também que na estratégia de Bergan e Mollestad o incremento de tempo é ajustado imediatamente logo depois o primeiro passo, e se mantém

constante e igual ao valor  $\Delta t^* = \lambda T$  durante todo o restante da análise. Isso ocorre porque a frequência característica  $\bar{\omega}$  dessa estratégia é igual à frequência natural  $\omega$  dada na Tabela 6.2, em todos os passos de tempo, fazendo com que o período característico  $\bar{T}$  fique sempre igual ao período natural  $T$ . Esse fato decorre da aplicação da equação (5.1) a sistemas de um grau de liberdade e, por esse motivo, o método de Bergan e Mollestad é pouco eficiente na análise desses sistemas, pois prevê que o passo de tempo seja apenas igualado à estimativa  $\Delta t^*$ , podendo ser declarado como incremento constante desde o inicio da solução, não havendo necessidade de aplicar a estratégia adaptativa. A determinação do tamanho do passo fica assim a critério do usuário quando é declarado o valor de  $\lambda$ , que nesse caso foi igual a 1/20.

A análise do cenário (2) também mostra algumas desvantagens nas estratégias de Bergan e Mollestad e Cintra nesse tipo de sistema. A Figura 6.5 a seguir exibe as respostas numéricas e a variação dos incrementos de tempo obtidos para esse cenário. As respostas do sistema são, novamente, visualmente coincidentes.

Figura 6.5 – Respostas dinâmicas e variação de  $\Delta t$  do sistema SDOF Cenário (2)

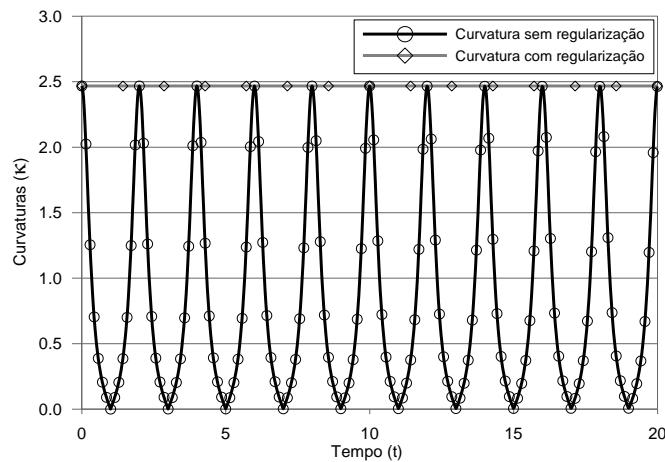


Nota-se que nesse caso o algoritmo de Bergan e Mollestad não ajustou o incremento de tempo nem uma vez, usando sempre o passo inicial  $\Delta t_1 = 0.01$  e obtendo resultados idênticos à análise com  $\Delta t$  constante. Isso ocorreu porque o passo de tempo inicial é muito próximo da estimativa  $\Delta t^* = 0.008$ , fazendo com que a razão  $\xi_i = \frac{\Delta t^*}{\Delta t_{i-1}} = 0.8$  se situe sempre no intervalo  $\frac{1}{\xi_p} \leq \xi_i < 1$  do patamar

constante da função de controle  $f(\bar{\xi}_i)$  exibida na Figura 5.1-(c). Dessa forma, a aplicação dessa estratégia adaptativa neste caso é desnecessária e apenas aumenta o esforço computacional do método.

Os passos de tempo da estratégia de Cintra também ficaram constantes e iguais ao passo obtido com a curvatura máxima, isto é  $\Delta t = \frac{\Delta t_{crit}}{1+c_p\kappa_{máx}}$ . Isso se deu porque foi usado o parâmetro  $\alpha = 1$  na regularização da curvatura, fazendo a curvatura regularizada assumir um valor constante e igual à máxima obtida no histórico de deslocamentos, a qual é alcançada já no primeiro instante, como mostra a Figura 6.6 a seguir. Isso foi feito pelo fato de que a curvatura assume um comportamento oscilatório permanente, já que o sistema está em vibração livre não amortecida ( $c = 0$ ) e, a menos que o intervalo de regularização fosse igual à metade do período de vibração natural, nenhum valor de  $\alpha$  entre 0 e 1 produziria um comportamento razoável da curvatura regularizada que transmitisse essa oscilação permanente para os passos de tempo. O intervalo de regularização proposto na estratégia de Cintra é dado por  $\Delta t_{reg} = c_t \Delta t_{crit}$ , onde  $c_t$  é uma constante inteira positiva, o que faz com que esse valor nunca atinja  $T/2$  nesse caso.

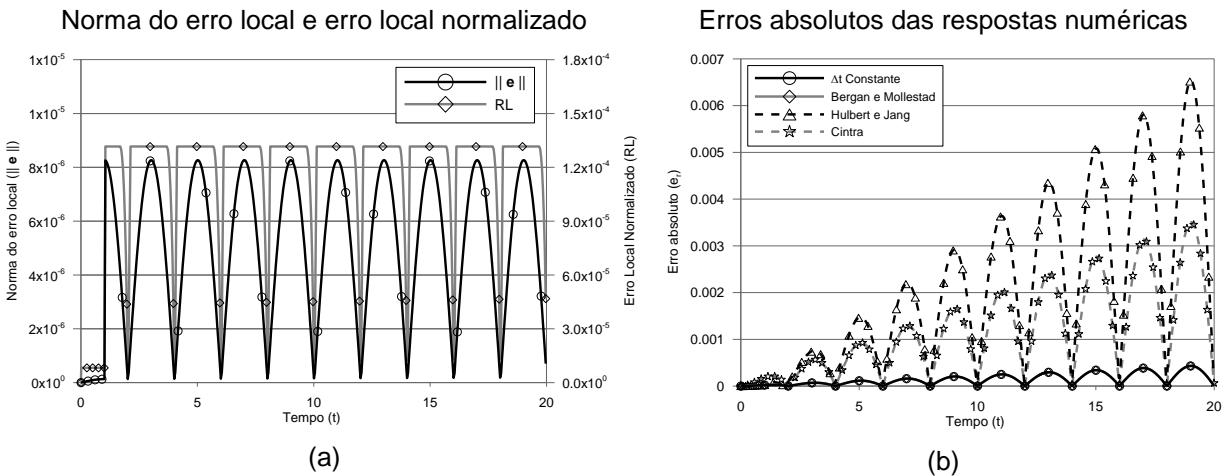
Figura 6.6 – Histórico de curvaturas para o sistema SDOF Cenário (2)



Na estratégia de Hulbert e Jang o passo de tempo se ajustou rapidamente para alcançar o valor constante dado pela razão alvo  $(\Delta t/T)^{alvo}$ . Nos passos iniciais o incremento é relativamente pequeno e o erro  $RL$  computado fica menor que o limite inferior de tolerância, fazendo  $\Delta t$  permanecer baixo até o contador *count* atingir o valor  $lcount = \frac{1}{(\Delta t/T)^{alvo}} = 100$ , instante em que ocorre um aumento do passo de

tempo para o patamar permanente  $\Delta t = 0.04$ . Esse comportamento pode ser visualizado também na Figura 6.7-(a) a seguir, que exibe o histórico de erros do algoritmo. Após atingir o passo de tempo permanente, a norma do erro local ( $\|\epsilon\|$ ) assume um padrão oscilatório e o erro normalizado ( $RL$ ) é controlado dentro do limite de tolerância, assumindo valores pequenos periodicamente, durante poucos passos, e se igualando ao limite superior  $tol = 1.3 \times 10^{-4}$  na maior parte do tempo. Os resultados obtidos neste exemplo se aproximam muito dos obtidos por Hulbert e Jang (1995, p. 166-167).

Figura 6.7 – Erro local normalizado e erros absolutos do sistema SDOF Cenário (2)



Os erros absolutos para esse cenário, calculados com a equação (6.8), estão ilustrados na Figura 6.7-(b). Nota-se que o erro da estratégia de Bergan e Mollestad é igual ao obtido com passos de tempo constantes, como já foi salientado. O erro gerado pela estratégia de Hulbert e Jang foi o maior encontrado, enquanto o erro do método de Cintra assumiu valores intermediários. Esses resultados seguiram os comportamentos dos passos de tempo, onde as estratégias que usaram maiores valores de  $\Delta t$  geraram erros maiores (mas, em geral, muito pequenos).

Os resultados para os cenários (3) e (4) estão expostos na Figura 6.8 e Figura 6.9 das páginas seguintes. Esses cenários são exemplos de condições iniciais quiescentes e, portanto, o passo de tempo do intervalo inicial não é ajustado, ficando idêntico para todas as estratégias. O incremento alvo da estratégia de Bergan e Mollestad é igual a  $\Delta t^* = \lambda T = 0.2$ , valor que deveria ser atingido após o primeiro passo de tempo em ambos os casos. Porém, pelo fato do intervalo inicial  $\Delta t_1 = 0.04$

Figura 6.8 – Resultados das análises do sistema SDOF do cenário (3)

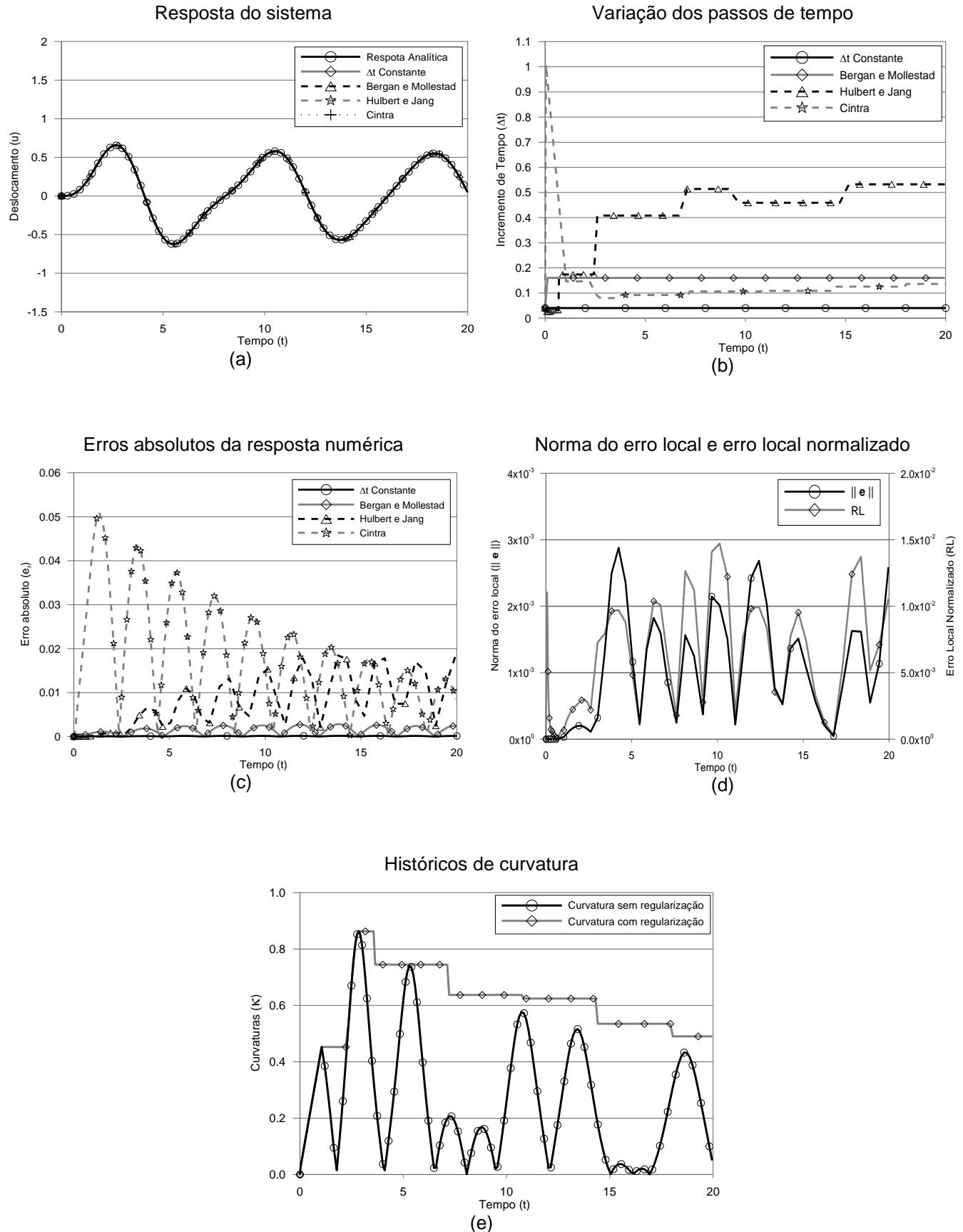
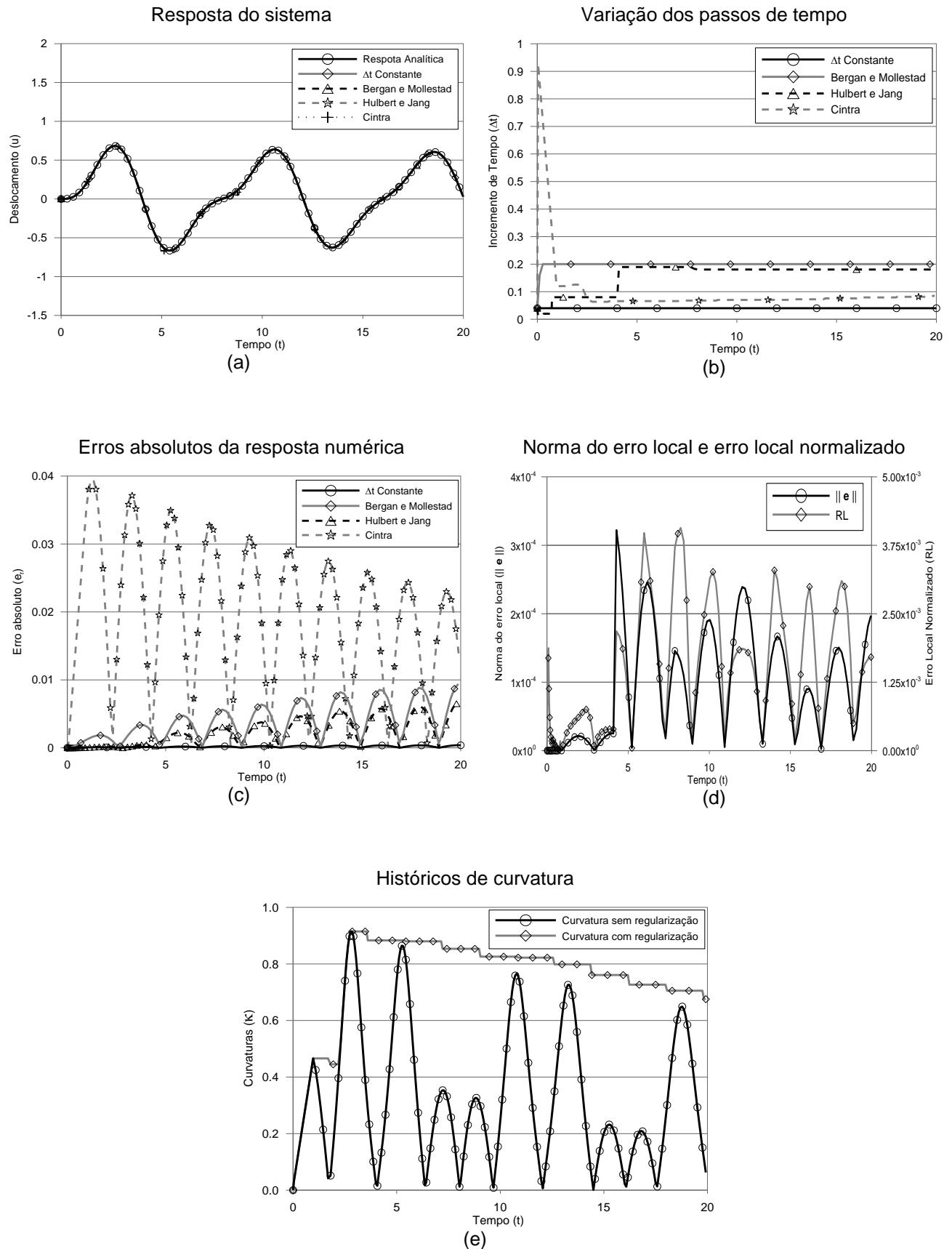


Figura 6.9 – Resultados das análises do sistema SDOF do cenário (4)



ser muito menor do que  $\Delta t^*$ , esse incremento acaba sendo multiplicado por 2 nos dois primeiros passos na análise do cenário (3) (seguindo a especificação da função de controle  $f(\bar{\xi}_i)$ , limitada em  $\bar{\xi}_m = 2$ ), assumindo o valor  $\Delta t_3 = 0.16$  e mantendo-se nesse patamar durante todo resto da análise. Isso ocorre porque a razão  $\bar{\xi}_3 = \Delta t^*/\Delta t_3 = 1.25$  acaba ficando dentro do intervalo  $1 \leq \bar{\xi} \leq \bar{\xi}_p$  neste caso, o que é corrigido no cenário (4) pela declaração  $\bar{\xi}_p = 1.2$ , a qual leva ao valor permanente correto  $\Delta t_4 = 0.2$  (Figura 6.9-(b)). Percebe-se com isso, mais uma vez, que não é muito vantajoso usar a estratégia de Bergan e Mollestad em sistemas SDOF.

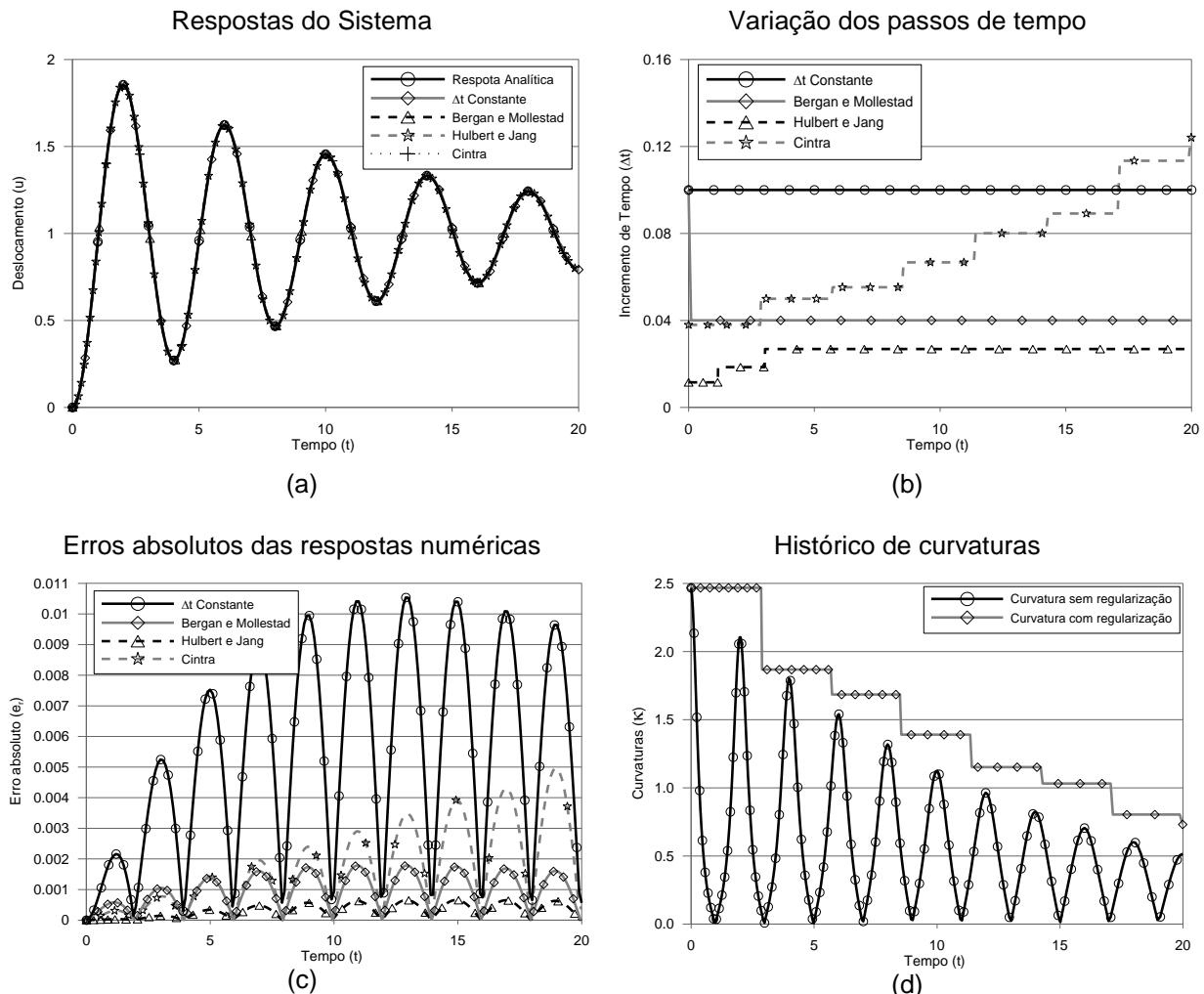
Os resultados nos instantes iniciais obtidos com a estratégia de Cintra também não são muito satisfatórios em ambos os cenários (3) e (4), como se observa nos gráficos de erros absolutos nas Figura 6.8-(c) e Figura 6.9-(c). Isso ocorre porque o segundo incremento de tempo ( $\Delta t_2$ ) ficou muito grande, perto do valor máximo ( $\Delta t_{máx} = \Delta t_{crit}$ ), devido ao fato da curvatura estar muito pequena nos primeiros instantes da análise (Figura 6.8-(e) e Figura 6.9-(e)). Evitou-se o incremento inicial elevado (decorrente da curvatura inicial nula nas condições quiescentes) pelo uso do valor pré-estabelecido  $\Delta t_1 = 0.04$  no primeiro passo, mas isso não foi suficiente para manter o intervalo de tempo com tamanho reduzido, já que a curvatura continuou próxima de zero no segundo passo.

O valor da razão  $(\Delta t/T)^{alvo}$  da estratégia de Hulbert e Jang foi tomada igual a 1/10 no cenário (3) para fazer o limite *lcount* ficar igual a 10, como foi adotado no trabalho original de Zeng *et al.* (1992, p. 566) onde se analisou anteriormente esse cenário. Percebeu-se que o passo de tempo usado nessa estratégia é menos oscilatório do que os obtidos no trabalho de Zeng, o que atende ao critério de não alterar o valor de  $\Delta t$  desnecessariamente. A razão  $(\Delta t/T)^{alvo}$  declarada no cenário (4) foi tomada igual a 1/20 no intuito de fazer o incremento alvo dessa estratégia se igualar ao da estratégia de Bergan e Mollestad. Nesse caso, o comprimento do intervalo se ajustou rapidamente para as proximidades desse valor, segundo a Figura 6.9-(b). Outro fato importante a ser notado diz respeito ao erro relativo do primeiro passo ( $RL_1$ ) que, no caso de condições iniciais quiescentes, é invariável e calculado pela equação (5.32). Esse erro não é usado na estratégia adaptativa, mas ainda assim foi registrado no histórico das Figura 6.8-(d) e Figura 6.9-(d), mostrando

que é muito maior do que os valores de  $RL$  calculados nos demais passos e que seu uso poderia comprometer o desempenho da análise (o valor ultrapassa o limite do eixo direito dos gráficos em ambos os cenários (3) e (4)).

Os resultados para o Cenário (5) estão exibidos na Figura 6.10 abaixo. A análise que usou a estratégia de Cintra se comportou de forma parecida com a do cenário (1), onde a resposta é rapidamente dissipada, diminuindo a curvatura. O algoritmo de Bergan e Mollestad novamente forneceu um incremento de tempo invariável logo após o primeiro passo e os erros absolutos usando um intervalo  $\Delta t$  constante foram os maiores observados. O resultado gerado na Figura 6.10-(b) se assemelha muito com o obtido no trabalho original de Hulbert e Jang (1995, p. 168) quando se usa a estratégia adaptativa desses autores. A magnitude do erro absoluto observado na Figura 6.10-(c) seguiu o comportamento dos intervalos de tempo, onde o menor erro foi obtido com o algoritmo de Hulbert e Jang, que praticou o menor  $\Delta t$ .

Figura 6.10 – Resultados das análises do sistema SDOF do cenário (5)



A Tabela 6.3 a seguir traz um resumo dos resultados das análises dos sistemas SDOF no que diz respeito aos incrementos de tempo máximo e mínimo encontrados com as estratégias adaptativas, e o número total de pontos ( $N_{TOT}$ ) plotados com os diferentes algoritmos. Quanto maior o número  $N_{TOT}$ , mais custosa é a análise e mais detalhada é a resposta dinâmica.

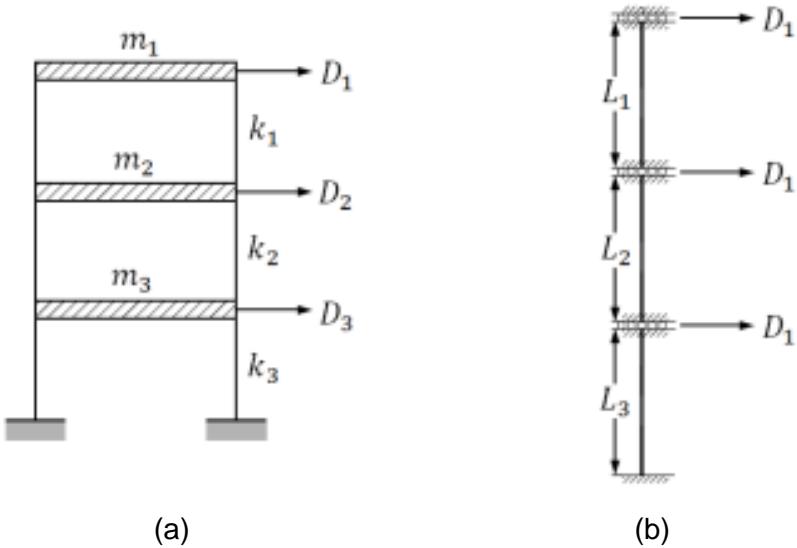
Tabela 6.3 – Resultados numéricos dos sistemas SDOF

Cenário	$T$	$\Delta t_{crit}$	Bergan e Mollestad			Hulbert e Jang			Cintra		
			$\Delta t_{mín}$	$\Delta t_{máx}$	$N_{TOT}$	$\Delta t_{mín}$	$\Delta t_{máx}$	$N_{TOT}$	$\Delta t_{mín}$	$\Delta t_{máx}$	$N_{TOT}$
(1)	6.283	2.828	0.3142	0.5000	64	0.2782	0.8062	47	0.0690	2.2898	85
(2)	4.000	2.847	0.0100	0.0100	2000	0.0100	0.0400	576	0.0286	0.0286	701
(3)	4.000	1.801	0.0400	0.1600	127	0.0268	0.5324	72	0.0400	1.0102	176
(4)	4.000	1.801	0.0400	0.2000	102	0.0134	0.1894	173	0.0400	0.9278	261
(5)	4.000	2.847	0.0400	0.1000	499	0.0115	0.0268	836	0.0379	0.1241	321

## 6.2 SHEAR BUILDING DE TRÊS PISOS

Para ilustrar a solução de uma análise dinâmica em um simples sistema MDOF, considera-se, nesse exemplo, um edifício com três pavimentos do tipo “Shear Building”, cujos pilares de sustentação permitem apenas deslocamentos horizontais em cada piso. O Shear Building tem, portanto, apenas três graus de liberdade, conforme mostra o desenho esquemático da Figura 6.11-(a) na página seguinte. Esse sistema pode ser simulado no programa descrito no Capítulo 4 através de um pilar de três barras, com um único deslocamento horizontal não restringido em cada um dos três nós superiores, como ilustrado na Figura 6.11-(b).

Figura 6.11 – Modelo para simulação de Shear Building



As constantes de rigidez dos pavimentos em questão são dadas em função dos parâmetros das barras correspondentes. Seguindo a matriz dada na equação (4.17), tem-se a seguinte identidade, para um dado pavimento  $i$ :

$$k_i = \frac{12EI}{L_i^3} \quad (6.9)$$

Já a matriz  $\mathbf{m}$  é obtida com o modelo de massa concentrada, com as massas dos pisos dispostas em sua diagonal, consideração que é geralmente permitida na análise de estruturas do tipo *Shear Building*. Para resolver esse sistema corretamente, entretanto, a sub-rotina do programa de pórtico plano que constrói a matriz de massa deve ser adaptada para considerar o modelo de massa concentrada. Essa rotina não foi exibida no Apêndice, onde aparece apenas o código para pórtico plano padrão. Foram analisados dois exemplos de Shear Building de três pisos, cujas propriedades são dadas na Tabela 6.4 a seguir.

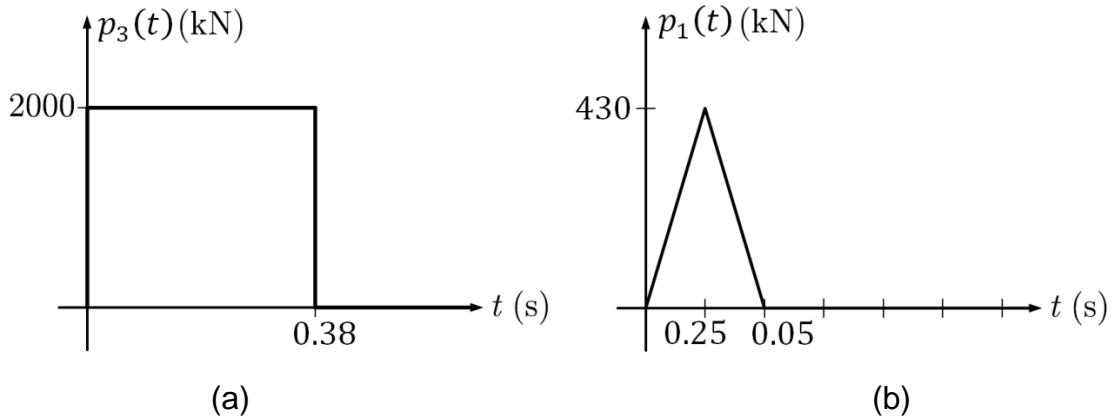
Tabela 6.4 – Propriedades dos exemplos de Shear Building

Exemplo	$m_1$	$m_2$	$m_3$	$k_1$	$k_2$	$k_3$
(1)	150 t	150 t	150 t	100000 kN/m	200000 kN/m	300000 kN/m
(2)	180 t	270 t	360 t	105000 kN/m	210000 kN/m	315000 kN/m

O primeiro exemplo descrito foi analisado anteriormente no trabalho de Camargo (2008, p. 100). Nesse cenário existe um carregamento horizontal transitente que atua

no piso inferior com um valor constante durante 0.38 segundos, cessando a partir desse instante, como mostra a Figura 6.12-(a) abaixo.

Figura 6.12 – Carregamentos atuantes nos sistemas Shear Buildings



Já o segundo exemplo foi analisado por Rossi *et al.* (2012) e sobre esse sistema atua um carregamento horizontal no piso superior com um histórico de pulso triangular simétrico de duração 0.05 segundos, ilustrado na Figura 6.12-(b). Com isso, os carregamentos para esses dois exemplos podem ser representados, respectivamente, pelos vetores de carga

$$\mathbf{p}(t) = [0 \ 0 \ p_3(t)]^T \quad \text{e} \quad \mathbf{p}(t) = [p_1(t) \ 0 \ 0]^T \quad (6.10)$$

Na solução da análise linear desses sistemas foi considerando o amortecimento proporcional de Rayleigh com uma taxa de amortecimento de 15% para o 1º e 3º modos de vibração, no primeiro exemplo, e de 5% no segundo exemplo, também para o 1º e 3º modos.

No processo de solução da análise do primeiro exemplo, constrói-se a matriz de massa, a matriz de rigidez e resolve-se o problema de autovalor associado para se obter as frequências naturais, chegando aos seguintes resultados (em toneladas,  $kN/m$  e  $rad/s$ , respectivamente):

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} 150 & 0 & 0 \\ 0 & 150 & 0 \\ 0 & 0 & 150 \end{bmatrix} \quad \mathbf{k} = 1 \times 10^5 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} 16.65 \\ 39.11 \\ 64.76 \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

Através das taxas de amortecimento  $\xi_1 = \xi_3 = 15\%$  e das frequências  $\omega_1$  e  $\omega_3$ , associadas aos 1º e 3º modos, acham-se as constantes  $a_0$  e  $a_1$  das equações (3.50) usando a expressão (3.51). Com isso, obtém-se a taxa de amortecimento  $\xi_2$  do 2º modo e também a matriz  $c$ , usando a equação (3.46). Os resultados são:

$$\begin{aligned} a_0 &= 3.97 \text{ s}^{-1} \\ a_1 &= 3.69 \times 10^{-3} \text{ s} \\ \xi_2 &= 12.29 \% \end{aligned} \quad c = \begin{bmatrix} 964.5 & -368.5 & 0 \\ -368.5 & 1701.6 & -737.1 \\ 0 & -737.1 & 2438.6 \end{bmatrix} \frac{t}{s} \quad (6.12)$$

Dado o carregamento atuante (força apenas no andar inferior, com equação  $p_3(t)$  ilustrada na Figura 6.12(a)) constrói-se o vetor de cargas já exposto e realiza-se a análise dinâmica usando o método de Newmark, com e sem adaptatividade, encontrando os deslocamentos da estrutura em cada piso. As respostas dinâmicas da análise para os três pavimentos, obtidas usando um intervalo de tempo constante  $\Delta t = 0.001 \text{ s}$  estão expostas na Figura 6.13-(a) a seguir. As constantes do método numérico foram tomadas como  $\gamma = 1/2$  e  $\beta = 1/8$  e os parâmetros dos diferentes métodos adaptativos estão exibidos na Tabela 6.5 mais adiante.

Figura 6.13 – Respostas dinâmicas e variação de  $\Delta t$  do Shear Building Exemplo (1)

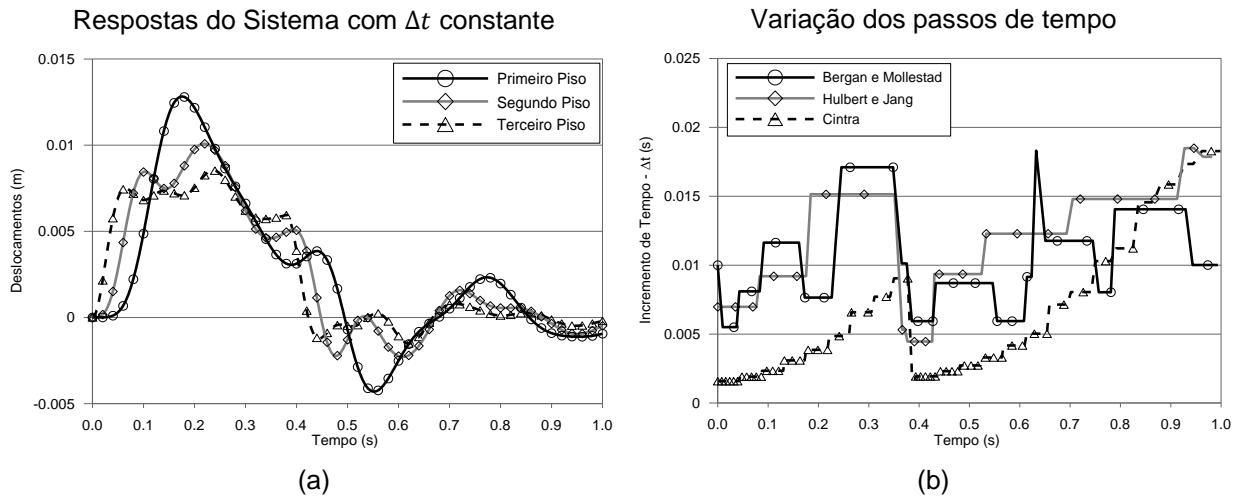


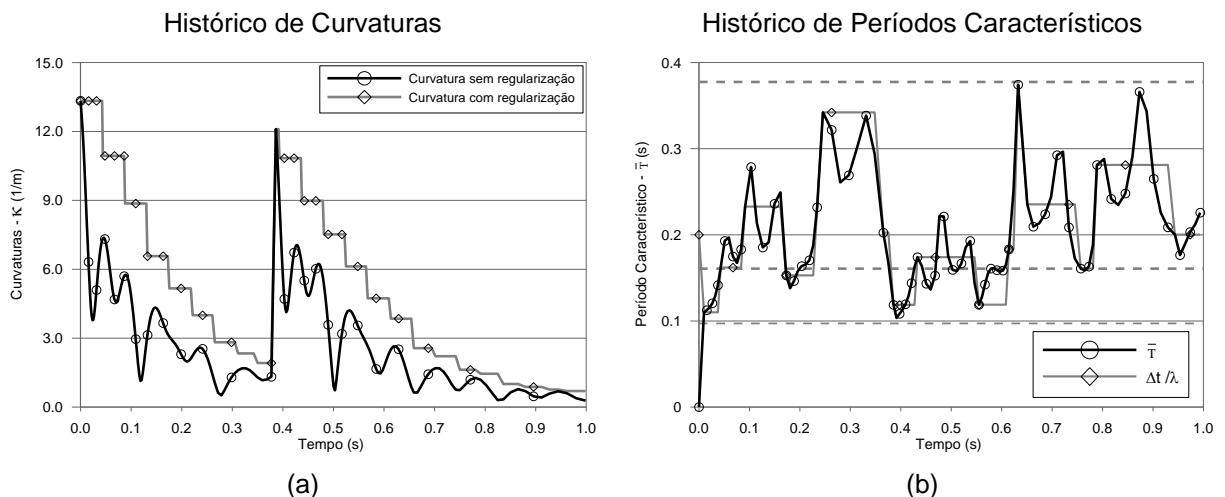
Tabela 6.5 – Parâmetros usados nos exemplos de Shear Building

Exemplo	Bergan e Mollestad		Hulbert e Jang	Cintra		
	$\lambda$	$\bar{\xi}_p$	$(\Delta t/T)^{alvo}$	$c_p$	$c_t$	$\alpha$
(1)	0.05	1.4	1/10	2	1.0	0.6
(2)	0.05	1.3	1/20	25	2.0	0.5

O valor do parâmetro  $\bar{\xi}_m$  de Bergan e Mollestad foi mantido igual a 2.0 e os valores de  $lb = 0.75$  e  $p_{inc} = p_{dec} = 2$  da estratégia de Hulbert e Jang também foram repetidos (esses parâmetros serão mantidos fixos em todos os exemplos de sistemas MDOF que se seguem). O valor  $\Delta t_{\max}$  do método de Cintra foi tomado igual o incremento de tempo crítico  $\Delta t_{crit}$  nos dois exemplos de Shear Building. No primeiro exemplo esse valor é de  $\Delta t_{crit} = T_J \sqrt{2}/\pi$  (Equação (2.33)).

A Figura 6.13-(b) mostrou a variação dos incrementos de tempo ao longo da simulação usando todos os métodos adaptativos discutidos anteriormente, onde o passo de tempo inicial foi tomado igual a  $\Delta t_1 = 0.01s$  nas três estratégias. Observa-se nesse gráfico que todos os algoritmos previram um aumento do valor de  $\Delta t$  nos primeiros 0.35 s da análise, reduzindo-o bruscamente próximo do instante  $t = 0.4s$  e aumentando-o novamente nos momentos seguintes. Como o valor de  $RL_1$  fica maior que o limite  $tol$ , a estratégia de Hulbert e Jang já inicia a integração ajustando o passo inicial, assim como a estratégia de Cintra. O algoritmo de Bergan e Mollestad usa o incremento inicial na integração do primeiro passo e o reduz logo em seguida. Observou-se uma ligeira tendência do passo de tempo atingir o valor  $\Delta t = 0.015s$  no final de todas as análises. A estratégia de Cintra gerou os menores valores de  $\Delta t$ , enquanto as outras duas forneceram valores mais próximos entre si. A Figura 6.14-(a) a seguir ilustra as sequências de curvaturas usadas na estratégia de Cintra.

Figura 6.14 – Curvaturas e Períodos característicos do Shear Building Exemplo (1)

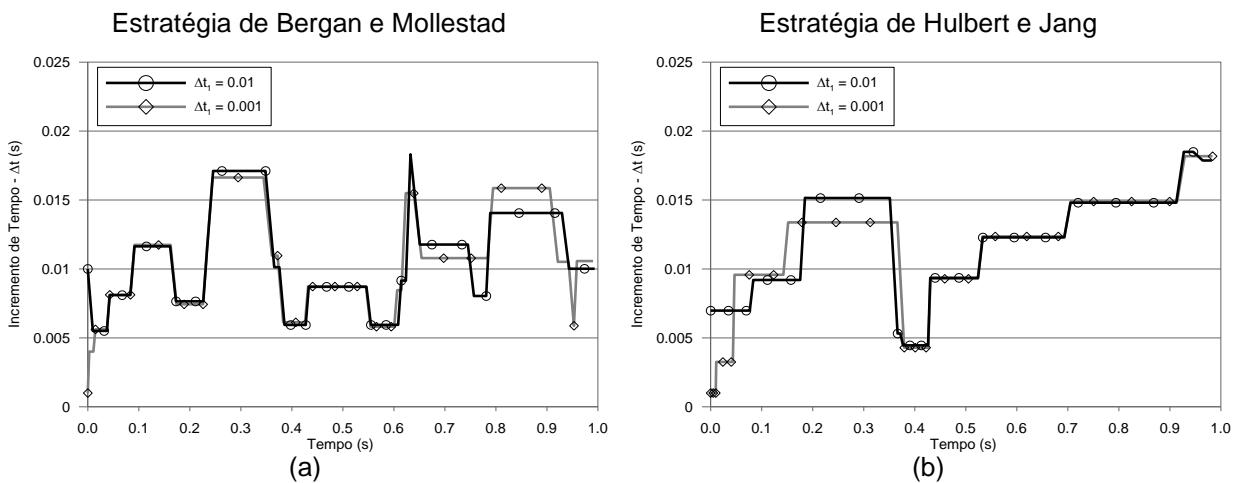


A Figura 6.14-(b) acima mostra a variação no tempo do período característico  $\bar{T}$  calculado com estratégia de Bergan e Mollestad, assim como a razão  $\Delta t/\lambda$ , que

possui patamares de valores constantes, se comportando como na Figura 6.13-(b). As três retas horizontais traçadas em linha interrompida nesse gráfico estão sobre os valores dos períodos de vibração natural  $T$  da estrutura, que são iguais a  $T_1 = 0.377s$ ,  $T_2 = 0.161s$  e  $T_3 = 0.097s$ . Observa-se que os valores de  $\bar{T}$  variam dentro da região limitada pelo período fundamental  $T_1$  e o período do modo de maior frequência  $T_3$ , oscilando em torno do valor de  $T_2$ .

Com o objetivo de verificar a independência dos algoritmos adaptativos sobre a seleção do passo inicial  $\Delta t_1$ , a análise desse exemplo é novamente realizada com um valor diferente  $\Delta t_1 = 0.001s$  para os métodos de Bergan e Mollestad e Hulbert e Jang. A comparação entre as variações dos passos de tempo usando esse novo incremento inicial e o incremento anterior é feita na Figura 6.15 a seguir. Observa-se que o comportamento dos valores de  $\Delta t$  é geralmente insensível à escolha do passo de tempo inicial, em ambos os métodos de adaptação. A estratégia de Cintra não faz uso do valor  $\Delta t_1$  a menos que as condições iniciais sejam quiescentes, logo esse método não foi comparado, pois geraria o mesmo histórico de  $\Delta t$  exibido para essa estratégia na Figura 6.13-(b).

Figura 6.15 – Variação dos passos de tempo usando diferentes valores de  $\Delta t_1$



Observa-se na figura acima que o passo de tempo inicial otimizado ficaria entre os valores de  $0.005s$  e  $0.01s$  em ambas as estratégias. Esse passo é atingido no algoritmo de Bergan e Mollestad logo após o primeiro incremento de tempo nas duas escolhas de  $\Delta t_1$ . Na estratégia de Hulbert e Jang a escolha  $\Delta t_1 = 0.01s$  provoca o ajuste imediato, como já se havia notado, mas a escolha  $\Delta t_1 = 0.001s$  é usada nos primeiros passos até que o valor de  $RL$  fique inferior ao limite  $lb \times tol$  um número

*lcount* de vezes. Mesmo com esse comportamento inicial diferente, os intervalos de tempo finais ficam mais próximos entre si no algoritmo de Hulbert e Jang do que na estratégia de Bergan e Mollestad.

Na solução do segundo exemplo de Shear Building são encontrados os seguintes resultados para as matrizes, as frequências naturais e os parâmetros do problema, usando a mesma metodologia seguida para a solução do primeiro exemplo (massa em toneladas, rigidez em  $kN/m$  e frequência em  $rad/s$ ).

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} 180 & 0 & 0 \\ 0 & 270 & 0 \\ 0 & 0 & 360 \end{bmatrix} \quad \mathbf{k} = 1.05 \times 10^5 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} 14.32 \\ 30.61 \\ 45.45 \end{bmatrix} \quad (6.13)$$

$$\begin{aligned} a_0 &= 1.089 \text{ s}^{-1} \\ a_1 &= 1.673 \times 10^{-3} \text{ s} \\ \xi_2 &= 4.34\% \end{aligned} \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 371.7 & -175.7 & 0 \\ -175.7 & 821.0 & -351.3 \\ 0 & -351.3 & 1270.3 \end{bmatrix} \frac{t}{s} \quad (6.14)$$

O vetor de cargas é construído com a equação de  $p_1(t)$  aplicada no andar superior, como já mostrado, e a análise é resolvida pelo método de Newmark tomando  $\gamma = 1/2$  e  $\beta = 1/5$ . As respostas dessa da análise para os três pavimentos, obtidas usando um intervalo de tempo constante  $\Delta t = 0.001s$ , assim como os demais resultados das estratégias adaptativas, estão expostos nas Figura 6.16 e Figura 6.17 a seguir. Os parâmetros dos métodos adaptativos foram exibidos na Tabela 6.5.

Figura 6.16 – Respostas dinâmicas e variação de  $\Delta t$  do Shear Building Exemplo (2)

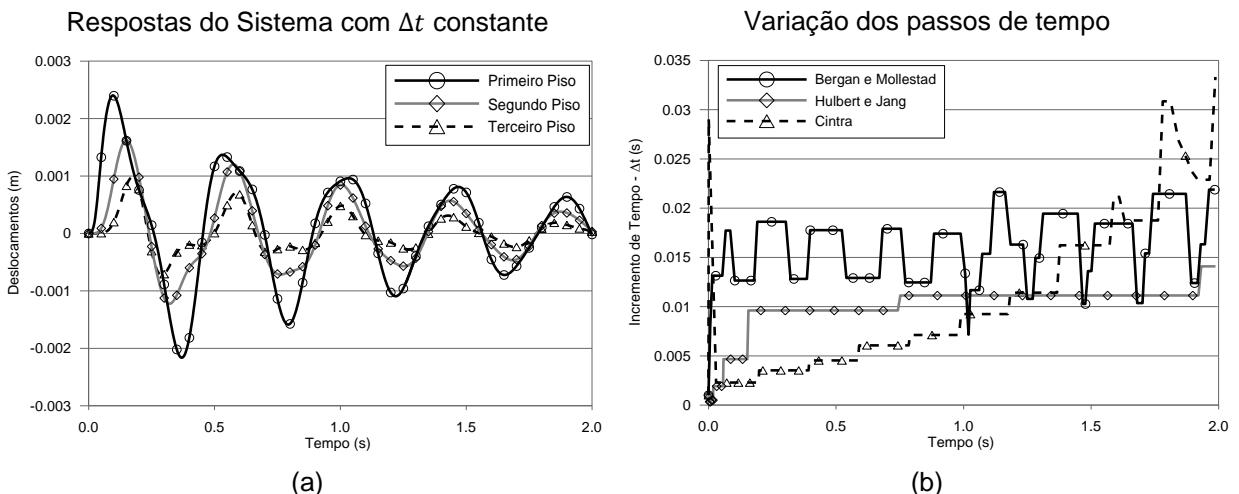
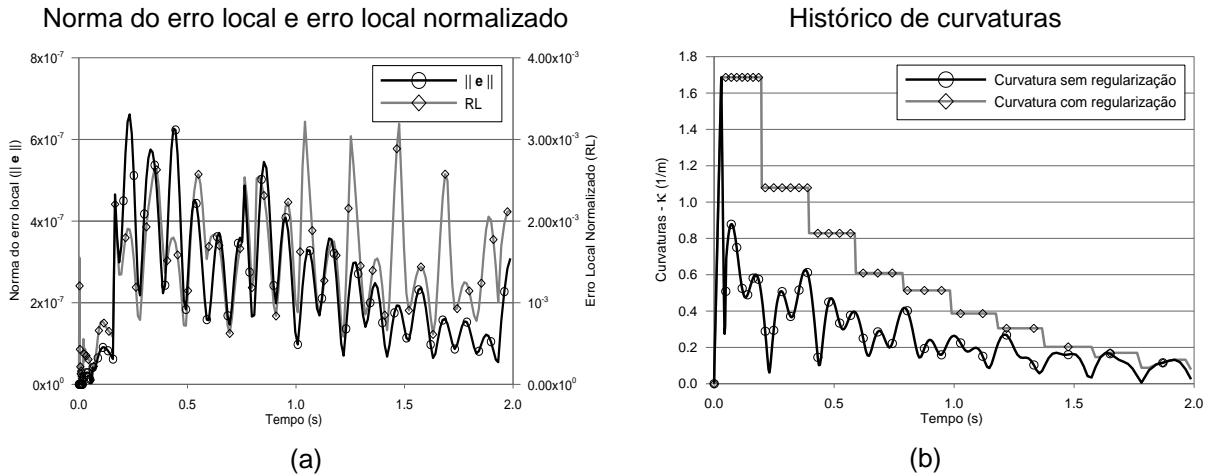


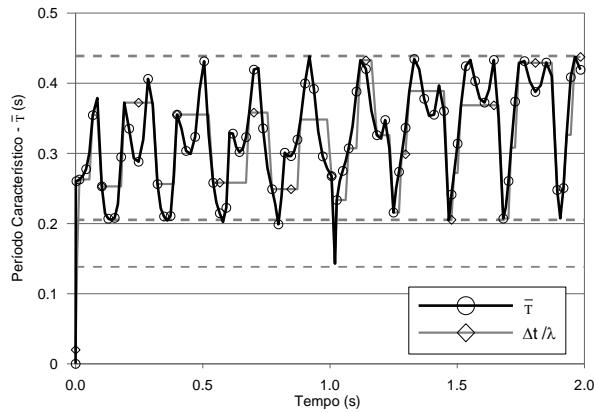
Figura 6.17 – Erros normalizados e Curvaturas do Shear Building Exemplo (2)



Observa-se que esse exemplo é um caso com condições iniciais quiescentes, o que faz todos os métodos usarem o incremento inicial  $\Delta t_1 = 0.001\text{s}$  na integração do primeiro passo. O erro  $RL_1$  calculado na estratégia de Hulbert e Jang (não usado na adaptação) ultrapassa os limites plotados no gráfico da Figura 6.17-(a) por ter um valor muito elevado, que é diretamente obtido da equação (5.32). A curvatura inicial do método de Cintra é nula (Figura 6.17-(b)) e, por isso, o uso do incremento máximo ( $\Delta t_{máx}$ ) é evitado no primeiro passo optando-se pelo valor declarado  $\Delta t_1$ . Entretanto, assim como aconteceu nos sistemas SDOF, isso não evitou que a curvatura no segundo passo permanecesse pequena, o que fez o incremento  $\Delta t_2$  assumir um valor relativamente grande (Figura 6.16-(b)).

Na estratégia de Bergan e Mollestad o passo de tempo oscilou em torno do valor  $\Delta t = 0.015\text{s}$ , de acordo com a Figura 6.16-(b). Já no algoritmo de Hulbert e Jang, o incremento cresceu em estágios menos variáveis até chegar próximo desse patamar. Esse número é exatamente um vinte avos do valor médio  $\bar{T} = 0.3\text{s}$  em torno do qual oscila o período característico calculado no método de Bergan e Mollestad, segundo a Figura 6.18 da próxima página a seguir (o que é compatível com a escolha  $\lambda = (\Delta t/T)^{alvo} = 1/20$ ). Esse gráfico mostra ainda que os valores de  $\bar{T}$  variam geralmente dentro da região limitada pelo período fundamental  $T_1 = 0.439\text{s}$  e o período do segundo modo  $T_2 = 0.205\text{s}$ , oscilando em torno da média desses valores, que é próxima de  $0.3\text{s}$ . No método de Cintra o passo de tempo iniciou menor que os demais e foi crescente na maior parte da análise, seguindo o comportamento inverso da curvatura regularizada mostrada na Figura 6.17-(b).

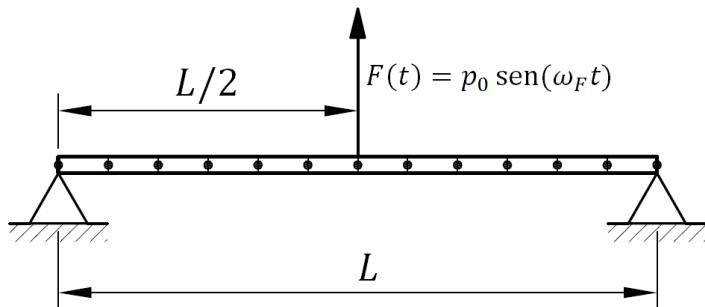
Figura 6.18 – Variação dos Períodos Característicos do Shear Building Exemplo (2)



### 6.3 VIGA BIAPOIADA

Para aplicar o programa padrão desenvolvido nesse trabalho na análise de estruturas reticuladas, modela-se agora a viga simplesmente apoiada excitada com um carregamento harmônico aplicado no ponto médio do vão, como ilustrado na Figura 6.19. A viga foi discretizada em 12 elementos iguais ao longo do seu comprimento e os valores das propriedades do problema são dados nas equações (6.15) a seguir. Foi considerando o amortecimento proporcional de Rayleigh com uma taxa de amortecimento de 10% para o 1º e 3º modos de vibração. Esse sistema foi analisado anteriormente em ambos os trabalhos de Bergan e Mollestad (1985, p. 309) e Hulbert e Jang (1995, p. 173).

Figura 6.19 – Modelo de viga simplesmente apoiada sob carga senoidal



$$E = 2.1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$$

$$\bar{m} = \rho A = 70 \text{ kg/m}$$

(6.15)

$$I = 4.48 \times 10^{-5} \text{ m}^4$$

$$L = 24 \text{ m}$$

Dois casos foram estudados, usando diferentes frequências  $\omega_F$  e diferentes amplitudes  $p_0$  no carregamento harmônico. No primeiro caso, a frequência de

excitação foi igual à frequência fundamental  $\omega_1$  e a amplitude do carregamento foi tomada como  $p_0 = 450 \text{ N}$ . No segundo caso, a frequência  $\omega_F$  foi igualada à terceira frequência modal  $\omega_3$ , e a amplitude da carga foi escolhida como  $p_0 = 4500 \text{ N}$ .

Segundo Bergan e Mollestad, e Hulbert e Jang, os valores exatos para a frequência fundamental e a frequência do terceiro modo de vibração desse sistema são iguais, respectivamente, à  $2\pi \text{ rad/s}$  e  $18\pi \text{ rad/s}$ . Esses valores podem ser encontrados com a primeira das equações (6.16) a seguir, demonstrada por Meirovitch (1986, p. 225) num problema de viga simplesmente apoiada em vibrações livres por flexão. Para chegar precisamente aos resultados sugeridos, no entanto, deve-se considerar que a inércia  $I$  da viga exibida anteriormente é definida de forma exata pela segunda das equações (6.16), com a qual também é possível obter  $\omega_2 = 8\pi \text{ rad/s}$ .

$$\omega_i = (i\pi)^2 \sqrt{\frac{EI}{mL^4}} \quad I = \frac{55296}{1250\pi^2} \times 10^{-5} \text{ m}^4 \quad (6.16)$$

Os valores numéricos para as três primeiras frequências, em Hertz, obtidos usando o programa desenvolvido nessa dissertação (fazendo  $f_i = \omega_i/2\pi$  com as soluções da equação (3.37)), estão listados na Tabela 6.6 abaixo. Foram calculadas as frequências sob a discretização de 12 barras, apresentada na Figura 6.19, e também com uma outra divisão, que considera apenas dois elementos iguais ao longo do comprimento da viga. Para aferir os resultados obtidos com o código criado em Matlab, realizou-se também a análise modal através do software computacional Ansys 11.0, nos mesmos modelos citados, cujos resultados também aparecem na Tabela 6.6.

Tabela 6.6 – Frequências modais da viga biapoiada calculadas numericamente

Frequências em Hertz (ciclos por segundo)					
Valores exatos (modelo contínuo)		Modelo de 2 elementos		Modelo de 12 elementos	
		Matlab	Ansys	Matlab	Ansys
$f_1 = \omega_1/2\pi$	1 Hz	1.0039469	1.0039465	1.0000033	1.0000029
$f_2 = \omega_2/2\pi$	4 Hz	4.4396718	4.4396649	4.0002072	4.0002010
$f_3 = \omega_3/2\pi$	9 Hz	11.1594802	11.1594393	9.0023370	9.0023058

Observa-se que os resultados numéricos da tabela anterior se aproximam mais dos exatos quando maior é a quantidade de elementos utilizada, sendo que as maiores perdas de precisão ocorrem no cálculo dos maiores modos nos modelos discretos. Recorda-se, com isso, a observação feita na seção 4.4 sobre a necessidade de discretizar o sistema dinâmico, inclusive para elementos de barra, cujas funções de interpolação seriam exatas em problemas estáticos. Também pôde ser notada a outra observação feita naquela seção sobre o uso da matriz de massa consistente, já que as frequências numéricas resultaram sempre maiores que os valores analíticos, estabelecendo um limite superior para estes.

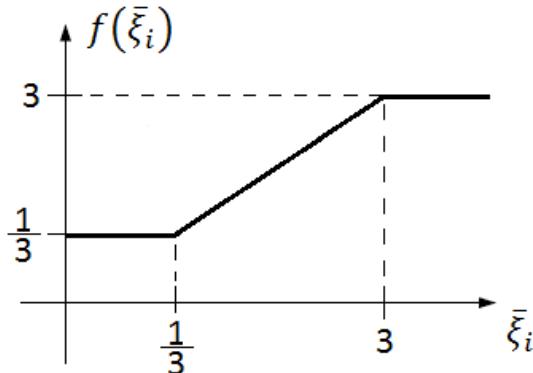
Foram realizadas as análises dinâmicas com o método de Newmark tomando  $\gamma = 1/2$  e  $\beta = 1/4$ , o que corresponde à assunção de aceleração constante (seção 2.4.1). Nas respostas obtidas pelo algoritmo de integração foi escolhido o passo de tempo inicial igual a  $\Delta t_1 = 0.001s$ , tanto na execução com incremento de tempo uniforme quanto com a implementação das três estratégias adaptativas estudadas. Os parâmetros  $\lambda$  e  $\xi_p$  de Bergan e Mollestad foram escolhidos iguais a 0.05 e 1.3, respectivamente, já a razão  $(\Delta t/T)^{alvo}$  de Hulbert e Jang foi tomada como 0.05. As constantes  $c_p$ ,  $c_t$  e  $\alpha$  do método de Cintra foram igualadas a 1.0, 1.0 e 0.9, respectivamente. O valor de  $\Delta t_{máx}$  da estratégia de Cintra foi escolhido como 0.1s, o que corresponde a 1/10 do período do modo fundamental  $T_1 = 1s$ , e o intervalo de regularização foi calculado como  $\Delta t_{reg} = c_t \Delta t_{máx}$ , já que  $\Delta t_{crit} = +\infty$  nesse caso.

Além das estratégias adaptativas mencionadas, foi também realizada a mesma análise transiente através do software computacional Ansys 11.0, aplicando o método de adaptação automática disponível nas opções do programa. Segundo o que consta nas descrições do método no software, o passo de tempo automático usado em dinâmica estrutural é exatamente a estimativa  $\Delta t^*$  proposta na estratégia de Bergan e Mollestad, com o valor fixo  $\lambda = 1/20$ . Porém não é mencionada nenhuma função de controle  $f(\xi)$ , mas somente as restrições adicionais sobre os tamanhos máximo e mínimo dos passos de tempo dadas a seguir, onde  $F = 3.0$  em análises dinâmicas (ANSYS, INC., 2007, sec. 15.7.1).

$$\Delta t_{i+1} \leq F \Delta t_i \quad \Delta t_{i+1} \geq \frac{\Delta t_i}{F} \quad (6.17)$$

Isso sugere que a função de controle adotada pelo Ansys seja descrita pela ilustração da Figura 6.20 abaixo. Além das restrições (6.17), o programa permite ainda declarar os valores máximos e mínimos,  $\Delta t_{máx}$  e  $\Delta t_{mín}$ , como dados de entrada, se desejado.

Figura 6.20 – Provável função de controle usada no algoritmo do Ansys



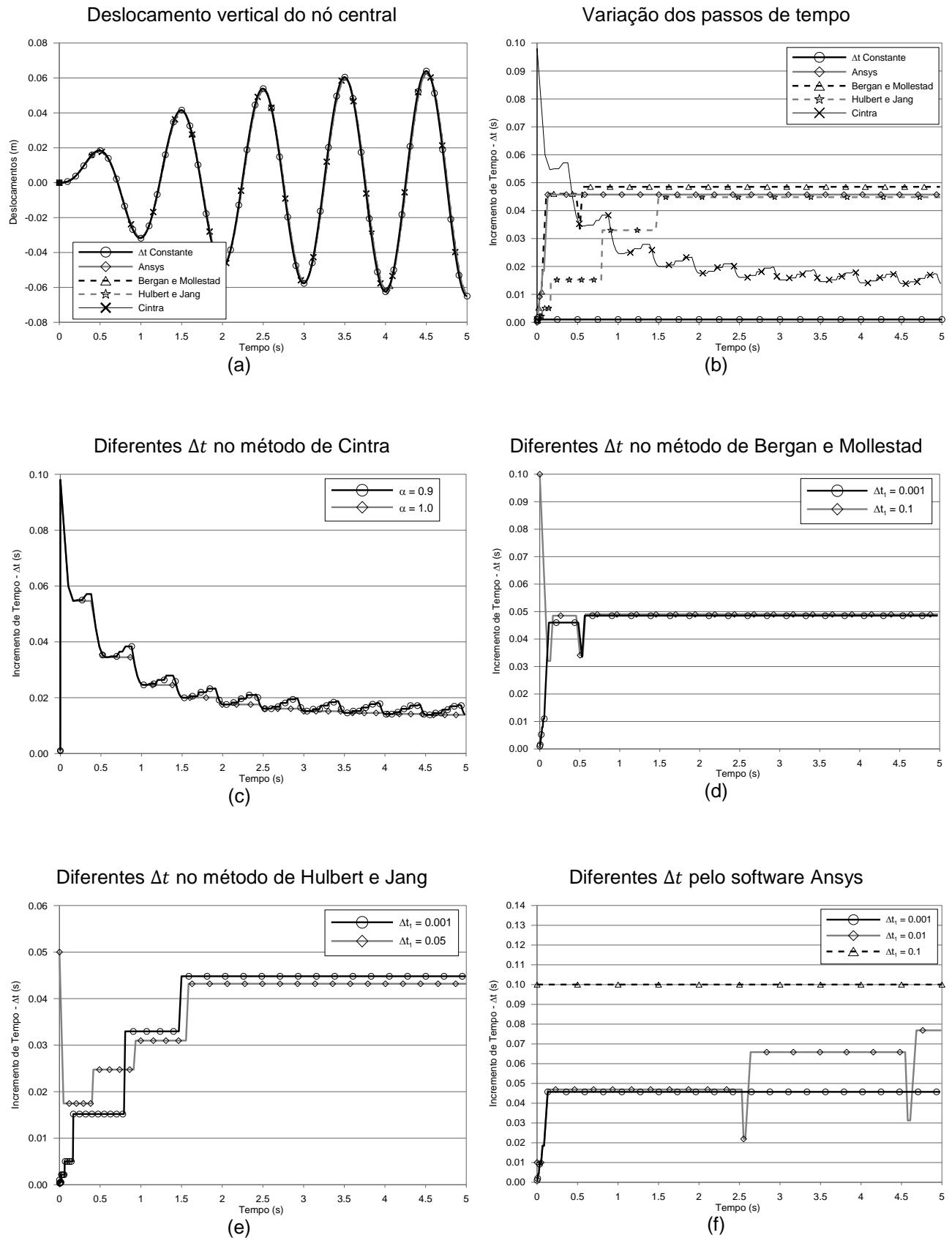
Os resultados das análises para o primeiro caso de carregamento estão ilustrados nos gráficos da Figura 6.21 na página seguinte, os quais incluem o histórico de deslocamento vertical do nó central do vão da viga, e as variações de incremento de tempo pelos diferentes métodos adaptativos.

As constantes  $a_0$  e  $a_1$  do amortecimento proporcional foram obtidas, neste exemplo, como sendo iguais aos seguintes valores:

$$a_0 = 1.13101 \text{ } s^{-1} \quad (6.18)$$

$$a_1 = 0.00318 \text{ } s \quad (6.19)$$

Figura 6.21 – Resultados das análises da viga para o primeiro caso de carregamento

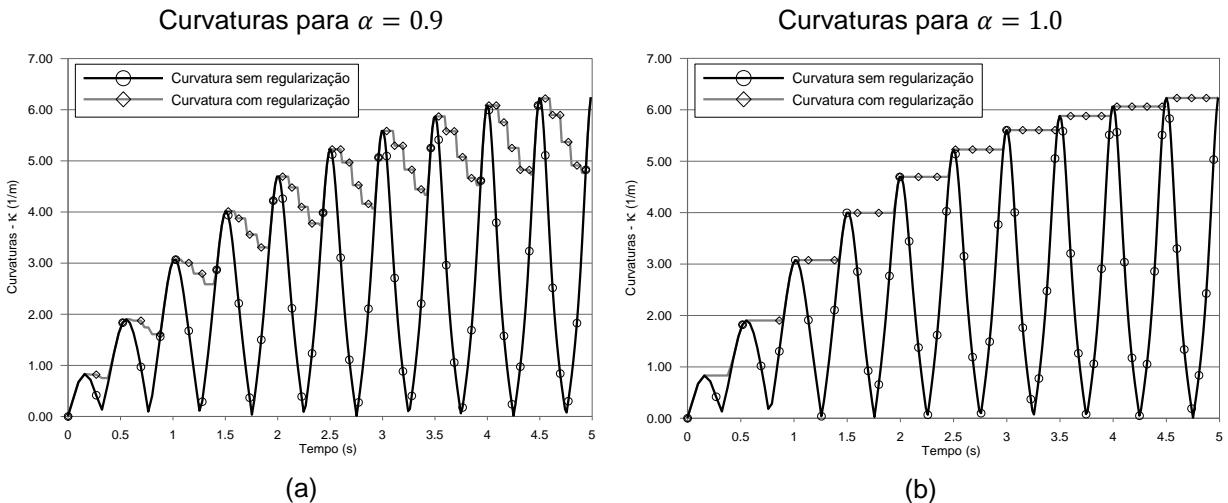


As respostas da estrutura são praticamente idênticas para todos os métodos. Na estratégia de Bergan e Mollestad o valor de  $\lambda$  corresponde a um passo de tempo ideal de 5% do período fundamental, que é o mesmo período do carregamento. A Figura 6.21-(b) mostra que o incremento de tempo cresce rapidamente do baixo valor inicial  $0.001s$  para perto de  $0.05s$ , caindo momentaneamente próximo do instante  $t = 0.5s$  antes de aumentar novamente, chegando mais perto do valor ideal e permanecendo inalterado durante o resto da análise com o uso desse método. Na estratégia de Hulbert e Jang o valor alvo dado por  $(\Delta t/T)^{alvo}$  é o mesmo do método de Bergan e Mollestad, o qual é quase alcançado após alguns patamares intermediários e mantido posteriormente estável. Na resposta fornecida pelo Ansys o mesmo incremento alvo é atingido tão rapidamente quanto no método de Bergan e Mollestad, mas mantido uniforme antes deste. Esse comportamento é mais semelhante com o que foi obtido no trabalho original destes autores, o que talvez tenha relação com o parâmetro  $\varepsilon$  da verificação (5.6) ou até mesmo com o valor de  $\bar{\xi}_p$  ( $\varepsilon$  foi tomado igual a 0.1 em todas as análises deste trabalho; diferentes valores podem produzir outros resultados).

O mesmo fenômeno ocorrido nos exemplos anteriores quando se aplica a estratégia de Cintra em problemas de condições iniciais quiescentes pode ser observado nesse caso, já que o valor do segundo incremento ( $\Delta t_2$ ) cresceu até próximo do limite máximo  $\Delta t_{máx} = 0.1s$ , devido a uma curvatura quase nula. O incremento de tempo final desse algoritmo oscilou num intervalo de valores aproximadamente uniformes muito menores do que os passos de tempo obtidos nas outras estratégias. A Figura 6.22-(a) na página a seguir exibe a variação das curvaturas para essa análise, com e sem regularização, mostrando que o valor de  $\kappa^{reg}$  oscila entre um pico e outro, diminuindo antes de atingir o valor máximo dentro do período. Esse comportamento provoca uma oscilação indesejada no tamanho do incremento de tempo, o qual pode ser corrigido ao tomar  $\alpha = 1.0$  na estratégia adaptativa, gerando o histórico de curvaturas da Figura 6.22-(b). Na Figura 6.21-(c) foi feita a comparação entre a variação dos passos de tempo obtidos com esse algoritmo ao se escolher os diferentes valores  $\alpha = 0.9$  e  $\alpha = 1.0$ . Observa-se que, no segundo caso, o passo de tempo oscila menos e decresce em patamares constantes. Notou-se que, em geral, deve-se tomar  $\alpha = 1.0$  nos problemas onde o valor máximo da

curvatura é crescente, no intuito de gerar situações parecidas com esta última. A alternativa a esse procedimento seria escolher um valor de  $c_t$  que fizesse o intervalo de regularização  $\Delta t_{reg}$  ficar próximo do período de oscilação da curvatura, o que nem sempre é fácil de prever.

Figura 6.22 – Variação da curvatura para diferentes valores de  $\alpha$

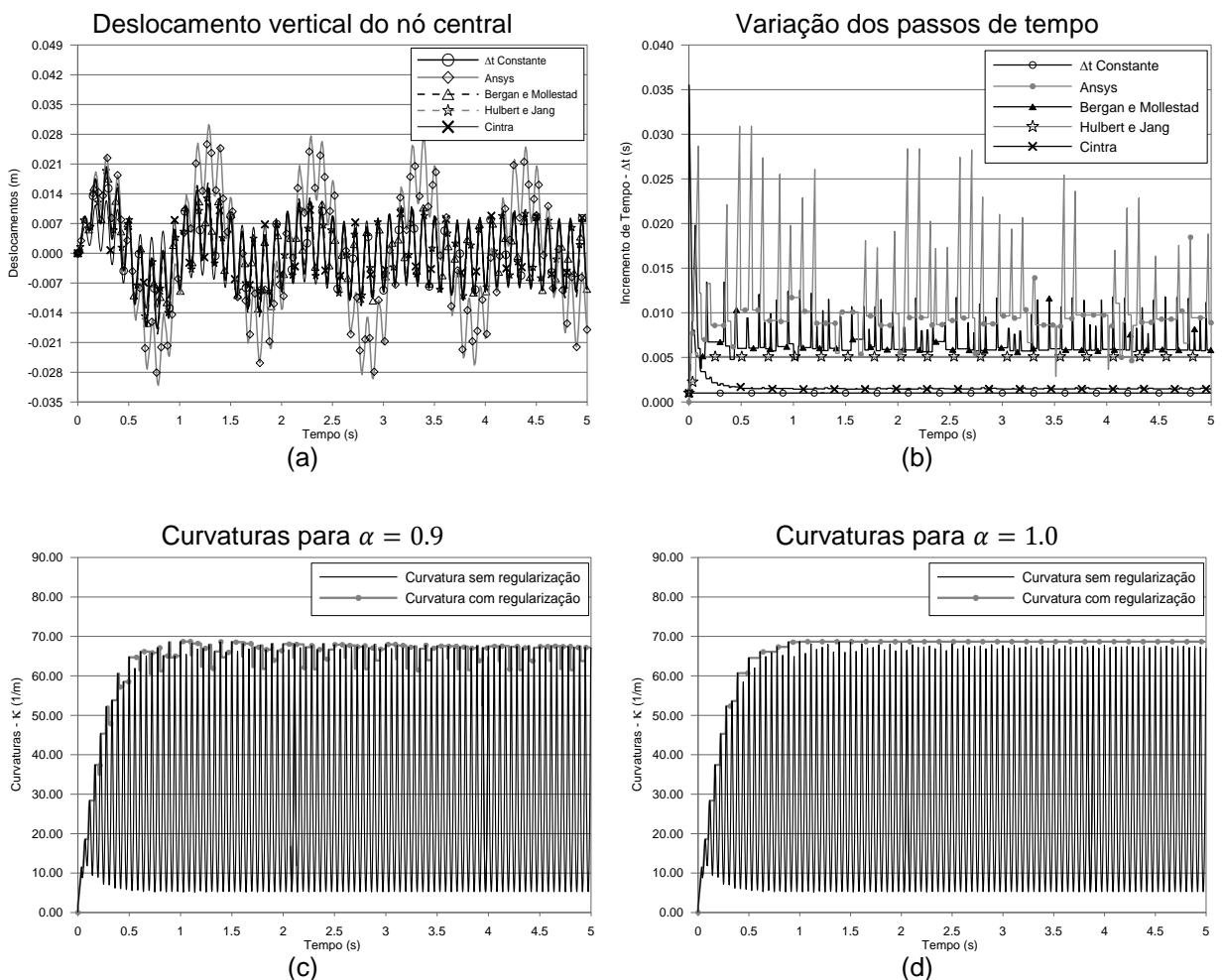


A análise desse mesmo caso de carregamento foi novamente realizada com os métodos de Bergan e Mollestad e Hulbert e Jang, assumindo diferentes passos de tempo iniciais ( $\Delta t_1$ ) iguais a  $0.1s$  e  $0.05s$ , respectivamente. As comparações dos resultados para a variação dos passos de tempo foram expostas nas Figura 6.21-(d) e (e). Na estratégia de Bergan e Mollestad, o incremento decresceu rapidamente do alto valor inicial, assumindo o mesmo comportamento da análise anterior. Na estratégia de Hulbert e Jang, o passo de tempo inicial decresce após a primeira integração, devido às condições quiescentes, e se comporta de forma semelhante à da primeira análise, atingindo o valor alvo e permanecendo estável. Isso prova que ambas as estratégias não são influenciadas pela escolha do passo inicial. O resultado da segunda análise com o método de Hulbert e Jang ficou semelhante ao obtido no trabalho original destes autores.

A variação dos passos de tempo também foi investigada com o software Ansys 11.0 sob os diferentes valores iniciais  $\Delta t_1 = 0.01s$  e  $\Delta t_1 = 0.1s$ , cujos resultados foram comparados na Figura 6.21-(f). Observa-se nesse caso que o comportamento variou com escolha o passo inicial, e que o software não realizou nenhuma adaptação sobre o valor  $\Delta t_1 = 0.1s$ .

Os resultados para o segundo caso de carregamento estão ilustrados na Figura 6.23 abaixo. A Figura 6.23-(a) mostra o histórico de resposta do ponto central do vão da viga. A parte transiente das vibrações é gradualmente amortecida e a parte particular da solução passa a dominar a resposta. O período característico calculado por Bergan e Mollestad se tornaria então aproximadamente igual ao período do carregamento, que é de  $1/9 = 0.111 \dots s$ . Em ambas as estratégias de Bergan e Mollestad e Hulbert e Jang o passo de tempo ideal deveria assumir aproximadamente 5% desse período, o que foi obtido com sucesso no segundo método, de acordo com a Figura 6.23-(b). No algoritmo de Bergan e Mollestad o passo de tempo oscilou muito, mas se manteve perto do patamar ideal na maior parte do tempo. Os passos de tempo fornecidos pelo Ansys ficaram aproximadamente próximos de 0.01s, mas assumiram valores muito altos em alguns instantes, o que pode ter ocasionado a perda de precisão na resposta observada na Figura 6.23-(a) em comparação com os outros métodos.

Figura 6.23 – Resultados das análises da viga para o segundo caso de carregamento



Na estratégia de Cintra a curvatura cresce e oscila demasiadamente, como visto na Figura 6.23-(c). A curvatura regularizada com  $\alpha = 0.9$  produz uma oscilação do passo de tempo em torno de um valor aproximadamente constante igual a 0.0015s, próximo do passo inicial. Esse comportamento pode ser uniformizado ao se fazer  $\alpha = 1.0$ , pois a curvatura regularizada assumiria assim a variação vista na Figura 6.23-(d). Novamente percebe-se que é mais indicado escolher  $\alpha = 1.0$  quando o comportamento médio da curvatura é crescente. Tal procedimento de uniformizar o passo de tempo é particularmente vantajoso em análises lineares, já que a mudança imperceptível e desnecessária do incremento de tempo provocaria alterações mais frequentes na matriz de rigidez efetiva  $\bar{k}$  da estrutura, aumentando o custo do processo.

## 6.4 PÓRTICO DE TRÊS BARRAS

A fim de aplicar o programa desenvolvido em problemas de pórticos planos sob cargas dinâmicas, considera-se agora o pórtico de aço mostrado na Figura 6.24 a seguir, constituído de perfis HPP 300, com os dados mostrados nas expressões da equação (6.20).

Figura 6.24 – Pórtico plano metálico

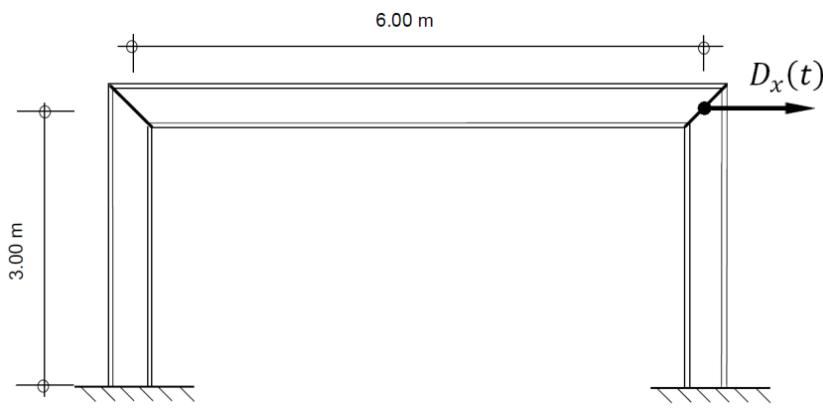
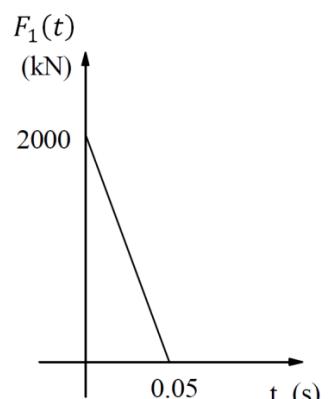


Figura 6.25 – Carga dinâmica aplicada sobre o pórtico



$$A = 0.0303 \text{ } m^2$$

$$I = 592 \times 10^{-6} \text{ } m^4$$

(6.20)

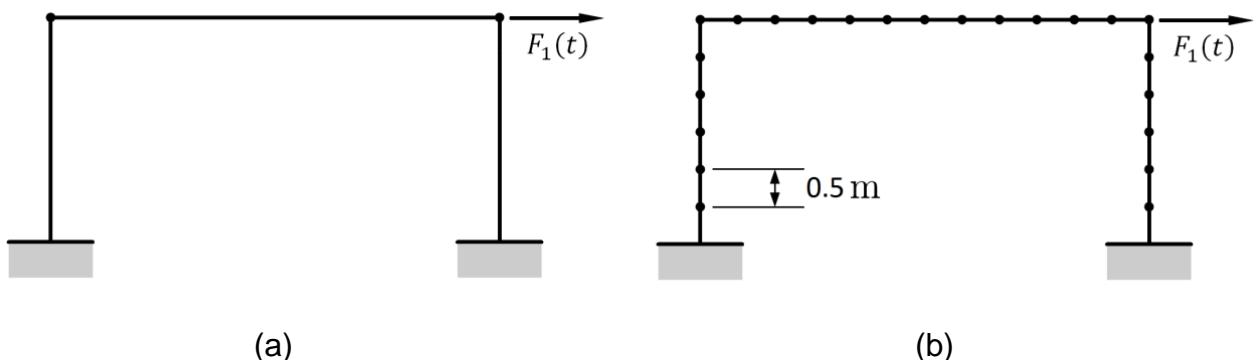
$$\bar{m} = \rho A = 0.238 \text{ } t/m$$

$$E = 205 \times 10^6 \text{ } kN/m^2$$

Objetiva-se descobrir o histórico de deslocamentos laterais  $D_x(t)$  do nó de ligação viga-pilar no canto superior direito, indicado na figura anterior. Num primeiro momento considera-se um carregamento transiente  $F_1(t)$  aplicado sobre esse mesmo nó, com função ilustrada na Figura 6.25.

Para comparar as diferenças nos resultados obtidos com diferentes discretizações na malha de elementos finitos (tomada ao longo das barras) faz-se a análise considerando dois modelos diferentes, ilustrados na Figura 6.26 a seguir. No primeiro deles não houve discretização, sendo as barras caracterizadas apenas pelos nós final e inicial, totalizando 4 nós e 3 barras em todo o pórtico. No segundo modelo a malha da estrutura foi refinada em 24 elementos de comprimento linear igual a 0.5 m, totalizando 25 nós.

Figura 6.26 – Diferentes discretizações do modelo do pórtico em elementos finitos



Fonte: Adaptado de Camargo (2008, p. 104)

Já que os apoios do pórtico são engastados e restringem completamente os deslocamentos de seus nós, conclui-se que o modelo da Figura 6.26-(a) possui 6 graus de liberdade, e o modelo da Figura 6.26-(b), 69 graus de liberdade. É considerado o amortecimento proporcional de Rayleigh com a taxa de amortecimento modal de 5% para o 1º e 3º modos em ambos os modelos. O primeiro modelo foi analisado anteriormente por Ferreira *et al.* (2000), já o segundo foi estudado em ambos os trabalhos de Sechim (2001) e Calenzani (2002), porém com diferentes considerações sobre o amortecimento.

Os resultados das 6 primeiras frequências naturais de ambos os modelos, obtidos com o Matlab e o Ansys, estão expostos na Tabela 6.7 a seguir. Mais uma vez,

verifica-se que as frequências obtidas no modelo não discretizado constituem limites superiores para os valores calculados com malhas mais refinadas, o que ocorre devido ao uso da matriz de massa consistente.

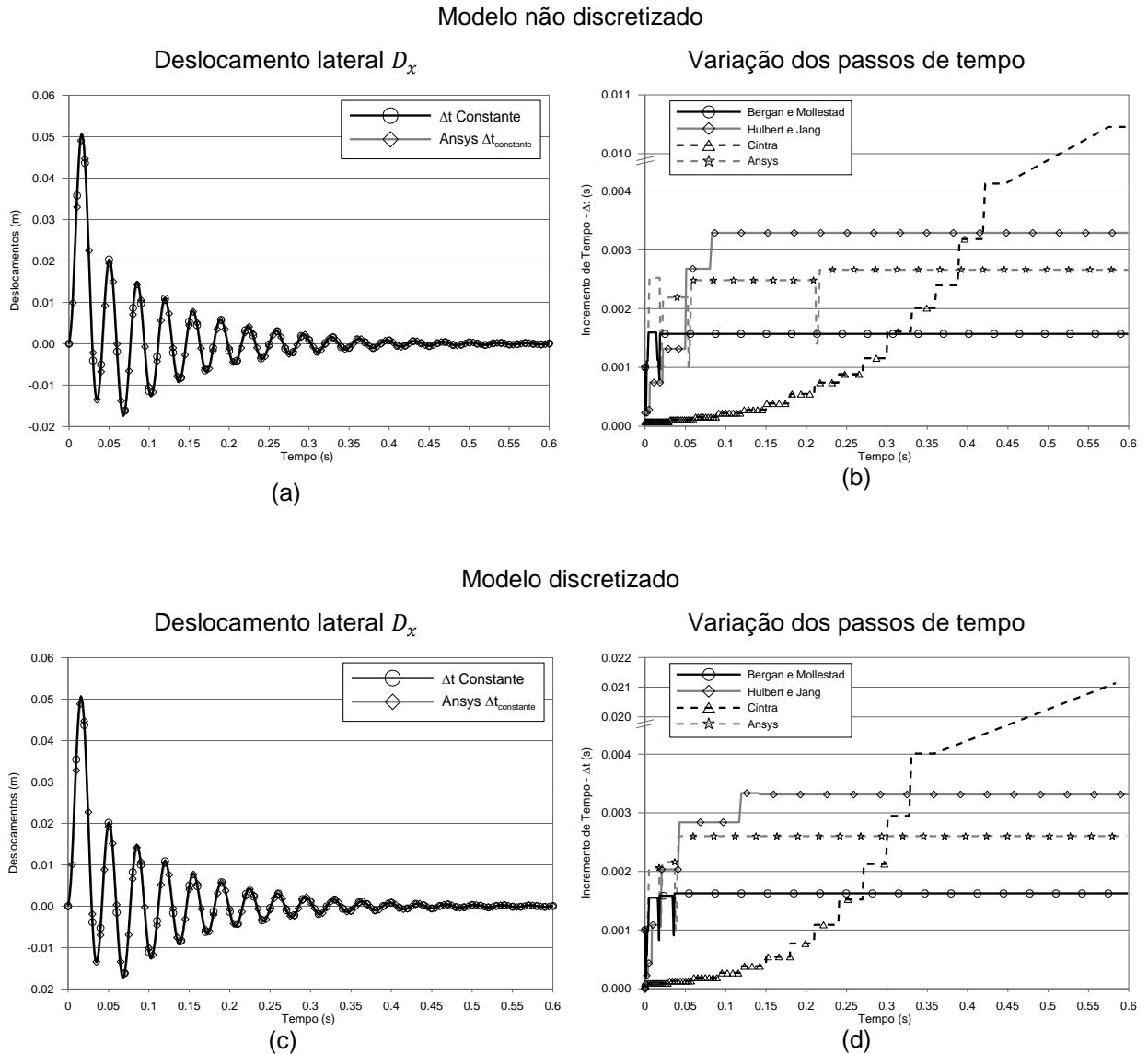
Tabela 6.7 – Frequências naturais do pórtico calculadas numericamente

Frequência	Valores em rad/s			
	Modelo não discretizado		Modelo discretizado	
	Matlab	Ansys	Matlab	Ansys
$\omega_1$	181.87	181.68	181.50	181.31
$\omega_2$	453.83	452.41	321.44	320.54
$\omega_3$	1172.22	1160.75	883.93	875.28
$\omega_4$	2000.42	1996.38	1317.69	1304.14
$\omega_5$	2479.74	2455.70	1618.15	1596.77
$\omega_6$	2491.46	2477.67	1794.78	1775.57

Na execução da análise dinâmica com o uso das estratégias adaptativas foi escolhido o passo de tempo inicial igual a  $\Delta t_1 = 0.001s$ .  $\bar{\xi}_p$  e  $\lambda$  foram tidos como 1.4 e 0.05, respectivamente,  $(\Delta t/T)^{alvo}$  foi tomado como 0.1, e  $c_t$  e  $\alpha$  foram igualados a 1.0 e 0.7, respectivamente. O valor  $\Delta t_{máx}$  do algoritmo de Cintra foi escolhido igual a 0.03s, o que se aproxima do período fundamental  $T_1 \approx 0.0346s$ , e a constante  $c_p$  foi igualada a 0.1 no modelo não discretizado, e a 0.001 no modelo discretizado. A integração foi realizada com o método de Newmark fazendo  $\gamma = 1/2$  e  $\beta = 1/4$  (aceleração constante) e no método de Cintra foi novamente usada a expressão  $\Delta t_{reg} = c_t \Delta t_{máx}$ , pois não há  $\Delta t_{crit}$  nesse caso.

Os resultados das análises transientes para ambos os modelos estão ilustrados nos gráficos da Figura 6.27 na página a seguir. A resposta para o deslocamento lateral  $D_x$  foi visualmente idêntica em todas as análises, de forma que foram plotados apenas os resultados do método com incremento de tempo constante, obtidos tanto com o código em Matlab quanto com sua aferição no Ansys, ambos usando o valor  $\Delta t_{constante} = 0.001s$ .

Figura 6.27 – Resultados das análises do pórtico sob o primeiro carregamento



As respostas para ambos os modelos discretizado e não discretizado são muito semelhantes, fato já anteriormente observado no estudo de Sechim (2001). O período dominante na resposta  $\bar{T}$  calculado por Bergan e Mollestad ficou geralmente próximo do período fundamental  $T_1$ , de forma que o incremento de tempo ideal dessa estratégia assumiu um vinte avos desse intervalo, por volta de  $0.00175\text{s}$ . O passo de tempo alvo de Hulbert e Jang ficou perto do dobro desse valor, devido à razão  $(\Delta t/T)^{alvo}$  ser o dobro de  $\lambda$ , e os incrementos de tempo fornecidos pelo algoritmo adaptativo do Ansys se situaram entre esses dois patamares.

Na aplicação da estratégia de Cintra, notou-se um fenômeno característico de sistemas MDOF com muitos graus de liberdade, já citado na seção 5.4.4.2: a

curvatura atinge valores muito altos, de forma que o incremento de tempo ficaria muito pequeno se a constante  $c_p$  não atuasse reduzindo o valor de  $\kappa$ . Quanto maior é o número de graus de liberdade, maior é o valor da curvatura no instante inicial, o que justifica ter-se escolhido  $c_p$  igual 0.1 no caso não discretizado e igual a 0.001 no caso discretizado, pois a ordem de grandeza da curvatura inicial do segundo modelo é cerca de 100 vezes maior do que no primeiro modelo, como mostra a Figura 6.28 abaixo:

Figura 6.28 – Históricos de curvatura para os dois modelos de pórtico

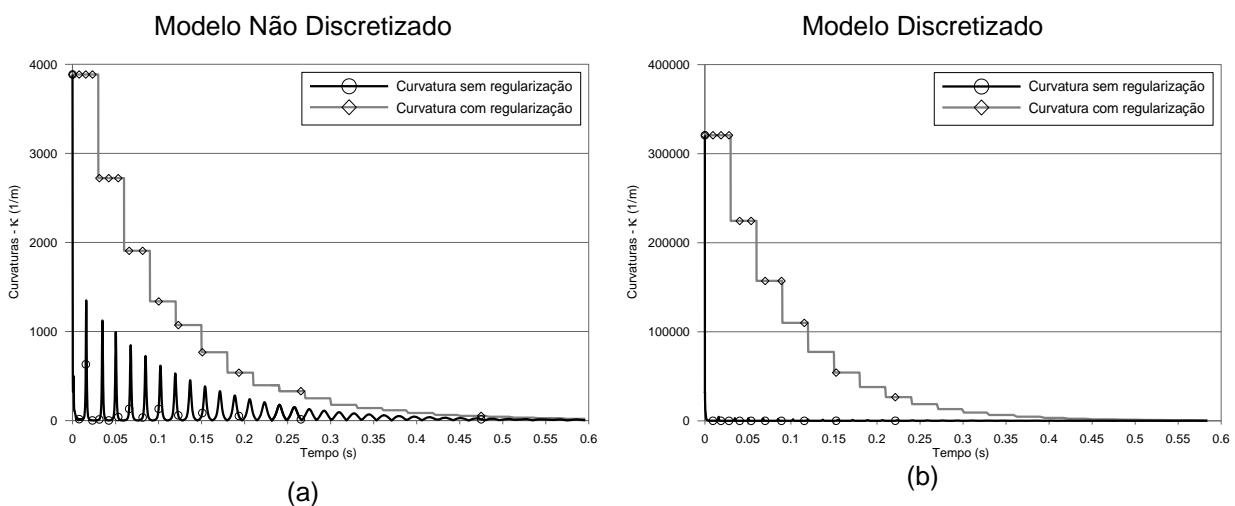
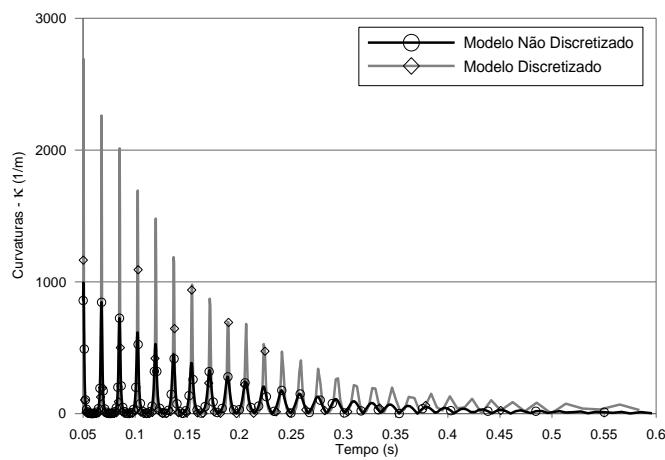


Figura 6.29 – Curvaturas dos modelos de pórtico a partir do instante  $t = 0.05s$



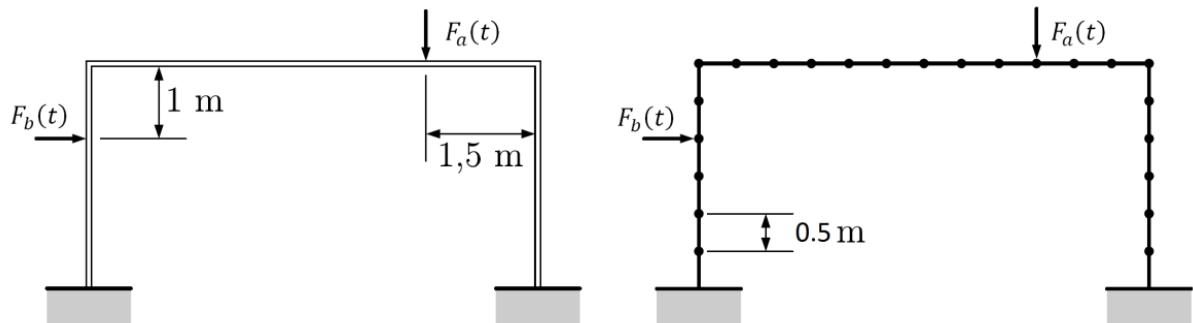
No entanto, isso acontece apenas nos instantes iniciais, pois nos momentos subsequentes as curvaturas nos dois modelos atingem aproximadamente a mesma ordem de grandeza, como mostra o trecho plotado na Figura 6.29, o que explica o motivo do incremento de tempo da estratégia de Cintra iniciar aproximadamente

igual nos dois modelos e atingir valores muito maiores no final da análise do segundo modelo, devido ao reduzido valor de  $c_p$ . Mesmo no primeiro modelo, o passo de tempo termina muito maior do que nas outras estratégias (Figura 6.27-(b)), pois a curvatura inicial tem um valor muito superior ao padrão dos instantes seguintes, o que faz com que o valor inicialmente declarado para  $c_p$  fique pequeno no processamento dos passos finais.

Esse fenômeno ocorre pelo simples fato de que, quando a velocidade inicial ( $\dot{\mathbf{D}}_0$ ) é igual a **0** (o que é assumido geralmente), a curvatura no instante  $t = 0$  é dada simplesmente pela norma da aceleração inicial,  $\|\ddot{\mathbf{D}}_0\|$ , a qual terá um valor maior quando maior for o número de graus de liberdade da estrutura. Mesmo que esse comportamento não ocorra nos instantes posteriores, o algoritmo de regularização da curvatura permanece usando uma porcentagem dos valores altos inicialmente calculados. Esse fenômeno já não acontece em problemas com condições iniciais quiescentes, pois a aceleração inicial nesse caso (que geralmente é dada por  $\ddot{\mathbf{D}}_0 = \mathbf{m}^{-1}\mathbf{p}_0$ ) será nula.

A fim de explorar a performance das estratégias adaptativas para múltiplos carregamentos transientes, o mesmo pórtico foi analisado com duas cargas atuantes,  $F_a(t)$  e  $F_b(t)$ , nas posições indicadas na Figura 6.30 a seguir, considerando apenas o modelo discretizado da estrutura.

Figura 6.30 – Representação do pórtico com carregamento e sua discretização

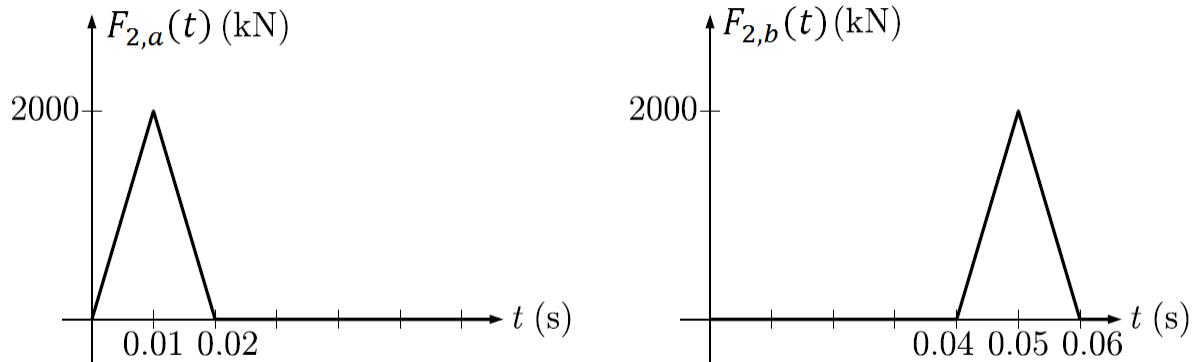


Fonte: Adaptado de Camargo (2008, p. 104)

Utilizou-se o amortecimento proporcional de 10% para o 1º e 3º modos e duas combinações de carregamentos,  $F_2$  e  $F_3$ , mostradas, respectivamente, na Figura

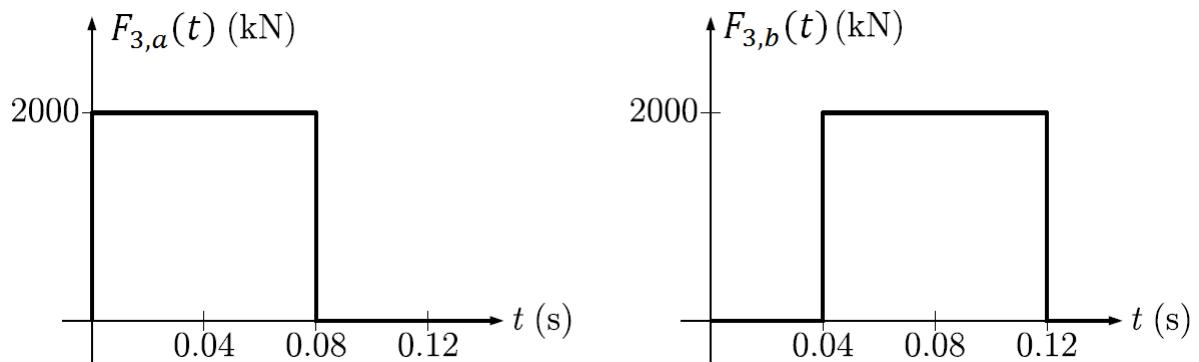
6.31 e na Figura 6.32. Esse sistema foi analisado anteriormente no trabalho de Camargo (2008), porém com diferentes considerações sobre o amortecimento.

Figura 6.31 – Primeira combinação de múltiplos carregamentos analisada



Fonte: Adaptado de Camargo (2008, p. 105)

Figura 6.32 – Segunda combinação de múltiplos carregamentos analisada

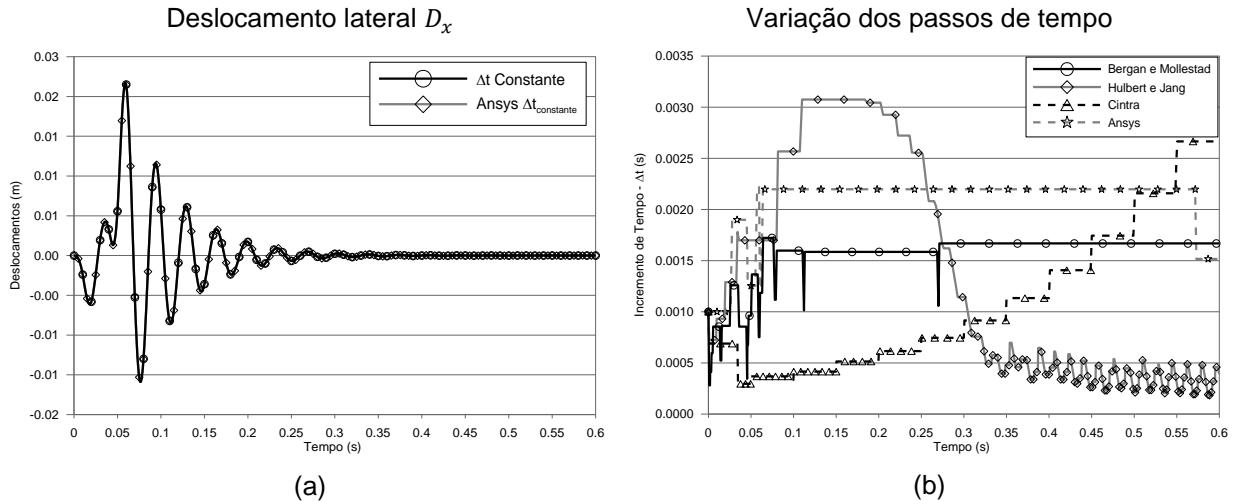


Fonte: Adaptado de Camargo (2008, p. 105)

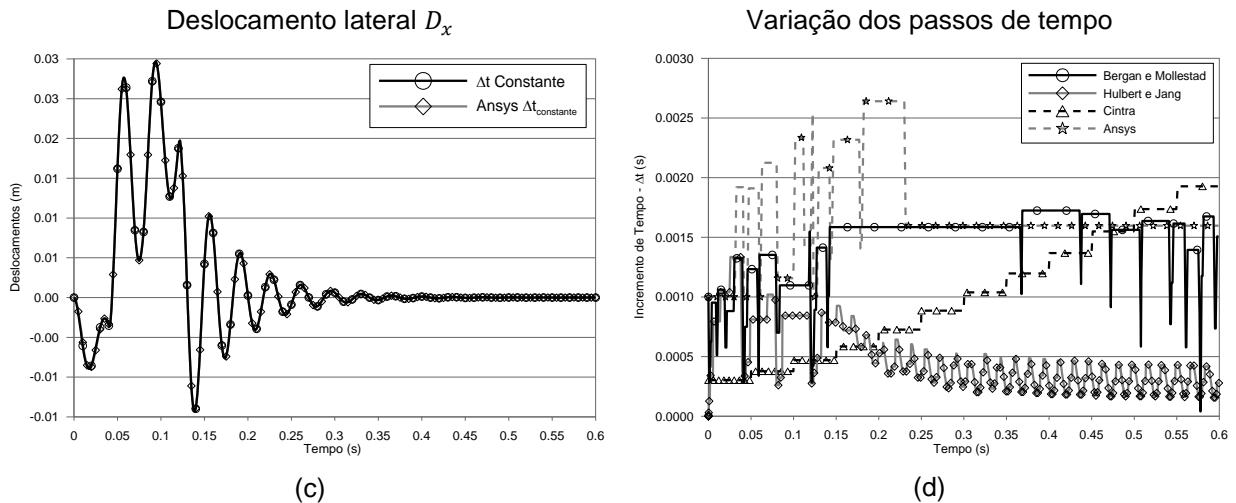
As respostas das análises dinâmicas para ambas as situações de carregamento são dadas na Figura 6.33 a seguir. Usaram-se os mesmos parâmetros dos métodos numéricos aplicados no exemplo anterior, modificando apenas os valores  $\alpha$  e  $\Delta t_{máx}$ , da estratégia de Cintra, para 0.8 e 0.05 s, respectivamente, e atribuindo os dois valores de  $c_p$  anteriormente usados (0.1 e 0.001) aos casos  $F_2$  e  $F_3$  de carregamento, respectivamente.

Figura 6.33 – Resultados das análises do pórtico sob os múltiplos carregamentos

Resultados para a primeira combinação de carregamentos



Resultados para a segunda combinação de carregamentos



Novamente os passos de tempo calculados por Bergan e Mollestad ficaram próximos de um vinte avos do período fundamental, em ambos os casos de carregamento. O Ansys forneceu resultados com comportamento semelhante, mas com valores geralmente maiores, se aproximando mais no segundo caso. Na estratégia de Hulbert e Jang o passo de tempo ficou muito oscilatório nos instantes finais, em ambos os casos, pelo fato do erro normalizado  $RL$  se situar acima e abaixo do limite de tolerância, alternadamente, de forma sequencial.

No algoritmo de Cintra o incremento de tempo foi crescente, devido à redução contínua da curvatura, se situando no mesmo intervalo de valores obtidos com as

outras estratégias. Os resultados foram próximos em ambos os casos de carregamento, mesmo usando valores tão diferentes de  $c_p$ , porque o primeiro caso tem condições iniciais quiescentes, levando a uma curvatura inicial nula, e o segundo caso se assemelha ao exemplo anterior, com uma curvatura inicial muito grande.

Outros exemplos de pórticos de várias barras foram testados ao longo da realização desta pesquisa. Testou-se as mais variadas condições de contorno, carregamentos múltiplos, diferentes formas das funções de carga, diferentes formas de geometria dos pórticos, outras propriedades das seções transversais e materiais das barras e outros valores para os parâmetros dos algoritmos numéricos. Tentou-se, com isso, explorar ao máximo as possibilidades de análise do programa computacional desenvolvido. Entretanto, os demais testes não foram registrados no texto desta dissertação para não torná-lo demasiadamente longo.

## 7 CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Conforme visto ao longo deste trabalho, o mecanismo de adaptação do tempo pode ser bastante útil na solução de problemas que fazem uso de métodos iterativos, como os de integração direta. Isso acontece uma vez que em muitas situações a qualidade da resposta de um modelo numérico relaciona-se diretamente com o nível de discretização utilizado para a representação da variável tempo. A prática simples de descrever o comportamento do modelo em instantes pontuais com intervalos uniformes é constantemente usada, mas pode demandar um esforço computacional muito grande, sobretudo quando se analisam grandes modelos de uma forma mais apurada. Os métodos adaptativos atuam no sentido de regular a discretização do tempo com o intuito de aperfeiçoar a relação entre a qualidade de resposta e o nível de refinamento necessário.

Este trabalho apresentou alguns dos métodos numéricos mais correntemente utilizados na análise dinâmica de estruturas no domínio do tempo, para sistemas com um (SDOF) e múltiplos graus de liberdade (MDOF), assim como os métodos adaptativos mencionados. Inicialmente foi feita uma minuciosa revisão sobre a formulação matemática da análise numérica de sistemas com um grau de liberdade, dando atenção especial à família de métodos Newmark-Beta. Foram mostradas as características gerais dos processos de solução como um todo, assim como os aspectos específicos do método de integração escolhido, incluindo a estabilidade e os parâmetros envolvidos. Foi demonstrado também como as equações podem ser expostas numa forma incremental, aplicáveis a análises não lineares, e transformadas ainda em expressões explícitas que evitem iterações na obtenção da solução dentro dos passos de tempo.

Para os sistemas de múltiplos graus de liberdade foi feita uma ampla discussão sobre o uso do método dos elementos finitos na formação das matrizes de massa, rigidez e amortecimento. Para esta última, particularmente, foi apresentada a matriz de amortecimento proporcional de Rayleigh, que possui a condição necessária para o desacoplamento das equações modais de movimento. Posteriormente foi feita a generalização das equações dos métodos de integração à sistemas MDOF e citadas

algumas características específicas que estes sistemas possuem quando lhes são aplicados esses métodos.

Em seguida foi desenvolvido o escopo de um programa computacional que aplicasse a teoria desenvolvida a problemas de pórticos planos sob cargas dinâmicas. Foram mostradas as matrizes específicas do elemento (barra de pórtico) e sua implementação no programa.

Por fim, discutiram-se as recentes estratégias de adaptatividade no tempo, aplicáveis a problemas de dinâmica estrutural. Foi dada atenção especial a três estratégias presentes na literatura consultada, baseadas em princípios diferentes. A eficiência da utilização dos algoritmos adaptativos pode ser comprovada através de exemplos numéricos desenvolvidos no capítulo anterior, os quais também permitiram fazer conclusões acerca do desempenho desses métodos.

## 7.1 CONCLUSÕES

As conclusões acerca dos métodos de adaptatividade estudados podem ser construídas observando-se a sua formulação e os resultados dos exemplos numéricos exibidos no Capítulo 6.

A estratégia de Bergan e Mollestad (1985), baseada na frequência característica atual, é fácil de ser implementada em qualquer procedimento numérico, atendendo ao critério de simplicidade. É a mais antiga entre as três abordagens estudadas e já foi aplicada com sucesso em softwares comerciais de elementos finitos, com algumas modificações, a exemplo do programa Ansys. Entretanto, apesar de tentar usar a frequência dominante para refletir a composição modal da resposta num instante qualquer, a estratégia não é muito intuitiva em termos práticos. Além disso, observou-se que os incrementos de tempo oscilaram demasiadamente no uso dessa abordagem em alguns exemplos (Figura 6.23-(b)) apesar de se situarem nas proximidades de um patamar médio constante. Isso ocorre pelo fato da frequência  $\bar{\omega}$  ficar perto de zero em instantes próximos de amplitudes máximas ou mínimas, devido à norma do incremento de deslocamento,  $\|\Delta\mathbf{D}\|$ , tornar-se relativamente

pequena nessas situações, o que já foi citado por Zienkiewicz e Xie, (1991). Mesmo com o uso da verificação (5.6) na aplicação do critério de descarte de uma dada frequência  $\bar{\omega}_i$ , a abordagem não se mostrou adequada ainda que se usassem valores de  $\varepsilon$  diferentes de 0.1, fazendo, em alguns casos, os intervalos de tempo variarem muito frequentemente. Isso gerou resultados para  $\Delta t$  diferentes dos encontrados no trabalho original de Bergan e Mollestad (1985), com os mesmos exemplos resolvidos (seção 6.3). O fato de  $\bar{\omega}$  ficar perto de zero prejudica a determinação de novos intervalos de tempo e foi notado também em outras pesquisas, como a de Jacob (1990), motivando o desenvolvimento de mecanismos complementares auxiliares na escolha do valor correto dessa frequência. Os exemplos 6.1 mostraram também que esse método não apresenta nenhum ganho adicional na análise de sistemas SDOF, os quais já possuem um único período característico. Apesar de se ter usado os valores sugeridos para os parâmetros  $\lambda$ ,  $\xi_p$ ,  $\xi_m$  e  $\varepsilon$  nesse algoritmo, não ficou muito clara como ocorre a determinação desses valores.

A estratégia de Hulbert e Jang (1995) é bem intuitiva quando tenta estimar um erro local na integração de cada passo de tempo, no objetivo de decidir se o incremento deve ser aumentado, diminuído ou mantido estável. Essa abordagem vem sendo sugerida em vários trabalhos, como os de Zienkiewicz *et al.* (1984), Zienkiewicz e Xie (1991), Zeng *et al.* (1992) e Li *et al.* (1993), e parece ser a mais indicada para futuros desenvolvimentos, usando talvez os estimadores de erros exibidos por Ruge (1999), Chung *et al.* (2003) e Romero e Lacoma (2006). O algoritmo se mostrou satisfatório na resolução de sistemas SDOF e também gerou sequências de incremento de tempo constantes mais regulares nos sistemas MDOF nos Exemplos 6.2 e 6.3. No entanto, a resolução do último pórtico no Exemplo 6.4 revelou valores de  $\Delta t$  muito oscilatórios fornecidos por essa estratégia. Além disso, a formulação explícita do erro local apresentada por Hulbert e Jang (1995) se prende ao algoritmo de integração do Método Generalizado- $\alpha$ , não sendo originalmente aplicável a um procedimento numérico qualquer, como fazem as demais estratégias. A adaptação da expressão desse erro ao clássico método de Newmark gera uma equação já exibida anteriormente nos trabalhos de Zienkiewicz e Xie (1991) e Zeng *et al.* (1992), a qual não é aplicável ao método da aceleração linear ( $\beta = 1/6$ ), como se observou no Capítulo 5. A técnica usada por Li *et al.* (1993) na definição de sua expressão de

erro corrige esse problema, sugerindo funções de maior ordem para aproximar a aceleração no passo de tempo, podendo também ser indicada em estudos futuros sobre os estimadores de erro dessa estratégia. Apesar da comparação do erro local normalizado com um dado intervalo de tolerância ser intuitiva, a correlação desse erro com as equações (5.29) e (5.30), na modificação do incremento de tempo, não o são, e também mereceriam um estudo mais aprofundado, pois aparecem nos outros trabalhos consultados. Novamente, foram usados os valores sugeridos para os parâmetros  $(\Delta t/T)^{alvo}$ ,  $lb$ ,  $p_{inc}$  e  $p_{dec}$  nesse algoritmo, mas não ficou claro como estes são determinados.

A estratégia de Cintra (2008) é mais recente entre as três analisadas, e possui uma conceituação interessante e bem intuitiva, relacionada ao indicador geométrico de curvatura do histórico de deslocamentos. A abordagem não é dependente do método numérico de integração escolhido, podendo ser aplicada em qualquer um deles. Sua implementação, no entanto, encontrou dificuldades na correlação entre o indicador de curvatura e o incremento de tempo, pois não foram sugeridos valores a serem adotados para os parâmetros que interferem nessa correlação, de modo que os mesmos tivessem que ser estabelecidos experimentalmente, gerando resultados não totalmente satisfatórios. Apesar da informação de curvatura fornecida à consulta de  $\Delta t$  ser uniformizada por partes, usando o mecanismo de regularização visto na seção 5.4.3, a mesma não é estabilizada em nenhum patamar constante, de modo que o incremento de tempo varie continuamente ainda que o sistema esteja em regime permanente, o que viola o 2º critério exibido na seção 5.1. A estratégia precisa, portanto, ser amadurecida na aplicação à vibrações estruturais, sobretudo na solução dos problemas encontrados quando se analisaram situações com condições iniciais quiescentes (as quais possuem curvaturas iniciais quase nulas, que podem gerar incrementos de tempo muito altos) e sistemas com muitos graus de liberdade partindo do repouso com carga inicial não nula (as quais possuem curvaturas iniciais muito altas, gerando incrementos de tempo quase nulos impraticáveis, como no exemplo 6.4).

## 7.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Frente ao que foi analisado e concluído ao longo dessa dissertação, faz-se agora algumas sugestões de desenvolvimentos futuros relacionados ao tema.

1. Desenvolver aprimoramentos para as estratégias discutidas neste texto e estudar os aprimoramentos já desenvolvidos, implementando-os e comparando os resultados fornecidos:
  - a. Sugerir alguma outra função de controle para a estratégia de Bergan e Mollestad (1985) ou estudar os novos desenvolvimentos introduzidos por Jacob (1990) e usados nos trabalhos de Galvão (2004) e Andréa Silva (2009) com esta estratégia.
  - b. No algoritmo de Hulbert e Jang (1995), desenvolver expressões de erros mais generalistas que se apliquem a outros métodos numéricos; usar outras técnicas para desenvolvimento dessas expressões e estudar melhor o algoritmo de adaptatividade envolvido.
  - c. Estudar funções que relacionem o valor da curvatura com o incremento de integração na estratégia de Cintra (2008), sugerindo outras correlações além da proposta original (exponencial) e da expressão usada neste trabalho; calibrar os parâmetros que definem essas funções e investigar novas técnicas de regularização de curvatura (como aquela que faz uso da equação (5.47), por exemplo).
2. Estudar as outras estratégias de adaptação disponíveis na literatura, com fins de comparação:
  - a. Estudar as técnicas mais antigas como as de Hibbit e Karlsson (1979, apud SILVEIRA, 2001, p. 74) e Oughourlian e Powell (1982), que fazem o cálculo do resíduo de forças desequilibradas; e as estratégias de Felippa e Park (1979) e Park e Underwood (1980), que usaram o conceito de máxima frequência perturbada (e motivaram o surgimento do primeiro algoritmo estudado nesta dissertação).
  - b. Se aprofundar no estudo das estimativas de erro local *a posteriori* que antecederam a estratégia de Hulbert e Jang (1995), como as de Zienkiewicz *et al.* (1984), Zienkiewicz e Xie (1991), Zeng *et al.* (1992) e Li *et al.* (1993), e também estudos mais atuais como os de Romero e

Lacoma (2006), além das estimativas de erro *a priori* de Ruge (1999) e Chung *et al.* (2003).

- c. Estudar as técnicas mais recentemente desenvolvidas, como as listadas por Rao e Rao (1999), Zhang e Whiten (2001), Söderlind (2002) e Noels *et al.* (2002), entre outras.
- 3. Implementar os mecanismos de análise de resposta (mecanismos de *feedback*), previstos nas estratégias de Bergan e Mollestad (1985, p. 309) e de Cintra (2008, p. 52), os quais devem verificar a qualidade da resposta obtida num instante qualquer e retornar para trás alguns passos da análise (procedimento *step-back*), objetivando recuperar uma possível precisão perdida devido à passos de tempo muito longos já executados. Esse mecanismo pode melhorar muito os resultados obtidos, mas não foi implementado neste trabalho por falta de diretrizes mais específicas acerca do mesmo.
- 4. Entender e implementar o possível refinamento automático da função de controle  $f(\bar{\xi})$ , previsto no artigo original de Bergan e Mollestad (1985, p. 308) (ocasionado por certas “sequencias de ajustes” no passo de tempo), além de implementar também as restrições adicionais dessa estratégia.
- 5. Comparar resultados usando diversas outras combinações de parâmetros  $\gamma$  e  $\beta$  no método de Newmark, além de implementar também outros métodos de integração conhecidos, como os clássicos métodos da Diferença Central, método de Houbolt, Runge-Kutta, Wilson- $\theta$ , os modernos métodos HHT- $\alpha$ , WBZ- $\alpha$ , Método Generalizado- $\alpha$  (nas formas implícita e explícita), o DAE- $\alpha$  (YEN *et al.* 1998), e talvez o método exato da carga discreta linearizada e os métodos de superposição.
- 6. Aplicar as estratégias estudadas em problemas modelados com outros tipos de elementos finitos, inclusive os não estruturais.
- 7. Realizar análises dinâmicas não-lineares, com a presença de não linearidades físicas e geométricas, desenvolvendo esquemas específicos para a construção das matrizes tangentes  $\mathbf{k}_0$  e  $\mathbf{c}_0$ .
- 8. Verificar as estratégias adaptativas implementadas em outros softwares comerciais, como o Abaqus, que aparentemente faz uso da estratégia inaugural de Hibbit e Karlsson (ABAQUS, INC, 2007, p. 2.4.1–5)..

## 8 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABAQUS, INC. **Abaqus Theory Manual Version 6.7.** 2007.

ANSYS, INC. **Theory Reference for ANSYS and ANSYS Workbench.** 2007.

BATHE, K. J. **Finite Element Procedures.** Upper Saddle River: Prentice Hall, 1996.

BERGAN, P. G.; MOLLESTAD, E. An automatic time-stepping algorithm for dynamic problems. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, North-Holland, v. 49, n. 3, p. 299-318, June 1985.

BOLDRINI, J. L. et al. **Álgebra Linear.** 3. ed. São Paulo: Harbra, 1980.

CALENZANI, A. F. G. **Análise Dinâmica no Domínio da Freqüência de Sistemas com Amortecimento não Clássico.** 2002. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2002.

CAMARGO, R. S. **Técnicas Eficientes de Correção de Erros na Análise Dinâmica de Estruturas no Domínio da Freqüência.** 2008. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2008.

CHOPRA, A. K. **Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering.** Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1995.

CHUNG, J.; CHO, E.-H.; CHOI, K. A priori error estimator of the generalized- $\alpha$  method for structural dynamics. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Korea, v. 57, n. 4, p. 537-554, May 2003.

CHUNG, J.; HULBERT, G. M. A Time Integration Algorithm for Structural Dynamics with Improved Numerical Dissipation: The Generalized- $\alpha$  Method. **Journal of Applied Mechanics**, Ann Arbor, v. 60, n. 2, p. 371-375, June 1993.

CINTRA, D. T. **Uma estratégia de adaptação no tempo baseada na curvatura do histórico de deslocamentos.** 2008. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2008.

CINTRA, D. T.; SILVEIRA, E. S. S. D. Uma estratégia de adaptatividade no tempo para a análise estrutural de linhas e risers. In: CMNE CILAMCE, 28., 2007, Porto, Portugal. **Métodos Numéricos e Computacionais em Engenharia.** Porto, Portugal, 2007, p.432.

CLOUGH, R. W.; PENZIEN, J. **Dynamics of structures.** 3rd. ed. Berkeley: Computers & Structures, Inc., 1995.

COOK, R. D.; MALKUS, D. S.; PLESHA, M. E. **Concepts and Applications of Finite Element Analysis.** 3rd. ed. Madison: John Wiley & Sons, 1989.

CRISFIELD, M. A. **Nonlinear Finite Element Analysis of Solids and Structures, Volume 2:** Advanced Topics. Chichester: John Wiley & Sons, v. 2, 1997.

FELIPPA, C. A.; PARK, K. C. Direct time integration methods in nonlinear structural dynamics. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Palo Alto, v. 17-18, n. 2, p. 277-313, Feb. 1979.

FÉODOSIEV, V. I. **Resistência dos Materiais.** 7. ed. Porto: Lopes da Silva, 1977.

FERREIRA, F. M. G. **Desenvolvimento e Aplicações de um Framework Orientado a Objetos para Análise Dinâmica de Linhas de Ancoragem e de Risers.** 2005. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2005.

FERREIRA, W. G.; SECHIM, C.; FREITAS, M. S. Análise dinâmica no domínio do tempo de sistemas com múltiplos graus de liberdade: Aplicação em pórticos metálicos. **Revista Engenharia, Ciência e Tecnologia**, Vitória, n. 17, p. 93-100, set./out. 2000.

GALAMBOS, T. V. **Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures.** 5th. ed. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1998.

GALVÃO, A. D. S. **Instabilidade Estática e Dinâmica de Pórticos Planos com Ligações Semi-Rígidas.** 2004. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2004.

GEAR, C. W. **Numerical initial value problems in ordinary differential equations.** Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1971.

GOUDREAU, G. L.; TAYLOR, R. L. Evaluation of numerical integration methods in elastodynamics. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Livermore, v. 2, n. 1, p. 69-97, Feb. 1973.

HILBER, H. M.; HUGHES, T. J. R.; TAYLOR, R. L. Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics. **Earthquake Engineering & Structural Dynamics**, Berkeley, v. 5, n. 3, p. 283-292, July/Sept. 1977.

HUGHES, T. J. R. A note on the stability of Newmark's algorithm in nonlinear structural dynamics. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Berkeley, v. 11, n. 2, p. 383-386, 1977.

HUGHES, T. J. R. **The finite element method:** linear static and dynamic finite element analysis. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1987.

HULBERT, G. M.; CHUNG, J. Explicit time integration algorithms for structural dynamics with optimal numerical dissipation. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Ann Arbor, v. 137, n. 2, p. 175-188, Oct. 1996.

HULBERT, G. M.; JANG, I. Automatic time step control algorithms for structural dynamics. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Ann Arbor, v. 126, n. 1-2, p. 155-178, Sept. 1995.

HUMAR, J. L. **Dynamics of Structures.** 2nd. ed. Lisse: A.A. Balkema, 2002.

JACOB, B. P. **Estratégias Computacionais para a Análise Não-Linear Dinâmica de Estruturas Complacentes para Águas Profundas.** 1990. Tese (Doutorado em Ciências em Engenharia Civil) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1990.

KREYSZIG, E. **Advanced Engineering Mathematics.** 9th. ed. Singapore: John Wiley & Sons, 2006.

KRIEG, R. D.; KEY, S. W. Transient shell response by numerical time integration. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Albuquerque, v. 7, n. 3, p. 273-286, 1973.

LI, X. D.; ZENG, L. F.; WIBERG, N. -E. A Simple Local Error Estimator and an Adaptive Time-stepping Procedure for Direct Integration Method in Dynamic Analysis. **Communications in Numerical Methods in Engineering**, Göteborg, v. 9, n. 4, p. 273-292, Apr. 1993.

MEIROVITCH, L. **Elements of vibration analysis.** 2nd. ed. Boston: McGraw-Hill, 1986.

NEWMARK, N. M. A Method of Computation for Structural Dynamics. **ASCE Journal of Engineering Mechanics Division**, Urbana, v. 85, n. 3, p. 67-94, July 1959.

NOELS, L. et al. Automatic time stepping algorithms for implicit numerical simulations of non-linear dynamics. **Advances in Engineering Software**, v. 33, n. 7-10, p. 589-603, Nov. 2002.

OUGHOURLIAN, C. V.; POWELL, G. H. ANSR-III: General purpose computer program for nonlinear structural analysis. **Earthquake Engineering Research Center - Report No. UCB/EERC-82/21**, Berkley, Nov. 1982.

PARK, K. C.; UNDERWOOD, P. G. A variable-step central difference method for structural dynamics analysis - part 1. Theoretical aspects. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Palo Alto, v. 22, n. 2, p. 241-258, May 1980.

RAO, R. V.; RAO, N. S. V. K. Dynamic soil-structure interaction analysis using Lanczos vectors with adaptive time integration technique. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, India, v. 23, n. 11, p. 1141-1158, 1999.

RAO, S. S. **Mechanical Vibrations**. 2nd. ed. Purdue University: Addison-Wesley, 1990.

RODRIGUES, J. F. D. **Análise Dinâmica de Estruturas Reticuladas Tridimensionais pelo Método dos Elementos Finitos**. 1984. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Departamento de Mecânica, Faculdade de Engenharia, Universidade do Porto, Porto, 1984.

ROMERO, I.; LACOMA, M. A methodology for the formulation of error estimators for time integration in linear solid and structural dynamics. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Madrid, v. 66, n. 4, p. 635-660, Apr. 2006.

ROSSI, D. F.; PROVIDÊNCIA, P.; FERREIRA, W. G. Abordagem pedagógica de procedimentos passo-a-passo para a análise dinâmica de estruturas. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE EDUCAÇÃO EM ENGENHARIA, 40., 2012, Belém. **Anais...** Belém: Abenge, 2012.

RUGE, P. A priori local error estimation with adaptive time-stepping. **Communications in Numerical Methods in Engineering**, Dresden, v. 15, n. 7, p. 479-491, July 1999.

SECHIM, C. **Técnicas Numéricas para Encontrar a Resposta Dinâmica de Sistemas Estruturais no Domínio do Tempo**. 2001. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2001.

SHRIKHANDE, M. **Finite Element Method and Computational Structural Dynamics**. Roorkee - India: Department of Earthquake Engineering, 2008.

SILVA, A. R. D. D. **Sistema Computacional para Análise Avançada Estática e Dinâmica de Estruturas Metálicas**. 2009. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) - Programa de Pós-Graduação do Departamento de Engenharia Civil, Escola de Minas, Universidade Federal de Outro Petro, Outro Petro, 2009.

SILVA, F. T. D. **Vibrações em encostas produzidas por tráfego de veículos**. 2006. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Curso de Pós-Graduação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2006.

SILVEIRA, E. S. S. D. **Análise Dinâmica de Linhas de Ancoragem com Adaptação no Tempo e Subciclagem.** 2001. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) - Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2001.

SÖDERLIND, G. Automatic Control and Adaptive Time-Stepping. **Numerical Algorithms**, Lund, v. 31, n. 1-4, p. 281-310, 2002.

THOMAS, G. B. et al. **Cálculo**. 10. ed. São Paulo: Pearson Addison Wesley, v. 2, 2003.

UNDERWOOD, P. G.; PARK, K. C. A variable-step central difference method for structural dynamics analysis - part 2. Implementation and performance evaluation. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Palo Alto, v. 23, n. 3, p. 259-279, Sept. 1980.

WOOD, W. L.; BOSSAK, M.; ZIENKIEWICZ, O. C. An alpha modification of Newmark's method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 15, n. 10, p. 1562-1566, Oct. 1980.

YEN, J.; PETZOLD, L.; RAHA, S. A Time Integration Algorithm For Flexible Mechanism Dynamics: the DAE  $\alpha$ -method. **Computer Methods In Applied Mechanics and Engineering**, Minneapolis, v. 158, p. 341-355, Jun. 1998.

ZENG, L. F. et al. A posteriori local error estimation and adaptive time-stepping for Newmark integration in dynamic analysis. **Earthquake Engineering & Structural Dynamics**, Göteborg, v. 21, n. 7, p. 555-571, Jan. 1992.

ZHANG, D.; WHITEN, W. J. Step size control for efficient discrete element simulation. **Minerals Engineering**, Australia, v. 14, n. 10, p. 1341-1346, Oct. 2001.

ZIENKIEWICZ, O. C. et al. A unified set of single step algorithms. Part 1: General formulation and applications. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 20, n. 8, p. 1529-1552, Aug. 1984.

ZIENKIEWICZ, O. C.; XIE, Y. M. A simple error estimator and adaptive time stepping procedure for dynamic analysis. **Earthquake Engineering & Structural Dynamics**, Göteborg, v. 20, n. 9, p. 871-887, Sept. 1991.

## APÊNDICE

Ao longo dessa pesquisa foram desenvolvidas rotinas computacionais que permitissem realizar as análises numéricas em sistemas dinâmicos diversos, como aqueles apresentados no Capítulo 6. Essas rotinas foram desenvolvidas na linguagem de programação do software de cálculo numérico Matlab, e seus códigos fonte (para o caso padrão de pórtico plano) estão exibidos no final desse Apêndice, incluindo comentários e observações que facilitam o entendimento do leitor.

A Tabela A.1 a seguir traz ainda uma breve descrição das funções de cada código desenvolvido, os quais devem estar escritos em arquivos de texto separados, todos de extensão “.m” conforme indicam os nomes dos arquivos. A única exigência assumida é a de que os programas principais sejam executados na sequência apresentada, e que todos os arquivos estejam localizados no mesmo diretório.

Na Tabela A.2 das páginas seguintes são apresentados os significados das principais variáveis utilizadas nos programas.

Tabela A.1 – Funções dos códigos em cada arquivo

	Nome do arquivo	Função
Programas Principais	C1_BARRAS.m	Declarar a geometria da estrutura (nós e barras).
	C2_MAT_LOC.m	Calcular simbolicamente as matrizes de massa e rigidez locais.
	C3_MAT_GLOB.m	Declarar material e seção das barras, e calcular as matrizes globais do pórtico.
	C4_REST_APOIO.m	Declarar as condições de apoio da estrutura.
	C5_AMORTEC.m	Calcular as frequências modais, as taxas de amortecimento modais e matriz de amortecimento do pórtico.
	C6_CARGAS.m	Declarar o carregamento dinâmico atuante sobre a estrutura.
	C7a_NEWMARK_CTS.m	Realizar a integração numérica com o método de Newmark utilizando passo de tempo $\Delta t$ constante
	C7b_NEWMARK_ATS_BERGAN.m	Realizar a integração numérica com o método de Newmark utilizando a estratégia adaptativa de Bergan e Mollestad (1985)
	C7c_NEWMARK_ATS_HULBERT.m	Realizar a integração numérica com o método de Newmark utilizando a estratégia adaptativa de Hulbert e Jang (1995)
	C7d_NEWMARK_ATS_CINTRA.m	Realizar a integração numérica com o método de Newmark utilizando a estratégia adaptativa de Cintra (2008).
	C8_RESULTADOS.m	Interface de resultados (código não exibido).
Programas Secundários	f.m	Aplicar a função de controle da estratégia de Bergan e Mollestad (1985)
	maxkapatjt.m	Calcular o máximo valor de $\kappa$ entre instantes $t_j$ e $t$ na estratégia de Cintra (2008).
	Quiescent.m	Realizar a integração dos dois primeiros passos na estratégia de Hulbert e Jang (1995) em problemas com condições iniciais quiescentes.
	Carregamento.m	Calcular o carregamento num instante $t$ , baseado nos dados declarados na rotina C6_CARGAS.m

Tabela A.2 – Significado das variáveis mais importantes utilizadas nos programas

(continua)

Variável	Significado
$nj \mid m$	Número de nós do pórtico   Número de barras do pórtico
$Nos(i, 1:2)$	Números dos nós 1 e 2 (inicial e final) da barra $i$
$Des(i, 1:6)$	Número dos deslocamentos 1 a 6 (3 para nó final e 3 para nó inicial) da barra $i$
$Coord(i, 1:2)$	Coordenada $x$ (índice 1) e coordenada $y$ (índice 2) do nó $i$
$np$	Número de pontos sobre as barras (para desenho, não são graus de liberdade)
$CX(i, j)$	Coordenada $x$ do $i$ -ésimo ponto tomado sobre a barra $j$ (idem para $CY(i, j)$ )
$MN$	Matriz simbólica $N$ da equação (4.30), que contém as funções de interpolação $N_i$
$ke \mid me$	Matrizes simbólicas de rigidez e de massa, exibidas nas equações (4.17) e (4.18)
$Ex \mid ro$	Módulo de elasticidade $E$ do material   Massa específica $\rho$ do material
$Ax \mid Ix$	Área $A$ da seção das barras   Momento de inércia $I$ da seção das barras
$px \mid Lx(i)$	Massa por unidade de comprimento $\bar{m}$ das barras   Comprimento da barra $i$ ( $L_i$ )
$c(i) \mid s(i)$	Cosseno e seno do ângulo de inclinação $\phi$ da barra $i$ (Figura 4.4)
$Rt(:, :, i)$	Matriz de mudança de base da barra $i$ – Equação (4.20).
$ks \mid ms$	Matrizes simbólicas de rigidez e de massa locais do elemento, equações (4.21).
$kl(:, :, i)$	Matriz numérica de rigidez do elemento $i$ em eixos locais
$ml(:, :, i)$	Matriz numérica de massa do elemento $i$ em eixos locais
$K \mid M$	Matrizes globais de rigidez e de massa da estrutura
$nr \mid n$	Número de restrições de apoio   Número de graus de liberdade da estrutura
$GL \mid GLR$	Vetores com os números dos deslocamentos livres (graus de liberdade) e deslocamentos restringidos (graus de liberdade restringidos) do pórtico.
$modo1$ $modo2$	Números dos dois modos de vibração do sistema onde são conhecidas as taxas de amortecimento de controle $\xi_\alpha$ e $\xi_\beta$ da equação (3.51).
$w \mid csi(i)$	Vetor de frequências naturais, eq. (3.38)   Taxa de amortecimento modal $\xi_i$
$Tj$	Período de vibração natural associado ao modo de maior frequência $\omega_{\text{máx.}}$
$a(1) \mid a(2)$	Coeficientes $a_0$ e $a_1$ do amortecimento proporcional da equação (3.46).
$C$	Matriz de amortecimento da estrutura.
$nc \mid F$	Número total de cargas atuantes   Valores máximos assumidos pelas cargas $p(t)$
$desC(i)$ $opC(i)$	Número do grau de liberdade correspondente a $i$ -ésima carga introduzida Número da opção de carga (1 a 4) correspondente a $i$ -ésima carga introduzida
$t0(i)$ $t1(i)$	Instante de início $t_0$ e período de duração $t_1$ da $i$ -ésima carga variável introduzida, preenchidos para opções de carga de 1 a 3.

Tabela A.2 – Significado das variáveis mais importantes utilizadas nos programas  
(conclusão)

Variável	Significado
w1 (i)	Frequência angular $\omega_F$ da $i$ -ésima carga introduzida, para opção 4 de carga
p (:, i)	Vetor de carregamentos no instante $i$ , isto é, $\mathbf{p}_i = \mathbf{p}(t_i)$
gama   beta	Parâmetros $\gamma$ e $\beta$ do método de Newmark, descrito na seção 2.5.
T1	Intervalo de plotagem das repostas e cargas (duração da análise)
N1	Número de instantes de tempo discretos (nº de pontos no histórico de resposta)
t(i)   Dt(i)	Instante de tempo discreto $t_i$ e tamanho do incremento de tempo do passo $i$ ( $\Delta t_i$ )
Dtcrit	Incremento de tempo crítico $\Delta t_{crit}$ em métodos condicionalmente estáveis
Dtmax Dtmin	Valores máximo e mínimo ( $\Delta t_{máx}$ e $\Delta t_{mín}$ ) permitidos para o passo de tempo (em geral: $\Delta t_{máx} = \Delta t_{crit}$ ; $\Delta t_{mín} = 0$ , exceto quando indicado)
Du, Dv, Da, Dp	Vetores de incrementos de deslocamentos, velocidades, acelerações e carregamentos no passo atual ( $\Delta\mathbf{D}$ , $\Delta\dot{\mathbf{D}}$ , $\Delta\ddot{\mathbf{D}}$ e $\Delta\mathbf{p}$ respectivamente)
D(:, i) V(:, i) A(:, i)	Vetores de deslocamentos, velocidades e acelerações no instante $t_i$ , isto é, são os vetores $\mathbf{D}_i$ , $\dot{\mathbf{D}}_i$ e $\ddot{\mathbf{D}}_i$
k_   Dp_	Matriz de rigidez efetiva $\bar{\mathbf{k}}$ (equação (3.57)) e vetor de carregamento efetivo incremental $\bar{\Delta}\mathbf{p}$ (equação (3.58)) do método de Newmark.
DJ(:, i)	Vetor de deslocamentos globais da estrutura (incluindo restringidos) no instante $t_i$ .
lambda, CSIp CSIm, EPS	Parâmetros $\lambda$ , $\xi_p$ , $\xi_m$ e $\varepsilon$ da estratégia adaptativa de Bergan e Mollestad (1985).
NDu(i)   w2(i) T(i)   CSI(i)	Valores da norma $\ \Delta\mathbf{D}_i\ $ , da frequência $\bar{\omega}_i^2$ , do período $\bar{T}_i$ e da taxa $\bar{\xi}_i$ calculados para o passo $i$ na estratégia adaptativa de Bergan e Mollestad (1985).
Dt_T_alvo   lb pinc   pdec	Parâmetro $(\Delta t/T)^{alvo}$ , fator $lb$ e constantes $p_{inc}$ e $p_{dec}$ da estratégia adaptativa de Hulbert e Jang (1995).
Cd   tol lcount   count	Valores das constantes $C^d$ , $tol$ , $lcount$ e do contador $count$ usados durante a análise na estratégia adaptativa de Hulbert e Jang (1995).
e(:, i)   RL(i) sclfac(i)	Valores de $\mathbf{e}_i$ , $RL_i$ e $sclfac_i$ calculados para o passo $i$ na estratégia adaptativa de Hulbert e Jang (1995).
RLmax   finc fdec	Valores de $RL_i^{máx}$ , $f_{inc}$ e $f_{dec}$ usados na alteração do incremento de tempo na estratégia adaptativa de Hulbert e Jang (1995).
k_anterior	Matriz $\bar{\mathbf{k}}$ do passo anterior, armazenada e usada quando necessário.
cp, ct, alf	Parâmetros $c_p$ , $c_t$ e $\alpha$ da estratégia adaptativa de Cintra (2008).
Dtreg, tj(j)	Valores de $\Delta t_{reg}$ e do limite inferior $t_j'$ do $j$ -ésimo intervalo de regularização.
kapa(i) kapaReg(i)	Valores da curvatura $\kappa_i$ e da curvatura regularizada $\kappa_i^{reg}$ calculadas para um passo de tempo $i$ na estratégia adaptativa de Cintra (2008).

## Código C1\_BARRAS.m

---

```
% INTRODUÇÃO DAS BARRAS

fprintf('\n1 - GEOMETRIA ======\n');
nj = input('Número de nós = ');
m = input('Número de barras = ');

fprintf('\n1.1 - Barras.....');
for i=1:m
    fprintf('\nNós da Barra %d:\n',i);
    Nos(i,1) = input('Nó inicial = ');
    Nos(i,2) = input('Nó final = ');
    for j=1:2
        Des(i,3*j-2) = 3*Nos(i,j) - 2; % Número dos deslocamentos dos nós
        Des(i,3*j-1) = 3*Nos(i,j) - 1; % 1 e 2 do membro i, obtidos com as
        Des(i,3*j) = 3*Nos(i,j); % equações (4.36)
    end
end

fprintf('\n1.2 - Nós.....');
for i=1:nj
    fprintf('\nCoordenadas do nó %d:\n',i);
    coord(i,1) = input('x = ');
    coord(i,2) = input('y = ');
end

% Valor padrão fixado para np. Pode ser alterado.
np = 10;

% Calcula as coordenadas x e y dos np pontos tomados ao longo das barras
CX = zeros(np,m);
CY = zeros(np,m);
for i=1:m
    CX(1,i) = coord(Nos(i,1),1);
    CX(np,i) = coord(Nos(i,2),1);
    CY(1,i) = coord(Nos(i,1),2);
    CY(np,i) = coord(Nos(i,2),2);
    Dx = (CX(np,i)-CX(1,i))/(np-1);
    Dy = (CY(np,i)-CY(1,i))/(np-1);
    for j=2:np-1
        CX(j,i) = CX(j-1,i) + Dx;
        CY(j,i) = CY(j-1,i) + Dy;
    end
end

% Desenha a estrutura indeformada
close
set(figure(1),'units','normalized')
set(figure(1),'position',[0.55 0.55 0.44 0.42]);
plot([CX(1,:);CX(np,:)],[CY(1,:);CY(np,:)],'b-x')
axis equal
xmin = min(min(CX))-1; xmax = max(max(CX))+1;
ymin = min(min(CY))-1; ymax = max(max(CY))+1;
axis([xmin xmax ymin ymax])
```

---

## Código C2\_MAT\_LOC.m

---

```
% MATRIZ DE RIGIDEZ E DE MASSA LOCAIS SIMBÓLICAS

% Variáveis simbólicas genéricas
x = sym('x','real'); % Variável independente das funções Ni
L = sym('L','real'); % Comprimento da barra
E = sym('E','real'); % Módulo de elasticidade do material
A = sym('A','real'); % Área da seção transversal
I = sym('I','real'); % Momento de inércia da seção transversal
p = sym('p','real'); % Massa por unidade de comprimento da barra

% Vetor-linha de variáveis simbólicas dado na equação (4.28)
X = [1 x x^2 x^3];

% Matriz do sistema linear dado na equação (4.23)
Q = [ subs(X, x, 0) ;
       subs(diff(X,x),x,0) ;
       subs(X, x,L) ;
       subs(diff(X,x),x,L) ];

% Vetores-coluna de termos independentes dados na equação (4.27)
b(:,1) = [1; -1/L; 0; -1/L];
b(:,2) = [0; 1/L; 1; 1/L];
b(:,3) = [1; 0; 0; 0];
b(:,4) = [0; 1; 0; 0];
b(:,5) = [0; 0; 1; 0];
b(:,6) = [0; 0; 0; 1];

% Obtenção das 6 funções Ni pela equação (4.29)
for i=1:6
    N(i) = X*(Q\b(:,i));
end

% Matriz simbólica das funções Ni, exibida na equação (4.30)
MN = [ N(1) 0 0 N(2) 0 0 ;
        0 N(3) N(4) 0 N(5) N(6) ];

% Matriz simbólica das derivadas das funções Ni, exibida na equação (4.32)
B(1,:) = diff(MN(1,:),x); % Linha 1
B(2,:) = diff(diff(MN(2,:),x),x); % Linha 2

% Matriz simbólica com propriedades da seção, exibida na equação (4.34)
S = [ A 0 ; 0 I ];

% Obtenção das matrizes de rigidez e de massa simbólicas do elemento
ke = E*int(B'*S*B,x,0,L); % Expressão (4.33)
me = p*int(MN'*MN,x,0,L); % Expressão (4.31)
```

---

## Código C3\_MAT\_GLOB.m

---

```
% MATRIZ DE RIGIDEZ E DE MASSA GLOBAIS NUMÉRICAS
clc
fprintf('\n2 - MATERIAL E SEÇÕES =====\n');

fprintf('\n2.1 - Material.....\n');
Ex = input('Módulo de Elasticidade: E = ');
ro = input('Massa específica: rô = ');

fprintf('\n2.2 - Seções.....\n');
Ax = input('Área da seção transversal: A = ');
Ix = input('Momento de Inércia da seção transversal: I = ');

% Massa por unidade de comprimento das barras
px = ro*Ax;

% Inicialização da matrizes globais com zeros
K = zeros(3*nj);
M = zeros(3*nj);

for i=1:m

    % Cálculo dos comprimentos das barras e cossenos e senos dos ângulos de
    % inclinação, com base nas coordenadas dos nós inicial e final
    Lx(i) = sqrt( ( CX(np,i)-CX(1,i) )^2 + ( CY(np,i)-CY(1,i) )^2 );
    c(i) = ( CX(np,i)-CX(1,i) )/Lx(i);
    s(i) = ( CY(np,i)-CY(1,i) )/Lx(i);

    % Matriz numérica de mudança de base para um vetor de três componentes
    R = [c(i) s(i) 0; % Exibida na equação (4.19)
          -s(i) c(i) 0;
               0     0   1];

    % Matriz numérica de mudança de base dos deslocamentos do elemento i
    Rt(:,:,i) = [ R zeros(3); % Exibida na equação (4.20)
                  zeros(3) R ];

    % Matrizes de rigidez e de massa locais simbólicas do elemento i
    ks = Rt(:,:,i)'*ke*Rt(:,:,i); % Exibidas na equação (4.21)
    ms = Rt(:,:,i)'*me*Rt(:,:,i);

    % Matrizes de rigidez e de massa locais numéricas do elemento i
    kl(:,:,i) = subs(ks,{E,A,I,L},{Ex,Ax,Ix,Lx(i)} );
    ml(:,:,i) = subs(ms,{p,L},{px,Lx(i)} );

    % Matrizes de rigidez e de massa globais das estrutura
    for j=1:6
        for k=1:6
            % Soma-se as propriedades correspondentes a cada deslocamento
            % nodal que seja comum a um ou mais elementos da estrutura
            K(Des(i,j),Des(i,k)) = K(Des(i,j),Des(i,k)) + kl(j,k,i);
            M(Des(i,j),Des(i,k)) = M(Des(i,j),Des(i,k)) + ml(j,k,i);
        end
    end
end
end
```

---

**Código C4\_REST\_APOIO.m**

```
% RESTRIÇÕES DE APOIO
clc
fprintf('\n3 - RESTRIÇÕES DE APOIO
=====
nr = input('Número de restrições de apoio = ');

% Inicia os vetores dos graus de liberdade livres e restrinidos como se
% não houvesse restrições (vetor GL completo e vetor GLR vazio)
GL = [1:1:3*nj];
GLR = [];

% Constrói o vetor de graus de liberdade restrinidos
for i=1:nr
    fprintf('\nRestrição número %d:.....\n',i);
    noh = input('Nº do nó = ');
    fprintf('Deslocamento restrinido:');
    fprintf('\n(1)-X | (2)-Y -> Translações | (3)-Z -> Rotação');
    op = input('\nOpção = ');

    % Identifica o número do deslocamento com índices das relações (4.36)
    des = 3*noh + (op-3);

    % Adiciona o deslocamento ao vetor de graus de liberdade restrinidos
    GLR = [GLR des];
end

% Subtrai de todos os graus de liberdade, aqueles que foram restrinidos
GL = setdiff(GL,GLR);

% Seleciona as linhas e colunas correspondentes aos graus de liberdade não
% restrinidos, nas matrizes de rigidez e massa globais
K = K(GL,GL);
M = M(GL,GL);

% Nº de graus e liberdade (Deslocamentos livres) do problema
n = length(GL);
```

**Código C5\_AMORTEC.m**

```
% FREQUENCIAS NATURAIS E MATRIZ DE AMORTECIMENTO
clc
fprintf('\n4 - AMORTECIMENTO PROPORCIONAL=====\
');

modo1 = input('Nº do Modo onde é conhecida a 1ª taxa de amortecimento = ');
modo2 = input('Nº do Modo onde é conhecida a 2ª taxa de amortecimento = ');
fprintf('\n');
frase1 = ['Taxa de amortecimento no ',int2str(modo1),'º modo: csi = '];
frase2 = ['Taxa de amortecimento no ',int2str(modo2),'º modo: csi = '];

csi(1,1) = input(frase1);
csi(2,1) = input(frase2);
```

```
% Vetor de frequências naturais da estrutura
% Raiz quadrada dos autovalores do problema generalizado da equação (3.36)
w = sqrt(eig(K,M));

% Ordena as frequências em ordem crescente dentro do vetor w
w = sort(w);

% Calcula o período de vibração natural mais curto, associado à maior freq.
Tj = 2*pi/max(w); % 1ª das equações (2.18)

% Matriz dos coeficientes do sistema linear composto por duas equações de
% duas incógnitas, iguais à expressão (3.50)
Q = [ 1/(2*w(modo1)) w(modo1)/2 ;
      1/(2*w(modo2)) w(modo2)/2 ];

% Solução do sistema linear de duas equações e duas incógnitas
a = Q\csi; % Também exibida na equação (3.51)

% Taxas de amortecimento modais, encontradas com a equação (3.50)
csi = zeros(n,1);
for i=1:n
    csi(i) = (1/(2*w(i)))*a(1) + (w(i)/2)*a(2);
end

% Matriz de amortecimento proporcional, dada na equação (3.46)
C = a(1)*M + a(2)*K;
```

---

### Código C6\_CARGAS.m

---

```
% DADOS DAS CARGAS NODAIS
clc
fprintf('\n5 - CARGAS NODAIS ======\n');
nc = input('Número de cargas nodais = ');

% Inicia o vetor-coluna F com zeros em todos os deslocamentos da estrutura
F = zeros(3*nj,1);

% Inicia com zeros os dados de todas as cargas a serem declaradas
desC = zeros(1,nc);
opC = zeros(1,nc);
t0 = zeros(1,nc);
t1 = zeros(1,nc);
w1 = zeros(1,nc);

% Recolhe os dados introduzidos para as cargas nodais
for i=1:nc
    fprintf('\nCarga nodal número %d:.....\n',i);
    noh = input('Nº do nó = ');

    fprintf('Direção correspondente:');
    fprintf('\n(1)-X | (2)-Y -> Forças | (3)-Z -> Momento');
    op = input('\nOpção =');
```

```

% Identifica o número do deslocamento com os índices das Eqs. (4.36)
desC(i) = 3*noh + (op-3);
F(desC(i)) = input('Valor Máximo da carga = ');

fprintf('Função do histórico de carga:')
fprintf('\n (1)-Carga impulsiva constante.')
fprintf('\n (2)-Carga triangular decrescente.')
fprintf('\n (3)-Carga triangular simétrica.')
fprintf('\n (4)-Carga senoidal.')
opC(i) = input('\nOpção de Carga = ');

if opC(i)==4
    w1(i) = input('Frequência do carregamento senoidal: w = ');
else
    t0(i) = input('Instante de início da carga impulsiva: t0 = ');
    t1(i) = input('Intervalo de duração da carga impulsiva: t1 = ');
end
end

% Corrigie dados de cargas mal introduzidos
aux1 = zeros(1,nc);
for i=1:n
    aux1 = aux1 | desC==GL(i);
end
desC = desC(aux1); % Caso seja declarada uma carga sobre um
opC = opC(aux1); % deslocamento restringido, esse carregamento
t0 = t0(aux1); % é eliminado dos vetores com os dados das
t1 = t1(aux1); % cargas. São tomadas apenas as cargas sobre
w1 = w1(aux1); % deslocamento livres.

% Reduz o 'nc' declarado ao número de cargas sobre deslocamentos livres
nc = length(desC);

% Corrigie o vetor 'desC' para corresponder a sua definição
aux2 = [];
for i=1:nc % Identifica o número do grau de
    aux2 = [aux2 find(GL==desC(i))]; % liberdade correspondente ao
end % deslocamento 'desC(i)' e reconstrói
desC = aux2; % o vetor 'desC' com esses números

% Reduz o vetor-coluna F às posições dos deslocamentos livres
F = F(GL);

% Inicia com zeros a matriz de cargas p (apenas a primeira coluna)
p = zeros(n,1);

```

---

## Código C7a\_NEWMARK\_CTS.m

---

```
% MÉTODO DE NEWMARK COM CONSTANTES TIME STEPS
clc
fprintf('\n6 - MÉTODO NUMÉRICO =====\n');

fprintf('\n6.1 - Parâmetros do algoritmo de Newmark.....\n');
gama = input('Valor do parâmetro "gama" (entre 1/2 e 1): GAMA = ');
beta = input('Valor do parâmetro "beta" (entre 0 e 1): BETA = ');
if beta>=gama/2; Dtmax = input('Incremento máximo: Dtmax = '); end

fprintf('\n6.2 - Parâmetros do algoritmo step by step.....\n');
T1 = input('Intervalo de plotagem das respostas/cargas: T = ');
Dt(1) = input('Comprimento do incremento de tempo: Dt = ');

% Valores crítico, máximo e mínimo para o passo de tempo
if beta>gama/2 % Método incondicionalmente estável
    Dtcrit = Dtmax; % Valor crítico livre, escolhido pelo usuário
else % Valor crítico conservador dado pela eq. (2.33) para o menor período
    Dtcrit = Tj/(pi*sqrt(2*(gama-2*beta)));
end
Dtmax = Dtcrit;
Dtmin = 0;
Dt(1) = min(Dt(1),Dtmax); % Incremento limitado a um valor máximo
Dt(1) = max(Dt(1),Dtmin); % Incremento limitado a um valor mínimo

% Instante de tempo inicial e condições iniciais de cargas
t(1) = 0;
p(:,1) = Carregamento(n,nc,opC,desC,t0,t1,w1,F,t(1));

% Condições iniciais (nulas) das respostas
D(:,1) = zeros(n,1);
V(:,1) = zeros(n,1);
A      = zeros(n,1);
A(:,1) = M\b(p(:,1) - C*V(:,1) - K*D(:,1));

% Matriz de Rígidez efetiva, dada pela equação (3.57)
k_ = K + (1/(beta*D(1)^2))*M + (gama/(beta*D(1)))*C;

i=2;
while t(i-1)<T1
    % Atualização do instante de tempo
    t(i) = t(i-1) + Dt(i-1);

    % Vetor de Carga efetiva incremental, dado pela equação (3.58)
    p(:,i) = Carregamento(n,nc,opC,desC,t0,t1,w1,F,t(i));
    Dp = p(:,i) - p(:,i-1);
    Dp_ = Dp + ...
        + M*((1/(beta*D(i-1)))*V(:,i-1) + (1/(2*beta))*A(:,i-1)) ...
        + C*((gama/beta)*V(:,i-1) + (gama/(2*beta)-1)*Dt(i-1)*A(:,i-1));

    % Incremento no deslocamento, encontrado ao resolver a equação (3.56)
    Du = k_\Dp_;

    % Incremento na Velocidade, obtido com a equação (3.59)
    Dv = (gama/(beta*D(i-1)))*Du + (1-gama/(2*beta))*Dt(i-1)*A(:,i-1) ...
        - (gama/beta)*V(:,i-1);
```

```

% Deslocamento e velocidade no final do time-step, Eqs (3.61) e (3.62)
D(:,i) = D(:,i-1) + Du;
V(:,i) = V(:,i-1) + Dv;

% Aceleração no final do time-step, equação (3.60)
A(:,i) = M\ ( p(:,i) - C*V(:,i) - K*D(:,i)) ;

% Atualização para o passo de tempo seguinte
Dt(i) = Dt(i-1); % Incremento de tempo constante
i = i+1;
end

% Número de pontos no histórico das cargas e respostas
N1 = length(t);

% Vetor de deslocamentos globais (deslocamentos livres e restringidos)
DJ = zeros(3*nj,N1);
DJ(GL,:) = D;

```

---

### Código C7b\_NEWMARK\_ATS\_BERGAN.m

---

```

% MÉTODO DE NEWMARK COM AUTOMATIC TIME STEPPING DE BERGAN E MOLLESTAD
clc
fprintf('\n6 - MÉTODO NUMÉRICO ======\n');

fprintf('\n6.1 - Parâmetros do algoritmo de Newmark.....\n');
gama = input('Valor do parâmetro "gama" (entre 1/2 e 1): GAMA = ');
beta = input('Valor do parâmetro "beta" (entre 0 e 1): BETA = ');
if beta>gama/2; Dtmax = input('Incremento máximo: Dtmax = '); end

fprintf('\n6.2 - Parâmetros do algoritmo de Bergan & Mollestad.....\n');
T1 = input('Intervalo de plotagem das respostas/cargas: T = ');
Dt(1) = input('Comprimento do primeiro incremento de tempo: Dt(1) = ');
lambda = input('Valor do parâmetro "lambda" (step-length): LAMBDA = ');
CSIp = input('Valor do parâmetro "csi p": CSIp = ');
CSIm = input('Valor do parâmetro "csi m": CSIm = ');
EPS = 0.1;
NDu(1) = 0;

% Valores crítico, máximo e mínimo para o passo de tempo
if beta>gama/2 % Método incondicionalmente estável
    Dtcrit = Dtmax; % Valor crítico livre, escolhido pelo usuário
else % Valor crítico conservador dado pela eq. (2.33) para o menor período
    Dtcrit = Tj/(pi*sqrt(2*(gama-2*beta)));
end
Dtmax = Dtcrit;
Dtmin = 0;

% Instante de tempo inicial e condições iniciais de cargas
t(1) = 0;
p(:,1) = Carregamento(n,nc,opC,desC,t0,t1,w1,F,t(1));

```

```

% Condições iniciais (nulas) das respostas
D(:,1) = zeros(n,1);
V(:,1) = zeros(n,1);
A       = zeros(n,1);
A(:,1) = M\ ( p(:,1) - C*V(:,1) - K*D(:,1)) ;

% Matriz de Rígidez efetiva para o passo 1, dada pela equação (3.57)
k_ = K + (1/(beta*Dt(1)^2))*M + (gama/(beta*Dt(1)))*C;

i=2;
while t(i-1)<T1
    % Atualização do instante de tempo
    t(i) = t(i-1) + Dt(i-1);

    % Vetor de Carga efetiva incremental, dado pela equação (3.58)
    p(:,i) = Carregamento(n,nc,opC,descC,t0,t1,w1,F,t(i));
    Dp = p(:,i) - p(:,i-1);
    Dp_ = Dp + ...
        + M*((1/(beta*Dt(i-1)))*V(:,i-1) + (1/(2*beta))*A(:,i-1)) ...
        + C*((gama/beta)*V(:,i-1) + (gama/(2*beta)-1)*Dt(i-1)*A(:,i-1));

    % Incremento no deslocamento, encontrado ao resolver a equação (3.56)
    Du = k_\Dp_;

    % Incremento na Velocidade, obtido com a equação (3.59)
    Dv = (gama/(beta*Dt(i-1)))*Du + (1-gama/(2*beta))*Dt(i-1)*A(:,i-1) ...
        - (gama/beta)*V(:,i-1);

    % Deslocamento e velocidade no final do time-step, Eqs (3.61) e (3.62)
    D(:,i) = D(:,i-1) + Du;
    V(:,i) = V(:,i-1) + Dv;

    % Aceleração no final do passo, equação (3.60)
    A(:,i) = M\ ( p(:,i) - C*V(:,i) - K*D(:,i)) ;

    % Atualização do passo de tempo - algoritmo de Bergan & Mollestad(1985)
    NDu(i) = norm(Du);
    if NDu(i)<EPS*NDu(i-1) % Verificação da condição (5.6)
        w2(i) = w2(i-1);
    else
        w2(i) = (Du'*K*Du) / (Du'*M*Du); % Frequência característica
    end % atual - eq. (5.1)

    T(i) = 2*pi/(sqrt(abs(w2(i)))); % Período característico
    % atual - eq. (5.2)
    CSI(i) = lambda*T(i)/Dt(i-1); % Taxa de incremento de
    % tempo atual - eq. (5.5)
    Dt(i) = f(CSI(i),CSIp,CSIm)*Dt(i-1); % Incremento de tempo para o
    % próximo passo - eq. (5.4)

    Dt(i) = min(Dt(i),Dtmax); % Incremento limitado a um valor máximo
    Dt(i) = max(Dt(i),Dtmin); % Incremento limitado a um valor mínimo

    % Matriz de Rígidez efetiva para o passo seguinte, equação (3.57)
    if Dt(i) ~= Dt(i-1)
        k_ = K + (1/(beta*Dt(i)^2))*M + (gama/(beta*Dt(i)))*C;
    end
    i = i+1;
end

```

```
% Número de pontos no histórico das cargas e respostas
N1 = length(t);

% Vetor de deslocamentos globais (deslocamentos livres e restringidos)
DJ = zeros(3*nj,N1);
DJ(GL,:) = D;
```

---

### Código C7c\_NEWMARK\_ATS\_HULBERT.m

---

```
% MÉTODO DE NEWMARK COM AUTOMATIC TIME STEPPING DE HULBERT E JANG
clc
fprintf('\n6 - MÉTODO NUMÉRICO =====\n');

fprintf('\n6.1 - Parâmetros do algoritmo de Newmark.....\n');
gama = input('Valor do parâmetro "gama" (entre 1/2 e 1): GAMA = ');
beta = input('Valor do parâmetro "beta" (entre 0 e 1): BETA = ');
if beta>=gama/2; Dtmax = input('Incremento máximo: Dtmax = '); end

fprintf('\n6.2 - Parâmetros do algoritmo de Hulbert & Jang.....\n');
T1 = input('Intervalo de plotagem das respostas/cargas: T = ');
Dt(1) = input('Comprimento do primeiro incremento de tempo: Dt(1) = ');
Dt_T_alvo = input('Razão alvo Dt/T: (Dt/T)alvo = ');
lb = input('Valor do parâmetro: lb = ');
pinc = input('Valor do parâmetro: pinc = ');
pdec = input('Valor do parâmetro: pdec = ');

Cd = ((2*pi)^2)*abs((beta-1/6)); % Constante multiplicadora, eq. (5.26)
tol = Cd*(Dt_T_alvo)^2; % Tolerância no erro, 1ª das eqs. (5.25)
lcount = cast(int8(1/Dt_T_alvo), 'double'); % Limite do contador, eq. (5.31)
count = 0;
sclfac(1) = 0;

% Valores crítico, máximo e mínimo para o passo de tempo
if beta>gama/2 % Método incondicionalmente estável
    Dtcrit = Dtmax; % Valor crítico livre, escolhido pelo usuário
else % Valor crítico conservador dado pela eq. (2.33) para o menor período
    Dtcrit = Tj/(pi*sqrt(2*(gama-2*beta)));
end
Dtmax = Dtcrit;
Dtmin = 0;

Dt(1) = min(Dt(1),Dtmax); % Primeiro incremento limitado a um valor máximo
Dt(1) = max(Dt(1),Dtmin); % Primeiro incremento limitado a um valor mínimo

% Instante de tempo inicial e condições iniciais de cargas
t(1) = 0;
p(:,1) = Carregamento(n,nc,opC,desC,t0,t1,w1,F,t(1));

% Condições iniciais (nulas) das respostas
D(:,1) = zeros(n,1);
V(:,1) = zeros(n,1);
A      = zeros(n,1);
A(:,1) = M\b(p(:,1) - C*V(:,1) - K*D(:,1));
```

```

% Matriz de Rígidez efetiva para o passo 1, dada pela equação (3.57)
k_ = K + (1/(beta*Dt(1)^2))*M + (gama/(beta*Dt(1)))*C;

% Executa função se o problema tiver condições iniciais quiescentes
if norm(p(:,1))==0; Quiescent; i=4; else i=2; end

while t(i-1)<T1
    % Atualização do instante de tempo
    t(i) = t(i-1) + Dt(i-1);

    % Vetor de Carga efetiva incremental, dado pela equação (3.58)
    p(:,i) = Carregamento(n,nc,opC,desC,t0,t1,w1,F,t(i));
    Dp = p(:,i) - p(:,i-1);
    Dp_ = Dp + ...
        + M*((1/(beta*Dt(i-1)))*V(:,i-1) + (1/(2*beta))*A(:,i-1)) ...
        + C*((gama/beta)*V(:,i-1) + (gama/(2*beta)-1)*Dt(i-1)*A(:,i-1));

    % Incremento no deslocamento, encontrado ao resolver a equação (3.56)
    Du = k_\Dp_;

    % Incremento na Velocidade, obtido com a equação (3.59)
    Dv = (gama/(beta*Dt(i-1)))*Du + (1-gama/(2*beta))*Dt(i-1)*A(:,i-1) ...
        - (gama/beta)*V(:,i-1);

    % Deslocamento e velocidade no final do time-step, Eqs (3.61) e (3.62)
    D(:,i) = D(:,i-1) + Du;
    V(:,i) = V(:,i-1) + Dv;

    % Aceleração no final do passo, equação (3.60)
    A(:,i) = M\ ( p(:,i) - C*V(:,i) - K*D(:,i) );

    % Atualização do passo de tempo - algoritmo de Hulbert & Jang (1995)
    Da = A(:,i) - A(:,i-1); % Incremento na Aceleração
    e(:,i) = (Dt(i-1)^2)*(beta-1/6)*Da; % Erro local, Eq. (5.21)
    sclfac(i) = max(norm(Du),0.9*sclfac(i-1)); % Fator de escala, Eq.(5.23)
    RL(i) = norm(e(:,i))/sclfac(i); % Erro local normalizado, Eq. (5.22)

    if lb*tol<=RL(i) && RL(i)<=tol % Verificação da condição (5.28)
        Dt(i) = Dt(i-1);
        count = 0;
        nao_reduziu_Dt = 1;
    elseif RL(i)<lb*tol
        count = count + 1;
        if count > lcount
            RLmax = max(RL(i-lcount:i));
            finc = (tol/RLmax)^(1/pinc); % Fator amplificador, 2ª eq (5.29)
            Dt(i) = finc*Dt(i-1); % Amplificação do incremento, 1ª eq (5.29)
            Dt(i) = min(Dt(i),Dtmax); % Dt limitado a um valor máximo
            count = 0;
        else
            Dt(i) = Dt(i-1);
        end
        nao_reduziu_Dt = 1;
    elseif RL(i)>tol
        if i>2 && Dt(i-1)>Dt(i-2) % Verificação do caso 1
            Dt(i-1) = Dt(i-2); % Redução do incremento no caso 1
            ocorreu_caso_1 = 1;
            ocorreu_caso_2 = 0;
        end
    end
end

```

```

    else
        fdec = (tol/RL(i))^(1/pdec); % Fator de redução, 2ª eq. (5.30)
        Dt(i-1) = fdec*Dt(i-1); % Redução do incremento, 1ª eq. (5.30)
        Dt(i-1) = max(Dt(i-1),Dtmin); % Dt limitado a um valor mínimo
        count = 0;
        ocorreu_caso_1 = 0;
        ocorreu_caso_2 = 1;
    end
    nao_reduziu_Dt = 0;
end

% Matriz de Rígidez efetiva - equação (3.57) - e atualização do passo
if nao_reduziu_Dt
    if Dt(i) > Dt(i-1)
        k_anterior = k_;
        k_ = K + (1/(beta*Dt(i)^2))*M + (gama/(beta*Dt(i)))*C;
    end
    i = i+1;
elseif ocorreu_caso_1
    k_ = k_anterior;
elseif ocorreu_caso_2
    k_ = K + (1/(beta*Dt(i-1)^2))*M + (gama/(beta*Dt(i-1)))*C;
end
end

% Número de pontos no histórico das cargas e respostas
N1 = length(t);

% Vetor de deslocamentos globais (deslocamentos livres e restringidos)
DJ = zeros(3*nj,N1);
DJ(GL,:) = D;

```

---

### Código C7d\_NEWMARK\_ATS\_CINTRA.m

---

```

% MÉTODO DE NEWMARK COM AUTOMATIC TIME STEPPING DE CINTRA
clc
fprintf('\n6 - MÉTODO NUMÉRICO ======\n');

fprintf('\n6.1 - Parâmetros do algoritmo de Newmark.....\n');
gama = input('Valor do parâmetro "gama" (entre 1/2 e 1): GAMA = ');
beta = input('Valor do parâmetro "beta" (entre 0 e 1): BETA = ');
if beta>=gama/2; Dtmax = input('Incremento máximo: Dtmax = '); end

fprintf('\n6.2 - Parâmetros do algoritmo de Cintra.....\n');
T1 = input('Intervalo de plotagem das respostas/cargas: T = ');
Dt(1) = input('Comprimento do primeiro incremento de tempo: Dt(1) = ');
cp = input('Valor da constante positiva cp: cp = ');
ct = input('Valor da constante positiva ct: ct = ');
alf = input('Valor da constante positiva alpha: alpha = ');

% Valores crítico, máximo e mínimo para o passo de tempo
if beta>=gama/2 % Método incondicionalmente estável
    Dtcrit = Dtmax; % Valor crítico livre, escolhido pelo usuário
else % Valor crítico conservador dado pela eq. (2.33) para o menor período
    Dtcrit = Tj/(pi*sqrt(2*(gama-2*beta)));
end

```

```

Dtmax = Dtcrit;
Dtmin = 0;

% Intervalos de regularização da curvatura
Dtreg = ct*Dtcrit;
tj = 0:Dtreg:T1;
if max(tj) < T1;    tj(length(tj)+1) = max(tj) + Dtreg;    end

% Instante de tempo inicial e condições iniciais de cargas
t(1) = 0;
p(:,1) = Carregamento(n,nc,opC,desC,t0,t1,w1,F,t(1));

% Condições iniciais (nulas) das respostas
D(:,1) = zeros(n,1);
V(:,1) = zeros(n,1);
A      = zeros(n,1);
A(:,1) = M\ ( p(:,1) - C*V(:,1) - K*D(:,1)) ;

% Curvatura inicial para condições nulas - Equação (5.42)
kapa(1) = norm(A(:,1));
kapaReg(1) = kapa(1);

% Intervalo de tempo inicial para condições não quiescentes
if norm(A(:,1))>0; Dt(1) = Dtmax/(1 + cp*kapaReg(1)); end

% Matriz de Rígidez efetiva para o passo 1, dada pela equação (3.57)
k_ = K + (1/(beta*D(1)^2))*M + (gama/(beta*D(1)))*C;

i=2; j=1;
while t(i-1)<T1
    % Atualização do instante de tempo
    t(i) = t(i-1) + Dt(i-1);

    % Vetor de Carga efetiva incremental, dado pela equação (3.58)
    p(:,i) = Carregamento(n,nc,opC,desC,t0,t1,w1,F,t(i));
    Dp = p(:,i) - p(:,i-1);
    Dp_ = Dp + ...
        + M*((1/(beta*D(i-1)))*V(:,i-1) + (1/(2*beta))*A(:,i-1)) ...
        + C*((gama/beta)*V(:,i-1) + (gama/(2*beta)-1)*Dt(i-1)*A(:,i-1));

    % Incremento no deslocamento, encontrado ao resolver a equação (3.56)
    Du = k_\Dp_;

    % Incremento na Velocidade, obtido com a equação (3.59)
    Dv = (gama/(beta*D(i-1)))*Du + (1-gama/(2*beta))*Dt(i-1)*A(:,i-1) ...
        - (gama/beta)*V(:,i-1);

    % Deslocamento e velocidade no final do time-step, Eqs (3.61) e (3.62)
    D(:,i) = D(:,i-1) + Du;
    V(:,i) = V(:,i-1) + Dv;

    % Aceleração no final do passo, equação (3.60)
    A(:,i) = M\ ( p(:,i) - C*V(:,i) - K*D(:,i)) ;

    % Atualização do passo de tempo - algoritmo de Cintra (2008)
    % Cálculo da Curvatura - Equação (5.42)
    kapa(i) = sqrt( ( 1+dot(V(:,i),V(:,i)) )*dot(A(:,i),A(:,i)) ...
        - dot(V(:,i),A(:,i))^2)/(( 1+dot(V(:,i),V(:,i)) )^(3/2));

```

```
% Regularização da Curvatura segundo a Figura 5.5
if t(i) > tj(j+1)
    j = 1 + floor(t(i)/Dtreg);
    kapaReg(i)=alf*kapaReg(i-1)+(1-alf)*maxkapatjt(tj(j),t(i),kapa,t);
    if maxkapatjt(tj(j),t(i),kapa,t)>kapaReg(i)
        kapaReg(i) = maxkapatjt(tj(j),t(i),kapa,t);
    end
else
    if maxkapatjt(tj(j),t(i),kapa,t)>kapaReg(i-1)
        kapaReg(i) = maxkapatjt(tj(j),t(i),kapa,t);
    else
        kapaReg(i) = kapaReg(i-1);
    end
end
% Correlação da Equação (5.48)
Dt(i) = Dtmax/(1 + cp*kapaReg(i));
Dt(i) = max(Dt(i),Dtmin); % Incremento limitado a um valor mínimo

% Matriz de Rígidez efetiva para o passo seguinte, equação (3.57)
if Dt(i) ~= Dt(i-1)
    k_ = K + (1/(beta*Dt(i)^2))*M + (gama/(beta*Dt(i)))*C;
end

i = i+1;
end

% Número de pontos no histórico das cargas e respostas
N1 = length(t);

% Vetor de deslocamentos globais (deslocamentos livres e restringidos)
DJ = zeros(3*nj,N1);
DJ(GL,:) = D;
```

---

### Código f.m

---

```
function f=f(x,CSIp,CSIm)
    if 0<=x && x<(1/CSIp) ; f = x; end      % Função de controle f(x) como
    if (1/CSIp)<=x && x<CSIp ; f = 1; end      % a exibida na Figura 5.1-(c)
    if CSIp<=x && x<CSIm ; f = x; end
    if CSIm<=x ; f = CSIm; end
end
```

---

### Código maxkapatjt.m

---

```
function maxkapatjt=maxkapatjt(tj,t,kapa,vett) % Máximo valor de kapa entre
    if abs(tj-t)<1e-14                         % os instantes tj e t
        maxkapatjt = kapa(vett==t);
    else
        maxkapatjt = max(kapa((vett>=tj)&(vett<=t)));
    end
end
```

---

## Código Quiescent.m

---

```
Dt(2) = Dt(1);

for i=2:3 [...] % Integração do 1º e 2º passos com Dt(2) = Dt(1)

while RL(3)>tol [...] % Re-integração do 2º passo caso RL > tol

if lb*tol<=RL(3) && RL(3)<=tol % Verificação da condição (5.28)
    Dt(3) = Dt(2);
    count = 0;
elseif RL(3)<lb*tol
    Dt(3) = Dt(2);
    count = count + 1;
end
```

---

## Código Carregamento.m

---

```
function p = Carregamento(n,nc,opC,desC,t0,t1,w1,F,t)
p = zeros(n,1);
for i=1:nc
    switch opC(i)
        case 1 % ----- Carga Impulsiva Constante
            if t < t0(i)
                p(desC(i)) = 0;
            elseif t <= t0(i)+t1(i)
                p(desC(i)) = F(desC(i));
            else
                p(desC(i)) = 0;
            end
        case 2 % ----- Carga Triangular Decrescente
            slope = F(desC(i))/t1(i);
            if t < t0(i)
                p(desC(i)) = 0;
            elseif t <= t0(i)+t1(i)
                p(desC(i)) = F(desC(i)) - slope*(t-t0(i));
            else
                p(desC(i)) = 0;
            end
        case 3 % ----- Carga Triangular Simétrica
            slope = F(desC(i))/(t1(i)/2);
            if t < t0(i)
                p(desC(i)) = 0;
            elseif t <= t0(i)+t1(i)/2
                p(desC(i)) = slope*(t-t0(i));
            elseif t <= t0(i)+t1(i)
                p(desC(i)) = F(desC(i)) - slope*(t-(t0(i)+t1(i)/2));
            else
                p(desC(i)) = 0;
            end
        case 4 % ----- Carga Harmônica Senoidal
            p(desC(i)) = F(desC(i))*sin(w1(i)*t);
    end
end
end
```

---