Cálculo de Programas

2.° ano
Lic. Ciências da Computação e Mestrado Integrado em Engenharia Informática
UNIVERSIDADE DO MINHO

2020/21 - Ficha nr.° 3

1. Considere o isomorfismo

$$\begin{tikzcd} (A+B)+C \arrow[rr, bend left, "\mathsf{coassocr}"] \arrow[rr, phantom, "\cong"] & & A+(B+C) \arrow[ll, bend left, "\mathsf{coassocl}"] \end{tikzcd}$$

onde $\mathsf{coassocr} = [id+i_1\,, i_2 \cdot i_2]$. Calcule a sua conversa resolvendo em ordem a coassocl a equação,

$$\mathsf{coassocl} \cdot \mathsf{coassocr} \quad = \quad id$$

isto é

$$\mathsf{coassocl} \cdot \underbrace{[id + i_1\,, i_2 \cdot i_2]}_{\mathsf{coassocr}} = id$$

etc. Finalmente, exprima coassocl sob a forma de um programa em Haskell *não recorra* ao combinador "either".

Resolução

Vamos começar por aplicar a fusão-$+$ (lei 20) ao lado esquerdo da equação $coassocl \cdot [id + i_1, i_2 \cdot i_2] = id$.

Temos então:

$$[coassocl \cdot (id + i_1), coassocl \cdot (i_2 \cdot i_2)] = id$$

Aplicando agora a propriedade universal-$+$ (lei17) fazendo $k = id$ obtemos:

$$id \cdot i_1 = coassocl \cdot (id + i_1)$$

$$id \cdot i_2 = coassocl \cdot (i_2 \cdot i_2)$$

Aplicando agora a def.$+$ (lei 21) a $(id + i_1)$ obtemos:

$$id \cdot i_1 = coassocl \cdot [i_1 \cdot id, i_2 \cdot i_1]$$

$$id \cdot i_2 = coassocl \cdot (i_2 \cdot i_2)$$

Aplicando novamente a fusão-$+$ (lei 20) e a def. da função identidade (lei 1) à primeira equação obtemos:

$$i_1 = [coassocl \cdot (i_1 \cdot id), coassocl \cdot (i_2 \cdot i_1)]$$

$$i_2 = coassocl \cdot (i_2 \cdot i_2)$$

Pela def. da função identidade e aplicando a reflexão-$+$ (lei 19) ao lado esquerdo da primeira equação sabemos que $i_1 = i_1 \cdot id = i_1 \cdot [i_1, i_2]$, obtendo assim:

$$i_1 \cdot [i_1, i_2] = [coassocl \cdot (i_1 \cdot id), coassocl \cdot (i_2 \cdot i_1)]$$

$$i_2 = coassocl \cdot (i_2 \cdot i_2)$$

Aplicando novamente a fusão-$+$ (lei 20) e a def. da função identidade (lei 1) à primeira equação obtemos:

$$[i_1 \cdot i_1, i_1 \cdot i_2] = [coassocl \cdot i_1, coassocl \cdot (i_2 \cdot i_1)]$$

$$i_2 = coassocl \cdot (i_2 \cdot i_2)$$

Aplicando agora a lei 27 (eq-$+$) à primeira equação temos finalmente:

$$i_1 \cdot i_1 = coassocl \cdot i_1$$

$$i_1 \cdot i_2 = coassocl \cdot (i_2 \cdot i_1)$$

$$i_2 = coassocl \cdot (i_2 \cdot i_2)$$

Haskell

In [1]:

```
:load ../src/Cp.hs

-- pointfree

coassoclPF = either (i1 . i1) (i2 -|- id)

-- pointwise

coassoclPW (Left a) = Left . Left $ a
coassoclPW (Right (Left a)) = Left . Right $ a
coassoclPW (Right (Right a)) = Right a
```

In [2]:

```
-- type checking

:t coassoclPF
:t coassoclPW
```

```
coassoclPF :: forall a b1 b2. Either a (Either b1 b2) -> Either (Either a b1) b2

coassoclPW :: forall a b1 b2. Either a (Either b1 b2) -> Either (Either a b1) b2
```