

## Resolução das questões propostas - Ficha 4:

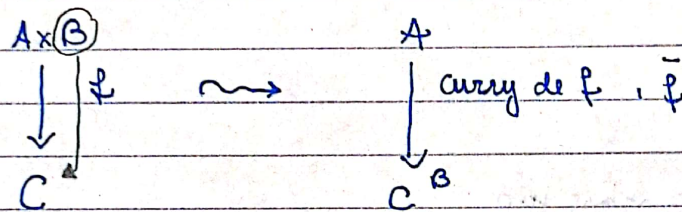
Preocupação com a mona notação de exponenciais em correções com a sintaxe em Haskell. A exponencial guarda várias subtilezas como funções que recebem funções como parâmetros. Isto em conjunto com currying dá-nos um imenso poder de trabalho em demonstrações e exercícios relevantes para o nosso CP.

Codomínio      domínio

ap:  $(\text{C} \times \text{B}) \rightarrow \text{C}$  • função que recebe uma função e um argumento e aplica essa função ao argumento.  
 $\text{ap}(f, x) = f \circ x$

(a) pretende-se mostrar que  $f \circ K = \text{ap} \cdot (K \times \text{id})$  é uncurry!

Função currying,  $\bar{f}$



(Não esquecer a adição de variáveis)

indica que se coloca um par!

$$f \circ K = \text{ap} \cdot (K \times \text{id}) \Leftrightarrow \{ \text{Igualdade Extensional } f \}$$

$$\Leftrightarrow f \circ K(x, y) = (\text{ap} \cdot (K \times \text{id}))(x, y) \Leftrightarrow \{ \text{Def-comp} \}$$

$$\Leftrightarrow f \circ K(x, y) = \text{ap}((K \times \text{id})(x, y)) \Leftrightarrow \{ \text{Def-x} \}$$

$$\Leftrightarrow f \circ K(x, y) = \text{ap}(Kx, \text{id}y) \Leftrightarrow \{ \text{Def-id} \}$$

$$\Leftrightarrow f \circ K(x, y) = \text{ap}(Kx, y) \Leftrightarrow \{ \text{Def-ap} \}$$

$$\Leftrightarrow f \circ K(x, y) = Kx \ y \Leftrightarrow \{ \text{Def-uncurry} \}$$

$$\Leftrightarrow f \circ K(x, y) = \hat{K}(x, y) \Leftrightarrow \{ \text{Igualdade extensional - pointfree} \}$$

$$\Leftrightarrow (f \circ K) = \hat{K} \Rightarrow \underline{\text{uncurry}} = f$$

(b) pretende-se mostrar que a função currying é dada pela tal igualdade:

inclusão de um par!

$$\text{ap} \cdot (\text{curry } f \times \text{id}) = f \Leftrightarrow \{ \text{Igualdade extensional } f \}$$

$$\Leftrightarrow (\text{ap} \cdot (\text{curry } f \times \text{id}))(x, y) = f(x, y) \Leftrightarrow \{ \text{Def-comp} \}$$

$$\Leftrightarrow \text{ap}((\text{curry } f \times \text{id})(x, y)) = f(x, y) \Leftrightarrow \{ \text{Def-x} \}$$

$$\Leftrightarrow \text{ap}((\text{curry } f)x, \text{id}y) = f(x, y) \Leftrightarrow \{ \text{Def-id} \}$$

$$\Leftrightarrow \text{ap}((\text{curry } f)oc, y) = f(x, y) \Leftrightarrow \{ \text{Def-ap} \}$$

$$\Leftrightarrow (\text{curry } f)x \ y = f(x, y) \Leftrightarrow \{ \text{Def-curry} \}$$

$$\Leftrightarrow (\text{curry } f)x \ y = \bar{f} \ x \ y \Leftrightarrow \bar{f} = \text{curry } f$$



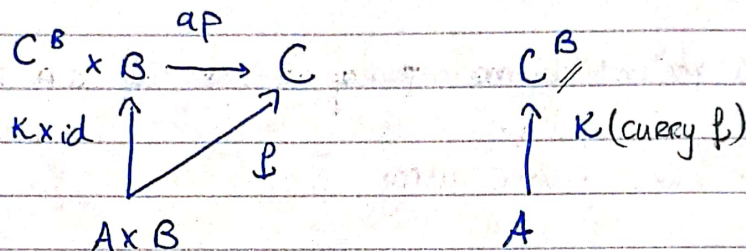
## Ex. 2

•  $\text{curry } f = \bar{f}$

• (F1)  $\text{ap} \cdot (\text{curry } K \times \text{id}) = f$  : lei do cancelamento - exp (36)

(F1)  $\text{ap} \cdot (\text{curry } K \times \text{id}) = f \Leftrightarrow \text{ap} (\bar{f} \times \text{id}) = f$ , pois  $\bar{f} = \text{curry } K$

$\text{ap} \cdot (\bar{f} \times \text{id}) = f$  deriva da propriedade universal da exponenciação fazendo  $K = \bar{f}$



## Ex. 3

• Isomorfismo sobre flip :

$$(C^B)^A \cong C^{A \times B} \cong C^{B \times A} \cong (C^A)^B$$

$$f \mapsto \hat{f} \mapsto \hat{f} \cdot \text{swap} \mapsto \hat{\hat{f}} \cdot \text{swap} = \text{flip } f$$

- trabalha sobre o argumento A
- dá como resultado uma função do tipo  $C^B$
- Sendo  $C^B$ , o conjunto de todas as funções de B para C
- Transformação sem perda de informação.

$\text{flip}(\text{flip } f) = f \Leftrightarrow \{ \text{Def} - \text{flip} \}$

$\Leftrightarrow \text{flip}(\hat{\hat{f}} \cdot \text{swap}) = f \Leftrightarrow$

$\hat{\hat{f}} \cdot \text{swap} \cdot \text{swap} = f \Leftrightarrow \{ \text{Def} - \text{flip} \}$

$\Leftrightarrow \hat{\hat{f}} \cdot \text{swap} \cdot \text{swap} = f \Leftrightarrow$

$\hat{\hat{f}} \cdot \text{id} = f \Leftrightarrow \{ \text{swap} \cdot \text{swap} = \text{id} \}$

$\Leftrightarrow \hat{\hat{f}} = f \Leftrightarrow \{ \text{Natural} - \text{id} \}$

$\Leftrightarrow f = f \Leftrightarrow \text{True}$

$$\text{flip } f \ x \ y = f \ y \ x \quad (\Rightarrow \{ \text{Def-Flip} \})$$

$$(\hat{f} \cdot \text{swap}) \ x \ y = f \ y \ x \quad (\Rightarrow \{ \text{Def-Unwary} \})$$

$$(\hat{f} \cdot \text{swap}) \ (x, y) = f \ y \ x \quad (\Rightarrow \{ \text{Def-Comp} \})$$

$$\hat{f} \ (\text{swap} \ (x, y)) = f \ y \ x \quad (\Rightarrow \{ \text{Def-Swap} \})$$

$$\hat{f} \ (y, x) = f \ y \ x \quad (\Rightarrow \{ \text{Def-Unwary} \})$$

$$f \ y \ x = f \ y \ x \quad (\Rightarrow \{ \text{Prop Reflexividade} \})$$

$$f = f \quad (\Rightarrow \{ \text{Igualdade Extensional} \})$$

True.

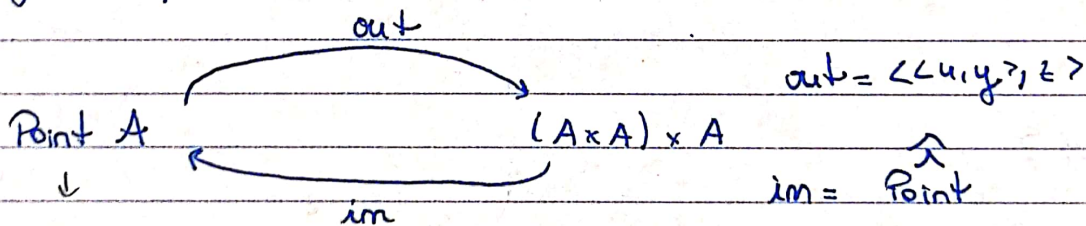
Obs. Tendo-se:

$$a) \ \hat{f} \ (a, b) = f \ a \ b$$

$$b) \ \hat{f} \ a \ b = f \ (a, b)$$

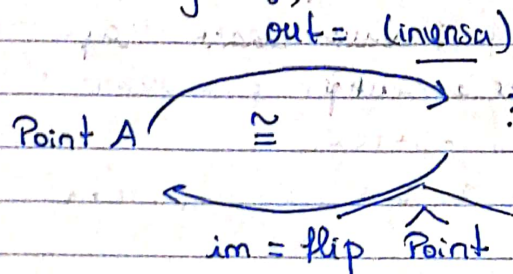
Ex. 4

- Tipo que descreve um ponto no espaço tridimensional;
- Tipo paramétrico pois recebe um tipo  $a$  como argumento;
- Ou seja,  $a$  pode ser `Int`, ou `Double` ou `Float`, etc.



recebe argumentos  
que vêm um a um  $\rightarrow$  ou seja `Point` recebe os argumentos `1a` e `2a` e dá  
um `Point` de  $a$ !

- $\hat{f}$  abstrai um currying de  $f$ ;



ATENÇÃO: No fundo, com  
CP conseguimos chegar  
a função `out`, sabendo  
que é a inversa de `in`!



$$\text{in} = \widehat{\text{flip}} \widehat{\text{Point}} \in \{ \text{Def-flip} \}$$

$$= \widehat{\widehat{\text{Point}}} \cdot \text{swap} = \{ \text{Def-swap} \cdot \text{swap} = \text{id} \}$$

$$= \widehat{\widehat{\text{Point}}} \cdot \text{swap}$$

Então, faça-se a seguinte análise:

1) Pelo primeiro diagrama:  $(A \times A) \times A \xrightarrow{\widehat{\widehat{\text{Point}}}} \text{Point } A$

2) Pelo segundo diagrama:  $? \xrightarrow{\widehat{\widehat{\text{Point}} \cdot \text{swap}}} \text{Point } A$

3) Pela def-swap: Troca-se os argumentos e depois aplica-se Point.

$$\therefore ? = A \times (A \times A)$$

Sobre out:

1)  $\text{Point } A \xrightarrow{\text{out} = \langle \langle x, y \rangle, z \rangle} (A \times A) \times A$   
 $\text{Point } A \xrightarrow{\text{out} = ?} A \times (A \times A)$

2)  $\text{Point } A \xrightarrow{\text{out} = \langle \langle x, y \rangle, z \rangle} (A \times A) \times A$   
 $\text{Point } A \xrightarrow{\text{out} = \langle z, \langle x, y \rangle \rangle} A \times (A \times A)$

$\therefore$  Donde sai:  $\text{out} = \text{swap} \cdot (1^\circ \text{out})$   
 $= \text{swap} \cdot \langle \langle x, y \rangle, z \rangle$

Conclusão

### Ex. 5

- Pretende-se provar a igualdade em questão.

$$\bar{f} \cdot (g \times h) = \bar{a}p \cdot (\text{id} \times h) \cdot \bar{f} \cdot g$$

MÉTODO: vamos pegar na expressão da esquerda e chegar à da direita. Este método não é o melhor, pois vamos fazer "aparecer" coisas e as leis do CP. são mais eficazes e intuitivas para fazer "desaparecer".

(Prova abaixo)



$$\begin{aligned}
& \overline{f \cdot (g \times h)} = \{ \text{Natural-id} \} \\
& = \overline{f \cdot (\text{id} \cdot g \times h \cdot \text{id})} = \{ \text{Functor-x} \} \\
& = \overline{f \cdot (\text{id} \times h) \cdot (g \times \text{id})} = \{ \text{fusão-exp} \} \\
& = \overline{f \cdot (\text{id} \times h)} \cdot g = \{ \text{cancelamento-exp} \} + \{ \text{Assoc-comp} \} \\
& = \overline{\text{ap} \cdot (\text{c} \cdot \bar{f} \times \text{id}) \cdot (\text{id} \times h)} \cdot g = \{ \text{Functor-x} \} \\
& = \overline{\text{ap} \cdot (\text{c} \cdot \bar{f} \cdot \text{id}) \times (\text{id} \cdot h)} \cdot g = \{ \text{Natural-id} \} \\
& = \overline{\text{ap} \cdot (\bar{f} \times h)} \cdot g = \{ \text{Natural-id-inv} \} \\
& = \overline{\text{ap} \cdot (\text{id} \cdot \bar{f} \times h \cdot \text{id})} \cdot g = \{ \text{Functor-x} \} \\
& = \overline{\text{ap} \cdot (\text{id} \times h) \cdot (\bar{f} \times \text{id})} \cdot g = \{ \text{fusão-exp} \} \\
& = \overline{\text{ap} \cdot (\text{id} \times h)} \cdot \bar{f} \cdot g \quad \text{como } g \downarrow. \quad \begin{array}{l} \text{Ajuda usar } \text{id} = \text{id} \cdot \text{id} \\ \text{id} = \text{id} \cdot \text{id} \\ \text{id} = \text{id} \times \text{id} \end{array}
\end{aligned}$$

### Ex.6

• Pretende verificar que umra functor é a inversa da outra.

<p>1) <math>\text{join} \cdot \text{unjoin} = \text{id}</math>  <math>\{ \text{igualdade extensiva} \}</math>  <math>(=) \text{join} \cdot \text{unjoin } K = \text{id } K \quad (=)</math>  <math>\{ \text{Def-comp} \text{ e Def-id} \}</math>  <math>(=) \text{join} (\text{unjoin } K) = K \quad (=)</math>  <math>\{ \text{Def-unjoin} \}</math>  <math>(=) \text{join} (K \cdot \text{id}, K \cdot \text{id}) = K \quad (=)</math>  <math>\{ \text{Def-join} \}</math>  <math>(=) [K \cdot \text{id}, K \cdot \text{id}] = K \quad (=)</math>  <math>\{ \text{Def-universal-1} \}</math>  <math>(=) K \cdot \text{id} = K \cdot \text{id} \quad (=)</math>  <math>K \cdot \text{id} = K \cdot \text{id}</math>  <math>\{ \text{Prop.refl. igualdade} \}</math></p>	<p>2) <math>\text{unjoin} \cdot \text{join} = \text{id}</math>  <math>\{ \text{igualdade extensiva} \}</math>  <math>\text{unjoin} \cdot \text{join} (f, g) = \text{id} (f, g) \Rightarrow</math>  <math>\{ \text{Def-comp} \text{ e Def-id} \}</math>  <math>\Leftrightarrow \text{unjoin} (\text{join} (f, g)) = (f, g) \Leftrightarrow</math>  <math>\{ \text{Def-join} \}</math>  <math>\Leftrightarrow \text{unjoin} [f, g] = (f, g)</math>  <math>\{ \text{Def-unjoin} \}</math>  <math>\Leftrightarrow ([f, g] \cdot \text{id}, [f, g] \cdot \text{id}) = (f, g)</math>  <math>\{ \text{cancelamento-1} \}</math>  <math>(f, g) = (f, g) \quad (=)</math>  <math>\{ \text{Prop.refl. igualdade} \}</math>  <math>\Leftrightarrow \text{True.}</math></p>
--	---

é True.



## Ex. 7

- $\text{Split}(f, g) = \langle f, g \rangle$
- $\text{unsplit } K = (\pi_1.K, \pi_2.K)$

No diagrama, temos " $\cong$ " logo o argumento recebido tem de ser igual ao resultado de saída. Então, as duas funções em questão,  $\text{split}$  e  $\text{unsplit}$  são inversas, podendo construír-se:  $\text{split} \cdot \text{unsplit} = \text{id}$ .

Inferência de tipos:

$$\rightarrow \text{split} : B^A \times C^A \rightarrow (B \times C)^A$$

$$\text{split}(f, g) = \langle f, g \rangle$$

→ Inferir sobre estes tipos!  
Como conseguimos concluir?

$$\rightarrow \text{unsplit} : (B \times C)^A \rightarrow B^A \times C^A$$

$$\text{unsplit } K = (\pi_1.K, \pi_2.K)$$

Método de resolução 1:

$$\begin{aligned} &\text{split} \cdot \text{unsplit} = \text{id} \\ &\{ \text{Igualdade Extensional} \} \\ &\text{split} \cdot \text{unsplit} \cdot K = \text{id } K \\ &\Leftrightarrow \{ \text{Def-comp} \ \& \ \text{Def-id} \} \\ &\Leftrightarrow \text{split}(\text{unsplit } K) = K \\ &\{ \text{Def-unsplit} \} \\ &\text{split}(\pi_1.K, \pi_2.K) = K \\ &\{ \text{Def-split} \} \\ &\langle \pi_1.K, \pi_2.K \rangle = K \\ &\{ \text{Fusão - x} \} \\ &\langle \pi_1, \pi_2 \rangle \cdot K = K \\ &\Leftrightarrow \{ \text{Reflexão - x, natural-id} \} \\ &\Leftrightarrow K = K \Leftrightarrow \\ &\{ \text{Prop. Reflex. da Igualdade} \} \\ &\Leftrightarrow \text{TRUE} \end{aligned}$$

Método de resolução 2:

$$\begin{aligned} &\text{split} \cdot \text{unsplit} = \text{id} \\ &\{ \text{Igualdade Extensional} \} \\ &\text{split} \cdot \text{unsplit} \cdot K = \text{id } K \Leftrightarrow \\ &\{ \text{def-comp, def-id} \} \\ &\Leftrightarrow \text{split}(\text{unsplit } K) = K \\ &\{ \text{def-unsplit} \} \\ &\Leftrightarrow \text{split}(\pi_1.K, \pi_2.K) = K \\ &\{ \text{def-split} \} \\ &\Leftrightarrow \langle \pi_1.K, \pi_2.K \rangle = K \\ &\{ \text{Universal - x} \} \\ &\Leftrightarrow \{ \pi_1.K = \pi_1.K \ \& \ \pi_2.K = \pi_2.K \} \\ &\{ \text{Prop. Reflexiva Igualdade} \} \\ &\Leftrightarrow \text{TRUE} \end{aligned}$$

Método de resolução 3:

$$\begin{aligned} &\text{unsplit} \cdot \text{split} = \text{id} \Leftrightarrow \{ \text{Igualdade Extensional} \} \Leftrightarrow \text{unsplit}(\text{split}(f, g)) = \text{id}(f, g) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \{ \text{Def-comp, Def-id} \} \Leftrightarrow \text{unsplit}(\text{split}(f, g)) = \langle f, g \rangle \Leftrightarrow \{ \text{Def-split} \} \\ &\Leftrightarrow \text{unsplit} \langle f, g \rangle = \langle f, g \rangle \Leftrightarrow \{ \text{Def-unsplit} \} \Leftrightarrow (\pi_1.\langle f, g \rangle, \pi_2.\langle f, g \rangle) = \\ &= \langle f, g \rangle \Leftrightarrow \{ \text{Camelamento - x} \} \Leftrightarrow (f, g) = (f, g) \Leftrightarrow \text{TRUE} \end{aligned}$$

{ Prop. Reflexiva: igualdade }