7. Mostre, usando (F4), que o catamorfismo de naturais $(a+) = \mathsf{for\ succ}\ a = (\![\underline{a}\ , \mathsf{succ}]\!)$ se converte na definição[2]

$$a + 0 = a$$
$$a + (n + 1) = 1 + (a + n)$$

Resolução

$(a+) = (\![\underline{a}, succ]\!)$

{ (F4), para k = (a+) }

$(a+)\ .\ in = [\underline{a}, succ].\ (id + (a+))$

{ def. in = [zero, succ] }

$(a+)\ .\ [zero, succ] = [\underline{a}, succ].\ (id + (a+))$

{ fusão-$+$, **lei (20)** ; absorção-$+$, **lei (22)** }

$[(a+)\ .\ zero, (a+)\ .\ succ] = [\underline{a}\ .\ id, succ\ .\ (a+)]$

{ natural-id, **lei (1)** ; eq-$+$, **lei (27)** }

$(a+)\ .\ zero = \underline{a}$

$(a+)\ .\ succ = succ\ .\ (a+)$

{ igualdade extensional, **lei (71)** }

$((a+)\ .\ zero)\ n = \underline{a}\ n$

$((a+)\ .\ succ)\ n = (succ\ .\ (a+))\ n$

{ def-comp, **lei (72)**; }

$(a+)\ (zero\ n) = \underline{a}\ n$

$(a+)\ (succ\ n) = succ((a+)\ n)$

{ def. zero, def. succ, def-const, **lei (74)** }

$(a+)\ 0 = a$

$(a+)\ (n + 1) = succ\ ((a+)\ n)$

{ def. (a+) }

$a + 0 = a$

$a + (n + 1) = (a + n) + 1$

{ prop. comutativa da adição }

$a + 0 = a$

$a + (n + 1) = 1 + (a + n)$