5. Seja dada uma função ∇ da qual só sabe duas propriedades: $\nabla \cdot i_1 = id$ e $\nabla \cdot i_2 = id$. Mostre que, necessariamente, ∇ satisfaz também a propriedade natural $f \cdot \nabla = \nabla \cdot (f + f)$.

Resolução

Temos de mostrar que $f \,.\, \nabla = \nabla \,.\, (f + f)$

{ def-$+$, **lei (21)** }

$\equiv f \,.\, \nabla = \nabla \,.\, [i_1 .\, f, i_2 .\, f]$

{ fusão-$+$, **lei (22)** }

$\equiv f \,.\, \nabla = [\nabla .\, i_1 .\, f, \nabla .\, i_2 .\, f]$

{ $\nabla .\, i_1 = id$; $\nabla .\, i_2 = id$ }

$\equiv f \,.\, \nabla = [f, f]$

{ universal-$+$, **lei (17)**, para $k = f \,.\, \nabla$ }

$\equiv f \,.\, \nabla .\, i_1 = f$; $f \,.\, \nabla .\, i_2 = f$

{ $\nabla .\, i_1 = id$; $\nabla .\, i_2 = id$ }

$\equiv f = f$; $f = f$

{ propriedade reflexiva da igualdade }

$\equiv True$; $True$