Cálculo de Programas

2.° ano
Lic. Ciências da Computação e Mestrado Integrado em Engenharia Informática
UNIVERSIDADE DO MINHO

2020/21 - Ficha nr.° 2

1. Recorde as propriedades universais dos combinadores $\langle f, g\rangle$ e $[f, g]$,

$$k = \langle f, g\rangle \equiv \begin{cases} \pi_1 \cdot k = f \\ \pi_2 \cdot k = g \end{cases}$$

$$k = [f, g] \equiv \begin{cases} k \cdot i_1 = f \\ k \cdot i_2 = g \end{cases}$$

das quais, como sabe, podem ser derivadas todas as outras que aparecem no respectivo grupo, no formulário.

   (a) Use a segunda para demonstrar a lei $[i_1, i_2] = id$ conhecida por *Reflexão-*$+$.

   (b) Use a primeira para demonstrar a lei

   $$\langle h, k\rangle \cdot f = \langle h \cdot f, k \cdot f\rangle$$

   que também consta desse formulário sob a designação *fusão-*$\times$.

Resolução (a)

Queremos demonstrar que $[i_1, i_2] = id$

Partindo da propriedade universal e fazendo $k = id$ temos:

$id = [f, g]$

{ ***propriedade universal de*** $[f, g]$ }

$id \cdot i_1 = f \ ; \ id \cdot i_2 = g$

{ *natural-id,* ***lei (1)*** }

$i_1 = f \ ; \ i_2 = g$

{ ***propriedade universal de*** $[f, g]$ }

$id = [f, g] = [i_1, i_2]$

Resolução (b)

Queremos demonstrar que $< h, k > \cdot f \ = \ < h \cdot f, k \cdot g >$

Partindo da propriedade universal e fazendo $k \ = \ < h, k > \cdot f$ temos:

{ ***propriedade universal de*** $< f, g >$ }

$\pi_1 \cdot (< h, k > \cdot f) \ = \ h \cdot f$

$$\pi_2 \cdot (< h, k > \cdot f) \ = \ k \cdot f$$

{ *assoc-comp,* ***lei (2)*** }

$$(\pi_1 \cdot < h, k >) \cdot f \ = \ h \cdot f$$

$$(\pi_2 \cdot < h, k >) \cdot f \ = \ k \cdot f$$

{ *cancelamento-*$\times$*,* ***lei (7)*** }

$$h \cdot f = h \cdot f$$

$$k \cdot f = k \cdot f$$

{ prop. reflexiva da igualdade }

True ; True