Resolução dos exercícios propostos - Ficha 1:

Ex. 1 $\quad (f \cdot g)\, x \overset{def}{=} f\,(g\,x)$

(a) Calcular a composta para os casos seguintes:

i) $(f \cdot g)\, x = f\,(g\,x) = f\,(x+1) = 2 * (x+1) = 2x + 2$

ii) $(f \cdot g)\, x = f\,(g\,x) = f\,(2 * x) = succ\,(2 * x) = (2 * x) + 1$

iii) $(f \cdot g)\, x = f\,(g\,x) = f\,(length\ x) = succ\,(length\ x) =$
$= (length\ x) + 1.$

$x = (x, y)$

iv) $(f \cdot g)\, x = f\,(g\,x) = f\,(g\,(x,y)) = f\,(x+y) =$

$= (succ \cdot (2*))(x+y) \overset{def(f \cdot g)}{=} succ\,[\,2 * (x+y)\,] = succ\,(2*x + 2*y) =$
$= (2 * x + 2 * y) + 1 = (2x + 2y) + 1 = (2\,(x+y)) + 1$

(b) Mostrar a propriedade de associatividade entre compostas:

Método 1: $\quad (f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h) \quad (2)$

$(f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h) \quad \Leftrightarrow \quad (71)$

$\Leftrightarrow ((f \cdot g) \cdot h)\, x = (f \cdot (g \cdot h))\, x \Leftrightarrow (72)$
$\Leftrightarrow ((f \cdot g)(h\,x)) = (f \cdot (g \cdot h)\, x) \Leftrightarrow$ def ou (72)
$\Leftrightarrow f\,(g\,(h\,x)) = f\,((g \cdot h)\, x) \Leftrightarrow$ def ou (72)
$\Leftrightarrow f\,(g\,(h\,x)) = f\,(g\,(h\,x))$

$\forall x,\ (f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h) \quad \{2\}$

Método 2:

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[r, "f"] & D \\ A \arrow[ur, "g \cdot h"] \arrow[r, "h"'] \arrow[urr, bend left=60, "(1)"] \arrow[urr, bend right=60, "(2)"'] & B \arrow[u, "g"] \arrow[ur, "f \cdot g"'] & \end{tikzcd}$$

$(1) = (2) \Leftrightarrow$
$f \cdot (g \cdot h) = (f \cdot g) \cdot h$

(C) Mostrar a propriedade Natural - id:

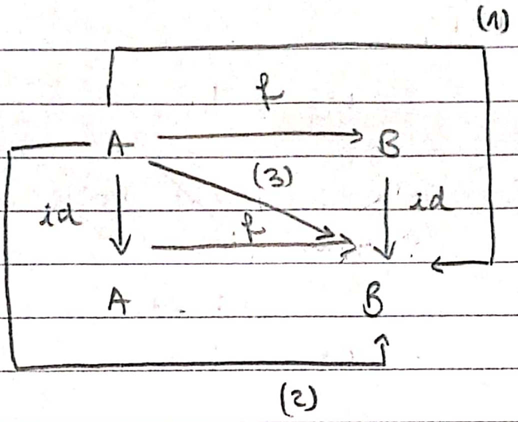
Método 1:

$$id :: a \to a$$
$$id\, x = x \quad (def)$$

$$f \cdot id = id \cdot f = f \ (1)$$

$f \cdot id = id \cdot f \Leftrightarrow$ (71)
$(f \cdot id)\, x = (id \cdot f)\, x \Leftrightarrow$ (72)
$f\,(id\, x) = id\,(f\, x) \Leftrightarrow$ (73)
$f\, x = f\, x \Leftrightarrow$ (71)
$\Leftrightarrow f = f$
$\forall x,\quad f \cdot id = id \cdot f = f$

Método 2:



(1) = (2) = (3) $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow id \cdot f = f \cdot id = f$,
por observação do diagrama.

Ex. 2

(a) Mostrar a propriedade da definição de produto:

Método 1: $\quad (f \times g)(x,y) = (f\,x, g\,y) \quad (77)$

$(f \times g)(x,y) = (f\,x, g\,y) \Leftrightarrow$ (10)
$\Leftrightarrow \langle f \cdot \pi_1, g \cdot \pi_2 \rangle (x,y) = (f\,x, g\,y) \Leftrightarrow$ (76)
$\Leftrightarrow ((f \cdot \pi_1)(x,y), (g \cdot \pi_2)(x,y)) = (f\,x, g\,y) \Leftrightarrow$ (72)
$\Leftrightarrow f\,(\pi_1\,(x,y)), g\,(\pi_2\,(x,y)) = (f\,x, g\,y) \Leftrightarrow$ (79)
$\Leftrightarrow (f\,x, g\,y) = (f\,x, g\,y)$.

$\forall (x,y),\quad (f \times g)(x,y) = (f\,x, g\,y)$ {77}

Método 2: (b) diagramas são úteis para demonstrar notações point-free:

(F2)

$$\underbrace{\pi_1 \cdot (f \times g)}_{(2)} = \underbrace{f \cdot \pi_1}_{(1)}$$

$$\begin{tikzcd}
C & C \times D \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & D \\
A \arrow[u, "f"] & A \times B \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] \arrow[u, "f \times g"] \arrow[ul, "(1)"] \arrow[ur, "(3)"'] & B \arrow[u, "g"']
\end{tikzcd}$$

(2) (4)

(1) = (2), Logo,

$\forall_{f,g} : \pi_1 \cdot (f \times g) = f \cdot \pi_1$.

(F3) Pelo diagrama anterior: (3) = (4), Logo,

$\forall_{f,g} : \pi_2 \cdot (f \times g) = g \cdot \pi_2$.

(F4)

$$(id \times id) = id$$

$$\begin{tikzcd}
A & A \times B \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & B \\
A \arrow[u, "id\ A"] & A \times B \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] \arrow[u, "id\ A \times B"'] & B \arrow[u, "id_B"']
\end{tikzcd}$$

Obs: De $A \times B$ para $A \times B$ posso ir pelo caminho central, $id_{A \times B}$, mas este caminho é uma operação onde dois programas $id\ A$ e $id\ B$ correm em simultâneo, resultando no mesmo output = input. Logo, tem-se o produto $id_A \times id_B$

Assim, $id_A \times id_B = id_{A \times B}$, $\forall A, B$

(F5)

$$(f \times g) \cdot (h \times k) = (f \cdot h) \times (g \cdot k)$$

Obs: Normalmente, para fazer estes diagramas temos de olhar para o que temos e tentar formar igualdades. Neste caso, já sabemos que o produto deve necessitar de funções a correrem em paralelo, Então, vamos precisar de, pelo menos 2 níveis no diagrama.

$$\begin{tikzcd}
E & E \times F \arrow[l, "\pi_2"'] \arrow[r, "\pi_1"] & F \\
C \arrow[u, "f"] & C \times D \arrow[l] \arrow[r] \arrow[u, "f \times g"] & D \arrow[u, "g"'] \\
A \arrow[u, "h"] & A \times B \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[u, "h \times k"] & B \arrow[u, "k"']
\end{tikzcd}$$

De $A \times B$ para $E \times F$:

$(f \times g) \cdot (h \times k)$

Assim:

$$\begin{tikzcd}
E & E \times F \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & F \\
A \arrow[u, "f \cdot h"] & A \times B \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[u, "(f \times g) \cdot (h \times k)"] & B \arrow[u, "g \cdot k"']
\end{tikzcd}$$

Logo, temos o produto:

$(f \cdot h) \times (g \cdot k)$

Entao, $(f \times g) \cdot (h \times k) = (f \cdot h) \times (g \cdot k)$, $\forall f, g, h, k$

__Ex. 3__ Para resolver isto, vamos "abrir os splits":

- $\langle \pi_2, \pi_1 \rangle \Rightarrow$ disparo de 2 funções com o mesmo tipo de entrada, p. ex:

$$\begin{tikzcd}
B & B \times C \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & C \\
& A \arrow[ul, "g"] \arrow[u, "\langle g, f \rangle"] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

→ É só um exemplo!

- de seguida há outro split, logo temos de ter mais 2 funções com o mesmo tipo de entrada e que aplicam o mesmo tipo de disparo. Note-se que o split é entre π_1 e π_2, logo são essas as funções com o mesmo input!

$$
\begin{tikzcd}
 & A\times B \arrow[dl, "\pi_2"'] \arrow[d, "\langle \pi_2,\pi_1\rangle"] \arrow[dr, "\pi_1"] & \\
B & B\times A \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & A \\
 & A\times B \arrow[ul, "\pi_2"] \arrow[u, "\langle \pi_2,\pi_1\rangle"'] \arrow[ur, "\pi_1"'] \arrow[uu, bend left=90, "id_{A\times B}"] \arrow[uu, bend right=90, "id_{A\times B}"'] &
\end{tikzcd}
$$

Ex. 4

- $f = \langle \pi_1 \cdot \pi_1 , \pi_2 \times id \rangle$
- $g = \langle id \times \pi_1 , \pi_2 \cdot \pi_2 \rangle$

$$
\begin{tikzcd}
(A\times B) \arrow[d, "\pi_1"'] & (A\times B)\times C \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "id + \boxed{ISO} ((A\times B)\times C \cong A\times(B\times C))"] \arrow[dl, "\pi_1\cdot\pi_1"'] \arrow[d, "f" near start, "\langle \pi_1\cdot\pi_1 , \pi_2\times id\rangle" near end] \arrow[dr, "\pi_2 \times id"] & A(B\times C) \arrow[d, "\pi_2"] \\
A & A\times(B\times C) \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] & (B\times C)
\end{tikzcd}
$$

↓
Carece de demonstração ver secção $\underline{\underline{A}}$

Secção A: Provar que $(A\times B)\times C \cong A\times(B\times C)$

No fundo, sabemos que o operador produto tem como definição:

$$f\times g \overset{def}{=} \langle f\cdot\pi_1 , g\cdot\pi_2 \rangle \Leftrightarrow (71)$$

$$f\times g \; x = \langle f\cdot\pi_1, g\cdot\pi_2 \rangle \; (x,y)$$

↓ tipo C ↓ Tipo A × B

Como só podemos demonstrar com expressões (funções), temos de arranjar um diagrama com essas funções que expresse as relações entre os vários tipos!

expressa essa relação

(1)

$$\begin{tikzcd}
(A\times B)\times C \arrow[rr, shift left, "k"] & & A\times(B\times C) \arrow[ll, shift left, "\text{secção B}"] \\
& D \arrow[ul, "\langle\langle f,g\rangle,h\rangle"] \arrow[ur, "(2)\ \langle f,\langle g,h\rangle\rangle"'] \arrow[ur, bend right=70, "k\cdot\langle\langle f,g\rangle,h\rangle"'] &
\end{tikzcd}$$

Queremos ver se é possível ir de D para $A\times(B\times C)$ por (1) e ver se é o mesmo que ir por (2):

$$(1) = (2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad k\cdot\langle\langle f,g\rangle,h\rangle = \langle f,\langle g,h\rangle\rangle \quad \Leftrightarrow$$

Para que (1) seja (2), temos de ter $\langle\langle f,g\rangle,h\rangle = id$. Assim, basta resolver esta expressão:

$$\langle\langle f,g\rangle,h\rangle = id \Leftrightarrow id = \langle\langle f,g\rangle,h\rangle = id$$

$$\overset{(6)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \pi_1\cdot id = \langle f,g\rangle \\ \pi_2\cdot id = h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \pi_1 = \langle f,g\rangle \\ \pi_2 = h \end{cases} \overset{(6)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \pi_1\cdot\pi_1 = f \leftarrow \text{incógnita 1} \\ \pi_2\cdot\pi_2 = g \leftarrow \text{incógnita 2} \\ \pi_2 = h \leftarrow \text{incógnita 3} \end{cases}$$

Obs: Aqui as incógnitas são funções, logo paramos quando as encontrarmos!

$$k\cdot\underbrace{\langle\langle f,g\rangle,h\rangle}_{id} = \langle f,\langle g,h\rangle\rangle \Leftrightarrow k = \langle f,\langle g,h\rangle\rangle \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = \langle \pi_1\cdot\pi_1, \langle \pi_2\cdot\pi_2, \pi_2\rangle\rangle \Leftrightarrow k = \langle\pi_1\cdot\pi_1, \underbrace{\langle \pi_2\cdot\pi_2, \pi_2\cdot id\rangle}_{(\pi_2\times id)}\rangle$$

$$\Leftrightarrow k = \langle \pi_1\cdot\pi_1, \pi_2\times id\rangle \overset{def}{\cong} \text{assocR}.$$

$$f: (A\times B)\times C \longrightarrow A\times(B\times C)$$

Do mesmo modo, temos que $g \overset{def}{=} \text{assocl} \overset{def}{=} \langle id\times\pi_1, \pi_2\cdot\pi_2\rangle$

Vamos provar:

• Podemos descobrir o tipo de g, construindo um diagrama:

$$g = \langle id \times \pi_1, \pi_2 \cdot \pi_2 \rangle \overset{def-\times}{=} \langle \langle \underbrace{\pi_1 \cdot id}_{k}, \underbrace{\pi_2 \cdot \pi_1}_{j} \rangle, \underbrace{\pi_2 \cdot \pi_2}_{h} \rangle$$

Ordem de formação: Tipo único → produto → split

(B)

$$\begin{tikzcd}
(A \times B) \times C \arrow[d, "\pi_1"'] & A \times (B \times C) \arrow[l, "iso + id"'] \arrow[dl, "id \times \pi_1"'] \arrow[d, "g"] \arrow[dr, "\pi_2 \cdot \pi_2"] \arrow[r, "\pi_2"] & (B \times C) \arrow[d, "\pi_2"] \\
(A \times B) & (A \times B) \times C \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] & C
\end{tikzcd}$$

$(\pi_1 \cdot (iso + id)) = id \times \pi_1$?

<u>Secção B</u> → cai na demonstração! Semelhante à da secção A

Logo: $g = A \times (B \times C) \longrightarrow (A \times B) \times C \cong assocl$

<u>Ex.5</u>

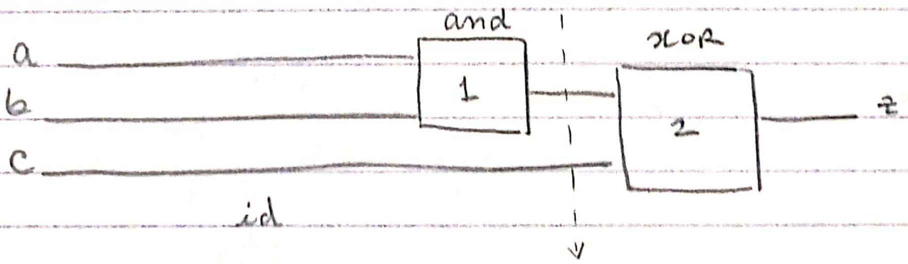
$\oplus$ operação "exclusive-OR" :

V	F	= V
V	V	= F
F	V	= V
F	F	= F

• $f((a,b),c) = (a \wedge b) \oplus c$

$f: (A \times B) \times C$, onde $f((a,b),c) \in ((A \times B) \times C)$

f é composta de 2 funções:



and × id

$$\begin{tikzcd}
& (B \times B) \times B \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dashed, "\langle f, \pi_1 \rangle"] \arrow[dr, "\pi_1"] & \\
B & (B \times B) \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & B
\end{tikzcd}$$

$f \left\{ \begin{array}{l} f: \\ (B \times B) \times B \\ \downarrow \\ and \times id \\ \downarrow \\ B \times B \\ \downarrow \; xor \cdot (and \times id) \\ B \end{array} \right.$

Ex.6

$f : (Dat \times Jog^*)^* \to (Jog \times Atl^*)^* \to (Atl \times Dat^*)^*$

$f \; db_1 \; db_2 = g\,(db_1, db_2)$

$f = uncurry\ g$

$uncurry : (A \times B^*) \times (B \times C^*) \to (A \times C^*)$

sem curried: function a b (2 argumentos)
com curried. function (a,b) (1 argumento)

$$
\begin{array}{c}
(Dat \times Jog^*)^* \times (Jog \times Atl^*)^* \\
\downarrow \; discollect \times discollect \quad ⓐ \\
(Dat \times Jog)^* \times (Jog \times Atl)^* \\
\downarrow \; uncurry\ comp \quad ⓑ \\
(Dat \times Atl)^* \\
\downarrow \; converse \quad ⓒ \\
(Atl \times Dat)^* \\
\downarrow \; collect \quad ⓓ \\
(Atl \times Dat^*)^* \\
\downarrow \; map\ (id \times SORT) \quad ⓔ \\
(Atl \times Dat^*)^* \\
\downarrow \; Sort \quad ⓕ \\
(Atl \times Dat^*)^*
\end{array}
$$

Logo, g = composta de todas estas funções.

$g = f \cdot e \cdot d \cdot c \cdot b \cdot a$

Revisão de alguns exercícios:

Ex.4 • Resolver o exercício em diagramas individuais e ir expandindo, de modo a obter o diagrama genérico.

1. $f = \langle \pi_1 \cdot \pi_1, \pi_2 \times id \rangle$ $\qquad f : (A \times B) \times C \longrightarrow (A \times C)$

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[dl, "\pi_1 \cdot \pi_2"'] \arrow[d, "f"] \arrow[dr, "\pi_2 \times id"] & \\
B & (B \times C) \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & C
\end{tikzcd}$$

2. $g = \langle id \times \pi_1, \pi_2 \cdot \pi_2 \rangle$

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[dl, "id \times \pi_1"'] \arrow[d, "g"] \arrow[dr, "\pi_2 . \pi_2"] & \\
C & (C \times B) \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & B
\end{tikzcd}$$

Obs: No split, o domínio de ambas as funções tem de ser o mesmo!

①

$$\begin{tikzcd}
(A \times B) \arrow[d, "\pi_1"'] & (A \times B) \times C \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[dl, "\pi_1 \cdot \pi_1"'] \arrow[d, "f"] \arrow[dr, "\pi_2 \times id"] & \\
A & A \times (B \times C) \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & (B \times C)
\end{tikzcd}$$

②

$$\begin{tikzcd}
(D \times E) & (D \times E) \times F \arrow[l] \arrow[d, "\pi_2 \times id"] & \\
& (D \times E) \times F \arrow[dl, "\pi_2"'] \arrow[d, "\langle \pi_2, id \rangle"] \arrow[dr, "id"] & \\
F & (E \times F) \arrow[l, "\pi_2"'] \arrow[r, "\pi_1"] & F
\end{tikzcd}$$