5. A função seguinte, em Haskell

$$sumprod\ a\ [\,] = 0$$
$$sumprod\ a\ (h : t) = a * h + sumprod\ a\ t$$

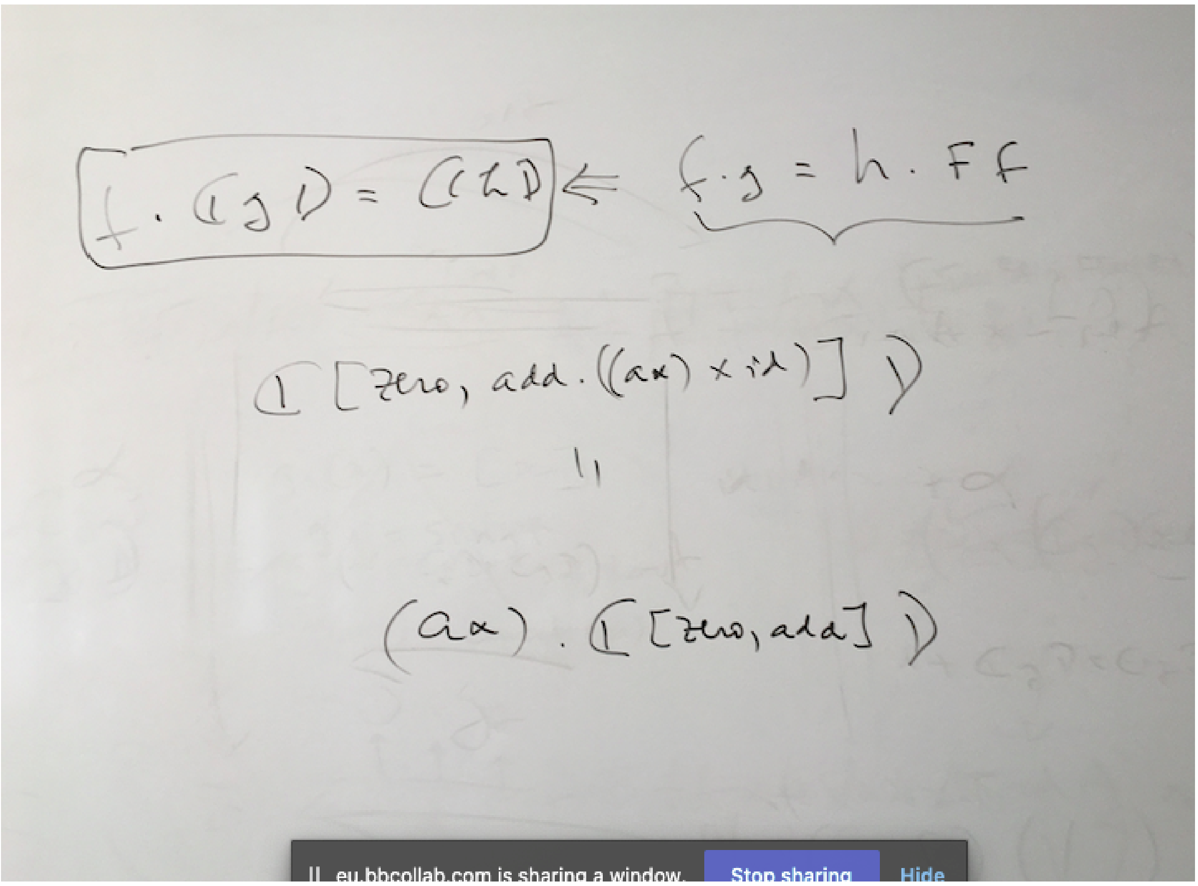
é o catamorfismo de listas

$$sumprod\ a \quad = \quad (\!|[\mathsf{zero}\ , \mathsf{add} \cdot ((a*) \times id)]|\!) \qquad \text{(F1)}$$

onde $\mathsf{zero} = \underline{0}$ e $\mathsf{add}\ (x, y) = x + y$. Mostre, como exemplo de aplicação da propriedade de **fusão-cata** para listas, que

$$sumprod\ a \quad = \quad (a*) \cdot \mathsf{sum} \qquad \text{(F2)}$$

onde $\mathsf{sum} = (\!|[\mathsf{zero}\ , \mathsf{add}]|\!)$. **NB:** não ignore propriedades elementares da aritmética que lhe possam ser úteis.




## Resolução

Mostrar que $sumprod\ a = (a*).\ sum$ é o mesmo que mostrar que $(\!|[zero, add.\ ((a*) \times id)]|\!) = (a*).\ (\!|[zero, add]|\!)$.

Ora, pela propriedade **fusão-cata, lei (48)** e considerando

$f = (a*)$; $g = [zero, add]$ e $h = [zero, add.\ ((a*) \times id)]$; $\mathbb{F}f = id + id \times f$

se conseguirmos mostrar que $f.\ g = h.\ \mathbb{F}f$ então concluimos que $f.\ (\!|g|\!) = (\!|h|\!)$.

Vamos então mostrar que

$f. g = h. \mathbb{F}f$

{ def. $f, g, h$ e $\mathbb{F}f$ }

$\equiv (a*) . [zero, add] = [zero, add . ((a*) \times id)] . (id + id \times (a*))$

{ fusão-$+$ (lei 20), absorção-$+$ (lei 22), natural-id (lei 1) }

$\equiv [(a*) . zero, (a*) . add] = [zero, add . ((a*) \times id) . (id \times (a*))]$

{ functor-$+$ (lei 25), natural-id (lei 1) }

$\equiv [(a*) . zero, (a*) . add] = [zero, add . ((a*) \times (a*))]$

{ eq-$+$ (lei 27) }

$(a*) . zero = zero$

$(a*) . add = add . ((a*) \times (a*))$

{ def. zero, igualdade extensional (lei 71), def-comp (lei 72) }

$((a*) . \underline{0})\ x = \underline{0}\ x$

$((a*) . add)\ (x, y) = (add . ((a*) \times (a*)))\ (x, y)$

{ natural-const (lei 3); def-comp (lei 72); def-$\times$ (lei 77) }

$(a*)(0) = 0$

$(a*)(add\ (x, y)) = add((a*)\ x, (a*)\ y)$

{ def. (a*); def. add }

$a * 0 = 0$

$(a*)(x + y) = add(a * x, a * y)$

{ def. (a*); def. add; 0 elemento absorvente da multiplicação; prop. distributiva }

$a * 0 = 0$

$a * (x + y) = (a * x) + (a * y)$

{ 0 elemento absorvente da multiplicação; prop. distributiva da multiplicação em relação à soma }

True

True