Resoluções dos exercícios propostos - ficha 3:

Ex. 1:

$coassocr : (A + B) + C \longrightarrow A + (B + C)$
$coassocl : A + (B + C) \longrightarrow (A + B) + C,$
onde $coassocR \cong coassocl$, pois claramente não há perda de informação, apenas uma diferença nos parêntises e associação dos pares.

$assocr = [id + i1, i2 \cdot i2]$
$assocl = ?$

vamos optar por usar um método ≠ do usual para variar as resoluções

$coassocl \cdot coassocR = id \Leftrightarrow \{Def-coassocR\}$
$\Leftrightarrow coassocl \cdot [id + i1, i2 \cdot i2] = id \Leftrightarrow \{fusão - +\}$
$\Leftrightarrow [coassocl \cdot (id + i1), coassocl \cdot (i2 \cdot i2)] = id \Leftrightarrow \{Reflexão - +\}$
$\Leftrightarrow [coassocl \cdot (id + i1), coassocl \cdot (i2 \cdot i2)] = [i1, i2] \Leftrightarrow \{Eq - +\}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} coassocl \cdot (id + i1) = i1 \\ coassocl \cdot (i2 \cdot i2) = i2 \end{cases} \Leftrightarrow \{Def - +\}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} coassocl \cdot [i1 \cdot id, i2 \cdot i1] = i1 \\ coassocl \cdot (i2 \cdot i2) = i2 \end{cases} \Leftrightarrow \{natural - id\}\ \{fusão - +\}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} [coassocl \cdot i1, coassocl \cdot (i2 \cdot i1)] = i1 \\ coassocl \cdot (i2 \cdot i2) = i2 \end{cases} \Leftrightarrow \{Universal - +\}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} i1 \cdot i1 = coassocl \cdot i1 \\ i1 \cdot i2 = coassocl \cdot (i2 \cdot i1) \\ coassocl \cdot (i2 \cdot i2) = i2 \end{cases} \Leftrightarrow \{assoc-comp\}.$

$\Leftrightarrow \begin{cases} coassocl \cdot i1 = i1 \cdot i1 \\ (coassocl \cdot i2) \cdot i1 = i1 \cdot i2 \\ (\underbrace{coassocl \cdot i2}_{k}) \cdot i2 = i2 \end{cases}$ aplicar lei universal $\{Universal - +\}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} coassocl \cdot i1 = i1 \cdot i1 \\ [i1 \cdot i2, i2] = (coassocl \cdot i2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overbrace{coassocl}^{k} \cdot i1 = i1 \cdot i1 \\ \underbrace{coassocl}_{k} \cdot i2 = [i1 \cdot i2, i2] \end{cases} \Leftrightarrow \{Universal - +\}$

$\Leftrightarrow coassocl = [i1 \cdot i1, [i1 \cdot i2, i2]] \Leftrightarrow \{natural - id\}$
$\Leftrightarrow coassocl = [i1 \cdot i1, [i1 \cdot i2, i2 \cdot id]] \Leftrightarrow \{Def - +\}$
$\Leftrightarrow coassocl = [i1 \cdot i1, (i1 + id)]$

Para exprimir coassocl como um combinador diferente de "either", considere o seguinte diagrama sobre os seus respetivos tipos:

αr = coassocr = [id + i1, i2 · i2]
αl = coassocl = [f, [g, h]] (visto no ex anterior)

$$
\begin{tikzcd}
(A+B) \arrow[r, "i_1"] \arrow[dr, "id + i_1"'] & (A+B)+C \arrow[d, "\alpha r"] & C \arrow[l, "i_2"'] \arrow[dl, "i_2 \cdot i_2"] \\
A \arrow[r, "i_1"] \arrow[dr, "f"'] & A+(B+C) \arrow[d, "\alpha l"] & (B+C) \arrow[l, "i_2"'] \arrow[dl, "{[g, h]}"] \\
& (A+B)+C &
\end{tikzcd}
$$

Obs 1. Como se verifica, os tipos do diagrama vão ao encontro dos que constam no enunciado;
2. Podemos definir esta função em Haskell sem recorrer ao combinador "either";
3. Segue-se essa implementação:

```
-- point free

coassocl PF :: either (i1, i1)(i2 -|- id)

-- point-wise

coassocl PW (Left a) = Left ( Left a)
(coassocl PW (Left a) = Left . Left $ a )
coassocl PW (Right (Left a)) = Left (Right a)
coassocl PW (Right (Right a)) = Right (Right a) = Right a
```

Em haskell, verificamos que coassocl = coassoclPW
--:t

Left a → Right(Left a) do mesmo modo!

Onde, CoassoclPW :: A + (B + C) → (A + B) + C

Right(Right a) = Right a

Ex.2.

Demonstrar a igualdade $\overbrace{\underline{(b, a)}}^{k} = \underline{\langle b, a \rangle}$

$\downarrow$

uncurried

$$\underline{(b, a)} = \underline{\langle b, a \rangle} \Leftrightarrow \{ \text{universal} - \times \}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \pi_1 \cdot \overline{(b, a)} = \underline{b} \\ \pi_2 \cdot \underline{(b, a)} = \underline{a} \end{cases} \quad \{ \text{fusão - const} \} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \pi_1 (\underline{b, a}) = \underline{b} \\ \pi_2 (\underline{b, a}) = \underline{a} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \underline{b} = \underline{b} \\ \underline{a} = \underline{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{True} \\ \text{True} \end{cases} \Leftrightarrow \text{True} \quad \{ \text{Prop. reflexiva Igualdade} \}$$

NOTA (b, a) é o formato uncurried, relembre-se as 2 funções que podem atuar sobre argumentos em dois formatos diferentes:

1. $\text{curry } f \ a \ b = f(a, b)$

&

2. $\text{uncurry } g \ (a, b) = g \ a \ b$

Ex. 3

Pretende-se partir de F2 e obter F3 ou demonstrar F2 = F3.

$$\overbrace{xr \cdot \langle\langle f, g \rangle, h \rangle = \langle\langle f, h \rangle, g \rangle}^{k} \quad (F2) \quad \Leftrightarrow \{ \text{Universal} - \times \}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \pi_1 \cdot (xr \cdot \langle\langle f, g \rangle, h \rangle) = \langle f, h \rangle \\ \pi_2 \cdot (xr \cdot \langle\langle f, g \rangle, h \rangle) = g \end{cases} \Leftrightarrow \{ \text{Universal} - \times \}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \pi_1 \cdot (\pi_1 \cdot (xr \cdot \langle\langle f, g \rangle, h \rangle) = f \\ \pi_2 \cdot (\pi_1 \cdot (xr \cdot \langle\langle f, g \rangle, h \rangle) = h \\ \pi_2 \cdot (xr \cdot \langle\langle f, g \rangle, h \rangle) = g \end{cases}$$

* Conseguimos obter as funções f, h e g, MAS estão em formatos muito complexos para irmos substituir!

* vamos procurar outro método!

NOTA Nem sempre a primeira abordagem é a mais correta. Neste caso, vamos optar por uma nova estratégia!

Pela definição de split, f, g e h partilham o mesmo domínio:

$A \xrightarrow{f} B$

$A \xrightarrow{g} C$

$A \xrightarrow{h} D$

$$xr \cdot id = \langle\langle f, h\rangle, g\rangle \Leftrightarrow \{\text{assume-se que } \langle\langle f, g\rangle, h\rangle \text{ é a função identidade}\}$$

$$\Leftrightarrow \langle\langle f, g\rangle, h\rangle = id \Leftrightarrow \{\text{Universal-}\times\}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \pi_1 \cdot id = \langle f, g\rangle \\ \pi_2 \cdot id = h \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \pi_1 = \langle f, g\rangle \\ \pi_2 = h \end{cases} \overset{\{U\text{-}\times\}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \pi_1 \cdot \pi_1 = f \\ \pi_2 \cdot \pi_1 = g \\ \pi_2 = h \end{cases}$$

MAS, substituindo cada uma das funções:

$$xr \cdot id = \langle\langle f, h\rangle, g\rangle \Leftrightarrow \{\text{Natural-id}\}$$

$$\Leftrightarrow xr = \langle\langle f, h\rangle, g\rangle \Leftrightarrow \{\text{Def-f; Def-g; Def-h}\}$$

$$\Leftrightarrow xr = \langle\langle \pi_1 \cdot \pi_1, \pi_2\rangle, \pi_2 \cdot \pi_1\rangle \Leftrightarrow \{\text{Natural-id}\}$$

$$\Leftrightarrow xr = \langle\langle \pi_1 \cdot \pi_1, id \cdot \pi_2\rangle, \pi_2 \cdot \pi_1\rangle \Leftrightarrow \{\text{Def-}\times\}$$

$$\Leftrightarrow xr \; \langle (\pi_1 \times id), \pi_2 \cdot \pi_1\rangle$$

NOTA Poderíamos optar por desenhar os diagramas que identificam os tipos de cada função, como se segue; Vamos desenhar os diagramas do lado direito e do lado esquerdo, confrontando-os:

$\langle f, g\rangle : A \to (B \times C)$

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl, "\langle f,g\rangle"'] \arrow[d, "\langle\langle f,g\rangle,h\rangle"] \arrow[dr, "h"] & \\
{}^{*}(B \times C) & (B \times C) \times D \arrow[l, "\pi_2"'] \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "xr"] & D \\
 & \ldots & \\
 & ? &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & {}^{*}A \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "\langle f,g\rangle"] \arrow[dr, "g"] & \\
B \arrow[r, "\pi_1"] & (B \times C) & C \arrow[l, "\pi_2"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl, "\langle f,h\rangle"'] \arrow[d, "\langle\langle f,h\rangle,g\rangle"] \arrow[dr, "g"] & \\
B \times D & (B \times D) \times C \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & C
\end{tikzcd}$$

∴ Assim, se um lado é igual ao outro, tem-se: $(B \times C) \times D \to (B \times D) \times C$: **xr**

↓

Diagrama final:

$$\begin{tikzcd}
 & (B \times C) \times D \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[dl, "\pi_1 \times id"'] \arrow[d, "xr"] \arrow[dr, "\pi_2 \cdot \pi_1"] & (B \times C) \arrow[d, "\pi'_2"] \\
(B \times D) & (B \times D) \times C \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & C
\end{tikzcd}$$

Então, chegamos à nossa definição de xr, pela utilização do diagrama:

$$xr = \langle \pi_1 \times id, \pi_2 \cdot \pi_1 \rangle$$

Ex.4

· Exprimir undistl sob a forma de um split de alternativas, ou seja, algo da forma: $\langle [f,g], [h,j] \rangle$!

$undistl = [i_1 \times id, i_2 \times id] \Leftrightarrow$ {Def-x}
$undistl = [\langle i_1 \cdot \pi_1, id \cdot \pi_2 \rangle, \langle i_2 \cdot \pi_1, id \cdot \pi_2 \rangle] \Leftrightarrow$ {natural-id}
$undistl = [\langle i_1 \cdot \pi_1, \pi_2 \rangle, \langle i_2 \cdot \pi_1, \pi_2 \rangle] \Leftrightarrow$ {lei da troca}
$undistl = \langle [i_1 \cdot \pi_1, i_2 \cdot \pi_1], [\pi_2, \pi_2] \rangle \Leftrightarrow$ {Def-+}
$undistl = \langle \pi_1 + \pi_1, [\pi_2, \pi_2] \rangle$
point-wise version:
(undistl (i1 (5, "A")) = (i1 5, "A"))

Ex.5

As definições condicionais são do tipo:

$$h\,x = \text{if } p\,x \text{ then } f\,x \text{ else } g\,x$$
$$(p \rightarrow f)$$

Condicional de McCarthy

$$p \rightarrow f, g = [f, g] \cdot p?$$

Pretende-se demonstrar a 2ª lei deste Condicional a partir desta.

$(p \rightarrow f, g) \cdot h =$ {Def-Cond.}
$= ([f, g] \cdot p?) \cdot h =$ {assoc-comp}
$= [f, g] \cdot (p? \, h) =$ {natural-guarda} {assoc-comp}
$= ([f, g] \cdot (h + h)) \cdot (p \cdot h)? =$ {Absorção-+}
$= [f \cdot h, g \cdot h] \cdot (p \cdot h)? =$ {def-Cond}
$= (p \cdot h) \rightarrow (f \cdot h), (g \cdot h)$

NOTA Diagramas que envolvem estes condicionais são, normalmente, mais complexos. Logo, a abordagem é sempre optar pela utilização das leis.

Ex. 6 Nestas demonstrações, normalmente, temos 3 estratégias:

1. Progredir da direita para esquerda;
2. Progredir da esquerda para a direita;
3. Progredir usando ambos os lados.

(F4) $p \to k, k = k$
(F5) $(p? + p?) \cdot p? = (i_1 + i_2) \cdot p?$

(a) A estratégia é ir do membro da equação mais complexo para o outro membro, utilizando leis que fazem "desaparecer":

$$\langle (p \to f, h), (p \to g, i) \rangle = p \to \langle f, g \rangle, \langle h, i \rangle$$

$\langle p \to f, h), (p \to g, i) \rangle = \{ \text{def - C. McCarthy} \}$
$= \langle [f, h] \cdot p?, [g, i] \cdot p \rangle = \{ \text{Fusão - x} \}$
$= \langle [f, h], [g, i] \rangle \cdot p? = \{ \text{lei da troca} \}$
$= [\langle f, g \rangle, \langle h, i \rangle] \cdot p? = \{ \text{Def. Cond. McCarthy} \}$
$= p \to \langle f, g \rangle, \langle h, i \rangle$

(b)

$$\langle f, (p \to g, h) \rangle = p \to \langle f, g \rangle, \langle f, h \rangle$$

$\{ \text{Def. C. McCarthy} \}$ $\{ \text{F4} \}$
$\langle f, (p \to g, h) \rangle = \langle f, [g, h] \cdot p? \rangle =$
$= \langle (p \to f, f), [g, h] \cdot p? \rangle = \{ \text{Cond. McCarthy} \}$
$= \langle [f, f] \cdot p?, [g, h] \cdot p? \rangle = \{ \text{Fusão - x} \}$
$= \langle [f, f], [g, h] \rangle \cdot p? = \{ \text{lei da troca} \}$
$= [\langle f, g \rangle, \langle f, h \rangle] \cdot p? = \{ \text{Def. Cond} \}$
$= p \to \langle f, g \rangle, \langle f, h \rangle.$

(c)

$$p \to (p \to a, b), (p \to c, d) = p \to a, d$$

$p \to (p \to a, b), (p \to c, d) = \{ \text{Def. Cond Mc} \}$
$[a, b] \cdot p?, [c, d] \cdot p?] \cdot p? = \{ \text{Absorção} \}$
$= [[a, b], [c, d]] \cdot (p? + p) \cdot p? = \{ \text{F5} \}$
$= [[a, b], [c, d]] \cdot (i_1 + i_2) \cdot p? = \{ \text{Absorção} \}$
$= [[a, b] \cdot \underline{i_1}, [c, d] \cdot \underline{i_2}] \cdot p? = \{ \text{Cancelamento} \}$
$= [a, d] \cdot p? = \{ \text{Def. Cond McCarthy} \}$
$= p \to a, d$

Alguns Alpetos Importantes Exercício 1:

Ex. 1

No exercício 1 já resolvido optamos pela resolução através de um diagrama, mas definir coassocl através de um combinador que não um "either" poderia ser feito utilizando as leis do CP, como se segue:

1.b.

$coassocl \cdot coassocR = id \Leftrightarrow \{ Def - coassocR \}$

$\Leftrightarrow coassol \cdot [id + i1, i2 \cdot i2] = id \Leftrightarrow \{ Fusão - + \}$

$\Leftrightarrow [coassocl \cdot (id + i1), coassocl \cdot (i2 \cdot i2)] = id \Leftrightarrow \{ Universal - + \}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} id \cdot i1 = coassocl \cdot (id + i1) \\ id \cdot i2 = coassocl \cdot (i2 \cdot i2) \end{cases} \Leftrightarrow \{ Natural - id \}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} coassocl \cdot (id + i1) = i1 \\ coassocl \cdot (i2 \cdot i2) = i2 \end{cases} \Leftrightarrow \{ Def - + \}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} coassocl \cdot [i1 \cdot id, i2 \cdot i1] = i1 \\ coassocl \cdot (i2 \cdot i2) = i2 \end{cases} \Leftrightarrow \{ Natural - id \}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} coassocl\ [i1, i2 \cdot i1] = i1 \\ coassocl \cdot (i2 \cdot i2) = i2 \end{cases} \Leftrightarrow \{ Fusão - + \}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} [coassocl \cdot i1, coassocl \cdot (i2 \cdot i1)] = i1 \\ coassocl \cdot (i2 \cdot i2) = i2 \end{cases} \Leftrightarrow \{ Universal - + \}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} i1 \cdot i1 = coassocl \cdot i1 \\ i1 \cdot i2 = coassocl \cdot (i2 \cdot i1) \\ coassocl \cdot (i2 \cdot i2) = i2 \end{cases} \Leftrightarrow \{ Igualdade\ Ext \}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} coassocl \cdot i1\ x_A = (i1 \cdot i1)\ x_A \\ coassocl \cdot (i2 \cdot i1)\ x_B = (i1 \cdot i2)\ x_B \\ coassocl \cdot (i2 \cdot i2)\ x_C = i2\ x_C \end{cases} \Leftrightarrow \{ Def. assoc - comp \}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} coassocl\ (i1\ x_A) = i1\ (i1\ x_A) \\ coassocl\ (i2\ (i1\ x_B)) = i1\ (i2\ x_B) \\ coassocl\ (i2\ (i2\ x_C)) = i2\ x_C \end{cases}$

Ex. 7 Demonstração de $in = [\underline{0}, succ]$

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "i_1"] \arrow[dr, "\underline{0}"'] & 1+\mathbb{N}_0 \arrow[d, "{[\underline{0}, succ]}"] & \mathbb{N}_0 \arrow[l, "i_2"'] \arrow[dl, "succ"] \\ & \mathbb{N}_0 & \end{tikzcd}$$

$succ\ n = n + 1$

Logo: $in = [\underline{0}, succ]$

1 :: Haskell :: $()$

Cálculo da Inversa de in: tendo-se: $\begin{cases} out\ 0 = i_1 () \\ out (n+1) = i_2\ n \end{cases}$

in e out são inversas, logo:

$out \cdot in = id \Leftrightarrow \{\text{Def-in}\}$

$\Leftrightarrow out \cdot [\underline{0}, succ] = id \Leftrightarrow \{\text{Reflexão-+}\}$
$\Leftrightarrow out \cdot [\underline{0}, succ] = [i_1, i_2] \Leftrightarrow \{\text{Fusão-+}\}$
$\Leftrightarrow [out \cdot \underline{0}, out \cdot succ] = [i_1, i_2] \Leftrightarrow \{\text{Eq-+}\}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} out \cdot \underline{0} = i_1 \\ out \cdot succ = i_2 \end{cases} \Leftrightarrow \{\text{Igualdade Ext}\}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (out \cdot \underline{0})\ n = i_1 () \\ (out \cdot succ)\ n = i_2\ n \end{cases} \Leftrightarrow \{\text{Def-assoc-comp; Def-comp}\}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} out\ (\underline{0}\ n) = i_1 () \\ out\ (succ\ n) = i_2 n \end{cases} \Leftrightarrow \{\text{Def-const; Def-succ}\}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} out\ 0 = i_1 () \\ out (n+1) = i_2 n \end{cases}$

Conclusão:

· in e out são inversas uma da outra e, como tal, são isomorfismos. Ambas transformam elementos de $1 + \mathbb{N}_0$ em elementos de $\mathbb{N}_0$ e vice-versa, sem qualquer perda de informação.

NOTA Quando nos perguntam se 2 funções são isomorfismos, podemos tentar obter uma a partir da outra e caso $f \cdot g = id$, com f e g inversas.