Cálculo de Programas

2.° ano
Lic. Ciências da Computação e Mestrado Integrado em Engenharia Informática
UNIVERSIDADE DO MINHO

2020/21 - Ficha nr.° 4

1. Recorde a função

$$\mathsf{ap} : (C^B \times B) \to C$$
$$\mathsf{ap}\ (f, x) = f\ x$$

(a) Mostre, através da adição de variáveis, que a função f definida a seguir

$$f\ k = \mathsf{ap} \cdot (k \times id)$$

é a função

$$\mathsf{uncurry} :: (a \to b \to c) \to (a, b) \to c$$
$$\mathsf{uncurry}\ f\ (a, b) = f\ a\ b$$

disponível em Haskell.

(b) Mostre que a igualdade

$$\mathsf{ap} \cdot (\mathsf{curry}\ f \times id) = f \tag{F1}$$

corresponde à definição $\mathsf{curry}\ f\ a\ b = f\ (a, b)$ da função $\mathsf{curry} :: ((a, b) \to c) \to a \to b \to c$ também disponível em Haskell.

In [1]:

```haskell
-- loading Cp.hs

:load ../src/Cp.hs

:t curry
:t uncurry

add x y = x + y
:t add

add' (x,y) = x + y
:t add'

:t add 2

(add 2) 9
```

```
curry :: forall a b c. ((a, b) -> c) -> a -> b -> c

uncurry :: forall a b c. (a -> b -> c) -> (a, b) -> c

add :: forall a. Num a => a -> a -> a

add' :: forall a. Num a => (a, a) -> a

add 2 :: forall a. Num a => a -> a

11
```

Resolução (a)

$f\ k = ap . (k \times id)$

{ pointwise, **lei (71)** }

$\equiv (f\ k)\ (a, b) = (ap . (k \times id))\ (a, b)$

{ def-comp, **lei (72)** }

$\equiv (f\ k)\ (a, b) = ap\ ((k \times id)\ (a, b))$

{ def-$\times$, **lei (77)** }

$\equiv (f\ k)\ (a, b) = ap\ (k\ a, id\ b)$

{ natural-id, **lei (1)** }

$\equiv (f\ k)\ (a, b) = ap\ (k\ a, b)$

{ def-ap, **lei (82)** }

$\equiv (f\ k)\ (a, b) = k\ a\ b$

{ def. uncurry, **lei (84)** }

$\equiv (f\ k)\ (a, b) = \hat{k}\ (a, b)$

{ igualdade extensional (pointfree), **lei (71)** }

$\equiv (f\ k) = \hat{k}$

$f = uncurry$

Haskell

In [2]:

```
f k = ap . (k >< id)

-- type checking

:t f
:t uncurry
```

```
f :: forall a1 a2 c. (a1 -> a2 -> c) -> (a1, a2) -> c
uncurry :: forall a b c. (a -> b -> c) -> (a, b) -> c
```

Resolução (b)

$ap . (curry\ f \times id) = f$

{ pointwise, **lei (71)** }

$\equiv (ap . (curry\ f \times id))\ (a, b) = f\ (a, b)$

{ def-comp, **lei (72)**; def-$\times$, **lei (77)** }

$\equiv ap\ ((curry\ f)\ a, id\ b) = f\ (a, b)$

{ natural-id, **lei (1)** }

$$\equiv ap\ ((curry\ f)\ a, b) = f\ (a, b)$$

{ def-ap, **lei (82)** }

$$\equiv (curry\ f)\ a\ b = f\ (a, b)$$

{ def. curry, **lei (83)** }

$$\equiv (curry\ f)\ a\ b = \overline{f}\ a\ b$$

{ igualdade extensional (pointfree), **lei (71)** }

$$\equiv (curry\ f) = \overline{f}$$