Resolução dos exercícios propostos - Ficha 5:

Ex. 1

(a) $A + A \cong (1+1) \times A \cong 2 \times A$ (Isomorfismos)

$$\begin{tikzcd}
 & A + A \arrow[dl, "! + !"'] \arrow[d, "iso"] \arrow[dr, "{[id, id]}"] & \\
1 + 1 & (1+1) \times A \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] & A
\end{tikzcd}$$

(b) Olhamos para expressão e vemos que temos um split de either's, saltando à vista a lei da troca. Logo, aplica-se também nessa tal propriedade grátis.

$(id \times f) . iso = iso . (f + f)$ (Diagrama de demonstração)

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "f"] & A + A \arrow[r, "iso"] \arrow[d, "f + f"] & (1+1) \times A \arrow[d, "id \times f"] \\
B & B + B \arrow[r, "iso"'] & (1+1) \times B
\end{tikzcd}$$

- $iso = \langle [!+!], [id, id] \rangle$, então pela lei da troca, tem-se:

(1) $iso = [\langle i_1 \cdot !, i_2 \cdot ! \rangle, [id, id]\rangle$

(2) $iso = [\langle i_1 \cdot !, id \rangle, \langle i_2 \cdot !, id \rangle]$

Vamos, assim, mostrar a propriedade: (c)

$(id \times f)\ iso = iso \cdot (f + f) \Leftrightarrow \{ def\text{-}\times ;\ def\text{-}+ \}$

$\Leftrightarrow \langle id \cdot \pi_1, f \cdot \pi_2 \rangle \cdot iso = iso \cdot [i_1 \cdot f, i_2 \cdot f] =$

$\{ fusão\text{-}\times,\ fusão\text{-}+ \}$

$\Leftrightarrow \langle id \cdot \pi_1 \cdot iso, f \cdot \pi_2 \cdot iso \rangle = [iso \cdot i_1 \cdot f, iso \cdot i_2 \cdot f] \Leftrightarrow$

$\{ cancelamento\text{-}\times ;\ Def - \pi_1 \cdot iso = [i_1 \cdot !, i_2 \cdot !];\ \pi_2 \cdot iso = [id, id] \}$

$\Leftrightarrow \langle id \cdot [i_1 \cdot !, i_2 \cdot !], f \cdot [id \cdot id] \rangle = [iso \cdot i_1 \cdot f, iso \cdot i_2 \cdot f] \Leftrightarrow$

$\{ cancelamento\text{-}+ ;\ iso \cdot i_1 = \langle i_1 \cdot !, id \rangle;\ iso \cdot i_2 = \langle i_2 \cdot !, id \rangle \}$

$\Leftrightarrow \langle id \cdot [i_1 \cdot !, i_2 \cdot !], f \cdot [id, id] \rangle = [\langle i_1 \cdot !, id \rangle \cdot f, \langle i_2 \cdot !, id \rangle \cdot f]$

{ natural - id ; fusão - × ; fusão - + }

$\Leftrightarrow \langle [i_1 \cdot !, i_2 \cdot !], [f, f] \rangle = [\langle i_1 \cdot ! \cdot f, f \rangle, \langle i_2 \cdot ! \cdot f, f \rangle]$

{ def ! = () ; natural - const }

$\Leftrightarrow \langle [i_1 \cdot !, i_2 \cdot !], [f, f] \rangle = [\langle i_1 \cdot !, f \rangle, \langle i_2 \cdot !, f \rangle]$

{ lei da troca }

$\Leftrightarrow [\langle i_1 \cdot !, f \rangle, \langle i_2 \cdot !, f \rangle] = [\langle i_1 \cdot !, f \rangle, \langle i_2 \cdot !, f \rangle]$

(d) Demonstrar propriedade a partir de $iso = \langle ! + !, [id, id] \rangle$

$iso = \langle ! + !, [id, id] \rangle \Leftrightarrow$ { Def - + }

$\Leftrightarrow iso = \langle [i_1 \cdot !, i_2 \cdot !], [id, id] \rangle \Leftrightarrow$ { lei da troca }

$\Leftrightarrow iso = [\langle i_1 \cdot !, id \rangle, \langle i_2 \cdot !, id \rangle] \Leftrightarrow$ { universal - +, $K = iso$ }

$\Leftrightarrow \begin{cases} iso \cdot i_1 = \langle i_1 \cdot !, id \rangle \\ iso \cdot i_2 = \langle i_2 \cdot !, id \rangle \end{cases} \Leftrightarrow$ { Igualdade extensional }

$\Leftrightarrow \begin{cases} (iso \cdot i_1)\ a = \langle i_1 \cdot !, id \rangle\ a \\ (iso \cdot i_2)\ b = \langle i_2 \cdot !, id \rangle\ b \end{cases} \Leftrightarrow$ { def - comp ; def - split }

$\Leftrightarrow \begin{cases} iso\ (i_1 a) = ((i_1 \cdot !) a, id\ a) \\ iso\ (i_2 a) = ((i_2 \cdot !) b, id\ b) \end{cases} \Leftrightarrow$ { natural - id, def - comp }

$\Leftrightarrow \begin{cases} iso (i_1 a) = (i_1 (! a), a) \\ iso (i_2 b)\ (i_2 (! b), b) \end{cases} \Leftrightarrow$ { def ! = () }

$\Leftrightarrow \begin{cases} iso\ (i_1\ a) = (i_1 (), a) \\ iso\ (i_2\ b) = (i_2 (), b) \end{cases}$

Ex. 2

- $\alpha = (id + \pi_1) \cdot i_2 \cdot \pi_2$;
- Determinar propriedade grátis;

1º 2º 3º

- $\pi_2 : A \times B \longmapsto B$ $\quad (B) \longmapsto A \times B \longmapsto \cdots$
- $i_2 : B \longmapsto A \times B$
- $id : A \longmapsto A$ $\quad$ Vamos representar sob a forma de diagrama
- $\pi_1 : A \times B \longmapsto A$ $\quad$ a composição de funções em questão!

• $id + \pi_1$, sendo um Coproduto (Soma de funções). Temos: $A+B \to C+D$;
a função vai de uma soma para uma soma;
• Podemos começar por compor:

①

$\underline{\pi_2}$ $\quad A \times B \to B$

$\underline{i_2}$ $\quad B \to$ O resultado da injeção tem de ser o que $id + \pi_1$ recebe, logo tem de ser uma soma, logo:

$D + B$

$\underline{id + \pi_1}$ ↓ obriga que o nosso "B", tenha de ser um par $\quad D + (1^{\text{º}}$ elemento do par$)$

②

$$\begin{tikzcd} A \times (B \times C) \arrow[d, "\pi_2"] \arrow[ddd, bend left, "\alpha"] \\ B \times C \arrow[d, "i_2"] \\ D + (B \times C) \arrow[d, "id + \pi_1"] \\ D + B \end{tikzcd}$$

Inferir propriedade grátis: (natural): $(f+g) \cdot \alpha = \alpha \cdot (h \times (g \times i))$

• A propriedade natural é similar às "naturais", do género:

i) natural i_1: $(i+j) \cdot \underline{i_1} = \underline{i_1} \cdot i$

ii) natural i_2: $(i+j)\, \underline{i_2} = \underline{i_2} \cdot j$

$$\begin{tikzcd} A \times (B \times C) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "h \times (g \times i)"'] & D + B \arrow[d, "f+g"] \\ A' \times (B' \times C') \arrow[r, "\alpha"'] & D' + B' \end{tikzcd}$$

① ②

$$\begin{tikzcd} D \arrow[d, "f"] & B \arrow[d, "g"] \\ D' & B' \end{tikzcd}$$

$\left.\right\}$ $f \neq id$ e $g \neq id$ pois $D \neq D'$ e $B \neq B'$

∴ Seguindo o caminho percorrido pela seta, compõem-se: $(1) = (2)$

① $(f+g) \cdot \alpha = \alpha \cdot (h \times (g \times i))$ ②

<u>Ex. 3</u>

• Demonstração da propriedade: $(f+g) \cdot \alpha = \alpha \cdot (h \times (g \times i))$, com auxílio do diagrama realizado

$(f+h)\cdot\alpha = \alpha\cdot(f+g\times h) \Leftrightarrow$ { def α }

$\Leftrightarrow (f+h)\cdot(id+\pi_2) = (id+\pi_2)\cdot(f+g\times h) \Leftrightarrow$ { functor $-+$ }

$\Leftrightarrow (f\cdot id)+(h\cdot\pi_2) = (id\cdot f)+(\pi_2\cdot(g\times h)) \Leftrightarrow$ { naturais: id e π_2 }

$\Leftrightarrow f+(h\cdot\pi_2) = f+(\pi_2\cdot(g\times h)) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f+(h\cdot\pi_2) = f+(h\cdot\pi_2)$.

Ex. 4

- $\alpha\cdot g = h \equiv g = \alpha^\circ\cdot h \rightsquigarrow h\cdot distr\cdot(g\times(id+\alpha)) = k$
- $g\cdot\alpha = h \equiv g = h\cdot\alpha^\circ$

$\quad\quad ||$

$h\cdot(g\times id + g\times\alpha) = h\cdot$ undista

$h\cdot distr\cdot(g\times(id+\alpha)) = k \Leftrightarrow$ { isomorfismo α }

$\Leftrightarrow h\cdot(g\times(id+\alpha)) = k\cdot distr^\circ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow h\cdot(g\times(id+\alpha)) = k\cdot undistr \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow h\cdot((g\times id)+(g\times\alpha)) = k\cdot undistr \Leftrightarrow$ { Advém da propriedade Grátis }

prop. Grátis: $(f\times g)+f\times h)\cdot distr = distr\cdot(f\times(g+h))$

NOTA: como obter propriedade grátis? (ver final da resolução)

Ex.5:

(1) • $\nabla\cdot i_1 = id$ $\rightarrow$ MOSTRAR prop natural $f\cdot\nabla = \nabla\cdot(f+f)$

(2) • $\nabla\cdot i_2 = id$

$f\cdot\nabla = \nabla\cdot(f+f) \Leftrightarrow$ { def $-+$ }

$\Leftrightarrow f\cdot\nabla = \nabla\cdot[i_1\cdot f, i_2\cdot f] \Leftrightarrow$ { fusão $-+$ }

$\Leftrightarrow f\cdot\nabla = [\nabla\cdot i_1\cdot f, \nabla\cdot i_2\cdot f] \Leftrightarrow$ { def $-\nabla$ } (1) e (2)

$\Leftrightarrow f\cdot\nabla = [id\cdot f, id\cdot f] \Leftrightarrow$ { natural-id }

$\Leftrightarrow f\cdot\nabla = [f, f] \Leftrightarrow$ { Universal $-+$ }

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f\cdot\nabla\cdot i_1 = f \\ f\cdot\nabla\cdot i_2 = f \end{cases} \underset{(1)\,e\,(2)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} f\cdot id = f \\ f\cdot id = f \end{cases} \underset{\{natural\text{-}id\}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} f = f \\ f = f \end{cases} \underset{\{reflex.\ igual\}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} True \\ True \end{cases}$$

Ex.6

- $k = (|g|) \equiv k\cdot in = g\cdot(id+k)$
- MOSTRAR : $for\ b\ i = (|[i, b]|) \rightsquigarrow \begin{cases} for\ b\ i\ 0 = i \\ for\ b\ i\ (n+1) = b\ (for\ b\ i\ n) \end{cases}$

NOTA es combinador ciclo-for é facilmente entendido:

1) b é o corpo do ciclo for (uma função, p. ex);
2) i é o valor da inicialização da variável de controlo;
3) sob este ciclo podemos iterar m vezes
4) Assim, tem-se $f^m i$, f é iterado m vezes sob o valor inicial i.

Ponto de partida: $\text{for } b\, i = (\![\underline{i}, b]\!)$

Ponto de chegada: $\begin{cases} \text{for } b\, i\, 0 = i \\ \text{for } b\, i\, (m+1) = b(\text{for } b\, i\, m) \end{cases}$

$\overbrace{\text{for } b\, i}^{K} = (\![\underline{i}, b]\!) \Leftrightarrow$ { Prop. Universal do combinador }

$\Leftrightarrow (\text{for } b\, i) \cdot in = [\underline{i}, b] \cdot (id + (\text{for } b\, i)) \Leftrightarrow$ { def. $in = [zero, succ]$ }

$\Leftrightarrow (\text{for } b\, i) \cdot [zero, succ] = [\underline{i}, b] \cdot (id + (\text{for } b\, i)) \Leftrightarrow$

{ def. Fusão-+, Absorção-+ }

NOTA 1 Agora, podemos juntar o "for b i" para dentro dos parênteses e aplicar o mesmo ao outro membro

$\Leftrightarrow [(\text{for } b\, i) \cdot zero, (\text{for } b\, i) \cdot succ] = [\underline{i} \cdot id, b \cdot (\text{for } b\, i)] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ { eq-+, natural-id }

$\Leftrightarrow \begin{cases} (\text{for } b\, i) \cdot zero = \underline{i} \\ (\text{for } b\, i) \cdot succ = b \cdot (\text{for } b\, \underline{i}) \end{cases} \Leftrightarrow$ { Igualdade Extensional }

$\Leftrightarrow \begin{cases} ((\text{for } b\, i) \cdot (zero)\, m) = \underline{i}\ m \\ ((\text{for } b\, i) \cdot (succ)\, m) = (b \cdot (\text{for } b\, i))\, m \end{cases} \Leftrightarrow$ { Def-Comp }

$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{for } b\, i\, (zero\ m) = \underline{i}\ m \\ \text{for } b\, i\, (succ\ m) = b(\text{for } b\, i\, m) \end{cases}$ { Def-zero, Def-succ, Def-const } ... $\underline{i}(m) = i$, $\underline{i}(k) = i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{for } b\, i\, 0 = i \\ \text{for } b\, i\, (n+1) = b(\text{for } b\, i\, m) \end{cases}$

NOTA 2 A função constante transforma "qualquer coisa" nessa constante!

Ex. 7

- (F4) $K = (\![g]\!) \equiv K \cdot in = g \cdot (id + K)$

Ponto de Partida: $(a+) = \text{for } succ\ a = (\![\, \underline{a}, succ \,]\!)$

Ponto de Chegada: $\begin{cases} a+0 = a \\ a+(n+1) = 1+(a+n) \end{cases}$

$(a+) = \text{for } succ\ a = (\![\, \underline{a}, succ \,]\!) \Leftrightarrow$ { eliminar membro do meio }

$\Leftrightarrow \underbrace{(a+)}_{k} = (\![\, \underline{a}, succ \,]\!) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a+) \cdot in = [\underline{a}, succ] \cdot (id + (a+)) \Leftrightarrow$ { Def - in }

$\Leftrightarrow (a+) \cdot [zero, succ] = [\underline{a}, succ] \cdot (id + (a+)) \Leftrightarrow$

{ Fusão +, absorção - + } natural - id

$\Leftrightarrow [(a+) \cdot zero, (a+) \cdot succ] = [\underline{a} \cdot (id), succ \cdot (a+)] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ { Eq - + }

$\Leftrightarrow \begin{cases} (a+) \cdot zero = \underline{a} \\ (a+) \cdot succ = succ \cdot (a+) \end{cases}$

NOTA Para aplicar a def - zero, nós usamos de argumentos! { Igualdade extensional }

$\Leftrightarrow \begin{cases} ((a+) \cdot zero)\ n = \underline{a}\ n \\ ((a+) \cdot succ)\ n = (succ \cdot (a+))\ n \end{cases}$ { def - comp }

$\Leftrightarrow \begin{cases} (a+)\ (zero\ n) = \underline{a}\ n \\ (a+)\ (succ\ n) = succ\ ((a+)\ n) \end{cases} \Leftrightarrow$ { Def - zero, Def - succ } Def - const

$\Leftrightarrow \begin{cases} a + 0 = a\ n \\ a + (n+1) = (a+n) + 1 \end{cases} \Leftrightarrow$ { Prop. Comutativa adição }

$\Leftrightarrow \begin{cases} a + 0 = a\ n \\ a + (n+1) = 1 + (a+n) \end{cases}$

EX. 8

- $f = \text{for } id\ i = g = \text{for } \underline{i}\ i = ?$ (Qual ?)

NOTA: Para provar que as funções são iguais, vamos seguir com as duas e chegar ao facto de que representam a mesma coisa. No final, o resultado das 2 funções vai ser o mesmo.

$$\begin{cases} f = \text{for } id\ \underline{i} = (\![\underline{i}, id]\!) \\ g = \text{for } \underline{i}\ i = (\![\underline{i}, \underline{i}]\!) \end{cases}$$ { definiçãp de "for" com cata! for b i = ([i, b]) }

$\Leftrightarrow$ (F4)

$$\underbrace{\begin{cases} f = (\![\underline{i}, id]\!) \equiv f \cdot in = [\underline{i}, id] \cdot (id + f) \\ g = (\![\underline{i}, \underline{i}]\!) \equiv g \cdot in = [\underline{i}, \underline{i}] \cdot (id + g) \end{cases}}_{}$$ $\Leftrightarrow$ { Def-in, Fusão-+, Absorção-+ }

Ignore-se!

$$\Leftrightarrow \begin{cases} [f \cdot \underline{0}, f \cdot succ] = [\underline{i} \cdot id, id \cdot f] \\ [g \cdot \underline{0}, g \cdot succ] = [\underline{i} \cdot id, \underline{i} \cdot g] \end{cases}$$ $\Leftrightarrow$ { natural-id, eq-+ }

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f \cdot \underline{0} = \underline{i} \ ; \ f \cdot succ = f \\ g \cdot \underline{0} = \underline{i} \ ; \ g \cdot succ = \underline{i} \end{cases}$$ $\Leftrightarrow$ { Igualdade Extensional } { Def-comp }

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (f(\underline{0}\, m) = \underline{i}\, m \ ; \ f(succ\ m) = f\, m \\ (g(\underline{0}\, m) = \underline{i}\, m \ ; \ g(succ\ m) = \underline{i}\, m \end{cases}$$ { Def-const, Def-succ }

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f\,0 = i \ ; \ f(m+1) = f\, m \\ g\,0 = i \ ; \ g(m+1) = i \end{cases}$$ $\Leftrightarrow \forall m, g\,m = i$

$\forall m, f\,m = i$ = ?

$\Leftrightarrow f = g = \underline{i} = i$ (onde $\underline{i}\, m = i$)

Ex. 9

- $\text{for } f\ i = (\![\underline{i}, f]\!) \longrightarrow$ ① $F f = id + f$ (IN)
- fusão-cata: $f \cdot (\![g]\!) = (\![h]\!) \Leftarrow f \cdot g = h \cdot F f$ ②
- Demonstrar (F5): $\text{for} \cdot (\text{for } f\ i) = \text{for } f\ (f\ i)$

$\text{for} \cdot (\text{for } f\ i) = \text{for } f\ (\overset{i}{f\ i})$ $\Leftrightarrow$ { $\text{for } f\ i = (\![\underline{i}, f]\!)$ }

$\Leftrightarrow \underbrace{\text{for} \cdot (\![\underline{i}, f]\!)}_{} = (\![\underline{f\ i}, f]\!)$ $\Leftrightarrow$ { (F4) }

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\overbrace{f \cdot (\![\underline{i}, f]\!)}^{f \quad k \quad f}) \cdot \overbrace{in}^{g} = \overbrace{[\underline{f\ i}, f]}^{h} \cdot \overbrace{(id + f}^{\cdot fF} \cdot \overbrace{(\![\underline{i}, f]\!)}^{f})$ $\Leftrightarrow$ { fusão-cata }

$\Rightarrow \underbrace{(f \cdot (\![\underline{i}, f]\!))}_{f} \cdot \underbrace{(\![in]\!)}_{(\![g]\!)} = \underbrace{(\![\underline{f\ i}, f]\!)}_{(\![h]\!)}$ $\Leftrightarrow$ { reflexão-cata } { natural-id }

$\Rightarrow (f \cdot (\![\underline{i}, f]\!)) = (\![\underline{f\ i}, f]\!)$ $\Leftrightarrow$ { $\text{for } f\ i = (\![\underline{i}, f]\!)$ }

$\Rightarrow f \cdot \text{for } f\ i = \text{for } f\ (f\ i)$

Ⓐ

NOTA Provamos que $\overbrace{f \cdot (\text{for } f\, i) = \text{for } f\,(f\, i)}^{A}$, com as propriedas (a) e (b), ou seja, começamos com Ⓐ, e terminamos com a mesma coisa, Ⓐ, MAS utilizamos a propriedades pedidas.

Ex.10

· $K = \text{for } f\ i$ ⇒

```
int K(int m){
   int R=i; int j; ~~int~~
   for (j=1; j<m+1; j++) { R = f(R); }
   return R;
}
```

· Esumur $(a*) = \text{for } (a+)\ 0$

Resolução em código no ficheiro Ex. 10.