LISTA DE EXERCÍCIOS 7 – TRANSFORMAÇÃO LINEAR

1. Verificar se as transformações são lineares:

a) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \quad (x,y,z) \mapsto (x, 2y)$ R: Sim

b) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \quad (x,y,z) \mapsto (x - 3z + 1)$ R: Não

2. Para que valores de $k \in \mathbb{R}$ a transformação no $\mathbb{R}^3$ tal que $T(x,y,z) = (2x + 3k, y, 3z)$ é linear? R: 0

3. Seja $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear tal que: $T(1,0,0) = (2,4)$, $T(0,1,0) = (3,5)$ e $T(1,1,1) = (1,1)$. Indique a lei de T. R: $T(x,y,z) = (2x + 3y - 4z,\ 4x + 5y - 8z)$

4. Seja $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear definida por: $T(1,1,1) = (1,2)$, $T(1,1,0) = (2,3)$ e $T(1,0,0) = (3,4)$.

a) Determine $T(x,y,z)$ R: $T(x,y,z) = (3x - y - z,\ 4x - y - z)$

b) Determine $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tal que $T(x,y,z) = (-3,-2)$ R: $\{(1,\ 6-k,\ k),\quad k \in \mathbb{R}\}$

c) Determine $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tal que $T(x,y,z) = (0,0)$ R: $\{(0,\ k, -k),\quad k \in \mathbb{R}\}$

5. Calcule o núcleo das transformações abaixo:

a) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \quad T(x,y,z) = (x + 2y + 3z, 3x + 2y + z)$ R: $N(T) = \{(z, -2z, z),\ z \in \mathbb{R}\}$

b) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \quad T(x,y) = (x + y, 2x - y, -x + 3y)$ R: $N(T) = \{(0,0)\}$

c) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad T(x,y,z) = (x - 3y,\ x - z,\ z - x)$ R: ($N(T) = \{k \cdot (3,1,3),\ k \in \mathbb{R}\}$

d) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \quad T(x,y,z) = (x + 2y - z, 2x - y + z$ R: $N(T) = \{(x, -3x, -5x), x \in \mathbb{R}\}$

6. Seja T a transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ determinada pela matriz $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$.

a) Indique a lei da transformação. R: $T(x,y) = (2x, 4x + 3y, -4y)$

b) Calcule $T(-2,1)$ R: $(-4, -5, -4)$

7. Seja T o operador linear no $\mathbb{R}^3$ definida por: $T(x,y,z) = (2y + z, x - 4y, 3x)$.

a) Encontre a matriz de T na base $B = \{(1,1,0), (1,0,1), (1,0,0)\}$. R: $[T]_B = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 2 & -3 & -4 \end{bmatrix}$

b) Encontre $[T(1,0,-1)]_B$ utilizando $[T]_B^B$. R: $(1, 3, -5)$

8. Seja a transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que: $T(x,y) = (2x + y,\ y,\ x + y)$. Encontre:

a) a matriz de T em relação às bases canônicas.

b) A matriz de T em relação às bases $A = \{(1,-2), (0,1)\}$ *e* $B = \{(1,0,0), (0,2,1), (0,0,3)\}$.

R: a) $[T]_B^A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ b) $[T]_B^A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1/2 \\ 0 & 1/6 \end{bmatrix}$

9. Encontre os autovalore e os autovetores para os operadores $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

a) T(x, y) = (x +2y, -x+4y) R: 3 e 2 , (a, a) , (2a, a)

b) T(x, y) = (2x +2y, x+3y) R: 1 e 4 , (-2x, x) , (x, x)

c) T(x, y) = (-3x -5y, 2y) R: 2 e -3 , (a, -a) , (a, 0)