Universidade Veiga de Almeida

Curso: Básico das engenharias

Disciplina: Cálculo Diferencial e Integral I

Professora: Adriana Nogueira

3^a Lista de Exercícios

- Nos exercícios de 1 a 4, use a definição de derivada para os cálculos.

Exercício 1: Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = x^2 + 3$ no ponto de abscissa $x = 1$.

Exercício 2: Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = \sqrt{x}$ no ponto de abscissa $x = 4$.

Exercício 3: A função posição (em metros) de uma partícula em movimento retilíneo é dada por $x(t) = 100 - 5t^2$, t em segundos. Ache sua velocidade instantânea quando $t = 1$.

Exercício 4: Após uma queda na energia elétrica, Vinícius parou de estudar Cálculo I e ficou observando o gelo de seu suco derretendo. Fez várias anotações para colocar em prática os ensinamentos de taxas de variação. Supondo que o gelo tinha forma de um cubo de aresta **a**, Vinícius constatou uma relação entre a taxa de variação do volume **V** do gelo com a taxa de variação da aresta do gelo. Qual foi a relação $\frac{dV}{da}$ encontrada por Vinícius?

- Resolva os exercícios 5 e 6 através de análise gráfica.

Exercício 5: Esboce os gráficos das funções dadas abaixo e verifique se há pontos onde $f(x)$ não é derivável.

(a) $f(x) = x^2 + 1$;

(b) $g(x) = |x + 1|$;

(c) $h(x) = senx$;

(d) $r(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 2, & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$

Exercício 6: Dada a função $f(x) = cosx$, determine quais são os pontos no $Dom(f)$ onde a função derivada se anula.

Exercício 7: Sabendo-se que uma determinada grandeza G sofre variação ao longo do tempo t, responda:

(a) O que podemos afirmar se $\frac{dG}{dt} < 0$?

(b) O que podemos afirmar se $\frac{dG}{dt} > 0$?

(c) O que podemos afirmar se $\frac{dG}{dt} = 0$?

Exercício 8: Use as regras básicas de derivação para determinar a função derivada $f'(x)$ para:

(a) $f(x) = 4x^3 + 3x^2 + 5$;

(b) $f(x) = (4x + x^3 + x^8)(1 + 3x + 5x^7)$;

(c) $f(x) = \dfrac{(x^2+1)}{(5x+x^7)}$;

(d) $f(x) = \dfrac{(x^2+1)(x+x^2+x^3)}{(1+x)}$;

(e) $f(x) = (x^2+1)\dfrac{(x+x^2+x^3)}{(1+x)}$

Simplifique os resultados obtidos em (d) e (e) e compare.

Exercício 9: Determine as derivadas pedidas abaixo, usando as regras básicas:

(a) $f(x) = (x^5+2)(1+x+x^2+x^3+x^4), \qquad f'(x)$;

(b) $g(s) = \dfrac{(2s^3+1)}{(s^4+4)}, \qquad g'(s)$;

(c) $h(t) = \dfrac{(t^2+t^4)(1+t^4+t^5)}{(t+3)}, \qquad h'(t)$;

(d) $r(t) = \dfrac{(x^3+x^5+2x^8)(2x^7+x^9)}{(x^3+4)}, \qquad \dfrac{dr}{dt}$;

(e) $l(t) = \dfrac{(x^3+x^5+2x^8)(2x^7+x^9)}{x^3+4} + 5t, \qquad \dfrac{dl}{dt}$;

(f) $A(t) = \dfrac{(x^3+x^5+2x^8)(2x^7+x^9)}{x^3+4}.t, \qquad \dfrac{dA}{dt}$;

(g) $u(s) = 4s^2 + 2x^5 + x(4x^8+2x^9) - 3xs, \qquad \dfrac{du}{ds}$;

(h) $u(x) = 4s^2 + 2x^5 + x(4x^8+2x^9) - 3xs, \qquad \dfrac{du}{dx}$.

Exercício 10: Seja n um número natural não nulo. Considere $f(x) = x^{-n}$. Use a regra do quociente para obter $f'(x) = -nx^{-n-1}$, o que generaliza a regra conhecida para potências naturais. Com isso, a derivada de $f(x) = x^{-3}$, por exemplo, é a função $f'(x) = -3x^{-4}$. Com base nessa regra, e nas já obtidas, derive:

(a) $f(s) = \dfrac{1}{s^2} + 3s^2 + s^3(2 + s^2)$;

(b) $g(x) = \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{2}{x^4} - 3x^4(x^2 + 1)$.

***Exercício 11:** Um balonista deixa cair, de um balão, um saco de areia de $490m$ do solo. Após t segundos, o saco de areia está a $490 - 4,9t^2$ do solo.
(a) Ache a velocidade do saco de areia em $t = a$ segundos;
(b) Ache a velocidade do saco de areia em $t = 2$ segundos;
(c) Determine a velocidade com que o saco de areia atinge o solo.

***Exercício 12:** Um balão meteorológico é solto e sobe verticalmente de modo que sua distância $s(t)$ do solo durante os 10 primeiros segundos de vôo é dada por $s(t) = 6 + 2t + t^2$, na qual $s(t)$ é contada em metros e t em segundos. Determine a velocidade do balão quando
(a) $t = 1$, $t = 4$;
(b) no instante em que o balão está a $50m$ do solo.

***Exercício 13:** O volume (em m^3) de água em um pequeno reservatório durante o degelo da primavera é dado por $V = 5.000(t + 1)^2$ para t em meses e $0 \leq t \leq 3$. A taxa de variação do volume em relação ao tempo é a *taxa de fluxo* para o reservatório. Ache a taxa de fluxo nos instante $t = 0$ e $t = 2$. Determine a taxa de fluxo quando o volume é de $11.250m^3$.

****Exercício 14:** Suponha que a eficácia E de um remédio para dor, t horas depois de entrar na corrente sanguínea é dada por $E = \dfrac{1}{27}(9t + 3t^2 - t^3)$, $0 \leq t \leq 4,5$. Encontre a taxa de variação de E em relação a t quando:

(a) $t = 1$ (b) $t = 3$.

****Exercício 15:** Uma empresa verifica que, se cobrar p reais por unidade, gera uma receita mensal de $R = 12.000p - 1.000p^2$, $0 \leq p \leq 12$. Encontre a taxa de variação de R em relação a p quando p toma os valores abaixo:

(a) $p = 1$ (b) $p = 4$ (c) $p = 6$ (d) $p = 10$.

****Exercício 16:** Em uma determinada reação química, a quantidade Q, em gramas, de uma substância produzida em t horas é dada pela equação $Q = 16t - 4t^2$, $0 \leq t \leq 2$. Encontre a taxa, em gramas por hora, de produção da substância para os seguintes valores de t:

(a) $t = \frac{1}{2}$ (b) $t = 1$ (c) $t = 2$.

*****Exercício 17:** Uma população de tâmias se transfere para uma nova região no instante $t = 0$. No instante t (em meses) a população é de $P(t) = 100[1 + (0.3)t + (0.04)t^2]$.

(a) Quanto tempo levará até que a população seja igual ao dobro da população inicial $P(0)$?

(b) Qual é a taxa de crescimento na população quando $P = 200$?

*****Exercício 18:** Mostre que a taxa de variação do volume V de uma esfera em relação ao seu raio é igual à área S de sua superfície.

Exercício 19: Dada $f(x) = 3x + \dfrac{1}{x}$, determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x)$ no ponto $(1, f(1))$.

Exercício 20: Dada $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}$, determine o valor de a para que o gráfico de $f(x)$ em $(a, f(a))$ tenha reta tangente paralela ao eixo x.

Exercício 21: Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = 2x^3 + 5$ no ponto de abscissa 0.

*Referência: Cálculo com Geometria Analítica, vol 1, SWOKOWSKI;

**Referência: Cálculo com Geometria Analítica, vol 1, LARSON.

***Referência: Cálculo com Geometria Analítica, vol 1, EDWARDS, PENNEY.

RESPOSTAS:

1) $y = 2x + 2$;   2) $y = \frac{1}{4}x + 1$;   3) $v(1) = -10m/s$;   4) $\frac{dV}{da} = 3a^2$.

5) a) $f(x)$ é sempre derivável;   b) $g(x)$ não é derivável em $x = -1$;   c) $h(x)$ é sempre derivável;   d) $r(x)$ não é derivável em $x = 0$.

6) A derivada se anula em múltiplos de π, pois são os valores de x para os quais as retas tangentes ao gráfico são horizontais (coeficiente angular nulo).

7) a) G diminui a medida que o tempo passa;   b) G aumenta a medida que o tempo passa;   c) G não sofre variação $\Rightarrow$ G é constante.

8) a) $f'(x) = 12x^2 + 6x$;

b) $f'(x) = (4 + 3x^2 + 8x^7)(1 + 3x + 5x^7) + (4x + x^3 + x^8)(3 + 35x^6)$;

c) $f'(x) = \frac{2x(5x+x^7)-(x^2+1)(5+7x^6)}{(5x+x^7)^2}$;

d) e e) simplificados $f'(x) = \frac{1+2x+7x^2+8x^3+8x^4+4x^5}{(1+x)^2}$;

9) a) $f'(x) = 5x^4(1 + x + x^2 + x^3 + x^4) + (x^5 + 2)(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3)$;

b)$g'(s) = \frac{(8s^2)(s^4+4)-(2s^3+1)(4s^3)}{(s^4+4)^2}$;

c) $h'(t) = \frac{[(2t+4t^3)(1+t^4+t^5)+(t^2+t^4)(4t^3+5t^4)](t+3)-(t^2+t^4)(1+t^4+t^5)(1)}{(t+3)^2}$;

d) $\frac{dr}{dt} = 0$,   e) $\frac{dl}{dt} = 5$;

f) $\frac{dA}{dt} = \frac{(x^3+x^5+2x^8)(2x^7+x^9)}{x^3+4}$;

g) $\frac{du}{ds} = 8s - 3x$;

h) $\frac{du}{dx} = 10x^4 + (4x^8 + 2x^9) + x(32x^7 + 18x^8) - 3s$.

10) a) $f'(s) = -\frac{2}{s^3} + 6s + 3s^2(2 + s^2) + s^3(2s)$;

b) $g'(x) = -\frac{3}{x^4} - \frac{8}{x^5} - 12x^3(x^2 + 1) - 3x^4(2x)$.

11) (a) $v(a) = -9,8am/s$;   (b) $v(2) = -19,6m/s$;   (c) $v(10) = -98m/s$.

12) (a) $v(1) = 4m/s$, $v(4) = 10m/s$;   (b) $v(3\sqrt{5} - 1) = 6\sqrt{5}m/s$.

13) Notação para taxa de fluxo em $t = a$: $\dfrac{dV}{dt}(a)$

$\dfrac{dV}{dt}(0) = 10.000 m^3/mês$; $\quad \dfrac{dV}{dt}(2) = 30.000 m^3/mês$; $\quad \dfrac{dV}{dt}(0,5) = 15.000 m^3/mês$.

14) a) $\frac{dE}{dt}(1) = \frac{4}{9}$; b) $\frac{dE}{dt}(3) = 0$.

15) a) $\frac{dR}{dt}(1) = 10.000$; b) $\frac{dR}{dt}(4) = 4.000$; c) $\frac{dR}{dt}(6) = 0$; d) $\frac{dR}{dt}(12) = -8.000$.

16) a) $\frac{dQ}{dt}(1/2) = 12$; b) $\frac{dQ}{dt}(1) = 8$; c) $\frac{dQ}{dt}(2) = 0$.

17) a) 2.5 meses; b) $\frac{dP}{dt}(2.5) = 50$ tâmias por mês.

18) $V = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow \frac{dV}{dt} = \frac{4}{3}\pi 3r^2 = 4\pi r^2$.

19) $y = 2x + 2$; 20)$a = \dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}$; 21) $y = 5$.