

Parte I

O vírus CODIG - Sistema Amostrado

Diogo Silva (UP201809213)
FEUP/DEEC Porto, Portugal
up201809213@fe.up.pt

Paulo Silva (UP201909556)
FEUP/DEEC Porto, Portugal
up201909556@fe.up.pt

José Sarmiento (UP201909931)
FEUP/DEEC Porto, Portugal
up201909931@fe.up.pt

Manuel Narciso (UP20160321)
FEUP/DEEC Porto, Portugal
up20160321@fe.up.pt

Introdução

O conceito de modelo epidemiológico, é termo recorrente nos dias de hoje, devido à situação que nos encontramos.

O presente documento pretende demonstrar o trabalho desenvolvido para uma aplicação de um destes modelos (*SIR*) numa situação em concreto (vírus CODIG) utilizando para análise ferramentas de teoria do controlo linear, sendo para isso necessário primeiramente uma linearização do problema.

1. Análise de estratégias de atuação

a. Taxa de vacinação positiva

Quando se tem uma vacinação introduzida no sistema existe, a passagem direta de pessoas suscetíveis de serem infetadas para recuperadas. Com isto qualquer um dos cenários fica com um número de infetados menor. Isto porque ao existir uma passagem direta de suscetíveis para recuperados, faz com que o número de infetados totais seja menor, pois também existem menos pessoas suscetíveis à infeção a cada dia.

Utilizando uma taxa de vacinação de apenas 0.01 (1%) obtiveram-se os seguintes resultados:

No cenário da Fig.1, vemos que mesmo sem medidas de contenção o número de infetados não ultrapassa a capacidade dos Serviços de Saúde. É possível observar também que o número de recuperados pode aumentar independentemente de existirem pessoas infetadas ou não.

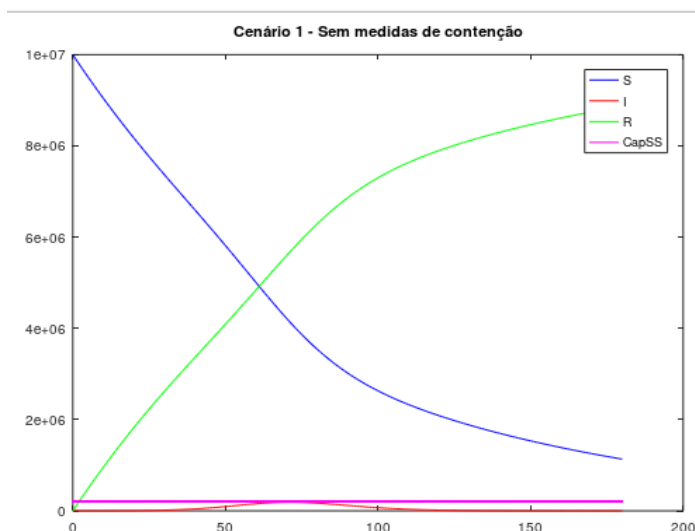


Fig. 1 Vacinação no cenário 1

A aplicação de uma vacinação nos cenários 2 e 3 que são casos onde também foram implementadas medidas de contenção o número de casos de pessoas infetadas é ainda menor do que na Fig.1, como podemos ver nas Fig.2 e Fig.3. Isto era o que seria de esperar visto que além de existir uma vacina, existe também medidas que tornam a reprodução do vírus menor.

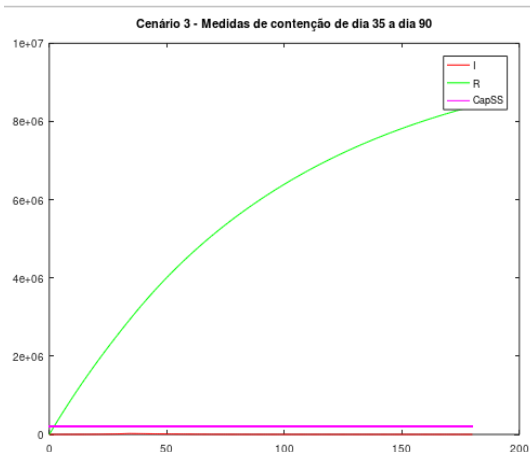


Fig.2 Vacinação no cenário 2

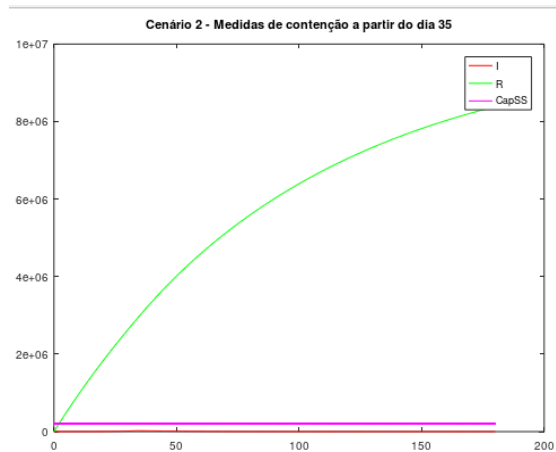


Fig.3 Vacinação no cenário 3

Após estes testes podemos assumir que a introdução de uma pequena taxa de vacinação como 1%, já introduz no sistema grandes melhorias nos resultados obtidos.

b. Tratamento que encurta a duração média da infeção

Fazendo com que o tempo de tratamento diminua (aumentar γ | diminuir T_{inf}), o número de pessoas infetadas vai ser escoado mais rapidamente, isto é, teremos uma menor acumulação de pessoas nos Serviços de Saúde. Isto acontece porque as pessoas infetadas serão curadas num espaço de tempo menor, ou seja, o tempo de recuperação é menor. Se o tempo que cada pessoa precisa nos Serviços

de Saúde é menor, logo mais de pressa o lugar que está ocupado será desocupando dando assim lugar a outras pessoas infetadas. Ao haver um maior fluxo de pessoas pelos Serviços de Saúde mais rápido recuperam as pessoas.

Alterando o valor de gamma (γ), visto este ser o fator de passagem de infetados para recuperados (o tempo e infeção é mantido igual), para por exemplo 2/3 do tempo pré-definido obtiveram-se os seguintes resultados:

No cenário da Fig.4, que é a situação sem medidas de contenção, podemos ver que o pico de número de pessoas infetado é sensivelmente metade do que se tem no enunciado do problema, assim como o facto de este ocorrer mais tarde no período de simulação, devido ao “enchimento” dos Serviços de Saúde ser mais difícil. Também podemos observar que o valor final contante de pessoas recuperadas é menor e que o de suscetíveis é maior, porque o número de casos de infeção foi menor.

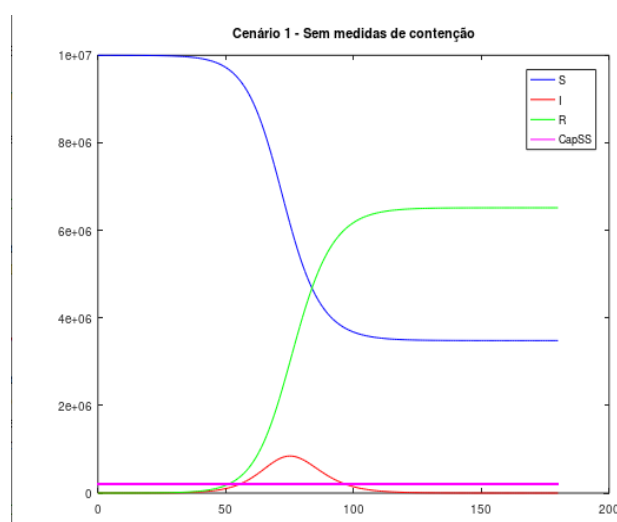


Fig.4 Diminuição do tempo infeção cenário 1

Nos casos dos cenários que implementam medidas de contenção (Fig.5 e Fig.6) à semelhança do cenário 1 (sem medidas de contenção) podemos observar uma diminuição do valor final constante de pessoas recuperadas, isto acontece, mais uma vez porque como a recuperação foi mais rápida que no caso do enunciado, o número de pessoas infetadas que existia ao mesmo tempo foi menor e por isso mais difícil foi a propagação do vírus, tendo ficando assim um maior número de pessoas sem ser infetada.

Relativamente ao cenário 2 (Fig.5) podemos até observar com a introdução de um tempo de infeção que a lotação dos Serviços de Saúde nunca foi atingida ao contrário do enunciado onde chegou lá perto. No cenário 3 (Fig.6) esta mudança introduziu uma atenuação dos valores obtidos.

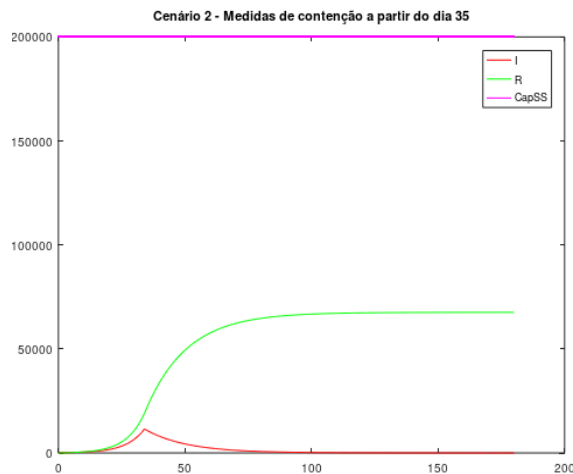


Fig.5 Diminuição do tempo infeção cenário 2

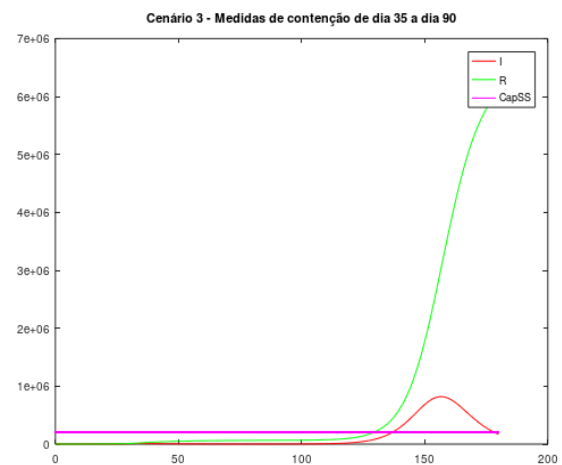


Fig. 6 Diminuição do tempo infeção cenário 3

De uma forma geral podemos dizer que a diminuição do tempo de infeção diminui também o número de infetados total no decorrer do período de simulação, como seria esperar. Esta diminuição não é linear, ou seja, se se diminuir por exemplo o tempo para metade o número de cados diminui mais de metade. Apesar de tudo a abordagem da alínea **a.)** apresenta melhores resultados, visto que as pessoas passam logo para recuperadas sem passar pelo período de infeção.

Analisando agora para quando alteramos o T_{inf} diretamente, obtém-se os seguintes valores para quando não existe medidas de contenção:

No primeiro caso para $T_{inf} = 1$, menor que o tempo fornecido. Visto que o T_{inf} também influencia alfa, no sentido de que quanto maior T_{inf} menor alfa, é portanto de se expectar que o pico da epidemia seja mais cedo, e a largura da colina em que o pico esta seja menor.

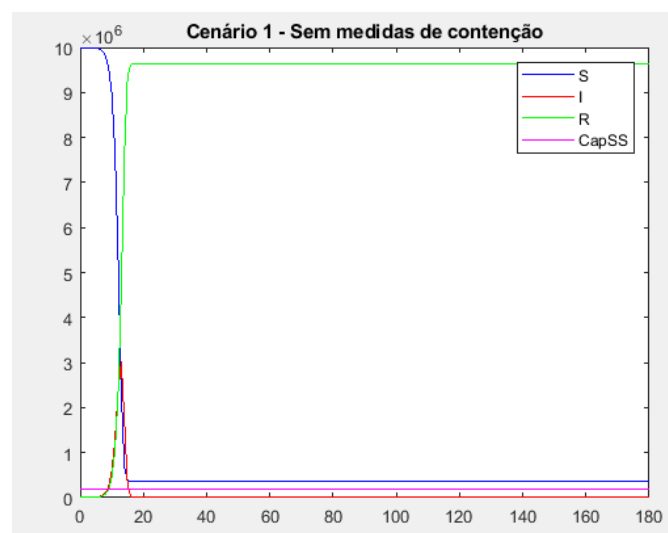


Fig.7 $T_{inf} = 1$

Quando $T_{inf} = 12$, maior que o fornecido, é de se esperar o contrário do anterior cenário, o que fica claro na Fig.8.

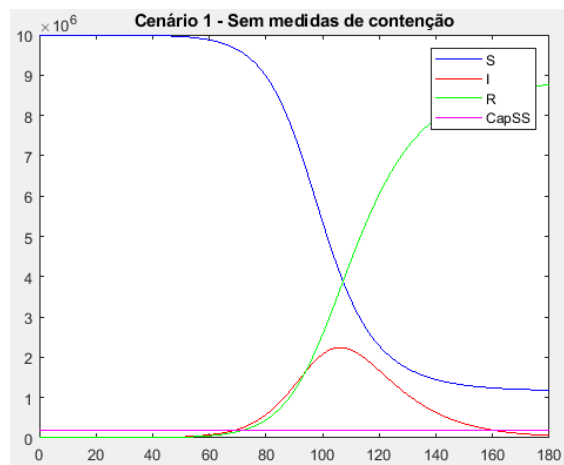


Fig. 8 $T_{inf} = 12$

c. Implementação de diferentes medidas de contenção

A implementação de medidas de contenção é a variante deste estudo que mais opções de controlo tem, visto que, pode ser controlado não só o tempo de atuação das medidas, como também a altura de implementação das mesmas, sendo o caso preferencial onde não se tenha de estar sempre a reimplementar as medidas de contenção.

Para o mesmo período de atuação, quanto mais cedo se começar as medidas de contenção, mais rapidamente se vai prevenir a propagação do vírus e assim menos pessoas serão sujeitas a ficar infetadas.

O exemplo da Fig.9 demonstra isso mesmo, onde temos um caso em que as medidas de contenção começaram no dia 3 e prolongam-se por tempo indeterminado, sendo os resultados apresentados mais favoráveis do que caso tivessem começado mais tarde.

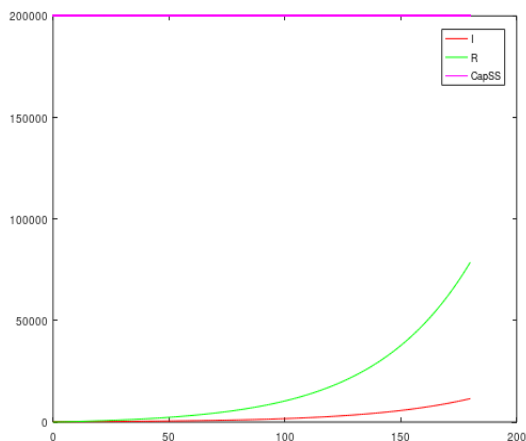


Fig. 9 Medidas de contenção a partir do dia 3

No que toca aos intervalos da duração das medidas, para curtas durações o número de casos, após a suspensão da contenção, volta a subir e de uma maneira mais rápida quanto mais curto o intervalo.

Pode-se reparar também que se a contenção começar muito cedo a subida após o término destas vai levar a uma subida mais rápida. Isto porque muito pouco dos casos suscetíveis passaram a recuperados como se pode ver na Fig.10.

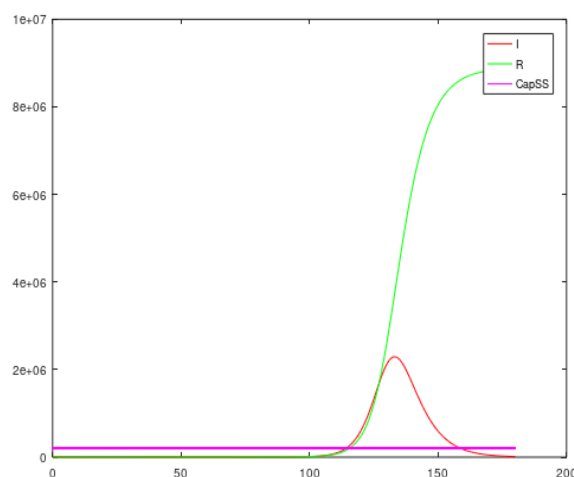


Fig.10 Medidas contenção dia 3 a 35

Medidas de contenção intermitentes tem uma vantagem de manter o número de infetados abaixo da capacidade dos Serviços de Saúde, mas continuando a deixar que alguns sejam infetados e posteriormente passem a recuperados. Desta forma não vamos ter um pico, mas sim um valor mais constante, como se pode ver pela Fig.11.

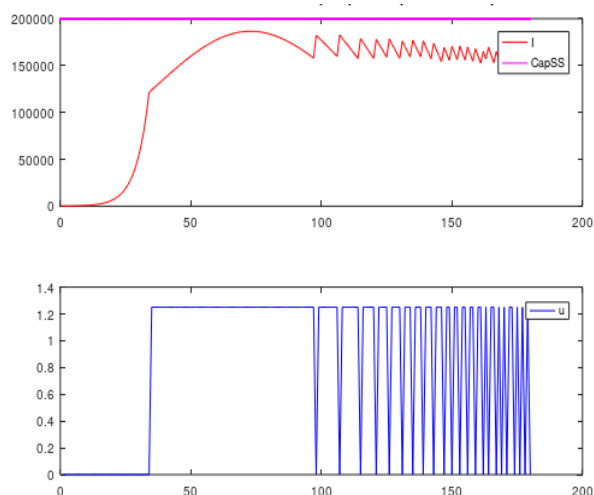


Fig. 11 Medidas de contenção intermitentes

Se se mantiver sempre com valores abaixo do limite do Serviços de Saúde, tratando os infetados, consegue-se tirar o maior número de pessoas do grupo suscetível rapidamente, acabando com o a reprodução do vírus, sem grandes problemas.

2. Ponto de funcionamento com $(S, I, R) = (S^*, I^*, R^*)$.

a. Demonstração do valor de controlo que anula a variação do número de infetados.

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{R_t(t) I(t)}{T_{inf} N} \rightarrow R_t(t) = \alpha T_{inf} \frac{N}{I(t)} \\ \dot{I}(t) = \alpha S(t) - \gamma I(t) \rightarrow I(t) = \frac{\alpha S(t) - \dot{I}(t)}{\gamma} \\ \gamma = \frac{1}{T_{inf}} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}$$

Do enunciado sabemos que:

$$R_t(t) = R_0 - U(t) \rightarrow U(t) = R_0 - R_t(t) \quad (4)$$

Então fazendo as substituições de (1), (2), (3) em (4) temos:

$$U(t) = R_0 - \alpha T_{inf} \frac{N}{\frac{\alpha S(t) - \dot{I}(t)}{\frac{1}{T_{inf}}}} = R_0 - \alpha \frac{N}{\alpha S(t) - \dot{I}(t)} \quad (5)$$

Como se pretende o valor exato do ponto de controlo que anula a variação do número de infetados podemos realizar as seguintes simplificações:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{I}(t) = 0 \\ U(t) = U^* \\ S(t) = S^* \end{array} \right.$$

Obtendo-se por fim o pretendido:

$$U^* = R_0 - \alpha \frac{N}{\alpha S^* - 0} = R_0 - \frac{N}{S^*} \quad (6)$$

b. Linearização do sistema dinâmico em torno do ponto de funcionamento.

Com (4) e (6) sabemos que:

$$R_t(t) = U^* + \frac{N}{S^*} - U(t)$$

Logo temos que:

$$\alpha = \frac{R_t(t) I(t)}{T_{inf} N} = \frac{I(t)}{T_{inf} N} \left(U^* + \frac{N}{S^*} - U(t) \right) = \frac{I(t)U^*}{T_{inf} N} + \frac{I(t)}{T_{inf} S^*} - \frac{I(t)U(t)}{T_{inf} N} \quad (7)$$

Do enunciado sabemos que:

$$\begin{cases} \dot{S}(t) = -\alpha S(t) - vS(t) \\ \dot{I}(t) = \alpha S(t) - \gamma I(t) \end{cases} \quad (8)$$

Como não há taxa de vacinação:

$$v = 0 \quad (9)$$

Logo substituindo (7) e (9) em (8) temos:

$$\begin{cases} \dot{S}(t) = -\alpha S(t) = -\left(\frac{I(t)U^*}{T_{inf} N} + \frac{I(t)}{T_{inf} S^*} - \frac{I(t)U(t)}{T_{inf} N} \right) S(t) = f_1(S, I, U) \\ \dot{I}(t) = \alpha S(t) - \gamma I(t) = \left(\frac{I(t)U^*}{T_{inf} N} + \frac{I(t)}{T_{inf} S^*} - \frac{I(t)U(t)}{T_{inf} N} \right) S(t) - \frac{I(t)}{T_{inf}} = f_2(S, I, U) \end{cases}$$

Como queremos linearizar em torno de um ponto então temos:

$$\begin{cases} \dot{S}(t) = \frac{\partial f_1}{\partial S} S(t) + \frac{\partial f_1}{\partial I} I(t) + \frac{\partial f_1}{\partial U} U(t) \\ \dot{I}(t) = \frac{\partial f_2}{\partial S} S(t) + \frac{\partial f_2}{\partial I} I(t) + \frac{\partial f_2}{\partial U} U(t) \end{cases} \quad (10)$$

Sendo:

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial S} = -\frac{I^* U^*}{T_{inf} N} - \frac{I^*}{T_{inf} S^*} + \frac{I^* U^*}{T_{inf} N} = -\frac{I^*}{T_{inf} S^*} \\ \frac{\partial f_1}{\partial I} = -\frac{S^* U^*}{T_{inf} N} - \frac{S^*}{T_{inf} S^*} + \frac{S^* U^*}{T_{inf} N} = -\frac{1}{T_{inf}} \\ \frac{\partial f_1}{\partial U} = \frac{I^* S^*}{T_{inf} N} \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f_2}{\partial S} = \frac{I^* U^*}{T_{inf} N} + \frac{I^*}{T_{inf} S^*} - \frac{I^* U^*}{T_{inf} N} = \frac{I^*}{T_{inf} S^*} \\ \frac{\partial f_2}{\partial I} = \frac{S^* U^*}{T_{inf} N} + \frac{S^*}{T_{inf} S^*} - \frac{S^* U^*}{T_{inf} N} - \frac{1}{T_{inf}} = 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial U} = -\frac{I^* S^*}{T_{inf} N} \end{cases} \quad (12)$$

Considerando também:

$$\begin{cases} a = \frac{\gamma I^*}{S^*} \\ b = \frac{\gamma I^* S^*}{N} \end{cases} \quad (13)$$

Por fim fazendo as substituições (11), (12) e (13) em (10) obtém-se:

$$\begin{cases} \dot{S}(t) = -\frac{\gamma I^*}{S^*} S(t) - \gamma I(t) + \frac{\gamma I^* S^*}{N} U(t) = -aS(t) - \gamma I(t) + bU(t) \\ \dot{I}(t) = \frac{\gamma I^*}{S^*} S(t) - \frac{\gamma I^* S^*}{N} U(t) = aS(t) - bU(t) \end{cases} \quad (14)$$

c. Demonstração da Função Transferência de U(s) para I(s).

Da alínea anterior tem-se que:

$$f(t) = \begin{cases} \dot{S}(t) = -aS(t) - \gamma I(t) + bU(t) \\ \dot{I}(t) = aS(t) - bU(t) \end{cases}, \quad \text{com} \begin{cases} a = \frac{\gamma I^*}{S^*} \\ b = \frac{\gamma I^* S^*}{N} \end{cases} \quad (15)$$

Aplicando a transformada de Laplace ao sistema temos:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \begin{cases} sS(s) = -aS(s) - \gamma I(s) + bU(s) \\ sI(s) = aS(s) - bU(s) \end{cases} \quad (16)$$

Resolvendo o sistema de equações (16) conclui-se que:

$$\begin{cases} s \frac{sI(s) + bU(s)}{a} = -a \frac{sI(s) + bU(s)}{a} - \gamma I(s) + bU(s) \\ S(s) = \frac{sI(s) + bU(s)}{a} \end{cases}$$

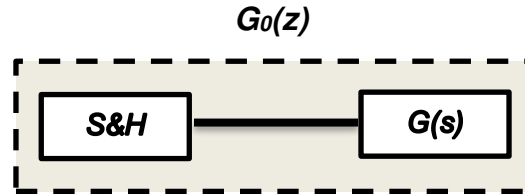
$$\begin{cases} \frac{s^2 I(s)}{a} + \frac{sbU(s)}{a} = -sI(s) - bU(s) - \gamma I(s) + bU(s) \\ S(s) = \frac{sI(s) + bU(s)}{a} \end{cases}$$

$$\left(\frac{s^2}{a} + s + \gamma \right) I(s) = -\frac{sb}{a} U(s) \rightarrow \frac{I(s)}{U(s)} = -\frac{sb}{a \left(\frac{s^2}{a} + s + \gamma \right)} = -b \frac{s}{s^2 + as + a\gamma}$$

Por fim, fazendo as devidas substituições de **a** e **b** obtém-se:

$$\frac{I(s)}{U(s)} = -\frac{\gamma I^* S^*}{N} \frac{s}{s^2 + \frac{\gamma I^*}{S^*} s + \frac{\gamma^2 I^*}{S^*}} = G(s) \quad (17)$$

3. Função Transferência no domínio Z, $G_0(z)$ com precedente “sampler&holder”.



A transformada para o domínio Z da função de transferência com “sample&holder” é dada pela expressão:

$$G_0(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z}_s \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} \quad (18)$$

Realizando uma simples simplificação temos:

$$\frac{G(s)}{s} = -\frac{\gamma I^* S^*}{N} \frac{s}{s^2 + \frac{\gamma I^*}{S^*} s + \frac{\gamma^2 I^{*2}}{S^{*2}}} = -\frac{\gamma I^* S^*}{N} \frac{1}{s^2 + \frac{\gamma I^*}{S^*} s + \frac{\gamma^2 I^{*2}}{S^{*2}}}$$

Procedendo depois à factorização do denominador obtém-se o seguinte:

$$\begin{aligned} \frac{G(s)}{s} &= -\frac{\gamma I^* S^*}{N} \frac{1}{\left(s - \left(\frac{-\frac{\gamma I^*}{S^*} + \sqrt{\frac{\gamma^2 I^{*2}}{S^{*2}} - 4 \frac{\gamma^2 I^{*2}}{S^{*2}}}}{2} \right) \right) \left(s - \left(\frac{-\frac{\gamma I^*}{S^*} - \sqrt{\frac{\gamma^2 I^{*2}}{S^{*2}} - 4 \frac{\gamma^2 I^{*2}}{S^{*2}}}}{2} \right) \right)} \\ &= -\frac{\gamma I^* S^*}{N} \frac{1}{\left(s - \left(\frac{-\frac{\gamma I^*}{S^*} + \sqrt{\frac{\gamma^2 I^{*2}}{S^{*2}} - 4 \frac{\gamma^2 I^{*2}}{S^{*2}}}}{2} \right) \right) \left(s - \left(\frac{-\frac{\gamma I^*}{S^*} - \sqrt{\frac{\gamma^2 I^{*2}}{S^{*2}} - 4 \frac{\gamma^2 I^{*2}}{S^{*2}}}}{2} \right) \right)} \\ &= -\frac{\gamma I^* S^*}{N} \frac{1}{\left(s - \left(\frac{-\frac{\gamma I^*}{S^*} + \sqrt{\frac{\gamma^2 I^{*2}}{S^{*2}} - 4 \frac{\gamma^2 I^{*2}}{S^{*2}}}}{2} \right) \right) \left(s - \left(\frac{-\frac{\gamma I^*}{S^*} - \sqrt{\frac{\gamma^2 I^{*2}}{S^{*2}} - 4 \frac{\gamma^2 I^{*2}}{S^{*2}}}}{2} \right) \right)} \end{aligned}$$

De modo a facilitar os próximos cálculos faz-se as seguintes substituições:

$$\begin{cases} c = \left(-\frac{\gamma I^* + \sqrt{\gamma^2 I^* (I^* - 4S^*)}}{2S^*} \right) \\ d = \left(-\frac{\gamma I^* - \sqrt{\gamma^2 I^* (I^* - 4S^*)}}{2S^*} \right) \end{cases} \quad (19)$$

Ficando-se com:

$$\frac{G(s)}{s} = -\frac{\gamma I^* S^*}{N} \frac{1}{(s-c)(s-d)} \quad (20)$$

Passando agora à transformada para domínio Z de (20):

$$\mathcal{Z}_s \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} = \mathcal{Z}_s \left\{ -\frac{\gamma I^* S^*}{N} \frac{1}{(s-c)(s-d)} \right\} = -\frac{\gamma I^* S^*}{N} \mathcal{Z}_s \left\{ \frac{1}{(s-c)(s-d)} \right\}$$

Aplicando o método dos resíduos temos:

$$\mathcal{Z}_s \left\{ \frac{1}{(s-c)(s-d)} \right\} = \sum_{k=1}^2 \text{Res}_{s=s_k} \left(\frac{1}{(s-c)(s-d)} \frac{z}{z - e^{sT}} \right)$$

Onde,

$$\text{Res}_{s=c} = \lim_{s \rightarrow c} \left((s-c) \frac{1}{(s-c)(s-d)} \frac{z}{z - e^{sT}} \right) = \frac{1}{(c-d)} \frac{z}{z - e^{cT}}$$

$$\text{Res}_{s=d} = \lim_{s \rightarrow d} \left((s-d) \frac{1}{(s-c)(s-d)} \frac{z}{z - e^{sT}} \right) = \frac{1}{(d-c)} \frac{z}{z - e^{dT}}$$

Ficando a expressão da transformada como:

$$\mathcal{Z}_s \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} = -\frac{\gamma I^* S^*}{N} \left(\frac{1}{(c-d)} \frac{z}{z - e^{cT}} + \frac{1}{(d-c)} \frac{z}{z - e^{dT}} \right) \quad (21)$$

Juntando agora (21) ao restante

$$\begin{aligned} G_0(z) &= (1 - z^{-1}) \left(-\frac{\gamma I^* S^*}{N} \left(\frac{1}{(c-d)} \frac{z}{z - e^{cT}} + \frac{1}{(d-c)} \frac{z}{z - e^{dT}} \right) \right) \\ &= (z - 1) \left(-\frac{\gamma I^* S^*}{N} \left(\frac{1}{(c-d)(z - e^{cT})} + \frac{1}{(d-c)(z - e^{dT})} \right) \right) \end{aligned} \quad (22)$$

Fazendo por fim as substituições de (19) em (22) e de $T = 1$ e ainda algumas simplificações obtém-se:

$$\begin{aligned}
 G_0(z) &= (z - 1) \\
 &\left(-\frac{\gamma I^* S^*}{N} \left(\frac{1}{\left(\left(-\frac{\gamma I^* + \sqrt{\gamma^2 I^* (I^* - 4S^*)}}{2S^*} \right) - \left(-\frac{\gamma I^* - \sqrt{\gamma^2 I^* (I^* - 4S^*)}}{2S^*} \right) \right) \left(z - e^{\left(-\frac{\gamma I^* + \sqrt{\gamma^2 I^* (I^* - 4S^*)}}{2S^*} \right)} \right)} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{1}{\left(\left(-\frac{\gamma I^* - \sqrt{\gamma^2 I^* (I^* - 4S^*)}}{2S^*} \right) - \left(-\frac{\gamma I^* + \sqrt{\gamma^2 I^* (I^* - 4S^*)}}{2S^*} \right) \right) \left(z - e^{\left(-\frac{\gamma I^* - \sqrt{\gamma^2 I^* (I^* - 4S^*)}}{2S^*} \right)} \right)} \right) \right) \\
 &= (z - 1) \left(-\frac{\gamma I^* S^*}{N} \left(\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{\gamma^2 I^* (I^* - 4S^*)}}{S^*} \right) \left(z - e^{\left(-\frac{\gamma I^* + \sqrt{\gamma^2 I^* (I^* - 4S^*)}}{2S^*} \right)} \right)} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{1}{\left(-\frac{\sqrt{\gamma^2 I^* (I^* - 4S^*)}}{S^*} \right) \left(z - e^{\left(-\frac{\gamma I^* - \sqrt{\gamma^2 I^* (I^* - 4S^*)}}{2S^*} \right)} \right)} \right) \right) \\
 &= (z - 1) \left(-\frac{I^* S^{*2}}{N} \left(\frac{1}{\sqrt{I^* (I^* - 4S^*)} \left(z - e^{\left(-\frac{\gamma I^* + \sqrt{\gamma^2 I^* (I^* - 4S^*)}}{2S^*} \right)} \right)} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{1}{\sqrt{I^* (I^* - 4S^*)} \left(z - e^{\left(-\frac{\gamma I^* - \sqrt{\gamma^2 I^* (I^* - 4S^*)}}{2S^*} \right)} \right)} \right) \right)
 \end{aligned}$$

4. Análise de um ponto de funcionamento (S^* , I^* , R^*) em concreto.

Considerando o ponto:

$$\begin{cases} I^* = 2 * 10^5 \\ R^* = 10 * I^* \\ S^* = N - I^* - R^* \end{cases} \quad (23)$$

E considerando:

$$\gamma = \frac{1}{6} \quad (24)$$

Substituindo os valores (23) e (24) em (17) tem-se:

$$G(s) = -2.594 * 10^4 \frac{s}{s^2 + 0.004374s + 0.0007123}$$

Utilizando o MATLAB para cálculo dos polos obtém-se:

$$\begin{aligned} p1 &= -0.0021 + 0.0266i \\ p2 &= -0.0021 - 0.0266i \end{aligned}$$

Reformulando $G(s)$:

$$G(s) = -2.594 * 10^4 \frac{s}{(s - 0.0021 + 0.0266i)(s - 0.0021 - 0.0266i)} \quad (25)$$

Fazendo a passagem da transformada de Laplace para a transformada no domínio Z de (25), utilizando o método dos resíduos e com o “sampler&holder”:

$$G_0(z) = -2.594 * 10^4 \frac{z - 1}{z^2 - ze^{-P1} - ze^{-P2} + e^{-P1}e^{-P2}} \quad (26)$$

Substituindo em (26) os polos temos que:

$$G_0(z) = -2.594 * 10^4 \frac{z - 1}{z^2 - 2.003z + 1.0042}$$

Os valores obtidos são ligeiramente diferentes dos do MATLAB (Fig.12) por motivos de arredondamento.

$$\frac{-2.594e04 \ z + 2.594e04}{z^2 - 1.995 \ z + 0.9957}$$

Fig.12 Valores para $G_0(z)$ do MATLAB

Para o resto desta pergunta são usados os valores do MATLAB.

Tendo obtido a função de transferência em malha aberta de Z podemos proceder agora ao cálculo do lugar de raízes.

1. Polos e Zeros em Malha Aberta

Polos:

$$p1 = 0.9975 + 0.026i$$

$$p2 = 0.9975 - 0.026i$$

Zeros:

$$z1 = 1$$

2. Pontos no lugar de raízes no eixo real

$$[1 + \infty[$$

3. Assíntotas:

$$n - m = 2 - 1 = 1 \text{ assíntota}$$

$$\text{ângulo: } \frac{180 * (2K + 1)}{n - m} = 180^\circ, \quad \text{com } K = 0$$

Visto só existe uma assíntota, que coincide com a parte real, a noção de centroide não se aplica.

4. Entradas e saídas eixo real

$$K = \frac{1}{-2,594 * 10^4} \frac{z^2 - 1.995z + 0.9957}{1 - z} \quad (27)$$

Derivando (27) em ordem a Z:

$$\frac{dK}{dz} = \frac{1}{-2,594 * 10^4} \frac{-z^2 + 2z - 0.9998}{(1 - z)^2} \quad (28)$$

Igualando (28) a zero descobrem-se os zeros:

$$-z^2 + 2z - 0.9998 = 0$$

Obtendo-se:

$$z = 1.014 \vee z = 0.98$$

Como 0.98 não pertence ao intervalo $[1 + \infty[$ ficamos apenas com o 1.014, substituindo na expressão (28) acima descobre-se:

$$K = 1.31 * 10^{-5}$$

5. Angulo de chegada de polos complexos

Tendo:

$$z = 0.9975 + 0.026i$$

Pela fórmula:

$$\sum \angle(z - z_i) - \sum \angle(z - p_i) = \pm 180^\circ$$

Substituindo os valores:

$$\angle(0.9975 + 0.026i - 1) - \angle(0.9975 + 0.026i - (0.9975 - 0.026i)) \\ - \angle(z - (0.9975 + 0.026i)) = \pm 180^\circ$$

Resolvendo em ordem a $\angle(z - (0.9975 + 0.026i))$ e calculando o resultado obtemos que:

$$\angle(z - (0.9975 + 0.026i)) = \pm 185,49^\circ$$

6. Limiar de estabilidade

Em malha fechada temo que:

$$1 + KG(z) = 0$$

Atribuindo valores e já simplificando:

$$(-z + 1)K * -2.594 * 10^4 = -z^2 + 1.995 * z + 0.9957 \quad (29)$$

Considerando:

$$z = \frac{1 + W}{1 - W} \quad (30)$$

Substituindo (30) em (29) e simplificando:

$$W(-2K * -2.594 * 10^4 + 3.9914) + W^2(2K * -2.594 * 10^4 + 2.995) - 1.9907 = 0$$

Recorrendo ao critério de estabilidade de Routh Hurwitz:

$-2K * -2.594 * 10^4 + 3.9914$	-1.9907
$2K * -2.594 * 10^4 + 2.995$	

-1.9907

Então:

$$-2K * -2.594 * 10^4 + 3.9914 > 0$$

$$K > -7.69 * 10^{-5}$$

Como o lugar de raízes é inverso temos também que:

$$K < 0$$

Ficando então o intervalo de K para o qual o sistema é estável de:

$$]-7.69 * 10^{-5}, 0[$$

Passado todo este processo de obtenção dos valores que caracterizam o LGR procede-se então ao seu esboço como se pode ver na Fig.13, passando de seguida à sua confirmação com a ajuda do comando *rlocus(Gz)* do MATLAB (Fig.14).

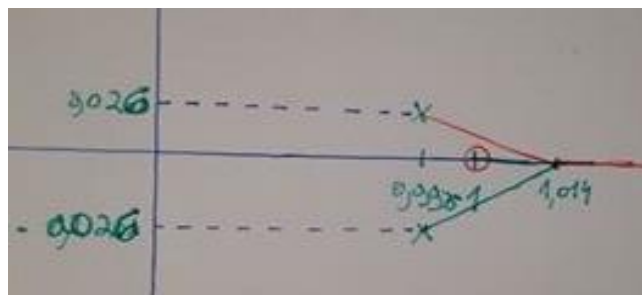


Fig.13 Esboço do LGR

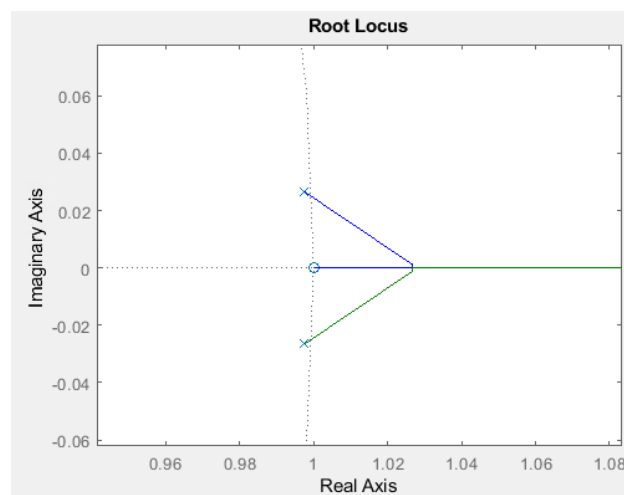


Fig.14 LGR do MATLAB

Para a análise do desempenho do sistema começou-se por gerar a função de transferência em malha fechada. Para isso foi utilizada a função do MATLAB **feedback(G, K)**. Posto isto analisou-se a resposta do sistema a um *step*.

Começou-se por analisar a resposta para quando o $K = -0.000076$, $K = 0.00001$, $K = -0.00004$, $K = -0.00009$ e $K = -0.0000001$, onde para cada um destes valores se prestou atenção ao tempo de estabelecimento (tempo que o sistema demora a atingir $\pm 5\%$ do valor final), a sobre elongação (diferença entre o valor máximo e o valor final da resposta) e o erro em regime permanente.

Nas Fig.15, Fig.16, Fig.17, Fig.18, Fig.19, podem ser vistos os LGRs e a resposta aos *steps* para os valores de K acima referidos.

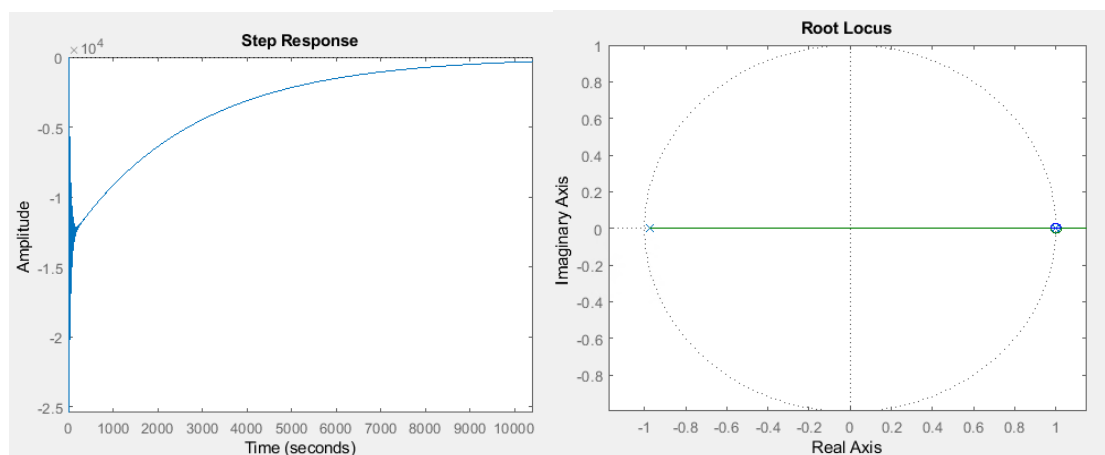


Fig.15 $K=0.000076$

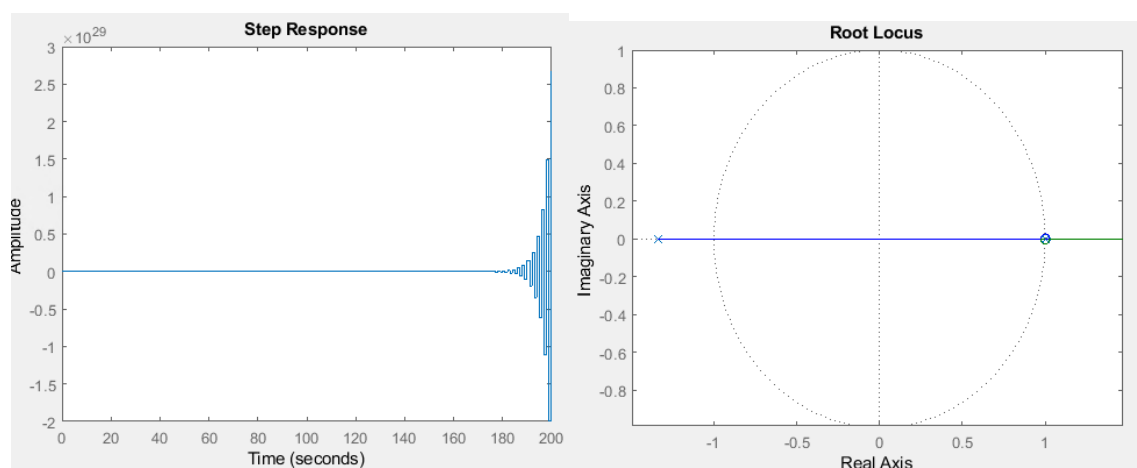


Fig.16 $K = -0.00009$

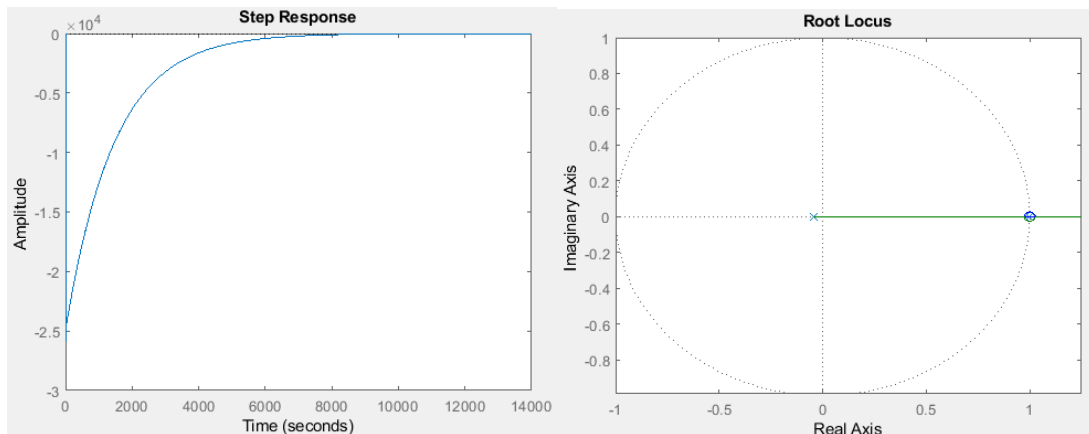


Fig.17 $K = -0.00004$

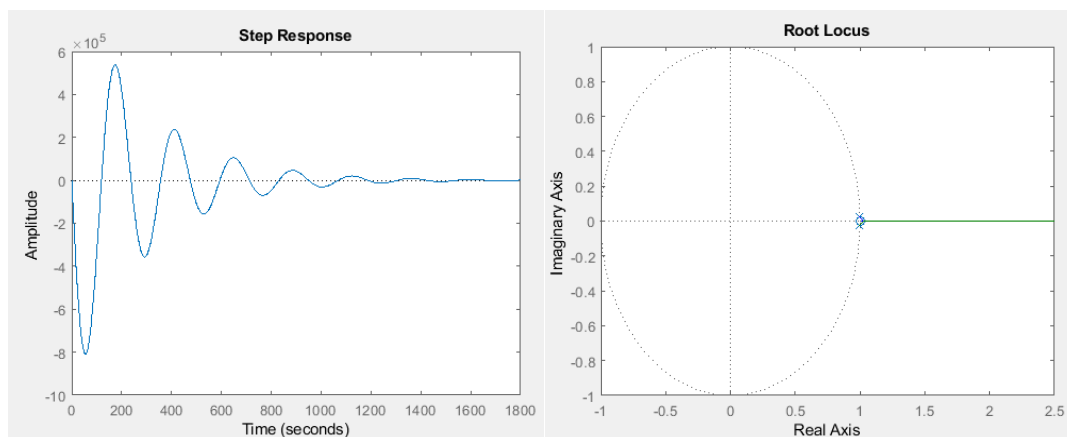


Fig.18 $K = -0.0000001$

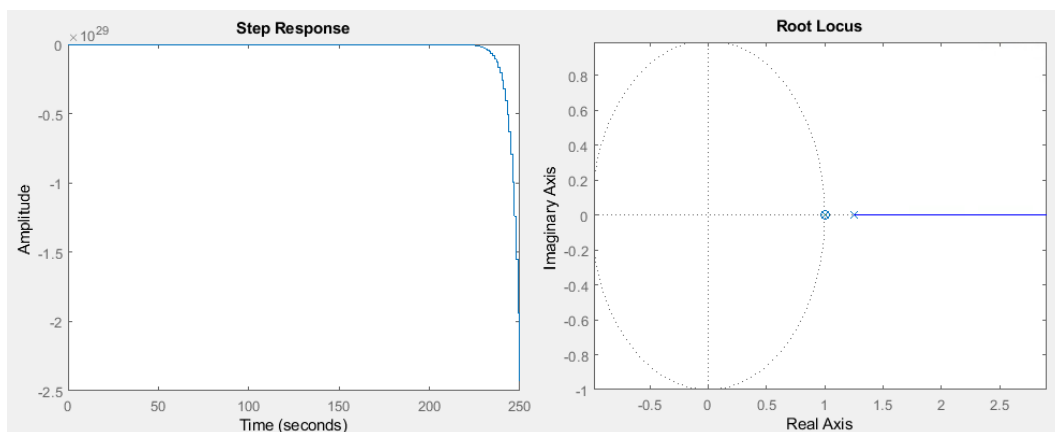


Fig.19 $K = 0.00001$

De uma forma geral olhando para todos os casos específicos dos valores de K escolhidos, pode-se dizer que para valores fora do intervalo, como é espetável, o sistema é instável, isso é visível no lugar de

raízes, em que pelo menos um dos polos está fora do círculo unitário, e também na resposta ao step em que o sistema não estabiliza, na Fig.16 e na Fig.19 podemos confirmar visualmente isso.

Para valores próximos do limite inferior, no exemplo $K = -0.000076$ (Fig.15), em comparação com valores próximos do limite superior, no caso de $K = -0.0000001$ (Fig.19), vê-se que o tempo de estabelecimento para os valores próximos do limite inferior são maiores que os valores para o limite superior. Na sobre elongação acontece o contrário visto que o pico para valores do limite superior é muito maior.

Nas Fig.20 e Fig.21 pode-se ver os respetivos valores obtidos no MATLAB dos pontos limites escolhidos.

```
RiseTime: 0
SettlingTime: 8983
SettlingMin: -2.5941e+04
SettlingMax: -16.8009
Overshoot: 5.0677e+14
Undershoot: 0
Peak: 2.5941e+04
PeakTime: 1
```

Fig.20 $K = -0.000076$

```
RiseTime: 0
SettlingTime: 1148
SettlingMin: -8.0828e+05
SettlingMax: 5.3741e+05
Overshoot: 1.5790e+16
Undershoot: 1.0498e+16
Peak: 8.0828e+05
PeakTime: 54
```

Fig.21 $K = -0.0000001$

Para valores a meio do intervalo, como por exemplo $k=-0.00004$ (Fig.22), tem-se um tempo de resposta menor que o do limite superior, mas maior que o limite inferior. Para a sobre elongação dá-se o contrário, valores menores que os obtidos para limites superior e maiores que os dos próximos do limite inferior.

```
RiseTime: 0
SettlingTime: 5675
SettlingMin: -2.5941e+04
SettlingMax: -0.4910
Overshoot: 5.0677e+14
Undershoot: 0
Peak: 2.5941e+04
PeakTime: 1
```

Fig.22 $K = -0.00004$

5. Esboço do traçado Bode para $G_0(z)$. Margem de Fase e Margem de Ganho.

Dos resultados da alínea anterior temos que:

$$G_0(z) = -2.6 * 10^4 \frac{z - 1}{z^2 - 1.995z + 0.9957} \quad (31)$$

De modo a analisar a resposta em frequência tem de se avaliar $G_0(z)$ no eixo imaginário, onde se sabe que:

$$\zeta = iv \quad (32)$$

$$\zeta = \frac{2z - 1}{Tz + 1} \rightarrow z = \frac{1 + T\zeta}{1 - T\zeta} \quad (33)$$

Substituindo então (33) em (31) obtém-se:

$$G_0(T\zeta) = \frac{26000.0 * \frac{\frac{T\zeta}{2} + 1}{1 - \frac{T\zeta}{2}} - 1}{\frac{(\frac{T\zeta}{2} + 1)^2}{(1 - \frac{T\zeta}{2})^2} - \frac{1.995(\frac{T\zeta}{2} + 1)}{1 - \frac{T\zeta}{2}} + 0.9957} \quad (34)$$

Simplificando (34):

$$G_0(T\zeta) = - \frac{1.04 * 10^9 (1 - \frac{T\zeta}{2}) T\zeta}{3.9907 * 10^4 T^2 \zeta^2 + 172 T\zeta + 28} \quad (35)$$

Substituindo agora (32) em (35):

$$G_0(Tiv) = - \frac{1.04 * 10^9 \left(1 - \frac{Tjv}{2}\right) Tiv}{-3.9907 * 10^4 T^2 v^2 + 172iTv + 28} \quad (36)$$

Calculando os zeros e os polos da equação que são os pontos característicos e relevantes para posteriormente se esboçar do diagrama de bode obtém-se:

Zeros:

$$z1 = 0$$

$$z2 = 2$$

Polos:

$$p1 = -0.0021 - 0.0264i$$

$$p2 = -0.0021 + 0.0264i$$

$$\text{Módulo: } |\zeta| = \left| \frac{1}{T} (-0.0021 \pm 0.0264i) \right| = 0.0265$$

Evidenciando-se os polos complexos de modo a que se facilitar o cálculo do módulo e de fase:

$$G_0(Tiv) = - \frac{1.04 * 10^9}{39907} \frac{\left(1 - \frac{Tiv}{2}\right) Tiv}{(Tiv - (-0.0021 - 0.0264i))(Tiv - (-0.0021 + 0.0264i))} \quad (37)$$

Através de (37) obtém-se:

Módulo:

$$|G_0(Tiv)| = \frac{\sqrt{(5.2 * 10^8 T^2 v^2)^2 + (-1.04 * 10^9 T v)^2}}{\sqrt{(-3.9907 * 10^4 T^2 v^2 + 28)^2 + (172 T v)^2}} \quad (38)$$

Fase:

$$\angle G_0(Tiv) = -\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \frac{5.2 * 10^8 v}{-1.04 * 10^9} - \tan^{-1} \frac{199.77 v - 5.27}{0.4195} - \tan^{-1} \frac{199.77 v + 5.27}{0.4195} \quad (39)$$

Posto isto, sabe-se que existem três frequências significativas: 0; 0.0265; 2 e que irá começar em

$$-20 \log \left(\frac{1.04 * 10^9}{39907} \right) = -88 \text{ dB}.$$

Sabe-se também que inicialmente como se tem um zero em 0, irá aumentar 20dB/dec até 0.0265 onde irá diminuir 20db/dec até chegar a 2 onde permanecerá num traçado horizontal que irá tender para 3.14, calculando o limite da amplitude $\lim_{v \rightarrow \infty} |G(iv)| = 3.14$

De modo a verificar o comportamento do sistema em fase para posteriormente comparar com o resultado no MATLAB:

Para $v \rightarrow 0$,

$$\begin{aligned} \angle G(iv) &= -\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \frac{5.2 * 10^8 * 0}{-1.04 * 10^9} - \tan^{-1} \frac{199.77 * 0 - 5.27}{0.4195} - \tan^{-1} \frac{199.77 * 0 + 5.27}{0.4195} = -\frac{\pi}{2} \\ &= 270^\circ \end{aligned}$$

Utilizando o módulo dos polos complexos na coordenada dos mesmos (0.0265),

$$\begin{aligned} \angle G(iv) &= -\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \frac{5.2 * 10^8 * 0.0265}{-1.04 * 10^9} - \tan^{-1} \frac{199.77 * 0.0265 - 5.27}{0.4195} - \tan^{-1} \frac{199.77 * 0.0265 + 5.27}{0.4195} = -3.172 \\ &= 178^\circ \end{aligned}$$

E verificando a posição da década seguinte,

$$\begin{aligned} \angle G(iv) &= -\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \frac{5.2 * 10^8 * 0.265}{-1.04 * 10^9} - \tan^{-1} \frac{199.77 * 0.265 - 5.27}{0.4195} - \tan^{-1} \frac{199.77 * 0.265 + 5.27}{0.4195} = -4.828 \\ &= 83^\circ \end{aligned}$$

Para o zero em 2,

$$\begin{aligned} \angle G(iv) &= -\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \frac{5.2 * 10^8 * 2}{-1.04 * 10^9} - \tan^{-1} \frac{199.77 * 2 - 5.27}{0.4195} - \tan^{-1} \frac{199.77 * 2 + 5.27}{0.4195} = -5.5 \\ &= 45^\circ \end{aligned}$$

Assim sendo,

De 0 a 0.026 o traçado é horizontal com valor $-\frac{\pi}{2}$

De 0 a 0.0026 (uma década antes do polo 0).

De 2 a $+\infty$ o declive é $-\frac{\pi}{4}$ rad/década

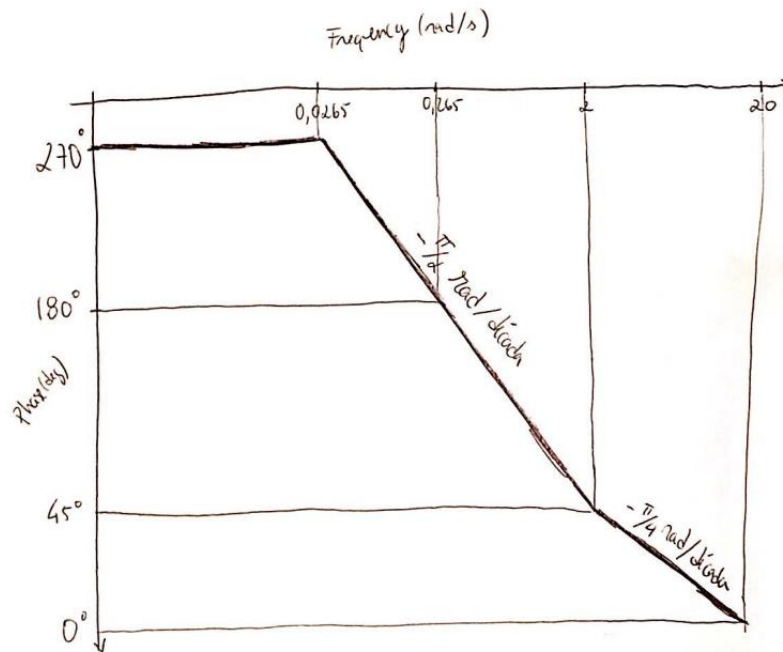


Fig.23 Traçado Bode Amplitude

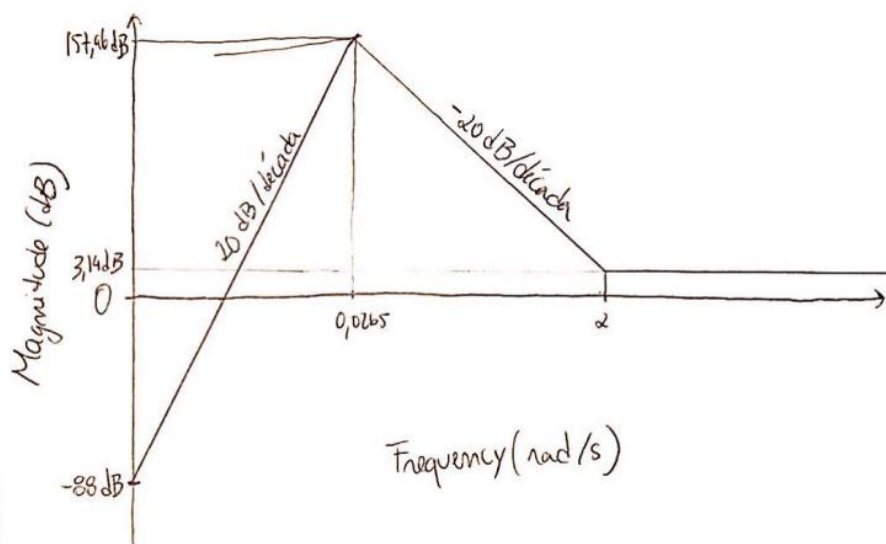


Fig.24 Traçado de Bode das Fases

Calculando o valor do pico da Magnitude utilizando (38) para $v=0.0265$ encontramos que o máximo será 157.96dB.

Passando agora à análise das características em malha aberta do sistema $G_0(z)$, para se obter a Margem de Fase e a Margem de Ganho:

A margem de fase é obtida quando a Amplitude do sinal atravessa os 0dB:

$$|G_0(Tiv)| = 1$$

Analicamente não se conseguiu determinar o módulo igual a 1, no entanto sabemos que este passará por 0 num ponto, visto que como vimos anteriormente no esboço de bode este começa em -88dB e irá atingir 157dB em $v=0.0265$. Concluímos então que o valor de amplitude 0 o v será quase nulo podendo ser considerado nulo, visto que a fase continuará constante durante valores próximos de 0.

Substituindo então

$$Mf: \angle G_0(0) = -\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \frac{-5.27}{0.4195} - \tan^{-1} \frac{5.27}{0.4195}$$

Resultando em:

$$Mf: \angle G_0(0) = -\frac{\pi}{2}$$

Na Fig.25 pode-se ver a confirmação no MATLAB que este efetivamente passa em 0 em aproximadamente em $2.7 \cdot 10^{-7}$. Verifica-se também que a fase seria efetivamente -89.9999°.

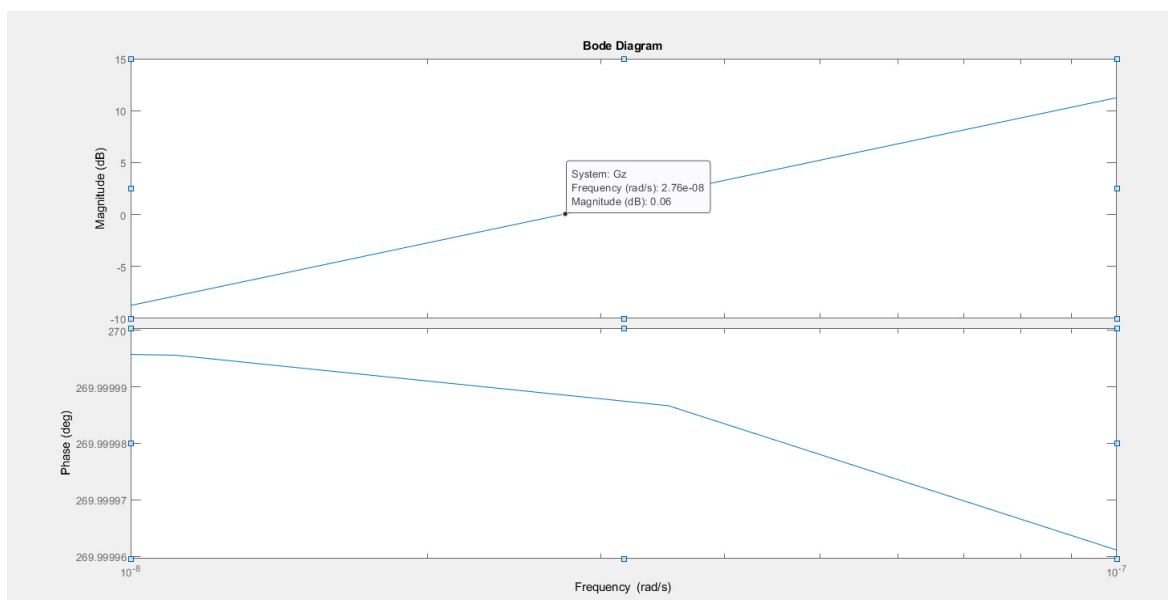


Fig.25 Diagrama de Bode no MATLAB para ver MF

A margem de ganho obtém-se quando a frequência atravessa $-\pi$:

$$\angle G_0(Tiv) = -\pi$$

$$\begin{aligned} -\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \frac{5.2 * 10^8 v}{-1.04 * 10^9} - \tan^{-1} \frac{199.77v - 5.27}{0.4195} - \tan^{-1} \frac{199.77v + 5.27}{0.4195} &= -\pi \\ -\tan^{-1} \frac{199.77v - 5.27}{0.4195} - \tan^{-1} \frac{199.77v + 5.27}{0.4195} &= -\pi + \frac{\pi}{2} + \tan^{-1} \frac{5.2 * 10^8 v}{-1.04 * 10^9} \\ \tan^{-1} \frac{199.77v - 5.27}{0.4195} + \tan^{-1} \frac{199.77v + 5.27}{0.4195} &= \frac{\pi}{2} + \tan^{-1} \frac{5.2 * 10^8 v}{-1.04 * 10^9} \end{aligned} \quad (40)$$

Sabendo que:

$$\tan(a) + \tan(b) = \frac{a + b}{1 - ab} \quad (41)$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \frac{1}{\tan(a)} \quad (42)$$

Adaptando (41) e (42) a (40):

$$\begin{aligned} \frac{\frac{199.77v - 5.27}{0.4195} + \frac{199.77v + 5.27}{0.4195}}{1 - \frac{199.77v - 5.27}{0.4195} * \frac{199.77v + 5.27}{0.4195}} &= \frac{1}{\frac{5.2 * 10^8 v}{-1.04 * 10^9}} \\ \frac{\frac{199.77v}{0.4195}}{1 - \frac{(199.77v)^2 - (5.27)^2}{(0.4195)^2}} &= \frac{-1.04 * 10^9}{5.2 * 10^8 v} \\ 1 - \frac{(199.77v)^2 - (5.27)^2}{(0.4195)^2} &= \frac{\frac{199.77v}{0.4195}}{\frac{-1.04 * 10^9}{5.2 * 10^8 v}} \\ \frac{-(199.77v)^2 + (5.27)^2 + (0.4195)^2}{(0.4195)^2} &= \frac{5.2 * 10^8 v * 199.77v}{0.4195 * -1.04 * 10^9} \\ \frac{-(199.77v)^2}{(0.4195)^2} - \frac{5.2 * 10^8 * 199.77v^2}{0.4195 * -1.04 * 10^9} &= \frac{-(5.27^2 + (0.4195)^2)}{(0.4195)^2} \end{aligned}$$

$$v = \sqrt{\frac{\frac{-(5.27^2 + (0.4195)^2)}{(0.4195)^2}}{\frac{-(199.77)^2}{(0.4195)^2} - \frac{5.2 * 10^8 * 199.77}{0.4195 * -1.04 * 10^9}}} = 0.0263$$

Por fim, calculado a Margem de Ganho propriamente dita tem-se:

$$|G_0(i0.0263)| = \frac{\sqrt{(5.2 * 10^8 v^2)^2 + (-1.04 * 10^9 v)^2}}{\sqrt{(-3.9907 * 10^4 * v^2 + 28)^2 + (172v)^2}} = 5993042.86$$

$$Mg = 20 \log\left(\frac{1}{|G(j0.0263)|}\right) = -135.56dB$$

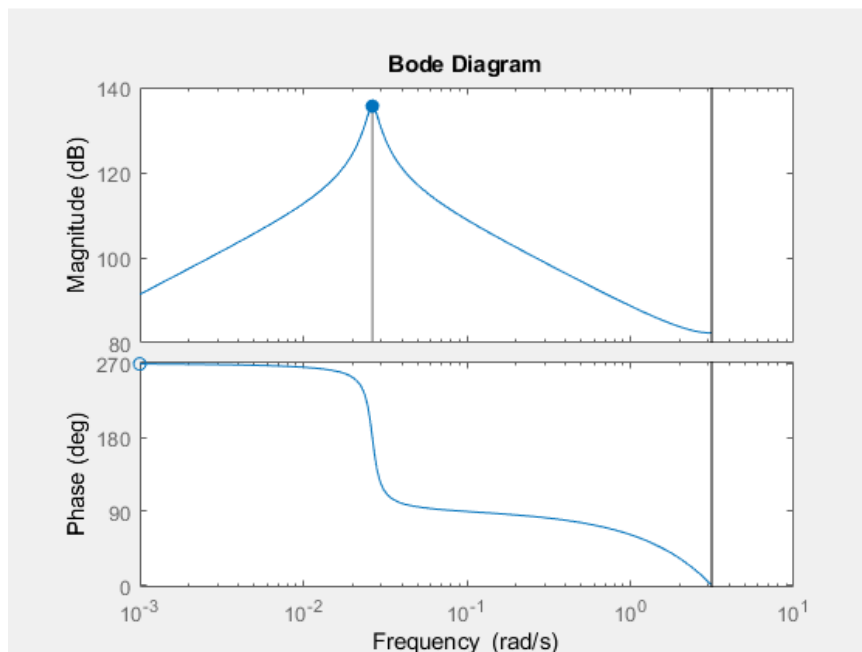


Fig26 Diagrama de Bode no MATLAB para ver MG

6. Projeto de um compensador de modo a melhorar os critérios de desempenho encontrados em 4.

Para este compensador foram definidos os valores de *overshoot* e tempo de estabelecimento de maneira a melhorar estes mesmos fatores face aos que tinham sido previamente calculados. Deste modo o valor de *overshoot* foi definido visando um baixo valor do mesmo, e o tempo de estabelecimento foi definido para que o valor se atualize em um mês.

Assim sendo temos:

$$M_p = 0.1$$

$$T_s(2\%) = 30$$

Calculando os polos dominantes pretendidos em S a partir das especificações acima referidas:

$$M_p = e^{-\frac{\pi \zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \Rightarrow \zeta = \frac{\ln M_p}{\sqrt{\ln^2 M_p + \pi^2}} = 0.5912$$

$$T_s(2\%) = \frac{4}{\zeta \omega_n} \Rightarrow \zeta \omega_n = \frac{4}{T_s} = \frac{4}{30} \Rightarrow \omega_n = \frac{4/30}{0.5912} = 0.22553$$

$$s_d = -\zeta \omega_n \pm j \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} = -0.1333 \pm j0.1819$$

Passando os polos dominantes pretendidos para domínio Z :

Sabendo que:

$$T = 1$$

$$z = e^{sT}$$

Temos:

$$z_d = e^{s_d T} = e^{-\zeta \omega_n T} e^{\pm j \omega_n T \sqrt{1-\zeta^2}} = 0.8607 \pm j0.1583$$

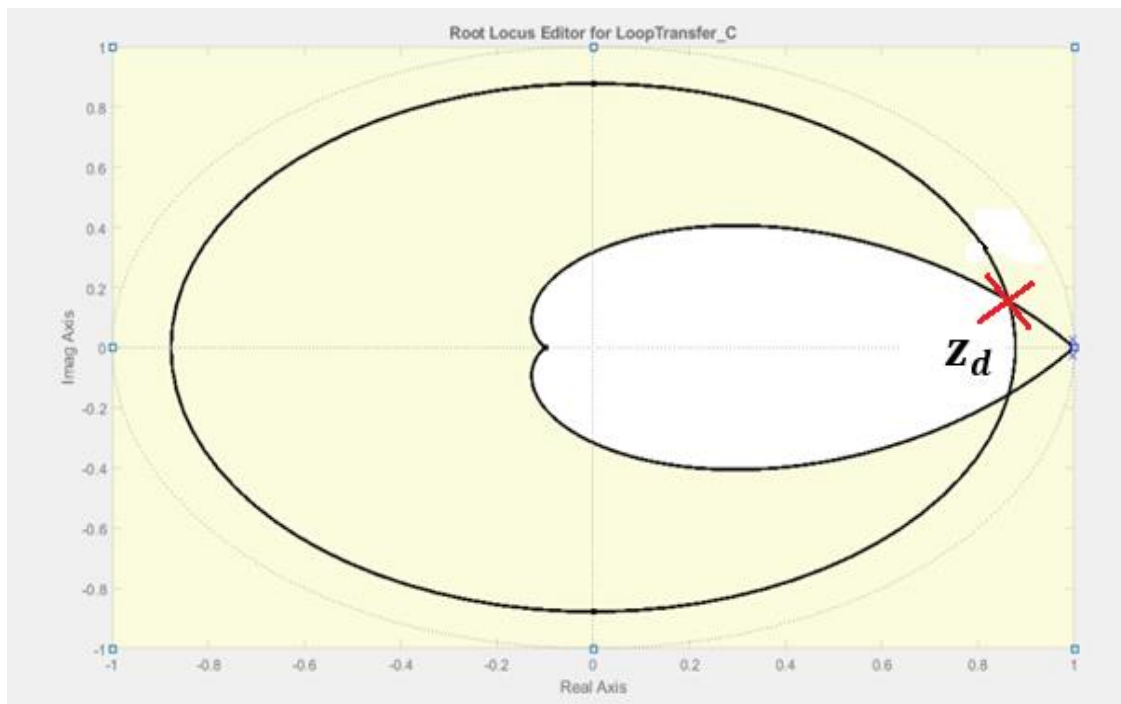


Fig.27 Root Locus com margens de MP e T_s

Para o compensador determinou-se que se iria utilizar dois polos e um zero. Sendo que um dos polos serve para cancelar o zero da planta, visto que o polo dominante desejado é conjugado complexo, e como a diferença entre polos e zero era 1, resultava apenas numa assintota horizontal, como é

possível observar na figura do *Root Locus* na alínea 4, assim deste modo resulta em duas verticais como na Fig.28. Os restantes polos e zeros são de um *lead compensator* para o qual se pretende determinar z_a e z_c .

Considerando:

$$G_c(z) = K_c \frac{(z - z_a)}{(z - z_b)(z - z_c)} \quad (43)$$

$$(z - z_b) = (z - 1) \quad (44)$$

Tem-se então que:

$$G_c(z)G_0H(z) = 2.6 * 10^4 * K_c * \frac{(z - z_a)}{(z^2 - 1.9957z + 0.9957)(z - z_c)}$$

Pretendendo-se agora determinar K_c e z_c de modo que $G_c(z_d)G_0H(z_d) = -1$ (condição de polo do sistema realimentado).

Começando pela condição de fase:

$$\angle G_c(z_d)G_0H(z_d) = \pm 180^\circ$$

$$\angle \frac{(z_d - z_a)}{(z_d^2 - 1.9957z_d + 0.9957)(z_d - z_c)} = \pm 180^\circ$$

$$\begin{aligned} & \angle \frac{1}{(z_d^2 - 1.9957z_d + 0.9957)} \\ &= \angle \frac{1}{(z_d = 0.8607 + j0.1583 - 0.9975 - j0.0265)(z_d = 0.8607 + j0.1583 - 0.9975 + j0.0265)} \\ &= \angle(-2.9577 - j22.704) = -82.67^\circ \end{aligned}$$

$$\angle \frac{(z_d - z_a)}{(z_d - z_c)} = -180^\circ - (-82.67^\circ) = -97.33^\circ$$

Definindo o zero de forma à sua coordenada real estar à direita da coordenada real de z_d de maneira a ser possível obter o valor do ângulo pretendido. Assim sendo, é necessário que o ângulo do zero seja maior, de maneira a que o ângulo do polo menos o ângulo do zero seja equivalente a um valor negativo.

Por tentativa-erro foi arbitrado o valor de 0.88 para z_a .

$$\angle(z_d - z_a) = \angle(z_d = 0.8607 + j0.1583 - 0.88) = -83.05^\circ$$

$$\angle \frac{1}{(z_d - z_c)} = -97.33^\circ - (-83.05^\circ) = -14.28^\circ$$

$$\angle(z_d - z_c) = \angle(z_d = 0.8607 + j0.1583 - z_c) = 14.28^\circ$$

$$\frac{0.1583}{(0.8607 - z_c)} = \tan 14.28^\circ = 0.2545$$

$$z_c = 0.8607 - \frac{0.1583}{0.2545} = 0.2386$$

Para a condição do módulo:

$$|G_c(z_d)G_0H(z_d)| = 1$$

$$K_c \left| \frac{(z_d - z_a)}{(z_d^2 - 1.9957z_d + 0.9957)(z_d - z_c)} \right| = 1$$

$$\begin{aligned} K_c &= \left| \frac{(z_d^2 - 1.9957z_d + 0.9957)(z_d - z_c)}{(z_d - z_a)} \right| \\ &= \left| \frac{(0.8607 + i0.1583 - 0.9975 - i0.0265)(0.8607 + i0.1583 - 0.9975 + i0.0265)(0.8607 + i0.1583 - 0.2386)}{(0.8607 + i0.1583 - 0.88)} \right| \\ &= -6.759 * 10^{-6} \end{aligned}$$

Obtendo-se:

$$G_c = -6.759 * 10^{-6} * \frac{z - 0.88}{(z - 1)(z - 0.2386)}$$

Por fim sendo:

$$G_c(z)G_0H(z) = (2.6 * 10^4)(-6.759 * 10^{-6}) \frac{(z - 0.88)}{(z^2 - 1.9957z + 0.9957)(z - 0.2386)}$$

A função de transferencia em malha fechada fica:

$$\frac{G_c(z)G_0H(z)}{1 + G_c(z)G_0H(z)} = 0.14919 * \frac{(z - 0.88)(z - 1)}{(z - 1)(z - 0.5116)(z^2 - 1.722z + 0.7664)}$$

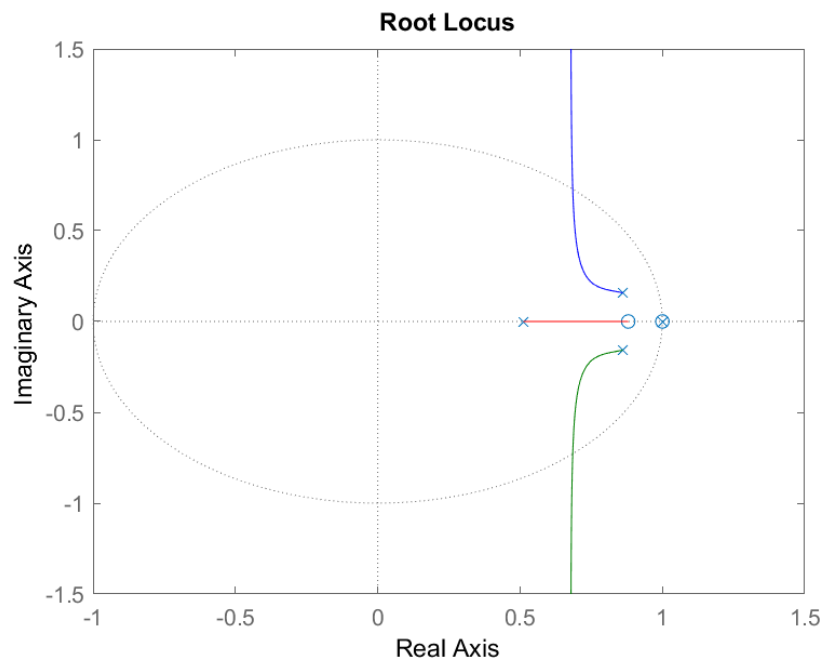


Fig.28 Root Locus com polos em malha fechada projetados

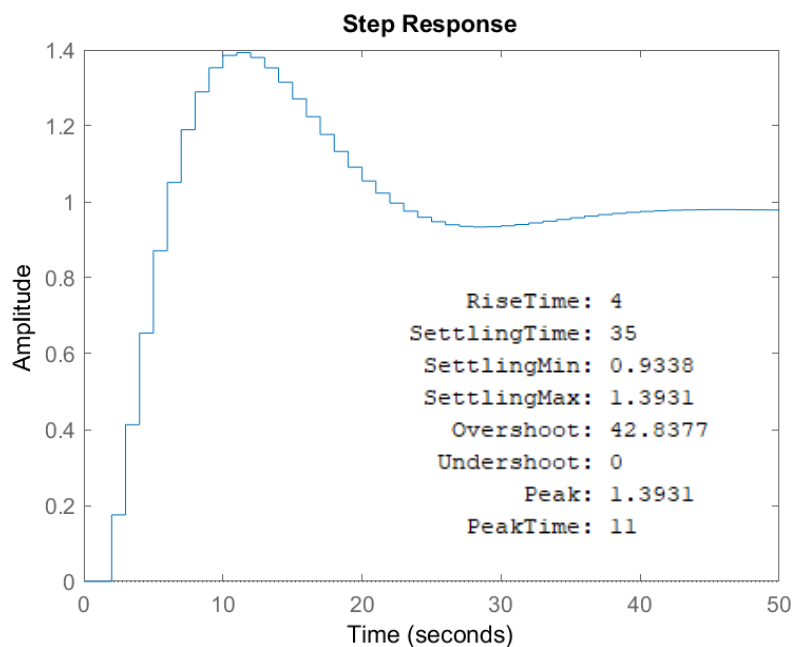


Fig.29 Resposta em degrau do sistema com compensador

Pelos resultados obtidos pode-se verificar que são cumpridos os requisitos impostos apesar de haver alguma discrepância. Em relação ao *overshoot* verifica-se que é ligeiramente superior ao especificado, em virtude de o sistema ter um polo adicional (não dominante). Comparativamente aos resultados obtidos no exercício 4, pode-se verificar que com o compensador, o sistema apresenta melhores critérios de desempenho.

7. Controlador com atraso de 2 dias.

Segundo o teorema da translação de tempo do domínio Z sabemos que:

$$x(t - nT) = z^{-n}X(z) \quad (45)$$

Utilizando (45) em G_0 tem-se:

$$z^{-2} * G_0(z) = \frac{-25940 z + 25940}{z^4 - 1.995 z^3 + 0.9957 z^2} \quad (46)$$

Partindo de (46), pode-se observar o seu lugar de raízes através da função **rlocuz(G_0)** no **MATLAB**. Os resultados que se obtém pode ser visto na Fig.30.

Como se pode observar, todos os polos e zeros estão contidos dentro do círculo unitário o que demonstra que o sistema é estável.

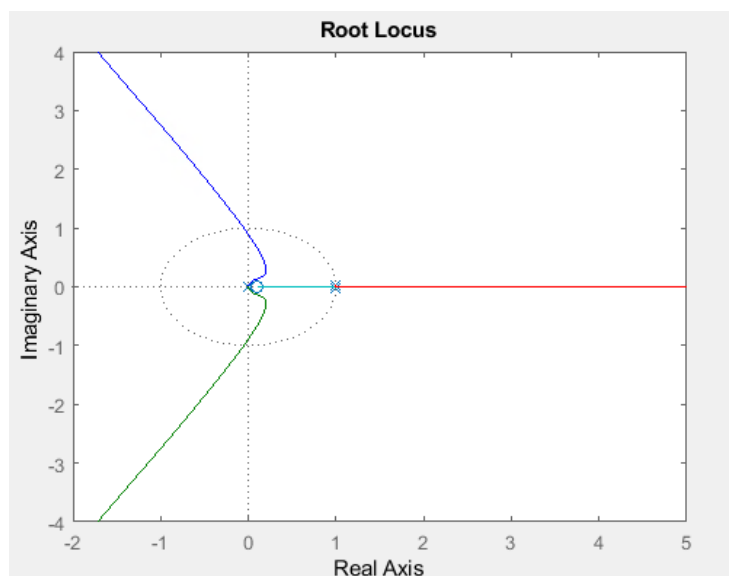


Fig.30 Lugar de raízes do novo sistema

Realimentado o sistema, com uma constante K, pode-se observar o funcionamento do sistema em malha fechada.

Para isso fez-se K para $K = -0.00000005$ (Fig.31) e para $K = -0.00005$ (Fig.32), para testar a resposta do sistema a K dentro do intervalo de estabilidade (com $K = -0.00000005$) e fora do intervalo de ($K = -0.00005$).

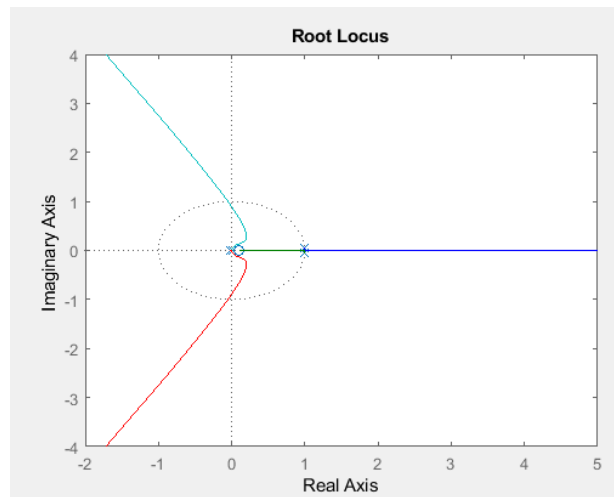


Fig. 31 $k = -0.00000005$

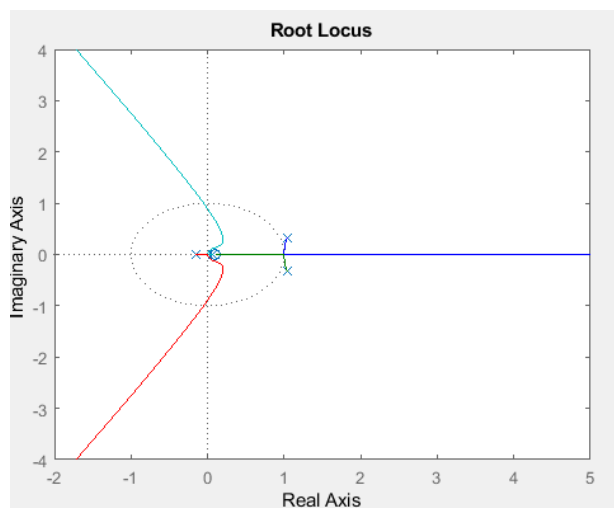


Fig32 $K = -0.00005$

Como é visível na Fig.31, e como foi referido, o sistema em que os polos e zeros estão contidos no círculo unitário, o sistema é estável.

Na Fig.32 dois dos polos do sistema encontram-se fora do círculo, logo neste caso o sistema não é estável.

Algo que tem interesse ver também é o que acontece, para os dois casos quando na entrada se tem um *step*. Nas Fig.33 e Fig.34 podem-se observar os resultados, onde estes confirmam o que foi dito anteriormente.

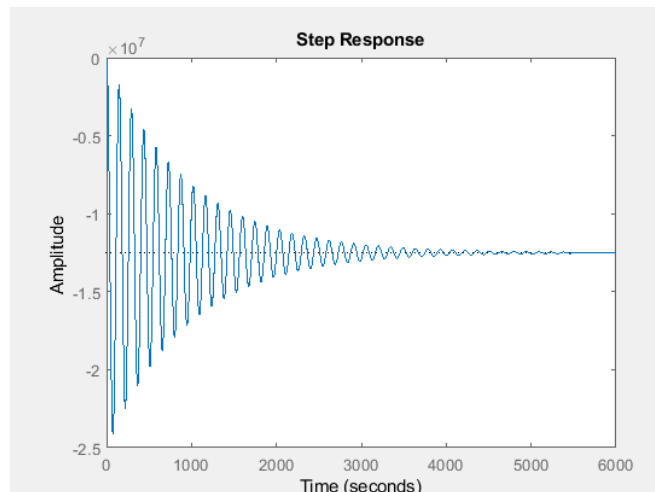


Fig.33 $k=-0.00000005$

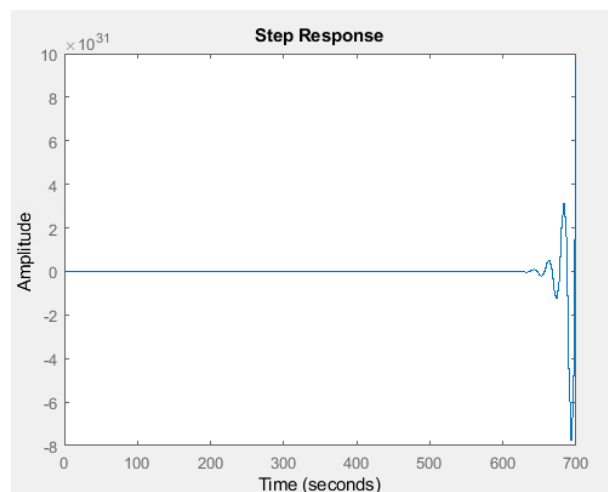


Fig.34 $K = -0.00005$

Para o caso de $K=0.00000005$, tem interesse também em ver algumas informações relevantes com a função **stepinfo()** na Fig.35.

```
RiseTime: 24
SettlingTime: 3715
SettlingMin: -2.4091e+07
SettlingMax: -1.7646e+06
Overshoot: 92.6915
Undershoot: 0
Peak: 2.4091e+07
PeakTime: 74
```

Fig.35 Valores do *stepinfo*

Como no caso em que $K = 0.00005$ o sistema não é estável não tem interesse ver os seus valores.

Para encontrar a Margem de Fase e de Ganho com atraso:

$$G_0(T\zeta) = \frac{520000000 * \zeta * (\zeta - 2)^3}{(\zeta + 2)^2 * (39907 * \zeta^2 + 172 * \zeta + 28)}$$

$$|G_0(Tiv)| = \frac{\sqrt{2704000000000000000T^4v^4 + 1081600000000000000T^2v^2}}{\sqrt{1592568649T^4v^4 - 2205208T^2v^2 + 784}}$$

Com recurso ao MATLAB, utilizando a função **margin()** que tem como *input* $G_0(z)$, obtiveram-se as seguintes Margens de Fase e Ganho:

Margem de Fase = -90

Margem de ganho = 0

Na Fig. pode-se observar diagrama de bode onde se confirma visualmente o obtido em cima.

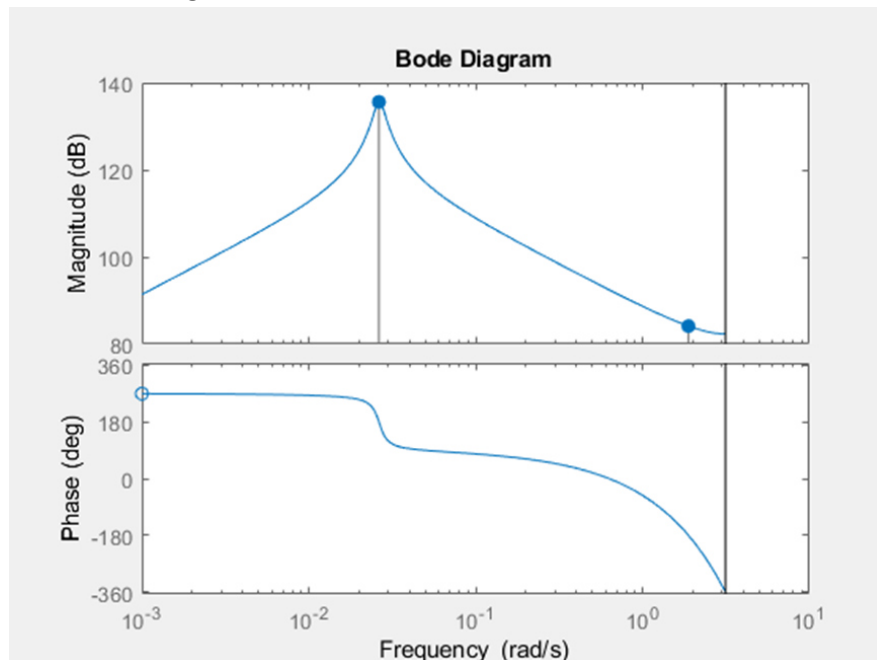


Fig.36 Diagrama de Bode com atraso

Para o novo compensador, verificou-se que o atraso resultou em dois polos na origem, para manter as condições anteriores, apenas é necessário anular o efeito destes polos adicionando dois zeros na origem ao compensador, sendo então possível manter os z_a e z_b e z_c obtidos na alínea 6:

$$G(z) = \frac{-25940z + 25940}{z^4 - 1.995z^3 + 0.9957z^2}$$

$$G_c(z) = K_c \frac{(z - z_a) * z^2}{(z - z_b)(z - z_c)}$$

Como podemos verificar na Fig. do *root locus*, é bastante semelhante ao conseguido anteriormente. Esta apresenta uma ligeira melhoria no *overshoot* e *settling time*, possivelmente dado pelo não anulamento total dos polos e zeros na origem, o que atraiu os polos dominantes mais para dentro do círculo resultando nesta melhoria.

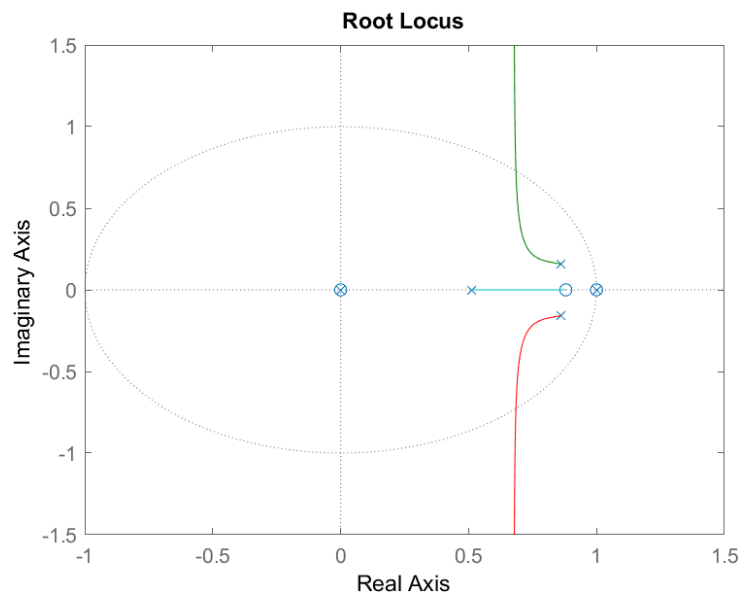


Fig.37 Root Locus com polos em malha fechada projetados com atraso

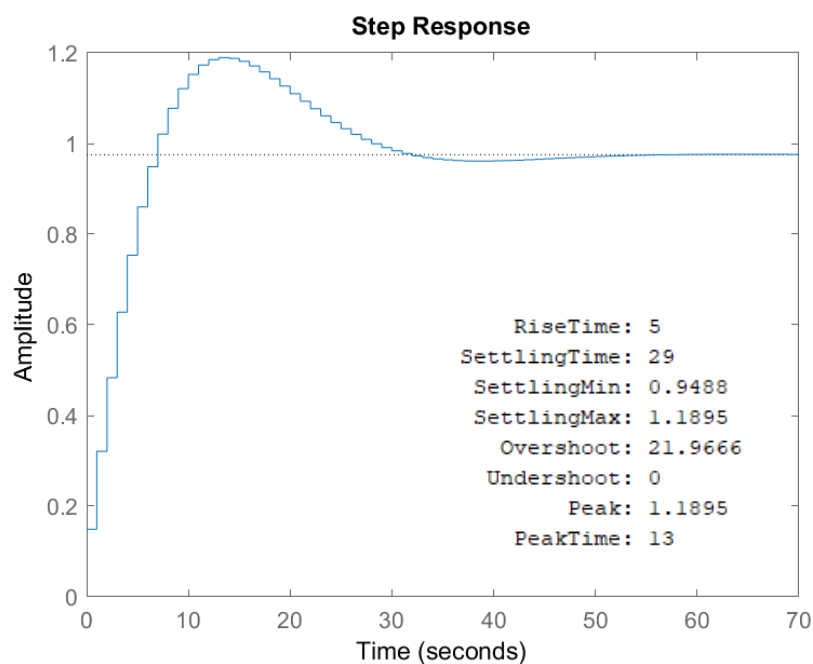


Fig.38 Resposta em degrau do sistema com compensador com atraso

8. Implementação dos controladores desenvolvidos.

Não foi possível chegar a nenhum resultado nesta alínea.

Conclusão

Dado por terminado o trabalho, de uma forma geral pode-se dizer que apesar de não, se ter implementado o controlador corretamente em MATLAB, seria possível controlar este sistema, por forma a manter o caso de infetados abaixo do limite máximo dos Serviço de Saúde.

Este trabalho permitiu também dar uma melhor ideia de como abordar sistemas discretos, e entender como o sistema do tipo SIR se comporta, utilizando as ferramentas abordadas na UC.

```

1  %% exercicio 4
2  function codig_analise
3  global G0 N S I R gamma T_inf ganho s;
4  N=10e6; %population
5  T_inf=6; % infection duration
6  gamma= 1 / T_inf;
7  syms s;
8  I = 2*10^5;
9  R = 10*I;
10 S = N - I - R;
11 ganho = -gamma*I*S/N
12 x=gamma*I/S
13 t=(gamma^2)*I/S
14
15 Gs = tf([ganho*1 0],[1,gamma*I/S,(gamma^2)*I/S])
16 T=1;
17 Gz=c2d(Gs,T,'zoh')
18 K=-0.00000001;
19 Gzf=feedback(Gz,K)
20 figure
21 step(Gzf);
22 S = stepinfo(Gzf)
23 end
24
25
26 %%ex 6 e 7 6)
27
28 z=zpk('z',1)
29
30 %Gc=((z-0.88)*z^2)/((z-1)*(z-0.2388)) %ex 7
31 Gc=((z-0.88))/((z-1)*(z-0.2388))
32
33 Gh=tf([1,-1],[1,-1.995,+0.9957],1)
34 atraso=tf([0 1],[1 0 0],1)
35
36 ganho= -6.7596e-06
37 ganho2=-2.594*10^4
38
39
40 figure;
41 rlocus(feedback(ganho*ganho2*Gc*Gh,1))
42 figure
43 step(feedback(ganho*Gc*ganho2*Gh,1))
44 stepinfo(feedback(ganho*Gc*ganho2*Gh,1))
45 feedback(ganho*ganho2*Gc*Gh,1)
46
47
48
49 %%exercicio 7 5)
50
51 syms z a;
52 ef= (z^-2)*((-2.6*10^4)*(z-1))/((z^2)-(1.995*z)+(0.9957))
53 efja=simplify(subs(ef,z,(1+a/2)/(1-a/2)))
54
55 zeros=double(solve((520000000*a*(a - 2)^3),a))
56 polos=double(solve(((a + 2)^2*(39907*a^2 + 172*a + 28)),a)) %subs
57
58 efjv = simplify(subs(efja,a,j*v))
59 efjv=subs(aefjv,v,0.0263)
60 absefjv=abs(efjv)
61 vela=double(efjv) %valor absoluto
62 %velaabs=abs(vela)
63 %angulo=(angle(efjv))==pi
64 %solver=solve(angulo,v)
65
66
67
68 Gh=tf([1,-1],[1,-1.995,+0.9957],1);
69 atraso=tf([0 1],[1 0 0],1);

```

```
70  ganho=-2.594*10^4;  
71  Gha= ganho*atraso*Gh  
72  figure;  
73  bodeplot (Gh*ganho)  
74  [mge,mfe,c,d]=margin (Gha)  
75
```