ACM,FAF,FLP,
31 Março 2020 (Parte I),
18 Maio 2020 (Parte II)

Projeto CDIG 2020: O vírus CODIG

Considere um País com uma população de 10 milhões de habitantes que foi atacado por um vírus, o vírus CODIG, para o qual a população não tinha imunidade prévia.

A evolução do número de doentes infectados ao longo do tempo, é descrita por um modelo epidemiológico de compartimentos, o modelo *SIR* (um dos mais simples, proposto em 1927 por Kermack e McKendrick, ver [1]). Neste modelo, a totalidade da população (***N***=10 milhões) é, em cada instante, dividida em três compartimentos: ***S*** com o número de pessoas Susceptíveis de serem infectadas, ***I*** com o número de pessoas infectadas, e ***R*** com o número de pessoas Recuperadas.

A doença infecta os susceptíveis, tornando-os infectados; e os infectados eventualmente acabarão por recuperar, alterando ao longo do tempo o valor de ***S, I*** e ***R***, mas mantendo constante **S**+***I***+***R***=***N.***

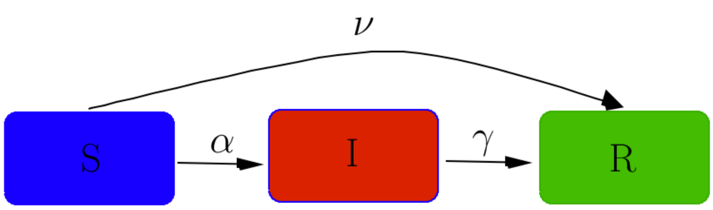


Figura 1: Modelo epidemiológico de compartimentos, o modelo SIR.

A dinâmica da propagação é expressa por um sistema de três equações diferenciais ordinárias:

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{S}}(t) &= -\alpha\mathbf{S}(t) - \nu\mathbf{S}(t) \\
\dot{\mathbf{I}}(t) &= \alpha\mathbf{S}(t) - \gamma\mathbf{I}(t) \\
\dot{\mathbf{R}}(t) &= \nu\mathbf{S}(t) + \gamma\mathbf{I}(t)
\end{aligned}
$$

em que α é a taxa de transição entre ***S*** e ***I***, e γ é a taxa de transição entre ***I*** e ***R***. Se houver uma vacina, então haverá transição de ***S*** directamente para ***R***, representada pelo termo νS.

Sendo T_{inf} a duração média da infecção em dias, e sendo R_t o número de reprodução nesse instante (inicialmente $R_t = R_0$, em que R_0, o número básico de reprodução, indica o número de outras pessoas que uma pessoa infectada irá contagiar, assumindo que as outras pessoas não estão ainda infectadas e que não foram vacinadas), temos que

$$\alpha = \frac{R_t}{T_{inf}} \frac{\mathbf{I}(t)}{\mathbf{N}}$$
$$\gamma = \frac{1}{T_{inf}}$$

Note-se que o facto do parâmetro α depender do valor de ***I***, torna a equação diferencial não linear. Assim, para trabalharmos com as ferramentas de teoria do controlo linear (aprendidas em TCON e CDIG) vamos ter que linearizar o modelo em torno de um ponto de funcionamento.

No entanto, o modelo não linear é útil para percebermos a dinâmica, simulando alguns cenários, utilizando o programa Matlab/Octave CODIG.M que foi disponibilizado.

Consideremos um horizonte de simulação de 180 dias, que o número básico de reprodução R_0 é 2.4, que a duração média da infecção T_{inf} é de 6 dias e que a taxa de vacinação é zero (não há ainda vacina). Considera-se que a intervenção no sistema pode ser feita actuando no número de reprodução nesse instante, fazendo $R_t = R_0 - u$, em que *u* será um valor do intervalo [0,2] escolhido em cada instante, representando o esforço de medidas de contenção como o isolamento social. Consideremos ainda que no instante inicial o número de infectados é ***I***(0)=100, o de recuperados nulo, ***R***(0)=0, e ***S***(0)=***N***-***I***(0).

O Cenário 1, sem quaisquer medidas de contenção, está representado na Figura 2. O resultado da simulação é que o número de infectados sobe rapidamente atingindo um pico superior a 2 milhões de infectados em menos de 60 dias, caindo para valores muito baixos ao final de cerca de 90 dias, quando o número de recuperados atingir quase 90% da população. Na figura, a linha horizontal representa a capacidade de serviço do sistema de saúde do País, que perto do pico é largamente ultrapassada.

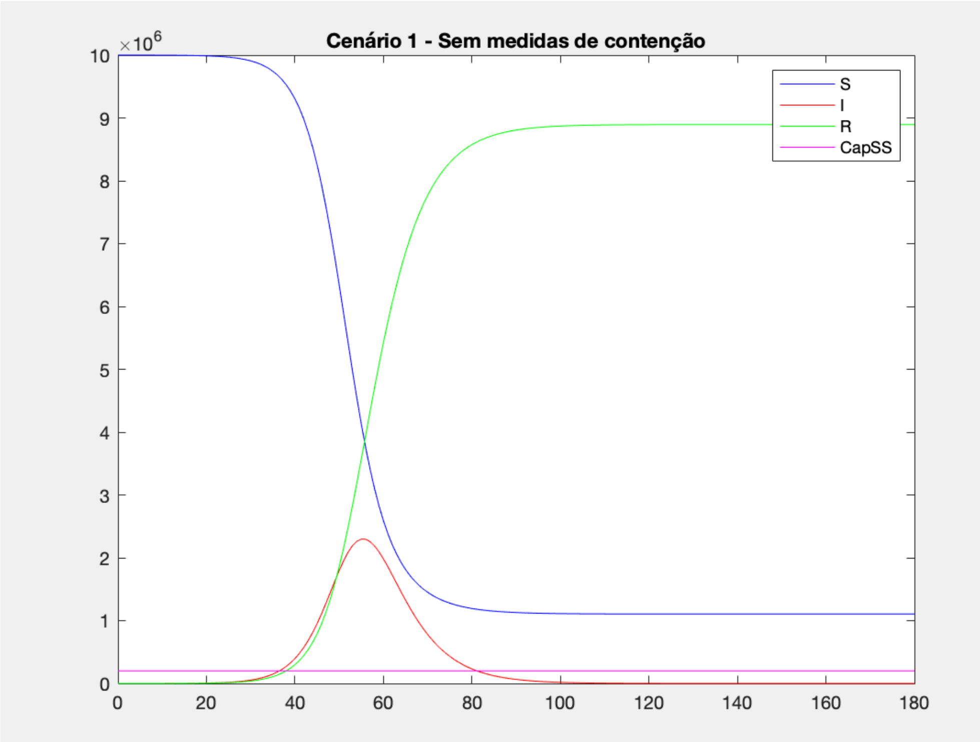


Figura 2: Cenário 1

No cenário 2, representado na Figura 3, são impostas medidas de contenção a partir do dia 35, conseguindo manter o número de infectados abaixo da capacidade do sistema de saúde.

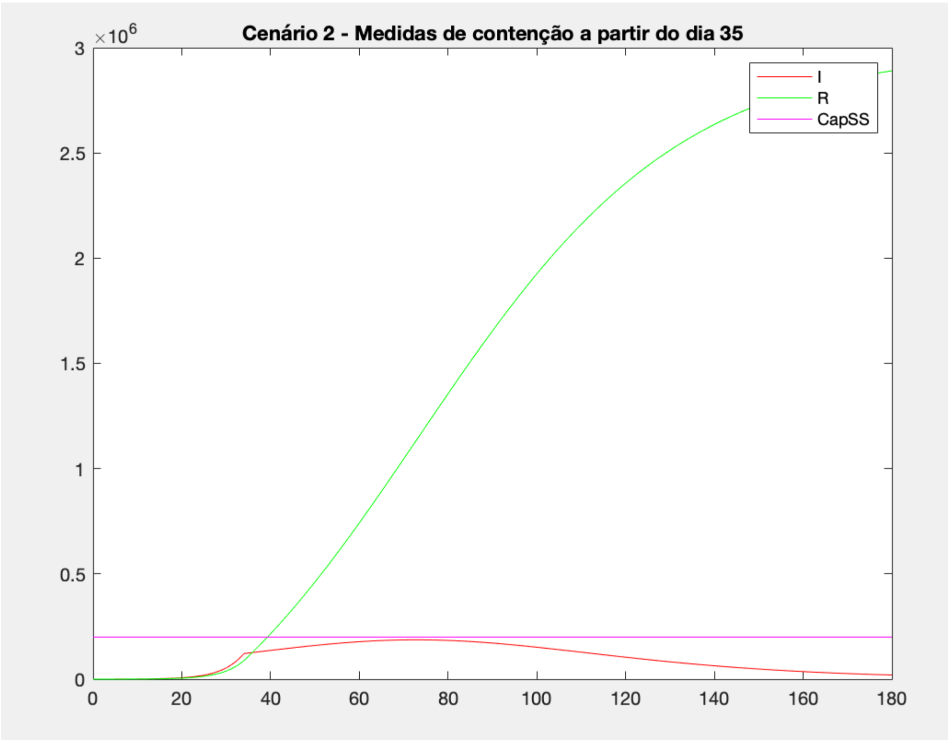


Figura 3: Cenário 2

No entanto, se as medidas de contenção forem retiradas ao final de 90 dias, haverá uma segunda onda de infectados que, embora menor que a do cenário 1, também ultrapassa muito a capacidade do sistema de saúde. Ver Figura 4.

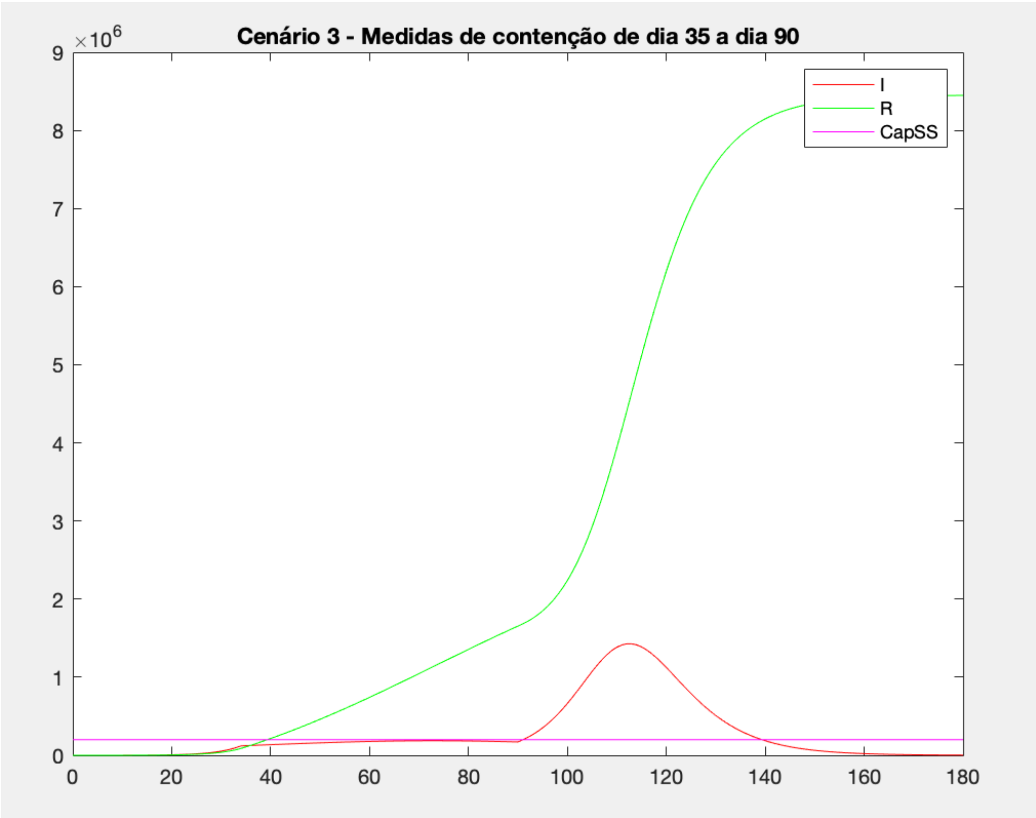


Figura 4: Cenário 3

Um cenário de saída controlada, a implementar após uma fase de fortes medidas de contenção, que é defendido em algumas investigações muito recentes ([2-5], de Março de 2020, no âmbito do estudo da COVID19), será o de tentar reduzir o esforço de contenção e ao mesmo tempo controlar o número de infectados, mantendo-o abaixo da capacidade do sistema de saúde, utilizando *feedback.*

No cenário 4, após 90 dias, são retiradas as medidas fortes de contenção, mas são novamente implementadas sempre que o número de infectados ultrapassa 80% da capacidade do sistema de saúde. Ver Figura 5.

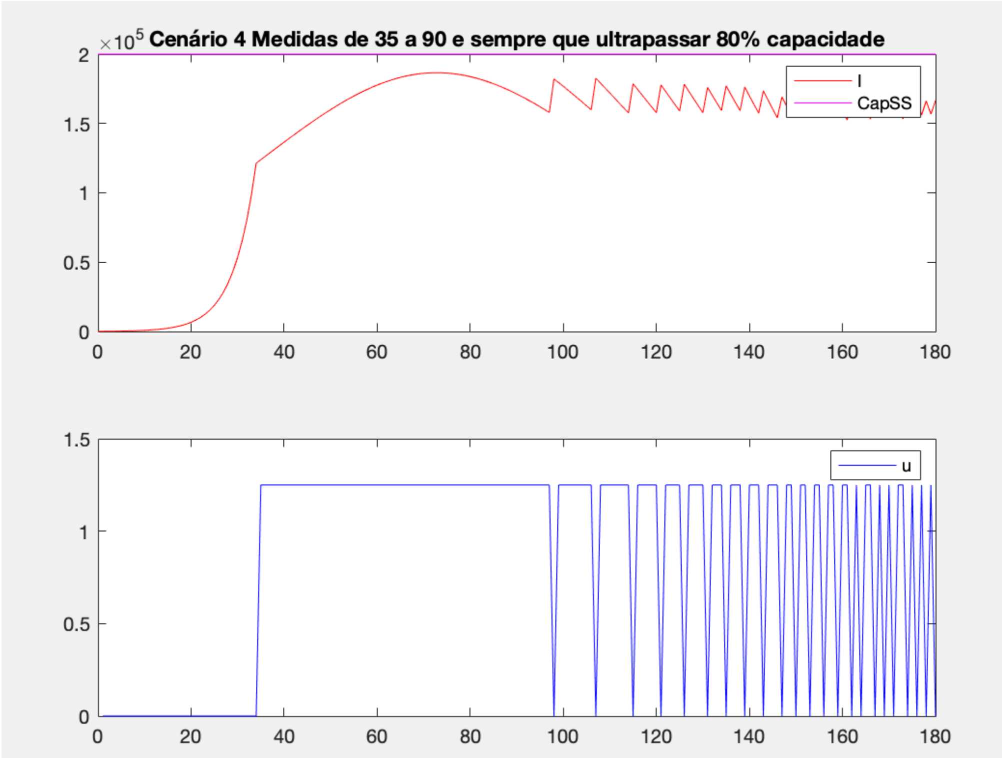
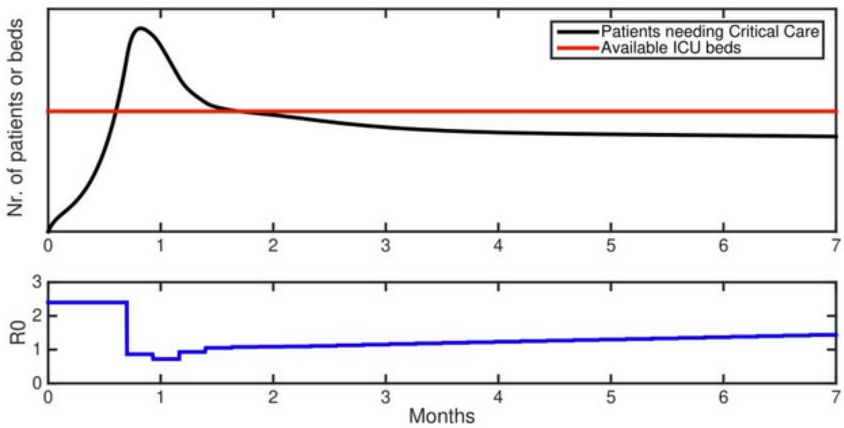


Figura 5: Cenário 4

No entanto, este “ligar-desligar” dos mecanismos de contenção e as consequentes oscilações do número de infectados não são desejáveis. A utilização de técnicas de engenharia de controlo poderá conseguir de forma mais suave atingir os mesmos objectivos de redução do esforço de contenção enquanto se mantém o número de infectados abaixo da capacidade do sistema de saúde (ver Fig 6). Isto é o que vos é proposto neste trabalho.



Systematically designing policies using control engineering principles permits stable recovery while maintaining healthcare capacity constraints.

Figura 6: Utilização de técnicas de engenharia de controlo para reduzir o esforço de contenção e manter o número de infectados abaixo da capacidade do sistema de saúde (em [5]).

Referências

[1] A matemática que explica o tsunami europeu. E português. J. Buesco, . Observador 15 Março 2020.
https://observador.pt/especiais/a-matematica-que-explica-o-tsunami-europeu-e-portugues/

[2] Impact of non-pharmaceutical interventions (NPIs) to reduce COVID-19 mortality and healthcare demand, Imperial College COVID-19 Response Team,
https://www.imperial.ac.uk/media/imperial-college/medicine/sph/ide/gida-fellowships/Imperial-College-COVID19-NPI-modelling-16-03-2020.pdf

[3] Coronavirus: The Hammer and the Dance, Tomas Pueyo
https://medium.com/@tomaspueyo/coronavirus-the-hammer-and-the-dance-be9337092b56

[4] Potential Long-Term Intervention Strategies for COVID-19, Marissa Childs, Morgan Kain, Devin Kirk, Mallory Harris, Jacob Ritchie, Lisa Couper, Isabel Delwel, Nicole Nova, Erin Mordecai https://covid-measures.github.io/

[5] Coronavirus: policy design for stable population recovery, Greg Stewart, Klaske van Heusden, Guy A Dumont. 29 March 2020
http://blog.ifac-control.org/control/coronavirus-policy-design-for-stable-population-recovery/

[6] Epidemic Calculator. http://gabgoh.github.io/COVID/index.html

Parte I - Sistemas Amostrados

1. Utilizando o programa Matlab/Octave CODIG.M, eventualmente modificando alguns parâmetros, simule e discuta algumas estratégias de actuação, nomeadamente:
   a. Verificar e discutir o que acontece se passar a existir uma taxa de vacinação positiva.
   b. Verificar e discutir o que acontece se passar a existir um tratamento que encurte a duração média da infecção.
   c. Verificar e discutir o que acontece se se implementar medidas de contenção que reduzam o número de reprodução durante alguns períodos de tempo (para além dos já analisados, mais cedo/tarde, maior/menor duração, maior/menor intensidade, intermitente, com realimentação, ...).
2. Considere um ponto de funcionamento com **(*S*,*I*,*R*)**=(*S**,*I**,*R**).
   a. Mostre que o valor de controlo que anula a variação do número de infectados no ponto de funcionamento é:

$$\mathbf{U}(t) = U^* = R_0 - \frac{N}{S^*}.$$

   b. Linearize o sistema dinâmico em torno do ponto de funcionamento (*S**,*I**,*R**). Mostre que, assumindo que o ponto de funcionamento é um ponto de equilíbrio[1], o sistema de equações diferenciais lineares para *S, I, R* em que *S*=***S***-*S**, *I*=***I***-*I** e *R*=***R***-*R** é dado por:

$$\dot{S}(t) = -aS(t) - \gamma I(t) + bU(t)$$
$$\dot{I}(t) = aS(t) - bU(t),$$

   em que

$$a = \gamma I^*/S^*$$
$$b = \gamma I^* S^*/N.$$

   c. Mostre que, em Laplace, a função transferência de *U(s)* para *I(s)* é igual a

$$G(s) = \frac{I(s)}{U(s)} = -\frac{\gamma I^* S^*}{N} \frac{s}{s^2 + \frac{\gamma I^*}{S^*}s + \frac{\gamma^2 I^*}{S^*}}.$$

[1] De facto, os pontos de equilíbrio com variação nula simultaneamente do número de infectado e do número de susceptíveis são obtidos quando I=0 ou com S=0, anulando completamente a dinâmica. Para obtermos o sistema linearizado estamos a assumir que o ponto de funcionamento escolhido (que anula a variação do número de infectados, mas não a variação do número de susceptíveis) é aproximadamente um ponto de equilíbrio.

3. Suponha que uma vez decidida uma actuação (um valor de *U*), esta é mantida constante durante um dia completo. Determine a função transferência impulsional, no domínio *Z*, $G_0(z)$, que inclui a planta e o precedente “sampler&holder”.
4. Considere o ponto de funcionamento (S^*,I^*,R^*) com I^*=2 x 10^5, R^*=10 x I^* e $S^*=N - I^* - R^*$. Esboce o lugar de raízes para o sistema em tempo discreto $G_0(z)$. Qual o intervalo de valores de ganho *K* admissíveis de modo que o sistema seja estável em malha fechada? Discuta o desempenho do sistema, nomeadamente o erro em regime permanente, o tempo de estabelecimento e a sobre-elongação, para valores de ganho nos extremos do intervalo e para alguns valores intermédios. (Apresente todos os cálculos necessários e confirme o resultado com o Matlab/Octave.)
5. Esboce o traçado Bode para $G_0(z)$. Determine as margens de fase e de ganho. (Apresente todos os cálculos necessários e confirme o resultado com o Matlab/Octave).
6. Projete um compensador, que poderá ter um pólo e um zero, de modo a melhorar os critérios de desempenho encontrados em 4.
7. Considere agora que o controlador introduz um atraso de 2 dias. Refaça 4,5 e 6 utilizando para os cálculos somente o Matlab/Octave.
8. Modifique o programa CODIG.M para implementar os controladores desenvolvidos. Compare a resposta do modelo linearizado com o do modelo não linear.

Pergunta Aberta Opcional

9. Aqui utilizamos o modelo SIR, que é um dos modelos epidemiológicos mais simples. Mas há modelos mais complexos que poderão representar de forma mais fiável a dinâmica da evolução de uma epidemia. Por exemplo, o modelo SEIR (com 4 compartimentos Susceptíveis -Expostos -Infectados- -Recuperados) utilizado em [6] ou o modelo utilizado em [4] com 9 compartimentos, poderá estar mais adequado a modelar algumas epidemias como é o caso da COVID19. Refaça algumas das questões anteriores utilizando um outro modelo retirado da literatura.

Parte II - Espaço de Estados

Considere agora na Parte II o modelo da figura seguinte.

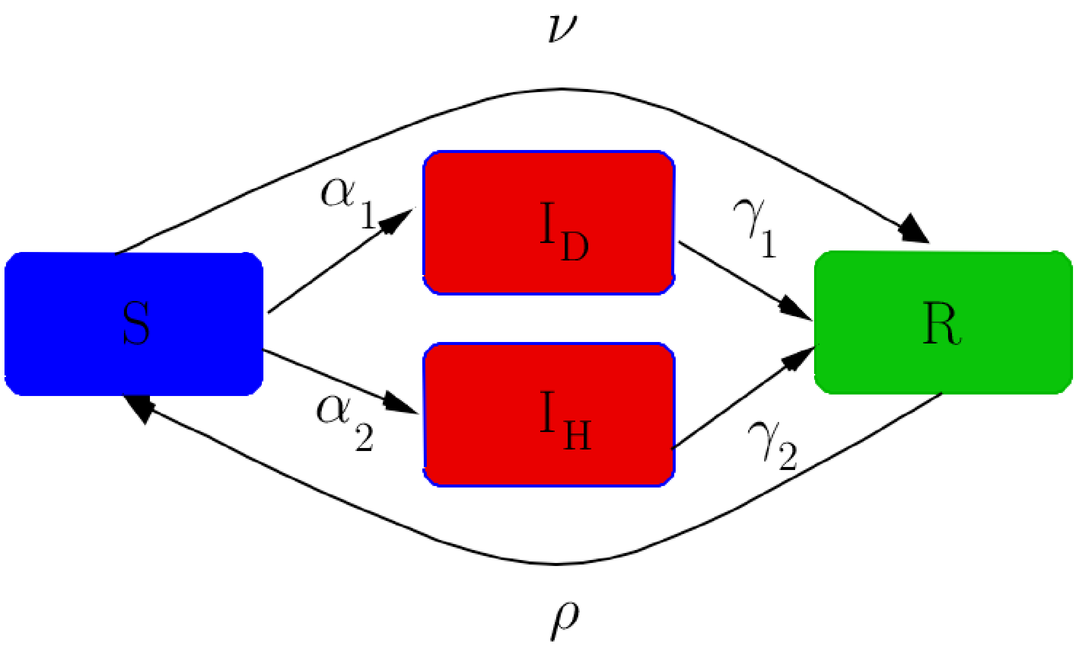


Figura 7: Novo modelo epidemiológico de compartimentos para o vírus CODIG.

Neste modelo, a população infectada está dividida em dois compartimentos: os infectados menos graves a recuperar no domicílio (I_D), e os infectados mais graves a recuperar em hospital (I_H), com taxas de transição dos susceptíveis para cada um destes compartimentos de α_1 e α_2, respectivamente, e taxas de transição de cada um destes compartimentos para os recuperados de γ_1 e γ_2, respectivamente. Considera-se ainda que cada indivíduo, depois de recuperado, tem imunidade temporária, passando depois de algum tempo à condição de susceptível novamente, com taxa de transição ρ (ver [7]).

A dinâmica da propagação é expressa por um sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{S}}(t) &= -(\alpha_1 + \alpha_2)\mathbf{S}(t) - \nu\mathbf{S}(t) + \rho\mathbf{R}(t) \\
\dot{\mathbf{I}_{\mathrm{D}}}(t) &= \alpha_1\mathbf{S}(t) - \gamma_1\mathbf{I}_{\mathrm{D}}(t) \\
\dot{\mathbf{I}_{\mathrm{H}}}(t) &= \alpha_2\mathbf{S}(t) - \gamma_2\mathbf{I}_{\mathrm{H}}(t) \\
\dot{\mathbf{R}}(t) &= \nu\mathbf{S}(t) + \gamma_1\mathbf{I}_{\mathrm{D}}(t) + \gamma_2\mathbf{I}_{\mathrm{H}}(t) - \rho\mathbf{R}(t).
\end{aligned}$$

Assumindo que a propagação se dá essencialmente através dos infectados a recuperar no domicílio e não dos hospitalizados, considera-se que

$$\begin{aligned}
\alpha &= \alpha_1 + \alpha_2 = (R_0 - U)\gamma_1 \frac{\mathbf{I}_{\mathrm{D}}(t)}{\mathbf{N}} \\
\alpha_1 &= 0.85\,\alpha \\
\alpha_2 &= 0.15\,\alpha \\
\gamma &= \gamma_1 = \gamma_2 = \frac{1}{T_{inf}}.
\end{aligned}$$

Nesta Parte II, deverão utilizar técnicas de espaço de estados ([8] e [9]) para analisar o sistema e projectar controladores e estimadores.

Referências

[7] Marcel Salathé, Nicky Case. “What Happens Next? COVID-19 Futures, Explained With Playable Simulations” . https://ncase.me/covid-19/?fbclid=IwAR0cT16DmPi3AsNPNsDato2O7_D5Ioqd5hgDO5J1GMq7-bp3PiA041D4_vY

[8] Katsuhiko Ogata, “Modern Control Engineering” Fifth Edition (Capítulos 9 e 10), Prentice-Hall, Boston, 2010.

[9] Ogata, Katsuhiko; “Discrete-time control systems”.(Capítulos 5 e 6), Prentice-Hall, Boston, 1995.

1. Análise do sistema por espaço de estados em tempo contínuo.

A. Considere um ponto de funcionamento com $(\boldsymbol{S},\boldsymbol{I_D},\boldsymbol{I_H},\boldsymbol{R})=(S^*,I_D^*,I_H^*,R^*)$ com **U**=U* e $\nu = \nu^*$. Verifique que este ponto de funcionamento é um ponto de equilíbrio (i.e. a variação de $(\boldsymbol{S},\boldsymbol{I_D},\boldsymbol{I_H},\boldsymbol{R})$ é nula nesse ponto) quando

$$U^* = R_0 - \frac{N}{0.85\,S^*},$$
$$\frac{I_H^*}{I_D^*} = \frac{0.15}{0.85}$$
$$S^* = \frac{\gamma}{\alpha^*}(I_H^* + I_D^*)$$
$$R^* = \frac{(\alpha^* + \nu^*)S^*}{\rho}.$$

B. Seja N= 10 x 10^6, I^*=2 x 10^5, $I^*= I_D^*+I_H^*$, $R^*=10 \times I^*$ e $S^*=N - I^* - R^*$. As taxas de transição são ρ =1/60 e $\gamma = 1/6$. Verifique que estes valores de (S^*,I_D^*,I_H^*,R^*) formam um ponto de equilíbrio quando $\nu^*=0$. Determine o valor de U* nestas condições.

C. Linearize o sistema dinâmico em torno do ponto de equilíbrio (S^*,I_D^*,I_H^*,R^*) com **U**=U* e $\nu = \nu^*$. Encontre o sistema de equações diferenciais lineares que descrevem as variações em torno do ponto de equilíbrio, com $S=\boldsymbol{S}-S^*$, $I_D=\boldsymbol{I_D} - I_D^*$, $I_H=\boldsymbol{I_H}-I_H^*$, $R=\boldsymbol{R}-R^*$, U= **U**-U* e $V = \nu - \nu^*$.

D. Determine uma representação no espaço de estados do sistema, em que o estado é $x=(S,I_D ,I_H,R)$, a saída é composta pelo número de infectados hospitalizados e pelo número total de infectados, $y = (I_H , I_D + I_H)$, e o controlo $u = (U,V)$ tem duas entradas correspondentes ao esforço de contenção e à taxa de vacinação.

E. Verifique se o sistema é estável e estabilizável. Verifique se o sistema é controlável quando só temos uma entrada para actuar, $u=U$, *e* quando temos duas entradas, $u=(U,V)$. Verifique se o sistema é observável quando só conseguimos medir o número de hospitalizados $y = I_H$, e quando conseguimos medir também o número total de infectados, $y = (I_H , I_D + I_H)$.

F. Escreva, se possível, as representações canónicas controlável, observável, e diagonal, para o caso de uma entrada e uma saída ($u=U$, $y=I_H$). Para cada caso, indique a matriz de mudança de base para a nova representação.

G. Encontre a função de transferência a partir da representação no espaço dos estados para o caso de uma entrada e uma saída ($u=U$, $y =I_H$).

H. Apresente um gráfico com a resposta temporal transitória: (i) com condições iniciais nulas e controlo em degrau, em que ***U*** *passa de* U* para 0.9 U* ; (ii) controlo nulo e condições iniciais não nulas, em que $\boldsymbol{I_D}$ é igual a $1.2\ I_D^*$.

2. Projecto de controlador em tempo contínuo por espaço de estados

A. Considere o modelo de espaço de estados em que todo o estado é mensurável e *u=U*. Projete um controlador, através da técnica de colocação de pólos, com desempenho que considere adequado. Justifique a localização escolhida para os pólos.
B. Considere agora que apenas a saída do sistema $y = I_H$ é diretamente acessível, todos os outros estados terão que ser estimados. Projete um estimador de estado tal que a norma do erro do estimador ao fim de dois dias seja um décimo da norma do erro inicial. Simule o comportamento do estimador para condições iniciais e erro de estimação inicial não nulos.
C. Escreva as equações que definem o sistema com o controlador e estimador.
D. Analise a resposta do sistema controlado (via estimador), verificando o desempenho obtido.

3. Espaço de estados em tempo discreto.

A. Escreva o modelo de espaço de estados em tempo discreto a partir de 1.C, considerando que o período de amostragem é um dia.
B. Encontre a função de transferência em Z a partir da representação no espaço dos estados anterior. Compare com a que obteria por discretização da função de transferência obtida em 1G.
C. Projete um controlador que, assumindo que não há saturação da entrada, leve o sistema ao seu ponto de equilíbrio em apenas 4 instantes de tempo (sugestão: investigar *dead-beat control*). Verifique por simulação.