



Álgebra Linear

Matrizes

Camila Martins Saporetti
(camila.saporetti@iprj.uerj.br)

Matrizes

- Uma matriz é uma estrutura bi-dimensional onde todos os elementos são do mesmo tipo
- Os elementos são dispostos em linhas e colunas e cada célula dela é completamente identificada pela sua posição e seu valor

Matrizes

- Uma matriz de **m** linhas e **n** colunas é representada por:

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = [a_{ij}]_{m \times n}$$

Matrizes

- Exemplos

- $2 \times 3 \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$

- $1 \times 2 \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$

- $1 \times 1 \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix}$

Matrizes

- **Definição:** Duas matrizes $A_{m \times n} = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B_{r \times s} = [b_{ij}]_{r \times s}$ são iguais $A = B$, se elas têm:
 - o mesmo número de linhas ($m = r$)
 - o mesmo número de colunas ($n = s$), e
 - todos os seus elementos correspondentes são iguais ($a_{ij} = b_{ij}$)

Matrizes

- Matrizes iguais - exemplo

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

Matrizes

Tipos Especiais de Matrizes

- **Matriz Quadrada:** É aquela cujo número de linhas é igual ao número de colunas. **Ex:** $A_{2 \times 2}$, $B_{5 \times 5}$ e $D_{m \times m}$
- **Matriz Nula:** É aquela em que $a_{ij} = 0$, para todo i e todo j .

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrizes

Tipos Especiais de Matrizes

- **Matriz Coluna:** É aquela que possui apenas uma única coluna (**$n = 1$**). Ex: $A_{2 \times 1}$, $B_{5 \times 1}$ e $C_{m \times 1}$
- **Matriz Linha:** É aquela que possui apenas uma única linha (**$m = 1$**). Ex: $A_{1 \times 2}$, $B_{1 \times 5}$ e $C_{1 \times n}$

Matrizes

Tipos Especiais de Matrizes

- **Matriz Diagonal:** É uma matriz quadrada ($m=n$) onde $a_{ij} = 0$, para todo $i \neq j$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- Os elementos que **não** estão na **diagonal principal** são iguais a zero.
 - Os elementos da diagonal principal podem ser, ou não, iguais a zero.

Matrizes

Tipos Especiais de Matrizes

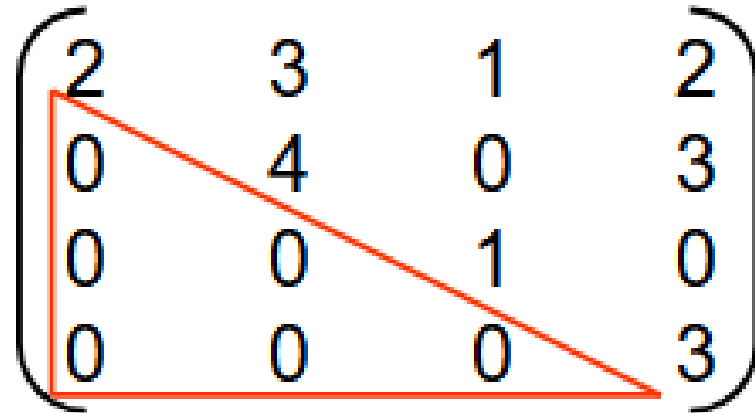
- **Matriz Identidade Quadrada:** É aquela em que $a_{ii} = 1$ e $a_{ij} = 0$, para todo $i \neq j$

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrizes

Tipos Especiais de Matrizes

- **Matriz Triangular Superior:** É uma matriz quadrada ($m = n$) onde todos os elementos abaixo da diagonal são nulos ($a_{ij} = 0$ para todo $i > j$)

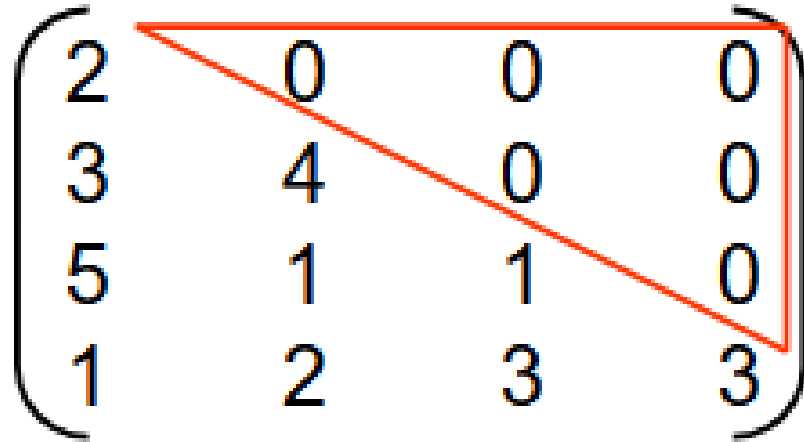

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

The image shows a 4x4 matrix with the following elements: Row 1: 2, 3, 1, 2; Row 2: 0, 4, 0, 3; Row 3: 0, 0, 1, 0; Row 4: 0, 0, 0, 3. A red triangle is drawn from the top-left element (2) to the bottom-right element (3), with a vertical line on the left and a horizontal line at the bottom, indicating that all elements below the diagonal are zero.

Matrizes

Tipos Especiais de Matrizes

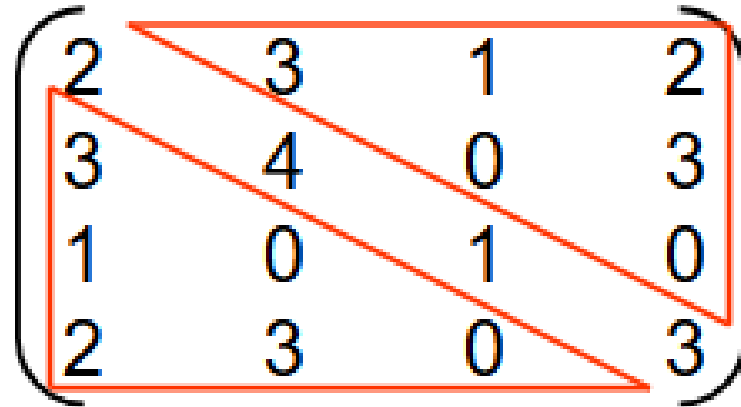
- **Matriz Triangular Inferior:** É uma matriz quadrada ($m = n$) onde todos os elementos acima da diagonal são nulos ($a_{ij} = 0$ para todo $i < j$)


$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Matrizes

Tipos Especiais de Matrizes

- **Matriz Simétrica:** É aquela onde $m = n$ e $a_{ij} = a_{ji}$



A 4x4 matrix is shown with red lines highlighting its symmetry. The matrix is:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

The red lines connect the elements a_{ij} to a_{ji} for all $i \neq j$, illustrating that $a_{ij} = a_{ji}$.

Matrizes

Operações com Matrizes

- **Adição:** A soma de duas matrizes de mesma ordem $\mathbf{A}_{m \times n} = [\mathbf{a}_{ij}]_{m \times n}$ e $\mathbf{B}_{m \times n} = [\mathbf{b}_{ij}]_{m \times n}$, que denotamos por $\mathbf{A} + \mathbf{B}$, é a matriz $\mathbf{S}_{m \times n}$ cujos elementos, $[\mathbf{s}_{ij}]$, são dados pela soma dos correspondentes elementos de A e B, isto é:
 - $\mathbf{s}_{ij} = \mathbf{a}_{ij} + \mathbf{b}_{ij}$

Matrizes

Operações com Matrizes

- Adição - exemplo

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \\ 2 & 5 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 5 \\ 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 3 & 5 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$$

Matrizes

Operações com Matrizes

- **Adição:** Propriedades ($A_{m \times n}$, $B_{m \times n}$ e $C_{m \times n}$)
- $A + B = B + A$ (comutatividade)
- $A + (B + C) = (A + B) + C$ (associatividade)
- $A + \mathbf{0} = A$, onde $\mathbf{0}$ denota a matriz nula $m \times n$

Matrizes

Operações com Matrizes

- **Multiplicação por um Escalar:** Seja $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e k um número, então definimos uma nova matriz
- $k.A = [k.a_{ij}]_{m \times n}$

Matrizes

Operações com Matrizes

- Multiplicação por um Escalar - exemplo

$$7 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 5 \\ 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 28 \\ -14 & 35 \\ 7 & 0 \\ 28 & 7 \end{pmatrix}$$

Matrizes

Operações com Matrizes

- **Multiplicação por um Escalar: Propriedades**
 - $k.(A + B) = k.A + k.B$, sendo B uma matriz de mesma ordem que A
 - $(k_1 + k_2).A = k_1.A + k_2.A$, k_1 e k_2 números
 - $0.A = \mathbf{0}$, onde 0 é o número zero e $\mathbf{0}$ é a matriz nula
 - $k_1.(k_2.A) = (k_1.k_2).A$, k_1 e k_2 números

Matrizes

Operações com Matrizes

- **Transposição:** Dada uma matriz $A=[a_{ij}]_{m \times n}$, podemos obter outra matriz $A^t = [b_{ij}]_{n \times m}$, cujas linhas são as colunas de A , isto é, $b_{ij} = a_{ji}$
- A^t é chamada de transposta de A

Matrizes

Operações com Matrizes

- Transposição - exemplo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \quad A^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Matrizes

Operações com Matrizes

- Transposição - exemplo

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 9 \end{pmatrix} \quad B^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

Matrizes

Operações com Matrizes

- **Transposta: Propriedades**
 - Se A é simétrica: $A = A^t$
 - $(A^t)^t = A$
 - $(A + B)^t = A^t + B^t$
 - $(k.A)^t = k.A^t$, onde k é um número

Matrizes

Operações com Matrizes

- **Multiplicação de Matrizes:** Sejam $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B = [b_{ij}]_{n \times p}$, definimos $A \cdot B = [c_{uv}]_{m \times p}$, onde:

$$c_{uv} = \sum_{k=1}^n a_{uk} \cdot b_{kv} = a_{u1} \cdot b_{1v} + a_{u2} \cdot b_{2v} + \dots + a_{un} \cdot b_{nv}$$

Matrizes

Operações com Matrizes

- **Multiplicação de Matrizes - OBS:**

i) Só podemos efetuar o produto de duas matrizes $\mathbf{A}_{m \times n}$ e $\mathbf{B}_{s \times p}$, se o número de colunas da primeira for igual ao número de linhas da segunda, i.e., $n = s$. Além disso, a matriz resultado $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ terá ordem $m \times p$.

ii) O elemento c_{ij} é obtido multiplicando os elementos da **linha i** da primeira matriz pelos elementos da **coluna j** da segunda matriz, e somando esses produtos

Matrizes

Operações com Matrizes

- Multiplicação de uma matriz algébrica $A_{2 \times 3}$ pela matriz $B_{3 \times 2}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$$

- A matriz **A** possui 3 colunas, e a matriz **B**, 3 linhas.
- **C** → resultado da multiplicação **A**•**B**
- **C** é uma matriz $C_{2 \times 2}$, pois a matriz **A** tem **2 linhas**, e a matriz **B**, **2 colunas**

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

Matrizes

Operações com Matrizes

- Para encontrar os termos, vamos relacionar sempre as linhas da matriz A com as colunas da matriz B:
- $c_{11} \rightarrow$ 1ª linha de A e 1ª coluna de B
- $c_{12} \rightarrow$ 1ª linha de A e 2ª coluna de B
- $c_{21} \rightarrow$ 2ª linha de A e 1ª coluna de B
- $c_{22} \rightarrow$ 2ª linha de A e 2ª coluna de B

Matrizes

Operações com Matrizes

- Calcula-se cada um dos termos fazendo a multiplicação entre os termos da linha de A e os termos da coluna de B.
- Começando por c_{11} :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$$

- 1ª linha de A
- 1ª coluna de B

$$c_{11} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + a_{13} \cdot b_{31}$$

Matrizes

Operações com Matrizes

- Calculando c_{12} :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$$

- 1ª linha de A
- 2ª coluna de B

$$c_{12} = a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} + a_{13} \cdot b_{32}$$

Matrizes

Operações com Matrizes

- Calculando c_{21} :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$$

- 2ª linha de A
- 1ª coluna de B

$$c_{21} = a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} + a_{23} \cdot b_{31}$$

Matrizes

Operações com Matrizes

- Calculando o termo c_{22} :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$$

- 2ª linha de A
- 2ª coluna de B

$$c_{22} = a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} + a_{23} \cdot b_{32}$$

Matrizes

Operações com Matrizes

- Matriz C resultante

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + a_{13} \cdot b_{31} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} + a_{13} \cdot b_{32} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} + a_{23} \cdot b_{31} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} + a_{23} \cdot b_{32} \end{pmatrix}$$

Matrizes

Operações com Matrizes

- **Multiplicação de Matrizes – exemplo**
- Vamos calcular a multiplicação entre as matrizes A e B

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 6 & 4 & -2 \\ 0 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrizes

Operações com Matrizes

- Sabemos que, em $A_{2 \times 2}$ e $B_{2 \times 3}$, o número de colunas da primeira é igual ao número de linhas da segunda, então o produto existe.
- $C = A \cdot B$ e sabemos que $C_{2 \times 3}$

Matrizes

Operações com Matrizes

- Multiplicando

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 6 & 4 & -2 \\ 0 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 3 \cdot 6 + 2 \cdot 0 & 3 \cdot 4 + 2 \cdot 7 & 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 \\ 5 \cdot 6 + (-1) \cdot 0 & 5 \cdot 4 + (-1) \cdot 7 & 5 \cdot (-2) + (-1) \cdot 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 18 + 0 & 12 + 14 & -6 + 2 \\ 30 + 0 & 20 - 7 & -10 - 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 18 & 26 & -4 \\ 30 & 13 & -11 \end{bmatrix}$$

Matrizes

Operações com Matrizes

- **Multiplicação de Matrizes: Propriedades**

i) Em geral, $A.B \neq B.A$, observe que $A.B$ pode ser igual a $0_{m \times n}$, sem que A ou B sejam $0_{m \times n}$ (exemplo próximo slide)

ii) $AI = IA = A$, onde I é a matriz identidade (Mostre!)

iii) $A.(B + C) = A.B + A.C$ (Distributividade à esquerda)

iv) $(A + B).C = A.C + B.C$ (Distributividade à direita)

v) $(A.B).C = A.(B.C)$ (Associatividade)

vi) $(AB)^t = B^t A^t$, observe a mudança na ordem do produto

vii) $0.A = 0$ e $A.0 = 0$, 0 é uma matriz nula

Matrizes

Operações com Matrizes

- **Multiplicação de Matrizes:** Mostrar propriedade i) para A e B

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Matrizes

Operações com Matrizes

- **Multiplicação de Matrizes:**
- $C_{3 \times 3} = A.B$
- $c_{11} = 1.1 + (-1).2 + 1.1 = 0$
- $c_{12} = 1.2 + (-1).4 + 1.2 = 0$
- $c_{13} = 1.3 + (-1).6 + 1.3 = 0$

Matrizes

Operações com Matrizes

- **Multiplicação de Matrizes:**

- $C_{3 \times 3} = A.B$

- $c_{21} = (-3).1 + 2.2 + (-1).1 = 0$

- $c_{22} = (-3).2 + 2.4 + (-1).2 = 0$

- $c_{23} = (-3).3 + 2.6 + (-1).3 = 0$

Matrizes

Operações com Matrizes

- **Multiplicação de Matrizes:**
- $C_{3 \times 3} = A.B$
- $c_{31} = (-2).1 + 1.2 + 0.1 = 0$
- $c_{32} = (-2).2 + 1.4 + 0.2 = 0$
- $c_{33} = (-2).3 + 1.6 + 0.3 = 0$

Matrizes

Operações com Matrizes

- Multiplicação de Matrizes:

-

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrizes

Operações com Matrizes

- **Multiplicação de Matrizes:**
- $D = B.A$
- $d_{11} = 1.1 + 2.(-3) + 3.(-2) = -5$
- $d_{12} = 1.(-1) + 2.2 + 3.1 = 6$
- $d_{13} = 1.1 + 2.(-1) + 3.0 = -1$

Matrizes

Operações com Matrizes

- **Multiplicação de Matrizes:**
- $D = B.A$
- $d_{21} = 2.1 + 4.(-3) + 6.(-2) = -22$
- $d_{22} = 2.(-1) + 4.2 + 6.1 = 12$
- $d_{23} = 2.1 + 4.(-1) + 6.0 = -2$

Matrizes

Operações com Matrizes

- **Multiplicação de Matrizes:**
- $D = B.A$
- $d_{31} = 1.1 + 2.(-3) + 3.(-2) = -11$
- $d_{32} = 1.(-1) + 2.2 + 3.1 = 6$
- $d_{33} = 1.1 + 2.(-1) + 3.0 = -1$

Matrizes

Operações com Matrizes

- Multiplicação de Matrizes:

$$D = \begin{pmatrix} -5 & 6 & -1 \\ -22 & 12 & -2 \\ -11 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

- $C \neq D$

Exercícios

1) Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} -10 & 1 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & 2 & 8 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 4 & -1 \\ 0 & 6 & 3 & -3 \end{bmatrix}$, calcule:

a) $A + B$

b) $3B$

c) A^t

Exercícios

2) Calcule a multiplicação das matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$