Álgebra Linear

Sistemas de Equações Lineares

Camila Martins Saporetti
(camila.saporetti@iprj.uerj.br)

Sistemas de Equações Lineares

Sistemas e Matrizes

- Um sistema de equações lineares com m equações e n incógnitas é um conjunto de equações do tipo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \quad \dots\dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

- com a_{ij}, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, números reais (ou complexos).
- Uma solução para esse sistema é a n-upla de números $(x_1, x_2, ..., x_n)$ que satisfaça simultaneamente as m equações.

Sistemas de Equações Lineares
Sistemas e Matrizes

- O sistema anterior pode ser escrito na forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

- ou A.X = B

Sistemas de Equações Lineares
Sistemas e Matrizes

- Onde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Matriz dos coeficientes

Matriz das incógnitas

Matriz dos termos indepen-dentes

Sistemas de Equações Lineares
Sistemas e Matrizes

- Outra matriz é a chamada **matriz ampliada do sistema**:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Sistemas de Equações Lineares

- Forma 1 de resolução: Suponha o sistema:

$$
(\mathrm{I})\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 & (1) \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 4 & (2) \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 5 & (3) \end{cases}
\qquad
\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 4 \\ 1 & -3 & -2 & 5 \end{pmatrix}
$$

Objetivo: Encontrar o valor de x_1, x_2 e x_3 que satisfazem as três equações ao mesmo tempo.

Ou seja....

$$
x_1 = A \qquad x_2 = B \qquad x_3 = C
$$

Ou...

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & A \\ 0 & 1 & 0 & B \\ 0 & 0 & 1 & C \end{pmatrix}
$$

Sistemas de Equações Lineares
Sistemas e Matrizes

- São três as operações elementares sobre as linhas de uma matriz

1) Permuta da i-ésima e j-ésima linhas ($L_i \leftrightarrow L_j$)

- **Exemplo:** $L_2 \leftrightarrow L_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Sistemas de Equações Lineares
Sistemas e Matrizes

- São três as operações elementares sobre as linhas de uma matriz

  2) Multiplicação da i-ésima linha por um escalar não-nulo k ($L_i \rightarrow kL_i$)

  - **Exemplo:** $L_2 \leftarrow -3L_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -12 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

Sistemas de Equações Lineares
Sistemas e Matrizes

- São três as operações elementares sobre as linhas de uma matriz

3) Substituição da i-ésima linha pela i-ésima linha mais k vezes a j-ésima linha ($L_i \leftarrow L_i + k.L_j$)

- **Exemplo:** $L_3 \leftarrow L_3 + 2.L_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Sistemas de Equações Lineares

- É importante observarmos que usamos apenas operações de **multiplicação** e **adição** e **permuta de linhas**
- Assim, todo o processo é **reversível**
- Os sistemas criados ao longo do processo são ditos equivalentes
  - Ou seja, a solução para qualquer um deles é solução para o outro

Sistemas de Equações Lineares

- **Permuta de colunas é possível MAS com cuidado!!!! Lembrem que lidamos com um sistema de equações!** Ou seja:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 4 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 5 \end{cases}$$

É equivalente a

$$\begin{cases} 4x_2 + x_1 + 3x_3 = 1 \\ 5x_2 + 2x_1 + 4x_3 = 4 \\ -3x_2 + x_1 - 2x_3 = 5 \end{cases}$$

Ok, mas…

Sistemas de Equações Lineares

- **Permuta de colunas é possível MAS com cuidado!!!! Lembrem que lidamos com um sistema de equações!** Ou seja:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 4 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 5 \end{cases}$$

NÃO
é equivalente a

$$\begin{cases} 1 + 4x_2 + 3x_3 = x_1 \\ 4 + 5x_2 + 4x_3 = 2x_1 \\ 5 - 3x_2 - 2x_3 = x_1 \end{cases}$$

ERRADO!!!!

Sistemas de Equações Lineares

- A operação elementar inversa é uma operação que desfaz o efeito da operação elementar.
- Depois de haver realizado uma operação elementar sobre uma matriz, aplicando sobre a matriz resultante a operação elementar inversa retornamos à matriz original.

Sistemas de Equações Lineares

- **Exemplo**
- Considere as seguintes operações elementares de linhas

  (a) $h : l_i \leftarrow l_i + cl_j$

  (b) $h : l_i \leftarrow - rl_i$

  (c) $h : l_i \leftrightarrow l_j$

onde os escalares c e r são não–nulos.

As respectivas operações elementares inversas são dadas por:

(a) $h_1 : l_i \leftarrow l_i - cl_j$

(b) $h_1 : l_i \leftarrow - (1/r)l_i$

(c) $h_1 : l_i \leftrightarrow l_j$

Sistemas de Equações Lineares

Considere a seguinte sequência de operações elementares de linhas

$l_2 \leftarrow l_2 - 2l_1$, $l_3 \leftarrow l_3 - 3l_1$ e $l_2 \leftarrow -(1/5)l_2$.

Desse modo, a sequência de operações elementares inversas é dada por:

$l_2 \leftarrow l_2 + 2l_1$, $l_3 \leftarrow l_3 + 3l_1$ e $l_2 \leftarrow -5l_2$.

Sistemas de Equações Lineares

Forma Escada

- **Definição:** Uma matriz mxn é linha reduzida à forma escada se:

  1) O primeiro elemento não nulo de uma linha não nula é 1

  2) Cada coluna que contém o primeiro elemento não nulo de alguma linha tem todos os seus outros elementos iguais a zero

  3) Toda linha nula ocorre abaixo de todas as linhas não nulas (isto é, daquelas que possuem pelo menos um elemento não nulo)

  4) Se as linhas 1, ..., r são as linhas não nulas, e se o primeiro elemento não nulo da linha i ocorre na coluna k_i, então

  - $k_1 < k_2 < .... < k_r$
    - Essa condição impõe a forma escada à matriz

Sistemas de Equações Lineares
Forma Escada

- **Exemplo**

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sistemas de Equações Lineares
Forma Escada

- **Exemplo**

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

É forma escada.

Sistemas de Equações Lineares
Forma Escada

- **Contra-exemplo**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Não é forma escada pois a segunda condição não é satisfeita: a terceira coluna possui o primeiro elemento não nulo da terceira linha, logo todos os seus outros elementos deveriam ser zero.

Sistemas de Equações Lineares
Forma Escada

- **Contra-exemplo**

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Não é forma escada pois a primeira e a quarta condições não são satisfeitas:
1) O primeiro elemento não nulo de uma linha não nula não é 1 (zero)
2) O primeiro elemento não-nulo da segunda linha deveria estar em uma posição maior do que a do primeiro elemento não-nulo da linha anterior.

Sistemas de Equações Lineares
Forma Escada

- **Contra-exemplo**

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Não é forma escada pois a primeira e a terceira condições não são satisfeitas:
1) Tem uma linha nula ocorrendo acima de uma linha não nula.
2) O primeiro elemento de uma linha não-nula não é 1 (-1)

Sistemas de Equações Lineares

Forma Escada

- **Teorema:** Toda matriz A_{mxn} é equivalente a uma única matriz escalonada reduzida à forma escada.
- **Definição:** Dada uma matriz A_{mxn}, seja B_{mxn} a matriz escalonada reduzida equivalente a A.
  - O **posto** de A, denotado por **p**, é o número de linhas não-nulas de B.
  - A **nulidade** de A é o número n – p.

Sistemas de Equações Lineares
Forma Escada

- **Exemplo:** Achar o posto e a nulidade de A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sistemas de Equações Lineares
Forma Escada

- **Exemplo:** Forma escada de A:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 = L_1 + L_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 = -1.L_1 + L_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 = L2/2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5/2 \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sistemas de Equações Lineares

Forma Escada

- **Exemplo:** Forma escada de A:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5/2 \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 = -2.L_2 + L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 5/2 \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 = 4.L_2 + L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 8 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 = L_3/8} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 1 & 11/8 \end{pmatrix}$$

Sistemas de Equações Lineares

Forma Escada

- **Exemplo:** Forma escada de A:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 1 & 11/8 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 = -2.L_3 + L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 11/8 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_1 = 3.L_3 + L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -7/8 \\ 0 & 1 & 0 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 11/8 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

O posto de A é 3 e a nulidade é 4 – 3 = 1

Sistemas de Equações Lineares

Forma Escada

- Semelhante à resolução de um sistema de equações
- Ou seja, dado o sistema:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + 0x_2 + 3x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- A solução é: $x_1 = -7/8$, $x_2 = -1/4$, $x_3 = 11/8$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -7/8 \\ 0 & 1 & 0 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 11/8 \end{pmatrix}$$

Sistemas de Equações Lineares
Forma Escada

- **Exemplo 2:** Achar o posto e a nulidade de B:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & -5 & 1 \\ 4 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

Sistemas de Equações Lineares
Forma Escada

- **Exemplo 2:** Forma escada de B:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & -5 & 1 \\ 4 & 16 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -5 & 1 \\ 4 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 = -2.L_1 + L_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -9 & -1 \\ 1 & -5 & 1 \\ 4 & 16 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 = -1.L_1 + L_3} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -9 & -1 \\ 0 & -9 & -1 \\ 4 & 16 & 8 \end{pmatrix}$$

Sistemas de Equações Lineares

Forma Escada

- **Exemplo 2:** Forma escada de B:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -9 & -1 \\ 0 & -9 & -1 \\ 4 & 16 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_4 = -4.L_1 + L_4} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -9 & -1 \\ 0 & -9 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 = L_2/-9} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1/9 \\ 0 & -9 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 = -4.L_2 + L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 14/9 \\ 0 & 1 & 1/9 \\ 0 & -9 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sistemas de Equações Lineares
Forma Escada

- **Exemplo 2:** Forma escada de B:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 14/9 \\ 0 & 1 & 1/9 \\ 0 & -9 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 = 9.L_2 + L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 14/9 \\ 0 & 1 & 1/9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

O posto de B é 2 e a nulidade é 3 – 2 = 1

Sistemas de Equações Lineares
Soluções

- Se tivermos um sistema de **uma** equação e uma incógnita **ax = b**, teremos 3 possibilidades:

  a ≠ 0: neste caso, a equação tem uma única solução

  - x = b/a

  – **a = 0** e **b = 0**: temos 0x = 0 o que significa que qualquer número real é solução da equação

  – **a = 0** e **b ≠ 0**: temos 0x = b o que significa que não existe solução para essa equação

- Vamos analisar o que acontece com sistemas de duas equações e duas incógnitas...

Sistemas de Equações Lineares
Soluções

- **Exemplo 1**

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 - 3x_2 = 6 \end{cases} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

Sistemas de Equações Lineares

Soluções

- Precisamos agora passar a matriz reduzida à forma escada

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_2 = -1.L_1 + L_2]{L_1 = L_1 / 2} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 5/2 \\ 0 & -7/2 & 7/2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 = (-2/7).L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 5/2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_1 = (-½).L_2 + L_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Sistemas de Equações Lineares
Soluções

- **Exemplo 1 (cont.):**

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 - 3x_2 = 6 \end{cases}$$

- Assim, o sistema dado tem uma única solução com $x_1 = 3$ e $x_2 = -1$
- O posto da matriz de coeficientes reduzidos e o da matriz ampliada é 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Matriz de coeficientes reduzidos

Matriz ampliada

Sistemas de Equações Lineares
Soluções

- **Exemplo 2:**

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5 \\ 6x_1 + 3x_2 = 15 \end{cases} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & 15 \end{pmatrix}$$

Sistemas de Equações Lineares
Soluções

- Precisamos agora passar a matriz reduzida à forma escada

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & 15 \end{pmatrix} \xrightarrow[\;]{\substack{L_1 = L_1 / 2 \\ L_2 = -6.L_1 + L_2}} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Assim, a segunda equação pode ser ignorada, pois não estabelece condição sobre x_1 ou x_2

Sistemas de Equações Lineares
Soluções

- Assim, para resolver o sistema, consideramos a primeira equação:

$$2x_1 + x_2 = 5$$

- e, por exemplo, assumimos que $x_2 = t$
- Dessa forma:

$$x_1 = (5 – t)/2$$

- Para qualquer valor de t dentro dos reais

Sistemas de Equações Lineares
Soluções

- **Exemplo 3:**

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5 \\ 6x_1 + 3x_2 = 10 \end{cases} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & 10 \end{pmatrix}$$

Sistemas de Equações Lineares
Soluções

- Precisamos agora passar a matriz reduzida à forma escada

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_2 = -6.L_1 + L_2]{L_1 = L_1 / 2} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 = L_2/(-5)} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 5/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_1 = (-5/2).L_2 + L_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sistemas de Equações Lineares
Soluções

- No caso, tornamos o sistema equivalente a:

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_2 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 = 1 \end{cases}$$

- Não existe nenhum valor de x_1 e x_2 que satisfaça a segunda equação, assim, o sistema não tem solução

Sistemas de Equações Lineares
Soluções

- O posto da matriz de coeficientes reduzidos é 1 e o da matriz ampliada é 2

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz de coeficientes reduzidos

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz ampliada

Sistemas de Equações Lineares

Soluções – Caso Geral

- Consideremos um sistema de m equações lineares com n incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$
\left(
\begin{array}{lllll}
a_{11}x_1 & + a_{12}x_2 & + \ldots + & a_{1n}x_n & = b_1 \\
a_{12}x_1 & + a_{22}x_2 & + \ldots + & a_{2n}x_n & = b_2 \\
\ldots & \ldots. & & \ldots & \ldots \\
a_{m1}x_1 & + a_{m2}x_2 & + \ldots + & a_{mn}x_n & = b_m
\end{array}
\right)
$$

- cujos coeficientes a_{ij} e termos constantes b_i são números reais

Sistemas de Equações Lineares
Soluções – Caso Geral

- Este sistema poderá ter:

  i) Uma única solução
  - Sistema possível (compatível) e determinado

  ii) Infinitas soluções
  - Sistema possível (compatível) e indeterminado

  iii) Nenhuma solução
  - Sistema impossível (incompatível)

Sistemas de Equações Lineares
Soluções – Caso Geral

- **Teorema:**

  i) Um sistema de m equações e n incógnitas admite solução se, e somente se, o **posto da matriz ampliada** é **igual** ao **posto da matriz dos coeficientes**

  ii) Se as duas matrizes têm o mesmo posto p e **p = n** (**número de incógnitas**), então a solução será única

  iii) Se as duas matrizes têm o mesmo posto p e **p < n**, então podemos escolher **n – p incógnitas**, as outras p incógnitas serão dadas em função dessas

  - O número de incógnitas/variáveis livres do sistema é n - p

Sistemas de Equações Lineares
Soluções – Caso Geral

- Seja:
  - p_c = Posto da matriz dos coeficientes
  - p_a = Posto da matriz ampliada
  - Se $p_c = p_a$, chamaremos de p
  - m e n são as dimensões da matriz de coeficientes
    - m equações com n incógnitas

Sistemas de Equações Lineares
Soluções – Caso Geral

- **Exemplo 1:**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad p_c = p_a = 3$$

- m = 3, n = 3 e p = 3
- Logo, o sistema admite uma única solução.

Sistemas de Equações Lineares
Soluções – Caso Geral

- **Exemplo 2:**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & -10 \\ 0 & 1 & 5 & -6 \end{pmatrix} \qquad p_c = p_a = 2$$

- m = 2, n = 3 e p = 2
- Logo, o sistema tem n-p=3-2=1 variável livre.

Sistemas de Equações Lineares
Soluções – Caso Geral

- **Exemplo 3:**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad p_c = 2,\ p_a = 3$$

- m = 3, n = 3
- Como $p_c \neq p_a$, o sistema é impossível e não tem solução.

Sistemas de Equações Lineares
Soluções – Caso Geral

- **Exemplo 4:**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -10 & -2 & -10 \\ 0 & 1 & 7 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad p_c = p_a = 2$$

- m = 3, n = 4 e p = 2.
- Temos n-p=4-2=2 variáveis livres.

Sistemas de Equações Lineares
Soluções – Caso Geral

- **Exemplo 5:** Vamos resolver o sistema

$$\begin{cases} x + 2y + z + t = 0 \\ x + 3y - z + 2t = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 = -1.L_1 + L_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_1 = -2.L_2 + L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Sistemas de Equações Lineares

Soluções – Caso Geral

- **Exemplo 5 (cont.):**
  - Assim, o sistema tem duas variáveis livres
    - z e t
  - Logo, se fixarmos os valores de z e t teremos:
    - $x = -5z + t$
    - $y = 2z - t$

Sistemas de Equações Lineares
Soluções – Caso Geral

- **Exemplo 6:** Vamos resolver o sistema

$$\begin{cases} x + 3y + z = 0 \\ 2x + 6y + 2z = 0 \\ -x - 3y - z = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{L_2 = -2.L_1 + L_2 \\ L_3 = L_1 + L_3}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sistemas de Equações Lineares
Soluções – Caso Geral

- **Exemplo 6 (cont.):**
  - Novamente, o sistema tem duas variáveis livres
    - y e z
  - Logo, se fixarmos os valores de y e z teremos:
    - $x = -3y - z$

Sistemas de Equações Lineares
Soluções – Caso Geral

- **Exemplo 7:** Vamos resolver o sistema

$$\begin{cases} x + 2y + z + t = 1 \\ x + 3y - z + 2t = 3 \end{cases} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 = -1.L_1 + L_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_1 = -2.L_2 + L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Sistemas de Equações Lineares

Soluções – Caso Geral

- **Exemplo 7 (cont.):**
  - Novamente, duas variáveis livres
    - z e t
  - Logo, se fixarmos os valores de z e t teremos:
    - $x = -5z + t - 3$
    - $y = 2z – t + 2$

Sistemas de Equações Lineares
Soluções – Caso Geral

- **Exemplo 8:** Considere o sistema abaixo:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + 2y + 2z = 9 \\ 2x + y + 3z = 11 \end{cases}$$

Sistemas de Equações Lineares
Soluções – Caso Geral

- Para fazermos o escalonamento devemos transformar o sistema acima em uma matriz.
- Assim, pegamos os valores dos coeficientes e do termo independente após a igualdade.

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 2 & 9 \\ 2 & 1 & 3 & 11 \end{array}\right] \sim$$

Sistemas de Equações Lineares
Soluções – Caso Geral

- Com a matriz montada, o primeiro passo é fazer uma operação (adição, subtração, multiplicação ou divisão) que anula pelo menos um elemento da matriz.

- Ao analisar a matriz, percebe-se que se subtrairmos a linha 2 com a linha 1, anulamos um elemento.

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 2 & 9 \\ 2 & 1 & 3 & 11 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 11 \end{array}\right] L_2' = L_2 - L_1 \sim$$

Sistemas de Equações Lineares

Soluções – Caso Geral

- Próximo passo, anulamos mais um elemento subtraindo a linha 3 pelo dobro da linha 1, colocando o resultado na linha 3.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 11 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right] \quad L_3' = L_3 - (2 \times L_1) \sim$$

Sistemas de Equações Lineares
Soluções – Caso Geral

- Agora, se somarmos a linha 2 com a linha 3, anulamos mais um elemento.

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ \boxed{0 \quad 1 \quad 1} & & & \boxed{3} \\ \boxed{0 \quad 0 \quad 2} & & & \boxed{2} \end{array}\right] L_3' = L_2 + L_3 \sim$$

Sistemas de Equações Lineares

Soluções – Caso Geral

- A diagonal principal não pode ser nula, então temos que transformar o número 2 em 1, para isso basta dividirmos a linha 3 por 2.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \; L_3' = \frac{L_3}{2}$$

Sistemas de Equações Lineares

Soluções – Caso Geral

- Neste passo já temos a forma escalonada, não reduzida, aqui já é possível encontrar os valores das variáveis x, y e z.
- Fazendo a substituição nas equações do sistema, pois já sabemos que a variável z é igual a 1.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Sistemas de Equações Lineares
Soluções – Caso Geral

- Tendo $z = 1$
- Substituindo em L_2
- $y + z = 3 \rightarrow y = 3 - z \rightarrow y = 3 - 1 = 2$
- Substituindo em L_1
- $x + y + z = 6 \rightarrow x = 6 - y - z \rightarrow x = 6 - 2 - 1 = 3$

Sistemas de Equações Lineares
Soluções – Caso Geral

- Vamos prosseguir para ver o processo até o final.
- O intuito agora é anularmos os elementos acima da diagonal principal.
- Perceba que se subtrairmos a linha 2 com a linha 3, anulamos um elemento.

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \quad L_2' = L_2 - L_3 \sim$$

Sistemas de Equações Lineares
Soluções – Caso Geral

- Vamos anular mais um elemento que não está na diagonal principal, para isso devemos subtrair a linha 1 com a linha 3.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \quad L_1' = L_1 - L_3 \sim$$

Sistemas de Equações Lineares

Soluções – Caso Geral

- Por fim, vamos anular o último elemento que não está na diagonal principal. Então subtraímos a linha 1 pela linha 2.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] L_1' = L_1 - L_2 \sim$$

Sistemas de Equações Lineares

Soluções – Caso Geral

- **Exemplo 9:** Se x, y e z são a solução do sistema linear

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 2z = 2 \\ x + 4y + 5z = 4 \end{cases}$$

- Determine o produto entre x, y e z.

Sistemas de Equações Lineares

Soluções – Caso Geral

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 4 \end{bmatrix} L_2 \Leftarrow L_2 - L_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 5 & 4 \end{bmatrix} L_3 \Leftarrow L_3 - L_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \end{bmatrix} L_3 \Leftarrow L_3 - 3\,L_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Sistemas de Equações Lineares
Soluções – Caso Geral

- Exemplo 9
- $z = 0$
- Substituindo em L_2
- $y + z = 1 \rightarrow y = 1 - z \rightarrow y = 1 - 0 = 1$
- Substituindo em L_1
- $x + y + z = 1 \rightarrow x = 1 - y - z \rightarrow x = 1 - 1 - 0 = 0$
- Logo,
- $x.y.z = 0.1.0 = 0$

Exercício

- Usando escalonamento, resolva o sistema a seguir:

$$\begin{cases} 2x + 4y - 2z = 2 \\ -2x - 2y + 2z = 1 \\ 5x + 4y - 3z = 6 \end{cases}$$