Introdução à Álgebra Linear

Diagonalização de Operadores

Camila Martins Saporetti
(camila.saporetti@iprj.uerj.br)

Diagonalização de Operadores

- **Objetivo:** Encontrar uma base no espaço vetorial na qual a matriz de um determinado operador linear seja a mais simples possível

Base de Autovetores

- Dado um operador linear $T:V \rightarrow V$, nosso objetivo é conseguir uma **base β** de V na qual a matriz do operador nessa base ($[T]^{\beta}_{\beta}$) seja uma **matriz diagonal** que é a forma mais **simples** possível de se representar uma transformação

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$$

Base de Autovetores

- **Teorema:** Autovetores associados a autovalores distintos são linearmente independentes.
- **Corolário:** Se V é um espaço vetorial de dimensão ***n*** e $T:V \rightarrow V$ é um operador linear que possui ***n*** autovetores distintos, então V possui uma base cujos vetores são todos autovetores de T
  - Em outras palavras, se conseguirmos encontrar tantos **autovetores distintos** quanto for a **dimensão do espaço**, podemos garantir a existência de uma **base** de autovetores
    - Ex: Em $T:R^2 \rightarrow R^2$ a base terá dim = 2 e pode ser encontrado 2 autovetores distintos

Base de Autovetores

- Sejam λ_1, λ_2 autovalores, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, e v_1, v_2 autovetores associados aos autovalores λ_1 e λ_2, respectivamente. Prova: v_1 e v_2 são LI.
- Seja $a_1v_1 + a_2v_2 = 0$. Apliquemos a transformação $T - \lambda_2 I$.
  - É necessário usar a linearidade de T e lembrar que $T(v_i) = \lambda_i v_i$ e $Iv_i = v_i$

$(T(a_1v_1) - a_1v_1\lambda_2 I) + (T(a_2v_2) - a_2v_2\lambda_2 I) = 0$

$a_1(T(v_1) - \lambda_2 v_1) + a_2(T(v_2) - \lambda_2 v_2) = 0$

$a_1(\lambda_1 v_1 - \lambda_2 v_1) + a_2(\lambda_2 v_2 - \lambda_2 v_2) = 0$

$a_1(\lambda_1 - \lambda_2)v_1 + a_2(\lambda_2 - \lambda_2)v_2 = 0$ ou $a_1(\lambda_1 - \lambda_2)v_1 = 0$

Como $v_1 \neq 0$ e $\lambda_1 \neq \lambda_2$, determinamos que $a_1 = 0$.

O mesmo acontece para $T - \lambda_1 I$, portanto v_1 e v_2 são LI.

Base de Autovetores

- **Exemplo 1:** Seja $T:R^2 \rightarrow R^2$ o operador linear definida por T(x, y) = (-3x+4y, -x + 2y) cuja matriz em relação à base canônica α {(1, 0),(0, 1)} é:

$$[T]^{\alpha}_{\alpha} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- queremos encontrar uma base β de autovetores, se possível, e ainda observar de que tipo é a matriz $[T]^{\beta}_{\beta}$

Cont.

Base de Autovetores

- **Exemplo: 1** Cálculo dos autovalores e autovetores:

$$\det\begin{pmatrix} -3-\lambda & 4 \\ -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1 \text{ e } \lambda_2 = -2$$

$$\lambda_1 = 1 \Rightarrow \mathbf{v_1} = (y, y)$$

$$\lambda_2 = -2 \Rightarrow \mathbf{v_2} = (4y, y)$$

Cont.

Base de Autovetores

- **Exemplo 1:** Como temos dois autovalores diferentes podemos **garantir**, a existência de uma **base de autovetores**
  - Lembrando que estamos no R^2 e dim $R^2 = 2$
- Temos dois autovetores associados a λ_1 e λ_2
  - Com eles podemos formar os vetores $\mathbf{v_1} = (1, 1)$ e $\mathbf{v_2} = (4, 1)$ os quais formam uma base em R^2
  - Isto é, o espaço admite uma base $\beta = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\}$ formada por autovetores de T
- Calculemos $[T]^{\beta}_{\beta}$ ....

Cont.

Base de Autovetores

- **Exemplo 1:** Como, por definição:
- $T(\mathbf{v_1}) = \lambda_1\mathbf{v_1} = \lambda_1\mathbf{v_1} + 0.\mathbf{v_2} = 1.\mathbf{v_1} + 0.\mathbf{v_2}$
- $T(\mathbf{v_2}) = \lambda_2\mathbf{v_2} = 0.\mathbf{v_1} + \lambda_2.\mathbf{v_2} = 0.\mathbf{v_1} - 2.\mathbf{v_2}$
- Então

$$[T]^{\beta}_{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

- Observando que a matriz em relação à base de autovetores é diagonal

Base de Autovetores

- **Exemplo 2:** Seja $T:R^3 \rightarrow R^3$ o operador linear cuja matriz em relação à base canônica α é:

$$[T]^{\alpha}_{\alpha} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- $p(\lambda) = \det([T]^{\alpha}_{\alpha} - \lambda I) = (3 - \lambda)^2(-1 - \lambda)$
- $\Rightarrow \lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -1$
- Observe que $\lambda_1 = 3$ tem dupla multiplicidade

Cont.

Base de Autovetores

- **Exemplo 2:**
  - Para $\lambda_1 = 3$ temos $\mathbf{v} = (x, y, 0) \Rightarrow [(1, 0, 0), (0, 1, 0)]$
    - $\mathbf{v_1} = (1, 0, 0)$
    - $\mathbf{v_2} = (0, 1, 0)$
  - Para $\lambda_2 = -1$ temos $\mathbf{v} = (z, -5z/4, z) \Rightarrow [(1, -5/4, 1)]$
    - $\mathbf{v_3} = (1, -5/4, 1)$
  - Então $\beta = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\}$ é uma base de R^3 constituída de autovetores de T e
    - $T(\mathbf{v_1}) = \lambda_1\mathbf{v_1} = \lambda_1\mathbf{v_1} + 0.\mathbf{v_2} + 0.\mathbf{v_3} = 3.\mathbf{v_1} + 0.\mathbf{v_2} + 0.\mathbf{v_3}$
    - $T(\mathbf{v_2}) = \lambda_2\mathbf{v_2} = 0.\mathbf{v_1} + \lambda_2.\mathbf{v_2} + 0.\mathbf{v_3} = 0.\mathbf{v_1} + 3.\mathbf{v_2} + 0.\mathbf{v_3}$
    - $T(\mathbf{v_3}) = \lambda_3\mathbf{v_3} = 0.\mathbf{v_1} + 0.\mathbf{v_2} + \lambda_3.\mathbf{v_3} = 0.\mathbf{v_1} + 0.\mathbf{v_2} - 1.\mathbf{v_3}$

Cont.

Base de Autovetores

$$[T]^{\beta}_{\beta} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Observe que, dada a dupla multiplicidade, λ_1 aparece duas vezes

Novamente, temos uma matriz diagonal...

Base de Autovetores

- Não é por acaso que as duas matrizes dos exemplos anteriores são diagonais
- Dada uma transformação linear qualquer $T:V \rightarrow V$, se conseguirmos uma base $\beta = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n}\}$ formada por **n** autovetores de T, então, como:
  - $T(\mathbf{v_1}) = \lambda_1 \mathbf{v_1} + 0.\mathbf{v_2} + ... + 0.\mathbf{v_n}$
  - $T(\mathbf{v_2}) = 0.\mathbf{v_1} + \lambda_2.\mathbf{v_2} + ... + 0.\mathbf{v_n}$
  - ....
  - $T(\mathbf{v_n}) = 0.\mathbf{v_1} + 0.\mathbf{v_2} + ... + \lambda_n.\mathbf{v_n}$
- A matriz $[T]^{\beta}_{\beta}$ será uma matriz diagonal onde os elementos da diagonal principal são os autovalores λ_i

Base de Autovetores

$$[T]^{\beta}_{\beta} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots. & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Base de Autovetores

- **Definição:** $T:V \to V$ um operador linear. Dizemos que T é um **operador diagonalizável** se existe uma base de V cujos elementos são autovetores de T

- Os exemplos 1 e 2 anteriores são diagonalizáveis

Base de Autovetores

- **Exemplo 3:** Seja $T: R^3 \rightarrow R^3$ o operador linear cuja matriz em relação à base canônica α é:

$$[T]^{\alpha}_{\alpha} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- $p(\lambda) = (3 - \lambda)^2(-1 - \lambda)$
  - Para $\lambda_1 = 3 \Rightarrow \mathbf{v_1} = (x, 0, 0)$ ou $[(1, 0, 0)]$
  - Para $\lambda_2 = -1 \Rightarrow \mathbf{v_2} = (-z/16, -5z/4, z)$ ou $[(-1, -20, 16)]$
- Nesse caso, temos apenas dois autovetores LI não podendo formar uma base de R^3
  - Logo T não é diagonalizável

Polinômio Minimal

- **Definição:** Seja $p(x) = a_n x^n + .. + a_1 x + a_0$ um polinômio e A uma matriz quadrada. Então p(A) é a **matriz**:
  - $p(A) = a_n A^n + .. + a_1 A + a_0 I$
  - onde I é a matriz identidade
- Quando p(A) = 0, dizemos que o polinômio anula a matriz A

Polinômio Minimal

- **Exemplo:**
  - $p(x) = x^2 - 9, \qquad q(x) = 2x + 3$
  - $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$p(A) = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - 9.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$q(A) = 2.\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + 3.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Logo, p(x) anula A e q(x) não anula A

Polinômio Minimal

- **Definição:** Seja A uma matriz quadrada. O polinômio minimal de A é um polinômio
  - $m(x) = x^k + a_{k-1}x^{k-1} + ... + a_0$
- Tal que:
  - i) $m(A) = 0$, i.e., $m(x)$ anula a matriz A
  - ii) $m(x)$ é o polinômio de menor grau dentre aqueles que anulam A
    - Observe que $a_k = 1$

Polinômio Minimal

- **Teorema:** Sejam $T: V \rightarrow V$ um operador linear e α uma base qualquer de V de dimensão n:
- Então T é diagonalizável se, e somente se, o polinômio minimal de $[T]^{\alpha}_{\alpha}$ é da forma
  - $m(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \dots (x - \lambda_k)$
  - Com $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ distintos

Polinômio Minimal

- **Teorema de Cayley-Hamilton:** Seja $T:V\rightarrow V$ um operador linear, α uma base de V e p(x) um polinômio característico de T:
- Então:

$$p([T]^{\alpha}_{\alpha}) = 0$$

- Isto significa que o polinômio característico é um candidato a polinômio minimal porque ele satisfaz a condição (i) da definição de polinômio minimal

Polinômio Minimal

- **Exemplo:** No caso de uma matriz 2x2:
- Seja

$$[T]^{\alpha}_{\alpha} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

- Então o polinômio característico é:

$$p(\lambda) = \det\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \lambda . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\} = (a - \lambda)(d - \lambda) - bc$$

- Fazendo $\lambda = [T]^{\alpha}_{\alpha}$, temos:

Cont.

Polinômio Minimal

- **Exemplo:**

$$p([T]^{\alpha}_{\alpha}) = \left(a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)\left(d\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) -$$

$$- bc\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Polinômio Minimal

- **Teorema:** As raízes do polinômio minimal são as mesmas raízes (distintas) do polinômio característico

- Com esses dois teoremas, sabemos que o polinômio minimal deve ser de grau **menor ou, no máximo, igual ao do polinômio característico** e deve ter as **mesmas raízes**

Polinômio Minimal

- **Exemplo:** Seja $T:V \rightarrow V$ um operador linear e α uma base de V. Suponhamos que o polinômio característico de T seja:
  - $p(\lambda) = (\lambda - 3)^2(\lambda - 1)^3(\lambda + 5)$
- Então seu polinômio minimal será um dos polinômios
  - $p(\lambda) = (\lambda - 3)^r(\lambda - 1)^s(\lambda + 5)$, $1 \leq r \leq 2$, $1 \leq s \leq 3$
- Como o polinômio minimal é o de menor grau, verificamos primeiro para $r = s = 1$
- Se $p_1([T]^{\alpha}_{\alpha}) = 0$, então ele é o minimal, senão testamos o próximo

Polinômio Minimal

- **Teorema:** Sejam λ_1, λ_2, ..., λ_r os autovalores distintos de um operador linear T. Então T será diagonalizável se, e somente se o polinômio:
  - $(x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \ldots (x - \lambda_r)$
- anular a matriz de T.

Polinômio Minimal

- **Exemplo:** O operador linear $T: R^4 \rightarrow R^4$ definido por $T(x, y, z, t) = (3x – 4z, 3y – 5z, -z, -t)$ é diagonalizável?
- **Solução:**
  - $\alpha = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$

$$[T]^{\alpha}_{\alpha} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

  - Polinômio característico:
    - $p(\lambda) = \det([T]^{\alpha}_{\alpha} - \lambda I) = (3 - \lambda)^2(-1 - \lambda)^2$

Cont.

Polinômio Minimal

- **Exemplo:** Tanto $\lambda_1 = 3$ quanto $\lambda_2 = -1$ têm multiplicidade 2
- Então os candidatos a polinômio minimal são:
  - $p_1(x) = (x - 3)(x + 1)$
  - $p_2(x) = (x - 3)^2(x + 1)$
  - $p_3(x) = (x - 3)(x + 1)^2$
  - $p_4(x) = (x - 3)^2(x + 1)^2$

Polinômio Minimal

- Testando $p_1([T]^{\alpha}_{\alpha})$

$$\left(\begin{bmatrix}3&0&-4&0\\0&3&-5&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3&0&0&0\\0&3&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&3\end{bmatrix}\right)\left(\begin{bmatrix}3&0&-4&0\\0&3&-5&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\right)$$

$$\begin{bmatrix}0&0&-4&0\\0&0&-5&0\\0&0&-4&0\\0&0&0&-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&0&-4&0\\0&3&-5&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

- temos que $p_1([T]^{\alpha}_{\alpha}) = 0$
- Logo, ele é o polinômio minimal (o de menor grau)

Cont.

Polinômio Minimal

- **Exemplo:** Assim, T é diagonalizável
- Isto é, existe uma base β de autovalores e, nesta base:

$$[T]^{\beta}_{\beta} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Diagonalização de Operadores

- **Exemplo:** Para quais valores de *a* as matrizes abaixo são diagonalizáveis?

➢ a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) $\text{Det} \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & a-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (1-\lambda)(a-\lambda) = 0$

$\lambda = 1,\ a - 1 \neq 0 \Rightarrow a \neq 1$

b) $\text{Det} \begin{pmatrix} 1-\lambda & a \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (1-\lambda)(1-\lambda) = 0$

$\lambda = 1$,Nenhum a torna B diagonizável

Exercícios

1- Determine a matriz associada, na base canônica, a transformação linear $T(x,y)=(2x,y)$. Depois determine uma base β de autovetores, se possível, e a matriz $[T]^{\beta}_{\beta}$.

Exercícios

- 2-Obtenha o polinômio minimal da matriz

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$