Introdução à Álgebra Linear

Autovalores e Autovetores

Camila Martins Saporetti
(camila.saporetti@iprj.uerj.br)

Autovalores e Autovetores

- Dada uma transformação linear de um espaço vetorial nele mesmo, T:$V \rightarrow V$, gostaríamos de saber que **vetores seriam levados neles mesmos** por essa **transformação**
- Isto é, dada T:$V \rightarrow V$, quais os vetores $\mathbf{v} \in V$ tais que T($\mathbf{v}$) = $\mathbf{v}$?
- **v** é chamado de vetor fixo
- Obviamente, a condição é válida para **v** igual ao vetor nulo (pela definição de transf. linear), logo, vamos **desconsiderá-lo**

Autovalores e Autovetores

- **Exemplo 1:**
- Quais os vetores $\mathbf{v} \in V$ tais que $T(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$?
  - $I: R^2 \rightarrow R^2$

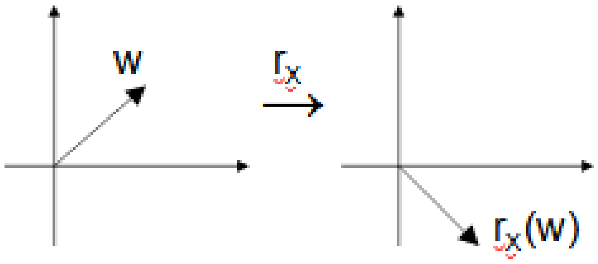
    Transformação Identidade
  - $(x, y) \rightarrow (x, y)$
  - Neste caso, todo R^2 é fixo uma vez que $I(x, y) = (x, y)$ para todo $(x, y) \in R^2$

Autovalores e Autovetores

- **Exemplo 2:**
- Quais os vetores $\mathbf{v} \in V$ tais que $T(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$?
  - $r_X : R^2 \rightarrow R^2$
  - $(x, y) \rightarrow (x, -y)$
  - Ou

Reflexão no Eixo-x

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



  - Podemos notar que todo vetor pertencente ao eixo x é mantido fixo pela transformação r_x. De fato:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ou seja $r_x(x, 0) = (x, 0)$

Cont.

Autovalores e Autovetores

- **Exemplo 2:** Reflexão no Eixo-x
  - Ainda mais, esses vetores são únicos com essa propriedade já que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 0y = x \\ 0x - y = y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = x \\ y = -y \end{cases} \Rightarrow y = 0$$

Autovalores e Autovetores

- **Exemplo 3:**
  - $N: R^2 \rightarrow R^2$

    Transformada nula
  - $(x, y) \rightarrow (0, 0)$
  - Nesse caso, o único vetor fixo é $N(0, 0) = (0, 0)$

Autovalores e Autovetores

- Considere o seguinte problema: dada uma transformação linear de um espaço vetorial T:$V \rightarrow V$, estamos interessados em saber **quais vetores** são levados em um **múltiplo de si mesmos**; isto é, procuramos um vetor **v**$\in V$ e um escalar λ∈R tal que:
  - T(**v**) = λ.**v**
- Neste caso, T(**v**) será um vetor de mesma direção que **v**
  - Na mesma reta suporte

Autovalores e Autovetores

- Como **v** = **0** satisfaz a equação para todo λ, estamos interessados em $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$
- O escalar λ é chamado de **autovalor** ou valor característico de T
- O vetor **v** é chamado de **autovetor** ou vetor característico de T
- Chamaremos de **Operador Linear** à transformação $T: V \rightarrow V$
  - Transformação de um espaço vetorial nele mesmo

Autovalores e Autovetores

- **Definição:** Seja $T: V \rightarrow V$ um operador linear. Se existirem $\mathbf{v} \in V$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ e $\lambda \in R$ tais que $T(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}$, λ é um autovalor de T e **v** é um autovetor de T associado a λ
- Observe que λ pode ser zero enquanto **v** não pode ser o vetor nulo

Autovalores e Autovetores

- **Exemplo 1:**
- Encontre o autovalor e autovetor da transformação.
- $T:R^2 \rightarrow R^2$
- $\mathbf{v} \rightarrow 2\mathbf{v}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

- Neste caso, 2 é um autovalor e qualquer $(x, y) \neq (0, 0)$ é um autovetor associado ao autovalor 2

Autovalores e Autovetores

- Observe que $T(\mathbf{v})$ é sempre um vetor de mesma direção que **v**. Então, se:
  - $\lambda < 0$, T inverte o sentido do vetor;
  - $|\lambda| > 1$, T dilata o vetor;
  - $|\lambda| < 1$, T contrai o vetor;
  - $\lambda = 1$, T é a identidade;

Autovalores e Autovetores

- **Exemplo 2:** Reflexão no eixo x

➢ $r_x: R^2 \to R^2$

➢ $(x, y) \to (x, -y)$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Encontre um autovetor e o autovalor correspondente

E para os vetores (x, 0) quem é o autovalor?

➢ Os vetores da forma $\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$ são tais que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -y \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$$

Assim, todo vetor (0,y), $y \neq 0$, é autovetor de r_x com autovalor $\lambda=-1$

Cont.

Autovalores e Autovetores

- **Exemplo 2:** Reflexão no eixo x
  - Como vimos antes, os vetores (x, 0) são fixos por essa transformação
    - r_x (x, 0) = 1.(x, 0)
  - Ou seja, (x, 0) é um autovetor associado ao autovalor $\lambda = 1$, com $x \neq 0$
  - Assim, existem dois autovalores para essa transformação com um autovetor associado a cada autovalor

Autovalores e Autovetores

- **Exemplo 3:** Rotação de 90º em torno da origem
  - $r_x: R^2 \rightarrow R^2$
  - $(x, y) \rightarrow (-y, x)$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

  - Nenhum vetor diferente de zero é levado por T num múltiplo de si mesmo
  - Logo, T não tem autovalores (consequentemente, também não tem autovetores)

Autovalores e Autovetores

- **Exemplo 4:**
- Seja $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Então $A.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 2y \\ y \end{pmatrix}$
- e $T_A(x, y) = (2x + 2y, y)$
- Para procurar os autovalores e autovetores de T_A resolvemos a equação $T_A(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$
- Ou seja....

Cont.

Autovalores e Autovetores

- **Exemplo 4:**

$$\begin{pmatrix} 2x + 2y \\ y \end{pmatrix} = \lambda . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y = \lambda x & (1) \\ y = \lambda y & (2) \end{cases}$$

- i) Se $y \neq 0$, de (2) temos $\lambda = 1 \Rightarrow 2x + 2y = x \Rightarrow y = -½x \Rightarrow$ autovalor $\lambda = 1$ e autovetores do tipo $(x, -½x)$, $x \neq 0$
- ii) Se $y = 0 \Rightarrow x \neq 0$ (senão, o autovetor seria o vetor nulo). De (1), $2x + 0 = \lambda x \Rightarrow \lambda = 2$. Logo, o outro autovalor é 2 com autovetor associado $(x, 0)$, $x \neq 0$
- Assim, para essa transformação T temos autovetores $(x,-½x)$, $x \neq 0$, associados ao autovalor 1 e os autovetores $(x, 0)$, $x \neq 0$, associados ao autovalor 2

Autovalores e Autovetores

- **Teorema:** Dada uma transformação $T: V \rightarrow V$ e um autovetor $\mathbf{v}$ associado ao autovalor λ, qualquer vetor $\mathbf{w} = \alpha\mathbf{v}$ $(\alpha \neq \mathbf{0})$ também é autovetor de T associado a λ

- **Definição:** O subespaço $V_\lambda = \{\mathbf{v} \in V: T(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}\}$ é chamado de subespaço associado ao autovalor λ

Polinômio Característico

- **Exemplo:** Seja

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Procuramos vetores $\mathbf{v} \in R^3$ e escalares $\lambda \in R$, tais que $A.\mathbf{v} = \lambda.\mathbf{v}$ ($T(\mathbf{v}) = \lambda.\mathbf{v}$)
- Observe que, se I for a matriz identidade de ordem 3, então a equação acima pode ser escrita na forma
  - $A\mathbf{v}=(\lambda I)\mathbf{v}$,
  - ou ainda $(A - \lambda I)\mathbf{v} = 0$
- Explicitamente.....

Cont.

Polinômio Característico

- **Exemplo:**

$$\left\{ \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Cont.

Polinômio Característico

- **Exemplo:**
  - Para solução do sistema, se o determinante da matriz dos coeficientes for diferente de zero, a solução única será x = y = z = 0 que não nos interessa (vetor nulo)
  - Como estamos procurando autovetores $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, para satisfazer a condição acima precisamos ter:

$$\det \begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

Cont.

Polinômio Característico

- **Exemplo:**

$\Rightarrow (4 - \lambda).(1 - \lambda).(2 - \lambda) + 2.(2 - \lambda) = 0$

$\Rightarrow -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 16\lambda + 12 = 0$

Polinômio Característico

$\Rightarrow (\lambda - 2)^2(\lambda - 3) = 0$

- Logo, $\lambda = 2$ e $\lambda = 3$ são soluções do polinômio característico de A e, portanto, os autovalores da matriz A são 2 e 3
- Conhecendo os autovalores, podemos buscar os autovetores resolvendo a equação A**v** = λ**v** para cada autovalor

Cont.

Polinômio Característico

- **Exemplo:**
- λ = 2: $$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 4x + 2y = 2x \\ -x + y = 2y & \Rightarrow x = -y \\ y + 2z = 2z & \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = 0 \end{cases}$$

- Logo, os autovetores são do tipo (0, 0, z) para o autovalor λ = 2. Ou seja, pertencem ao subespaço [(0,0,1)]

Cont.

Polinômio Característico

- **Exemplo:**
- $\lambda = 3$:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 4x + 2y = 3x & \\ -x + y = 3y & \Rightarrow x = -2y \\ y + 2z = 3z & \Rightarrow y = z \end{cases}$$

- Logo, os autovetores são do tipo (-2y, y, y) para o autovalor λ = 3. Ou seja, pertencem ao subespaço [(-2,1,1)]

Polinômio Característico

- De maneira geral, seja A uma matriz de ordem n, os autovalores de A são aqueles que satisfazem

  $\det(A - \lambda I) = 0$

- $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ é um polinômio de grau n e é o **polinômio característico** da matriz A

Autovalores e Autovetores

- **Exemplo 1:** Seja:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} -3-\lambda & 4 \\ -1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (-3 - \lambda)(2 - \lambda) + 4 = \lambda^2 + \lambda - 2 = P(\lambda)$$

$$\Rightarrow P(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (\lambda - 1)(\lambda + 2) = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \text{ ou } \lambda = -2$$

Cont.

Autovalores e Autovetores

- **Exemplo 1:** Autovetores:
  - i) Para $\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3x + 4y = x \\ -x + 2y = y \end{cases} \qquad \Rightarrow x = y$$

$$\Rightarrow \mathbf{v} = (x, x),\ x \neq 0$$

Cont.

Autovalores e Autovetores

- **Exemplo 1:** Autovetores:
  - ii) Para $\lambda = -2$

$$\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -2. \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3x + 4y = -2x & \Rightarrow x = 4y \\ -x + 2y = -2y & \Rightarrow x = 4y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathbf{v} = (4y, y), \; y \neq 0$$

Autovalores e Autovetores

- **Exemplo 2:** Encontre a transf. linear $T:R^2 \to R^2$, tal que T tenha autovalores -2 e 3 associados aos autovetores (3y, y) e (-2y, y) respectivamente.
- **Solução:**
  - De maneira geral, temos:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ax + by = \lambda x \\ cx + dy = \lambda y \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} x(a - \lambda) + by = 0 \\ cx + y(d - \lambda) = 0 \end{cases}$$

Cont.

Autovalores e Autovetores

- **Exemplo 2:**
- i) $\lambda = -2$

$$\begin{cases} x(a+2) + by = 0 \\ cx + y(d+2) = 0 \end{cases}$$

Mas, para $\lambda = -2$, temos o autovetor (3y, y) ou seja x = 3y:

$$\begin{cases} 3y(a+2) + by = 0 \\ 3cy + y(d+2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a + b = -6 \\ 3c + d = -2 \end{cases} \quad \text{(I)}$$

Cont.

Autovalores e Autovetores

- **Exemplo 2:**
- i) $\lambda = 3$

$$\begin{cases} x(a-3) + by = 0 \\ cx + y(d-3) = 0 \end{cases}$$

- Mas, para $\lambda = 3$, temos o autovetor $(-2y, y)$ ou seja $x = -2y$:

$$\begin{cases} -2y(a-3) + by = 0 \\ -2cy + y(d-3) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a + b = -6 \\ -2c + d = 3 \end{cases} \quad \textbf{(II)}$$

De (I) e (II): $a = 0$, $b = -6$, $c = -1$, $d = 1$

Cont.

Autovalores e Autovetores

- **Exemplo 2:**
- Logo:

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Autovalores e Autovetores

- **Exemplo 3:** Ache os autovalores e autovetores da transformação $T:R^3 \to R^3$ tal que $(x, y, z) \to (x + y, x - y + 2z, 2x + y - z)$.
- **Solução:**

$$\begin{pmatrix} x + y \\ x - y + 2z \\ 2x + y - z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Use

$\det(A - \lambda I) = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Cont.

Autovalores e Autovetores

- **Exemplo 3:**
- **Solução:**

$$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -1-\lambda & 2 \\ 2 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)(-1-\lambda)^2 + 4 - 1.(-1-\lambda) - 2.(1-\lambda) = 0$$
$$(1-\lambda)(-1-\lambda)^2 + 4 + 1 + \lambda - 2 + 2\lambda = 0$$
$$(1-\lambda)(-1-\lambda)^2 + 3 + 3\lambda = 0$$
$$(1-\lambda)(1+\lambda)^2 + 3(1+\lambda) = 0$$
$$(1+\lambda)[(1-\lambda)(1+\lambda) + 3] = 0$$

Cont.

Autovalores e Autovetores

- **Exemplo 3:**
- **Solução:**

$(1 + \lambda)[(1 - \lambda)(1 + \lambda) + 3] = 0$

$(1 + \lambda)[1 - \lambda^2 + 3] = 0$

$(1 + \lambda)(4 - \lambda^2) = 0$

$(1 + \lambda)(2 - \lambda)(2 + \lambda) = 0$

Autovalores:

$\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = -2$

Cont.

Autovalores e Autovetores

- **Exemplo 3:**
- **Solução:**
- Autovetores (de forma geral):

$$\begin{cases} x + y = \lambda x \\ x - y + 2z = \lambda y \\ 2x + y - z = \lambda z \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x + y \\ x - y + 2z \\ 2x + y - z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Autovalores e Autovetores

- **Exemplo 3:**
- **Solução:**
- Autovetor associado a λ_1 = -1:

$$\begin{cases} x + y = -1x \\ x - y + 2z = -1y \\ 2x + y - z = -1z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -2x \\ z = -x/2 \end{cases}$$

- Logo, o autovetor associado ao autovalor λ_1 é: v_1 (x, -2x, -x/2) $\Rightarrow$ [(1, -2, -1/2)]

Autovalores e Autovetores

- **Exemplo 3:**
- **Solução:**
- Autovetor associado a $\lambda_2 = 2$:

$$\begin{cases} x + y = 2x \\ x - y + 2z = 2y \\ 2x + y - z = 2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x \\ z = x \\ z = x \end{cases}$$

- Logo, o autovetor associado ao autovalor λ_2 é: v_2 (x, x, x) $\Rightarrow$ [(1, 1, 1)]

Autovalores e Autovetores

- **Exemplo 3:**
- **Solução:**
- Autovetor associado a $\lambda_3 = -2$:

$$\begin{cases} x + y = -2x \\ x - y + 2z = -2y \\ 2x + y - z = -2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -3x \\ z = x \\ z = x \end{cases}$$

- Logo, o autovetor associado ao autovalor λ_3 é: $v_3\ (x, -3x, x) \Rightarrow [(1, -3, 1)]$

Exercícios

- 1- Encontre os autovalores e os autovetores

a) $\begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$

Exercícios

- 2- Encontre os autovalores e os autovetores do operador T dado por $T(x,y)=(x+y,x-y)$.