



Introdução à Álgebra Linear

Revisão – Prova 3

Camila Martins Saporetti
(camila.saporetti@iprj.uerj.br)

Lista 7

2. Encontre os autovalores e autovetores correspondentes dos operadores $\in (\mathbb{R}^2)$ abaixo.

(a) $T(x, y) = (x+y, x-y)$

(c) $T(1, 0) = (0, 1)$ e $T(0, 1) = (1, 0)$

Lista 7

- (a) $T(x, y) = (x+y, x-y)$
$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)(-1-\lambda)-1=0$$

$$\lambda^2 - \lambda - 1 + \lambda - 1 = 0$$

$$\lambda^2 - 2 = 0$$

$$\lambda^2 = 2$$

$$\lambda = \pm\sqrt{2}$$

Lista 7

Para $\lambda_1 = \sqrt{2}$

- $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \sqrt{2} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$
- $x+y = \sqrt{2}x$

$$x-y = \sqrt{2}y \rightarrow x = \sqrt{2}y + y = y(\sqrt{2}+1)$$

O autovetor associado a $\lambda_1 = \sqrt{2}$ é $((\sqrt{2}+1)y, y) \rightarrow [(\sqrt{2}+1, 1)]$

Lista 7

Para $\lambda_2 = -\sqrt{2}$

- $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -\sqrt{2} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$
- $x+y = -\sqrt{2}x$

$$x-y = -\sqrt{2}y \rightarrow x = -\sqrt{2}y + y = y(-\sqrt{2}+1)$$

O autovetor associado a $\lambda_2 = -\sqrt{2}$ é $((-\sqrt{2}+1)y, y) \rightarrow [(-\sqrt{2}+1, 1)]$

Lista 7

- $(c)T(1, 0)=(0,1)$ e $T(0, 1)=(1,0)$
- $(x,y)=x(1,0) + y(0,1)$
- $T(x,y)=x(0,1) + y(1,0)=(y,x)$

$$\begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 \\ 1 & 0-\lambda \end{vmatrix}=0$$

- $\lambda^2 - 1=0 \rightarrow \lambda^2 = \pm 1$

Lista 7

- Para $\lambda_1=1$
- $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$
- $y=x$ e $x=y$
- O autovetor associado a $\lambda_1=1$ é $(x,x) \rightarrow [(1,1)]$

Lista 7

- Para $\lambda_2 = -1$
- $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$
- $y = -x$ e $x = -y$
- O autovetor associado a $\lambda_2 = -1$ é $(x, -x) \rightarrow [(1, -1)]$

Lista 7

3. Considere $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

- (a) Calcule os autovalores e autovetores correspondentes de A e A^2 .
- (b) O que você pode dizer ao comparar os autovetores de A e A^2 ?
- (c) E quanto aos autovalores?

Lista 7

- (a) Calcule os autovalores e autovetores correspondentes de A e A^2 .
- De $A \begin{vmatrix} -1-\lambda & 3 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$
- $(-1-\lambda)(-\lambda) - 6 = 0$
- $\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$
- $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -3$

Lista 7

- Para $\lambda_1=2$
- $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$
- $-x+3y = 2x$
- $2x=2y \rightarrow x=y$
- O autovetor associado a $\lambda_1=2$ é $(x,x) \rightarrow [(1,1)]$

Lista 7

- Para $\lambda_2 = -3$
- $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -3 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$
- $-x + 3y = -3x$
- $2x = -3y \rightarrow x = -3y/2$
- O autovetor associado a $\lambda_2 = -3$ é $(-3y/2, y) \rightarrow [(-3/2, 1)]$

Lista 7

- De $A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$
- $\begin{vmatrix} 7-\lambda & -3 \\ -2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0$
- $(7-\lambda)(6-\lambda) - 6 = 0$
- $\lambda^2 - 13\lambda + 36 = 0$
- $\lambda_1 = 9$ e $\lambda_2 = 4$

Lista 7

- Para $\lambda_1=9$
- $\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 9 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$
- $7x-3y = 9x$
- $-2x+6y=9y \rightarrow x=-3y/2$
- O autovetor associado a $\lambda_1=9$ é $(-3y/2,y) \rightarrow [(-3/2,1)]$

Lista 7

- Para $\lambda_2=4$
- $\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$
- $7x-3y = 4x \rightarrow x=y$
- $-2x+6y=4y$
- O autovetor associado a $\lambda_2=4$ é $(x,x) \rightarrow [(1,1)]$

Lista 7

- b) os autovetores são iguais
- c) Os autovalores de A^2 é o quadrado dos autovalores de A

Lista 8

1. Determine a matriz associada, na base canônica, a transformação linear T . Depois determine uma base β de autovetores, se possível, e a matriz $[T]_{\beta}^{\beta}$.

$$(a) T(x, y) = (x, 2x + y)$$

Exercícios

- $T(x,y) = (x, 2x+y)$
- $[T]_{\alpha}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \det \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$
- $(1-\lambda)^2 = 0 \rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1$
- Para $\lambda = 1 \rightarrow v = (0,y) = [(0,1)]$
- Como só possui um vetor e trata-se do \mathbb{R}^2 , T não é diagonalizável

Lista 8

2. Encontre o polinômio minimal das transformações abaixo e verifique se são diagonalizáveis. Considere a base canônica.

(c) $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dado por $L(x, y, z) = (x+y, x-y+2z, 2x+y-z)$.

Lista 8

- $L(x, y, z) = (x+y, x-y+2z, 2x+y-z).$
- $[L]_{\alpha}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \det \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -1-\lambda & 2 \\ 2 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$
- $-\lambda^3 - \lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$
- $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$ e $\lambda_3 = 2$
- $p(x) = (x+1)(x+2)(x-2)$

Lista 8

- $$p\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}\right) = \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}\right)$$
-
- $$\begin{bmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 7 & 3 & 2 \\ 7 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
- $p(x)$ é o polinômio minimal, L é diagonalizável
- $$[L]_{\beta}^{\beta} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Lista 9

1. Considerando o produto interno usual, calcule em cada caso, $\langle u, v \rangle$, $\langle u, u \rangle$ e $\langle v, v \rangle$.

a) $u=(1,1,-1)$ e $v=(2,1,5)$.

$$\langle u, v \rangle = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 - 1 \cdot 5 = -2$$

$$\langle u, u \rangle = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + (-1)(-1) = 3$$

$$\langle v, v \rangle = 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 5 \cdot 5 = 30$$

Lista 9

4. Sejam $u=(u_1,u_2,u_3)$ e $v=(v_1,v_2,v_3)$. Identifique os casos em que temos um produto interno definido em \mathbb{R}^3 . Nos casos que falham, indique as propriedades que não se verificam.

a) $\langle u, v \rangle = u_1v_1 + u_3v_3$

Lista 9

- a) $\langle u, v \rangle = u_1v_1 + u_3v_3$
- i) $\langle u, u \rangle = u_1u_1 + u_3u_3 = u_1^2 + u_3^2 \geq 0$ e $u_1^2 + u_3^2 = 0 \leftrightarrow u_1 = u_3 = 0$
- ii) $\langle \alpha u, v \rangle = \alpha u_1v_1 + \alpha u_3v_3 = \alpha(u_1v_1 + u_3v_3) = \alpha \langle u, v \rangle$
- iii) $\langle u+v, w \rangle = (u_1+v_1)w_1 + (u_3+v_3)w_3 = u_1w_1 + v_1w_1 + u_3w_3 + v_3w_3$
 $= u_1w_1 + u_3w_3 + v_1w_1 + v_3w_3 = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$
- iv) $\langle u, v \rangle = u_1v_1 + u_3v_3 = v_1u_1 + v_3u_3 = \langle v, u \rangle$
- É um produto interno no \mathbb{R}^3

Lista 9

6. Seja $\beta = \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$. Use o processo de Gram-Schmidt para obter uma base ortonormal de \mathbb{R}^3 , em relação ao produto interno usual.

$$v_1 = (1,1,1)$$

$$v_2 = (1,1,0)$$

$$v_3 = (1,0,0)$$

Lista 9

- $\mathbf{v}_1' = (1, 1, 1)$
- $\mathbf{v}_2' = \mathbf{v}_2 - (\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1' \rangle / \langle \mathbf{v}_1', \mathbf{v}_1' \rangle) \cdot \mathbf{v}_1'$
- $\mathbf{v}_2' = (1, 1, 0) - ((1+1+0)/(1+1+1)) \cdot (1, 1, 1) =$
 $= (1, 1, 0) - 2/3 \cdot (1, 1, 1) = (1/3, 1/3, -2/3)$
- $\mathbf{v}_3' = \mathbf{v}_3 - (\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_2' \rangle / \langle \mathbf{v}_2', \mathbf{v}_2' \rangle) \cdot \mathbf{v}_2' - (\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1' \rangle / \langle \mathbf{v}_1', \mathbf{v}_1' \rangle) \cdot \mathbf{v}_1'$
 $\mathbf{v}_3' = (1, 0, 0) - ((1/3+0+0)/(1/9+1/9+4/9))(1/3, 1/3, -2/3) - 1/3(1, 1, 1) =$
 $= (1, 0, 0) - (1/3 \cdot 6/9)(1/3, 1/3, -2/3) - (1/3, 1/3, 1/3) =$
 $= (1, 0, 0) - (1/3 \cdot 9/6)(1/3, 1/3, -2/3) - (1/3, 1/3, 1/3) =$
 $= (1, 0, 0) - (1/6, 1/6, -2/6) - (1/3, 1/3, 1/3) = (1, 0, 0) - (3/6, 3/6, 0) = (3/6, -3/6, 0)$

Lista 9

- Normalização
- $v_1 = (1,1,1)/\sqrt{3} = (\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3)$
- $v_2 = (1/3, 1/3, -2/3)/\sqrt{((1/3)^2 + (1/3)^2 + (-2/3)^2)} = (1/3, 1/3, -2/3)/\sqrt{6/9} = 3(1/3, 1/3, -2/3)/\sqrt{6} = (\sqrt{6}/6, \sqrt{6}/6, -\sqrt{6}/3)$
- $v_3 = (3/6, -3/6, 0)/\sqrt{((3/6)^2 + (-3/6)^2 + (0)^2)} = (3/6, -3/6, 0)/\sqrt{18/36} = 6(3/6, -3/6, 0)/(3\sqrt{2}) = (3, -3, 0)/(3\sqrt{2}) = (1, -1, 0)/\sqrt{2} = (\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2, 0)$

Lista 9

8. Seja $W \in \mathbb{R}^3$ o subespaço gerado pelos vetores $(0,1,1)$ e $(1,0,0)$. Determine uma base para W^\perp (usando o produto interno usual).

$$\{(x,y,z) / \langle (x,y,z), (0,1,1) \rangle = 0 \text{ e } \langle (x,y,z), (1,0,0) \rangle = 0\}$$

$$\langle (x,y,z), (0,1,1) \rangle = 0 \rightarrow y+z=0 \rightarrow z=-y$$

$$\langle (x,y,z), (1,0,0) \rangle = 0 \rightarrow x=0$$

$$W^\perp = (0,y,-y) \rightarrow [(0,1,-1)]$$