Álgebra Linear

Inversão de Matrizes e Determinantes

Camila Martins Saporetti
(camila.saporetti@iprj.uerj.br)

Matriz Inversa

- **Definição:** Dada uma matriz quadrada A de ordem n, chamamos de inversa de A uma matriz B tal que $A.B = B.A = I_n$, onde I_n é a matriz identidade de ordem n
  - Escrevemos $\mathbf{A}^{-1}$ para indicar a inversa de A

Matriz Inversa

- **Exemplo:** Se $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 11 & 4 \end{pmatrix}$, encontre a inversa de A

- Ou seja, queremos encontrar

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

- tal que $A.A^{-1} = A^{-1}.A = I_2$

Matriz Inversa

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 11 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Temos assim:

$$\begin{aligned} 6a + 2c &= 1 \\ 6b + 2d &= 0 \\ 11a + 4c &= 0 \\ 11b + 4d &= 1 \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema encontramos:

$$\begin{aligned} a &= 2 \\ b &= -1 \\ c &= -11/2 \\ d &= 3 \end{aligned}$$

Matriz Inversa

- **Observações:**
- Se A e B são matrizes quadradas de mesma ordem e inversíveis, então AB é inversível e $(AB)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$
  - $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$
  - E para $(B^{-1}A^{-1})(AB) = I$?
  - $(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$

Matriz Inversa

- Observações
- Se A é uma matriz quadrada e existe uma matriz B tal que BA = I, então A é inversível e $B = A^{-1}$
- Nem toda matriz tem inversa, mas quando tem?

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz Inversa

- **Teorema:** Uma matriz quadrada A tem inversa se, e somente se, det A ≠ 0
- Exemplos

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 11 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{det} = 2$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 12 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{det} = 0$$

Procedimento para Inversão de Matrizes

$$(A : I) \rightarrow (I : A^{-1})$$

- Exemplo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Procedimento para Inversão de Matrizes

- Exemplo

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Procedimento para Inversão de Matrizes

$$\left(\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$L_2 = -2.L_1 + L_2$

$L_4 = L_1 + L_4$

$$\left(\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Procedimento para Inversão de Matrizes

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$L_3 = -1.L_2 + L_3$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Procedimento para Inversão de Matrizes

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$L_3 = -1.L_3$

$L_1 = L_3 + L_1$

$L_2 = -2.L_3 + L_2$

$L_4 = L_3 + L_4$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Procedimento para Inversão de Matrizes

$$\left(\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$L_1 = 2.L_4 + L_1$

$L_2 = -4.L_4 + L_2$

$L_3 = 3.L_4 + L_3$

$$\left(\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -3 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 & 6 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & -5 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Procedimento para Inversão de Matrizes

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 & 2 \\ -5 & 6 & 6 & -4 \\ 4 & -5 & -4 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinante de uma matriz

- A toda matriz quadrada associa-se um número, denominado **determinante da matriz**
  - obtido por meio de operações entre os elementos da matriz.
- Para representar o determinante de uma matriz A (indicado por **det A**), substituímos os parênteses ou colchetes da matriz por barras simples.

Determinante de uma matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 \\ 1 & 4 & 3 \\ 6 & 1 & 7 \end{pmatrix} \text{ e } \det A = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 8 \\ 1 & 4 & 3 \\ 6 & 1 & 7 \end{vmatrix}$$

$$A = [4] \text{ e } \det A = |4|$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 7 & -5 \end{bmatrix} \text{ e } \det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 7 & -5 \end{vmatrix}$$

Determinante de uma matriz de ordem 1

- O determinante de uma matriz quadrada de ordem 1, $A = (a_{11})$, é o próprio elemento de A.

$$\det A = |a_{11}| = a_{11}$$

- **Exemplos**

a) $A = (4) \Rightarrow \det A = |4| = 4$

b) $B = (-\sqrt{2}) \Rightarrow \det B = |-\sqrt{2}| = -\sqrt{2}$

Determinante de uma matriz de ordem 2

- O determinante de uma matriz quadrada de ordem 2,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

- é a diferença entre o produto dos elementos da **diagonal principal** e o produto dos elementos da **diagonal secundária**.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Determinante de uma matriz de ordem 2

- **Exemplos**

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = (2 \cdot 4) - [(-3) \cdot (-1)] = 8 - 3 = 5$

b) $B = \begin{pmatrix} 3 & 10 \\ 7 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \det B = \begin{vmatrix} 3 & 10 \\ 7 & -5 \end{vmatrix} = [3 \cdot (-5)] - (10 \cdot 7) = -15 - 70 = -85$

Determinante de uma matriz de ordem 3

- Dada uma matriz A, quadrada de ordem 3, o determinante de A pode ser calculado pela regra de Sarrus.
- Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Determinante de uma matriz de ordem 3

Descrição do procedimento	Aplicação do procedimento
1º) Ao lado da matriz, copiam-se suas duas primeiras colunas.	$\left\lvert \begin{array}{ccc\|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} \right.$
2º) Multiplicam-se os elementos da diagonal principal e, na mesma direção dessa diagonal, multiplicam-se os elementos de cada uma das duas paralelas à sua direita.	$\left\lvert \begin{array}{ccc\|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} \right.$

Determinante de uma matriz de ordem 3

Descrição do procedimento	Aplicação do procedimento
3º) Multiplicam-se os elementos da diagonal secundária e, na mesma direção dessa diagonal, os elementos de cada uma das duas paralelas à sua direita.	$\left\lvert\begin{array}{ccc\|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$
4º) O determinante da matriz é obtido pela diferença entre as somas dos produtos do 2º e do 3º passo, nessa ordem.	$\det A = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})$

Determinante de uma matriz de ordem 3

- **Exemplo**

a) Considerando a matriz, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, temos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{matrix}$$

$$-6 \quad 12 \quad 0 \quad 10 \quad -8 \quad 0$$

Assim:

$$\det A = (10 - 8 + 0) - (-6 + 12 + 0) = -4$$

Determinante de uma matriz de ordem 3

- **Exemplo**

  b) Considerando a matriz $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ -1 & 8 & 27 \end{pmatrix}$, temos:

$$\left|\begin{matrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ -1 & 8 & 27 \end{matrix}\right|\begin{matrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \\ -1 & 8 \end{matrix}$$

$$-12 \quad -72 \quad 54 \quad -108 \quad -18 \quad 24$$

- Assim

$$\det B = (-108 - 18 + 24) - (-12 - 72 + 54) = -72$$

Determinante de uma matriz de ordem 3

- **Exemplo**

c) Determinar x para que a igualdade a seguir seja verdadeira

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -x \\ 3 & 2 & 1 \\ x & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

Determinante de uma matriz de ordem 3

- **Exemplo c)**

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -x \\ 3 & 2 & 1 \\ x & -1 & -2 \end{vmatrix}\begin{matrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \\ x & -1 \end{matrix} = 2.2.(-2)+(-1).1.x+(-x).(3).(-1)-((-x).2.x+2.1.(-1)+(-1).3.(-2))$$

$$-8-x+3x-(-2x^2-2+6)=-8+2x+2x^2-4=2x^2+2x-12=0$$

- Δ = 4 + 96 = 100
- $X^1 = (-2 + 10)/4 = 2$
- $X^2 = (-2 - 10)/4 = -3$

Determinante de uma matriz de ordem maior ou igual a 2

Cofator de uma matriz

Seja **A** uma matriz quadrada de ordem $\mathbf{n \geq 2}$.

Chama-se **cofator** de um elemento $\mathbf{a_{ij}}$ de A o número real $\mathbf{A_{ij} = (-1)^{(i+j)} D_{ij}}$, em que $\mathbf{D_{ij}}$ é o determinante obtido da matriz **A** quando se **eliminam** a linha e a coluna que contêm o elemento $\mathbf{a_{ij}}$.

Determinante de uma matriz de ordem maior ou igual a2

- **Cofator de uma matriz**
- **Exemplos**

a) Seja

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Eliminando a 1ª linha e a 2ª coluna de A, obtemos

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

Logo, $A_{12} = -7$ é cofator do elemento a_{12}.

Determinante de uma matriz de ordem maior ou igual a 2

- **Cofator de uma matriz**
- **Exemplos**
- **b)** Seja

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 & 6 \\ 5 & 7 & 9 & 4 \\ -4 & 8 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- Eliminando a 3ª linha e a 4ª coluna de B, obtemos

$$B_{34} = (-1)^{3+4} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ -4 & 8 & 0 \end{vmatrix}$$

- Logo, $B_{34} = 108$ é cofator do elemento b_{34}.

Determinante de uma matriz de ordem maior ou igual a 2

- **Teorema de Laplace**

O determinante de uma matriz A, de ordem $n \geq 2$, é a soma dos produtos dos elementos de uma fila qualquer (linha ou coluna) pelos respectivos cofatores.

Determinante de uma matriz de ordem maior ou igual a 2

- **Exemplo**

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1 & 2 & -3 & 0} \\ 3 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ -3 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Escolhendo a 1ª linha, temos

$$\det A = 1 \cdot A_{11} + 2 \cdot A_{12} + (-3) \cdot A_{13} + 0 \cdot A_{14}$$

$$\det A = 1 \cdot (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \\ -3 & 4 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-3) \cdot (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

Determinante de uma matriz de ordem maior ou igual a 2

- **Exemplo**

Não é necessário calcular A_{14}, pois: $0 \cdot A_{14} = 0$

Portanto: det A= $1 \cdot 37 - 2 \cdot 48 - 3 \cdot 30 = -147$

Observação

Ao aplicar o teorema, podemos optar por qualquer linha ou coluna que o resultado será o mesmo, mas convém optar pela linha ou coluna que tiver mais zeros.

Exemplo

- Calcular o determinante da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemplo

- Considerando a 1ª coluna para o cálculo dos cofatores

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ 4 \end{matrix} & \begin{matrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

- det A = $0.A_{11} + 1.A_{21} + 0.A_{31} - 1.A_{41}$

Exemplo

- $$A_{21}=(-1)^{2+1}.\begin{vmatrix}2 & 3 & 1\\2 & 1 & 5\\4 & 2 & 0\end{vmatrix}\begin{matrix}2 & 3\\2 & 1\\4 & 2\end{matrix}=(-1).(2.1.0+3.5.4+1.2.2-(1.1.4+2.5.2+3.2.0))=(-1).(0+60+4-4-20-0)=(-1).40=-40$$

$$A_{41}=(-1)^{4+1}.\begin{vmatrix}2 & 3 & 1\\-2 & 3 & 0\\2 & 4 & 5\end{vmatrix}\begin{matrix}2 & 3\\-2 & 3\\2 & 1\end{matrix}=(-1).(2.3.5+3.0.2+1.(-2).1-(1.3.2+2.0.1+3.(-2).5))=(-1).(30+0-2-6-0+30)=(-1).52=-52$$

det A = 0.A_{11} + 1.A_{21} + 0.A_{31} -1.A_{41}

det A = 1.(-40) -1.(-52) = -40+52 = 12

Simplificação do cálculo de determinantes

1ª propriedade: Fila nula

Se todos os elementos de uma fila (linha ou coluna) de uma matriz quadrada A forem nulos, então det A=0.

Simplificação do cálculo de determinantes

- **1ª propriedade: Fila nula**
- **Exemplo**

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 9 \\ 7 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad \det A = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 8 & 1 \\ \boxed{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0} \\ 2 & 1 & 0 & 9 \\ 7 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\det A = 0 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 4 & 8 & 1 \\ 1 & 0 & 9 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 5 & 8 & 1 \\ 2 & 0 & 9 \\ 7 & 4 & 1 \end{vmatrix} \cdot + 0 \cdot (-1)^{2+3}$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 9 \\ 7 & 3 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+4} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 4 & 8 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\det A = 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

Simplificação do cálculo de determinantes

2ª propriedade: Filas paralelas iguais ou proporcionais

Se duas filas paralelas (duas linhas ou duas colunas) de uma matriz quadrada A forem iguais ou proporcionais, então det A = 0.

Simplificação do cálculo de determinantes

- **2ª propriedade: Filas paralelas iguais ou proporcionais**
- **Exemplo**

a) Seja $A = \begin{pmatrix} \boxed{4 \quad 7 \quad 12} \\ \boxed{4 \quad 7 \quad 12} \\ 3 \quad 5 \quad -1 \end{pmatrix}$

$\det A = -28 + 252 + 240 - (252 + 240 - 28) = 0$

b) Considerando a matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, temos:

$\det B = 18 + 24 + 16 - (18 + 16 + 24) = 0$

Simplificação do cálculo de determinantes

3ª propriedade: Combinação linear

Se uma fila de uma matriz quadrada A for uma combinação linear de outras filas paralelas, então det A=0.

Simplificação do cálculo de determinantes

- **3ª propriedade: Combinação linear**
- **Exemplo**

Seja a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Temos: det A= 10 –2 + 0 –(0 –0 + 8) = 0.

Observe que nessa matriz a 3ª coluna é uma **combinação linear** das outras duas colunas (os elementos dessa coluna são iguais a 2 vezes os elementos da 1ª coluna somados aos opostos dos elementos da 2ª coluna).

Simplificação do cálculo de determinantes

4ª propriedade: Determinante da matriz transposta

O determinante de uma matriz quadrada A é igual ao determinante de sua transposta.

Simplificação do cálculo de determinantes

- **4ª propriedade: Determinante da matriz transposta**
- **Exemplo**

Seja $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & -0 \\ 3 & 4 & 8 \end{pmatrix}$

Então: det A = 16 + 0 – 20 – (–3 + 0 + 0) = – 1

$A^t = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

det A^t = 16 – 20 + 0 – (–3 + 0 + 0) = –1

Simplificação do cálculo de determinantes

5ª propriedade: Produto de uma fila por uma constante

Em uma matriz quadrada, multiplicando todos os elementos de uma fila por um mesmo número real k, o determinante da matriz obtida fica multiplicado por k.

Simplificação do cálculo de determinantes

- **5ª propriedade: Produto de uma fila por uma constante**
- **Exemplo**

Se $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, então: $\det A = 10 - 20 + 0 + 3 - 0 + 0 = -7$

Multiplicando a 2ª coluna de A por -3, temos:

$B = \begin{pmatrix} 2 & -15 & 3 \\ 0 & -3 & 4 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

Assim: $\det B = -30 + 60 + 0 - 9 + 0 + 0 = 21$

Logo: $\det B = (-3) \cdot \det A$

Simplificação do cálculo de determinantes

- Consequência:
- Seja uma matriz A, de ordem n, e k um número real, temos:
- **det (k . A) = k^n . det A**
- **Exemplo**

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} = 6 \qquad \begin{vmatrix} 5.2 & 5.4 \\ 5.3 & 5.9 \end{vmatrix} = 5^2.6 = 150$$

Exemplo

- Seja A uma matriz quadrada de ordem 4 tal que det A= 3. Sabendo que a matriz B é da forma B = 2·A, calcular seu determinante.
- **det (k . A) = k^n . det A**
- det B = det(2.A) = 2^4 det A = 16.3 = 48

Simplificação do cálculo de determinantes

6ª propriedade: Troca de filas paralelas

Trocando de posição duas filas paralelas de uma matriz quadrada A, o determinante da matriz obtida é o oposto do determinante de A.

Simplificação do cálculo de determinantes

- **6ª propriedade: Troca de filas paralelas**
- **Exemplo**

Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 7 \end{pmatrix}$, então: det A = 21 + 40 – 0 – (12 – 5 + 0) = 54

Trocando a 1ª e a 3ª linhas de posição, temos:

$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 7 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

Assim: det B = 12 – 5 + 0 – (21 + 40 – 0) = –54

Logo: det B = –det A

Simplificação do cálculo de determinantes

7ª propriedade

Se todos os elementos situados de um mesmo lado da diagonal principal de uma matriz quadrada A são nulos, o determinante de A é igual ao produto dos elementos dessa diagonal.

Simplificação do cálculo de determinantes

- **7ª propriedade**
- **Exemplo**
- Considerando a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 10 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, temos

det A= 1 ·2 ·4 + 0 + 0 –0 –0 –0 = 1 ·2 ·4 = 8

Simplificação do cálculo de determinantes

- **Teorema de Jacobi**

Em uma matriz quadrada A de ordem n, se multiplicarmos os elementos de uma fila por uma constante qualquer e adicionarmos os resultados aos elementos correspondentes de uma fila paralela, obteremos uma matriz B tal que det B = det A.

Simplificação do cálculo de determinantes

- **Teorema de Jacobi - Exemplo**

Dada a matriz $M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, temos:

det M = 0 + 10 + 6 – (–10 – 2 + 0) = 28

- Triplicando os elementos da 3ª coluna de M e somando aos da 1ª coluna de M, obtemos:

$N = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ 6 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

det N = 0 + 10 + 12 – (–10 + 4 + 0) = 28

Simplificação do cálculo de determinantes

- **Teorema de Jacobi – Exemplo**
- Calculando o oposto do dobro dos elementos da 1ª coluna de M e somando aos da 3ª coluna de M, obtemos:

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -6 \\ 3 & 1 & -5 \\ 5 & -1 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\det P = -20 - 50 + 18 - (-30 + 10 - 60) = 28$$

Simplificação do cálculo de determinantes

- **Teorema de Binet**
- Se A e B são matrizes quadradas de mesma ordem n, então det (A ·B) = det(A)·det(B)
- **Exemplo**

Sendo $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, temos:

det A = 10, det B = 6 e det $A \cdot$ det $B = 10 \cdot 6 = 60$

$A \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 2 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}$, logo det $(A \cdot B) = 13 \cdot 6 - 2 \cdot 9 = 60$

Assim: det $A \cdot$ det B = det $(A \cdot B)$

Simplificação do cálculo de determinantes

- **Determinante da Matriz Inversa**
- Seja A uma matriz e A^{-1} sua inversa, então:

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

- **Exemplo**

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 2 = -5 \qquad \det A^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \end{vmatrix} = -\frac{3}{25} - \frac{2}{25} = -\frac{5}{25} = -\frac{1}{5}$$

Exercícios

1. Calcule a inversa da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercícios

2. Calcular o determinante da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -4 & 5 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$