Álgebra Linear

Base e Mudança de Base

Camila Martins Saporetti
(camila.saporetti@iprj.uerj.br)

Base de um Espaço Vetorial

- **Definição:** Um conjunto {$\mathbf{v}_1$,$\mathbf{v}_2$, ...,$\mathbf{v}_n$} de vetores de *V* será uma ***base*** de *V* se:

i) {$\mathbf{v}_1$,$\mathbf{v}_2$, ...,$\mathbf{v}_n$} é LI

$a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2, + \ldots + n\mathbf{v}_n = 0$, onde $a = b = n = 0$

ii) [$\mathbf{v}_1$,$\mathbf{v}_2$, ...,$\mathbf{v}_n$] é *V*

$a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2, + \ldots + n\mathbf{v}_n$ = vetor genérico do espaço, Ex: $R^2 = (x,y)$

Esse conjunto gera todos os vetores de V.

Base de um Espaço Vetorial

- **Exemplo 1:** $V = \mathbb{R}^2$, $\mathbf{e}_1=(1,0)$ e $\mathbf{e}_2=(0,1)$
- $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ é base de V, conhecida como base canônica de $\mathbb{R}^2$
- O conjunto $\{(1,1),(0,1)\}$ também é uma base de $V = \mathbb{R}^2$
  - De fato, se $(0,0) = a(1,1) + b(0,1) = (a, a + b)$, então $a = b = 0$
    - Assim, $\{(1, 1), (0, 1)\}$ é LI
  - Ainda $[(1, 1), (0, 1)] = V$ pois dado $\mathbf{v} = (x, y) \in V$, temos: $(x, y) = x(1, 1) + (y – x)(0, 1)$
  - Ou seja, todo vetor de $\mathbb{R}^2$ é uma combinação linear dos vetores $(1,1)$ e $(0,1)$

Base de um Espaço Vetorial

- **Exemplo 2:** {(0,1), (0,2)} não é base de R^2, pois é um conjunto LD
  - Se (0,0) = a(0,1) + b(0,2), então a = -2b e *a* e *b* não são zero necessariamente
- **Exemplo 3:** {(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)} é uma base de R^3?
  - Base canônica de R^3
  - i) $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}\}$ é LI
  - ii) $(x, y, z) = x.\mathbf{e_1} + y.\mathbf{e_2} + z.\mathbf{e_3}$
- **Exemplo 4:** {(1,0,0), (0,1,0)} não é base de R^3. Por que?
  - É LI mas não gera todo R^3

Base de um Espaço Vetorial

- **Teorema:** Sejam $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2, \ldots,\mathbf{v}_n$ vetores não nulos que geram um espaço vetorial *V*. Então dentre esses vetores podemos extrair uma base de *V*.
  - Isso independe de $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2, \ldots,\mathbf{v}_n$ serem LD ou LI
- **Teorema:** Seja um espaço vetorial *V* gerado por um conjunto finito de vetores $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n$.
- Então, qualquer conjunto com mais de *n* vetores é necessariamente LD (e, portanto, qualquer conjunto LI tem no máximo *n* vetores)

Base de um Espaço Vetorial

- **Corolário:** Qualquer base de um espaço vetorial tem sempre o mesmo número de elementos. Este número é chamado *dimensão de V*, e denotado por *dim V*
- **Exemplo 1:** $V = R^2$: dim $V = 2$
- {(1,0), (0,1)} e {(1,1),(0,1)} são bases de *V*
- **Exemplo 2:** $V = R^3$: dim $V = 3$
- {(1,0,0), (0,1,0),(0,0,1)} é base de *V*

Base de um Espaço Vetorial

- **Exemplo 3:** V = M(2, 2): dim V = 4

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

É uma base de V

Base de um Espaço Vetorial

- **Teorema:** Qualquer conjunto de vetores LI de um espaço vetorial V de dimensão finita pode ser completado de modo a formar uma base de V
- **Corolário:** Se $dim\ V = n$, qualquer conjunto de n vetores LI formará uma base de V
- **Teorema:** Se U e W são subespaços de um espaço vetorial V que tem dimensão finita, então $dim\ U \leq dim\ V$ e $dim\ W \leq dim\ V$. Além disso:
  - $dim(U + W) = dim\ U + dim\ W - dim(U \cap W)$

Base de um Espaço Vetorial

- **Teorema:** Dada uma base $\beta = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n}\}$ de *V*, cada vetor de *V* é escrito de maneira **única** como combinação linear de $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, …, $\mathbf{v_n}$.
- **Definição:** Sejam $\beta = \{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \ldots, \mathbf{v_n}\}$ base de *V* e $\mathbf{v} \in V$ onde $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v_1} + \ldots + a_n\mathbf{v_n}$. Chamamos esses números a_i de coordenadas de **v** em relação à base β e denotamos por:

$$[\mathbf{v}]_\beta = \begin{pmatrix} a_1 \\ \ldots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Base de um Espaço Vetorial

- **Exemplo 1:** $V = \mathbb{R}^2$
- $\beta = \{(1, 0), (0, 1)\}$
- $(4, 3) = 4.(1, 0) + 3.(0, 1)$
- Logo:

$$[(4, 3)]_\beta = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Observe que os coeficientes são representados como elementos de uma matriz coluna.

Base de um Espaço Vetorial

- **Exemplo 2:** $V = \mathbb{R}^2$
- $\beta = \{(1, 1), (0, 1)\}$
- $(4, 3) = x.(1, 1) + y.(0, 1) \Rightarrow x=4$ e $y=-1$
- Logo:

$$[(4, 3)]_\beta = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Base de um Espaço Vetorial

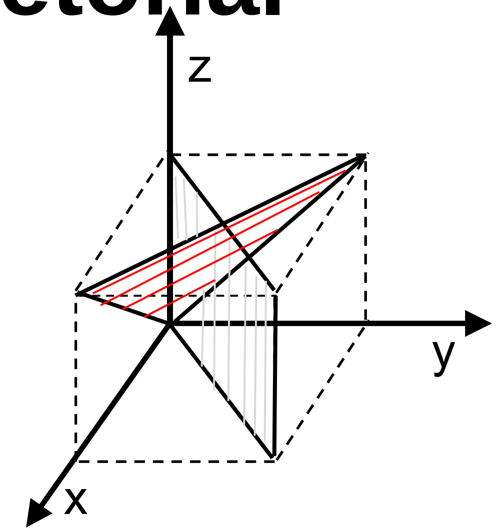
- **Exemplo 3:** Observe que a ordem dos elementos de uma base influi na matriz das coordenadas de um vetor em relação à esta base
- $V = \mathbb{R}^2$
- $\beta_1 = \{(1, 0), (0, 1)\}$ e $\beta_2 = \{(0, 1), (1, 0)\}$

$$[(4, 3)]_{\beta 1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad [(4, 3)]_{\beta 2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Base de um Espaço Vetorial

- **Exemplo 4:** Considere:
  - $V = \{(x, y, z): x + y - z = 0\}$
  - $W = \{(x, y, z): x = y\}$
  - Determine $V + W$
  - V: $x + y - z = 0 \Rightarrow z = x + y$
    - Base: $(x, y, z)=(x, y, x + y) = x.(1, 0, 1) + y.(0, 1, 1)$
    - Logo: Base = $[(1, 0 , 1),(0, 1, 1)]$
  - W: $x = y$
    - Base: $(x, y, z) = (y, y, z) = y.(1, 1, 0) + z.(0, 0, 1)$
    - Logo: Base = $[(1, 1, 0), (0, 0, 1)]$

Base de um Espaço Vetorial



- **Exemplo 4:** (cont..)
- Como:
- $V = [(1, 0, 1), (0, 1, 1)]$
- $W = [(1, 1, 0), (0, 0, 1)]$
- Então $V + W = [(1,0,1), (0,1,1), (1,1,0), (0,0,1)]$
- Mas espera-se que o resultado esteja no R^3, logo essa base deve ter algum elemento LD

cont…

Base de um Espaço Vetorial

- **Exemplo 4:** (cont..)
- Vamos escalonar....

$$
\begin{array}{c}
v1 \\ v2 \\ v3 \\ v4
\end{array}
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\Rightarrow \cdots \Rightarrow
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
$$

$$
\Rightarrow
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\Leftarrow \boxed{\text{Elemento LD (v3)}}
$$

cont…

Base de um Espaço Vetorial

- **Exemplo 4:** (cont..)
  - Logo $V + W = [(1,0,1), (0,1,1), (0,0,1)]$
  - Assim, $V + W = R^3$
  - $\dim R^3 = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W)$
  - $V \cap W = ??$

Base de um Espaço Vetorial

- **Exemplo 4:** (cont..)
- $V \cap W = \{(x,y,z);\ x + y - z = 0 \text{ e } x = y\}$

  = Resolva o sistema...

  $= \{(x,y,z);\ x = y = z/2\}$

  $= [(1, 1, 2)]$

  - $\dim (V \cap W) = 1$
  - $\dim R^3 = \dim V + \dim W - \dim(V \cap W)$
  - $\dim R^3 = 2 + 2 - 1 = 3$
    - Como esperado....

Mudança de Base - Exemplo

- $Sejam\ as\ bases\ \beta = \{(2,-1),(3,4)\}\ e\ \beta' = \{(1,0),(0,1)\}$ de um espaço V
- Dado o vetor (x, y) de V como ele seria descrito em função das bases β e β'?
- Em relação à base $\beta \Rightarrow (x,y) = z(2,-1) + w(3,4)$
- Em relação à base $\beta' \Rightarrow (x,y) = x(1,0) + y(0,1)$
- E se quisermos descrever a base β' em função da base β? Como ficaria?
- $\beta' \Rightarrow (x,y) = x(1,0) + y(0,1)$

(a) (b)

(a) (1,0) = a(2,-1) + b(3,4) => Quem é a e b?

- a = 4/11 e b = 1/11 => (1,0) = 4/11(2,-1) + 1/11(3,4)

(b) (0,1) = c(2,-1) + d(3,4) => Quem é c e d?

- c = -3/11 e d = 2/11 => (0,1) = -3/11(2,-1) + 2/11(3,4)
- Note que (x,y) relação à base $\beta \Rightarrow (x,y) = z(2,-1) + w(3,4)$
- Então, $z(2,-1) + w(3,4)$ = x(4/11(2,-1) + 1/11(3,4))+y(-3/11(2,-1) + 2/11(3,4))

Mudança de Base - Exemplo

- Continuando...
- $z(2,-1) + w(3,4)$ = x($\frac{4}{11}$ (2,-1) + $\frac{1}{11}$ (3,4))+y($\frac{-3}{11}$(2,-1) + $\frac{2}{11}$ (3,4))
- Da equação acima temos que...
- $z = \frac{4x}{11} - \frac{3y}{11}$
- $w = \frac{1x}{11} + \frac{2y}{11}$

- Na notação de matriz temos...
- $\begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/11 & -3/11 \\ 1/11 & 2/11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

Mudança de Base

- Sejam $\beta=\{\mathbf{u_1},\ldots,\mathbf{u_n}\}$ e $\beta' = \{\mathbf{w_1},\ldots,\mathbf{w_n}\}$ duas bases ordenadas de um mesmo espaço vetorial V
- Dado o vetor $\mathbf{v} \in V$, podemos escrevê-lo como:
  - $\mathbf{v} = x_1\mathbf{u_1} + \ldots + x_n\mathbf{u_n}$
  - $\mathbf{v} = y_1\mathbf{w_1} + \ldots + y_n\mathbf{w_n}$

(1)

Mudança de Base

- Como podemos relacionar as coordenadas de **v** em relação à base β

$$[\mathbf{v}]_\beta = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

- com as coordenadas do mesmo vetor **v** em relação à base β'

$$[\mathbf{v}]_{\beta'} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Mudança de Base

- Já que $\{\mathbf{u_1},...,\mathbf{u_n}\}$ é base (β) de V, podemos escrever os vetores **v** e **w** como combinação linear dos u_j, isto é: (Lembrando que $\mathbf{v} = y_1\mathbf{w_1} + ... + y_n\mathbf{w_n}$)

$$\begin{cases} \mathbf{w}_1 = a_{11}\mathbf{u_1} + a_{21}\mathbf{u_2} + ...+ a_{n1}\mathbf{u_n} \\ \mathbf{w}_2 = a_{12}\mathbf{u_1} + a_{22}\mathbf{u_2} + ...+ a_{n2}\mathbf{u_n} \\ ...... \\ \mathbf{w}_n = a_{1n}\mathbf{u_1} + a_{2n}\mathbf{u_2} + ...+ a_{nn}\mathbf{u_n} \end{cases} \qquad (2)$$

- Substituindo (2) em (1):
- $\mathbf{v}=y_1\mathbf{w_1}+...+y_n\mathbf{w_n}=y_1(a_{11}\mathbf{u_1}+...+a_{n1}\mathbf{u_n})+..+y_n(a_{1n}\mathbf{u_1}+...+a_{nn}\mathbf{u_n}) = \mathbf{u_1}(a_{11}y_1+...+a_{1n}y_n)+..+\mathbf{u_n}(a_{n1}y_1+...+a_{nn}y_n)$

Mudança de Base

- Mas $\mathbf{v} = x_1\mathbf{u_1} + ... + x_n\mathbf{u_n}$, e como as coordenadas em relação a uma base (β) são únicas temos:
  - $\mathbf{v} = x_1\mathbf{u_1} + ... + x_n\mathbf{u_n} = \mathbf{u_1}(a_{11}y_1+...+a_{1n}y_n)+...+\mathbf{u_n}(a_{n1}y_1+...+a_{nn}y_n)$
  - $x_1 = a_{11}y_1 + ... + a_{1n}y_n$
  - .....
  - $x_n = a_{n1}y_1 + ... + a_{nn}y_n$
- Ou, em forma matricial

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Mudança de Base

- Isso é denotado por:

$$[\,\mathrm{I}\,]_{\beta}^{\beta'} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- Temos:

$$[\mathbf{v}]_{\beta} = [\,\mathrm{I}\,]\ [\mathbf{v}]_{\beta'}$$

$[\,\mathrm{I}\,]_{\beta}^{\beta'} \Rightarrow$ Matriz de mudança da base β’ para a base β

Mudança de Base

- Observe que, encontrando $[\,I\,]_{\beta}^{\beta'}$, podemos encontrar as coordenadas de qualquer vetor **v** em relação à base β, multiplicando a matriz pelas coordenadas de **v** na base β'

Mudança de Base

- Exemplo: Sejam $\beta=\{(2,-1), (3,4)\}$ e $\beta'=\{(1,0),(0,1)\}$ bases de R^2:

$$[\ I\ ]_{\beta}^{\beta'} = ?$$

$$\begin{cases} \mathbf{w}_1 = a_{11}\mathbf{u}_1 + a_{21}\mathbf{u}_2 + \ldots + a_{n1}\mathbf{u}_n \\ \mathbf{w}_2 = a_{12}\mathbf{u}_1 + a_{22}\mathbf{u}_2 + \ldots + a_{n2}\mathbf{u}_n \\ \ldots\ldots \\ \mathbf{w}_n = a_{1n}\mathbf{u}_1 + a_{2n}\mathbf{u}_2 + \ldots + a_{nn}\mathbf{u}_n \end{cases}$$

- $w_1 = (1,0) = a_{11}(2,-1) + a_{21}(3,4) = (2a_{11} + 3a_{21}, -a_{11} + 4a_{21})$
- $\Rightarrow 2a_{11}+3a_{21} = 1$ e $-a_{11}+4a_{21} = 0$
- $\Rightarrow a_{11} = 4a_{21} \Rightarrow a_{21} = 1/11$ e $a_{11} = 4/11$
- $w_2 = (0,1) = a_{12}(2,-1) + a_{22}(3,4) = (2a_{12} + 3a_{22}, -a_{12} + 4a_{22})$
- $\Rightarrow 2a_{12}+3a_{22} = 0$ e $-a_{12}+4a_{22} = 1$
- $\Rightarrow a_{22} = 2/11$ e $a_{12} = -3/11$

Mudança de Base

- Exemplo: (cont.)
  - Assim:
    - $w_1 = (1,0) = (4/11)(2,-1) + (1/11)(3,4)$
    - $w_2 = (0,1) = (-3/11)(2,-1) + (2/11)(3,4)$

$$[\,I\,]_{\beta}^{\beta'} = \begin{pmatrix} 4/11 & -3/11 \\ 1/11 & 2/11 \end{pmatrix}$$

Linhas tornam-se colunas!!!

Mudança de Base

- Exemplo: (cont.) Podemos usar essa matriz para encontrar, por exemplo, $[\mathbf{v}]_\beta$ para $\mathbf{v} = (5, -8)$

$$[(5, -8)]_\beta = [\ I\ ]_\beta^{\beta'}\ [(5, -8)]_{\beta'}$$

$$\begin{pmatrix} 4/11 & -3/11 \\ 1/11 & 2/11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Isto é: (5, -8) = 4.(2, -1) + (-1).(3, 4)

A Inversa da Matriz Mudança de Base

- Temos $[\mathbf{v}]_{\beta} = [\,I\,]_{\beta}^{\beta'}[v]_{\beta'}$
- Um fato importante é que $[\,I\,]_{\beta'}^{\beta}$ e $[\,I\,]_{\beta}^{\beta'}$ são matrizes inversíveis:

$$\left([\,I\,]_{\beta}^{\beta'}\right)^{-1} = [\,I\,]_{\beta'}^{\beta}$$

A Inversa da Matriz Mudança de Base

- Exemplo:
- Do exemplo anterior, vamos calcular $[I]_{\beta}^{\beta'}$ a partir de $[I]_{\beta'}^{\beta}$. Note que $[I]_{\beta'}^{\beta}$ é fácil de ser calculada pois β' é a base canônica:
- (2, -1) = 2.(1, 0) + (-1).(0, 1)
- (3, 4) = 3.(1, 0) + 4.(0, 1)
- Assim: $[I]_{\beta'}^{\beta} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$
- Então: $[I]_{\beta}^{\beta'} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 4/11 & -3/11 \\ 1/11 & 2/11 \end{pmatrix}$

Espaço Vetorial

- **Exemplo:** Considere o subespaço de R^4 gerado pelos vetores v1 = (1,-1,0,0), v2=(0,0,1,1), v3=(-2,2,1,1) e v4=(1,0,0,0)
- a) O vetor (2, -3, 2, 2) $\in$ [v1,v2,v3,v4]?
- b) Exiba uma base para [v1,v2,v3,v4]? Qual sua dimensão?
- c) [v1,v2,v3,v4] = R^4?

Cont.

Espaço Vetorial

- **Exemplo:**
  - a) O vetor (2, -3, 2, 2) $\in$ [v1,v2,v3,v4]?
  - Ou seja, existem a, b, c, d, tal que:
    - (2, -3, 2, 2) = a.(1,-1,0,0) + b.(0,0,1,1) + c.(-2,2,1,1) + d.(1,0,0,0)

$$\begin{cases} a - 2c + d = 2 \\ -a + 2c = -3 \\ b + c = 2 \\ \color{red}{b + c = 2} \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Espaço Vetorial

Cont.

- **Exemplo:**
- a) O vetor (2, -3, 2, 2) $\in$ [v1,v2,v3,v4]?
  - Sistema admite infinitas soluções.
  - Por exemplo: a = 3, b = 2, c = 0, d = -1
  - Logo, como existe solução, o vetor pertence a [v1,v2,v3,v4]

Cont.

Espaço Vetorial

- **Exemplo:**
- b) Exiba uma base para [v1,v2,v3,v4]? Qual sua dimensão?

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Com isso, descobrimos que v2 (ou v3) é combinação linear dos outros vetores. Logo, a base é formada por [v1,v2,v4] ou [v1, v3, v4].

Cont.

Espaço Vetorial

- **Exemplo:**
  - b) Exiba uma base para [v1,v2,v3,v4]? Qual sua dimensão?
    - Base = [v1,v2,v4] $\Rightarrow$ dim = 3
  - c) [v1,v2,v3,v4] = R^4?
    - Como dim Base = 3 e dim R^4 = 4, então [v1,v2,v3,v4] $\neq$ R^4

Espaço Vetorial

- **Exemplo**: Considere o subespaço de R^3 gerado pelos vetores $v_1=(1,1,0)$, $v_2=(0,-1,1)$ e $v_3=(1,1,1)$.
- $[v_1,v_2,v_3]=R^3$?
- $v_1=(1,1,0)$, $v_2=(0,-1,1)$ e $v_3=(1,1,1)$ é LI?

Cont.

Espaço Vetorial

- **Exemplo**: Solução 1:
- Existem a, b, c tal que:
  - $(x, y, z) = a.(1,1,0) + b.(0,-1,1) + c.(1,1,1)$

$$\begin{cases} a + c = x \\ a - b + c = y \\ b + c = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2x - y - z \\ b = x - y \\ c = -x + y + z \end{cases}$$

Ou seja, há valores para a, b e c que podem gerar qualquer vetor no R^3.

Cont.

Espaço Vetorial

- **Exemplo**: Solução 2:
- Vamos tentar escalonar:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \ldots \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

O que isso significa?

Significa que, com esses vetores e operações lineares, conseguimos gerar a base canônica. Logo, podemos gerar todo o R^3.

Espaço Vetorial

- $v_1=(1,1,0)$, $v_2=(0,-1,1)$ e $v_3=(1,1,1)$ é LI?
  - $(0, 0, 0) = a.(1,1,0) + b.(0,-1,1) + c.(1,1,1)$

$a + c = 0 \rightarrow a = -c$

$a – b + c = 0 \rightarrow -c -b + c = 0 \rightarrow -b=0 \rightarrow b=0$

$b + c = 0 \rightarrow b = -c$

Logo, $c = 0$ e $a = 0$

São LI

Exercícios

1- Quais são as coordenadas de $x = (1,0,0)$ em relação a base $\beta = \{(1,1,1), (-1,1,0), (1,0,-1)\}$?

Exercícios

2- Determine uma base para o seguinte espaço vetorial:

$$S = \{(x, y, z) \in R^3 / \ y = 2x\}$$

Exercícios

3- Sejam $\beta = \{(1,0), (0,1)\}$ e $\beta_1 = \{(-1,1), (1,1)\}$ bases ordenadas de R^2.

a) Ache as matrizes de mudança de base $[I]_{\beta}^{\beta_1}$

b) Quais são as coordenadas do vetor v = (3,-2) em relação as bases:

i) β

ii) β_1