Introdução à Álgebra Linear

Revisão – Prova 2

Camila Martins Saporetti
(camila.saporetti@iprj.uerj.br)

Lista 4

- 6. Mostre que cada um dos subconjuntos de R^4 a seguir são subespaços vetoriais.

  (a) $W = \{(x, y, z, t) \in R^4;\ x+y=0 \text{ e } z-t=0\}$

Lista 4

6.a) $W = \{(x, y, z, t) \in R^4;\ x+y=0 \text{ e } z-t=0\}$

- $y=-x$ e $z=t$

1º) $u+v \in W$

- $(u_1,-u_1,u_2,u_2) + (v_1,-v_1,v_2,v_2) = (u_1+v_1,-u_1+(-v_1),u_2+v_2,u_2+v_2) = (u_1+v_1,-(u_1+v_1),u_2+v_2,u_2+v_2) \in W$

Lista 4

6.a) cont.

- 2º) $ku \in W$
- $k(u_1,-u_1,u_2,u_2) = (ku_1,k(-u_1),ku_2,ku_2) = (ku_1,-ku_1,ku_2,ku_2) \in W$

Lista 4

- 8. Considere os subconjuntos de R^3: $U=\{(x, x, x); x \in R\}$ e $W=\{(x, y, 0); x, y \in R\}$.

  (a) Mostre que U é um subespaço vetorial de R^3;

  (b) Mostre que W é um subespaço vetorial de R^3;

  (c) Calcule $U \cap W$.

  (d) $R^3=U+W$? Justifique.

Lista 4

- $U=\{(x, x, x); x \in R\}$

  (a)Mostre que U é um subespaço vetorial de R^3;

  1º)$u+v \in U$

- $(u_1,u_1,u_1) + (v_1,v_1,v_1) = (u_1+v_1,u_1+v_1,u_1+v_1) \in U$

  2º)$ku \in U$

- $k(u_1,u_1,u_1) =(ku_1,ku_1,ku_1) \in U$

Lista 4

- $W=\{(x, y, 0); x, y \in R\}$

  (b)Mostre que W é um subespaço vetorial de R^3;

  1º)$u+v \in W$
- $(u_1,u_2,0) + (v_1,v_2,0) = (u_1+v_1,u_2+v_2,0) \in W$

  2º)$ku \in W$
- $k(u_1,u_2,0) = (ku_1,ku_2,k0) = (ku_1,ku_2,0) \in W$

  Logo W é um subespaço de R^3

Lista 4

6.(c)Calcule $U \cap W$.

- $(x,x,x)=(x,y,0)$
- $x=0$

$U \cap W = (0,0,0)$

Lista 4

6.(d)$R^3=U+W$? Justifique.

- $(x,x,x)+(x,y,0) = (x+x,x+y,x+0)=(2x,x+y,x)$

  Não representa todo o R^3, pois o primeiro elemento precisa ser o dobro do terceiro. Dessa forma o R^3 não pode ser todo formado pela união.

Lista 4

- 11. Verifique se cada um dos vetores a seguir são LD ou LI.
- (a)$v_1=(1,2)$, $v_2=(0,1)$, $v_3=(-1,1)$ em $V = R^2$.
- $av_1+bv_2+cv_3=0 \rightarrow a(1,2)+b(0,1)+c(-1,1)=0$

  $(a-c, 2a+b+c)=(0,0)$
- $a-c = 0 \rightarrow a=c$

  $2a+b+c = 0 \rightarrow b=-2a -c = -2a-a = -3a$
- Logo para coef={a,3a,a} para todo $a \in R$
- Assim $\{v_1,v_2,v_3\}$ são LD

Lista 5

- 1. Determine uma base para cada um dos seguintes espaços vetoriais:

  (d) $S = \{(x, y, z, w);\ x - 3y + z = 0\}$

  (e) $S = \{(x, y, z) \in R^3 /\ x = 3y \text{ e } z = -y\}$

Lista 5

1. (d) $S = \{(x, y, z, w); x - 3y + z = 0\}$

- $z=3y-x$
- $(x,y,3y-x,w) =x(1,0,-1,0)+y(0,1,3,0)+w(0,0,0,1)$
- Todo vetor de S é uma combinação linear de (1,0,-1,0), (0,1,3,0) e (0,0,0,1)
- $a(1,0,-1,0)+b(0,1,3,0)+c(0,0,0,1)=(0,0,0,0)$
- a=0,b=0 e c=0
- Logo são LI, então o conjunto {(1,0,-1,0), (0,1,3,0), (0,0,0,1)} é uma base de S

Lista 5

1.(e) $S = \{(x, y, z) \in R^3 / x = 3y \text{ e } z = -y\}$

- $(3y,y,-y)=y(3,1,-1)$
- Todo vetor de S é uma combinação linear do vetor (3,1,-1)
- $a(3,1,-1) =(0,0,0)$
- $a=0$
- É LI, então o conjunto {(3,1,-1)} é uma base de S

Lista 5

2. Considere o conjunto $B=\{v_1,v_2,v_3\}$, onde $v_1=(1,2,3)$, $v_2=(-5,1,1)$ e $v_3=(0,0,1)$

(a) Verifique se o conjunto B é uma base do IR^3.

(b)Seja B' o conjunto formado pelos vetores v_1 e v_2 de B substituindo-se o vetor v3 pelo vetor $v_3'=(7,3,5)$. Verifique se o conjunto é LI ou LD.

(c) Mostre que $v_3'=(7,3,5)$ é uma combinação linear dos vetores v_1 e v_2 de B.

Lista 5

- 2.(a) Verifique se o conjunto B é uma base do IR^3.
- $a(1,2,3)+b(-5,1,1)+c(0,0,1)=(0,0,0)$
- $a-5b=0 \rightarrow a=5b$
- $2a+b=0 \rightarrow a=-b/2$
- $3a+b+c=0$
- $5b=-b/2 \rightarrow b=-10b$, logo $b=0$
- E $a=0$ e $c=0$
- São LI

Lista 5

- $(x,y,z) = a(1,2,3)+b(-5,1,1)+c(0,0,1)$
- $a-5b=x \rightarrow a=x+5b$ (I)
- $2a+b=y \rightarrow b=y-2a$ (II)
- $3a+b+c=z$ (III)
- Substituindo (II) em (I)
- $a=x+5(y-2a)$
- $a=x+5y-10a$
- $11a = x+5y$
- $a=(x+5y)/11$ (IV)

Lista 5

- Substituindo (IV) em (II)
- $b=y -2((x+5y)/11)$
- $b=(11y-2x-10y)/11 = (y-2x)/11$ (V)
- Substituindo (IV) e (V) em (III)
- $3a+b+c=z$
- $3((x+5y)/11) + (y-2x)/11 + c = z$
- $c=z-3x/11-15y/11-y/11+2x/11=(11z-x-16y)/11$

Lista 5

- $(x,y,z)=(x+5y)/11(1,2,3)+(y-2x)/11(-5,1,1)+(11z-x-16y)/11(0,0,1)$
- Todo vetor de R^3 é uma combinação linear dos vetores (1,2,3),(-5,1,1) e (0,0,1).
- Logo, o conjunto B é uma base do R^3

Lista 5

- 2.(b)Seja B’ o conjunto formado pelos vetores v_1 e v_2 de B substituindo-se o vetor v3 pelo vetor v_3’=(7,3,5). Verifique se o conjunto é LI ou LD.
- B’ = {(1,2,3),(-5,1,1),(7,3,5)}
- a(1,2,3)+b(-5,1,1)+c(7,3,5)=(0,0,0)
- a-5b+7c=0 (I)
- 2a+b+3c=0 $\rightarrow$ b=-2a-3c (II)
- 3a+b+5c=0 $\rightarrow$ b=-3a-5c (III)

Lista 5

- Igualando (III) e (II)
- $-2a-3c=-3a-5c$
- $a=-2c$ (IV)
- Substituindo (IV) em (II)
- $b=-2(-2c) -3c$
- $b = c$ (V)
- Substituindo (IV) e (V) em (I)
- $-2c-5c+7c=0$
- $0=0$
- Sistema com infinitas soluções, então é LD

Lista 5

- (c) Mostre que v_3'=(7,3,5) é uma combinação linear dos vetores v1 e v2 de B.

  $(7,3,5)=a(1,2,3)+b(-5,1,1)$

- $a-5b=7$ (I)
- $2a+b=3$ (II)
- $3a+b=5 \rightarrow b=5-3a$ (III)

Lista 5

- Substituindo (III) em (II)

  2a+5-3a=3

  -a=3-5 →a =2
- Substituindo em (II)

  2.2+b=3→ b=-1
- Verificando (I)

  2-5(-1)=7

  2+5=7

  7=7
- Satisfaz as equações, então v_3' é uma combinação linear de v_1 e v_2.

Lista 5

3. Sejam $\beta = \{(1,0), (0,1)\}$, $\beta_1 = \{(-1,1), (1,1)\}$, $\beta_2 = \{(\sqrt{3},1), (\sqrt{3},-1)\}$ e $\beta_3 = \{(2,0), (0,2)\}$ bases ordenadas de R^2.

a)Ache as matrizes de mudanca de base i) $[I]_{\beta_1}^{\beta}$ iii)$[I]_{\beta_3}^{\beta}$

b)Quais são as coordenadas do vetor $v = (-5,1)$ em relação as bases:

i) β ii) β_1 iii) β_2 iv) β_3

Lista 5

- 3. i) $[I]_{\beta_1}^{\beta}$
- $(1,0) = a_{11}(-1,1) + a_{21}(1,1)$
- $(0,1) = a_{12}(-1,1) + a_{22}(1,1)$
- $-a_{11} + a_{21} = 1$ (1)
- $a_{11} + a_{21} = 0 \rightarrow a_{11} = -a_{21}$ (2)
- Substituindo (2) em (1)
- $a_{21} + a_{21} = 1 \rightarrow 2a_{21} = 1 \rightarrow a_{21} = ½$
- $a_{11} = -1/2$

Lista 5

- 3. i) cont.
- $-a_{12} + a_{22} = 0 \rightarrow a_{12} = a_{22}$ (1)
- $a_{12} + a_{22} = 1$ (2)
- Substituindo (1) em (2)
- $a_{12} + a_{12} = 1$
- $2a_{12} = 1$
- $a_{12} = ½$ e $a_{22} = 1/2$

$$[I]_{\beta}^{\beta}1 = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Lista 5

- 3. $iii)[I]_{\beta_3}^{\beta}$
- $(1,0) = a_{11}(2,0) + a_{21}(0,2)$
- $(0,1) = a_{12}(2,0) + a_{22}(0,2)$
- $2a_{11} = 1 \rightarrow a_{11} = ½$
- $2a_{21} = 0 \rightarrow a_{21} = 0$
- $2a_{12} = 0 \rightarrow a_{12} = 0$
- $2a_{22} = 1 \rightarrow a_{22} = ½$

$$[I]_{\beta}^{\beta}3 = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Lista 5

- 3.i) $\beta = \{(1,0), (0,1)\}$

  $(-5,1)=x(1,0)+y(0,1)$
- $x=-5$
- $y=1$
- $$[(-5,1)]_\beta=\begin{bmatrix}-5\\1\end{bmatrix}$$

Lista 5

- 3.ii) $\beta_1 = \{(-1,1), (1,1)\}$
- $(-5,1)=x(-1,1)+y(1,1)$
- $-x+y=-5$ (I)
- $x+y=1 \rightarrow x=1-y$(II)
- Substituindo (II) em (I): $-1+y+y=-5$
- $2y=-4 \rightarrow y=-2$
- $x=1-y=1-(-2)=3$
- $$[(-5,1)]_{\beta 1}=\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Lista 5

- 3.iii)$\beta_2 = \{(\sqrt{3},1), (\sqrt{3},-1)\}$
- $(-5,1)= x(\sqrt{3},1)+y(\sqrt{3},-1)$
- $\sqrt{3}x+\sqrt{3}y=-5$ (I)
- $x-y=1 \rightarrow x=1+y$ (II)
- Substituindo (II) em (I):
- $\sqrt{3}(1+y)+\sqrt{3}y=-5 \rightarrow 2\sqrt{3}y = -5-\sqrt{3}$
- $y= (-5-\sqrt{3})/2\sqrt{3}=(-5\sqrt{3}-3)/6$

Lista 5

- 3.iii) cont.
- x=1+y = (6-5√3-3)/6 = (-5√3+3)/6
- $$[(-5,1)]_{\beta 2}=\begin{bmatrix}(-5\sqrt{3}+3)/6\\(-5\sqrt{3}-3)/6\end{bmatrix}$$

Lista 5

- 3.iv)$\beta_3 = \{(2,0), (0,2)\}$
- $(-5,1)=x(2,0)+y(0,2)$
- $2x=-5 \rightarrow x=-5/2$
- $2y=1 \rightarrow y=1/2$
- $[(-5,1)]_{\beta 3}=\begin{bmatrix} -5/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$

Lista 6

1. Verifique quais transformações são lineares:

b. $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $T(x, y) = |x|$

c. $T: P_2 \to P_2$, $T(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = a_0 + a_1 x + 1 + a_2(x + 1)^2$

f. $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (y - x, 0)$

Lista 6

- 1.b. $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $T(x, y) = |x|$
- $u=(x_1,y_1)$ e $v=(x_2,y_2)$
- $T(u+v) = |x_1+x_2|$
- $T(u) + T(v) = |x_1|+|x_2|$
- $T(u+v) \neq T(u) + T(v)$
- Não é transformação linear

Lista 6

- 1.c. $T: P_2 \to P_2$, $T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_0 + a_1 x + 1 + a_2(x+1)^2$
- $p_1(x_1) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2$
- $p_2(x_2) = a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2$
- $T(u+v) = a_0 + a_1(x_1+x_2) + 1 + a_2((x_1+x_2) + 1)^2 = a_0 + a_1 x_1 + a_1 x_2 + 1 + a_2((x_1+x_2)^2 + 2(x_1+x_2) + 1) = a_0 + a_1 x_1 + a_1 x_2 + 1 + a_2(x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 2(x_1+x_2) + 1)$
- $T(u)+T(v) = a_0 + a_1x_1 + 1 + a_2(x_1 + 1)^2 + a_0 + a_1x_2 + 1 + a_2(x_2 + 1)^2 = a_0 + a_1x_1 + 1 + a_2x_1^2 + 2x_1 + 1) + a_0 + a_1x_2 + 1 + a_2(x_2^2 + 2x_2 + 1)$
- $T(u+v) \neq T(u)+T(v)$
- Não é transformação linear

Lista 6

- 1.f. $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T(x, y) = (y - x,\ 0)$
- $u=(x_1,y_1)$ e $v=(x_2,y_2)$
- $T(u+v) = (y_1-x_1+y_2-x_2,0) = (y_1-x_1,0)+(y_2-x_2,0) = T(u) + T(v)$
- $T(\alpha u) =(\alpha y_1-\alpha x_1,\alpha 0) = \alpha(y_1-x_1,0) = \alpha T(u)$
- É transformação Linear

Lista 6

4. Considere a base $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ de $\mathbb{R}^3$, em que $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 1, 0)$ e $v_3 = (1, 0, 0)$ e seja $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear tal que:

$$T(v_1) = (2, -1, 4),\ T(v_2) = (3, 0, 1) \text{ e}$$
$$T(v_3) = (-1, 5, 1)$$

Determine uma fórmula para $T(x, y, z)$ e use a fórmula para obter $T(2, 4, -1)$

Lista 6

- 4. $T(1,1,1)=(2,-1,4)$, $T(1,1,0)=(3,0,1)$, $T(1,0,0)=(-1,5,1)$
- $T(1,0,0) + T(0,1,0)+T(0,0,1)=(2,-1,4)$ (I)
- $T(1,0,0) + T(0,1,0)=(3,0,1)$ (II)
- $T(1,0,0)=(-1,5,1)$ (III)
- Substituindo (III) em (II):
- $T(0,1,0)=(3,0,1)-(-1,5,1)=(4,-5,0)$ (IV)
- Substituindo (IV) e (III) em (I)
- $T(0,0,1)=(2,-1,4)-(4,-5,0)-(-1,5,1)=(-1,-1,3)$

Lista 6

- $(x,y,z)=a(1,0,0)+b(0,1,0)+c(0,0,1)$, $a=x, b=y$ e $c=z$
- $T(x,y,z)=xT(1,0,0)+yT(0,1,0)+zT(0,0,1)$
- $T(x,y,z)=x(-1,5,1)+y(4,-5,0)+z(-1,-1,3)$
- $T(x,y,z)=(-x+4y-z,5x-5y-z,x+3z)$

- $T(2,\ 4,\ -1) = (-2+16+1,10-20+1,2-3)=(15,-9,-1)$

Lista 6

5. Considere a transformação linear:

T: $R^2 \rightarrow R$

$(x,y) \rightarrow T(x,y)=3x+2y$

Determine o núcleo da transformação linear T.

$T(x,y)=0 \rightarrow 3x+2y=0 \rightarrow 3x=-2y \rightarrow y=-3x/2$

$Ker\ T=\{(x,y) \in R^2;\ 3x+2y=0\}$

$Ker\ T=\{(x,-3x/2);\ x \in R\} = \{x(1,-3/2);\ x \in R\}=[(1,-3/2)]$

Lista 6

6. Considere a transformação linear:

$T: R^3 \rightarrow R^2$

$(x,y,z) \rightarrow T(x,y,z)=(x-y-z,2z-x)$

Determine a imagem da transformação linear T.

$Im\ (T) = \{(x-y-z,2z-x);x,y,z \in R\}=\{x(1,-1)+y(-1,0)+z(-1,2);x,y,z \in R\}=<(1,-1),(-1,0),-1,2)>$