



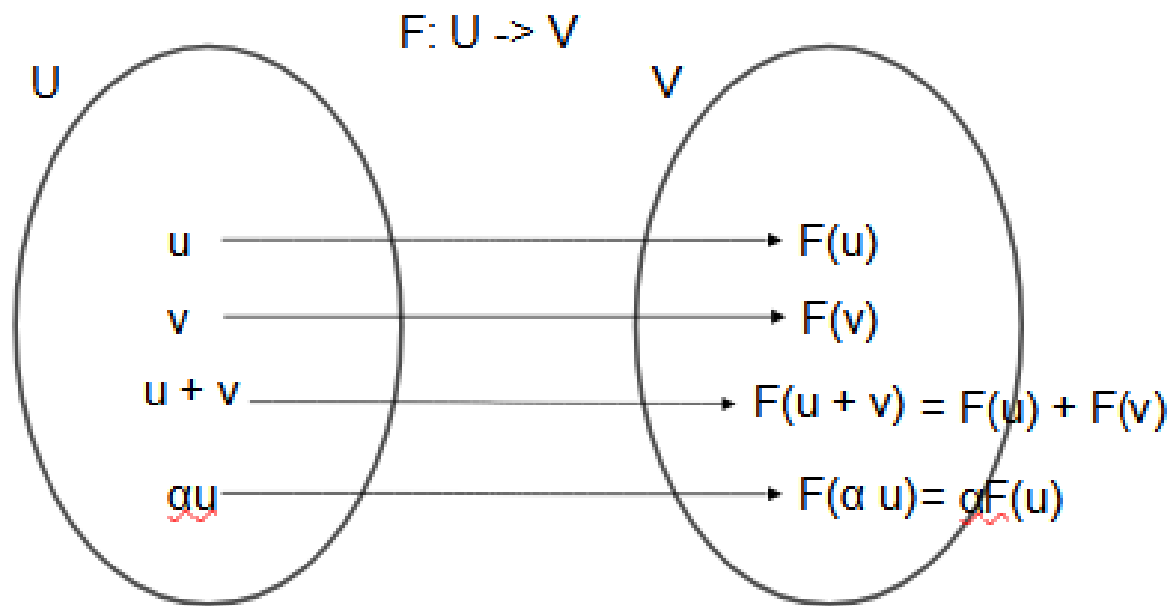
Álgebra Linear

Transformações Lineares

Camila Martins Saporetti
(camila.saporetti@iprj.uerj.br)

Transformações Lineares

- Vamos supor que tenhamos dois conjuntos U e V que são espaços vetoriais



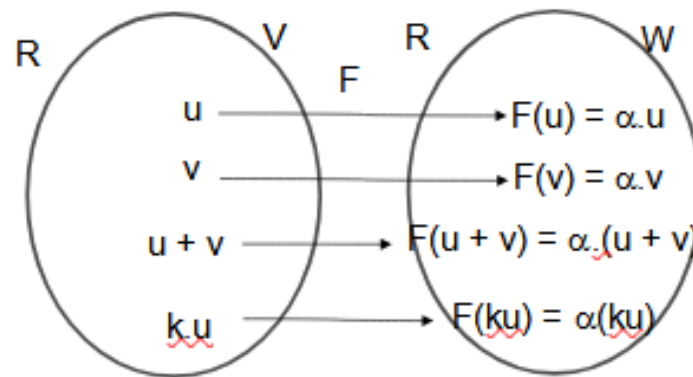
- Ou seja,
 - $F(u + v) = F(u) + F(v)$
 - $F(\alpha u) = \alpha F(u)$

Transformações Lineares

- Funções lineares descrevem o tipo mais simples de dependência entre variáveis
- Muitos problemas podem ser representados por tais funções
- **Definição:** Sejam V e W dois espaços vetoriais. Uma **transformação linear** é uma função de V em W , $F: V \rightarrow W$ que satisfaz as condições:
 - i) Quaisquer que sejam \mathbf{u} e \mathbf{v} em V : $F(\mathbf{u}+\mathbf{v})=F(\mathbf{u})+F(\mathbf{v})$
 - ii) Quaisquer que sejam $k \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{v} \in V$: $F(k.\mathbf{v}) = k.F(\mathbf{v})$

Transformações Lineares

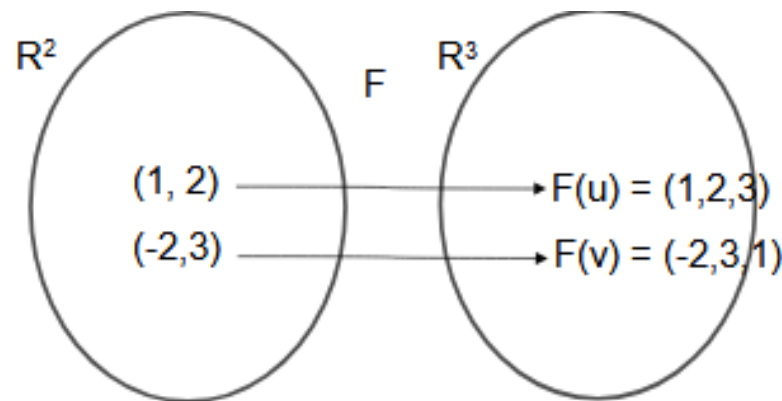
- **Exemplo 1:**
- $V = R$ e $W = R$
- $F: R \rightarrow R$ definida por $\mathbf{u} \rightarrow \alpha.\mathbf{u}$ ou $F(\mathbf{u}) = \alpha.\mathbf{u}$
- Solução:
 - $F(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha.(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha.\mathbf{u} + \alpha.\mathbf{v} = F(\mathbf{u}) + F(\mathbf{v})$
 - $F(k.\mathbf{u}) = \alpha.k.\mathbf{u} = k.\alpha.\mathbf{u} = k.F(\mathbf{u})$
 - Logo, F é linear!



Transformações Lineares

- **Exemplo 2:**

- $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$
- $(x,y) \rightarrow (x, y, x + y)$ ou $F(x, y) = (x, y, x + y)$
- Solução:
- Dados u e $v \in \mathbb{R}^2$, sejam $u = (1,2)$ e $v = (-2,3)$,
- $F(u) = F(1, 2) = (1, 2, 3)$
- $F(v) = F(-2,3) = (-2,3, 1)$



Transformações Lineares

- **Exemplo 2 (cont.):**
- Solução: Lembrando $(x,y) \rightarrow (x, y, x + y)$ ou $F(x, y) = (x, y, x + y)$
 - $F(u) = F(1, 2) = (1, 2, 3)$
 - $F(v) = F(-2,3) = (-2,3, 1)$
 - Verificando se $F(u+v) = F(u) + F(v)$
 - $u+v = (1,2)+(-2,3) = (-1,5) \rightarrow F(u+v) = F(-1,5) = (-1,5,4)$
 - $F(u) + F(v) = F(1,2) + F(-2,3) = (1, 2, 3) + (-2, 3, 1) = (-1, 5, 4)$
 - Então, $F(u+v) = F(u) + F(v) \rightarrow (-1,5,4) = (1, 2, 3) + (-2,3, 1)$

Transformações Lineares

- **Exemplo 2 (cont.):**
 - Verificando se $F(k.u) = k.F(u)$
 - Se $k = -3$, então
 - $F(ku) = F(-3.(1,2)) = F(-3,-6) = (-3,-6,-9)$
 - $kF(u) = -3F(1,2) = -3.(1,2,3) = (-3,-6,-9)$
 - Então, $F(k.u) = k.F(u) \rightarrow (-3,-6,-9) = -3.(1,2,3)$
 - Logo, F é linear!

Transformações Lineares

- **Exemplo 3:**
- $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $u \rightarrow u^2$ ou $F(u) = u^2$

- Solução:

$$F(u + v) = (u + v)^2 = u^2 + 2.u.v + v^2 \neq u^2 + v^2 = F(u) + F(v)$$

Logo, F não é linear!

Transformações Lineares

- **Exemplo 4:**
- $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$
- $(x,y) \rightarrow (2x, 0, x + y)$ ou $F(x, y) = (2x, 0, x + y)$
- Solução:
- Dados u e $v \in \mathbb{R}^2$, sejam $\mathbf{u}=(x_1,y_1)$ e $\mathbf{v}=(x_2,y_2)$, $x_i,y_i \in \mathbb{R}$
- Verificando $F(u+v) = F(u) + F(v)$
- $F(u+v)=F((x_1,y_1) + (x_2,y_2)) = F(x_1 + x_2, y_1 + y_2) =$
 $= (2x_1 + 2x_2, 0, x_1 + x_2 + y_1 + y_2)$
- $F(u) + F(v) = F(x_1,y_1) + F(x_2,y_2)$
 $= (2x_1, 0, x_1 + y_1) + (2x_2, 0, x_2 + y_2)$
 $= (2x_1 + 2x_2, 0, x_1 + x_2 + y_1 + y_2)$

Transformações Lineares

- **Exemplo 4 (cont.) :**
- Verificando $F(k.u) = k.F(u)$
- $F(k.u) = F(k.(x_1, y_1)) = F(k.x_1, k.y_1) = (2k.x_1, 0, k.x_1 + k.y_1) =$
 $= k(2x_1, 0, x_1 + y_1) = k.F(u)$

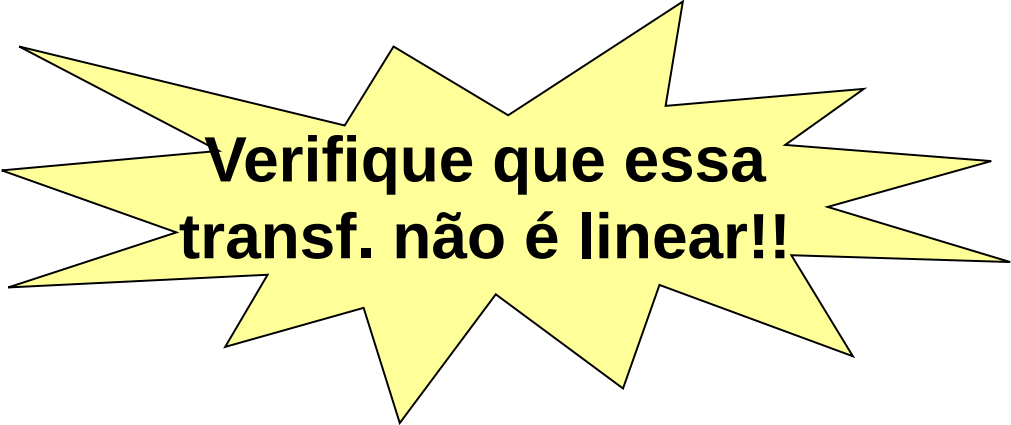
Logo, F é linear!

Transformações Lineares

- **OBS 1:** Da definição de transformação linear, temos que a transformação do vetor nulo leva ao mesmo vetor nulo: $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$
- Isso ajuda a detectar transformações não lineares: se $T(\mathbf{0}) \neq \mathbf{0}$, implica uma transformação não linear
- No entanto, $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ não é condição suficiente para que T seja linear (ex.: $T(\mathbf{u}) = \mathbf{u}^2$)

Transformações Lineares

- **OBS 2:** Uma transformação para ser linear não implica que ela é derivada de uma função linear
- Por exemplo: $(x, y) \rightarrow (x + 5, y)$ não é transf. Linear, embora o mapeamento seja linear



**Verifique que essa
transf. não é linear!!**

Transformações Lineares

- **Exemplo:** $V = \mathbb{R}^n$ e $W = \mathbb{R}^m$
- Seja A uma matriz $m \times n$. Definimos:
- $L_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ por $\mathbf{v} \rightarrow A \cdot \mathbf{v}$
- onde \mathbf{v} é tomado como vetor coluna

$$L_A(\mathbf{v}) = A_{m \times n} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_m \end{pmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

- Transformação do \mathbb{R}^n para o \mathbb{R}^m

Cont.

Transformações Lineares

- **Exemplo:**
- Das propriedades de operações de matrizes:
 - $L_A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A.(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A.\mathbf{u} + A.\mathbf{v} = L_A(\mathbf{u}) + L_A(\mathbf{v})$
 - $L_A(k.\mathbf{u}) = A.(k.\mathbf{u}) = k.(A.\mathbf{u}) = k.L_A(\mathbf{u})$
 - Logo, L_A é linear

Cont.

Transformações Lineares

- **Exemplo:**

- Suponha $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

- $L_A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

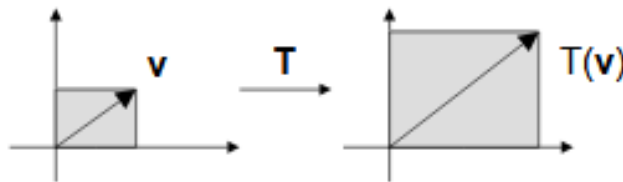
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 0 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

- Então, $L_A(x_1, x_2) = (2x_1, 0, x_1 + x_2)$

Transformações do Plano no Plano

1) Expansão (ou contração) uniforme:

- $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \alpha \in \mathbb{R}, \mathbf{v} \rightarrow \alpha \cdot \mathbf{v}$
- Por exemplo, $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \alpha = 2, \mathbf{v} \rightarrow 2 \cdot \mathbf{v}$
- $T(x, y) = 2(x, y)$



- Na forma matricial:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow 2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

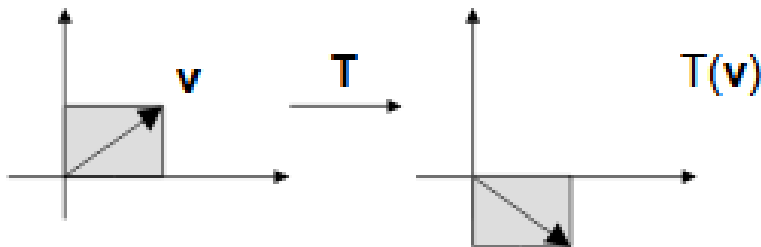
- Nesse caso, temos uma expansão.
 - Se $0 < \alpha < 1$, teríamos uma contração

Transformações do Plano no Plano

2) Reflexão em Torno do Eixo X:

- $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \rightarrow (x, -y)$
- Na forma matricial:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



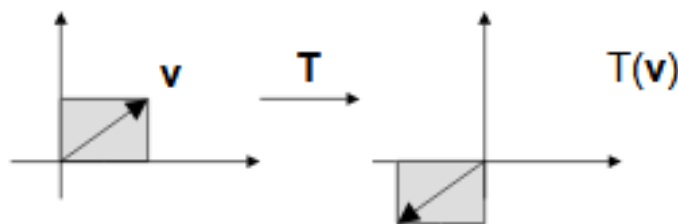
Transformações do Plano no Plano

- **3) Reflexão na Origem:**

$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \mathbf{v} \rightarrow -\mathbf{v}$ ou $T(x, y) \rightarrow (-x, -y)$

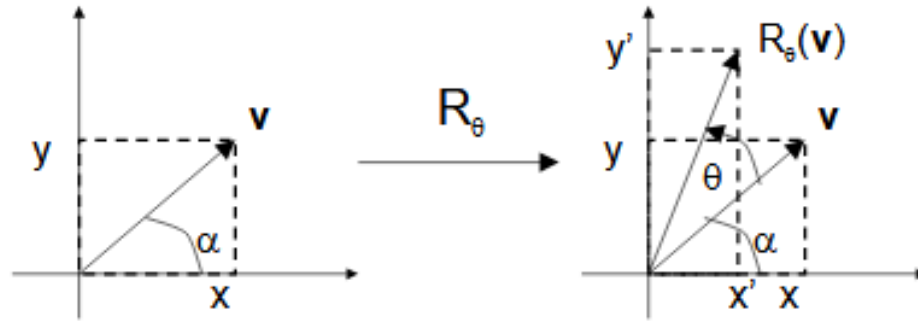
Na forma matricial:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



Transformações do Plano no Plano

- 4) Rotação de um ângulo θ (sentido anti-horário)



- $x' = r.\cos(\alpha + \theta) = r.\cos\alpha.\cos\theta - r.\sin\alpha.\sin\theta$, onde $r = |\mathbf{v}|$
- Mas, $r.\cos\alpha = x$ e $r.\sin\alpha = y$
- $\Rightarrow x' = x.\cos\theta - y.\sin\theta$
- Analogamente: $y' = y.\cos\theta + x.\sin\theta$
- Assim: $R_\theta(x,y) = (x.\cos\theta - y.\sin\theta, y.\cos\theta + x.\sin\theta)$

Cont.

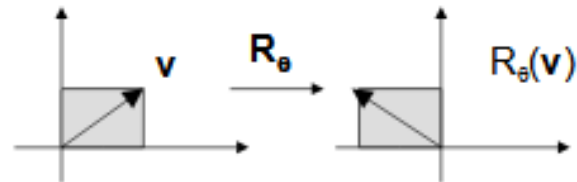
Transformações do Plano no Plano

- 4) Rotação de um ângulo θ (sentido anti-horário)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \underline{x \cdot \cos \theta} - \underline{y \cdot \sin \theta} \\ \underline{y \cdot \cos \theta} + \underline{x \cdot \sin \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Caso $\theta = \pi/2$ ($\cos \theta = 0$ e $\sin \theta = 1$), temos:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

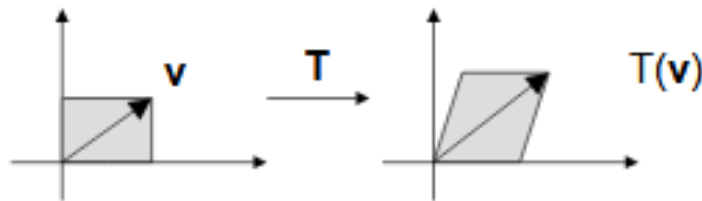


Transformações do Plano no Plano

- **5) Cisalhamento Horizontal:**

- $T(x, y) = (x + \alpha y, y), \alpha \in \mathbb{R}$
- Por exemplo: $T(x, y) = (x + 2y, y)$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x+2y \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



Transformações do Plano no Plano

- **6) Translação:**
- $T(x, y) = (x + a, y + b), a, b \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

- Observe que, a menos que $a = b = 0$, essa transformação não é linear.
- Lembre-se que se $T(\mathbf{0}) \neq \mathbf{0}$, T não é linear

Conceitos e Teoremas

- **Teorema:** Dados dois espaços vetoriais V e W e uma base V , $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$, sejam $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n$ elementos arbitrários de W . Então existe uma única transformação linear $T: V \rightarrow W$ tal que $T(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1, \dots, T(\mathbf{v}_n) = \mathbf{w}_n$. Esta transformação é dada por:
 - Se $\mathbf{v} = a_1 \mathbf{v}_1 + \dots + a_n \mathbf{v}_n$
 - $T(\mathbf{v}) = T(a_1 \mathbf{v}_1) + \dots + T(a_n \mathbf{v}_n)$
 - $T(\mathbf{v}) = a_1 T(\mathbf{v}_1) + \dots + a_n T(\mathbf{v}_n) = a_1 \mathbf{w}_1 + \dots + a_n \mathbf{w}_n$

Conceitos e Teoremas

- **Exemplo:** Qual a transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $T(1, 0) = (2, -1, 0)$ e $T(0, 1) = (0, 0, 1)$?
- Solução:
- $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ e $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$
- $\mathbf{w}_1 = (2, -1, 0)$ e $\mathbf{w}_2 = (0, 0, 1)$
- $\mathbf{v} = (x, y)$
- $\mathbf{v} = (x, y) = a.(1, 0) + b.(0, 1) \rightarrow x = a$ e $y = b$
- $\mathbf{v} = (x, y) = x.(1, 0) + y.(0, 1)$
- $T(\mathbf{v}) = T(x.(1, 0)) + T(y.(0, 1))$
- $T(\mathbf{v}) = x.T(\mathbf{e}_1) + y.T(\mathbf{e}_2) = x.(2, -1, 0) + y.(0, 0, 1)$
- $T(\mathbf{v}) = (2x, -x, y)$

Conceitos e Teoremas

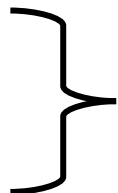
- **Exemplo:** Qual a transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $T(1, 1) = (3, 2, 1)$ e $T(0, -2) = (0, 1, 0)$?

- **Solução 1:**

- $T(1, 1) = (3, 2, 1)$

- $T(0, -2) = (0, 1, 0)$

- Mas:



Não formam
base canônica!!

- $T(0, -2) = (0, 1, 0) \Rightarrow -2 \cdot T(0, 1) = (0, 1, 0) \Rightarrow T(0, 1) = (0, -1/2, 0)$

- $T(1, 1) = T(1, 0) + T(0, 1) = (3, 2, 1)$

- $\Rightarrow T(1, 0) + (0, -1/2, 0) = (3, 2, 1) \Rightarrow T(1, 0) = (3, 5/2, 1)$

- Logo: $T(1, 0) = (3, 5/2, 1)$ e $T(0, 1) = (0, -1/2, 0)$

- Agora formam uma base canônica!

Cont.

Conceitos e Teoremas

- **Exemplo:**
- **Solução 1:**
 - $\mathbf{v} = (x, y)$
 - $T(\mathbf{v}) = x.T(\mathbf{e}_1) + y.T(\mathbf{e}_2) = x.(3, 5/2, 1) + y.(0, -1/2, 0)$
 - $T(\mathbf{v}) = (3x, 5/2x - 1/2y, x)$
 - OBS: Verifique... para $T(1,1)$ e $T(0,-2)$
 - $T(1,1) = (3, 5/2 - 1/2, 1) = (3, 2, 1)$
 - $T(0, -2) = (0, 1, 0)$



OK!!!

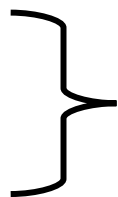
Conceitos e Teoremas

- **Exemplo:** Qual a transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $T(1, 1) = (3, 2, 1)$ e $T(0, -2) = (0, 1, 0)$?

- **Solução 2:**

- $T(1, 1) = (3, 2, 1)$

- $T(0, -2) = (0, 1, 0)$



Não formam
base canônica!!

- $\mathbf{v} = (x, y) = a.(1, 1) + b.(0, -2)$

- Logo: $x = a$ e $y = a - 2b \Rightarrow b = (x - y)/2$

- Assim: $\mathbf{v} = x.(1, 1) + [(x - y)/2].(0, -2)$

- $T(\mathbf{v}) = x.T(1, 1) + [(x - y)/2].T(0, -2)$

- $T(\mathbf{v}) = x.(3, 2, 1) + [(x - y)/2].(0, 1, 0)$

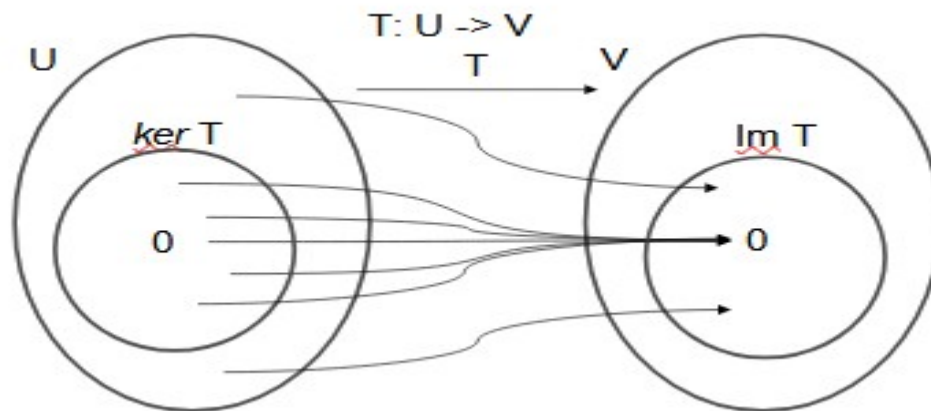
- $T(\mathbf{v}) = (3x, 5/2x - 1/2y, x)$ (como antes)

Conceitos e Teoremas

- **Definição:** Seja $T:V \rightarrow W$ uma transformação linear. A **imagem de T** é o conjunto dos vetores $\mathbf{w} \in W$ tal que existe um vetor $\mathbf{v} \in V$, que satisfaz $T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$. Ou seja:
 - $\text{Im}(T) = \{\mathbf{w} \in W ; T(\mathbf{v}) = \mathbf{w} \text{ para algum } \mathbf{v} \in V\}$
- **Definição:** Seja $T:V \rightarrow W$ uma transformação linear. O conjunto de todos os vetores $\mathbf{v} \in V$ tais que $T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ é chamado de **núcleo de T** , sendo denotado por $\ker T$ ($\ker = \text{kernel}$). Isto é:
 - $\ker T = \{\mathbf{v} \in V ; T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\}$

Conceitos e Teoremas

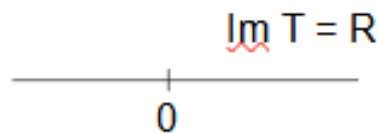
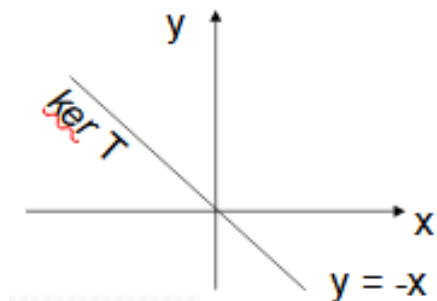
- Vamos supor que tenhamos dois conjuntos U e V que são espaços vetoriais



- Ou seja,
 - $\ker T$ é um subespaço vetorial de U
 - $\ker T \neq \emptyset$, pois vetor nulo de $U \in \ker T$, já que $T(0) = 0$
 - $\text{Im } T \neq \emptyset$, pois vetor nulo de $V \in \text{Im } T$, já que o vetor nulo de V é a imagem do vetor nulo de U

Conceitos e Teoremas

- **Exemplo 1:** $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \rightarrow x + y$
- Neste caso ($T(x,y)=0$), $\ker T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x + y = 0\}$
- Isto é, $\ker T$ é a reta $y = -x$
- Podemos dizer ainda que $\ker T = \{(x, -x); x \in \mathbb{R}\} = \{x \cdot (1, -1); x \in \mathbb{R}\} = [(1, -1)]$ (conj. gerado pelo vetor $(1, -1)$)
- $\text{Im } T = \mathbb{R}$, pois dado $w \in \mathbb{R}$, $w = T(w, 0)$



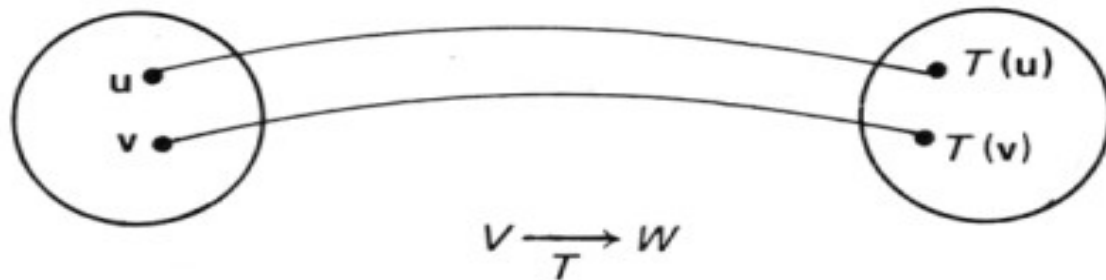
Qualquer valor dos reais satisfaz o par $(x, -x)$.

Conceitos e Teoremas

- **Exemplo 2:** Seja $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, dada por
 - $T(x, y, z) = (x, 2y, 0)$
- Então a imagem de T :
 - $\text{Im}(T) = \{(x, 2y, 0): x, y \in \mathbb{R}\}$
 $= \{x(1, 0, 0) + y(0, 2, 0), x, y \in \mathbb{R}\}$
 $= \langle (1, 0, 0), (0, 2, 0) \rangle$
 - $\dim \text{Im}(T) = 2$
- O núcleo de T é dado por:
 - $\ker T = \{(x, y, z): T(x, y, z) = (0, 0, 0)\} \Rightarrow (x, 2y, 0) = (0, 0, 0)$
 $\{(0, 0, z): z \in \mathbb{R}\} = \{z(0, 0, 1): z \in \mathbb{R}\} \Rightarrow [(0, 0, 1)]$
 - $\dim \ker T = 1$

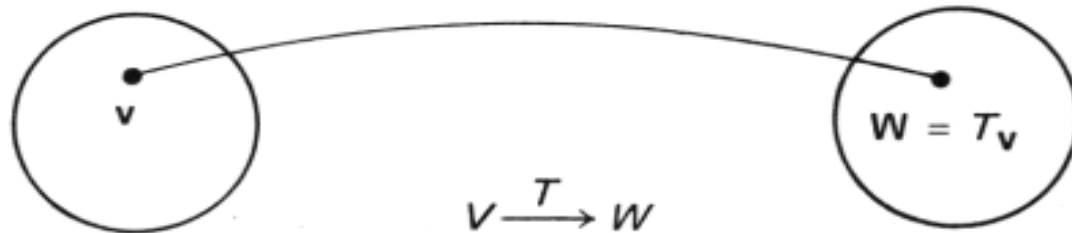
Conceitos e Teoremas

- **Definição:** Dada uma transf. $T: V \rightarrow W$, dizemos que T é **injetora** se, dados $u \in V$ e $v \in V$ com $T(u) = T(v)$, tivermos $u = v$ ou, de forma equivalente, T é injetora se dados $u, v \in V$ com $u \neq v$, então $T(u) \neq T(v)$
- Em outras palavras, T é injetora se as imagens de vetores distintos são distintas



Conceitos e Teoremas

- **Definição:** Dada uma transf. $T: V \rightarrow W$, dizemos que T é **sobrejetora** se a imagem de T coincidir com W , ou seja, $T(V) = W$
- Em outras palavras, T é sobrejetora se dado $\mathbf{w} \in W$, existir $\mathbf{v} \in V$ tal que $T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$
 - Para todo \mathbf{w} deve existir um \mathbf{v} , tal que $T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$



Conceitos e Teoremas

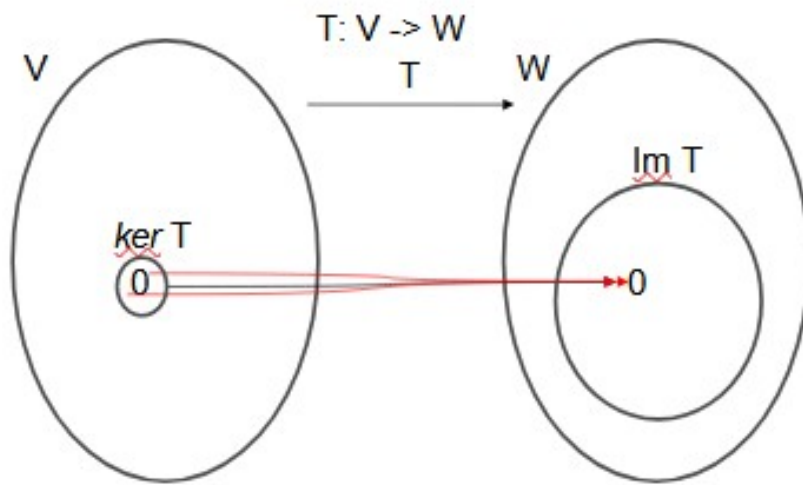
- **Exemplo:** $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, x \rightarrow (x, 0)$
- Dados $x, y \in \mathbb{R}$, suponhamos que $T(x) = T(y)$
- Então $(x, 0) = (y, 0) \Rightarrow x = y$
- T é injetora? T é sobrejetora?
- T é injetora.
- Mas T não é sobrejetora uma vez que $\text{Im}(T) \neq \mathbb{R}^2$

Conceitos e Teoremas

- **Teorema:** Seja $T: V \rightarrow W$ uma transformação linear. Então $\ker T = \{0\}$, se e somente se, T é injetora
- **Teorema:** Seja $T: V \rightarrow W$ uma transformação linear, então:
 $\dim \ker T + \dim \operatorname{Im} T = \dim V$
- **Corolário 1:** Se $\dim V = \dim W$, então T linear é injetora, se e somente se, T é sobrejetora
- **Corolário 2:** Seja $T: V \rightarrow W$ uma transformação linear injetora. Se $\dim V = \dim W$, então T leva base em base
 - Base de V em base de W

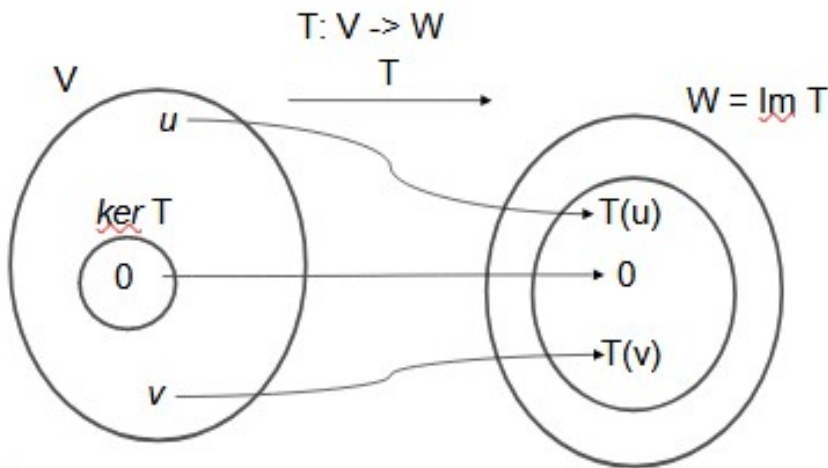
Conceitos e Teoremas

- **Teorema:** Seja $T: V \rightarrow W$ uma transformação linear. Então $\ker T = \{\mathbf{0}\}$, se e somente se, T é injetora



Conceitos e Teoremas

- **Corolário 1:** Se $\dim V = \dim W$, então T linear é injetora, se e somente se, T é sobrejetora
- **Corolário 2:** Seja $T: V \rightarrow W$ uma transformação linear injetora. Se $\dim V = \dim W$, então T leva base em base
 - Base de V em base de W



Conceitos e Teoremas

- Quando uma transformação linear $T: V \rightarrow W$ for injetora e sobrejetora ao mesmo tempo, dá-se o nome de **isomorfismo**
 - Tais espaços vetoriais são ditos Isomorfos

Conceitos e Teoremas

- **Exemplo 1:** Seja $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por:
 - $T(x,y,z) = (x - 2y, z, x + y)$
- Vamos mostrar que T é um isomorfismo e calcular sua inversa T^{-1} :
- Solução:
 - Se pudermos mostrar que T é injetora, teremos que T é um isomorfismo pelo corolário 1 anterior
 - Isso equivale a mostrar que $\ker T = \{(0, 0, 0)\}$
 - Mas $\ker T = \{(x, y, z); T(x, y, z) = (0, 0, 0)\}$ e $T(x,y,z) = (0,0,0)$, se e somente se: $(x - 2y, z, x + y) = (0,0,0)$:

Conceitos e Teoremas

- **Exemplo 1:**

- $(x - 2y, z, x + y) = (0, 0, 0)$
- Isso implica:
 - $x - 2y = 0 \quad x = 2y$
 - $z = 0 \quad z = 0 \Rightarrow x = y = z = 0 \text{ (ker} T = \{0\})$
 - $x + y = 0 \quad x = -y$
- Portanto, T é isomorfismo
- Tomando a base canônica de \mathbb{R}^3 , sua imagem pela transformação é:
 - $\{T(1, 0, 0), T(0, 1, 0), T(0, 0, 1)\} = \{(1, 0, 1), (-2, 0, 1), (0, 1, 0)\}$
 - que ainda é uma base de \mathbb{R}^3
- Calculemos a transformação inversa de T

Cont.

Conceitos e Teoremas

- **Exemplo 1:**

Inversa

- Como:

- $T(1,0,0) = (1,0,1) \Rightarrow T^{-1}(1,0,1) = (1,0,0)$
- $T(0,1,0) = (-2,0,1) \Rightarrow T^{-1}(-2,0,1) = (0,1,0)$
- $T(0,0,1) = (0,1,0) \Rightarrow T^{-1}(0,1,0) = (0,0,1)$

} $T^{-1}(x,y,z) = ?$

- Vamos escrever (x,y,z) em relação à base $\{(1,0,1), (-2, 0,1), (0,1,0)\}$

- $(x, y, z) = a(1, 0, 1) + b(-2, 0, 1) + c(0, 1, 0)$

- $\Rightarrow x = a - 2b, \quad y = c, \quad z = a + b$

- $\Rightarrow a = (x + 2z)/3, \quad b = (z - x)/3, \quad c = y$

- $\Rightarrow (x, y, z) = (x + 2z)/3 (1, 0, 1) + (z - x)/3 (-2, 0, 1) + y(0, 1, 0)$

Cont.

Conceitos e Teoremas

- **Exemplo 1:**

- Então:

- $T^{-1}(x, y, z) = (x + 2z)/3 T^{-1}(1, 0, 1) + (z - x)/3 T^{-1}(-2, 0, 1) + y T^{-1}(0, 1, 0)$

- $T^{-1}(x, y, z) = (x + 2z)/3 (1, 0, 0) + (z - x)/3 (0, 1, 0) + y(0, 0, 1)$

- $T^{-1}(x, y, z) = ((x + 2z)/3, (z - x)/3, y)$

Transformações Lineares e Matrizes

- Exemplo 2:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

- $\beta = \{(1,0), (0,1)\}$ e $\beta' = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$
- $T_A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$
- Encontremos essa transformação linear.
- Solução: Seja $x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow Ax = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
- Então $T_A(x, y, z) = (x - 3y + 5z)(1,0) + (2x + 4y - z)(0,1)$
- $T_A(x, y, z) = (x - 3y + 5z, 2x + 4y - z)$

Transformações Lineares e Matrizes

- **Exemplo 3:**

- Seja $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(x,y,z) = (2x+y-z, 3x-2y+4z)$

- Sejam $\beta = \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$ e $\beta' = \{(1,3), (1,4)\}$

- Procuremos $[T]_{\beta'}^{\beta}$

- Calculando T nos elementos da base β temos:

- $T(1, 1, 1) = (2, 5) = a_{11} \cdot (1, 3) + a_{21} \cdot (1, 4) = 3 \cdot (1, 3) - 1 \cdot (1, 4)$

- $T(1, 1, 0) = (3, 1) = a_{12} \cdot (1, 3) + a_{22} \cdot (1, 4) = 11 \cdot (1, 3) - 8 \cdot (1, 4)$

- $T(1, 0, 0) = (2, 3) = a_{13} \cdot (1, 3) + a_{23} \cdot (1, 4) = 5 \cdot (1, 3) - 3 \cdot (1, 4)$

- Então:

$$[T]_{\beta'}^{\beta} = \begin{pmatrix} 3 & 11 & 5 \\ -1 & -8 & -3 \end{pmatrix}$$

Transformações Lineares e Matrizes

- **Exemplo 4:**

- Seja T a transformação anterior $T(x,y,z) = (2x+y-z, 3x-2y+4z)$

- Sejam $\beta = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ e $\beta' = \{(1,0), (0,1)\}$

- Calculemos $[T]_{\beta'}^{\beta}$

- Calculando T nos elementos da base β temos:

- $T(1, 0, 0) = (2, 3) = 2 \cdot (1, 0) + 3 \cdot (0, 1)$

- $T(0, 1, 0) = (1, -2) = 1 \cdot (1, 0) - 2 \cdot (0, 1)$

- $T(0, 0, 1) = (-1, 4) = -1 \cdot (1, 0) + 4 \cdot (0, 1)$

- Então:

$$[T]_{\beta'}^{\beta} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Transformações Lineares e Matrizes

- **Exemplo 5:**
- Dadas as bases
- $\beta = \{(1, 1), (0, 1)\}$ de \mathbb{R}^2
- $\beta' = \{(0, 3, 0), (-1, 0, 0), (0, 1, 1)\}$ de \mathbb{R}^3
- Encontremos a transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ cuja matriz é

$$[T]_{\beta'}^{\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

- Interpretando a matriz temos:
- Ex: $T(1,1) = a_{11} \cdot (0, 3, 0) + a_{21} \cdot (-1, 0, 0) + a_{31} \cdot (0, 1, 1)$
- $T(0,1) = a_{12} \cdot (0, 3, 0) + a_{22} \cdot (-1, 0, 0) + a_{32} \cdot (0, 1, 1)$
- $T(1, 1) = 0 \cdot (0, 3, 0) - 1 \cdot (-1, 0, 0) - 1 \cdot (0, 1, 1) = (1, -1, -1)$
- $T(0, 1) = 2 \cdot (0, 3, 0) + 0 \cdot (-1, 0, 0) + 3 \cdot (0, 1, 1) = (0, 9, 3)$

Cont.

Transformações Lineares e Matrizes

- **Exemplo 5:**

- Devemos encontrar $T(x, y)$.
- Para isso escrevemos (x, y) em relação à base β :
 - $(x, y) = a.(1, 1) + b.(0, 1)$
 - $(x, y) = x.(1, 1) + (y - x).(0, 1)$
- Aplicando T e usando a linearidade:
 - $T(x, y) = T\{x.(1, 1) + (y - x).(0, 1)\}$
 - $T(x, y) = x.T(1, 1) + (y - x).T(0, 1)$
 - $T(x, y) = x.(1, -1, -1) + (y - x).(0, 9, 3)$
 - $T(x, y) = (x, 9y - 10x, 3y - 4x)$

Exercícios

1- Verifique se a transformação a seguir é linear:

$$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, T(x,y) = (x-y, 2x + y, 0)$$

Exercícios

2- Sabendo que $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma transformação linear e que

$$T(1, -1) = (3, 2, -2) \text{ e } T(-1, 2) = (1, -1, 3)$$

- Determine $T(x, y)$

Exercícios

3- Determine a imagem do vetor $(-2, 4)$ para a seguinte transformação linear.

$$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ e } T(x, y) = (2x - y, 0)$$

Encontre o núcleo de T .