Introdução à Álgebra Linear

Produto Interno

Camila Martins Saporetti
(camila.saporetti@iprj.uerj.br)

Produto Interno

- **Definição:** Seja V um espaço vetorial. Um produto interno sobre V é uma função que a cada par de vetores $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ associa-se um número, $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$, satisfazendo:

  i) $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0$, para todo $\mathbf{v}$

  e $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$, se, e somente se $\mathbf{v} = \mathbf{0}$

  ii) $\langle \alpha \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = \alpha \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$, α real

  iii) $\langle \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3 \rangle + \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle$

  iv) $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 \rangle$

Produto Interno

- **Ex:** $\mathbf{v_1} = (x_1, x_2, x_3)$ e $\mathbf{v_2} = (y_1, y_2, y_3)$
  - $\langle \mathbf{v_1}, \mathbf{v_2} \rangle = x_1.y_1 + x_2.y_2 + x_3.y_3$
    - produto usual de vetores no R^3
    - Como seria para o R^n?

Exemplo

- Sejam $u=(u_1,u_2)$ e $v=(v_1,v_2)$. Mostre que temos um produto interno em R^2:
- $\langle u,v \rangle=3u_1v_1+5u_2v_2$
- i) $<u,u> = 3u_1u_1+5u_2u_2=3u_1^2 + 5u_2^2 \geq 0$

  $3u_1^2 + 5u_2^2 = 0$ sse $u_1=u_2 = 0$
- ii)$<\alpha u,v> = 3\alpha u_1v_1+5\alpha u_2v_2 = \alpha(3u_1v_1+5u_2v_2) = \alpha\langle u,v \rangle$
- iii)$<u+v,w> = 3(u_1+v_1)w_1+5(u_2+v_2)w_2 = 3u_1w_1+3v_1w_1+5u_2w_2+5v_2w_2 = 3u_1w_1+5u_2w_2+3v_1w_1+5v_2w_2 = <u,w> + <v,w>$
- iv)$<u,v> = 3u_1v_1+5u_2v_2 = 3v_1u_1+5v_2u_2=<v,u>$

Produto Interno

- **Definição:** Seja V um espaço vetorial com produto interno $< , >$. Diz-se que dois vetores **v** e **w** de V são ortogonais (em relação a esse produto interno) se $<\mathbf{v}, \mathbf{w}> = 0$
  - No caso, escrevemos $\mathbf{v} \perp \mathbf{w}$

Produto Interno

- **Propriedades:**

  i) $\mathbf{0} \perp \mathbf{v}$, para todo $\mathbf{v} \in V$

  ii) $\mathbf{v} \perp \mathbf{w}$ implica que $\mathbf{w} \perp \mathbf{v}$

  iii) Se $\mathbf{v} \perp \mathbf{w}$, para todo $\mathbf{w} \in V$, então $\mathbf{v} = \mathbf{0}$

  iv) Se $\mathbf{v_1} \perp \mathbf{w}$ e $\mathbf{v_2} \perp \mathbf{w}$, então $\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2} \perp \mathbf{w}$

  v) Se $\mathbf{v} \perp \mathbf{w}$ e λ é um escalar, então $\lambda\mathbf{v} \perp \mathbf{w}$

Produto Interno

- **Teorema:** Seja {$\mathbf{v}_1$, ..., $\mathbf{v}_n$} um conjunto de vetores não nulos dois a dois ortogonais, isto é:
  - $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = 0$, para todo $i \neq j$
- então {$\mathbf{v}_1$, ..., $\mathbf{v}_n$} é LI

- **Definição:** Diz-se que uma base {$\mathbf{v}_1$, ..., $\mathbf{v}_n$} de *V* é base ortogonal se $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = 0$, para todo $i \neq j$. Isto é, os vetores da base são dois a dois ortogonais

Norma

- **Definição:** Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle \ , \ \rangle$. Definimos a **norma** (ou comprimento) de um vetor **v** em relação a esse produto interno como
  - $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ no caso do R^3
- Se $\|\mathbf{v}\| = 1$, isto é, $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 1$, **v** é chamado de **vetor unitário** (diz-se que **v** está normalizado)

Norma

- **Propriedades:**

  i) $||\mathbf{v}|| \geq 0$ e $||\mathbf{v}|| = 0$, sse, $\mathbf{v} = \mathbf{0}$

  ii) $||\alpha\mathbf{v}|| = |\alpha|.||\mathbf{v}||$, α real

  iii) $|\langle\mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle| \leq ||\mathbf{v}||.||\mathbf{w}||$ (Desigualdade de Schwarz)

  iv) $||\mathbf{v} + \mathbf{w}|| \leq ||\mathbf{v}|| + ||\mathbf{w}||$ (Desigualdade Triangular)

Ângulo entre Dois Vetores

- Existe um ângulo θ entre 0 e π radianos tal que:

$$\cos \theta = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle / (||\mathbf{v}||.||\mathbf{w}||)$$

- **Ex:** Encontrar o ângulo entre os vetores u = (4, 2) e v = (-3, 7)
- $\cos \theta = ((4*(-3))+(2*7))/(\sqrt{(4^2+2^2)}\sqrt{((-3)^2+7^2)}) = 0{,}0632$
- $\Theta = \arccos 0{,}0632 = 0{,}886$ rad

Base Ortonormal

- **Definição:** Seja V um espaço vetorial com produto interno. Diz-se que uma base $\beta = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ de V é **ortonormal** se for **ortogonal** e cada vetor for unitário, isto é:
- $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle =$
  - 0, se $i \neq j$
  - 1, se $i = j$

Base Ortonormal

- Observe que, se tivermos uma base ortonormal $\beta = \{\mathbf{v_1}, \ldots, \mathbf{v_n}\}$, os coeficientes x_i de um vetor $\mathbf{w}=x_1v_1+\ldots+x_nv_n$ são dados por:
  - $<\mathbf{w}, \mathbf{v_i}> = <x_1v_1+\ldots+x_nv_n, \mathbf{v_i}> \rightarrow <\mathbf{w}, \mathbf{v_i}> = <\mathbf{x_i v_i}, \mathbf{v_i}>$
  - $x_i = <\mathbf{w}, \mathbf{v_i}> / <\mathbf{v_i}, \mathbf{v_i}> = <\mathbf{w}, \mathbf{v_i}>$

Base Ortonormal

- **Exemplo:**
- Seja $V = R^2$ e < , > o produto interno usual e $\beta = \{(1, 0), (0, 1)\}$ uma base ortonormal, temos $x_1 = \langle \mathbf{v}, \mathbf{e_1} \rangle$ e $x_2 = \langle \mathbf{v}, \mathbf{e_2} \rangle$
- Isso para qualquer vetor v

Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt

- A partir de uma **base qualquer** de um espaço vetorial existe um processo para se obter uma **base ortonormal**
- Vamos entender o processo para uma base $\beta = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ e depois generalizaremos o processo...

Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt

- Seja $\mathbf{v_1}' = \mathbf{v_1}$
- Precisamos encontrar, a partir de $\mathbf{v_2}$ um novo vetor $\mathbf{v_2}'$ ortogonal a $\mathbf{v_1}'$, isto é:
- $\langle \mathbf{v_2}', \mathbf{v_1}' \rangle = 0$
- Para isso, tomamos $\mathbf{v_2}' = \mathbf{v_2} - c.\mathbf{v_1}'$, onde *c* é um número escolhido de modo que $\langle \mathbf{v_2}', \mathbf{v_1}' \rangle = 0$, isto é, $\langle \mathbf{v_2} - c.\mathbf{v_1}', \mathbf{v_1}' \rangle = 0$
- Então: $\langle \mathbf{v_2}', \mathbf{v_1}' \rangle = \langle \mathbf{v_2} - c.\mathbf{v_1}', \mathbf{v_1}' \rangle = \langle \mathbf{v_2}, \mathbf{v_1}' \rangle - \langle c.\mathbf{v_1}', \mathbf{v_1}' \rangle$
- Isso significa que $c = \langle \mathbf{v_2}, \mathbf{v_1}' \rangle / \langle \mathbf{v_1}', \mathbf{v_1}' \rangle$

Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt

- Ficamos então com
  - $\mathbf{v_1}' = \mathbf{v_1}$
  - $\mathbf{v_2}' = \mathbf{v_2} - (\langle \mathbf{v_2}, \mathbf{v_1}' \rangle / \langle \mathbf{v_1}', \mathbf{v_1}' \rangle) .\ \mathbf{v_1}'$
- Observe que $\mathbf{v_2}'$ foi obtido de $\mathbf{v_2}$, subtraindo deste a projeção do vetor $\mathbf{v_2}$ na direção de $\mathbf{v_1}'$
  - $(\langle \mathbf{v_2}, \mathbf{v_1}' \rangle / \langle \mathbf{v_1}', \mathbf{v_1}' \rangle) .\ \mathbf{v_1}'$
- e que $\mathbf{v_1}'$ e $\mathbf{v_2}'$ são vetores ortogonais não nulos
- Podemos então normalizá-los:
  - $\mathbf{u_1} = \mathbf{v_1}'/||\mathbf{v_1}'||$ e $\mathbf{u_2} = \mathbf{v_2}'/||\mathbf{v_2}'||$
- $\beta = \{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}\}$ é ortonormal

Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt

- **Exemplo:** Seja $\beta = \{(2,1), (1,1)\}$ uma base do R^2
- Vamos obter a partir de β uma base ortonormal em relação ao produto interno usual
- Sejam $\mathbf{v_1} = (2, 1)$ e $\mathbf{v_2} = (1, 1)$
- $\mathbf{v_1}' = \mathbf{v_1} = (2, 1)$
- $\mathbf{v_2}' = \mathbf{v_2} - (<\mathbf{v_2}, \mathbf{v_1}'>/<\mathbf{v_1}', \mathbf{v_1}'>).\ \mathbf{v_1}'$
- $\mathbf{v_2}' = (1,1) - (<(1,1), (2,1)>/<(2,1),(2,1)>).\ (2,1) = (-1/5,\ 2/5)$
- Normalizando os vetores temos:
- $\mathbf{u_1} = \mathbf{v_1}'/||\mathbf{v_1}'|| = (2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$ e $\mathbf{u_2} = \mathbf{v_2}'/||\mathbf{v_2}'|| = (-1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$
- $\beta = \{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}\}$ é uma base ortonormal

Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt

- De maneira geral, a partir de uma base $\beta = \{\mathbf{v_1}, ..., \mathbf{v_n}\}$ de um espaço vetorial *V*, construímos a base ortonormal $\{\mathbf{v_1}', ..., \mathbf{v_n}'\}$ dada por:
- $\mathbf{v_1}' = \mathbf{v_1}$
- $\mathbf{v_2}' = \mathbf{v_2} - (\langle \mathbf{v_2}, \mathbf{v_1}' \rangle / \langle \mathbf{v_1}', \mathbf{v_1}' \rangle).\mathbf{v_1}'$
- $\mathbf{v_3}' = \mathbf{v_3} - (\langle \mathbf{v_3}, \mathbf{v_2}' \rangle / \langle \mathbf{v_2}', \mathbf{v_2}' \rangle).\mathbf{v_2}' - (\langle \mathbf{v_3}, \mathbf{v_1}' \rangle / \langle \mathbf{v_1}', \mathbf{v_1}' \rangle).\mathbf{v_1}'$
- ....
- $\mathbf{v_n}' = \mathbf{v_n} - (\langle \mathbf{v_n}, \mathbf{v_{n-1}}' \rangle / \langle \mathbf{v_{n-1}}', \mathbf{v_{n-1}}' \rangle).\mathbf{v_{n-1}}' - .... - (\langle \mathbf{v_n}, \mathbf{v_1}' \rangle / \langle \mathbf{v_1}', \mathbf{v_1}' \rangle).\mathbf{v_1}'$
- Esse procedimento é conhecido como processo de ortogonalização de Gram-Schmidt

Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt

- Se quisermos obter uma base ortonormal basta normalizarmos os vetores $\mathbf{v}_i'$
- Isto é, tomando $\mathbf{u}_i = \mathbf{v}_i'/||\mathbf{v}_i'||$, obtemos a base de vetores ortonormais $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$

Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt

- **Exemplo 1:** Seja β={(1,1,1),(0,2,1),(0,0,1)} uma base de R^3
- Vamos obter a partir de β uma base ortonormal em relação ao produto interno usual
- Sejam:
  - $\mathbf{v_1}$ = (1, 1, 1)
  - $\mathbf{v_2}$ = (0, 2, 1)
  - $\mathbf{v_3}$ = (0, 0, 1)
- Temos:
  - $\mathbf{v_1}'$ = $\mathbf{v_1}$ = (1, 1, 1)

Cont.

Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt

- **Exemplo 1:**
- $\mathbf{v_2}' = \mathbf{v_2} - (\langle \mathbf{v_2}, \mathbf{v_1}' \rangle / \langle \mathbf{v_1}', \mathbf{v_1}' \rangle).\mathbf{v_1}'$
- $\mathbf{v_2}' = (0,2,1) - (\langle (0,2,1),(1,1,1) \rangle / \langle (1,1,1),(1,1,1) \rangle).(1,1,1)$
- $\mathbf{v_2}' = (-1, 1, 0)$
- $\mathbf{v_3}' = \mathbf{v_3} - (\langle \mathbf{v_3}, \mathbf{v_2}' \rangle / \langle \mathbf{v_2}', \mathbf{v_2}' \rangle).\mathbf{v_2}' - (\langle \mathbf{v_3}, \mathbf{v_1}' \rangle / \langle \mathbf{v_1}', \mathbf{v_1}' \rangle).\mathbf{v_1}'$
- $\mathbf{v_3}' = (0,0,1) - (\langle (0,0,1),(-1,1,0) \rangle / \langle (-1,1,0),(-1,1,0) \rangle).(-1,1,0) - (\langle (0,0,1),(1,1,1) \rangle / \langle (1,1,1,),(1,1,1 \rangle).(1,1,1)$
- $\mathbf{v_3}' = (-1/3, -1/3, 2/3)$

Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt

- **Exemplo 1:**
- Normalizando:
  - $\mathbf{u_1} = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$
  - $\mathbf{u_2} = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$
  - $\mathbf{u_3} = (-1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6})$
- e $\beta = \{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}\}$ é uma base ortonormal
- Poderíamos gerar um outra base ortonormal a partir de $\mathbf{v_2}$ ou $\mathbf{v_3}$ (por exemplo, fazendo $\mathbf{v_1}'=\mathbf{v_3}$)

Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt

- **Exemplo 2:**
- Seja $\beta = \{(1,0), (0,1)\}$ a base canônica de R^2
- Vamos obter a partir de β uma base ortonormal em relação ao produto interno de R^2, definido por
  - $<(\mathbf{x_1}, \mathbf{y_1}),(\mathbf{x_2}, \mathbf{y_2})> = 2\mathbf{x_1}\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1}\mathbf{y_2} - \mathbf{x_2}\mathbf{y_1} + \mathbf{y_1}\mathbf{y_2}$
- Sejam $\mathbf{v_1} = (1, 0)$ e $\mathbf{v_2} = (0, 1)$
  - $\mathbf{v_1}' = (1,0) \Rightarrow \mathbf{u_1} = (1/\surd 2, 0)$ (normalizando)
  - $\mathbf{v_2}' = \mathbf{v_2} - (<\mathbf{v_2}, \mathbf{v_1}'>/<\mathbf{v_1}', \mathbf{v_1}'>).\mathbf{v_1}' = (½, 1)$

    $\Rightarrow \mathbf{u_2} = (\surd 2/2, \surd 2)$ (normalizando)
- $\beta = \{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}\}$ é uma base ortonormal

Produto Interno

- **Exemplo 3:** Seja $\beta = \{(1,1,0), (1,0,1), (0,2,0)\}$. Ache uma base ortonormal β' de R^3, em relação ao produto interno usual.
- **Solução:**
- $v_1' = (1, 1, 0)$
- $v_2' = v_2 - (\langle v_2, v_1'\rangle/\langle v_1',v_1'\rangle) .v_1' = (1/2, -1/2, 1)$
- $v_3' = v_3 – (\langle v_3,v_2'\rangle/\langle v_2',v_2'\rangle).v_2' – (\langle v_3,v_1'\rangle\langle v_1',v_1'\rangle).v_1'$
- $v_3' = (-4/5, 4/5, 2/5)$

Produto Interno

- Normalizando
- $u_1 = (1, 1, 0)/\sqrt{2} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$
- $u_2 = (1/2, -1/2, 1)/\sqrt{(1/4+1/4+1)} = (1/2, -1/2, 1)/\sqrt{(6/4)} = 2\,(1/2, -1/2, 1)/\sqrt{6} = (1, -1, 2)/\sqrt{6}$
- $u_3 = (-4/5, 4/5, 2/5)/\sqrt{(16/25+16/25+4/25)} = (-4/5, 4/5, 2/5)/\sqrt{(36/25)} = 5(-4/5, 4/5, 2/5)/6 = (-4/6, 4/6, 2/6) = (-2/3, 2/3, 1/3)$
- $\beta' = \{u_1, u_2, u_3\} = \{(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0), (1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}), (-2/3, 2/3, 1/3)\}$

Complemento Ortogonal

- Consideremos um espaço vetorial *V* munido de um produto interno < ,> e um subconjunto não-vazio S de *V* (S não é necessariamente um subespaço)
- Consideremos então o subconjunto de *V*:
- $S^{\perp} = \{\mathbf{v} \in V : \mathbf{v}$ é ortogonal a todos os vetores de $S\}$
- $S^{\perp}$ é chamado de complemento ortogonal de S

Produto Interno

- **Exemplo:** Seja $W \subset R^3$ o subespaço gerado por (1, 0, 1) e (1, 1, 0).
  - Considere $W^\perp$ em relação ao produto interno usual. Encontre uma base para $W^\perp$.
- **Solução:**
  - $W^\perp$ = conjunto de vetores ortogonais a todos os vetores de W:
  - $\{(x,y,z) \mid \langle (x,y,z),(1,0,1)\rangle = 0 \text{ e } \langle (x,y,z),(1,1,0)\rangle = 0\}$
    - $\langle (x,y,z),(1,0,1)\rangle = 0 \Rightarrow x + z = 0 \Rightarrow z = -x$
    - $\langle (x,y,z),(1,1,0)\rangle = 0 \Rightarrow x + y = 0 \Rightarrow y = -x$
  - $W^\perp = (x, -x, -x) \Rightarrow [(1, -1, -1)]$

Exercícios

- 1. Sejam $u=(u_1,u_2)$ e $v=(v_1,v_2)$. Mostre que temos um produto interno em R^2
- $\langle u,v \rangle = 4u_1v_1 + u_2v_1 + u_1v_2 + 4u_2v_2$

Exercícios

- 2. Ortonormalizar a base $u_1=(1,1,1)$, $u_2=(1,-1,1)$, $u_3=(-1,0,1)$ do R^3 pelo processo de Gram-Schmidt.

Exercícios

- 3. Sendo $u=(1,2)$ e $v=(-1,1)$ em R^2 determine um vetor w desse espaço tal que $\langle u,w\rangle=-1$ e $\langle v,w\rangle=-1$.