Seminário TEMC – Processamento Avançado de Dados para Calorimetria de Altas Energias

Filtro Ótimo

Diogo A. Cardinot

18 de abril de 2024

- Na calorimetria de altas energias, utilizam-se técnicas de estimativa de parâmetros;
- Essas técnicas são empregadas para estimar propriedades cruciais de partículas absorvidas e amostradas pela eletrônica de leitura de um calorímetro, como **amplitude**, fase e pedestal.

- Filtro Ótimo
  - Resconstrução da amplitude de um sinal;
  - Informações de fase;
  - Pedestal de um sinal;
  - Verifica em tempo real, de forma on-line, quais dados são relevantes para análises posteriores;
  - Filtro linear.

- Filtro Linear:
  - Processamento de Sinais Biomédicos;
  - Processamento de Imagens;
  - Comunicações Digitais;
  - Calorimetria de altas energias:
    - ATLAS

- Filtro Linear:
  - Vantagens:
    - Custo computacional;
    - Maior facilidade de implementação.
  - Desvantagens:
    - Dificuldade em lidar com soluções e sistemas não lineares;
    - Resultados sub-ótimos.

- Amostras:

$$x[k] = p + Ag\,[k + \tau] + n[k]$$

$x[k] \rightarrow$ conjunto de amostras digitais;
$p \rightarrow$ pedestal;
$A \rightarrow$ amplitude real do sinal;
$g[k] \rightarrow$ pulso de referência;
$k \rightarrow$ tempo de obtenção da amostra de $g[k]$;
$\tau \rightarrow$ possível diferença de fase entre o pulso de referência e as amostras;
$n[k] \rightarrow$ contribuição do ruído em cada amostra.

- A amplitude do sinal de entrada é estimada por um processo de baixo custo computacional, dado por:

$$\widehat{A}_{OF} = \sum_{k=0}^{N-1} x[k]w[k]$$

$w[k] \rightarrow$ vetor de peso do estimador;
$N \rightarrow$ número de amostras.

- Expandindo o pulso de referência em série de Taylor :

$$g[k+\tau] = g[k] - \tau g'[k] + \frac{\tau^2}{2!}g''[k] - \frac{\tau^3}{3!}g'''[k] + \ldots$$

$$x[k] = p + Ag[k] - A\tau g'[k] + n[k] \tag{1}$$

$g[k] \rightarrow$ pulso do referência;
$g'[k] \rightarrow$ derivada do pulso do referência.

- Para assegurar a imparcialidade do estimador, é necessário que o valor esperado de $\widehat{A}_{OF}$ seja igual a A:

$$A = \widehat{A}_{OF} = \sum_{k=0}^{N-1} x[k]w[k] \tag{2}$$

- Substituindo a equação (1) em (2):

$$A = \widehat{A}_{OF} = \sum_{k=0}^{N-1} \big(pw[k] + Ag[k]w[k] - A\tau g'[k]w[k] + n[k]w[k]\big)$$

- O ruído resultante pode ser aproximado por uma distribuição Gaussiana;
- Utiliza-se apenas a covariância do ruído para descrever o processo aleatório;
- Considerando a média do ruído igual a 0 ($E\{n[k]\} = 0$):

$$A = \hat{A}_{OF} = \sum_{k=0}^{N-1} \left(pw[k] + Ag[k]w[k] - A\tau g'[k]w[k] \right)$$

$$A = \widehat{A}_{OF} = p\sum_{k=0}^{N-1} w[k] + A\sum_{k=0}^{N-1} g[k]w[k] - A\tau\sum_{k=0}^{N-1} g'[k]w[k]$$

- Para que o estimador não dependa da fase nem do pedestal:

$$\sum_{k=0}^{N-1} g[k]w[k] = 1 \tag{3}$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} g'[k]w[k] = 0 \tag{4}$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} w[k] = 0 \tag{5}$$

- Variância do estimador:

$$E\{(\widehat{A}_{OF} - A)^2\} = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} w[k]w[j]C[k,j] = w^T C w \tag{6}$$

$C \rightarrow$ matriz de covariância do ruído;
$w \rightarrow$ vetor de peso do estimador.

$$C = E\{(M[k] - E\{M[k]\})(M[j] - E\{M[j]\})\}$$

$M[k], M[j] \rightarrow$ amostras do ruído;
$E\{M[k]\}, E\{M[j]\} \rightarrow$ média aritmética do ruído.

- Para determinar os pesos w:
  - Minimizar a variância do estimador, sujeita as restrições do mesmo;
  - A solução corresponde ao ponto mínimo da função (Equações (3), (4),(5) e (6)):

$$I_w = \sum_{k,j=0}^{N-1} w[k]w[j]C[k,j] - \lambda\left(\sum_{k=0}^{N-1} w[k]g[k]\right) - \epsilon\left(\sum_{k=0}^{N-1} w[k]g'[k]\right) - \kappa\left(\sum_{k=0}^{N-1} w[k]\right)$$

$\lambda, \epsilon, \kappa \rightarrow$ multiplicadores de Lagrange.

- Ponto crítico:

$$\frac{\partial I_w}{\partial w[k]} = 2\sum_{j=0}^{N-1} w[k]E\{M[k]M[j]\} - \lambda g[k] - \epsilon g'[k] - \kappa = 0$$

- Considerando um processo estacionário: [1]

$$E\{M[k]\} = E\{M[j]\} = 0, \qquad \forall k, j$$

$$E\{M[k]^2\} = E\{M[j]^2\}, \qquad \forall k, j$$

[1] A. Papoulis and S. U. Pillai.
Probability, Random Variables, and Stochastic Processes.
McGraw Hill, Boston, fourth edition, 2002.

- Sistema de equações:

$$\sum_{k=0}^{N-1} w[k]g[k] = 1$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} w[k]g'[k] = 0$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} w[k] = 0$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} w[k]C[k,j] - \lambda g[k] - \epsilon g'[k] - \kappa = 0, \qquad \forall k$$

- Sistema de equações na forma matricial:

$$\begin{pmatrix} C[1,1] & C[1,2] & \cdots & C[1,N] & -g[1] & -g'[1] & -1 \\ C[2,1] & C[2,2] & \cdots & C[2,N] & -g[2] & -g'[2] & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C[N,1] & C[N,2] & \cdots & C[N,N] & -g[N] & -g'[N] & -1 \\ g[1] & g[2] & \cdots & g[N] & 0 & 0 & 0 \\ g'[1] & g'[2] & \cdots & g'[N] & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w[1] \\ w[2] \\ \vdots \\ w[N] \\ \lambda \\ \epsilon \\ \kappa \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

OBS: Normalmente C é a matriz identidade, onde descreve apenas o ruído eletrônico. Mas projetos otimizados podem utilizar a matriz de covariância do ruído de fundo resultante.

- Qualidade da estimação:

$$\chi = \sum_{k=0}^{N-1} \left|(x[k] - p) - \widehat{A}_{OF} g[k]\right|$$

OBS: como se quer uma estimativa, juntamente ao tempo de cálculo limitado, não se calcula o $p[k]$, utiliza-se o valor de uma amostra.

- Qualidade da estimação:
  - Análise do histograma do erro de estimação

$$Erro = A - \hat{A}_{OF}$$

  - Métricas de Avaliação
    - Média;
    - Desvio Padrão.

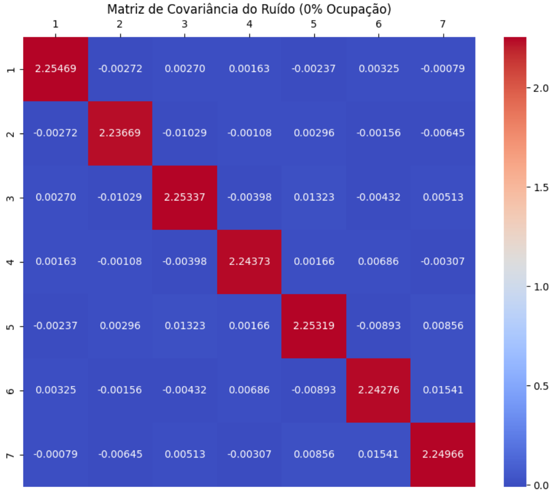

Figura 1: Matriz de Covariância do Ruído para 0% de ocupação.

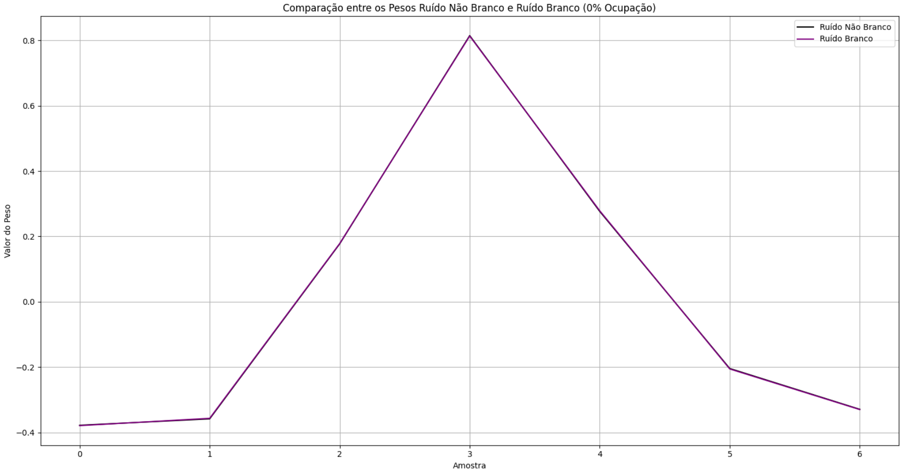

Figura 2: Pesos ($w[k]$) para 0% de ocupação.

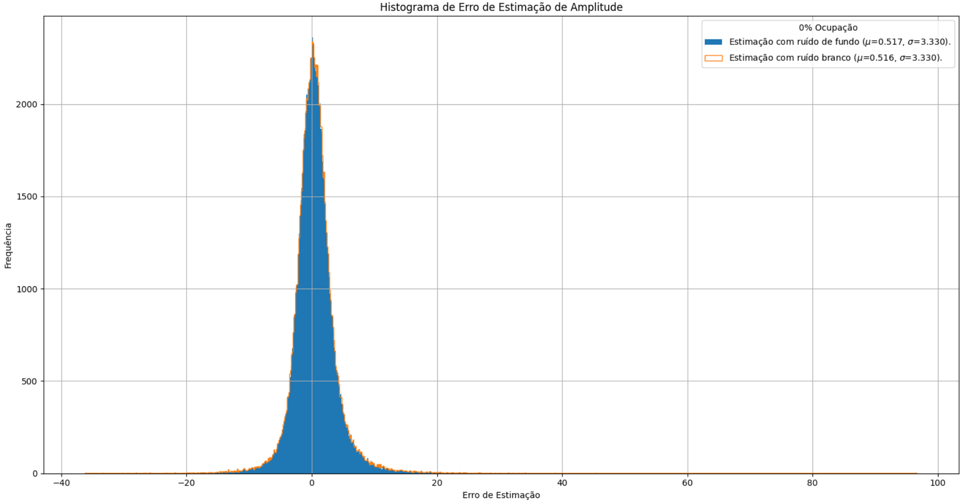

Figura 3: Histograma do erro de estimação para 0% de ocupação.

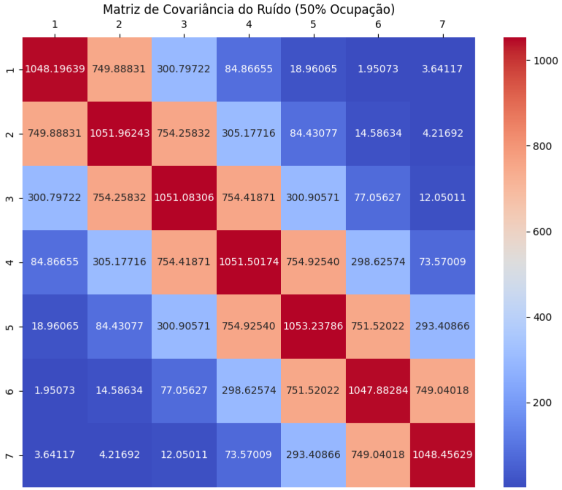

Figura 4: Matriz de Covariância do Ruído para 50% de ocupação.

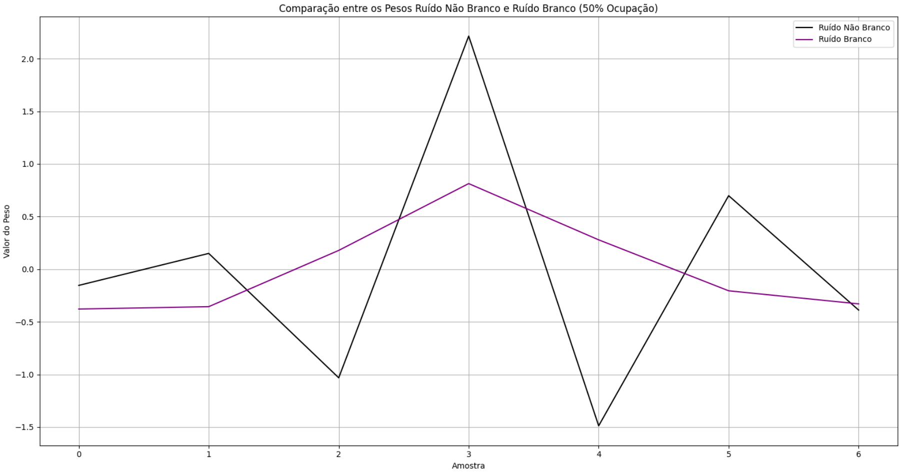

Figura 5: Pesos ($w[k]$) para 50% de ocupação.

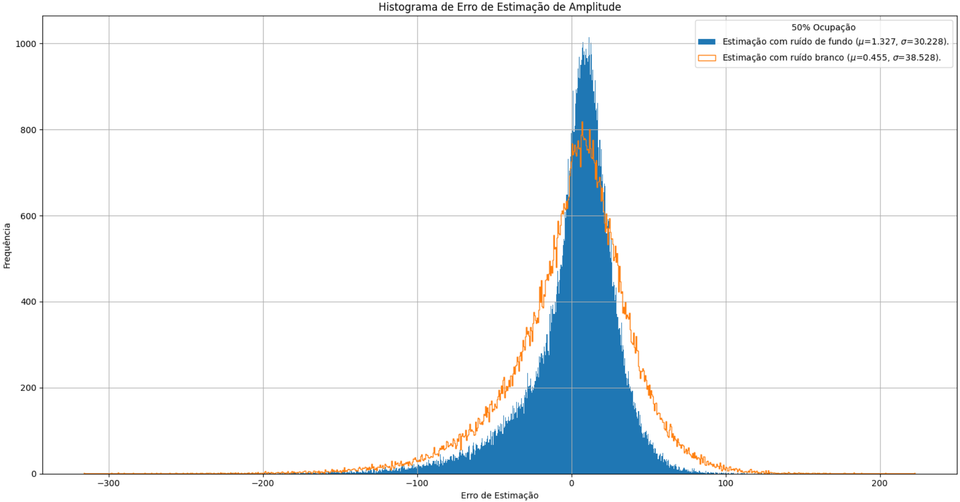

Figura 6: Histograma do erro de estimação para 50% de ocupação.

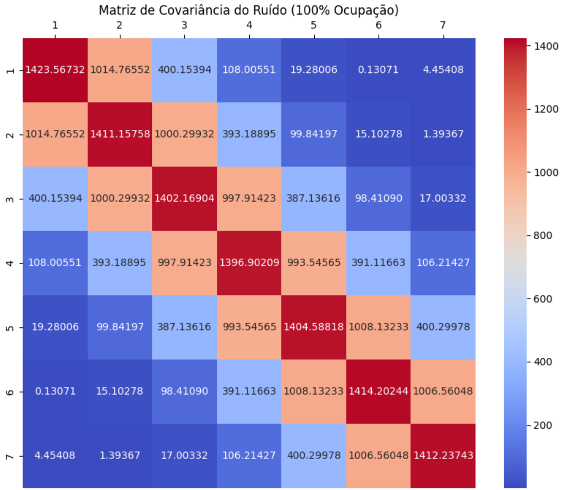

Figura 7: Matriz de Covariância do Ruído para 100% de ocupação.

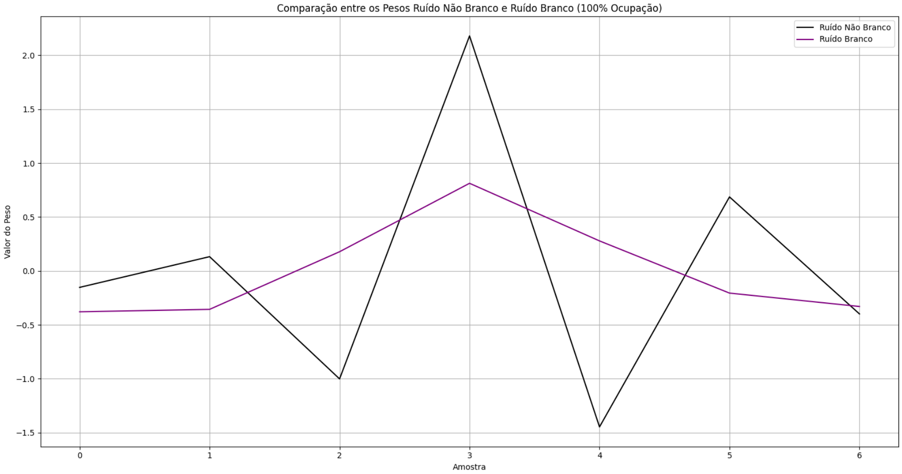

Figura 8: Pesos ($w[k]$) para 100% de ocupação.

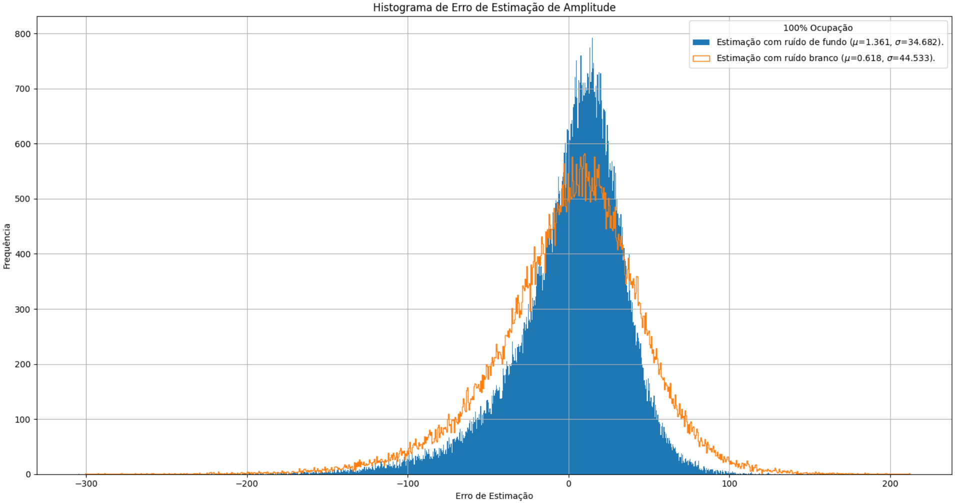

Figura 9: Histograma do erro de estimação para 100% de ocupação.

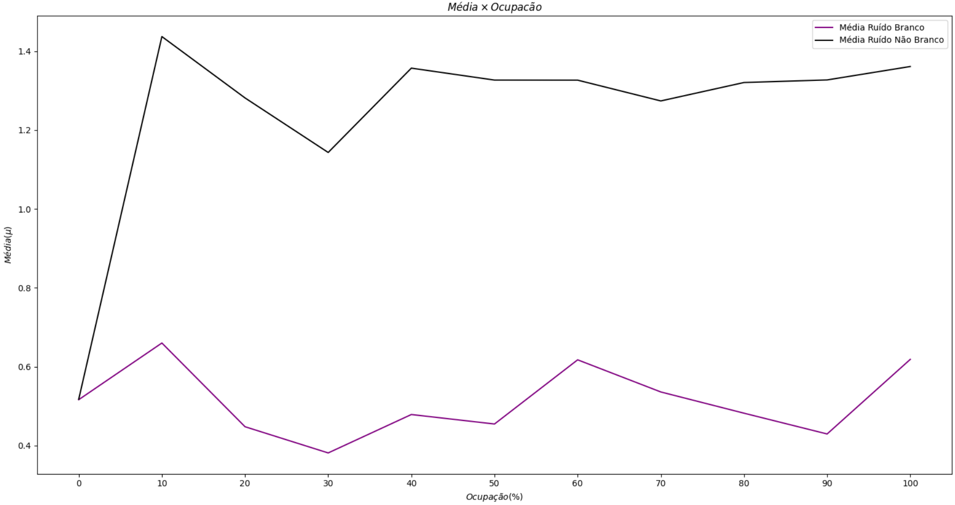

Figura 10: Média (μ) em função da ocupação.

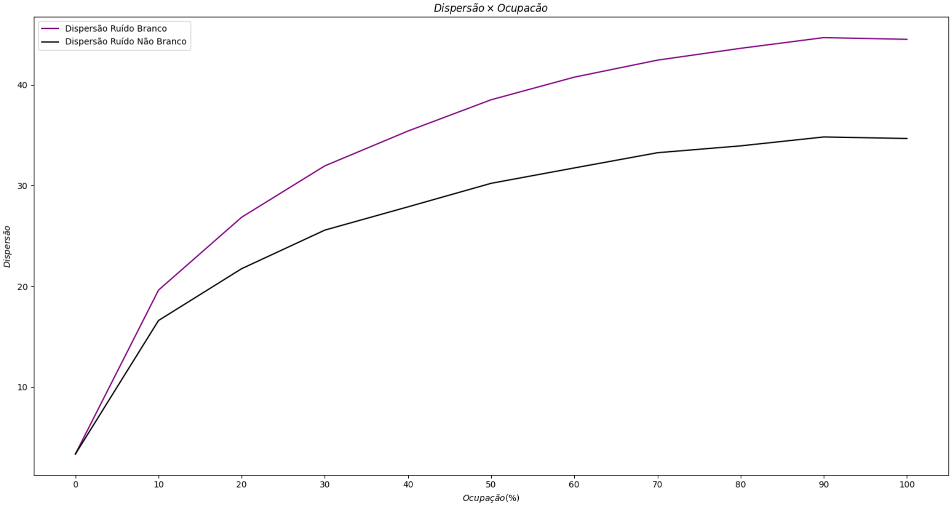

Figura 11: Dispersão em função da ocupação.

- Maiores ocupações:
  - As correlações fora da diagonal principal da matriz de covariância se intensificam;
  - Os histogramas de erro baseados em ruído branco e não branco se distanciam;
  - A dispersão aumenta;
  - Os resultados baseados em ruído não branco são melhores que os resultados baseados em ruído branco.