ESTRUTURAS DE DADOS

2025/2026

Aula 12

- Grafos
- Redes
- Travessias
- Árvore Geradora
- Caminho Mais Curto

Ricardo Santos | rjs@estg.ipp.pt

ESCOLA SUPERIOR DE TECNOLOGIA E GESTÃO

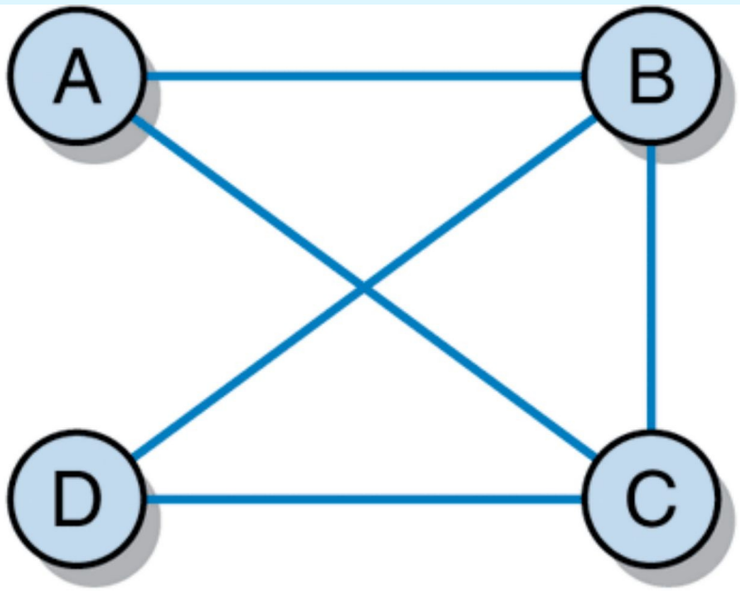
Grafos

- Tal como uma árvore, um grafo é constituído por nós e conexões entre os nós
- Na terminologia de grafos, referimo-nos aos nós como vértices e às ligações como arestas
- Os vértices são normalmente referenciados pelo rótulo (ex. **A, B, C, D**)
- As arestas são referenciadas por uma relação de vértices (por exemplo (**A, B**) que representa uma aresta entre **A** e **B**)

Grafos não Direccionados

- Um grafo não direccionado é um grafo onde os pares de vértices que representam as arestas não estão ordenados
- Ao listar uma aresta como (**A, B**) significa que existe uma aresta entre **A** e **B** que pode ser percorrida em qualquer direcção
- Para um grafo não direccionado, **(A, B)** significa exactamente a mesma coisa que **(B, A)**

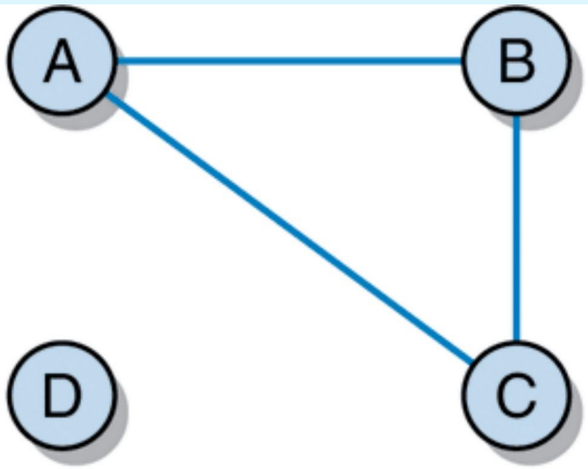
Exemplo de Grafo não Direccionado



- Dois vértices num grafo são adjacentes se existir uma aresta a ligá-los
- Vértices adjacentes são muitas vezes referidos como vizinhos
- Uma aresta de um grafo que liga um vértice a ele próprio é chamado de laço
- Um grafo não direccionado é considerado completo se tiver o número máximo de arestas a ligar os vértices **(n (n-1) / 2)**

- Um caminho é uma sequência de arestas que liga dois vértices num grafo
  - **A, B, D** é um caminho de **A** a **D**, no nosso exemplo anterior
- O comprimento de um caminho é o número de arestas no caminho (número de vértices - 1)
- Um grafo não direccionado é considerado conexo se para quaisquer dois vértices do grafo, existir um caminho entre eles
  - O grafo no exemplo anterior é conexo
  - O grafo apresentado de seguida não é conexo

Exemplo de Grafo não Direccionado não Conexo



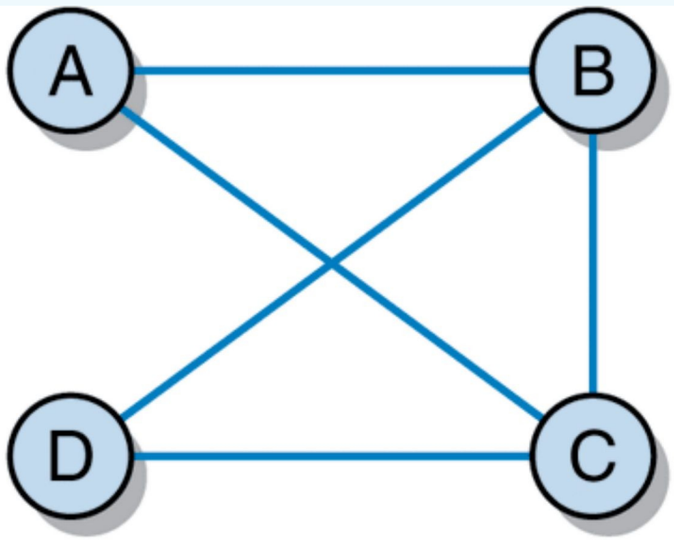
- Um circuito é um caminho em que o primeiro e último vértices são repetidos
- Um circuito simples é um circuito em que todos os vértices aparecem no máximo uma vez, à excepção do primeiro e últimos vértices

- Por exemplo, no slide anterior, **A, B, C, A** é um circuito

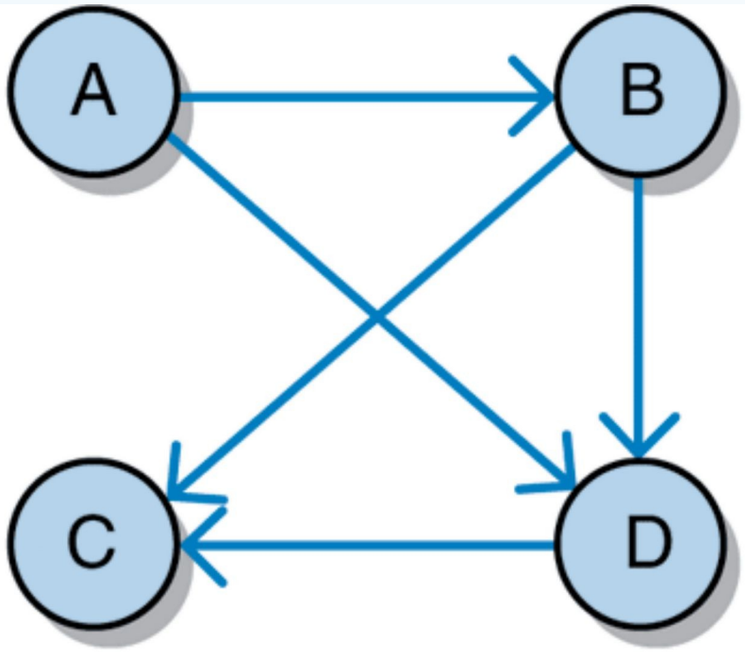
Grafos Direccionados

- Um grafo direccionado ou dirigido ou dígrafo, é um grafo onde as arestas são pares ordenados de vértices
- Isto significa que a aresta **(A, B)** e **(B, A)** são arestas direccionadas separadas

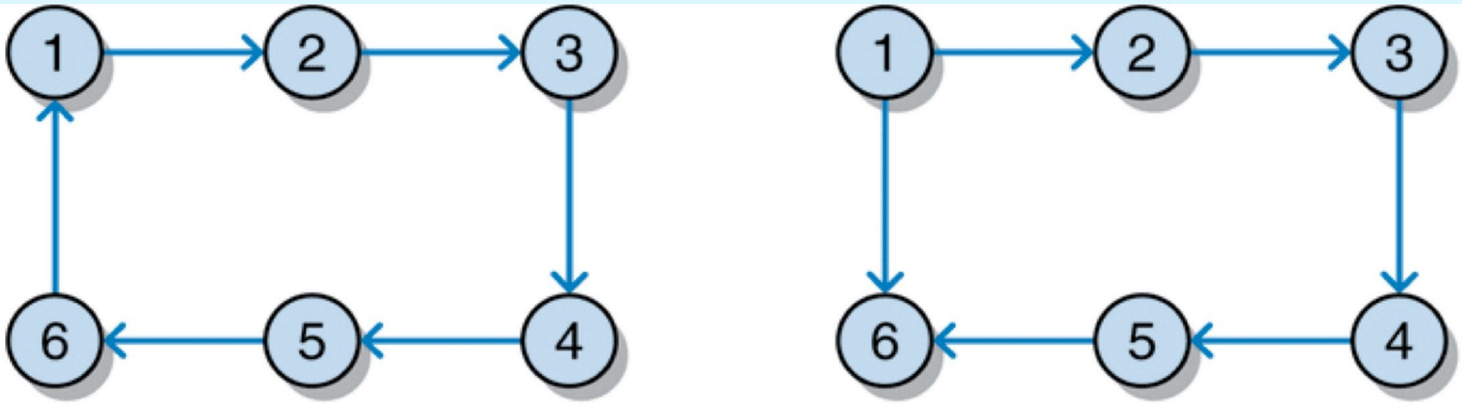
- **O grafo:**



- É interpretado da seguinte forma:
  - Vértices: **A, B, C, D**
  - Arestas: **(A, B), (A, D), (B, C), (B, D), (C, D)**
- Por vezes podemos ter algo diferente em mente, como o exemplo de grafo direccionado apresentado de seguida



Grafos Direccionados Conexos e não Conexos



conexo

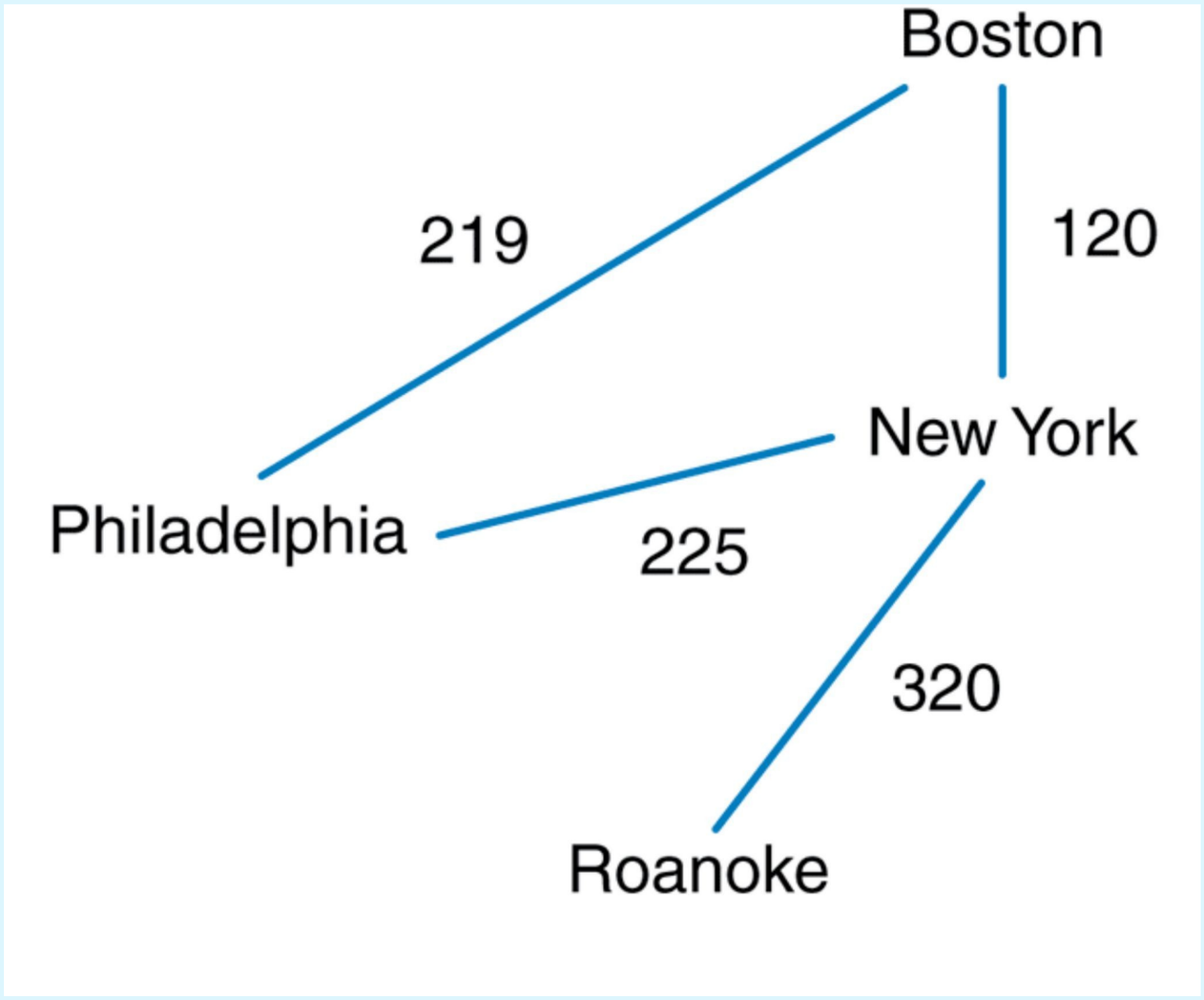
não conexo

- Se um grafo não tem ciclos, é possível organizar os vértices tal que o vértice **A**, precede o vértice **B** se existe uma aresta de **A** para **B**
- Esta ordem dos vértices é denominada de ordem topológica
- Uma árvore direccionada é um grafo direccionado que tem um elemento designado como a raiz e tem as seguintes propriedades
  - Não existem ligações de outros vértices para a raiz
  - Cada elemento não-raiz tem exactamente uma ligação à raiz
  - Há um caminho da raiz para todos os outros vértices

Redes

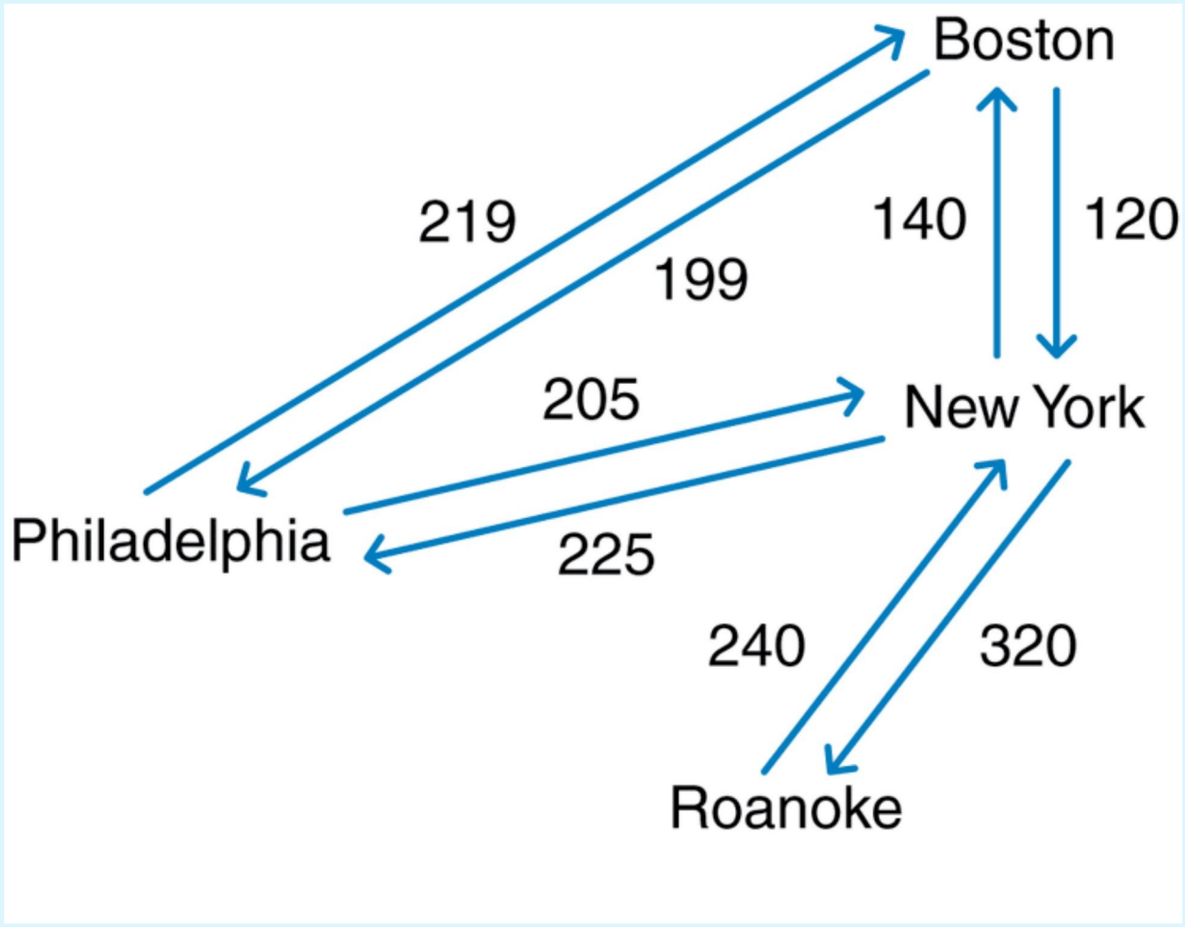
- Uma rede ou um grafo pesado é um grafo com pesos ou custos associados a cada aresta
- Podemos ver na figura seguinte uma rede não direccionada de conexões que exemplifica passagens aéreas entre cidades

Rede ou Grafo Pesado



Rede Direccionada

- As redes podem ser direccionadas



- Para redes, que representamos cada aresta com um tripleto incluindo o vértice de partida, o vértice final, e o peso

- **(Boston, Nova York, 120)**

Algoritmos comuns para Grafos

- No caso das árvores, foram definidos quatro tipos de travessias
- Geralmente, as travessias para grafos são divididas em duas categorias:
- travessia em largura (*breadth-first traversal*)
- travessia em profundidade (*depth-first traversal*)

- Podemos implementar uma travessia em largura (*breadth-first traversal*) de um grafo semelhante à nossa travessia nível-ordem (*level-order*) de uma árvore

- Para isso:

  - usar uma fila e uma lista não-ordenada

  - usar a fila para gerir a travessia

  - usar a lista não-ordenada para construir o nosso resultado

Implementação das Travessias

- De seguida é apresentado o iterador para a travessia em largura (*breadth-first iterator*)

```
/**
 * Returns an iterator that performs a breadth first search
 * traversal starting at the given index.
 *
 * @param startIndex  the index to begin the search from
 * @return  an iterator that performs a breadth first traversal
 */
public Iterator<T> iteratorBFS(int startIndex) {
   Integer x;
   LinkedQueue<Integer> traversalQueue = new LinkedQueue<Integer>();
   ArrayUnorderedList<T> resultList = new ArrayUnorderedList<T>();

   if (!indexIsValid(startIndex))
      return resultList.iterator();

   boolean[] visited = new boolean[numVertices];
   for (int i = 0; i < numVertices; i++)
      visited[i] = false;

   traversalQueue.enqueue(new Integer(startIndex));
   visited[startIndex] = true;
```

```
while (!traversalQueue.isEmpty())
      {
         x = traversalQueue.dequeue();
         resultList.addToRear(vertices[x.intValue()]);

         /** Find all vertices adjacent to x that have
             not been visited and queue them up */
         for (int i = 0; i < numVertices; i++)
         {
            if (adjMatrix[x.intValue()][i] && !visited[i])
            {
               traversalQueue.enqueue(new Integer(i));
               visited[i] = true;
            }
         }
      }
      return resultList.iterator();
   }
```

- Podemos também implementar uma travessia em profundidade para um grafo semelhante à nossa travessia nível-ordem (*level-order*) de uma árvore substituindo a fila por uma pilha
- Para isso:
  - usar uma pilha e uma lista não-ordenada
  - usar a pilha para gerir a travessia
  - usar a lista não-ordenada para construir o nosso resultado
- De seguida é apresentada o iterador para a travessia em profundidade (*depth-first iterator*)

```
/**
 * Returns an iterator that performs a depth first search
 * traversal starting at the given index.
 *
 * @param startIndex  the index to begin the search traversal from
 * @return        an iterator that performs a depth first traversal
 */
public Iterator<T> iteratorDFS(int startIndex)
{
   Integer x;
   boolean found;
   LinkedStack<Integer> traversalStack = new LinkedStack<Integer>();
   ArrayUnorderedList<T> resultList = new ArrayUnorderedList<T>();
   boolean[] visited = new boolean[numVertices];

   if (!indexIsValid(startIndex))
      return resultList.iterator();

   for (int i = 0; i < numVertices; i++)
      visited[i] = false;

   traversalStack.push(new Integer(startIndex));
   resultList.addToRear(vertices[startIndex]);
   visited[startIndex] = true;
```

```
while (!traversalStack.isEmpty())
      {
         x = traversalStack.peek();
         found = false;

         /** Find a vertex adjacent to x that has not been visited
             and push it on the stack */
         for (int i = 0; (i < numVertices) && !found; i++)
         {
            if (adjMatrix[x.intValue()][i] && !visited[i])
            {
               traversalStack.push(new Integer(i));
               resultList.addToRear(vertices[i]);
               visited[i] = true;
               found = true;
            }
         }
         if (!found && !traversalStack.isEmpty())
            traversalStack.pop();
      }
      return resultList.iterator();
   }
```

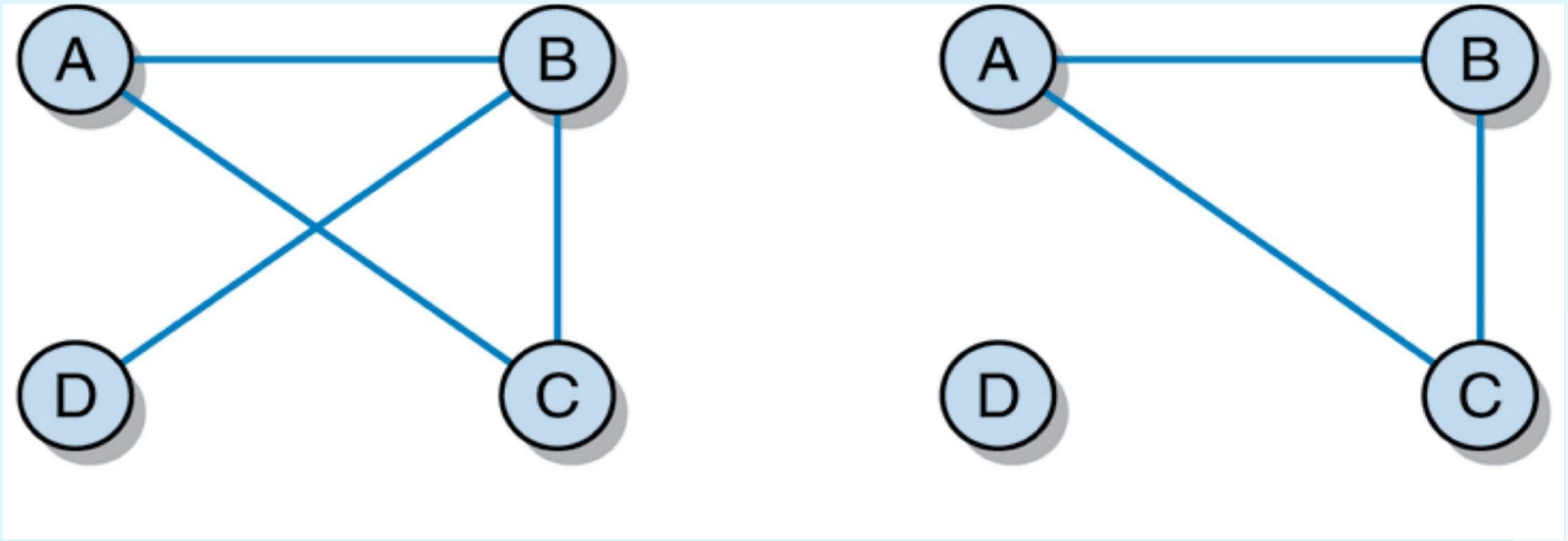
- Claro que ambos os algoritmos podiam ter sido implementados de forma recursiva...

```
DepthFirstSearch(node x){
   visit(x)
   result-list.addToRear(x)
   for each node y adjacent to x
      if y not visited
         DepthFirstSearch(y)
}
```

- Outro algoritmo comum para os grafos é o teste da conexidade

- O grafo é conexo se e somente se para cada vértice **v** num grafo que contém **n** vértices, o tamanho do resultado de uma travessia em largura a partir de **v** é **n**

Conexidade num Grafo não Direccionado



Travessia em Largura para um Grafo Conexo não Direccionado

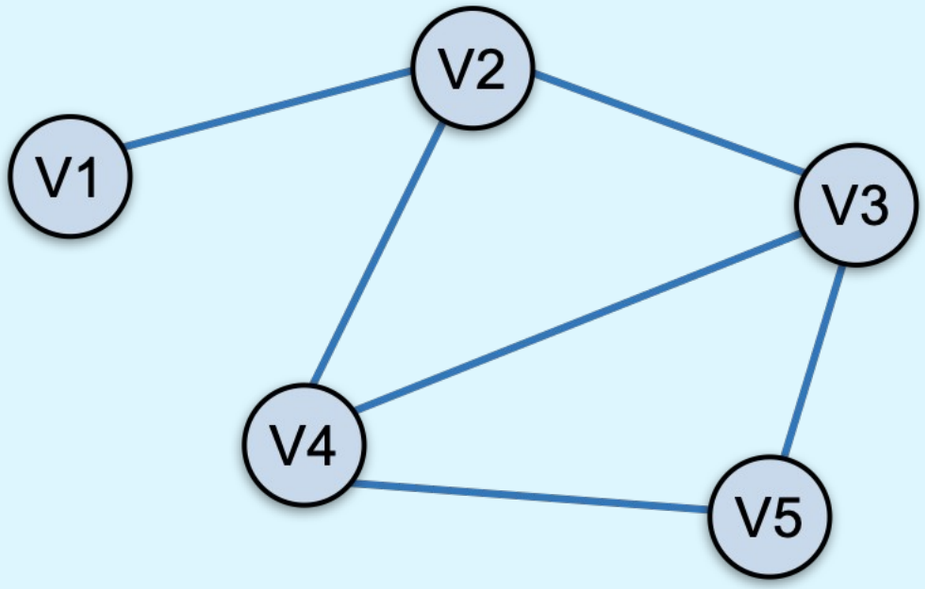
Vértice Inicial	Travessia em Largura
A	A, B, C, D
B	B, A, D, C
C	C, B, A, D
D	D, B, A, C

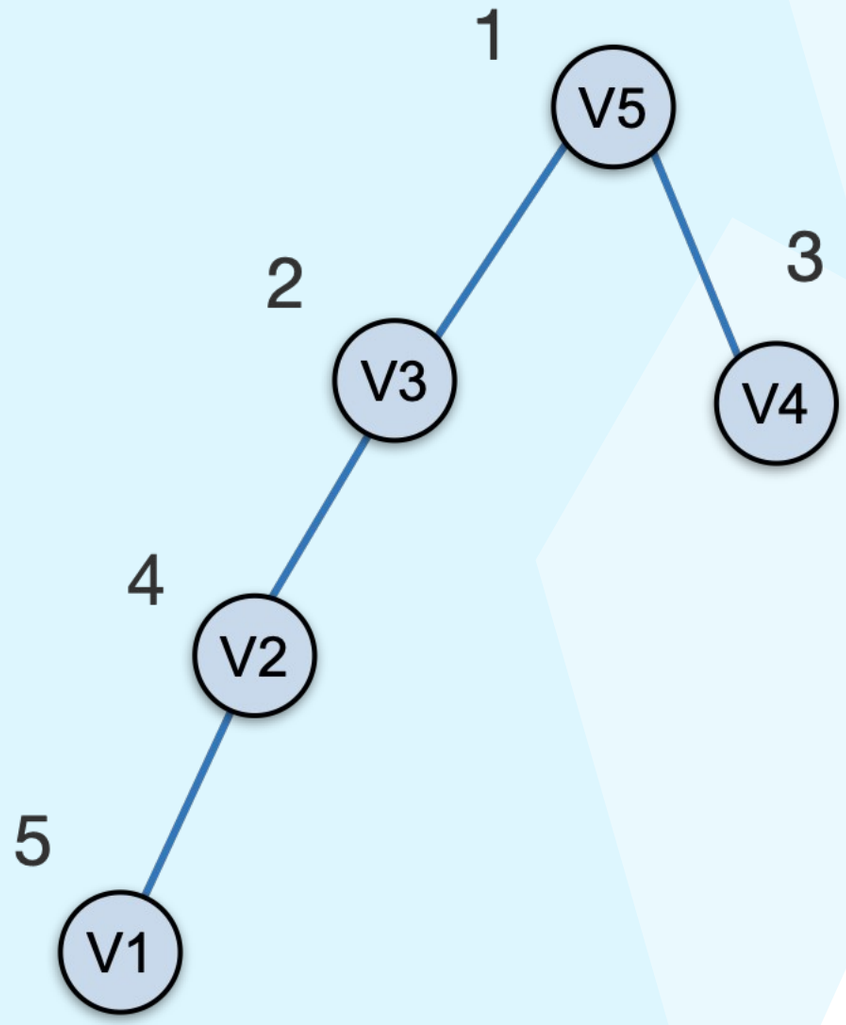
Travessia em Largura para um Grafo não Conexo não Direccionado

Vértice Inicial	Travessia em Largura
A	A, B, C
B	B, A, C
C	C, B, A
D	D

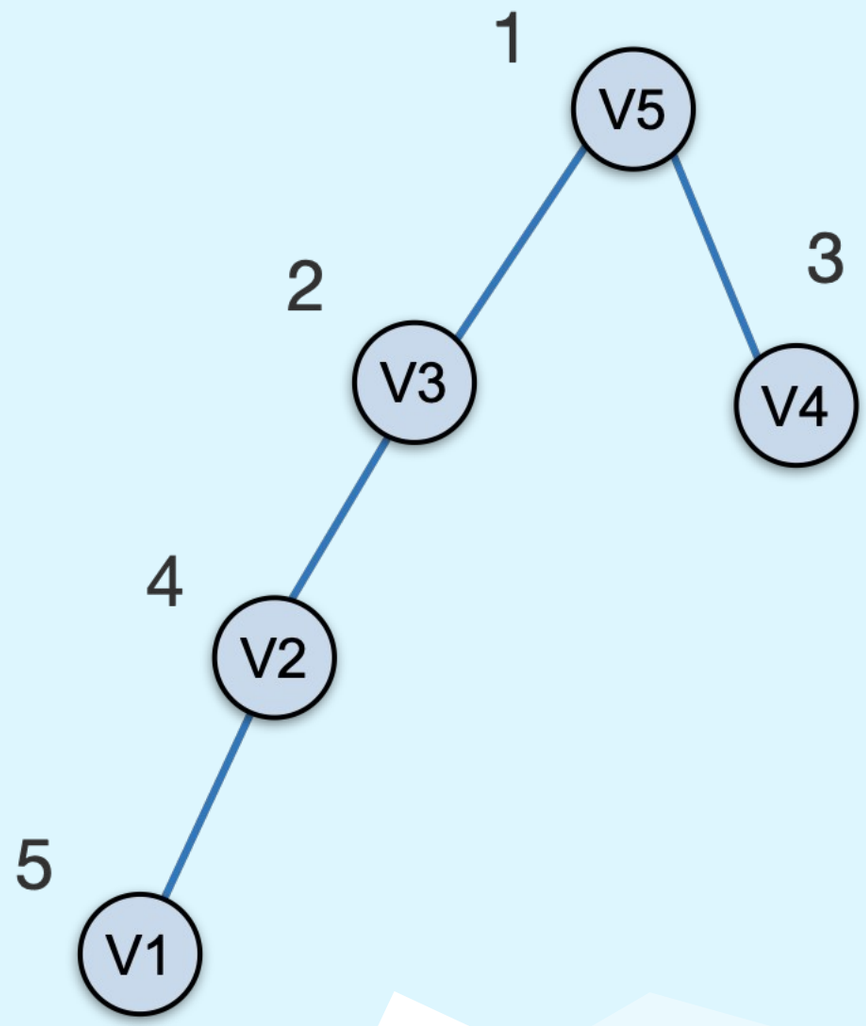
Exemplos BFS

- Começar em **V5**





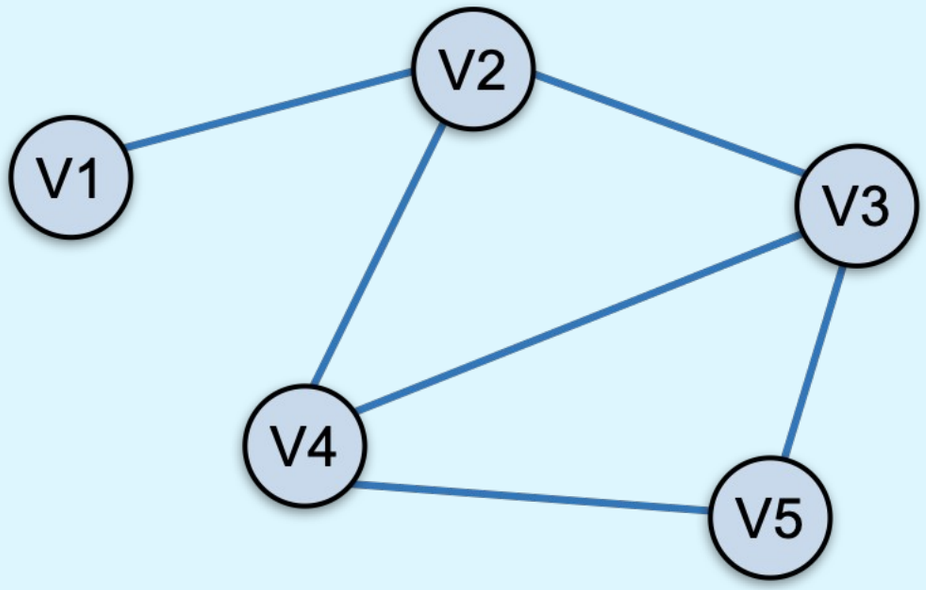
Exemplos BFS

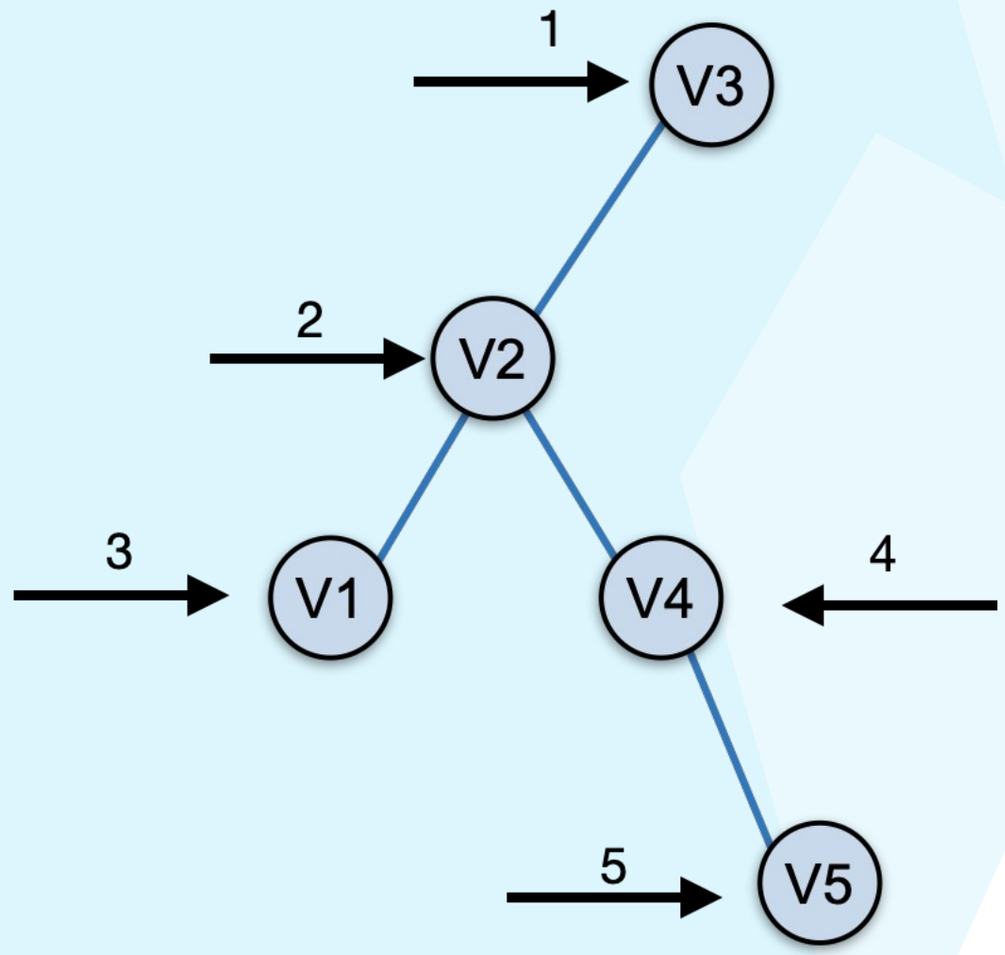


Visita	Queue
V5	V5
	Vazia
V3	V3
V4	V3, V4
	V4
V2	V4, V2
	V2
	Vazia
V1	V1
	Vazia

Exemplos DFS

- Começar em **V3**

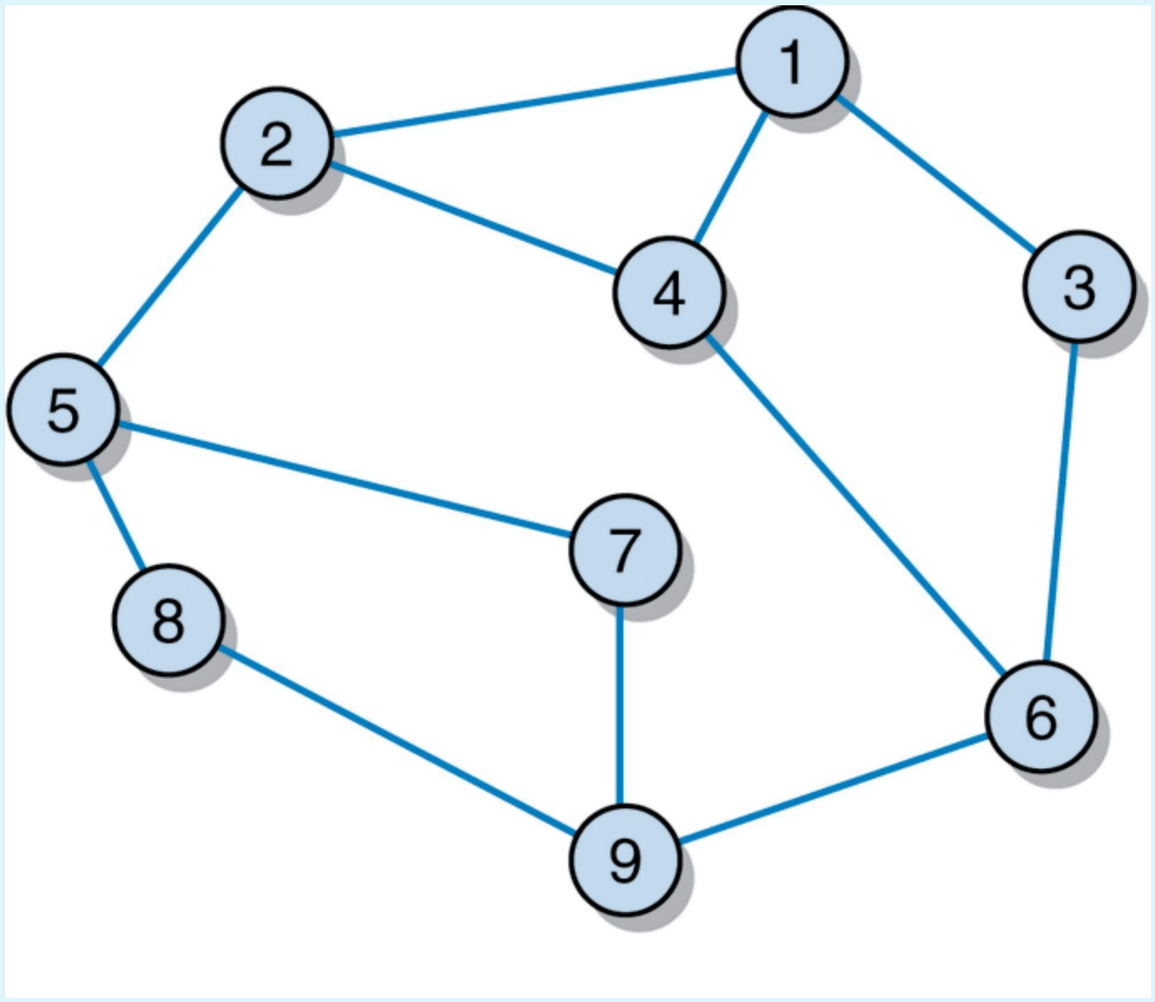




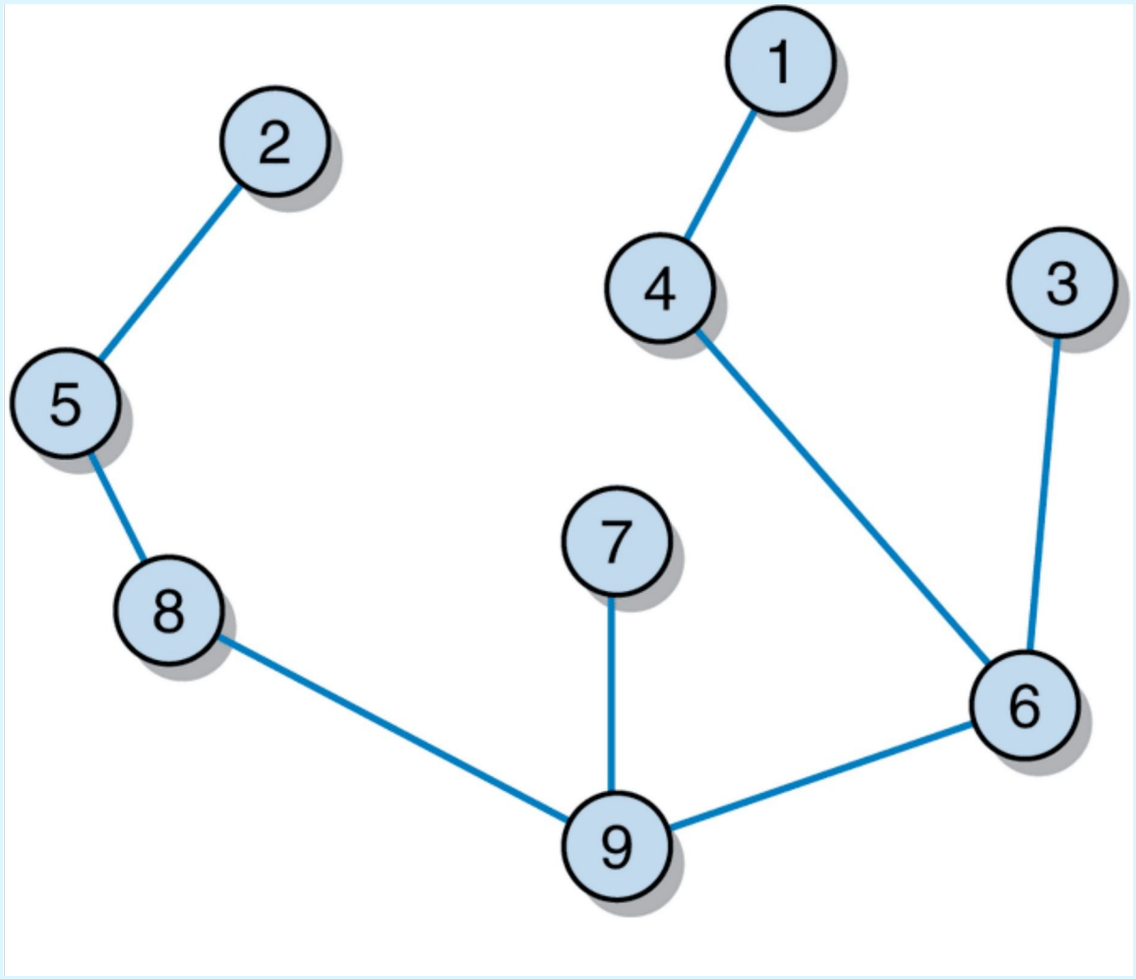
Árvore Geradora (*Spanning Tree*)

- Uma árvore geradora é uma árvore que inclui todos os vértices de um grafo
- O exemplo apresentado de seguida mostra um grafo e, de seguida, uma árvore geradora desse mesmo grafo

Exemplo de Grafo



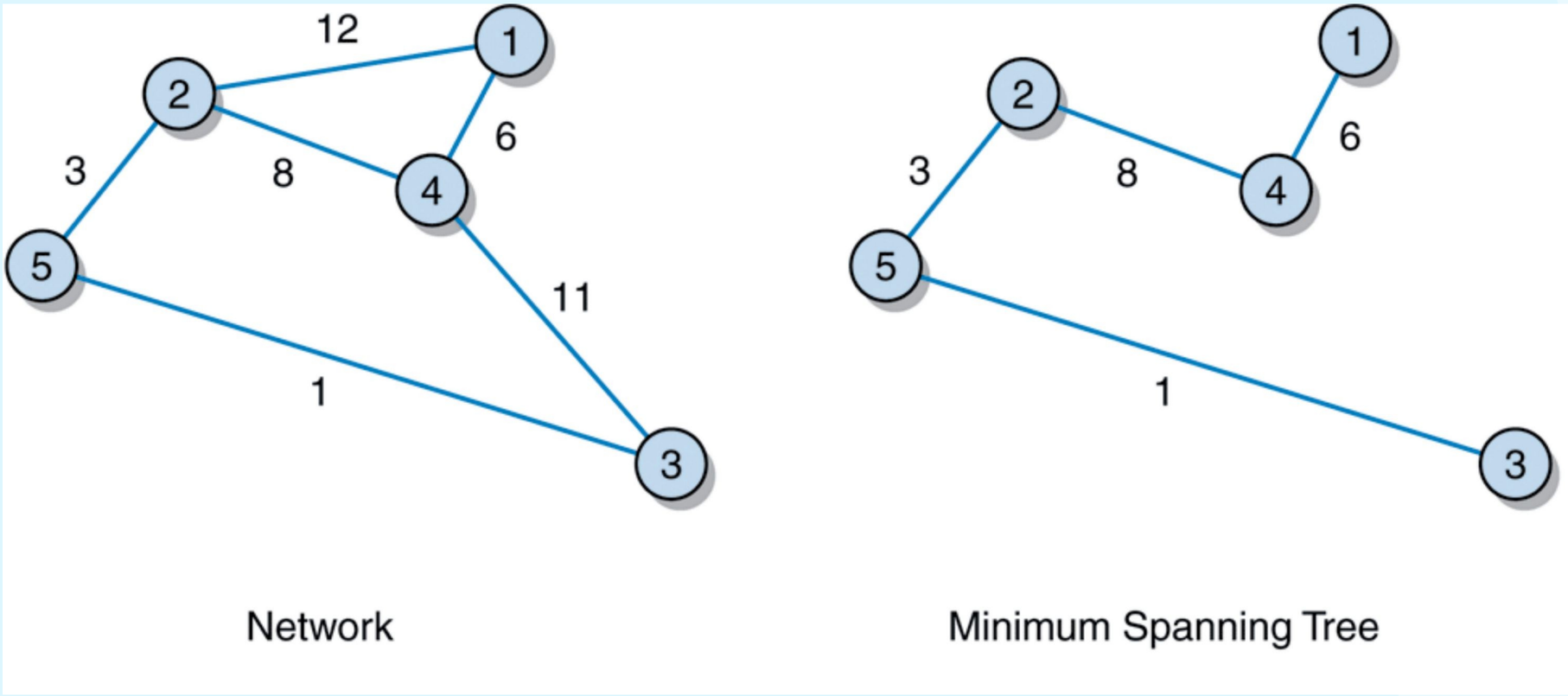
Árvore Geradora



Árvore Geradora de Custo Mínimo (*Minimum Spanning Tree*)

- Uma árvore geradora de custo mínimo é uma árvore geradora, onde a soma dos pesos das arestas é menor ou igual à soma dos pesos de qualquer outra árvore geradora para o mesmo grafo
- O algoritmo para a criação de uma árvore geradora de custo mínimo faz uso de uma *minheap* para ordenar as arestas

Árvore Geradora de Custo Mínimo



```
/**
 * Returns a minimum spanning tree of the network.
 *
 * @return  a minimum spanning tree of the network
 */
public Network mstNetwork()
{
   int x, y;
   int index;
   double weight;
   int[] edge = new int[2];
   Heap<Double> minHeap = new Heap<Double>();
   Network<T> resultGraph = new Network<T>();

   if (isEmpty() || !isConnected())
      return resultGraph;

   resultGraph.adjMatrix = new double[numVertices][numVertices];
   for (int i = 0; i < numVertices; i++)
      for (int j = 0; j < numVertices; j++)
         resultGraph.adjMatrix[i][j] = Double.POSITIVE_INFINITY;
   resultGraph.vertices = (T[])(new Object[numVertices]);
```

```
boolean[] visited = new boolean[numVertices];
for (int i = 0; i < numVertices; i++)
   visited[i] = false;

edge[0] = 0;
resultGraph.vertices[0] = this.vertices[0];
resultGraph.numVertices++;
visited[0] = true;

/** Add all edges, which are adjacent to the starting vertex,
    to the heap */
for (int i = 0; i < numVertices; i++)
      minHeap.addElement(new Double(adjMatrix[0][i]));

while ((resultGraph.size() < this.size()) && !minHeap.isEmpty())
{
   /** Get the edge with the smallest weight that has exactly
       one vertex already in the resultGraph */
   do
   {
      weight = (minHeap.removeMin()).doubleValue();
      edge = getEdgeWithWeightOf(weight, visited);
   } while (!indexIsValid(edge[0]) || !indexIsValid(edge[1]));
```

```
x = edge[0];
y = edge[1];
if (!visited[x])
   index = x;
else
   index = y;

/** Add the new edge and vertex to the resultGraph */
resultGraph.vertices[index] = this.vertices[index];
visited[index] = true;
resultGraph.numVertices++;

resultGraph.adjMatrix[x][y] = this.adjMatrix[x][y];
resultGraph.adjMatrix[y][x] = this.adjMatrix[y][x];
```

```
/** Add all edges, that are adjacent to the newly added vertex,
    to the heap */
for (int i = 0; i < numVertices; i++)
{
   if (!visited[i] && (this.adjMatrix[i][index] <
                       Double.POSITIVE_INFINITY))
   {
      edge[0] = index;
      edge[1] = I;
      minHeap.addElement(new Double(adjMatrix[index][i]));
   }
  }
}
return resultGraph;
}
```

Determinar o Caminho Mais Curto (*Shortest Path*)

- Existem duas possibilidades para a determinar o caminho mais curto de um grafo
  - Determinar o caminho mais curto em termos de número de arestas
  - Determinar o caminho menos caro numa rede

- A solução para a primeira possibilidade é uma simples variação do nosso algoritmo anterior da travessia em largura
- Temos simplesmente de armazenar dois elementos de informação adicionais para cada vértice
  - O comprimento do percurso desde o ponto de partida até este vértice
  - O vértice que é o antecessor do vértice no caminho
- Por fim modificar o ciclo para terminar quando chegar ao vértice destino

- Para a segunda possibilidade a solução é procurar o caminho mais barato na rede
- *Dijkstra* desenvolveu um algoritmo para esta alternativa que é muito semelhante ao algoritmo anterior
- Escolhido um vértice como raiz da busca, este algoritmo calcula o custo mínimo deste vértice para todos os demais vértices do grafo
- É bastante simples e com um bom nível de performance
- Não garante, contudo, a exactidão da solução caso haja a presença de adjacências com valores negativos

Estratégias para implementar Grafos

- Existem duas abordagens principais para a implementação de grafos
  - Lista de adjacências
  - Matriz de adjacências

- A abordagem da lista de adjacências é muito semelhante à implementação de árvores com listas ligadas

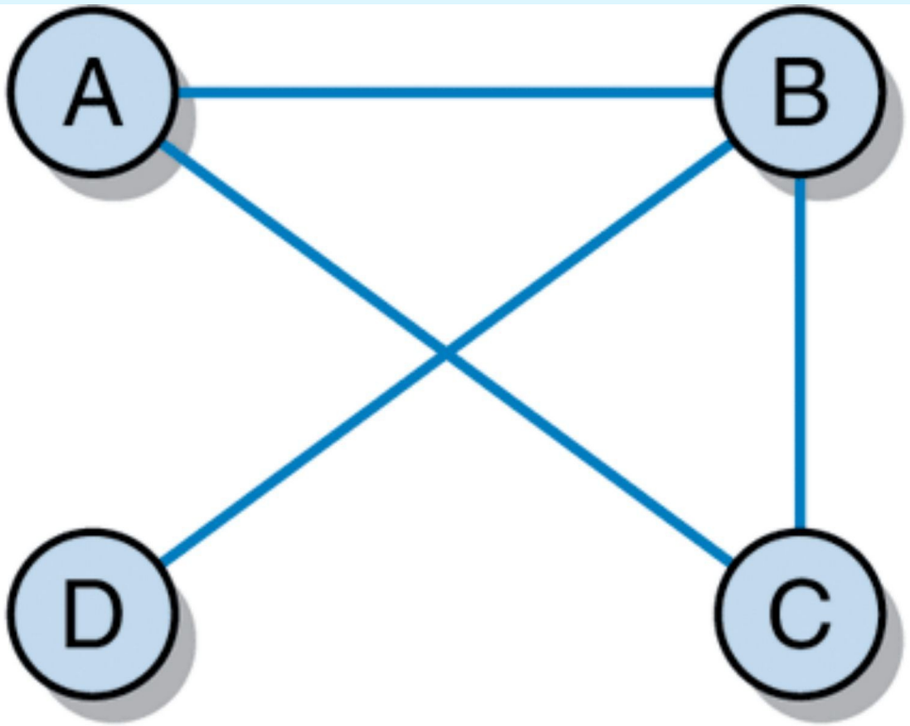
- No entanto, em vez de criarmos um nó de grafo com um número fixo de referências (como fizemos com a `BinaryTreeNode`) criamos um nó de grafo que simplesmente mantém uma lista ligada de referências para outros nós

- Esta lista é chamada de lista de adjacências

- Representa um grafo usando **n** listas ligadas onde n é o número de vértices

- A segunda estratégia para implementar grafos é com recurso a uma matriz de adjacências
- Uma matriz de adjacências é simplesmente uma matriz bidimensional, onde ambas as dimensões são "indexadas" pelos vértices do grafo
- Cada posição da matriz contém um valor booleano que será true se os dois vértices associados estiverem ligados por uma aresta, e false caso contrário
- Os *slides* seguintes mostram dois exemplos de matrizes de adjacências, uma para um grafo não direccionado, o outro para um grafo direccionado
- Uma matriz de adjacências de uma rede pode armazenar os pesos em cada célula, em vez de um valor `boolean`

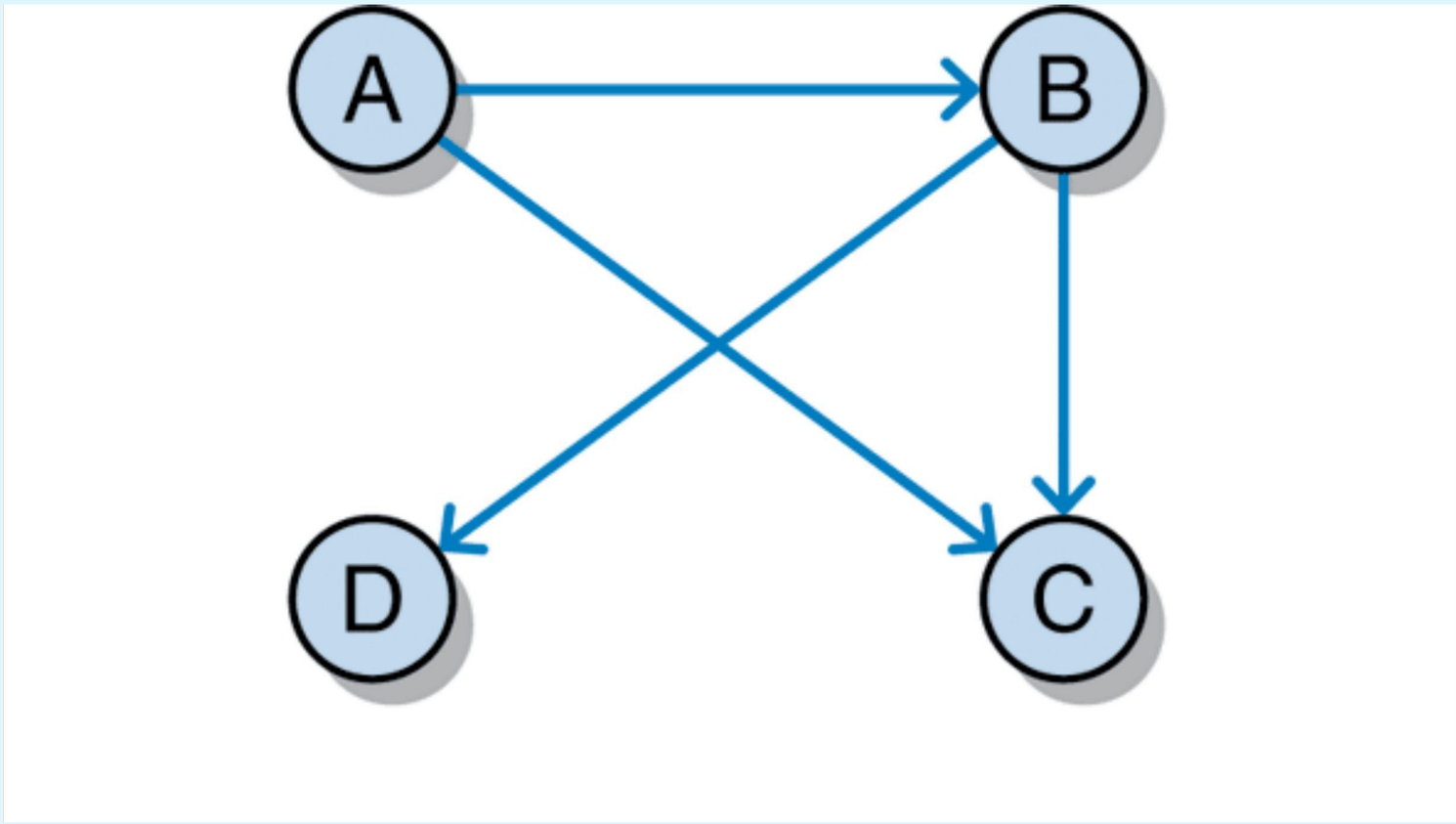
Grafo não Direccionado



Matriz de adjacências para um Grafo não Direccionado

	A	B	C	D
A	F	T	T	F
B	T	F	T	T
C	T	T	F	F
D	F	T	F	F

Grafo Direccionado



Matriz de Adjacências para um Grafo Direccionado

	A	B	C	D
A	F	T	T	F
B	F	F	T	T
C	F	F	F	F
D	F	F	F	F

Interface GraphADT

```
/**
 * GraphADT defines the interface to a graph data structure.
 *
 */

public interface GraphADT<T>
{
   /**
    * Adds a vertex to this graph, associating object with vertex.
    *
    * @param vertex  the vertex to be added to this graph
    */
   public void addVertex (T vertex);
```

```
/**
 * Removes a single vertex with the given value from this graph.
 *
 * @param vertex  the vertex to be removed from this graph
 */
public void removeVertex (T vertex);

/**
 * Inserts an edge between two vertices of this graph.
 *
 * @param vertex1  the first vertex
 * @param vertex2  the second vertex
 */
public void addEdge (T vertex1, T vertex2);

/**
 * Removes an edge between two vertices of this graph.
 *
 * @param vertex1  the first vertex
 * @param vertex2  the second vertex
 */
public void removeEdge (T vertex1, T vertex2);
```

```
/**
 * Returns a breadth first iterator starting with the given vertex.
 *
 * @param startVertex  the starting vertex
 * @return             a breadth first iterator beginning at
 *                     the given vertex
 */
public Iterator iteratorBFS(T startVertex);

/**
 * Returns a depth first iterator starting with the given vertex.
 *
 * @param startVertex  the starting vertex
 * @return             a depth first iterator starting at the
 *                     given vertex
 */
public Iterator iteratorDFS(T startVertex);
```

```
/**
 * Returns an iterator that contains the shortest path between
 * the two vertices.
 *
 * @param startVertex   the starting vertex
 * @param targetVertex  the ending vertex
 * @return              an iterator that contains the shortest
 *                      path between the two vertices
 */
public Iterator iteratorShortestPath(T startVertex, T targetVertex);

/**
 * Returns true if this graph is empty, false otherwise.
 *
 * @return  true if this graph is empty
 */
public boolean isEmpty();

/**
 * Returns true if this graph is connected, false otherwise.
 *
 * @return  true if this graph is connected
 */
public boolean isConnected();
```

```
    /**
     * Returns the number of vertices in this graph.
     *
     * @return  the integer number of vertices in this graph
     */
    public int size();

    /**
     * Returns a string representation of the adjacency matrix.
     *
     * @return  a string representation of the adjacency matrix
     */
    public String toString();
}
```

Interface NetworkADT

```
/**
 * NetworkADT defines the interface to a network.
 *
 */

public interface NetworkADT<T> extends GraphADT<T>
{
    /**
     * Inserts an edge between two vertices of this graph.
     *
     * @param vertex1  the first vertex
     * @param vertex2  the second vertex
     * @param weight   the weight
     */
    public void addEdge (T vertex1, T vertex2, double weight);
```

```
/**
    * Returns the weight of the shortest path in this network.
    *
    * @param vertex1  the first vertex
    * @param vertex2  the second vertex
    * @return         the weight of the shortest path in this network
    */
   public double shortestPathWeight(T vertex1, T vertex2);
}
```

Implementação de um Grafo

```
/**
 * Graph represents an adjacency matrix implementation of a graph.
 *
 */

public class Graph<T> implements GraphADT<T> {
   protected final int DEFAULT_CAPACITY = 10;
   protected int numVertices;   // number of vertices in the graph
   protected boolean[][] adjMatrix;   // adjacency matrix
   protected T[] vertices;   // values of vertices

   /**
    * Creates an empty graph.
    */
   public Graph() {
      numVertices = 0;
      this.adjMatrix = new boolean[DEFAULT_CAPACITY][DEFAULT_CAPACITY];
      this.vertices = (T[])(new Object[DEFAULT_CAPACITY]);
   }
```

```
/**
 * Inserts an edge between two vertices of the graph.
 *
 * @param vertex1  the first vertex
 * @param vertex2  the second vertex
 */
public void addEdge (T vertex1, T vertex2) {
   addEdge (getIndex(vertex1), getIndex(vertex2));
}

/**
 * Inserts an edge between two vertices of the graph.
 *
 * @param index1  the first index
 * @param index2  the second index
 */
public void addEdge (int index1, int index2) {
   if (indexIsValid(index1) && indexIsValid(index2))
   {
      adjMatrix[index1][index2] = true;
      adjMatrix[index2][index1] = true;
   }
}
```

```
/**
 * Adds a vertex to the graph, expanding the capacity of the graph
 * if necessary.  It also associates an object with the vertex.
 *
 * @param vertex  the vertex to add to the graph
 */
public void addVertex (T vertex)
{
   if (numVertices == vertices.length)
      expandCapacity();

   vertices[numVertices] = vertex;
   for (int i = 0; i <= numVertices; i++)
   {
      adjMatrix[numVertices][i] = false;
      adjMatrix[i][numVertices] = false;
   }
   numVertices++;
}
```