Projecteis

diogo.g.andrade

April 2024

Começamos com a equação de projéteis:

$$p = p_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2 \tag{1}$$

Daqui podemos separar em x e y, e considerar que só temos gravidade em y (dá para resolver sem ser assim, mas dá mais trabalho). Temos também de considerar que a velocidade $v = (V\cos\theta, V\sin\theta)$. Assumimos que V é constante e definido (porque um projétil saí sempre à mesma velocidade nos casos em que nos interessa, só precisamos descobrir o ângulo)

$$\begin{cases} t_x = p_x + v\cos\theta t \\ t_y = p_y + v\sin\theta t + \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \tag{2}$$

Resolvemos a primeira equação em relação ao tempo:

$$\begin{cases} t = \frac{t_x - p_x}{v\cos\theta} \\ t_y = p_y + v\sin\theta t + \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \tag{3}$$

Fazendo $\Delta x = t_x - p_x$, e substituinto t na segunda equação:

$$\begin{cases} t = \frac{\Delta x}{v\cos\theta} \\ t_y = p_y + \frac{v\sin\theta\Delta x}{v\cos\theta} + \frac{1}{2}g(\frac{\Delta x}{v\cos\theta t})^2 \end{cases} \tag{4}$$

Passa-se o t_y para o outro lado:

$$\begin{cases} t = \frac{\Delta x}{v\cos\theta} \\ (p_y - t_y) + \frac{v\sin\theta\Delta x}{v\cos\theta} + \frac{1}{2}g(\frac{\Delta x}{v\cos\theta t})^2 = 0 \end{cases} \tag{5}$$

Corta-se o v, e sendo que $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$:

$$\begin{cases} t = \frac{\Delta x}{v\cos\theta} \\ (p_y - t_y) + \Delta x\tan\theta + \frac{1}{2}g(\frac{\Delta x}{v\cos\theta t})^2 = 0 \end{cases} \tag{6}$$

No terceiro termo da segunda equação, separamos o que são variáveis do que são constantes:

$$\begin{cases} t = \frac{\Delta x}{v \cos\theta} \\ (p_y - t_y) + \Delta x \tan\theta + \frac{g \Delta x^2}{2v^2} \frac{1}{\cos^2\theta} = 0 \end{cases} \tag{7}$$

Agora, como $\frac{1}{\cos^2\theta} = \tan^2\theta + 1$ (ver no fim para a prova), então ficamos com:

$$\begin{cases} t = \frac{\Delta x}{v \cos\theta} \\ (p_y - t_y) + \Delta x \tan\theta + \frac{g \Delta x^2}{2v^2} (\tan^2\theta + 1) = 0 \end{cases} \tag{8}$$

Resolvendo:

$$\begin{cases} t = \frac{\Delta x}{v \cos\theta} \\ (p_y - t_y) + \Delta x \tan\theta + \frac{g \Delta x^2}{2v^2} \tan^2\theta + \frac{g \Delta x^2}{2v^2} = 0 \end{cases} \tag{9}$$

$$\begin{cases} t = \frac{\Delta x}{v \cos\theta} \\ (p_y - t_y + \frac{g \Delta x^2}{2v^2}) + \Delta x \tan\theta + \frac{g \Delta x^2}{2v^2} \tan^2\theta = 0 \end{cases} \tag{10}$$

Criando umas variáveis temporárias a, b e c, tais que:

- $a = \frac{g \Delta x^2}{2v^2}$
- $b = \Delta x$
- $c = p_y - t_y + \frac{g \Delta x^2}{2v^2}$

ficamos com isto:

$$\begin{cases} t = \frac{\Delta x}{v \cos\theta} \\ a \tan^2\theta + b \tan\theta + c = 0 \end{cases} \tag{11}$$

Podemos então usar a formula resolvente:

$$\tan\theta = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{12}$$

Temos de verificar se $a \neq 0$, e se $b^2 - 4ac \geq 0$, caso contrário a equação não tem solução (isto é, o projétil com aquela velocidade nunca conseguiria atingir o alvo).

O ângulo mesmo vai ser:

$$\theta = \arctan \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{13}$$

Notar que isto devolve duas soluções:

$$\theta_1 = \arctan \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{14}$$

$$\theta_2 = \arctan \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{15}$$

Se só uma delas der um valor válido (em que theta está compreendido entre os valores que queremos, regra geral entre $-frac\pi 2$ e $frac\pi 2$), escolhemos esse. Se ambas foram válidas, podemos usar um critério para desempatar. Eu normalmente uso ou o demora mais tempo a chegar ao alvo, e para isso é necessário calcular quanto tempo vai demorar a atingir o alvo, resolvendo a primeira equação:

$$t_1 = \frac{\Delta x}{v \cos \theta_1} \tag{16}$$

$$t_2 = \frac{\Delta x}{v \cos \theta_2} \tag{17}$$

Verifica-se qual o maior e escolhe-se o ângulo correspondente.

Vamos provar que $\frac{1}{\cos^2 \theta} = \tan^2 \theta + 1$:

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \tag{18}$$

Dividindo os termos por $\cos^2 \theta$:

$$\frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta} \tag{19}$$

Como $\frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \tan^2 \theta$, e $\frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} = 1$:

$$\tan^{\theta} + 1 = \frac{1}{\cos^2 \theta} \tag{20}$$

Como queriamos demonstrar.