(☆) min $x_1 - 3x_2 + x_3$

s.t
$y_1: 2x_1 - x_2 \leq 24$ (I)
$y_2: x_1 + x_3 = 10$ (II)
$y_3: -x_2 - x_3 \geq 3$ (III)
$x_1 \geq 0$, $x_2 \leq 0$, $x_3$ livre
$x = (10, -3, 0)$

p/ $c^T x = b^T y$ →
$y_1 = 0$
$2y_1 + y_2 = 1$
$-y_1 - y_3 = -3$
$y = (0, 1, 3)$ não é viável ⇒ x não é ótimo

Quero chegar em algo do tipo
$x_1 - 2x_2 + x_3 \geq K$

$2 \times (\mathrm{I})$ : $2(-x_2 - x_3 \geq 3)$ 6 $\quad y_1 \leq 0$
$-1 \times (\mathrm{III})$ $-1(2x_1 - x_2 \leq 13) -24$ $\quad y_2$ livre
$3 \times (\mathrm{II})$ $3(x_1 + x_3 = 10)$ 30 $\quad y_3 \geq 0$

$x_1 - 3x_2 + x_3 \geq 14$

Em lugar de olhar uma por uma, atribuimos uma variável a cada uma delas e reescreveremos como:

max $24y_1 + 10y_2 + 3y_3$
$x_1: 2y_1 + y_2 \leq 1$
$x_2: -y_1 - y_3 \geq -3$
$x_3: y_2 - y_3 = 1$

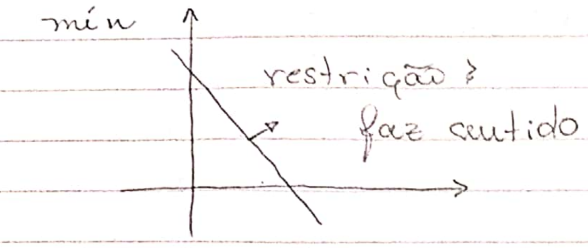
$\left\{ \begin{matrix} \min c^T x \\ Ax = b \end{matrix} \right\}$

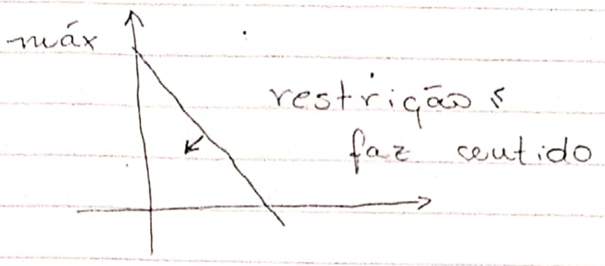
Regra: min ⟷ max
$c_P$ ⟷ $b_D$
$c_D$ ⟷ $b_P$
restrição = ⟷ variável livre
$\leq K$ ⟷ $\leq 0$
$\geq K$ ⟷ $\geq 0$

rest:
var livre ⟷ =
$\geq 0$ ⟷ $\leq$
$\leq 0$ ⟷ $\geq$
} Restrição

faz sentido → faz sentido
¬ faz sentido → ¬ faz sentido

$x \geq 0$




(P) $\max\ C^T x$
$Ax \leq b$
$x \geq 0$

(D) $\min\ b^T y$
$A^T y \geq C$
$y \geq 0$

$\vdash \quad C^T x \leq b^T y$

$C^T x \leq (y^T A) x \leq y^T b$ } Dualidade Fraca

$\leq (A^T y)^T \quad\quad A x \leq b$

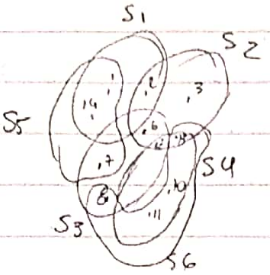
$x \geq 0 \quad\quad x \geq 0$

Dualidade Forte: Se (P) tem uma solução ótima $x^*$, então (D) tem uma solução ótima $y^*$ e $c^T x^* = b^T y^*$

se $c_i < a_i y$
para $c^T x \leq (y^T A) x$ então $x_i = 0$

↳ folgas complementares

Como usar P.L. em combinatória:




Set Cover

$I \subseteq \underbrace{[n]}_{=\{1,\dots,n\}}$

t.q. $\forall v \in [m]$

$v \in S_i$ p/ algum $i \in I$

objetivo: minimizar $|I|$

seja $x_i = \begin{cases} 0, & i \notin I \\ 1, & i \in I \end{cases}$

Em P.L.

$$\min \sum_{i=1}^{n} x_i . w_i$$

$$\sum_{i : v \in S_i} x_i \geq 1 \qquad \forall v \in [m]$$

$$x_i \in \{0,1\} \qquad \forall i \in [n]$$

relaxação: em vez de $x_i \in \{0,1\}$

colocamos $x_i \geq 0$

$x_i \leq 1$

Opt Inteiro $\geq$ Opt Relaxação

Visão Probabilística:

(A)

$\boxed{\text{Para cada } i \in [n], \text{ inclua } i \text{ em } I \text{ com prob } x_i^*}$

→ Valor esperado do custo

Seja $X_i$ variável aleatória $= \begin{cases} 1 & \text{com prob } x_i^* \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$ } Bernoulli

$$\mathbb{E}\, X_i = 1 . x_i^* + 0 (1 - x_i^*) = x_i^*$$

No.

Date

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} w_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(w_i x_i) = \sum_{i=1}^{n} w_i \,\mathbb{E} x_i = \sum w_i x_i^*$$

Linearidade da esperança

Opt Relaxado

$v \in [m]$

$$\mathbb{P}(v \text{ não foi coberto?}) = \underbrace{(1-x_1^*)\cdot(1-x_2^*)\dots(1-x_k^*)}$$

$v \in \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$

↳ Da viabilidade, sabemos que $(1-x_1^*)(1-x_2^*)\dots(1-x_k^*) = \sum x_i^* \geq 1$

sabemos que $e^{-x} \geq 1 - x$

$$(1-x_1^*)(1-x_2^*)\dots(1-x_k^*) \leq e^{-x_1^*} \cdot e^{-x_2^*} \dots e^{-x_k^*}$$

$$\leq e^{-\sum x_i^* \geq 1} \leq e^{-1}$$

Executando (A) $\ln m + t$

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} w_i x_i\right) \cdot (\ln m + t) = \sum w_i x_i^* \cdot (\ln m + t)$$

$$\mathbb{P}(v \text{ não coberto}) \leq (e^{-1})^{\ln m + t} = \frac{1}{m} \cdot e^{-t}$$

$$\mathbb{P}(\text{algum } v \text{ não coberto}) \overset{\text{(union bound)}}{\leq} \sum_{v \in [m]} \mathbb{P}(v \text{ não é coberto})$$

$$\leq m \cdot \frac{1}{m} \cdot e^{-t} = e^{-t}$$

para $t = 3$

$$\mathbb{P}(\text{não é cobertura}) \leq e^{-3} \leq 0{,}05$$

$$\mathbb{E}(\text{custo}) = (\ln m + 3) \cdot OPT_{RELAX}$$

No.
Date

$\mathbb{P}(\text{custo} \geq 2(\ln m + 3) \cdot \text{OPTrelax}) \leq 1/2 = 0{,}5$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Desigualdade de Markov:} \\ \quad X \text{ variavel aleatória} \geq 0 \\ \quad \mathbb{P}(X \geq \alpha\, \mathbb{E}\cdot X) \leq 1/\alpha\end{array}}$$

$\mathbb{P}\left(\begin{array}{l}\text{cobertura} \\ \text{custo} \leq 2\cdot(\ln m + 3)\,\text{Optrelax}\end{array}\right) \geq 0{,}45$

$\Leftrightarrow \ln m$

$\underbrace{(0{,}55)^{\ln m}}_{\text{tende ao infinito.}}$