PGC
Combinatória Extremal

Diogo Eduardo Lima Alves

Universidade Federal do ABC - UFABC

9 de maio de 2019

Combinatória Extremal

- **Combinatória Extremal**: Subtema da combinatória que estuda quão grande ou pequena uma estrutura pode ser ao mesmo tempo que satisfaz certas condições.

Exemplos:

- Qual a maior quantidade de arestas que um grafo G pode ter, sem que G tenha um subgrafo H?

Combinatória Extremal

Exemplos:

- Qual a maior quantidade de arestas que um grafo G pode ter, sem que G tenha um subgrafo H?
- Qual o tamanho do maior conjunto independente em um grafo? (NP-completo)

Áreas Abordadas

- Teoria de Ramsey
- Grafos Extremais
- Grafos Aleatórios
- Regularidade

Theorem (Schur's Theorem)

Para toda coloracão $c\colon \mathbb{N} \to [r]$, *existe* x, y, z *tal que* $x + y = z$ *e* $c(x) = c(y) = c(z)$.

Demonstração.

Para a coloracão de vertices dada por $c\colon \mathbb{N} \to [r]$ defina uma coloracão de arestas dada por $c'\colon \binom{\mathbb{N}}{2} \to [r]$ como $c'(\{a, b\}) := c(|a - b|)$. Pelo Teorema de Ramsey sabemos que existe um triângulo monocromático, assuma que $\{x, y, z\}$ forma o triângulo, com $x < y < z$.
Usando a definicão de c' temos:

$$c'(\{x, y\}) = i = c(|y - x|)$$

$$c'(\{x, z\}) = i = c(|z - x|)$$

$$c'(\{y, z\}) = i = c(|z - y|).$$

Segue $c(|y - x|) = c(|z - x|) = c(|z - y|)$, e $(z - y) + (y - x) = (z - x)$ que implica x, y, z tal que $x + y = z$ e $c(x) = c(y) = c(z)$, como requisitado.

$\square$

Theorem (Erdős)

Para todo grafo G com n vertices

$$ex(n, C_4) = O(n^{3/2}).$$

O C_4 é formado por duas 'cerejas' no mesmo par de vertices. Contando essas triplas (x,{y,z}) em G tal que $xy, xz \in E(G)$ e usando a inequacão de Jensen com $\lambda_i = 1/n$ obtemos:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} f\left(x_i\right) \geqslant f\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} x_i\right).$$

Aplicando ao nosso problema temos,

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \binom{x_i}{2}}{n} \geqslant \binom{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}}{2},$$

Substituindo x_i e lembrando que $\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2e(G)$,

$$\begin{aligned}
\sum_{v \in V(G)} \binom{d(v)}{2} &\geqslant n \binom{\frac{2e(G)}{n}}{2} \\
&= n \frac{\frac{2e(G)}{n} \left(\frac{2e(G)}{n} - 1 \right)}{2} \\
&\geqslant \frac{n}{2} \left(\frac{2e(G)}{n} - 1 \right)^2 .
\end{aligned}$$

Note que o número máximo dessas triplas em um grafo C_4-livre é no máximo $\binom{n}{2}$ porque podemos ter apenas uma cereja em cada par de vertices.

$$\frac{n}{2}\left(\frac{2e(G)}{n}-1\right)^2 \leqslant \binom{n}{2},$$

Temos $e(G) = O(n^{3/2})$ terminando a prova.

Theorem (Chebyshev's Inequality)

$$\mathbb{P}(|X-\mu| \geqslant a) \leqslant \sigma^2/a^2.$$

Usando $a=\mu$, temos a seguinte inequacão,

$$\mathbb{P}(X=0) \leqslant \mathbb{P}(|X-\mu| \geqslant \mu) \leqslant \sigma^2/\mu^2,$$

que nos dá um limitante superior para $\mathbb{P}(X=0)$.

Theorem

Seja $G = G(n,p)$ um grafo aleatório. Então,

$$\mathbb{P}(G \text{ conter um triângulo}) \to \begin{cases} 0, & \text{if } p \ll 1/n, \\ 1, & \text{if } p \gg 1/n\,. \end{cases}$$

- Prova:

$$X = \text{ quantidade de triângulos em } G$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(G \text{ conter um triângulo}) &\leqslant \mathbb{E}(X) \\ &\leqslant \binom{n}{3} p^3 \\ &\ll 1, \end{aligned}$$

se $p \ll 1/n$.

$$\begin{aligned} Var(X) &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \\ &= \mathbb{E}\left(\sum_{(u,v)} \mathbb{1}[u]\mathbb{1}[v]\right) - \left(\sum_u \mathbb{P}(u)\right)^2 \\ &= \sum_{u,v} \left(\mathbb{P}(u \wedge v) - \mathbb{P}(u)\mathbb{P}(v)\right), \end{aligned}$$

usando a inequacão de Chebychev,

$$\mathbb{P}(G \text{ não conter triângulos}) \leqslant \frac{Var(X)}{\mathbb{E}(X)^2} \leqslant \frac{n^4p^5 + n^3p^3}{n^6p^6} \ll 1,$$

para $p \gg 1/n$, terminando a prova.

Regularidade

Definition

Given a graph G and disjoint sets A and B of vertices, we say that (A, B) is ε-regular if
for every $X \subset A$ and every $Y \subset B$ with $|X| \geqslant \varepsilon|A|$ and $|Y| \geqslant \varepsilon|B|$ we have

$$\left|\frac{e(X, Y)}{|X||Y|} - \frac{e(A, B)}{|A||B|}\right| \leqslant \varepsilon.$$

Lemma

(The Embedding Lemma - simple version). Let H be a graph, and let $\varepsilon > 0$. There exist $\delta > \varepsilon$ and $M \in \mathbb{N}$ such that if $m \geqslant M$ and there exist a partition $\{V_1, ..., V_H\}$ with all pairs being ε-regular and δ-dense, then $H \subset G$.

Regularidade

Theorem (The Szemerédi Regularity Lemma [?])

. Let $\varepsilon > 0$, and let $m \in \mathbb{N}$. There exists a constant $M = M(m, \varepsilon)$ such that the following holds.
For any graph G, there exists a partition $V(G) = \{V_0 \cup \ldots \cup V_k\}$ of the vertex set into $m \leqslant k \leqslant M$ parts, such that

- $|V_1| = \ldots = |V_k|$,
- $|V_0| \leqslant \varepsilon |V(G)|$,
- *all but εk^2 of the pairs (V_i, V_j) are ε-regular.*

Regularidade

Theorem (Triangle Removal Lemma)

For all $\alpha > 0$ exists $\beta > 0$ such that if G is a graph with $\leqslant \beta n^3$ triangles, then it is possible to remove all triangles removing at most αn^2 edges.

The first, second and third steps of the method are, in general, the same for classical problems,
1. Apply SzRL with ε enough small and we have the partitions $\{V_1, ..., V_k\}$.
2. Remove edges inside the partitions, between irregular pairs and sparse pairs obtaining G' with at most αn^2 edges removed.
3. Define R with $V(R) = [k]$ and $\{i, j\} \in E(R)$ if the pair (A_i, A_j) is dense and ε-regular.

Now we have two cases, in the first one we have a triangle in R. Note if $\beta n^3 < 1$ the result is trivial, then we assume $\beta \geqslant 1/n^3$ and the partitions that forms the triangle (assume $\{V_1, V_2, V_3\}$ for simplicity) has size $n/k \geqslant 1/(\beta^{1/3}k) \geqslant m$.
Applying the Embedding Lemma we have that the quantity of triangles in G' is at least $\delta^3/2(n/k)^3 > \beta n^3$ if we choose β such that $\delta^3/(2k^3) > \beta$.
We conclude that if αn^2 edges are removed and the graph still has triangles the triangles quantity is more than βn^3.
In the second case there is no triangle in R and this implies there is no triangle in G' because the edges inside the pairs $\{V_1, ..., V_k\}$ were removed then the only possible triangles are formed between the pairs, finishing the proof.

Agradecimentos

Obrigado!