PGC
Combinatória Extremal

Diogo Eduardo Lima Alves

Universidade Federal do ABC - UFABC

9 de maio de 2019

Combinatória Extremal

Combinatória Extremal

- **Combinatória Extremal**: Subtema da combinatória que estuda quão grande ou pequena uma estrutura pode ser ao mesmo tempo que satisfaz certas condições.

Exemplos:

- Qual a maior quantidade de arestas que um grafo G pode ter, sem que G tenha um subgrafo H?

Exemplos:

- Qual a maior quantidade de arestas que um grafo G pode ter, sem que G tenha um subgrafo H?
- Qual o tamanho do maior conjunto independente em um grafo? (NP-completo)

Áreas Abordadas

- Teoria de Ramsey
- Grafos Extremais
- Grafos Aleatórios
- Regularidade

Theorem (Schur's Theorem)

Para toda coloracão $c \colon \mathbb{N} \to [r]$, *existe* x, y, z *tal que* $x + y = z$ *e* $c(x) = c(y) = c(z)$.

Demonstração.

Para a coloracão de vertices dada por $c\colon \mathbb{N} \to [r]$ defina uma coloracão de arestas dada por $c'\colon \binom{\mathbb{N}}{2} \to [r]$ como $c'(\{a, b\})\colon = c(|a - b|)$. Pelo Teorema de Ramsey sabemos que existe um triângulo monocromático, assuma que $\{x, y, z\}$ forma o triângulo, com $x < y < z$.
Usando a definicão de c' temos:

$$c'(\{x, y\}) = i = c(|y - x|)$$

$$c'(\{x, z\}) = i = c(|z - x|)$$

$$c'(\{y, z\}) = i = c(|z - y|).$$

Segue $c(|y - x|) = c(|z - x|) = c(|z - y|)$, e $(z - y) + (y - x) = (z - x)$ que implica x, y, z tal que $x + y = z$ e $c(x) = c(y) = c(z)$, como requisitado.

$\square$

Grafos Extremais

Theorem (Erdős)

Para todo grafo G com n vertices

$$ex(n, C_4) = O(n^{3/2}).$$

O C_4 é formado por duas 'cerejas' no mesmo par de vertices. Contando essas triplas (x,{y,z}) em G tal que $xy, xz \in E(G)$ e usando a inequacão de Jensen com $\lambda_i = 1/n$ obtemos:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} f(x_i) \geqslant f\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} x_i\right).$$

Aplicando ao nosso problema temos,

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \binom{x_i}{2}}{n} \geqslant \binom{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}}{2},$$

Substituindo x_i e lembrando que $\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2e(G)$,

$$\begin{aligned}
\sum_{v \in V(G)} \binom{d(v)}{2} &\geqslant n \binom{\frac{2e(G)}{n}}{2} \\
&= n \frac{\frac{2e(G)}{n}\left(\frac{2e(G)}{n} - 1\right)}{2} \\
&\geqslant \frac{n}{2}\left(\frac{2e(G)}{n} - 1\right)^2.
\end{aligned}$$

Note que o número máximo dessas triplas em um grafo C_4-livre é no máximo $\binom{n}{2}$ porque podemos ter apenas uma cereja em cada par de vertices.

$$\frac{n}{2}\left(\frac{2e(G)}{n}-1\right)^2 \leqslant \binom{n}{2},$$

Temos $e(G) = O(n^{3/2})$ terminando a prova.

Theorem (Chebyshev's Inequality)

$$\mathbb{P}(|X-\mu| \geqslant a) \leqslant \sigma^2/a^2.$$

Usando $a=\mu$, temos a seguinte inequacão,

$$\mathbb{P}(X=0) \leqslant \mathbb{P}(|X-\mu| \geqslant \mu) \leqslant \sigma^2/\mu^2,$$

que nos dá um limitante superior para $\mathbb{P}(X=0)$.

Theorem

Seja $G = G(n, p)$ um grafo aleatório. Então,

$$\mathbb{P}(G \text{ conter um triângulo}) \to \begin{cases} 0, & \text{if } p \ll 1/n, \\ 1, & \text{if } p \gg 1/n\,. \end{cases}$$

- Prova:

$$X = \text{ quantidade de triângulos em } G$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(G \text{ conter um triângulo}) &\leqslant \mathbb{E}(X) \\ &\leqslant \binom{n}{3} p^3 \\ &\ll 1, \end{aligned}$$

se $p \ll 1/n$.

$$
\begin{aligned}
Var(X) &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \\
&= \mathbb{E}\left(\sum_{(u,v)} \mathbb{1}[u]\mathbb{1}[v]\right) - \left(\sum_{u} \mathbb{P}(u)\right)^2 \\
&= \sum_{u,v} \left(\mathbb{P}(u \wedge v) - \mathbb{P}(u)\mathbb{P}(v)\right),
\end{aligned}
$$

usando a inequação de Chebychev,

$$
\mathbb{P}(G \text{ não conter triângulos}) \leqslant \frac{Var(X)}{\mathbb{E}(X)^2} \leqslant \frac{n^4 p^5 + n^3 p^3}{n^6 p^6} \ll 1,
$$

para $p \gg 1/n$, terminando a prova.

Regularidade

Agradecimentos

Obrigado!