PGC
Combinatória Extremal

Diogo Eduardo Lima Alves

Universidade Federal do ABC - UFABC

25 de junho de 2019

Combinatória Extremal

- **Combinatória Extremal**: Subtema da combinatória que estuda quão grande ou pequena uma estrutura pode ser ao mesmo tempo que satisfaz certas condições.

Exemplos:

- Qual a maior quantidade de arestas que um grafo G pode ter, sem que G tenha um subgrafo H?

Exemplos:

- Qual a maior quantidade de arestas que um grafo G pode ter, sem que G tenha um subgrafo H?
- Qual o tamanho do maior conjunto independente em um grafo? (NP-completo)

Mantel

Teorema (Mantel, 1907)

Se G é um grafo livre de triângulos com n vértices, então

$$e(G) \leqslant \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

Mantel

Demonstração.

A prova segue por indução em n. Assuma que $n \geqslant 4$ e G' é o grafo obtido de G pela remoção de dois vértices $u, v \in G$ tal que $\{u, v\} \in E(G)$. Note que se G é triângulo livre, então G' também é triângulo livre porque não é possível formar um triângulo removendo uma aresta. Note que existem no máximo $n-1$ arestas incidentes com u ou v, então

$$\begin{aligned} e(G') &\leqslant \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1\right)\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1\right) \\ &= \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - n + 1. \end{aligned}$$

Portanto, $e(G) \leqslant e(G') + n - 1 = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$. □

Áreas Abordadas

- Teoria de Ramsey
- Grafos Extremais
- Grafos Aleatórios
- Regularidade

Teoria de Ramsey

Teorema (Ramsey, 1929)

Sejam $s, t \geqslant 2$. Existe um inteiro positivo $R = R(s,t)$ tal que toda a coloração de arestas de K_R, com as cores vermelho e azul, admite um subgrafo K_s vermelho ou um subgrafo K_t azul.

Teorema (Schur, 1916)

Para $r = 2$ existe $n \geqslant 3$ tal que para toda r-coloração $c \colon \{1, \ldots, n\} \to [r]$, existem x, y, z tal que $x + y = z$ e $c(x) = c(y) = c(z)$.

Teoria de Ramsey

Demonstração.

Para toda coloração $c\colon [n] \to [r]$ defina uma coloração das arestas de K_n dada por $c'\colon \binom{[n]}{2} \to [r]$ como $c'(\{a,b\}) := c(|a-b|)$. Pelo Teorema de Ramsey, sabemos que existe um triângulo monocromático em K_n. Assuma que $\{x,y,z\}$ forma um triângulo monocromático, com $x < y < z$.
Usando a definicão de c', temos:

$$c'(\{x,y\}) = i = c(|y-x|)$$

$$c'(\{x,z\}) = i = c(|z-x|)$$

$$c'(\{y,z\}) = i = c(|z-y|).$$

Segue que $c(|y-x|) = c(|z-x|) = c(|z-y|)$, e
$(z-y)+(y-x) = (z-x)$, logo existe $a+b=c$ com
$c(a) = c(b) = c(c)$, como requisitado.

$\square$

Grafos Extremais

Teorema (Erdős, 1938)

Para todo grafo G com n vértices e livre de C_4 temos,

$$e(G) = O(n^{3/2}).$$

O C_4 é formado por duas 'cerejas' no mesmo par de vértices. Contando essas triplas (x,y,z) em G tal que $xy, xz \in E(G)$. A Desigualdade de Jensen com $\lambda_i = 1/n$, fornece:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} f(x_i) \geqslant f\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} x_i\right).$$

Aplicando essa desigualdade à nossa função temos,

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}\binom{x_i}{2}}{n} \geqslant \binom{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}}{2},$$

Substituindo x_i por $d(v)$ e lembrando que $\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2e(G)$,

$$\begin{aligned}
\sum_{v \in V(G)} \binom{d(v)}{2} &\geqslant n\binom{\frac{2e(G)}{n}}{2} \\
&= n\frac{\frac{2e(G)}{n}\left(\frac{2e(G)}{n} - 1\right)}{2} \\
&\geqslant \frac{n}{2}\left(\frac{2e(G)}{n} - 1\right)^2.
\end{aligned}$$

Note que o número dessas triplas em um grafo C_4-livre é no máximo $\binom{n}{2}$ porque podemos ter apenas uma cereja em cada par de vértices.

$$\frac{n}{2}\left(\frac{2e(G)}{n}-1\right)^2 \leqslant \binom{n}{2},$$

Portanto, $e(G) = O(n^{3/2})$, terminando a prova.

Teorema (Desigualdade de Chebyshev)

Seja X uma variável aleatória com valor esperado μ e variância finita. Então para todo $a > 0$,

$$\mathbb{P}(|X - \mu| \geqslant a) \leqslant \sigma^2/a^2.$$

Usando $a = \mu$, temos a seguinte inequação,

$$\mathbb{P}(X = 0) \leqslant \mathbb{P}(|X - \mu| \geqslant \mu) \leqslant \sigma^2/\mu^2,$$

que nos dá um limitante superior para $\mathbb{P}(X = 0)$.

Grafos Aleatórios

Teorema

Seja $G = G(n,p)$ um grafo aleatório (Bernoulli). Então,

$$\mathbb{P}(G \text{ conter um triângulo}) \to \begin{cases} 0, & \text{if } p \ll 1/n, \\ 1, & \text{if } p \gg 1/n\,. \end{cases}$$

- Prova:

$$X = \text{ quantidade de triângulos em } G$$

Usando Markov,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(G \text{ conter um triângulo}) &\leqslant \mathbb{E}(X) \\ &= \binom{n}{3} p^3 \\ &\leqslant n^3 p^3 \\ &\ll 1, \text{ se } p \ll 1/n., \end{aligned}$$

Grafos Aleatórios

$$
\begin{aligned}
Var(X) &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \\
&= \sum_{u,v} (\mathbb{P}(u \wedge v) - \mathbb{P}(u)\mathbb{P}(v)) \\
&\leqslant (n^4p^5 - n^6p^6) + (n^5p^6 - n^6p^6) + (n^6p^6 - n^6p^6) + (n^3p^3 - n^6p^6) \\
&\leqslant n^4p^5 + n^3p^3,
\end{aligned}
$$

usando a Desigualdade de Chebychev,

$$\mathbb{P}(G \text{ não conter triângulos}) \leqslant \frac{Var(X)}{\mathbb{E}(X)^2} \leqslant \frac{n^4p^5 + n^3p^3}{(n^6p^6/12^2)} \ll 1,$$

para $p \gg 1/n$, terminando a prova.

Regularidade

Definição

Seja um grafo G e A, B conjuntos disjuntos de vértices, então (A, B) é ε-regular se para todo $X \subset A$ e $Y \subset B$ com $|X| \geqslant \varepsilon|A|$ e $|Y| \geqslant \varepsilon|B|$ segue

$$\left|\frac{e(X,Y)}{|X||Y|} - \frac{e(A,B)}{|A||B|}\right| \leqslant \varepsilon.$$

Regularidade

Teorema (Szemerédi - Lema da Regularidade, 1975)

Sejam $\varepsilon > 0$ e $m \in \mathbb{N}$. Existem constantes $M = M(m, \varepsilon)$ e $n_0 = n_0(m, \varepsilon)$, tais que, para qualquer grafo G com pelo menos n_0 vértices, existe uma partição $V(G) = \{V_0 \cup ... \cup V_k\}$ do conjunto de vértices em $k + 1$ classes com $m \leqslant k \leqslant M$, onde temos:

- $|V_0| \leqslant \varepsilon |V(G)|$,
- $|V_1| = \ldots = |V_k|$,
- *todos os pares são regulares com exceção de no máximo εk^2 pares.*

Regularidade

Lema

(Lema de Imersão - versão simplificada) Sejam H e G grafos e $\delta > \varepsilon > 0$. Então existe $M \in \mathbb{N}$ tal que se $m \geqslant M$ e existe uma partição de G em $\{V_1, \ldots, V_{V(H)}\}$ com $|V_i| = \lfloor m \rfloor$ ou $|V_i| = \lceil m \rceil$ para $1 \leqslant i \leqslant V(H)$ e todos os pares (V_i, V_j) sendo ε-regulares e δ-densos, então $H \subset G$.

Regularidade

Teorema (Lema da Remoção de triângulos)

Para todo $\alpha > 0$ existe $\beta > 0$ tal que se G é um grafo com no máximo βn^3 triângulos, então é possível remover todos os triângulos removendo no máximo αn^2 arestas.

Seguindo a estratégia abaixo os três primeiros passos são sempre os mesmos para problemas clássicos.
Prova:
1. Aplicar o Lema da Regularidade com $\varepsilon = 1/k$, $\delta > \varepsilon$ e $m = 1/\varepsilon$ então obtemos a partição $\{V_0, ..., V_k\}$.
2. Remover arestas dentro das partes, entre pares irregulares e pares sparsos obtendo G' com no máximo αn^2 arestas removidas.
3. Defina R com $V(R) = [k]$ e $\{i, j\} \in E(R)$ se o par (A_i, A_j) é δ-denso e ε-regular.

Regularidade

Há dois casos, no primeiro temos um triângulo em R. Note que se $\beta n^3 < 1$ o resultado é trivial, então assuma que $\beta \geqslant 1/n^3$ e sobre as partes que formam o triângulo assuma $\{V_1, V_2, V_3\}$ com tamanho
$n/k \geqslant 1/(\beta^{1/3}k) \geqslant m$.
Aplicando o Lema de Imersão temos que a quantidade de triângulos em G' é no mínimo $\delta^3/2(n/k)^3 > \beta n^3$ se escolhermos β tal que $\delta^3/(2k^3) > \beta$.
Podemos concluir que se αn^2 arestas são removidas e o grafo ainda tem triângulos então a quantidade de triângulos é maior que βn^3.

No segundo caso não há nenhum triângulo em R então não temos nenhum triângulo em G' porque as arestas dentro das classes $\{V_1, ..., V_k\}$ foram removidas, encerrando a prova.

Agradecimentos

Obrigado!