Álgebra Linear CC

Licenciatura em Ciências da Computação

Carla Mendes

2024/2025

Departamento de Matemática

Espaços Vetoriais

Espaços Vetoriais

Muitas estruturas matemáticas têm propriedades em comum que podem ser generalizadas através de um estudo mais abstrato.

Um dos principais objetos de estudo da Álgebra Linear são os *Espaços Vetoriais*.

Esta noção é uma generalização da estrutura que está associada ao conjunto formado por todos os segmentos orientados com origem num determinado ponto, munido das operações de adição de segmentos orientados e da multiplicação de um escalar por um segmento. Os elementos deste conjunto são conhecidos por vetores e é esta designação que está na origem da nomenclatura *espaço vetorial*.

Definições e propriedades

A noção de espaço vetorial está associada a estruturas designadas por *corpos*.

Definição

Dá-se a designação de ***corpo*** *a um triplo* $(\mathbb{K},+,\cdot)$ *onde* $\mathbb{K}$ *é um conjunto não vazio e* $+$ *e* $\cdot$ *são aplicações de* $\mathbb{K}\times\mathbb{K}$ *em* $\mathbb{K}$ *tais que:*

(C_1) $\forall_{x,y,z\in\mathbb{K}} \quad (x+y)+z=x+(y+z)$; *(associatividade da operação* $+$*)*

(C_2) $\forall_{x,y\in\mathbb{K}} \quad x+y=y+x$; *(comutatividade da operação* $+$*)*

(C_3) $\exists_{0_{\mathbb{K}}\in\mathbb{K}}\ \forall_{x\in\mathbb{K}} \quad 0_{\mathbb{K}}+x=x=x+0_{\mathbb{K}}$;

(C_4) $\forall_{x\in\mathbb{K}}\ \exists_{x'\in\mathbb{K}} \quad x+x'=0_{\mathbb{K}}=x'+x$;

Definição (continuação)

(C_5) $\forall_{x,y,z\in\mathbb{K}}$ $(x\cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z)$; (associatividade da operação $\cdot$)

(C_6) $\forall_{x,y\in\mathbb{K}}$ $x\cdot y = y\cdot x$; (comutatividade da operação $\cdot$)

(C_7) $\exists_{1_\mathbb{K}\in\mathbb{K}}\ \forall_{x\in\mathbb{K}}$ $1_\mathbb{K}\cdot x = x = x\cdot 1_\mathbb{K}$;

(C_8) $\forall_{x\in\mathbb{K}\setminus\{0_\mathbb{K}\}}\ \exists^1_{x'}\in\mathbb{K}$ $x\cdot x' = 1_\mathbb{K} = x'\cdot x$;

(C_9) $\forall_{x,y,z\in\mathbb{K}}$ $x\cdot(y+z) = x\cdot y + x\cdot z$ e $(y+z)\cdot x = y\cdot x + z\cdot x$;
(distributividade da operação $\cdot$ relativamente à operação $+$)

Notação e terminologia: Seja $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ um corpo.

- Diz-se que $\mathbb{K}$ juntamente com as aplicações $+$ e $\cdot$ é um corpo ou, caso não exista ambiguidade quanto às operações envolvidas, diz-se apenas que $\mathbb{K}$ é um corpo.
- Às operações $+$ e $\cdot$ dá-se a designação de *adição* e *multiplicação em* $\mathbb{K}$, respectivamente.
- Existe um único elemento $0_{\mathbb{K}} \in \mathbb{K}$ tal que, para cada $x \in \mathbb{K}$, $0_{\mathbb{K}} + x = x = x + 0_{\mathbb{K}}$. Este elemento designa-se por por **zero de** $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ e, não havendo ambiguidade, pode ser representado apenas por 0.

Notação e terminologia: Seja $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ um corpo.

- Para cada $x \in \mathbb{K}$, existe um único elemento $x' \in \mathbb{K}$ tal que $x + x' = 0_{\mathbb{K}} = x' + x$. Este elemento designa-se por **simétrico de** x e representa-se por $-x$.
- Dados $x, y \in \mathbb{K}$, escreve-se $x - y$ para abreviar $x + (-y)$.
- Existe um único elemento $1_{\mathbb{K}} \in \mathbb{K}$ tal que, para cada $x \in \mathbb{K}$, $1_{\mathbb{K}} \cdot x = x = x \cdot 1_{\mathbb{K}}$. Este elemento designa-se por **identidade de** $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ e, não havendo ambiguidade, pode ser representado apenas por 1.
- Para cada $x \in \mathbb{K} \setminus \{0_{\mathbb{K}}\}$, existe um único elemento $x' \in \mathbb{K} \setminus \{0_{\mathbb{K}}\}$ tal que $x \cdot x' = 1_{\mathbb{K}} = x' \cdot x$. Este elemento designa-se por **inverso de** x e representa-se por x^{-1}.

Exemplo

O triplo $(\mathbb{K}, +, \cdot)$, *onde* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ *e* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de adição e multiplicação em* $\mathbb{K}$, *é um corpo.*

Definição

Sejam V *um conjunto não vazio,* $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ *um corpo e*

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{+} : V \times V & \to & V \\ (x, y) & \mapsto & x \widetilde{+} y \end{array}, \qquad \begin{array}{rcl} \widetilde{\cdot} : \mathbb{K} \times V & \to & V \\ (\alpha, x) & \mapsto & \alpha \widetilde{\cdot} x \end{array}$$

aplicações. Diz-se que $(V, \mathbb{K}, \widetilde{+}, \widetilde{\cdot})$ *é um* ***espaço vetorial sobre*** $\mathbb{K}$ *ou que* V ***juntamente com as aplicações*** $\widetilde{+}$ ***e*** $\widetilde{\cdot}$ ***é um espaço vetorial sobre o corpo*** $\mathbb{K}$ *se são satisfeitas as condições seguintes:*

(V_1) $\forall_{x,y \in V} \quad x \widetilde{+} y = y \widetilde{+} x;$

(V_2) $\forall_{x,y,z \in V} \quad x \widetilde{+} \left(y \widetilde{+} z\right) = \left(x \widetilde{+} y\right) \widetilde{+} z;$

(V_3) $\exists_{0_V \in V}\, \forall_{x \in V} \quad x \widetilde{+} 0_V = x = 0_V \widetilde{+} x;$

(V_4) $\forall_{x \in V}\, \exists_{x' \in V} \quad x \widetilde{+} x' = 0_V = x' \widetilde{+} x;$

Definicao (continuação)

(V_5) $\forall_{x,y\in V}\,\forall_{\alpha\in\mathbb{K}}\quad \alpha\tilde{\cdot}\left(x\tilde{+}y\right)=\alpha\tilde{\cdot}x\tilde{+}\alpha\tilde{\cdot}y;$

(V_6) $\forall_{x\in V}\,\forall_{\alpha,\beta\in\mathbb{K}}\quad (\alpha+\beta)\tilde{\cdot}x=\alpha\tilde{\cdot}x\tilde{+}\beta\tilde{\cdot}x;$

(V_7) $\forall_{x\in V}\,\forall_{\alpha,\beta\in\mathbb{K}}\quad (\alpha\cdot\beta)\tilde{\cdot}x=\alpha\tilde{\cdot}(\beta\tilde{\cdot}x);$

(V_8) $\forall_{x\in V}\quad 1_{\mathbb{K}}\tilde{\cdot}x=x.$

Notação e terminologia:

- Seja $(V, \mathbb{K}, \widetilde{+}, \widetilde{\cdot})$ um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$. Para simplificar a linguagem, em vez de dizermos que um conjunto V juntamente com as aplicações $\widetilde{+}$ e $\widetilde{\cdot}$ é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$, dizemos apenas que V é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$ (subentendendo as operações envolvidas).
- Ao longo deste capítulo consideramos apenas espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ e sobre $\mathbb{C}$ e passamos a representar por $\mathbb{K}$ um destes conjuntos. Um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ diz-se um ***espaço vetorial real*** e a um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ dá-se a designação de ***espaço vetorial complexo***.

Notação e terminologia:

- Aos elementos de V dá-se o nome de ***vetores*** e aos elementos de $\mathbb{K}$ o de ***escalares***. O elemento 0_V indicado na propriedade (V_3) da definição de espaço vetorial é único. Ao elemento 0_V dá-se a designação de ***vetor nulo*** e ao zero de $\mathbb{K}$ damos o nome de ***escalar nulo***. Desde que não exista ambiguidade podemos representar tanto o vetor nulo como o escalar nulo por 0.
- A operação $\widetilde{+}$ designa-se por ***adição de vetores*** e a operação $\widetilde{\cdot}$ por ***multiplicação de um escalar por um vetor***. Simplificamos também a notação, escrevendo $+$ quer se trate da adição em $\mathbb{K}$ quer se trate da adição de vetores e escrevemos $\cdot$ quer seja a multiplicação em $\mathbb{K}$ quer o produto de um escalar por um vetor.
- Para cada $x \in V$, ao elemento x' determinado na condição (V_4), chama-se ***simétrico de*** x e representa-se por $-x$.

Exemplo

Seja $n \in \mathbb{N}$. O conjunto

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) : x_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1, 2, ..., n\},$$

dos n-úplos ordenados de elementos de $\mathbb{R}$, algebrizado com as aplicações $+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definidas, respectivamente, por:

- $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$,
  para todos $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$,
- $\alpha \cdot x = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n)$,
  para todos $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$,

é um espaço vetorial real.

Exemplo

O conjunto $\mathbb{R}_2[x] = \{ax^2 + bx + c : a, b, c \in \mathbb{R}\}$ *dos polinómios, na indeterminada* x *e com coeficientes reais, que têm grau menor ou igual a 2, algebrizado com as operações* $+ : \mathbb{R}_2[x] \times \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ *e* $\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$*, definidas, respetivamente, por*

- $(a_1x^2 + b_1x + c_1) + (a_2x^2 + b_2x_2 + c_2) = (a_1 + a_2)x^2 + (b_1 + b_2)x + (c_1 + c_2)$, *para quaisquer* $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$,
- $\alpha \cdot (ax^2 + bx + c) = (\alpha a)x^2 + (\alpha b)x + \alpha c$, *para quaisquer* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$.

é um espaço vetorial real.

Exemplo

O conjunto $\mathbb{R}[x]$ *de todos os polinómios na ideterminada* x *e de coeficientes reais, com a adição usual de polinómios e a multiplicação de um número real por um polinómio, é um espaço vetorial real.*

Exemplo

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. *O conjunto* $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, *das matrizes reais de ordem* $m \times n$, *algebrizado com a adição de matrizes e a multiplicação de um real por uma matriz, é um espaço vetorial real.*

Exemplo

O conjunto $\mathbb{R}$*, juntamente com as aplicações* $\widetilde{+} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e* $\widetilde{\cdot} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definidas por*

$$x \widetilde{+} y = x + y - 3, \text{ para quaisquer } x, y \in \mathbb{R},$$

$$\lambda \widetilde{\cdot} x = \lambda(x - 3) + 3, \text{ para quaisquer } x, \lambda \in \mathbb{R},$$

é um espaço vetorial real.

A partir das propriedades satisfeitas por um espaço vetorial é possível deduzir outras propriedades. Apresentam-se seguidamente algumas dessas propriedades.

Teorema

Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Então, para quaisquer $x, y \in V$ e para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, tem-se

i) $\alpha \cdot 0_V = 0_V$;

ii) $0_{\mathbb{K}} \cdot x = 0_V$;

iii) *se* $\alpha \cdot x = 0_V$, *então* $\alpha = 0_{\mathbb{K}} \quad ou \quad x = 0_V$;

iv) $(-\alpha) \cdot x = -(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot (-x)$;

v) $\alpha(x - y) = \alpha x - \alpha y$;

vi) $(\alpha - \beta)x = \alpha x - \beta x$.

Demonstração.

Demonstramos as propriedades *i)* a *iv)*, deixando a prova das restantes propriedades como exercício.
i) Pelas condições (V_3) e (V_5) da definição de espaço vetorial, tem-se

$$\alpha \cdot 0_V = \alpha \cdot (0_V + 0_V) = \alpha \cdot 0_V + \alpha \cdot 0_V.$$

Por (V_4) é garantida a existência do elemento $-\alpha 0_V$. Adicionando este elemento a ambos os lados da igualdade $\alpha \cdot 0_V = \alpha \cdot 0_V + \alpha \cdot 0_V$, segue que

$$\alpha 0_V + (-\alpha 0_V) = (\alpha 0_V + \alpha 0_V) + (-\alpha 0_V),$$

donde, por (V_2), se obtem

$$\alpha 0_V + (-\alpha 0_V) = \alpha 0_V + (\alpha 0_V + (-\alpha 0_V)).$$

Então, por (V_4) e por (V_3),

$$0_V = \alpha 0_V + 0_V = \alpha 0_V.$$

Demonstração.

ii) Pela condição (C_3) da definição de corpo e pela propriedade (V_6) da definição de espaço vetorial, tem-se

$$0_{\mathbb{K}} \cdot x = (0_{\mathbb{K}} + 0_{\mathbb{K}}) \cdot x = 0_{\mathbb{K}} \cdot x + 0_{\mathbb{K}} \cdot x.$$

Somando $-(0_{\mathbb{K}} \cdot x)$ de ambos os lados da igualdade $0_{\mathbb{K}} \cdot x = 0_{\mathbb{K}} \cdot x + 0_{\mathbb{K}} \cdot x$, obtem-se

$$-(0_{\mathbb{K}} \cdot x) + 0_{\mathbb{K}} \cdot x = -(0_{\mathbb{K}} \cdot x) + (0_{\mathbb{K}} \cdot x + 0_{\mathbb{K}} \cdot x)$$

Por (V_6) segue que

$$-(0_{\mathbb{K}} \cdot x) + 0_{\mathbb{K}} \cdot x = (-(0_{\mathbb{K}} \cdot x) + 0_{\mathbb{K}} \cdot x) + 0_{\mathbb{K}} \cdot x$$

e, por (V_3) e (V_4), resulta que

$$0_V = 0_V + 0_{\mathbb{K}} \cdot x = 0_{\mathbb{K}} \cdot x.$$

Demonstração (continuação).

iii) Admitamos que $\alpha \cdot x = 0_V$ e que $\alpha \neq 0_{\mathbb{K}}$. Como $\alpha \neq 0_{\mathbb{K}}$ existe $\alpha^{-1} \in \mathbb{K}$ e por (V_8), (V_7) e $i)$ segue que

$$x = 1_{\mathbb{K}} \cdot x = \left(\alpha^{-1}\alpha\right) \cdot x = \alpha^{-1} \cdot (\alpha \cdot x) = \alpha^{-1} \cdot 0_V = 0_V.$$

Demonstração (continuação).

iv) Por (V_6) e ii), temos

$$\alpha \cdot x + (-\alpha) \cdot x = (\alpha + (-\alpha)) \cdot x = 0_{\mathbb{K}} \cdot x = 0_V,$$

pelo que $(-\alpha) \cdot x$ é o simétrico de $\alpha \cdot x$ em V, i.e., $-(\alpha \cdot x) = (-\alpha) \cdot x$.

Agora, por (V_5), (V_4) e i), tem-se

$$\alpha \cdot x + \alpha \cdot (-x) = \alpha \cdot (x + (-x)) = \alpha \cdot 0_V = 0_V$$

e, portanto, $\alpha \cdot (-x)$ é o simétrico de $\alpha \cdot x$ em V, i.e.,
$-(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot (-x)$. $\square$

Subespaços vetoriais

Definição

*Sejam $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ um espaço vetorial e U um subconjunto de V. Diz-se que U é um **subespaço vetorial** de V, e escreve-se $U \leq V$, se:*

1) $\forall_{x,y \in U}, x + y \in U$;
2) $\forall_{x \in U}, \forall_{\alpha \in \mathbb{K}}, \alpha \cdot x \in U$;
3) U, *com as aplicações*

$$\begin{array}{rcl} \widehat{+} : U \times U & \to & U \\ (x, y) & \mapsto & x + y \end{array} \quad e \quad \begin{array}{rcl} \widehat{\cdot} : \mathbb{K} \times U & \to & U \\ (\alpha, x) & \mapsto & \alpha \cdot x \end{array},$$

é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$.

Dado um espaço vetorial V sobre $\mathbb{K}$ existem critérios que permitem caracterizar os subconjuntos de V que são subespaços vetoriais.

Teorema

Sejam $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ um espaço vetorial e U um subconjunto de V. Então U é um subespaço vetorial de V se e só se são satisfeitas as seguintes condições:

1') $U \neq \emptyset$;

2') $\forall_{x,y \in U},\ x + y \in U$;

3') $\forall_{x \in U},\ \forall_{\alpha \in \mathbb{K}},\ \alpha \cdot x \in U$.

Demonstração.

Suponha-se que U é um subespaço vetorial de V.

Então U satisfaz as condições 1) e 2), pelo que as condições 2') e 3') são, obviamente, satisfeitas.

Assim, resta mostrar 1'). Como U é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ quando algebrizado com as aplicações $\widehat{+}$ e $\widehat{\cdot}$, existe $0_U \in U$ tal que, para todo $x \in U$, $x \widehat{+} 0_U = x = 0_U \widehat{+} x$. Assim, tem-se $U \neq \emptyset$.

Logo, as condições 1'), 2') e 3') são satisfeitas.

Demonstração (continuação).

Reciprocamente, suponhamos que U é um subconjunto de V que satisfaz as condições 1'), 2') e 3').

Então, por 2') e 3'), é imediato que as condições 1) e 2) são satisfeitas e $\widehat{+}$ e $\widehat{\cdot}$ são aplicações.

Vejamos, agora, que U juntamente com estas aplicações é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$.

Uma vez que $U \subseteq V$ e que as operações de U são as operações de V restringidas a elementos de U, é óbvio que U satisfaz propriedades análogas às propriedades V_1), V_2), V_5), V_6), V_7) e V_8).

Resta, então, mostrar que, relativamente à operação $\widehat{+}$, existe elemento neutro e que todo o elemento de U tem simétrico.

Demonstração (continuação).

Ora, como $U \neq \emptyset$, existe $x \in U$. Logo, por 3'), $-1_{\mathbb{K}} \cdot x = -x \in U$ e, por 2'), $x + (-x) = 0_V \in U$. Atendendo a que $U \subseteq V$, temos, para todo $x \in U$, $x \widehat{+} 0_V = x + 0_V = x = 0_V + x = 0_V \widehat{+} x$, e, portanto, 0_V é elemento neutro para a operação $\widehat{+}$.

Uma vez que, para todo $x \in U$, $-x \in U$ e $x \widehat{+} (-x) = 0_V = (-x) \widehat{+} x$, concluímos que para todo o vetor de U existe um elemento em U que é o seu simétrico relativamente à operação $\widehat{+}$. $\square$

Observação: Note-se que, nesta demonstação, verificou-se que o vetor nulo de um espaço vetorial V tem de pertencer a qualquer subespaço vetorial de V. Caso um subconjunto de V não contenha o vetor nulo de V, ele não poderá ser um subespaço. De facto, o teorema anterior pode ser enunciado de forma equivalente substituindo a condição $U \neq \emptyset$ por $0_V \in U$.

Exemplo

O conjunto $W = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0\right\}$ *é subespaço vetorial do espaço vetorial real* $\mathbb{R}^2$*. De facto,*

i) $W \subseteq \mathbb{R}^2$*;*

ii) $(0, 0) \in W$*, pelo que* $W \neq \emptyset$*;*

iii) dados $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in W$*, temos* $x, y \in \mathbb{R}^2$ *e* $x_2 = 0$ *e* $y_2 = 0$*, pelo que* $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \in \mathbb{R}^2$ *e* $x_2 + y_2 = 0 + 0 = 0$ *e, portanto,*

$$x + y \in W;$$

iv) dados $x = (x_1, x_2) \in W$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$*, temos* $x \in \mathbb{R}^2$ *e* $x_2 = 0$*, pelo que* $\alpha \cdot x = (\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot x_2) \in \mathbb{R}^2$ *e* $\alpha \cdot x_2 = \alpha \cdot 0 = 0$ *e, portanto,*

$$\alpha \cdot x \in W.$$

Exemplo

O conjunto $W = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0\}$ *é subespaço vetorial do espaço vetorial real* $\mathbb{R}^2$*. De facto,*

i) $W \subseteq \mathbb{R}^2$*;*

ii) $(0,0) \in W$*, pelo que* $W \neq \emptyset$*;*

iii) dados $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in W$*, temos* $x, y \in \mathbb{R}^2$ *e* $x_2 = 0$ *e* $y_2 = 0$*, pelo que* $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \in \mathbb{R}^2$ *e* $x_2 + y_2 = 0 + 0 = 0$ *e, portanto,*

$$x + y \in W;$$

iv) dados $x = (x_1, x_2) \in W$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$*, temos* $x \in \mathbb{R}^2$ *e* $x_2 = 0$*, pelo que* $\alpha \cdot x = (\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot x_2) \in \mathbb{R}^2$ *e* $\alpha \cdot x_2 = \alpha \cdot 0 = 0$ *e, portanto,*

$$\alpha \cdot x \in W.$$

Exemplo

O conjunto $W = \{ax^2 + bx + c : a, b \in \mathbb{R} \text{ e } c = 0\}$ *é subespaço vetorial do espaço vetorial real* $\mathbb{R}_2[x]$. *De facto,*

i) $W \subseteq \mathbb{R}_2[x]$;

ii) $0x^2 + 0x + 0 \in W$, *pelo que* $W \neq \emptyset$;

iii) dados $a_1x^2 + b_1x + c_1, a_2x^2 + b_2x + c_2 \in W$, *temos* $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$, $c_1 = 0$ *e* $c_2 = 0$, *pelo que* $a_1 + a_2 \in \mathbb{R}$, $b_1 + b_2 \in \mathbb{R}$, $c_2 + c_2 = 0 + 0 = 0$ *e, portanto,*

$$(a_1x^2+b_1x+c_1)+(a_2x^2+b_2x+c_2) = (a_1+a_2)x^2+(b_1+b_2)x+(c_1+c_2) \in W;$$

iv) dados $ax^2 + bx + c \in W$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$, *temos* $a, b \in \mathbb{R}$ *e* $c = 0$, *donde* $\alpha a, \alpha b \in \mathbb{R}$ *e* $\alpha c = 0$. *Portanto,*

$$\alpha \cdot (ax^2 + bx + c) = (\alpha a)x^2 + (\alpha b)x + \alpha c \in W.$$

Exemplo

O conjunto $W = \{ax^2 + bx + c : a, b \in \mathbb{R} \text{ e } c = 0\}$ *é subespaço vetorial do espaço vetorial real* $\mathbb{R}_2[x]$. *De facto,*

i) $W \subseteq \mathbb{R}_2[x]$;

ii) $0x^2 + 0x + 0 \in W$, *pelo que* $W \neq \emptyset$;

iii) dados $a_1x^2 + b_1x + c_1, a_2x^2 + b_2x + c_2 \in W$, *temos* $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$, $c_1 = 0$ *e* $c_2 = 0$, *pelo que* $a_1 + a_2 \in \mathbb{R}$, $b_1 + b_2 \in \mathbb{R}$, $c_2 + c_2 = 0 + 0 = 0$ *e, portanto,*

$$(a_1x^2+b_1x+c_1)+(a_2x^2+b_2x+c_2) = (a_1+a_2)x^2+(b_1+b_2)x+(c_1+c_2) \in W;$$

iv) dados $ax^2 + bx + c \in W$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$, *temos* $a, b \in \mathbb{R}$ *e* $c = 0$, *donde* $\alpha a, \alpha b \in \mathbb{R}$ *e* $\alpha c = 0$. *Portanto,*

$$\alpha \cdot (ax^2 + bx + c) = (\alpha a)x^2 + (\alpha b)x + \alpha c \in W.$$

Exemplo

Seja $n \in \mathbb{N}$. O conjunto

$$W = \{A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) : A \text{ é uma matriz diagonal}\}$$

é subespaço vetorial de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, pois

i) $W \subseteq \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$;

ii) $0_{n\times n} \in W$;

iii) para quaisquer $A, B \in W$, $A + B \in W$ (a soma de matrizes do tipo $n \times n$ diagonais é também matriz do tipo $n \times n$ diagonal);

iv) para quaisquer $A \in W$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha A \in W$ (se A é uma matriz do tipo $n \times n$ diagonal, a matriz αA também é do tipo $n \times n$ diagonal).

Exemplo

Seja $n \in \mathbb{N}$. *O conjunto*

$$W = \{A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) : A \text{ é uma matriz diagonal}\}$$

é subespaço vetorial de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, *pois*

i) $W \subseteq \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$;

ii) $0_{n\times n} \in W$;

iii) para quaisquer $A, B \in W$, $A + B \in W$ *(a soma de matrizes do tipo* $n \times n$ *diagonais é também matriz do tipo* $n \times n$ *diagonal);*

iv) para quaisquer $A \in W$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha A \in W$ *(se* A *é uma matriz do tipo* $n \times n$ *diagonal, a matriz* αA *também é do tipo* $n \times n$ *diagonal).*

Exemplo

O conjunto $W = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 2\right\}$ *não é subespaço vetorial do espaço vetorial real* $\mathbb{R}^2$*, pois existem* $x = (1, 2), y = (0, 2)$ *tais que* $x, y \in W$ *e* $x + y = (1, 4) \notin W$*.*

Exemplo

O conjunto $W = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 2\right\}$ *não é subespaço vetorial do espaço vetorial real* $\mathbb{R}^2$*, pois existem* $x = (1, 2), y = (0, 2)$ *tais que* $x, y \in W$ *e* $x + y = (1, 4) \notin W$*.*

Dado um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, vamos estudar formas de construir subespaços vetoriais a partir de outros subsespaços vetoriais dados.

Exemplo

No espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, consideremos os subespaços vetoriais

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\} \quad e \quad G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 2z\}.$$

Então

$$\begin{aligned} F \cap G &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \in F \text{ e } (x, y, z) \in G\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0 \text{ e } y = 2z\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = -3z \text{ e } y = 2z\} \\ &= \{(-3z, 2z, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

e é simples verificar que $F \cap G$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

Teorema

Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e U, W subespaços vetoriais de V. Então $U \cap W$ é um subespaço vetorial de V.

Demonstração.

Provemos, recorrendo ao critério de subespaço, que $U \cap W$ é subespaço vetorial de V.

i) Tem-se $W, U \subseteq V$, pois W e U são subespaços vetorias de V. Logo, $U \cap W \subseteq V$.

ii) Uma vez que U e W são subespaços vetorais de V, tem-se $0_V \in U$ e $0_V \in W$. Logo, $0_V \in U \cap W$ e, portanto, $U \cap W \neq \varnothing$.

Teorema

Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e U, W subespaços vetoriais de V. Então $U \cap W$ é um subespaço vetorial de V.

Demonstração.

Provemos, recorrendo ao critério de subespaço, que $U \cap W$ é subespaço vetorial de V.

i) Tem-se $W, U \subseteq V$, pois W e U são subespaços vetorias de V. Logo, $U \cap W \subseteq V$.

ii) Uma vez que U e W são subespaços vetorais de V, tem-se $0_V \in U$ e $0_V \in W$. Logo, $0_V \in U \cap W$ e, portanto, $U \cap W \neq \varnothing$.

Demonstração.

iii) Sejam $x, y \in U \cap W$. Então $x, y \in U$ e $x, y \in W$. Logo, $x + y \in U$ e $x + y \in W$, uma vez que U e W são subespaços vetoriais de V. Assim, $x + y \in U \cap W$.

iv) Sejam $x \in U \cap W$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. Então $x \in U$, $x \in W$ e, atendendo a que U e W são subespaços vetoriais de V, tem-se $\alpha \cdot x \in U$ e $\alpha \cdot x \in W$. Logo, $\alpha \cdot x \in U \cap W$.

De *i)*, *ii)*, *iii)* e *iv)* conclui-se que $U \cap W$ é subespaço vetorial de V.

Generalizando o resutado anterior, prova-se o seguinte

Teorema

Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Se $\{S_i : i \in I\}$ é uma família não vazia de subespaços vetoriais de V, então $\bigcap_{i \in I} S_i$ é subespaço vetorial de V.

Na sequência dos resultados anteriores, coloca-se a questão se a união de dois subespaços vetoriais de um espaço vetorial V também será um subespaço vetorial de V.

Exemplo

Consideremos, novamente, os subespaços vetoriais

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\} \quad G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 2z\}$$

do espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$. *Então*

$$F \cup G \quad = \quad \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \in F \text{ ou } (x, y, z) \in G\}$$

Facilmente se verifica que $F \cup G$ *não é um subespaço vetorial de* $\mathbb{R}^3$, *uma vez que* $(2, 0, -2) \in F \subseteq F \cup G$, $(0, 4, 2) \in G \subseteq F \cup G$, *mas*

$$(2, 0, -2) + (0, 4, 2) = (2, 4, 0) \notin F \cup G.$$

Como mostra o exemplo anterior, a união de dois subespaços vetoriais de um espaço vetorial V nem sempre é um subespaço vetorial e tal só se verifica nas condições seguintes.

Teorema

Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e U, W subespaços vetoriais de V. Então $U \cup W$ é um subespaço vetorial de V se e só se $U \subseteq W$ ou $W \subseteq U$.

Demonstração.

Suponhamos que $U \subseteq W$ ou que $W \subseteq U$. Então $U \cup W = W$ ou $U \cup W = U$, respectivamente. Logo, $U \cup W$ é um subespaço vetorial de V.

Teorema

Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e U, W subespaços vetoriais de V. Então $U \cup W$ é um subespaço vetorial de V se e só se $U \subseteq W$ ou $W \subseteq U$.

Demonstração.

Suponhamos que $U \subseteq W$ ou que $W \subseteq U$. Então $U \cup W = W$ ou $U \cup W = U$, respectivamente. Logo, $U \cup W$ é um subespaço vetorial de V.

Demonstração (continuação.)

Reciprocamente, admitamos que $U \cup W$ é um subespaço vetorial de V e mostremos que $U \subseteq W$ ou $W \subseteq U$.

No sentido de fazermos esta prova, admitamos que $U \nsubseteq W$. Então existe $u \in U$ tal que $u \notin W$. Como $u \in U$, então $u \in U \cup W$.

Para todo $w \in W$, também temos $w \in U \cup W$.

Como $U \cup W$ é um subespaço vetorial de V, segue que $w + u \in U \cup W$.

Logo, $w + u \in U$ ou $w + u \in W$.

Como $-u \in U$ e $-w \in W$, resulta que $(w + u) + (-u) \in U$ ou $(-w) + (w + u) \in W$, ou seja, $w \in U$ ou $u \in W$.

Atendendo a que $u \notin W$, temos, então, $w \in U$.

Fica assim provado que todo o elemento de W é também elemento de U, ou seja, provou-se que $W \subseteq U$.

Definição

Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e U, W subespaços vetoriais de V. Designa-se por ***soma dos subespaços*** *U e W, e representa-se por $U+W$, o conjunto $\{u+w : u \in U \text{ e } w \in W\}$.*

Observação:

- Se U e W são subespaços vetoriais de um espaço vetorial V, então $U \subseteq U + W$. Com efeito, se W é subespaço vetorial de V, tem-se $0_V \in W$. Então, considerando que, para todo $u \in U$, $u = u + 0_V$, temos $u \in U + W$. Assim, fica provado que $U \subseteq U + W$. De modo análogo, prova-se que $W \subseteq U + W$.
- Da definição de soma de susbespaços vetoriais e da comutatividade da adição de vetores também é imediato que, sendo U e W subespaços vetoriais de um espaço vetorial V, temos $U + W = W + U$.

Exemplo

Consideremos, no espaço vetorial real $\mathbb{R}^4$*, os subespaços*

$$\begin{aligned} S &= \{(s,t,u,v) \in \mathbb{R}^4 : s = 0, u = 0\}, \\ U &= \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : b + d = 0 \text{ e } b - d = 0\}, \\ W &= \{(x,0,y,2x) \in \mathbb{R}^4 : x, y \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Então

$$S = \{(0,t,0,v) \in \mathbb{R}^4 : t, v \in \mathbb{R}\} \text{ e } U = \{(a,0,c,0) \in \mathbb{R}^4 : a, c \in \mathbb{R}\}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} U + S &= \{(a,t,c,v) \in \mathbb{R}^4 : a, c, t, v \in \mathbb{R}\}, \\ U + W &= \{(x+a, 0, y+c, 2x) \in \mathbb{R}^4 : a, c, x, y \in \mathbb{R}\}, \\ S + W &= \{(x,t,y,v+2x) \in \mathbb{R}^4 : x, t, v, y \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Facilmente se verifica que qualquer um destes conjuntos é um subespaço vetorial do espaço vetorial real $\mathbb{R}^4$*.*

Teorema

Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e U, W subespaços vetoriais de V. Então $U + W$ é um subespaço vetorial de V.

Demonstração. Exercício.

Definição

Sejam V *um espaço vetorial sobre* $\mathbb{K}$ *e* U, W *subespaços vetoriais de* V.
Diz-se que $U + W$ *é uma* ***soma direta*** *se* $U \cap W = \{0_V\}$.
Diz-se que V *é soma direta de* U *e* W, *e escreve-se* $V = U \oplus W$, *se* $V = U + W$ *e a soma* $U + W$ *é direta.*
Caso V *seja soma direta de* U *e* V, *diz-se que* U *é* ***suplementar*** *de* W *relativamente a* V *(e que* W *é suplementar de* U *relativamente a* V *ou que* U *e* W *são suplementares).*

Exemplo

Consideremos o espaço vetorial real $\mathbb{R}^4$ *e os subespaços*

$$\begin{aligned}
S &= \{(s,t,u,v) \in \mathbb{R}^4 : s = 0, u = 0\}, \\
U &= \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : b + d = 0 \ e \ b - d = 0\}, \\
W &= \{(x,0,y,2x) \in \mathbb{R}^4 : x, y \in \mathbb{R}\}.
\end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}
S \cap U &= \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x = 0, z = 0, y - w = 0, y + w = 0\} \\
&= \{(0,0,0,0)\}, \\
U \cap W &= \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : b + d = 0, b - d = 0, b = 0, d = 2a\} \\
&= \{(0,0,c,0) \,|\, c \in \mathbb{R}\}, \\
S \cap W &= \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : a = 0, c = 0, b = 0, d = 2a\} \\
&= \{(0,0,0,0)\}.
\end{aligned}$$

Exemplo (continuação).

Logo, $U + W$ não é uma soma direta e $S + U$ e $S + W$ são somas diretas.

Uma vez que $S + W = \mathbb{R}^4$ e $S \cap W = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$, então $\mathbb{R}^4$ é soma direta de S e W; o espaço W é um suplementar de S relativamente a $\mathbb{R}^4$.

Atendendo a que $\mathbb{R}^4 \nsubseteq U + W$, pois $(0, 1, 0, 0) \notin U + W$, concluímos que $\mathbb{R}^4$ não é soma direta de U e W.

Como podemos verificar no exemplo que se segue, existem subespaços de espaços vetoriais V que admitem mais do que um suplementar relativamente a V.

Exemplo

Consideremos no espaço vetorial complexo $\mathbb{C}^3$, os subespaços

$$\begin{array}{rcl} W_1 & = & \{(a,b,c) \in \mathbb{C}^3 : b = c = 0\}, \\ W_2 & = & \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 : x = 0\}, \\ W_3 & = & \{(s,t,u) \in \mathbb{C}^3 : s = t\}. \end{array}$$

Tem-se $\mathbb{C}^3 = W_1 \oplus W_2$ e $\mathbb{C}^3 = W_1 \oplus W_3$ e $W_2 \neq W_3$.

Teorema

Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e U, W subespaços vetoriais de V. Então:

i) *V é soma direta de U e W se e só se cada vetor de V se escreve, de modo único, na forma $u + w$ com $u \in U$ e $w \in W$;*

ii) *V é soma direta de U e W se e só se $V = U + W$ e 0_V se escreve, de modo único, na forma $u + w$ com $u \in U$ e $w \in W$.*

Demonstração. Consultar notas da unidade curricular.

Definição

*Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ e W_1, W_2, ..., W_n subespaços vetoriais de V. Designa-se por **soma dos subespaços** W_1, W_2, ..., W_n, e representa-se por $W_1 + W_2 + \ldots + W_n$ o conjunto*

$$W_1 + W_2 + \ldots + W_n = \{x_1 + x_2 + \ldots + x_n : x_1 \in W_1, x_2 \in W_2, \ldots, x_n \in W_n\}.$$

*Diz-se que $W_1 + W_2 + \ldots + W_n$ é uma **soma direta** se*

$$W_i \cap (W_1 + \ldots + W_{i-1} + W_{i+1} + \ldots + W_n) = \{0_V\}, \text{ para todo } i \in \{1, \ldots, n\}.$$

*Diz-se que V **é soma direta** de W_1, W_2, ..., W_n, e escreve-se*

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_n,$$

se

i) $V = W_1 + W_2 + \ldots + W_n$;

ii) $W_1 + W_2 + \ldots + W_n$ *é uma soma direta.*

Os dois últimos resultados podem também ser generalizados a somas de mais de dois subespaços.

Teorema

Sejam V *um espaço vetorial sobre* $\mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ *e* $W_1, W_2, \ldots, W_n$ *subespaços vetoriais de* V. *Então* $W_1 + W_2 + \ldots + W_n$ *é um subespaço vetorial de* V.

Teorema

Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ e W_1, W_2, ..., W_n subespaços vetoriais de V. Então são equivalentes as três afirmações seguintes:

i) *V é soma direta de W_1, W_2, ..., W_n.*

ii) *$V = W_1 + W_2 + \ldots + W_n$ e cada elemento de V escreve-se, de modo único, na forma $w_1 + w_2 + \ldots + w_n$ com $w_1 \in W_1$, $w_2 \in W_2$, ..., $w_n \in W_n$.*

iii) *$V = W_1 + W_2 + \ldots + W_n$ e o vetor 0_V escreve-se, de modo único, na forma $w_1 + w_2 + \ldots + w_n$ com $w_1 \in W_1$, $w_2 \in W_2$, ..., $w_n \in W_n$.*

Combinação linear de vetores

Definição

Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e S um subconjunto não vazio de V. Diz-se que:

- *$v \in V$ é **combinação linear dos elementos** $v_1, v_2, ..., v_n \in V$, $n \in \mathbb{N}$, se existem escalares $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{K}$ tais que*

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot v_i = \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + ... + \alpha_n \cdot v_n.$$

  *Neste caso, aos escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ dá-se a designação de **coeficientes** da combinação linear;*

- *$v \in V$ é **combinação linear de elementos de S** se existem v_1, v_2, ..., $v_n \in S$ tais que v é combinação linear destes elementos.*

Exemplo

No espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$*, consideremos os vetores* $v_1 = (1, 2, 0)$*,* $v_2 = (-2, 3, 4)$ *e* $v_3 = (-1, 12, 8)$*. O vetor* v_3 *é combinação linear de* v_1 *e* v_2*, pois*

$$(-1, 12, 8) = 3 \cdot (1, 2, 0) + 2 \cdot (-2, 3, 4).$$

Exemplo

No espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$*, consideremos os vetores* $v_1 = (1, 2, 0)$*,* $v_2 = (-2, 3, 0)$ *e* $v_3 = (-1, 2, 2)$*. O vetor* v_3 *não é combinação linear de* v_1 *e* v_2*, pois*

$$(-1, 2, 2) \neq \alpha \cdot (1, 2, 0) + \beta \cdot (-2, 3, 0), \ \textit{para quaisquer } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Exemplo

No espaço vetorial real $\mathbb{R}^n$*, temos*

$$(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1 \cdot (1, 0, ..., 0) + x_2 \cdot (0, 1, 0, ..., 0) + \cdots + x_n \cdot (0, ..., 0, 1),$$

para qualquer $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$*. Assim, qualquer vetor de* $\mathbb{R}^n$ *é combinação linear dos vetores*

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, ..., 0) \\ e_2 &= (0, 1, 0, ..., 0) \\ &\vdots \\ e_n &= (0, 0, ..., 0, 1). \end{aligned}$$

Exemplo

No espaço vetorial real $\mathbb{R}^2$*, todo o vetor* (x, y) *é combinação linear dos vetores* $(1, 0)$, $(0, 1)$ *e* $(1, 1)$*, uma vez que*

$$(x, y) = (x - 1) \cdot (1, 0) + (y - 1) \cdot (0, 1) + 1 \cdot (1, 1) .$$

Exemplo

No espaço vetorial $\mathbb{R}_2[x]$*, todo o vetor* $ax^2 + bx + c$ *é combinação linear dos vetores* $x^2 = 1x^2 + 0x + 0$*,* $x = 0x^2 + 1x + 0$ *e* $1 = 0x^2 + 0x + 1$*, pois*

$$ax^2 + bx + c = a \cdot x^2 + b \cdot x + c \cdot 1.$$

Exemplo

No espaço vetorial $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$*, todo o vetor* $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *é combinação linear dos vetores*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

uma vez que

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Subespaço gerado por um conjunto de vetores

Teorema

Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e S um subconjunto não vazio de V. Então,

i) *o conjunto*

$$W = \{x : x \text{ é combinação linear de elementos de } S\}$$

é um subespaço vetorial de V;

ii) $S \subseteq W$;

iii) *W é o menor subespaço vetorial de V que contém S.*

Demonstração:

Sejam V, S e W conjuntos nas condições indicadas no enunciado do teorema.

i) Nestas condições prova-se que W é subespaço vetorial de V. De facto,

a) Uma vez que $S \subseteq V$ e V é espaço vetorial, toda a combinação linear de elementos de S é um elemento de V, ou seja, todo o elemento de W é também elemento de V. Logo, $W \subseteq V$.

b) Dado que $S \neq \emptyset$, existe $x \in S$. Então, como $0_V = 0_{\mathbb{K}} \cdot x$, tem-se que 0_V é combinação linear de elementos de S. Logo, $0_V \in W$ e, portanto, $W \neq \emptyset$.

Demonstração (continuação):

c) Sejam $x, y \in W$. Então existem $x_1, x_2, ..., x_n$, $y_1, y_2, ..., y_m \in S$ e $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m \in \mathbb{K}$ tais que

$x = \alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + ... + \alpha_n \cdot x_n$ e $y = \beta_1 \cdot y_1 + \beta_2 \cdot y_2 + ... + \beta_m \cdot y_m$.

Assim,

$$x + y = \alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + ... + \alpha_n \cdot x_n + \beta_1 \cdot y_1 + \beta_2 \cdot y_2 + ... + \beta_m \cdot y_m,$$

i.e., $x + y$ é combinação linear de $n + m$ elementos de S. Portanto, $x + y \in W$.

Demonstração (continuação):

d) Sejam $\alpha \in \mathbb{K}$ e $x \in W$. Dado que $x \in W$, existem $x_1, x_2, ..., x_n \in S$ e $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{K}$ tais que $x = \alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + ... + \alpha_n \cdot x_n$.

Então,

$$\begin{aligned} \alpha \cdot x &= \alpha \cdot (\alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + ... + \alpha_n \cdot x_n) \\ &= (\alpha\alpha_1) \cdot x_1 + (\alpha\alpha_2) \cdot x_2 + ... + (\alpha\alpha_n) \cdot x_n, \end{aligned}$$

com $\alpha\alpha_1, \alpha\alpha_2, \ldots \alpha\alpha_n \in \mathbb{K}$. Portanto, $\alpha \cdot x$ é combinação linear de elementos de S, pelo que $\alpha \cdot x \in W$.

De a), b), c) e d), conclui-se que W é subespaço vetorial de V.

Demonstração (continuação):

ii) Para todo $x \in S$, $x = 1_{\mathbb{K}} \cdot x$ e, portanto, $x \in W$. Logo, $S \subseteq W$.

iii) Pretendemos mostrar que se U é um subespaço de V tal que $S \subseteq U$, então $W \subseteq U$. De facto, dado $x \in W$, existem $x_1, x_2, ..., x_n \in S$ e $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{K}$ tais que

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n.$$

Então, se admitirmos que U é um subespaço vetorial de V tal que $S \subseteq U$, temos $x_1, x_2, ..., x_n \in U$ e, consequentemente, $w \in U$. Logo, $W \subseteq U$. $\square$

Definição

Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e S um subconjunto não vazio de V. Ao subespaço vetorial de V definido por

$$W = \{x \in V : x \text{ é combinação linear de elementos de } S\}$$

*chama-se **subespaço de** V **gerado por** S, e representa-se por $\langle S \rangle$. Ao conjunto S chamamos **conjunto gerador** de W.*

Convenciona-se que $\langle \emptyset \rangle = \{0_V\}$.

Notação: Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Se S é um subconjunto de V tal que $S = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, onde $n \in \mathbb{N}$, pode-se representar o subespaço gerado por S por $\langle x_1, x_2, ..., x_n \rangle$ em vez de $\langle \{x_1, x_2, ..., x_n\} \rangle$.

Definição

Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e W um subespaço de V. Se W é gerado por um conjunto finito de vetores de V diz-se que o subespaço W ***é finitamente gerado****. Caso W seja gerado por um conjunto infinito de vetores de V diz-se que o subespaço W* ***é infinitamente gerado****.*

Exemplo

Considerando que todo o vetor de $\mathbb{R}^2$ *é combinação linear dos vetores* $(1,0)$, $(0,1)$ *e* $(1,1)$, *tem-se*

$$\mathbb{R}^2 = \langle (1,0), (0,1), (1,1) \rangle,$$

e portanto, $\mathbb{R}^2$ *é um subespaço vetorial finitamente gerado.*

Exemplo

Consideremos o espaço vetorial real $\mathbb{R}^n$ *e sejam*

$$e_1 = (1,0,0,...,0) \quad e_2 = (0,1,0,...,0) \quad \dots \quad e_n = (0,0,...,0,1).$$

Com base no exemplo indicado na página 50, podemos afirmar que

$$\mathbb{R}^n = \langle e_1, ..., e_n \rangle.$$

Exemplo

Considere-se, em $\mathbb{R}^3$*, o conjunto* $U = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x - y\right\}$*.*
Verifica-se facilmente que U *é um subespaço vetorial de* $\mathbb{R}^3$*. Uma vez que*

$$\begin{aligned} U &= \left\{(x, y, x - y) \in \mathbb{R}^3 : x, y \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{x \cdot (1, 0, 1) + y \cdot (0, 1, -1) \in \mathbb{R}^3 : x, y \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \langle (1, 0, 1), (0, 1, -1) \rangle , \end{aligned}$$

conclui-se que $\{(1, 0, 1), (0, 1, -1)\}$ *é um conjunto gerador de* U*.*

Exemplo

Do exemplo indicado na págin 52 podemos concluir que

$$\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Exemplo

Uma vez que todo o polinómio de grau menor ou igual a 2 é combinação linear dos vetores x^2, x e 1, temos

$$\mathbb{R}_2[x] = \left\langle x^2, x, 1 \right\rangle.$$

Teorema

Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e $v_1, ..., v_n, v \in V$ tais que v é combinação linear de $v_1, ..., v_n$. Então,

$$\langle v_1, ..., v_n, v \rangle = \langle v_1, ..., v_n \rangle .$$

Demonstração:

Sejam $U = \langle v_1, ..., v_n \rangle$ e $W = \langle v_1, ..., v_n, v \rangle$. Para provar a igualdade $U = W$, vamos mostrar que $U \subseteq W$ e $W \subseteq U$.

$(U \subseteq W)$: Do teorema anterior segue que $\{v_1, ..., v_n, v\} \subseteq W$. Logo, como U é o menor subespaço de V que contém $\{v_1, ..., v_n\}$ e W é um subespaço de V que também contém este conjunto, temos $U \subseteq W$.

$(W \subseteq U)$: Por hipótese, v é combinação linear de $v_1, ..., v_n$, pelo que $v \in U$. Logo, como $\{v_1, ..., v_n, v\} \subseteq U$ e W é o menor subespaço de V que contém este conjunto, temos $W \subseteq U$.

Teorema

Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, v_1,..., $v_n \in V$, α_1, ..., α_{i-1}, α_{i+1}, ..., $\alpha_n \in \mathbb{K}$ e $\alpha_i \in \mathbb{K} \setminus \{0_{\mathbb{K}}\}$. Então

$$\langle v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n \rangle = \langle v_1, \ldots, v_{i-1}, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j, v_{i+1}, \ldots, v_n \rangle.$$

Dependência e independência linear

Definição

*Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e $n \in \mathbb{N}$. Uma sequência $(v_1, ..., v_n)$ de vetores de V diz-se **linearmente independente** se, para quaisquer $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$,*

$$\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n = 0_V \Longrightarrow \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

*Caso contrário, isto é, se existirem escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ não todos nulos tais que $\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n = 0_V$, a sequência $(v_1, ..., v_n)$ diz-se **linearmente dependente**.*

Observação: Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$.

- Note-se que se v_1,...,v_n são vetores de V, então é sempre possível escrever 0_V como combinação linear destes vetores, pois $0_V = 0_{\mathbb{K}} \cdot v_1 + \ldots + 0_{\mathbb{K}} \cdot v_n$. Logo, a sequência $(v_1, \ldots, v_n)$ é linearmente independente se e só se $0_{\mathbb{K}} \cdot v_1 + \ldots + 0_{\mathbb{K}} \cdot v_n$ é a única forma de escrever 0_V como combinação linear de v_1,...,v_n.
- Se $v = 0_V$, então (v) é linearmente dependente pois $0_V = 1_{\mathbb{K}} \cdot 0_V$ e $1_{\mathbb{K}} \neq 0_{\mathbb{K}}$.
- Se $v \in V \setminus \{0_V\}$, é simples verificar que (v) é linearmente independente. De facto, dado $\alpha \in \mathbb{K}$, se $\alpha v = 0_V$, então $\alpha = 0_{\mathbb{K}}$ ou $v = 0_V$. Como, por hipótese, $v \neq 0_V$, então $\alpha = 0_{\mathbb{K}}$. Logo, (v) é linearmente independente.

Exemplo

No espaço vetorial real $\mathbb{R}^4$*, a sequência de vetores*

$$((1,0,0,0),(1,0,-1,1),(2,1,0,1))$$

é linearmente independente, pois, para quaisquer $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$*,*

$$\begin{aligned}
&\alpha(1,0,0,0)+\beta(1,0,-1,1)+\gamma(2,1,0,1)=(0,0,0,0)\\
&\Rightarrow(\alpha+\beta+2\gamma,\gamma,-\beta,\beta+\gamma)=(0,0,0,0)\\
&\Rightarrow\alpha+\beta+2\gamma=0,\gamma=0,-\beta=0,\beta+\gamma=0\\
&\Rightarrow\alpha=\beta=\gamma=0
\end{aligned}$$

Exemplo

No espaço vetorial real $\mathbb{R}^2$*, a sequência de vetores*

$$((1,0),(0,1),(1,1))$$

é linearmente dependente, pois

$$1\cdot(1,0)+1\cdot(0,1)+(-1)\cdot(1,1)=(0,0).$$

Note-se que o vetor nulo pode ser escrito como combinação linear dos três vetores indicados utilizando escalares não nulos.

Exemplo

No espaço vetorial real $\mathbb{R}^n$*, a sequência de vetores* $(e_1, ..., e_n)$*, onde cada* e_i *é o n-uplo cujo elemento na coordenada i é 1 e todos os outros elementos são zero, é linearmente independente. De facto,*

$$\begin{array}{ll} & \alpha_1 e_1 + ... + \alpha_n e_n = 0_{\mathbb{R}^n} \\ \Rightarrow & (\alpha_1, ..., \alpha_n) = (0, 0, ..., 0) \\ \Rightarrow & \alpha_1 = ... = \alpha_n = 0 \end{array}.$$

Exemplo

No espaço vetorial $\mathbb{R}_2[x]$*, a sequência* $(x^2, x, 1)$ *é linearmente independente, pois, para quaisquer* $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$*,*

$$\alpha \cdot x^2 + \beta \cdot x + \gamma \cdot 1 = 0x^2 + 0x + 0 \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

Exemplo

No espaço vetorial $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, *as matrizes*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

são linearmente independentes.

Teorema

Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}$ e $v_1, \ldots, v_n \in V$. A sequência de vetores $(v_1, \ldots, v_n)$ é linearmente independente se e só se qualquer combinação linear de $v_1, \ldots, v_n$ tem coeficientes únicos, i.e., se e só se, para quaisquer $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{K}$,

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \ldots + \alpha_n \cdot v_n = \beta_1 \cdot v_1 + \ldots + \beta_n \cdot v_n \Rightarrow \alpha_1 = \beta_1 \text{ e } \ldots \text{ e } \alpha_n = \beta_n.$$

Demonstração.

$\Rightarrow$) Admitamos que $(v_1, \ldots, v_n)$ é linearmente independente e que $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{K}$ são tais que

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \ldots + \alpha_n \cdot v_n = \beta_1 \cdot v_1 + \ldots + \beta_n \cdot v_n.$$

Então

$$(\alpha_1 - \beta_1) \cdot v_1 + \ldots + (\alpha_n - \beta_n) \cdot v_n = 0_V$$

e, uma vez que a sequência $(v_1, \ldots, v_n)$ é linearmente independente, desta igualdade resulta que

$$\alpha_1 - \beta_1 = 0_{\mathbb{K}},\ \ldots,\ \alpha_n - \beta_n = 0_{\mathbb{K}}$$

i.e.

$$\alpha_1 = \beta_1,\ \ldots,\ \alpha_n = \beta_n.$$

Demonstração (continuação).

$\Leftarrow$) Suponha-se que qualquer combinação linear dos vetores $v_1, \ldots, v_n$ tem coeficientes únicos i.e., para quaisquer $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n$,

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \ldots + \alpha_n \cdot v_n = \beta_1 \cdot v_1 + \ldots + \beta_n \cdot v_n \Rightarrow \alpha_1 = \beta_1 \text{ e } \ldots \text{ e } \alpha_n = \beta_n.$$

Então a sequência $(v_1, \ldots, v_n)$ é linearmente independente, pois, dados escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tais que

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \ldots + \alpha_n \cdot v_n = 0_V,$$

temos

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \ldots + \alpha_n \cdot v_n = 0_{\mathbb{K}} \cdot v_1 + \ldots + 0_{\mathbb{K}} \cdot v_n,$$

donde segue que $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0_{\mathbb{K}}$.

Teorema

Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ e $v_1, ..., v_n$ elementos de V. A sequência $(v_1, ..., v_n)$ é linearmente dependente se e só se existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que v_i é combinação linear de $v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n$.

Demonstração.

$\Rightarrow$) Sejam $v_1, ..., v_n$, com $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, vetores de V tais que $(v_1, \ldots, v_n)$ é linearmente dependente. Então existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tais que $\alpha_i \neq 0_{\mathbb{K}}$, para algum $i \in \{1, \ldots, n\}$, e

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n = 0_V.$$

Como $\alpha_i \neq 0_{\mathbb{K}}$, existe $\alpha_i^{-1} \in \mathbb{K}$ e da igualdade anterior resulta que

$$\alpha_i^{-1} \cdot (\alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_{i-1} \cdot v_{i-1} + \alpha_i \cdot v_i + \alpha_{i+1} \cdot v_{i+1} + \cdots + \alpha_n \cdot v_n) = \alpha_i^{-1} \cdot 0_V$$

i.e.,

$$\left(\alpha_i^{-1}\alpha_1\right) \cdot v_1 + \cdots + \left(\alpha_i^{-1}\alpha_{i-1}\right) \cdot v_{i-1} + v_i + \left(\alpha_i^{-1}\alpha_{i+1}\right) \cdot v_{i+1} + \cdots \left(\alpha_i^{-1}\alpha_n\right) \cdot v_n = 0_V.$$

Assim,

$$v_i = \left(-\alpha_i^{-1}\alpha_1\right) \cdot v_1 + \cdots + \left(-\alpha_i^{-1}\alpha_{i-1}\right) \cdot v_{i-1} + \left(-\alpha_i^{-1}\alpha_{i+1}\right) \cdot v_{i+1} + \left(-\alpha_i^{-1}\alpha_n\right) \cdot v_n,$$

Demonstração (continuação).

$\Leftarrow$) Suponhamos que existe $i \in \{1, \dots, n\}$ e $\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tais que

$$v_i = \alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_{i-1} \cdot v_{i-1} + \alpha_{i+1} \cdot v_{i+1} + \cdots + \alpha_n \cdot v_n.$$

Então,

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_{i-1} \cdot v_{i-1} + (-1_{\mathbb{K}}) \cdot v_i + \alpha_{i+1} \cdot v_{i+1} + \cdots + \alpha_n \cdot v_n = 0_V,$$

i.e.,

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \cdots \alpha_{i-1} \cdot v_{i-1} + \alpha_i \cdot v_i + \alpha_{i+1} \cdot v_{i+1} + \cdots + \alpha_n \cdot v_n = 0_V,$$

com $\alpha_i = -1_{\mathbb{K}} \neq 0_{\mathbb{K}}$. Logo, $(v_1, ..., v_n)$ é linearmente dependente.

Corolário

Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e $n \in \mathbb{N}$. Se $v_1, ..., v_n$ são vetores de V tais que $v_i = 0_V$, para algum $i \in \{1, ..., n\}$, então a sequência de vetores $(v_1, ..., v_n)$ é linearmente dependente.

Teorema

Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}$ e $v_1, ..., v_n, v$ vetores de V. São válidas as propriedades seguintes:

i) *se a sequência de vetores $(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n)$ é linearmente independente, então a sequência $(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n)$ também é linearmente independente;*

ii) *se a sequência de vetores $(v_1, \ldots, v_n)$ é linearmente dependente, então a sequência $(v_1, \ldots, v_n, v)$ também é linearmente dependente.*

iii) *se a sequência de vetores $(v_1, \ldots, v_n)$ é linearmente independente e a sequência $(v_1, \ldots, v_n, v)$ é linearmente dependente, então v é combinação linear dos vetores v_1, ..., v_n.*

Demonstração. Exercício.

Teorema (Teorema de Steinitz)
Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, U um subsepaço vetorial de V, $n, p \in \mathbb{N}$, e $S = \{u_1, ..., u_n\}$ e $W = \{w_1, \ldots, w_p\}$ subconjuntos de V com, respetivamente, n e p vetores.
Se $U =< S >$ e $w_1, \ldots, w_p$ são vetores de U tais que $(w_1, ..., w_p)$ é linearmente independente, então $p \leq n$ e é possível substituir p dos vetores de S por $w_1, ..., w_p$ de forma a obter um subconjunto S' de V tal que $U =< S' >$.

Demonstração. A prova pode ser feita por indução sobre p.

Exemplo

No espaço vetorial $\mathbb{R}^4$*, consideremos os vetores* $w_1 = (-2, 0, 0, 2)$, $w_2 = (1, 0, 2, -1)$, $u_1 = (0, 0, 0, 1)$, $u_2 = (0, 0, 1, 0)$, $u_3 = (1, 0, 0, 0)$*. Seja* U *o subespaço vetorial de* $\mathbb{R}^4$ *gerado por* $S = \{u_1, u_2, u_3\}$*, i.e.,* $U =< u_1, u_2, u_3 >$.
Tem-se

$$\begin{aligned} w_1 &= 2u_1 + 0u_2 + (-2)u_3, \\ w_2 &= (-1)u_1 + 2u_2 + 1u_3 \end{aligned}$$

e, portanto, w_1 *e* w_2 *são vetores de* U*. Além disso, é simples verificar que a sequência* (w_1, w_2) *é linearmente independente. Logo, pelo teorema anterior, é possível substituir dois dos vetores de* $S = \{u_1, u_2, u_3\}$ *por* w_1 *e* w_2 *de forma a obter um conjunto* S' *tal que* $U = \langle S' \rangle$*.*

Exemplo (continuação).

A substituição faz-se vetor a vetor seguindo o processo descrito na demonstração do referido teorema. Note-se, no entanto, que pode haver mais de uma maneira de efectuar a substituição e o conjunto S' obtido no final do processo pode não ser único. Porém, todo o conjunto S' obtido pelo processo indicado no teorema anterior gera o mesmo subespaço que o conjunto $\{u_1, u_2, u_3\}$. Vamos ver duas formas de efectuar essa substituição.

Exemplo (continuação).

1) Temos $w_1 = 2u_1 + 0u_2 + (-2)u_3$ *e* $2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$*, logo*

$$< u_1, u_2, u_3 >=< w_1, u_2, u_3 > .$$

Como w_2 *é combinação linear de* u_1, u_2, u_3*, então também é combinação linear de* w_1, u_2, u_3*. De facto, tem-se*

$$u_1 = \frac{1}{2} w_1 + 0u_2 + 1u_3,$$

pelo que

$$w_2 = (-1)u_1 + 2u_2 + 1u_3 = -\frac{1}{2} w_1 + 2u_2 + 0u_3$$

onde $2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$*. Então*

$$< w_1, u_2, u_3 >=< w_1, w_2, u_3 > .$$

Logo $U =< u_1, u_2, u_3 >=< w_1, w_2, u_3 >$*.*

Exemplo (continuação).

2) Uma vez que $w_1 = 2u_1 + 0u_2 + (-2)u_3$ *e* $-2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, *então*

$$< u_1, u_2, u_3 >=< u_1, u_2, w_1 > .$$

Como w_2 *é combinação linear de* u_1, u_2, u_3, *então também é combinação linear de* u_1, u_2, w_1. *De facto, como*

$$u_3 = 1u_1 + 0u_2 - \frac{1}{2}w_1,$$

segue que

$$w_2 = 0u_1 + 2u_2 - \frac{1}{2}w_1,$$

com $2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. *Logo*

$$< u_1, u_2, w_1 >=< u_1, w_2, w_1 >$$

e, portanto, $U =< u_1, u_2, u_3 >=< u_1, w_2, w_1 >$.

Teorema

Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, $n, p \in \mathbb{N}$ tais que $p \leq n$ e $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ e $W = \{w_1, \ldots, w_p\}$ subconjuntos de V com, respetivamente, n e p vetores e tais que as sequências $(v_1, \ldots, v_n)$ e $(w_1, \ldots, w_p)$ são linearmente independentes.
Se S' é um conjunto que se obtém de S substituindo p dos vetores de S por $w_1, \ldots, w_p$ e $< S' >=< S >$, então os vetores de S' são linearmente independentes.

Demonstração.

A prova pode ser feita por indução sobre p. $\square$

A definição de sequências de vetores linearmente independentes pode ser generalizada a sequências infinitas de vetores.

Definição

Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, I um conjunto infinito e $(v_i)_{i\in I}$ uma sequência de vetores de V. Diz-se que a sequência $(v_i)_{i\in I}$ é linearmente independente se, para cada $t \in \mathbb{N}$ e cada t elementos distintos $i_1, \ldots, i_t \in I$, $(v_{i_1}, \ldots, v_{i_t})$ é linearmente independente.

Bases e dimensão

Definição

*Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, I um conjunto e $(v_i)_{i\in I}$ uma sequência de vetores de V. Diz-se que a sequência $(v_i)_{i\in I}$ é uma **base** de V se:*

1) *a sequência $(v_i)_{i\in I}$ é linearmente independente;*
2) *$\bigcup_{i\in I}\{v_i\}$ é um conjunto gerador de V.*

Convenciona-se que $(v_i)_{i\in\emptyset}$ é a única base do espaço $\{0_V\}$.

Dado $n \in \mathbb{N}$, uma sequência $(v_1, \ldots, v_n)$ de vetores de um espaço vetorial V é uma base de V se $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é um conjunto gerador de V e a sequência $(v_1, \ldots, v_n)$ é linearmente independente.

Observação: Uma vez que uma base é definida como sendo uma sequência, duas bases com os mesmos elementos ordenados de forma diferente são distintas.

Definição

Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, $v \in V$ e $(v_1, \ldots, v_n)$ uma base de V. Chamam-se ***componentes*** *ou* ***coordenadas*** *de v na base $(v_1, \ldots, v_n)$ aos coeficientes $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ da combinação linear $v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$.*

Exemplo

Considerando o espaço vetorial $\mathbb{R}^n$*, a sequência* $(e_1, ..., e_n)$*, onde cada* e_i *é o n-uplo cujo elemento na coordenada i é 1 e todos os outros elementos são zero, é uma base de* V*. De facto, de exemplos anteriores sabemos que a sequência* $(e_1, ..., e_n)$ *é linearmente independente e que* $\{e_1, ..., e_n\}$ *é um conjunto gerador de* $\mathbb{R}^n$*. À base* $(e_1, \ldots, e_n)$ *dá-se a designação de* **base canónica** *de* $\mathbb{R}^n$*.*

Exemplo

De exemplos anteriores segue que $(x^2, x, 1)$ *é uma base do espaço vetorial real* $\mathbb{R}_2[x]$*.*

Exemplo

A sequência de matrizes

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

é uma base do espaço vetorial real $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exemplo

A sequência $((1,0),(0,1),(1,1))$ *não é uma base do espaço vetorial real* $\mathbb{R}^2$*, pois, embora* $\{((1,0),(0,1),(1,1)\}$ *seja um conjunto gerador de* $\mathbb{R}^2$*, a sequência* $((1,0),(0,1),(1,1))$ *é linearmente dependente.*

Teorema

Sejam V espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}$, e $(v_1, \dots, v_n)$ uma sequência de vetores de V. Então $(v_1, \dots, v_n)$ é uma base de V se e só se todo o elemento de V se escreve, de modo único, como combinação linear dos vetores $v_1, \dots, v_n$.

Demonstração.

$\Rightarrow$) Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $(v_1, \ldots, v_n)$ uma base de V. Seja $x \in V$. Como $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é um conjunto gerador de V, existem α_1, ..., $\alpha_n \in \mathbb{K}$ tais que $x = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$. Além disso, como a sequência $(v_1, \ldots, v_n)$ é linearmente independente, sabemos que x se escreve de modo único como combinação linear destes vetores. Logo, cada vetor de V escreve-se de modo único como combinação linear dos vetores $v_1, \ldots, v_n$.

$\Leftarrow$) Reciprocamente, suponha-se que cada vetor de V se escreve de modo único como combinação linear dos vetores $v_1, ..., v_n$. Então a sequência $(v_1, ..., v_n)$ é linearmente independente. Como todo o vetor de V se escreve como combinação linear destes vetores, também temos $V = \langle v_1, ..., v_n \rangle$. Logo, $(v_1, ..., v_n)$ é uma base de V. $\square$

Teorema

Sejam $V \neq \{0_V\}$ *um espaço vetorial sobre* $\mathbb{K}$ *e* S *um conjunto finito gerador de* V. *Então existem* $u_1, \ldots, u_p \in S$, $p \in \mathbb{N}$, *tais que* $(u_1, \ldots, u_p)$ *é uma base de* V.

Demonstração.

A prova é feita por indução no número de elementos do conjunto gerador. $\square$

Corolário

Todo o espaço vetorial finitamente gerado admite uma base.

Demonstração.

Caso $V = \{0_V\}$, então V admite uma base; por convenção $(v_i)_{i\in\emptyset}$ é uma base de $\{0_V\}$. Caso $V \neq \{0_V\}$, o resultado é imediato a partir do teorema anterior. $\square$

Exemplo

No espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$*, consideremos os vetores*

$u_1 = (-1, 0, 0), u_2 = (1, 0, 1), u_3 = (0, 0, 2), u_4 = (1, -1, 1), u_5 = (1, 1, 0).$

É simples verificar que $\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ *é um conjunto gerador de* $\mathbb{R}^3$*.*

De facto, dados $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ *e* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5 \in \mathbb{R}$*, tem-se*

$$(a, b, c) = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 + \lambda_4 u_4 + \lambda_5 u_5$$

se e só se

$$\left\{\begin{array}{lcl} \lambda_1 & = & -a + b + \lambda_2 + 2\lambda_4 \\ \lambda_3 & = & (c - \lambda_2 - \lambda_4)/2 \\ \lambda_5 & = & b + \lambda_4 \end{array}\right. .$$

Assim, $(a, b, c) =$
$(-a + b + \lambda_2 + 2\lambda_4)u_1 + \lambda_2 u_2 + ((c - \lambda_2 - \lambda_4)/2)u_3 + \lambda_4 u_4 + (b + \lambda_4)u_5.$

Exemplo (continuação).

Em particular,

$$(0,0,0) = (\lambda_2 + 2\lambda_4)u_1 + \lambda_2 u_2 + ((-\lambda_2 - \lambda_4)/2)u_3 + \lambda_4 u_4 + \lambda_4 u_5,$$

para quaisquer $\lambda_2, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ *e, portanto, a sequência* $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$ *é linearmente dependente. Tomando, por exemplo,* $\lambda_2 = -1$ *e* $\lambda_4 = 1$, *tem-se* $u_4 = -u_1 + u_2 + 0u_3 - u_5$, *pelo que*

$$< u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 >=< u_1, u_2, u_3, u_5 > .$$

Exemplo (continuação).

Agora, para quaisquer $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_5 \in \mathbb{R}$,

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 + \lambda_5 u_5 = (0,0,0) \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 & = & \lambda_2 \\ \lambda_3 & = & -(\lambda_2/2) \\ \lambda_5 & = & 0 \end{cases}$$

e, portanto, $(0,0,0) = \lambda_2 u_1 + \lambda_2 u_2 + (-\lambda_2/2) u_3 + 0 u_5$, *para todo* $\lambda_2 \in \mathbb{R}$. *Logo* (u_1, u_2, u_3, u_5) *é linearmente dependente.*

Exemplo (continuação).

Tomando, por exemplo, $\lambda_2 = 1$*, segue que*

$$u_1 = -u_2 + (1/2)u_3 + 0u_5,$$

pelo que

$$< u_1, u_2, u_3, u_5 >=< u_2, u_3, u_5 > .$$

Para quaisquer $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_5 \in \mathbb{R}$*,*

$$\lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 + \lambda_5 u_5 = (0, 0, 0) \Rightarrow \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_5 = 0.$$

Assim, a sequência (u_2, u_3, u_5) *é linearmente independente.*

Portanto, (u_2, u_3, u_5) *é uma base de* $\mathbb{R}^3$*.*

Teorema

Sejam $V \neq \{0_V\}$ *um espaço vetorial sobre* $\mathbb{K}$ *finitamente gerado,* $t \in \mathbb{N}$ *e* $(u_1, \ldots, u_t)$ *uma sequência de vetores de* V *linearmente independente. Então existe uma base de* V *da qual fazem parte os vetores* $u_1, \ldots, u_t$*.*

Demonstração.

Sejam $V \neq \{0_V\}$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ finitamente gerado, $t \in \mathbb{N}$ e $(u_1, \ldots, u_t)$ uma sequência de vetores de V linearmente independente. Sendo $V \neq \{0_V\}$ um espaço vetorial finitamente gerado, então admite uma base; seja $(v_1, \ldots, v_n)$, $n \in \mathbb{N}$, uma base de V. Então $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ é um conjunto gerador de V com n elementos distintos. Logo, temos $t \leq n$ e é possível substituir t dos elementos de S pelos vetores $u_1, \ldots, u_t$ de forma a obter um conjunto S' gerador de V.

Demonstração (continuação).

Se $t = n$, temos $S' = \{u_1, \ldots, u_t\}$ e, portanto, $(u_1, \ldots, u_t)$ é uma base de V.

Se $t < n$, suponhamos, sem perda de generalidade que

$$S' = \{u_1, \ldots, u_t, v_{t+1}, \ldots, v_n\}.$$

Uma vez que a sequência $(v_1, \ldots, v_n)$ é linearmente independente e $< S > = < S' >$, conclui-se que $(u_1, \ldots, u_t, v_{t+1}, \ldots, v_n)$ é linearmente independente.

Logo, $(u_1, \ldots, u_t, v_{t+1}, \ldots, v_n)$ é uma base de V. $\square$

Exemplo

Consideremos, no espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$*, os vetores* $u_1 = (0, 1, -1)$ *e* $u_2 = (1, -1, -1)$*.*

A sequência (u_1, u_2) *é linearmente independente, logo existe uma base de* $\mathbb{R}^3$ *da qual fazem parte estes vetores.*

Vamos determinar uma dessas bases seguindo o processo descrito na demonstração anterior.

Sendo $v_1 = (1, 0, 0)$*,* $v_2 = (0, 1, 0)$*,* $v_3 = (0, 0, 1)$*, a sequência* (v_1, v_2, v_3) *é uma base de* $\mathbb{R}^3$*.*

Uma vez que $u_1 = v_2 - v_3$*, tem-se* $< v_1, v_2, v_3 >=< v_1, u_1, v_3 >$*.*

Exemplo (continuação).

Agora, como $u_2 = v_1 - v_2 - v_3$ *e* $v_2 = u_1 + v_3$*, vem* $u_2 = v_1 - u_1 - 2v_3$*, pelo que* $< v_1, u_1, v_3 >=< v_1, u_1, u_2 >$.

Logo $< v_1, v_2, v_3 > = < v_1, u_1, u_2 >$*, donde resulta que a sequência* (v_1, u_1, u_2) *é linearmente independente,*

Portanto, (v_1, u_1, u_2) *é uma base de* $\mathbb{R}^3$.

Teorema

Se V é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ finitamente gerado, então todas as bases de V são finitas.

Demonstração.

Seja V um espaço vetorial finitamente gerado.
Se $V = \{0_V\}$, é óbvio que V não admite bases infinitas.
Se $V \neq \{0_V\}$, então o espaço vetorial V admite uma base finita, digamos $(v_1, \ldots, v_n)$. Suponhamos que V admite uma base infinita $(u_i)_{i \in I}$. Em, particular, a sequência $(u_i)_{i \in I}$ é linearmente independente. Logo, tomando $n+1$ elementos distintos $i_1, \ldots, i_{n+1} \in I$, a sequência $(u_{i_1}, \ldots, u_{i_{n+1}})$ é linearmente independente. Por outro lado, como $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é um conjunto gerador de V, segue que $n+1 \leq n$ (absurdo). Portanto, V não admite bases infinitas. $\square$

Teorema

Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ finitamente gerado e $(v_1, \ldots, v_n)$ uma base de V. Então qualquer base de V tem exactamente n vetores.

Demonstração. Imediato de resultados anteriores.

O resultado anterior fundamenta a definição que se segue.

Definição

Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ finitamente gerado. Chama--se ***dimensão*** *de V, e representa-se por $\dim V$, ao número de elementos de uma sua qualquer base. Por convenção, diz-se ainda que $\dim \{0_v\} = 0$. Se V não é finitamente gerado, diz-se que V tem* ***dimensão infinita****.*

Exemplo

Para $n \in \mathbb{N}$, $\dim \mathbb{R}^n = n$.

Exemplo

O espaço vetorial real $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *tem dimensão 4.*

Teorema

Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ finitamente gerado de dimensão n. Então,

i) *se $v_1, v_2, ..., v_p$ são p vetores de V com $p > n$, então $(v_1, v_2, ..., v_p)$ é linearmente dependente;*
ii) *se $(v_1, \ldots, v_n)$ é uma sequência de vetores de V linearmente independente, então $(v_1, \ldots, v_n)$ é uma base de V;*
iii) *se $v_1, \ldots, v_n$ são n vetores de V, distintos dois a dois, e $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é um conjunto gerador de V, então $(v_1, \ldots, v_n)$ é uma base de V.*

Demonstração. Imediato de resultados anteriores.

Teorema

Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ finitamente gerado e W um subespaço vetorial de V. Então

i) *W tem dimensão finita e $\dim W \leq \dim V$;*

ii) *se $\dim W = \dim V$, então $W = V$.*

Demonstração. Imediato de resultados anteriores..

Teorema

Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensão finita e W um subespaço de V. Então existe um suplementar de W relativamente a V.

Demonstração:

Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensão n, $n \in \mathbb{N}_0$, e seja W um subespaço de V.
Se $W = \{0_V\}$, então V é um suplementar de W relativamente a V.
Se $W = V$, então $\{0_V\}$ é um suplementar de W relativamente a V.
Se $W \neq \{0_V\}$ e $W \neq V$, seja $p = \text{dimW}$ e $(w_1, \ldots, w_p)$ uma base de W.
Uma vez que $W \neq V$, temos $p < n$. Por outro lado, como $w_1, \ldots, w_p$ são vetores linearmente independentes de V, segue que existe uma base de V da qual fazem parte os vetores $w_1, \ldots, w_p$. Suponha-se, sem perda de generalidade que $(w_1, \ldots, w_p, u_1, \ldots, u_{n-k})$ é essa base. Seja $U =< u_1, \ldots, u_{n-k} >$. Fica ao cuidado do leitor a verificação de que $V = W \bigoplus U$. $\square$

Exemplo

Consideremos, no espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$, *o subespaço* $W =< (0,1,-1),(1,-1,-1) >$. *A sequência* $((0,1,-1),(1,-1,-1))$ *é linearmente independente e* $((1,0,0),(0,1,-1),(1,-1,-1))$ *é uma base de* $\mathbb{R}^3$ *que inclui os vetores* $(0,1,-1)$, $(1,-1,-1)$ *(ver exemplo da página 103). Por conseguinte,* $U =< (1,0,0) >$ *é um espaço suplementar de* W *relativamente a* $\mathbb{R}^3$.

Teorema

Sejam V *um espaço vetorial de* V *de dimensão finita sobre* $\mathbb{K}$ *e* W *e* U *subespaços de* V. *Então* $\mathrm{dim(W+U) = dimW + dimU - dim(W \cap U)}$.

Demonstração.

Consultar notas da unidade curricular.

Espaço das linhas e espaço das colunas de uma matriz

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Dada uma matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, podemos identificar, sem perda de rigor, cada linha i de A com o elemento $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ de $\mathbb{K}^n$ e a coluna j de A com o elemento $(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})$ de $\mathbb{K}^m$.

Ao subespaço vetorial de $\mathbb{K}^n$ gerado pelas linhas de A damos a designação de ***espaço das linhas*** de A e representamo-lo por $\mathcal{L}(A)$. O subespaço vetorial de $\mathbb{K}^m$ gerado pelas colunas de A é designado por ***espaço das colunas*** de A e é representado por $\mathcal{C}(A)$.

Às dimensões dos subespaços $\mathcal{L}(A)$ e $\mathcal{C}(A)$ damos a designação de ***característica linha*** de A e ***característica coluna*** de A, e representamo-las por $car_l(A)$ e $car_c(A)$, respetivamente.

Do teorema estabelecido na página 109 conclui-se de imediato que a característica linha de uma matriz A é igual ao número máximo de linhas de A que são linearmente independentes e, analogamente, a característica coluna de A é igual ao número máximo de colunas de A que são linearmente independentes.

Exemplo

Se

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

tem-se

$$\mathcal{L}(A) = < (2,0,0),(0,0,1),(0,0,0) >,$$

$$\mathcal{L}(B) = < (2,0,0),(0,1,0),(0,0,0) >,$$

$$\mathcal{C}(A) = < (2,0,0),(0,0,0),(0,1,0) >,$$

$$\mathcal{C}(B) = < (2,0,0),(0,1,0),(0,0,0) > .$$

Facilmente se verifica que que $\mathcal{L}(A) \neq \mathcal{L}(B)$, $\mathcal{C}(A) = \mathcal{C}(B)$, $car_l(A) = car_c(A)$ *e* $car_l(B) = car_c(B)$.

Observação: Para qualquer matriz $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$, tem-se $\mathcal{C}(A) = \mathcal{L}(A^T)$.

Teorema

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ e $A, B \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$. Se B é uma matriz obtida de A por meio de uma operação elementar sobre linhas, então $car_l(A) = car_l(B)$.

Demonstração.

Se B é uma matriz obtida de A por meio de uma operação elementar sobre linhas, então $\mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(B)$. Logo $car_l(A) = car_l(B)$. $\square$

Teorema

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ *e* $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$*. Se* B *é uma matriz obtida de* A *por meio de uma operação elementar sobre linhas, então* $car_c(A) = car_c(B)$*.*

Demonstração. Consultar notas da unidade curricular.

Exemplo

Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A matriz B é equivalente por linhas à matriz A, uma vez que

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_2 \to l_2 - 2l_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tem-se $\mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(B)$ e, portanto, $car_l(A) = car_l(B)$. Embora $\mathcal{C}(A) \neq \mathcal{C}(B)$ (pois $(1,2) \in \mathcal{C}(A)$, mas $(1,2) \notin \mathcal{C}(B)$), também temos $car_c(A) = car_c(B)$.

A noção de caracteristica linha e de caracaterística coluna estão relacionadas com a noção de característica de uma matriz.

Teorema

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$*. Se* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *é uma matriz em forma de escada, então a sua característica linha e a sua característica coluna são iguais e coincidem com a característica de* A*, isto é,*

$$car_l(A) = car_c(A) = car(A).$$

Demonstração. Consultar notas da unidade curricular.

O resultado anterior pode ser generalizado para qualquer matriz.

Teorema

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$*. Para qualquer matriz* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$*, a sua característica linha e a sua característica coluna são iguais e coincidem com a característica de* A*, isto é,*

$$car_l(A) = car_c(A) = car(A).$$

Demonstração.

Por definição de característica de uma matriz, tem-se $car(A) = car(U)$ onde U é uma matriz em escada obtida de A por meio de operações elementares sobre linhas. Então, na sequência de resultados anteriores, tem-se

$$car(A) = car(U) = car_l(U) = car_l(A).$$

Facilmente também se prova que $car_c(A) = car(A)$. Com efeito, sabemos que $car_c(U) = car(U)$ e $car_c(A) = car_c(U)$. Logo, como $car(A) = car(U)$, temos $car_c(A) = car(A)$. $\square$

Teorema

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Para qualquer matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, tem-se

$$car(A) = car(A^T).$$

Demonstração.

O resultado segue de imediato, uma vez que

$$car(A) = car_l(A) = car_c(A) = car_l(A^T) = car(A^T).$$

$\square$