Álgebra Linear CC

Licenciatura em Ciências da Computação

Carla Mendes

2024/2025

Departamento de Matemática

Sistemas de equações lineares

Conceitos básicos

São diversos os problemas práticos com que nos deparamos no dia a dia que envolvem a resolução de sistemas de equações lineares. Embora alguns destes sistemas sejam simples de resolver, outros há que, devido às suas dimensões e complexidade, requerem métodos sistemáticos para a sua resolução. Este capítulo é dedicado ao estudo de um desses métodos.

Tal como no capítulo anterior, representamos por $\mathbb{K}$ o conjunto $\mathbb{R}$ ou o conjunto $\mathbb{C}$.

Sistemas de equações lineares

Definição

Sejam $n \in \mathbb{N}$. Uma ***equação linear*** *nas incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$, sobre $\mathbb{K}$, é uma equação do tipo*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b,$$

com $a_1, a_2, \ldots, a_n, b \in \mathbb{K}$.

Os elementos a_i ($i \in \{1, 2, ..., n\}$) designam-se por ***coeficientes*** *da equação e o elemento b designa-se por* ***termo independente*** *da equação.*

Definição

*Sejam $n, m \in \mathbb{N}$. Dá-se o nome de **sistema de m equações lineares em n incógnitas** $x_1, x_2, ..., x_n$, sobre $\mathbb{K}$, a uma coleção de equações lineares*

$$(S)\ \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

onde $a_{ij}, b_i \in \mathbb{K}$, para todo $i \in \{1, 2, ..., m\}$ e $j \in \{1, 2, ..., n\}$.

Definição (continuação)

O sistema (S) *diz-se **homogéneo** se* $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$, *i.e., se os termos independentes de* (S) *são todos nulos.*

*Chama-se **solução de*** (S) *a qualquer n-uplo* $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ *de* $\mathbb{K}^n$ *tal que, para todo* $i \in \{1, ..., m\}$, $a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + ... + a_{in}\alpha_n = b_i$.

Representa-se por $\mathrm{Sol}_{(S)}$ *o **conjunto de soluções de*** (S), *i.e.,*

$$\mathrm{Sol}_{(S)} = \{(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{K}^n : a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + ... + a_{in}\alpha_n = b_i, \forall i \in \{1, ..., m\}\}.$$

Sistemas de equações lineares

Definição

Se (S) e (S') são sistemas de equações lineares sobre $\mathbb{K}$ com o mesmo conjunto de soluções, diz-se que (S) e (S') são ***equivalentes****.*

.

Definição

Um sistema (S) de m equações lineares em n incógnitas e de coeficientes em $\mathbb{K}$ diz-se:

- ***impossível*** *se não tem solução i.e., se* $\mathrm{Sol}_{(S)} = \emptyset$*;*
- ***possível*** *se tem, pelo menos, uma solução, i.e., se* $\mathrm{Sol}_{(S)} \neq \emptyset$*;*
- ***possível determinado*** *se o sistema tem uma única solução;*
- ***possível indeterminado*** *caso o sistema tenha mais do que uma solução.*

Observação: Um sistema (S) de m equações lineares em n incógnitas que seja homogéneo é sempre possível, uma vez que $(0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{K}^n$ é solução de (S); a esta solução dá-se a designação de ***solução trivial***.

Dado um sistema (S) de equações lineares entende-se por:

- ***discutir o sistema***, verificar se (S) é possível e, neste caso, se é determinado ou indeterminado;
- ***resolver o sistema***, determinar o conjunto de soluções do sistema.

Exemplo

A equação

$$x_1 + x_2 - 8x_3 = 0$$

é equivalente a

$$x_1 = -x_2 + 8x_3.$$

Uma vez que x_2 *e* x_3 *são arbitrários, este sistema é possível e indeterminado. Para obtermos uma solução diferente da trivial podemos considerar, por exemplo,* $x_2 = 1$ *e* $x_3 = 1$*, donde resulta* $x_1 = 7$*.*

Exemplo

Consideremos o seguinte sistema de 3 equações lineares em 3 incógnitas:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrr} -x & - & 5y & - & 2z & = & 2 & (i) \\ 2x & - & 2y & + & z & = & 0 & (ii) \\ 3x & + & 3y & + & 3z & = & -1 & (iii). \end{array}\right.$$

Se adicionarmos (i) *e* (iii), *obtemos obtemos a equação*

$$2x - 2y + z = 1,$$

o que não é consistente com a equação (ii), *pelo que o sistema não admite nenhuma solução, i.e., é um sistema impossível.*

Exemplo

Dado o sistema de 3 equações lineares em 3 incógnitas

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrr} 0x_1 & + & 1x_2 & - & 8x_3 & = & -17 & \quad (i) \\ 1x_1 & + & 0x_2 & + & 1x_3 & = & 10 & \quad (ii) \\ 1x_1 & - & 1x_2 & + & 0x_3 & = & 0 & \quad (iii) \end{array}\right.$$

vamos calcular a sua solução.

Se trocarmos a equação (i) com a equação (ii), obtemos

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrr} 1x_1 & + & 0x_2 & + & 1x_3 & = & 10 & \quad (i) \\ 0x_1 & + & 1x_2 & - & 8x_3 & = & -17 & \quad (ii) \\ 1x_1 & - & 1x_2 & + & 0x_3 & = & 0 & \quad (iii) \end{array}\right.$$

Exemplo (continuação)

Agora, se substituirmos a equação (iii) por (iii)-(i) ficamos com

$$\begin{cases} 1x_1 + 0x_2 + 1x_3 = 10 & \textit{(i)} \\ 0x_1 + 1x_2 - 8x_3 = -17 & \textit{(ii)} \\ 0x_1 - 1x_2 - 1x_3 = -10 & \textit{(iii)} \end{cases}$$

Substituindo a equação (iii) por (iii)+(ii) tem-se

$$\begin{cases} 1x_1 + 0x_2 + 1x_3 = 10 & \textit{(i)} \\ 0x_1 + 1x_2 - 8x_3 = -17 & \textit{(ii)} \\ 0x_1 + 0x_2 - 9x_3 = -27 & \textit{(iii)} \end{cases}$$

Exemplo (continuação)

Finalmente, se multiplicarmos a equação (iii) por $-1/9$, obtém-se

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrl} 1x_1 & + & 0x_2 & + & 1x_3 & = & 10 & \quad (i) \\ 0x_1 & + & 1x_2 & - & 8x_3 & = & -17 & \quad (ii) \\ 0x_1 & + & 0x_2 & + & 1x_3 & = & 3 & \quad (iii) \end{array}\right.$$

Neste momento é fácil determinar a solução do sistema; substituindo x_3 por 3 em (ii) obtém-se $x_2 = 7$ e da equação (i), por substituição de x_3 e x_2, resulta que $x_1 = 7$. Assim, uma vez que o sistema admite solução e que esta é única, concluímos que o sistema é possível e determinado.

Em cada um dos exemplos anteriores, o sistema inicial foi sucessivamente transformado noutros sistemas efectuando apenas as seguintes operações sobre equações:

1) troca da equação i com a equação j;
2) multiplicação da equação i por $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$;
3) substituição da equação i pela sua soma com a equação j multiplicada por $\beta \in \mathbb{K}$, com $i \neq j$.

A estas operações damos a designação de ***operações elementares sobre equações***.

É simples de verificar que se (S') for um sistema obtido a partir de um sistema (S) efectuando uma operação elementar sobre as equações de (S), então os dois sistemas são equivalentes.

Sistemas de equações lineares

Um sistema (S) de equações lineares e de coeficientes em $\mathbb{K}$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

pode ser representado pela equação matricial

$$Ax = b$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

As matrizes A, x e b designam-se, respetivamente, por ***matriz simples de*** (S), ***matriz incógnita de*** (S) e ***matriz dos termos independentes de*** (S). Tendo em conta que as incógnitas têm um papel secundário na resolução de um sistema e que as operações elementares sobre as equações envolvem apenas os coeficientes e os termos independentes, o sistema (S) pode ainda ser representado, de uma forma mais abreviada, pela matriz

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

à qual se dá a designação de ***matriz ampliada de*** (S) e que se representa por $[A \,|\, b]$. O sistema (S) fica completamente representado por esta matriz, uma vez que cada linha da matriz representa uma equação de (S).

Sistemas de equações lineares

Exemplo

Se consideramos o sistema (S) a seguir indicado

$$\begin{cases} 0x_1 + 1x_2 - 8x_3 = -17 \\ 1x_1 + 0x_2 + 1x_3 = 10 \\ 1x_1 - 1x_2 + 0x_3 = 0 \end{cases}$$

a matriz simples, a matriz incógnita e a matriz dos termos independentes deste sistema são, respectivamente,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -8 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad e \quad b = \begin{bmatrix} -17 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A matriz ampliada associada ao sistema é a matriz

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -8 & -17 \\ 1 & 0 & 1 & 10 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Sistemas de equações lineares

Dado um sistema (S) de m equações lineares em n incógnitas e de coeficientes em $\mathbb{K}$, o seu conjunto de soluções pode ser determinado através da resolução da equação matricial $Ax = b$ que lhe está associada. De facto, $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ é solução de (S) se e só se

$$A \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = b.$$

Nos exemplos anteriores, os sistemas foram resolvidos recorrendo apenas a operações elementares sobre equações. Efectuar uma destas operações sobre as equações de um sistema (S) corresponde, em termos matriciais, a efectuar operações análogas sobre as linhas da matriz ampliada $[A \,|\, b]$ associada ao sistema.

Sistemas de equações lineares

Mais precisamente:

- trocar a equação i com a equação j no sistema (S) corresponde a trocar a linha i com a linha j da matriz $[A \,|\, b]$;
- multiplicar a equação i do sistema (S) por $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ corresponde a multiplicar a linha i da matriz $[A \,|\, b]$ por α;
- substituir a equação i do sistema (S) pela sua soma com a equação j multiplicada por $\beta \in \mathbb{K}$ corresponde a substituir a linha i da matriz $[A \,|\, b]$ pela sua soma com a linha j multiplicada por $\beta \in \mathbb{K}$, com $i \neq j$.

Definição

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ *e* $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$*. Definem-se como* ***operações elementares sobre linhas*** *da matriz* A *as seguintes operações:*

1) *troca da linha* i *com a linha* j*;*
2) *multiplicação da linha* i *por* $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$*;*
3) *substituição da linha* i *pela sua soma com a linha* j *multiplicada por* $\beta \in \mathbb{K}$*, com* $i \neq j$*,*

Sistemas de equações lineares

Analogamente, define-se **operação elementar sobre as colunas** de uma matriz, bastando substituir "linha" por "coluna" na definição anterior.

Ao longo do texto adotaremos as seguintes notações para as operações elementares sobre linhas:

- $A \underset{l_i \leftrightarrow l_j}{\longrightarrow} B$: para indicar que a matriz B é obtida da matriz A efetuando a troca das suas linhas i e j;
- $A \underset{l_i \to \alpha l_i}{\longrightarrow} B$: para indicar que a matriz B é obtida de A multiplicando a linha i da matriz A por $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$;
- $A \underset{l_i \to l_i + \beta l_j}{\longrightarrow} B$: para indicar que a matriz B é obtida de A substituindo a linha i da matriz A pela sua soma com a linha j multiplicada por $\beta \in \mathbb{K}$.

Para representar as operações elementares por colunas adota-se notação semelhante à anterior, mas escreve-se c_i para indicar a coluna i.

Teorema

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ *e* $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$*. Se a matriz* $B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *pode ser obtida da matriz* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *efetuando uma operação elementar sobre linhas (respetivamente, colunas), então a matriz* A *também pode ser obtida de* B *efetuando uma operação elementar sobre linhas (respetivamente, colunas).*

Demonstração.

No caso das operações elementares por linhas, basta ter em conta que:

- se $A \underset{l_i \leftrightarrow l_j}{\longrightarrow} B$, então $B \underset{l_j \leftrightarrow l_i}{\longrightarrow} A$;
- se $A \underset{l_i \to \alpha l_i}{\longrightarrow} B$, com $\alpha \neq 0$, então $B \underset{l_i \to \frac{1}{\alpha} l_i}{\longrightarrow} A$;
- se $A \underset{l_i \to l_i + \beta l_j}{\longrightarrow} B$, então $B \underset{l_i \to l_i - \beta l_j}{\longrightarrow} A$.

De forma análoga, justifica-se o resultado para o caso das operações elementares por colunas. $\square$

Definição

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ e $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Diz-se que A é ***equivalente por linhas (respetivamente, por colunas)*** *a B se B pode ser obtida a partir de A efetuando um número finito de operações elementares sobre as linhas (respetivamente, colunas) de A.*

Com base no teorema anterior é fácil concluir que se $A \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ é equivalente por linhas (respetivamente, colunas) a $B \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$, então B é equivalente por linhas (respetivamente, colunas) a A e, por isso, podemos dizer apenas que A e B são equivalentes por linhas.

O resultado seguinte mostra-nos que podemos efetuar uma operação elementar sobre as linhas de uma matriz premultiplicando A (ou seja, multiplicando A à esquerda) por uma matriz adequada.

Teorema

Sejam $n, m \in \mathbb{N}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ *e* $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. *Então:*

1. *Se* E *é a matriz quadrada de ordem* m *obtida da matriz identidade* I_m *trocando as suas linhas* i *e* j*, então a matriz* EA *é obtida da matriz* A *trocando as suas linhas* i *e* j.
2. *Se* E *é a matriz de ordem* m *obtida da matriz identidade* I_m *multiplicando a linha* i *por* $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$*, então* EA *é a matriz obtida de* A *multiplicando a linha* i *por* α.
3. *Se* E *é a matriz quadrada de ordem* m *obtida da matriz identidade* I_m *substituindo a linha na posição* i *pela sua soma com* β *vezes a linha na posição* j*, então* EA *é a matriz obtida da matriz* A *substituindo a linha na posição* i *pela sua soma com* β *vezes a linha na posição* j, $i \neq j$.

Analogamente ao que acontece com as operações elementares sobre linhas, uma operação elementar sobre as colunas de uma matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ pode ser obtida posmultiplicando A (ou seja, multiplicando A à direita) por uma matriz obtida da matriz I_n efetuando nas suas colunas a mesma operação elementar que se pretende efetuar na matriz A.

Definição

Seja $n \in \mathbb{N}$. Chamamos **matriz elementar sobre linhas (respetivamente, colunas)** *de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ a toda a matriz que pode ser obtida da matriz identidade I_n por aplicação de uma operação elementar sobre as suas linhas (respetivamente, colunas).*

Teorema

Toda a matriz elementar sobre linhas (respetivamente, colunas) é também uma matriz elementar sobre colunas (respetivamente, linhas).

Demonstração.

Facilmente se prova o resultado enunciado. De facto, tem-se:

- $I_n \underset{l_i \leftrightarrow l_j}{\longrightarrow} E$ se e só se $I_n \underset{c_i \leftrightarrow c_j}{\longrightarrow} E$;
- $I_n \underset{l_i \rightarrow \alpha l_i}{\longrightarrow} E$ se e só se $I_n \underset{c_i \rightarrow \alpha c_i}{\longrightarrow} E$;
- $I_n \underset{l_i \rightarrow l_i + \beta l_j}{\longrightarrow} E$ se e só se $I_n \underset{c_i \rightarrow c_i + \beta c_j}{\longrightarrow} E$;

$\square$

A respeito de matrizes elementares é também conveniente observar que toda a matriz elementar sobre linhas (respetivamente, colunas) é uma matriz invertível.

Teorema

Seja $n \in \mathbb{N}$. Toda a matriz elementar $E \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ é invertível e, para quaisquer $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, tem-se:

1) *Se $i \neq j$ e $I_n \underset{l_i \leftrightarrow l_j}{\longrightarrow} E$, então $I_n \underset{l_i \leftrightarrow l_j}{\longrightarrow} E^{-1}$;*
2) *Se $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ e $I_n \underset{l_i \to \alpha l_i}{\longrightarrow} E$, então $I_n \underset{l_i \to \frac{1}{\alpha} l_i}{\longrightarrow} E^{-1}$;*
3) *Se $i \neq j$, $\beta \in \mathbb{K}$ e $I_n \underset{l_i \to l_i + \beta l_j}{\longrightarrow} E$, então $I_n \underset{l_i \to l_i + (-\beta) l_j}{\longrightarrow} E^{-1}$*

Da mesma forma que as operações elementares sobre as equações de um sistema não alteram o seu conjunto de soluções, as operações elementares sobre as linhas da sua matriz ampliada também não alteram a solução da equação matricial associada ao sistema.

Teorema

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ *e* $Ax = b$ *a equação matricial de um sistema de* m *equações lineares em* n *incógnitas, sobre* $\mathbb{K}$*. Se a matriz* $[A' \mid b']$ *é obtida de* $[A \mid b]$ *efectuando uma operação elementar sobre as linhas, então* $A'x = b'$ *e* $Ax = b$ *têm o mesmo conjunto de soluções.*

Demonstração.

Cada operação elementar sobre as linhas da matriz ampliada $[A \,|\, b]$ corresponde a multiplicar (à esquerda) ambos os membros da equação $Ax = b$ por uma matriz elementar Q. Assim, tendo em conta que $A' = QA$, $b' = Qb$ e que as matrizes elementares são invertíveis, o resultado é imediato. De facto, dado $c \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$,

$$Ac = b \Rightarrow QAc = Qb \Rightarrow A'c = b'$$

e

$$A'c = b' \Rightarrow QAc = Qb \Rightarrow Q^{-1}QAc = Q^{-1}Qb \Rightarrow Ac = b. \quad \square$$

Observação: Como já observámos anteriormente, toda a matriz que é equivalente por linhas a uma matriz A também é equivalente por colunas à matriz A. Porém, o resultado anterior não é válido para todas as operações elementares por colunas. Com efeito, quando se aplicam operações elementares sobre matrizes, tendo por objetivo a resolução de sistemas, a única operação sobre colunas que pode ser aplicada é a troca de colunas, sendo que neste caso tem de se proceder a uma troca de incógnitas no sistema final que seja coerente com a troca de colunas efetuada. Por este motivo, na resolução de sistemas optaremos por recorrer apenas a operações elementares sobre linhas.

Discussão e resolução de sistemas

Nesta secção descrevemos um método que permite sistematizar o processo de resolução e discussão de sistemas: o método de eliminação de Gauss. Com este método o sistema inicial é transformado num outro sistema que lhe é equivalente mas de mais fácil resolução.

Sistemas de equações lineares

Num exemplo anterior o sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 0x_1 & + & 1x_2 & - & 8x_3 & = & -17 \\ 1x_1 & + & 0x_2 & + & 1x_3 & = & 10 \\ 1x_1 & - & 1x_2 & + & 0x_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

foi sucessivamente transformado, efectuando operações elementares sobre equações, até obtermos o sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 1x_1 & + & 0x_2 & + & 1x_3 & = & 10 \\ 0x_1 & + & 1x_2 & - & 8x_3 & = & -17 \\ 0x_1 & + & 0x_2 & + & 1x_3 & = & 3 \end{array}\right.$$

o qual é de resolução bastante mais simples.

Sistemas de equações lineares

Considerando a representação do sistema em termos de matrizes, esta transformação corresponde a efectuar sucessivas operações elementares sobre as linhas da matriz ampliada do sistema

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & -8 & -17 \\ 1 & 0 & 1 & 10 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

até obtermos a matriz

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -8 & -17 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right].$$

Esta última matriz tem a particularidade de ter um formato que satisfaz as condições da definição seguinte.

Definição

*Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Uma matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ diz-se uma **matriz em escada** se satisfaz as seguintes condições*

- *se o primeiro elemento não nulo numa linha está na coluna j, então a linha seguinte começa com pelo menos j elementos nulos;*
- *se houver linhas totalmente constituídas por zeros, elas aparecem depois das outras.*

Exemplo

1. *As matrizes* $\mathbf{0}_{m\times n}$ *e* I_n *são matrizes em forma de escada.*
2. *A matriz*
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
está em forma de escada.
3. *A matriz*
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$
embora muito parecida com a matriz anterior, não está em forma de escada (o primeiro elemento não nulo na linha 3 *está na coluna* 4 *e a linha* 4 *não começa com* 4 *elementos nulos).*

Exemplo (continuação)

4. *A matriz*

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

não está em forma de escada (o primeiro elemento não nulo na linha 1 *está na coluna* 3 *e a linha* 2 *não começa com* 3 *elementos nulos).*

O processo que foi adoptado na resolução do sistema referido anteriormente, e que permitiu reduzir a matriz ampliada do sistema a uma matriz em escada, é um exemplo de aplicação do método descrito a seguir.

Teorema

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Toda a matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ é equivalente por linhas a uma matriz em escada.

Demonstração.

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ e $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Então a matriz A pode ser reduzida a uma matriz em escada, efectuando operações elementares sobre as suas linhas, de acordo com o seguinte processo.

Para k de 1 até m:

i) Procurar a primeira coluna com elementos não nulos na linha k ou abaixo desta.

ii) Se não existir a coluna indicada em i), dá-se o processo por terminado.

iii) Caso exista a coluna referida em i) e se j_k é essa coluna, $j_k \in \{1, ..., n\}$, assegura-se que o elemento na linha k desta coluna é não nulo, trocando, se necessário, a linha k com alguma linha que esteja abaixo; representemos por $a^{(k)}_{kj_k}$ esse elemento.

iv) Para cada $i \in \{k+1, ..., m\}$, adiciona-se à linha i a linha k multiplicada por $-\frac{a^{(k)}_{ij_k}}{a^{(k)}_{kj_k}}$, onde $a^{(k)}_{ij_k}$ representa o elemento na linha i e coluna j_k da matriz que foi obtida após a aplicação dos passos anteriores.

Terminado o processo a matriz que se obtém é uma matriz em escada. $\square$

Ao processo descrito na demonstração anterior para reduzir uma matriz a uma matriz em escada dá-se a designação de ***método de eliminação de Gauss***.

Os elementos $a_{1j_1}^{(1)}, a_{2j_2}^{(2)}, \ldots$ designam-se por ***pivots da eliminação***.

Exemplo

Consideremos a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Aplicando o método de eliminação de Gauss a esta matriz, temos

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_1 \leftrightarrow l_4]{} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow$$

Sistemas de equações lineares

Exemplo (continuação)

$$
\xrightarrow[\substack{l_3 \to l_3 - 3l_1}]{\substack{}}\!\!\!\!\!\!\xrightarrow[\substack{l_2 \to l_2 - l_1 \\ l_3 \to l_3 - 3l_1}]{}
$$

$$
\xrightarrow[\substack{l_2 \to l_2 - l_1 \\ l_3 \to l_3 - 3l_1}]{} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & -8 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{l_3 \to l_3 - 4l_2 \\ l_4 \to l_4 + \frac{1}{2}l_2}]{} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}
$$

$$
\xrightarrow[l_4 \to l_4 - \frac{3}{4}l_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
$$

A última matriz obtida é uma matriz em forma de escada e equivalente por linhas à matriz A.

Observação: Toda a transformação que pode ser feita numa matriz por meio de operações elementares sobre linhas também pode ser realizada por meio de operações elementares sobre colunas. Por conseguinte, toda a matriz pode ser transformada numa matriz em escada por meio de operações elementares sobre colunas. Porém, tal como já observámos anteriormente, a única operação sobre colunas que pode ser aplicada na resolução de sistemas é a troca de colunas (não esquecendo de efetuar no sistema final a troca de incógnitas coerente com a troca de colunas que foi efetuada).

O método de eliminação de Gauss, quando aplicado a uma matriz A, permite obter uma matriz em escada equivalente por linhas à matriz inicial. Porém, a matriz em escada que é obtida no final do processo pode não ser sempre a mesma, uma vez que que há alguma flexibilidade na escolha das transformações elementares a efetuar sobre a matriz A (nomeadamente, na escolha das linhas que se trocam para colocar um elemento na posição de pivot). No entanto, embora não seja possível garantir a unicidade da matriz em escada que é obtida por aplicação do método de eliminação de Gauss, prova-se que o número de pivots usados no método de eliminação de Gauss, que é igual ao número de linhas não nulas da matriz em escada obtida de A, é univocamente determinado pelas entradas da matriz A. Com efeito, quaisquer matrizes em escada equivalentes por linhas a uma matriz A têm o mesmo número de linhas não nulas, pelo que faz sentido considerar a definição seguinte.

Definição

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ *e* $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. *Designa-se por* ***característica*** *da matriz* A, *e representa-se por* $car(A)$, *o número de linhas não nulas de qualquer matriz em forma de escada que seja equivalente por linhas a* A.

Exemplo

Como vimos no exemplo anterior, a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

é equivalente por linhas à seguinte matriz em forma de escada

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Então, como U tem 3 linhas não nulas, temos $car(A) = 3$.

Sistemas de equações lineares

O método de eliminação de Gauss pode ser utilizado na resolução de sistemas de equações lineares.

Um passo elementar deste método, quando aplicado à matriz ampliada $[A|b]$ de um sistema $Ax = b$, consiste em adicionar a uma certa equação um múltiplo de outra, de forma a que na equação obtida seja nulo o coeficiente de certa incógnita. Diz-se que se eliminou essa incógnita da equação. Os passos elementares são conduzidos de maneira a eliminar a incógnita x_1 de todas as equações a partir da $2^{\underline{a}}$ equação, depois eliminar a incógnita x_2 de todas as equações a partir da $3^{\underline{a}}$ equação, etc.

Sistemas de equações lineares

Quando termina o método de eliminação de Gauss, obtemos uma matriz em escada $[U|c]$.

O sistema correspondente a esta matriz, $Ux = c$, é de resolução mais simples e há a garantia de ser equivalente ao sistema $Ax = b$, uma vez que $[U|c]$ é obtida de $[A|b]$ efectuando apenas operações elementares sobre linhas.

Quando se obtém o sistema correspondente à matriz $[U|c]$, é fácil verificar se o sistema é possível ou impossível. Se o sistema for possível, resolve-se de baixo para cima, escrevendo, se necessário, as ***incógnitas básicas*** (as que estão a multiplicar pelos pivots) em função das ***livres*** (as restantes variáveis).

Exemplo

Consideremos o seguinte sistema de 4 equações lineares em 4 incógnitas:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & & & & & = & 2 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 2 \end{array}\right. .$$

Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz ampliada do sistema, temos

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{l_2 \to l_2 - l_1 \\ l_3 \to l_3 - 2l_1}]{} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Exemplo (continuação)

$$\xrightarrow[\substack{l_3 \to l_3 - 3l_2 \\ l_4 \to l_4 + l_2}]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[l_4 \to l_4 - \frac{1}{2} l_3]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 5 \end{array}\right].$$

Exemplo (continuação)

Desta forma obtém-se o sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ \quad\; -x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ \qquad\quad 2x_3 + 2x_4 = -4 \\ \qquad\qquad\quad - x_4 = 5 \end{cases}$$

equivalente ao inicial, mas de mais fácil resolução. Da última equação obtém-se $x_4 = -5$*, substituindo* x_4 *na 3ª equação temos* $x_3 = 3$*, donde* $x_2 = 1$ *e* $x_1 = 1$*.*

Como vimos no exemplo anterior, quando se aplica o método de eliminação de Gauss na resolução de um sistema de equações lineares, a matriz ampliada do sistema é transformada, por meio de operações elementares sobre linhas, numa matriz em forma de escada. Mas, como iremos ver, o processo descrito no método de eliminação de Gauss pode ser complementado com outras operações elementares de forma a que a matriz ampliada do sistema seja transformada até se obter uma matriz em forma de *escada reduzida*, sendo que o sistema associado a esta matriz terá uma resolução mais simplificada.

Definição

Sejam $m, n \in \mathbb{K}$ e $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Diz-se que A é uma ***matriz em escada reduzida*** *ou que está em* ***forma de escada reduzida*** *se satisfaz as seguintes condições:*

- *A é uma matriz em escada;*
- *se uma linha tem elementos não nulos, então o primeiro elemento não nulo da linha é igual a 1;*
- *se o primeiro elemento não nulo de uma linha i está na coluna j, então todos os elementos da coluna j, com excepção do elemento que está na linha i, são iguais a zero.*

Exemplo

1. *As matrizes* $0_{m\times n}$ *e* I_n *são matrizes em forma de escada reduzida.*
2. *A matriz*
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
está em forma de escada reduzida.
3. *A matriz*
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$
embora muito parecida com a matriz anterior, não está em forma de escada reduzida.

Exemplo (continuação)

4. *A matriz* $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ *não está em forma de escada reduzida.*

Teorema

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. *Toda a matriz* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *é equivalente por linhas a uma matriz em forma de escada reduzida.*

Demonstração.

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Se A é a matriz nula, então a matriz já está na forma de escada reduzida. Caso A não seja a matriz nula, então A pode ser transformada numa matriz em escada reduzida, efectuando operações elementares sobre as suas linhas, de acordo com o seguinte processo: aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz A obtemos uma matriz em escada A' equivalente a A. Uma vez obtida a matriz em escada A', anulam-se todos os elementos não nulos que estejam acima dos pivots ${a_{kj_k}}^{(k)}$ da matriz A'; para tal, para cada $i \in \{1, \ldots, k-1\}$, adiciona-se à linha i da matriz A' a linha k multiplicada por $-\frac{a_{ij_k}^{(k)}}{{a_{kj_k}}^{(k)}}$. Finalmente, multiplica-se cada linha não nula da matriz pelo inverso do pivot dessa linha. Terminado o processo, obtém-se uma matriz em escada reduzida e equivalente por linhas à matriz A. $\square$

Ao processo de transformar uma dada matriz numa matriz em escada reduzida dá-se a designação de ***condensação*** da matriz.

É conveniente observar que uma matriz A é equivalente por linhas a uma única matriz em forma de escada reduzida - a esta matriz em escada reduzida dá-se a designação de **forma de Hermite** de A.

Sistemas de equações lineares

Exemplo

Consideremos a matriz a seguir indicada

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Aplicando o método descrito anteriormente de forma a transformar a matriz A numa matriz em forma de escada reduzida, obtemos

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{l_2 \to l_2 - l_1 \\ l_3 \to l_3 - 3l_1}]{} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo (continuação)

$$\xrightarrow[\substack{l_3 \to l_3 - l_2 \\ l_4 \to l_4 + \frac{1}{2} l_2}]{} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{l_3 \to l_3 + 12 l_4 \\ l_2 \to l_2 + 2 l_4 \\ l_1 \to l_1 - 4 l_4}]{} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[l_1 \to l_1 + \frac{1}{4} l_2]{} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{l_2 \to -\frac{1}{4} l_2 \\ l_4 \to 2 l_4}]{} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A última matriz obtida é a forma de Hermite de A.

Observação: A transformação de uma matriz A numa matriz em forma de escada reduzida também pode ser obtida por meio de operações elementares sobre colunas, mas voltamos a recordar que nem todas as operações elementares sobre colunas podem ser aplicadas na resolução de um sistema de equações lineares.

O processo descrito no teorema anterior, por ser uma extensão do método de eliminação de Gauss, é designado por ***método de eliminação de Gauss-Jordan*** e também pode ser aplicado na resolução de sistemas de equações lineares. Aplicando este método à matriz ampliada de um dado sistema de equações lineares, esta matriz é transformada até que se obtenha uma matriz equivalente por linhas e em forma de escada reduzida; o sistema de equações correspondente a esta última matriz (equivalente ao sistema inicial) é, em princípio, de resolução mais simples.

Exemplo

Consideremos de novo o sistema seguinte, o qual já foi estudado num exemplo anterior.

$$(S)\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & & & & & = & 2 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 2 \end{array}\right. .$$

Nesse mesmo exemplo vimos que aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz ampliada deste sistema é possível obter a matriz em escada a seguir indicada

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 5 \end{array}\right]$$

Exemplo (continuação)

Partindo desta última matriz e seguindo o processo descrito no teorema anterior temos

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{l_3 \to l_3 + 2l_4 \\ l_2 \to l_2 - l_4 \\ l_1 \to l_1 + l_4}]{} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 5 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{l_2 \to l_2 + \frac{1}{2}l_3 \\ l_1 \to l_1 - \frac{1}{2}l_3}]{} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow[l_1 \to l_1 + 2l_2]{} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 5 \end{array}\right.$$

$$\xrightarrow[\substack{l_2 \to -l_2 \\ l_3 \to \frac{1}{2}l_3 \\ l_4 \to -l_4}]{} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \end{array}\right].$$

Exemplo (continuação)

A última matriz obtida, em forma de escada reduzida, é equivalente por linhas à matriz $[A \mid b]$. *Por conseguinte, o sistema inicial* (S) *é equivalente ao sistema*

$$\begin{cases} x_1 & = & 1 \\ x_2 & = & 1 \\ x_3 & = & 3 \\ x_4 & = & -5 \end{cases},$$

donde obtemos $Sol_{(S)} = \{(1, 1, 3, -5)\}$.

Sistemas de equações lineares

Seguidamente debruçamo-nos sobre um outro tipo de problema que também já foi referido no início do capítulo - a discussão de sistemas de equações lineares.

Como vamos ver, a discussão de um sistema pode ser feita recorrendo à característica da sua matriz simples e da sua matriz ampliada.

Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz ampliada do sistema, $[A \mid b]$, podemos determinar a característica dessa matriz e a característica da matriz simples do sistema, A.

Sendo $[U|c]$ a matriz em escada obtida a partir de $[A|b]$ por aplicação do método de eliminação de Gauss, então $\text{car}([A|b])$ é o número de linhas não nulas de $[U|c]$ e $\text{car}(A)$ é número de linhas não nulas de U.

Note-se que se tem sempre $\text{car}(A) \leq \text{car}([A|b])$.

Designando por r a característica de A pode-se ter:

1) $r = m = n$;
2) $r = m < n$;
3) $r < m$

No caso 1), a matriz $[U \mid c]$ tem a forma

$$[U \mid c] = \left[\begin{array}{ccccc|c} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} & c_1 \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} & c_2 \\ 0 & 0 & \dots & u_{3n} & c_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} & c_n \end{array}\right]$$

que corresponde ao sistema

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} u_{11}x_1 & + & u_{12}x_2 & + & \dots & + & u_{1n}x_n & = & c_1 \\ & & u_{22}x_2 & + & \dots & + & u_{2n}x_n & = & c_2 \\ & & & & & & & \vdots & \\ & & & & & & u_{nn}x_n & = & c_n \end{array}\right.$$

em que $u_{ii} \neq 0$, para todo $i \in \{1, ..., n\}$.

A partir da última equação deste sistema obtemos $x_n = \frac{c_n}{u_{nn}}$ e, por substituição inversa nas equações anteriores, obtemos sucessivamente $x_{n-1}, x_{n-2}, ..., x_1$. Neste caso o sistema é determinado.

Sistemas de equações lineares

No caso 2), em que temos $r = m < n$, a matriz $[U \mid c]$ será da forma

$$[U \mid c] = \left[\begin{array}{ccccccccccc|c} 0 & \dots & u_{1j_1} & \dots & u_{1j_2} & \dots & u_{1j_3} & \dots & u_{1j_m} & \dots & u_{1n} & c_1 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & u_{2j_2} & \dots & u_{2j_3} & \dots & u_{2j_m} & \dots & u_{2n} & c_2 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & u_{3j_3} & \dots & u_{3j_m} & \dots & u_{3n} & c_3 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & u_{mj_m} & \dots & u_{mn} & c_n \end{array}\right]$$

onde, para todo $k \in \{1, ..., m\}$, $u_{kj_k} \neq 0$ e, para todo $j < j_k$, $u_{kj} = 0$.

No sistema correspondente a $[U \mid c]$ são livres as incógnitas x_j, com $j \in \{1, ..., n\} \setminus \{j_1, j_2, ..., j_m\}$, e obtemos as restantes incógnitas em função destas. Desta forma, o sistema é indeterminado.

Sistemas de equações lineares

No caso 3), em que $r < m$, tem-se

$$[U \mid c] = \left[\begin{array}{ccccccccccc|c} 0 & \dots & u_{1j_1} & \dots & u_{1j_2} & \dots & u_{1j_3} & \dots & u_{1j_m} & \dots & u_{1n} & c_1 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & u_{2j_2} & \dots & u_{2j_3} & \dots & u_{2j_m} & \dots & u_{2n} & c_2 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & u_{3j_3} & \dots & u_{3j_m} & \dots & u_{3n} & c_3 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & u_{rj_r} & \dots & u_{rn} & c_r \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & c_{r+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & c_m \end{array}\right]$$

Se $c_i \neq 0$, para algum $i \in \{r+1, ..., m\}$, o sistema é obviamente impossível.

Se $c_{r+1} = \cdots = c_m = 0$, então as últimas $m - r$ equações do sistema correspondente à matriz $[U|c]$ são identidades, e o sistema é equivalente ao das r primeiras equações. Este sistema está num dos casos estudados antes; de facto, se $r = n$, o sistema enquadra-se no primeiro caso, e se $r < n$, temos um sistema do tipo que foi estudado no segundo caso.

Do que foi observado conclui-se o seguinte:

Teorema

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ *e* $Ax = b$ *um sistema de equações lineares, com* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. *Então*

- *o sistema é possível se e só se* $car(A) = c([A|b])$;
- *o sistema é possível determinado se e só se* $car(A) = c([A|b]) = n$;
- *o sistema é possível indeterminado se e só se* $car(A) = c([A|b]) < n$.

Exemplo

Consideremos o sistema de 4 equações lineares em 4 incógnitas

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} & + & 2x_2 & - & x_3 & & & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & & & & & = & 2 \\ -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ & & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 2 \end{array}\right.$$

Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz ampliada do sistema, temos

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[L_1 \leftrightarrow L_2]{} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Exemplo (continuação)

$$\xrightarrow[L_3 \to L_3 + L_1]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{L_3 \to L_3 - L_2 \\ L_4 \to L_4 - L_2}]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[L_4 \to L_4 - L_3]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

Exemplo (continuação)

O sistema correspondente à última matriz, e equivalente ao inicial, é o sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_3 + x_4 = 2 \\ 0 = -1 \end{cases}$$

que obviamente é impossível.

Exemplo

Consideremos o sistema

$$(S)\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & & & & & = & 2 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 2 \end{array}\right. .$$

Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz ampliada deste sistema obtemos a matriz

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 5 \end{array}\right]$$

Exemplo (continuação)

à qual corresponde o sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ & & -x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 1 \\ & & & & 2x_3 & + & 2x_4 & = & -4 \\ & & & & & - & x_4 & = & 5 \end{array}\right.$$

Uma vez que $car(A) = car(A|b) = 4$, *o sistema é possível e determinado. De facto, da última equação resulta que* $x_4 = -5$ *e substituindo sucessivamente nas equações anteriores, obtemos* $x_3 = 3$, $x_2 = 1$, $x_1 = 1$.

Exemplo

Consideremos o sistema (S) de 3 equações lineares em 3 incógnitas:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & & & + & 4x_3 & = & 8 \\ -x_1 & + & 4x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \end{array}\right. .$$

Como

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 8 \\ -1 & 4 & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{l_2 \to l_2 - 2l_1 \\ l_3 \to l_3 + l_1}]{} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Exemplo (continuação)

$$\xrightarrow[l_3 \to l_3 - \frac{1}{6} l_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

concluímos que $c\,(A) = c\,(A|b) = 2 < 3$, *pelo que o sistema é possível indeterminado. O sistema correspondente à última matriz é dado por*

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ \qquad 6x_2 = 6 \end{cases}$$

onde x_3 *é arbitrário,* $x_2 = 1$, $x_1 = 4 - 2x_3$.

Assim, $Sol_{(S)} = \{(4 - 2a, 1, a) \in \mathbb{R}^3 : a \in \mathbb{R}\}$.

No caso particular dos sistemas homogéneos já havíamos observado que estes sistemas são sempre possíveis. Agora, com base no teorema anterior, sabe-se também que o sistema $Ax = 0$, com $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, é determinado se e só $car(A) = n$.

Definição

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ e $Ax = b$, com $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, um sistema de equações lineares. Dá-se a designação de ***sistema homogéneo associado a $Ax = b$*** *ao sistema $Ax = 0$.*

O conjunto de soluções de um sistema e do sistema homogéneo associado estão relacionados de acordo com o estabelecido no teorema seguinte.

Teorema

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$, $Ax = b$ *um sistema de equações lineares, com* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, *e* $y \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$ *uma solução do sistema. Então* $w \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$ *é solução de* $Ax = b$ *se e só se* $w = y + z$, *onde* $z \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$ *é solução de* $Ax = 0$.

Demonstração.

Seja $y \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$ uma solução de $Ax = b$.

Suponhamos que $z \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$ é uma solução do sistema homogéneo $Ax = 0$. Então

$$A(y + z) = Ay + Az = b + 0 = b,$$

pelo que $w = y + z$ é solução de $Ax = b$.

Reciprocamente, suponhamos que w é solução de $Ax = b$. Então

$$A(w - y) = Aw - Ay = b - b = 0.$$

Por conseguinte, w pode escrever-se como a soma de y com uma solução do sistema $Ax = 0$, pois $w = y + (w - y)$ onde $w - y$ é solução de $Ax = 0$. $\square$

Do teorema anterior segue de imediato o resultado seguinte.

Corolário

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ *e* $Ax = b$ *um sistema de equações lineares, com* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. *Então, se for possível, o sistema* $Ax = b$ *é determinado se e só se o sistema homogéneo associado é determinado (i.e., admite como única solução* $0_{n\times 1}$*).*

Inversão de matrizes

A determinação da inversa de uma matriz, caso exista, corresponde à resolução de um sistema de equações lineares. Assim sendo, o método de eliminação de Gauss-Jordan, para além de nos facultar um algoritmo para a resolução de sistemas, dá-nos também um processo para o cálculo da inversa de matrizes invertíveis.

Antes de vermos de que forma o método de eliminação de Gauss-Jordan pode ser aplicado no cálculo da inversa de uma matriz, apresentamos uma caracterização de matrizes invertíveis que nos permite decidir sobre a invertibilidade de uma matriz através do cálculo da sua característica.

Teorema

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Então A é invertível se e só se $car(A) = n$.

Demonstração.

Suponha-se que A é invertível. Então

$$Ax = 0 \Rightarrow A^{-1}(Ax) = 0 \Rightarrow (A^{-1}A)x = 0 \Rightarrow x = 0$$

Logo, como o sistema $Ax = 0$ é determinado, temos $car(A) = n$.

Reciprocamente, suponha-se que $car(A) = n$ e mostremos que A é invertível. Por definição, uma matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ é invertível se existir uma matriz $X = [x_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que $AX = I_n = XA$.

Demonstração.

A existência de $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que $AX = I_n$ é equivalente à existência de

$$x_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad x_n = \begin{bmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{bmatrix}$$

tais que

$$Ax_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Ax_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad Ax_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (*)$$

Demonstração (continuação).

Como $car(A) = n$, cada um dos sistemas indicado em $(*)$ é possível e determinado, o que significa que existe $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que $AX = I_n$.

Para podermos concluir que X é a inversa de A falta verificar que $XA = I_n$.

Para tal, comecemos por mostrar que se $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ é uma matriz tal que $AB = 0$, então $B = 0$. De facto, se representarmos por b_i a coluna i de B, $i \in \{1, ..., n\}$, então de $AB = 0$ segue que, para todo $i \in \{1, ..., n\}$, $Ab_i = 0$. Como $car(A) = n$, o sistema $Ax = 0$ é determinado e, portanto, $b_i = 0$, para todo $i \in \{1, ..., n\}$. Logo $B = 0$.

Assim, de

$$A(XA - I_n) = A(XA) - A = (AX)A - A = I_nA - A = 0,$$

concluímos que $XA - I_n = 0$, i.e., $XA = I_n$. Logo, A é invertível.

Teorema

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Então A é invertível se e só A é equivalente por linhas à matriz I_n.

Demonstração.

Seja A uma matriz invertível. Então $car(A) = n$. Seja F a matriz em forma de escada reduzida equivalente por linhas à matriz A. Como $car(A) = n$, também se tem $car(F) = n$. Uma vez que F é uma matriz em forma de escada reduzida e $car(F) = n$, então F não tem linhas nulas. Considerando que os pivots de F são todos iguais a 1, então $F = I_n$.

Demonstração (continuação).

Reciprocamente, admitamos que A é equivalente por linhas à matriz I_n. Então

$$A = (E_1 \dots E_s)I_n.$$

onde E_1, ..., E_s são matrizes elementares. Uma vez que E_1, ..., E_s, I_n são matrizes invertíveis e o produto de matrizes invertíveis é uma matriz invertível, então A é invertível.

Teorema

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Então A é invertível se e só A é igual a um produto de matrizes elementares.

Demonstração.

Seja A uma matriz invertível. Então A é equivalente por linhas à matriz I_n, pelo que

$$A = (E_1 \dots E_s)I_n = E_1 \dots E_s,$$

onde E_1, ..., E_s são matrizes elementares.

Se a matriz A é igual a um produto de matrizes elementares, então A é uma matriz invertível, uma vez que as matrizes elementares são invertíveis e o produto de matrizes invertíveis é uma matriz invertível. $\square$

Já sabemos que se $A, X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ são matrizes tais que A é invertível e $AX = I_n$, então $XA = I_n$. Logo, sendo A uma matriz invertível, para determinarmos a sua inversa basta resolver os sistemas referidos em $(*)$. Além disso, uma vez que a matriz simples destes sistemas é a mesma, podemos optar pela resolução de todos os sistemas em simultâneo. Tal é conseguido aplicando o método de eliminação de Gauss-Jordan à matriz $[A \,|\, I_n]$; a matriz obtida após a aplicação deste método é a matriz $[I_n \,|A^{-1}]$.

Exemplo

Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 5 & 6 & 14 \end{bmatrix}.$$

Então, de

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 14 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[l_3 \to l_3 - 5l_1]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[l_3 \to l_3 + 2l_2]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{l_1 \to l_1 - l_3 \\ l_2 \to l_2 - \frac{2}{3}l_3}]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 6 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & \frac{10}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 3 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

Exemplo (continuação)

$$\xrightarrow[l_1 \to l_1 - l_2]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{8}{3} & -\frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 2 & 0 & \frac{10}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 3 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{l_2 \to \frac{1}{2} l_2 \\ l_3 \to \frac{1}{3} l_3}]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{18}{3} & -\frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{10}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{2}{6} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right],$$

concluímos que A admite inversa e que

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{18}{3} & -\frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{10}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{2}{6} \\ -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Teorema

Sejam $n \in \mathbb{N}$ *e* $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. *Se* $AB = I_n$, *então* A *e* B *são matrizes invertíveis,* $B^{-1} = A$ *e* $BA = I_n$.

Demonstração.

Admitamos que $AB = I_n$. Então

$$Bx = 0 \Rightarrow ABx = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Assim, o sistema $Bx = 0$ também é possível e determinado, pelo que $car(B) = n$. Logo, B é invertível. Provemos, agora, que A é invertível. De facto, como $AB = I_n$ e B é invertível, tem-se

$$A = AI_n = A(BB^{-1}) = (AB)B^{-1} = I_nB^{-1} = B^{-1}.$$

Como a matriz B^{-1} é invertível, então A é uma matriz invertível.

Considerando que $B^{-1} = A$ também se tem $BA = I_n$. $\square$

Teorema

Sejam $n \in \mathbb{N}$ *e* $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*. Então* AB *é invertível se e só se* A *e* B *são invertíveis.*

Demonstração.

Já tinhamos provado anteriormente que se A e B são invertíveis, então AB é invertível, pelo que resta provar a implicação contrária.

Para provar o resultado recíproco, comecemos por mostar que se AB é invertível, então A é invertível. No sentido de se fazer esta prova por redução ao absurdo, admitamos que AB é invertível e que A não é invertível. Então

$$car(AB) = n \text{ e } car(A) < n.$$

Demonstração (continuação).

Sejam A' uma matriz em forma de escada equivalente por linhas à matriz A e $E_p, \ldots, E_1$ matrizes elementares tais que $A' = E_p \cdots E_1 A$. Logo $A'B = E_p \cdots E_1 AB$, donde segue que

$$car(AB) = car(E_1 \cdots E_p(AB)) = car((E_p \cdots E_1 A)B) = car(A'B).$$

Como $car(AB) = n$, também se tem $car(A'B) = n$. No entanto, como $car(A) < n$, a matriz A' tem, pelo menos uma linha nula, pelo que $A'B$ também tem pelo menos uma linha nula e, portanto, $car(A'B) < n$ (contradição).

Mostremos, agora, que se AB é invertível, então B é invertível. De facto, como AB é invertível, existe $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que $(AB)X = I_n$. Então $A(BX) = I_n$ e do resultado anterior segue que BX é invertível. Consequentemente, pelo que foi provado anteriormente, B é invertível.