

# ÁLGEBRA LINEAR CC

## Exercícios - Espaços vetoriais

Lic. Ciências da Computação

2024/2025

3.1. Determine se  $\mathbb{R}^2$ , juntamente com as aplicações  $\tilde{+} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $\tilde{\cdot} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definidas em cada alínea, é um espaço vetorial real.

(a) Para quaisquer  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}$ , considere

$$(x_1, x_2) \tilde{+} (y_1, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \quad \text{e} \quad \alpha \tilde{\cdot} (x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2).$$

(b) Para quaisquer  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}$ , considere

$$(x_1, x_2) \tilde{+} (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, 0) \quad \text{e} \quad \alpha \tilde{\cdot} (x_1, x_2) = (\alpha x_1, 0).$$

(c) Para quaisquer  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}$ , considere

$$(x_1, x_2) \tilde{+} (y_1, y_2) = (x_1, x_2 - y_2) \quad \text{e} \quad \alpha \tilde{\cdot} (x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2).$$

3.2. Seja  $n \in \mathbb{N}$ . Mostre que  $\mathbb{R}^n$ , algebrizado com as aplicações  $+$  :  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $\cdot$  :  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  definidas, respetivamente, por

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n),$$

$$\alpha \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n),$$

para quaisquer  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $(x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ , é um espaço vetorial real.

3.3. Sejam  $u, v \in \mathbb{R}^n$  e  $S$  um subespaço do espaço vetorial real  $\mathbb{R}^n$ . Mostre que

(a) Se  $v \in S$ , então  $-v \in S$ .

(b) Se  $u, v \in S$ , então  $u - v \in S$ .

(c) Se  $u + v \in S$  e  $u \in S$ , então  $v \in S$ .

(d) Se existe  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  tal que  $\alpha v \in S$ , então  $v \in S$ .

3.4. Determine quais dos seguintes conjuntos são subespaços do espaço vetorial real indicado.

(a)  $W_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 = 0 \text{ e } x_2 + 2x_3 = 0\}$  em  $\mathbb{R}^3$ .

(b)  $W_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 = -5x_2 \text{ e } x_2 - 3x_3 = 0\}$  em  $\mathbb{R}^4$ .

(c)  $W_3 = \{(0, a, b, -1) \in \mathbb{R}^4 : a, b \in \mathbb{R}\}$  em  $\mathbb{R}^4$ .

(d)  $W_4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_3 = 2 \text{ e } x_2 - 3x_3 = 0\}$  em  $\mathbb{R}^4$ .

(e)  $W_5 = \{a(1, 2) \in \mathbb{R}^2 : a \in \mathbb{R}\}$  em  $\mathbb{R}^2$ .

(f)  $W_6 = \{a(1, 2) + b(-3, 1) \in \mathbb{R}^2 : a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}_0^+\}$  em  $\mathbb{R}^2$ .

3.5. Considere o espaço vetorial real  $\mathbb{R}^3$  e, para cada  $t \in \mathbb{R}$ , o conjunto

$$V_t = \{(1 - t, (3 - t)x, t^2 - 1) \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{R}\}.$$

Determine, caso existam, os valores de  $t$  para os quais  $V_t$  é subespaço vetorial do espaço vetorial real  $\mathbb{R}^3$ .

3.6. Considere os seguintes subespaços vetoriais do espaço vetorial real  $\mathbb{R}^3$ :

$$V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\},$$

$$V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y + z = 0, y - z = 0\},$$

$$V_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y = 0, z = 0\}.$$

(a) Mostre que

i.  $V_2 = \{(b, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 : b \in \mathbb{R}\}.$

ii.  $V_3 = \{(2a, a, 0) \in \mathbb{R}^3 : a \in \mathbb{R}\}.$

(b) Diga, justificando, se:

i.  $(7, 1, -2) \in V_3 + V_2;$

ii.  $V_1 \subseteq V_2, V_2 \subseteq V_1, V_2 \subseteq V_3, V_3 \subseteq V_2;$

iii.  $V_1 \cap V_3, V_2 + V_3, V_1 \cup V_2, V_2 \cup V_3$  são subespaços vetoriais do espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$ ;

iv.  $\mathbb{R}^3$  é soma direta de  $V_1$  e  $V_3$ ;

v.  $\mathbb{R}^3$  é soma direta de  $V_2$  e  $V_3$ .

3.7. Verifique se

(a)  $(1, -1)$  é combinação linear de  $(3, 6), (1, 2), (2, 4)$ , no espaço vetorial real  $\mathbb{R}^2$ .

(b)  $(1, -4, 5)$  é combinação linear de  $(1, -1, 1), (2, 1, -2)$ , no espaço vetorial real  $\mathbb{R}^3$ .

(c)  $(3, 0, 2)$  é combinação linear de  $(-1, 0, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1)$ , no espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$ .

(d)  $(0, 2, 1)$  é combinação linear de  $(-1, 0, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1)$ , no espaço vetorial real  $\mathbb{R}^3$ .

(e)  $(1, 2, 0, 3)$  é combinação linear de  $(1, -2, 0, 1), (0, 1, -1, 1), (0, 0, 2, 1)$ , no espaço vetorial real  $\mathbb{R}^4$ .

(f)  $(1, 0, -4, 2)$  é combinação linear de  $(1, -2, 0, 1), (0, 1, -1, 1), (0, 0, 2, 1)$ , no espaço vetorial real  $\mathbb{R}^4$ .

3.8. Em cada um dos espaços vetoriais  $V$  a seguir indicados, determine o subespaço vetorial de  $V$  gerado por  $S$ .

(a)  $V = \mathbb{R}^3, S = \{(1, 1, 1)\}.$

(b)  $V = \mathbb{R}^3, S = \{(0, 0, 0)\}.$

(c)  $V = \mathbb{R}^3, S = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}.$

(d)  $V = \mathbb{R}^3, S = \{(1, 2, 3), (-2, -4, -6), (4, 8, 12)\}.$

(e)  $V = \mathbb{R}^4, S = \{(1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 1, 1)\}.$

(f)  $V = \mathbb{R}^4, S = \{(2, 1, 0, 0), (2, 0, 2, 0), (3, 1, 1, 0)\}.$

3.9. Considere o espaço vetorial real  $\mathbb{R}^3$ . Mostre que

(a)  $\{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$  é um conjunto gerador de  $\mathbb{R}^3$ .

(b)  $\{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 1, 1)\}$  é um conjunto gerador de  $\mathbb{R}^3$ .

(c)  $\{(1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$  não é um conjunto gerador de  $\mathbb{R}^3$ .

3.10. Determine dois conjuntos distintos de geradores de cada um dos seguintes subespaços vetoriais de  $\mathbb{R}^4$ :

(a)  $\mathbb{R}^4$ .

(b)  $\{(a, c - a, c, 2c) \in \mathbb{R}^4 : a, c \in \mathbb{R}\}.$

(c)  $\{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : a + c = 0, 2b + d + c = 0\}.$

3.11. Seja  $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 2y\}$ .

- (a) Indique vetores  $u, v \in \mathbb{R}^3$  tais que  $u \in F$  e  $v \notin F$ .
- (b) Mostre que  $F$  é um subespaço de  $\mathbb{R}^3$  indicando um conjunto gerador de  $F$ .
- (c) Diga, justificando, se  $F = \langle (6, 3, 0), (-2, -1, 5), (0, 0, 3) \rangle$ .

3.12. Sejam  $n \in \mathbb{N}$  e  $u_1, u_2, u_3$  vetores do espaço vetorial real  $\mathbb{R}^n$ . Justifique que:

- (a)  $\langle u_1, u_2, u_3 \rangle = \langle u_1, u_1 + u_2, u_1 + u_2 + u_3 \rangle$ .
- (b)  $\langle u_1, u_2, u_3 \rangle = \langle -u_3, -u_1 + u_2, 2u_2 + u_3 \rangle$ .

3.13. No espaço vetorial real  $\mathbb{R}^4$ , sejam  $v_1 = (1, 0, 0, -1)$ ,  $v_2 = (1, -2, 0, 1)$ ,  $v_3 = (0, 1, 0, -1)$  e  $W = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ . Indique, caso exista:

- (a) um conjunto gerador de  $W$  que tenha exatamente 4 vetores.
- (b) um conjunto  $\{w_1, w_2, w_3\}$  que gere  $W$  e tal que  $w_j \neq v_1, \forall j \in \{1, 2, 3\}$ .
- (c) um conjunto gerador de  $W$  que tenha exatamente 2 vetores.

3.14. Sejam  $n \in \mathbb{N}$  e  $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ . Mostre que;

- (a) Se  $X \subseteq Y$ , então  $\langle X \rangle \subseteq \langle Y \rangle$ .
- (b)  $\langle X \cup Y \rangle = \langle X \rangle + \langle Y \rangle$ .

3.15. Diga se são linearmente independentes as sequências de vetores a seguir indicadas:

- (a)  $((1, 0), (1, 1))$  em  $\mathbb{R}^2$ .
- (b)  $((1, 0), (1, 1), (0, -1))$  em  $\mathbb{R}^2$ .
- (c)  $((2, 0, 1), (0, 0, -1), (-1, 1, 2))$  no espaço vetorial real  $\mathbb{R}^3$ .
- (d)  $((1, 2, 3), (-1, 1, 1), (2, 0, 1), (0, 2, 1))$  no espaço vetorial real  $\mathbb{R}^3$ .
- (e)  $((0, 1, 1, 0), (-1, 0, 1, 1), (1, 1, 0, -1))$  no espaço vetorial real  $\mathbb{R}^4$ .
- (f)  $((1, 1, 1, 0), (2, 0, 2, 3), (-1, 1, 0, 1), (1, 1, 0, 2))$  no espaço vetorial real  $\mathbb{R}^4$ .

3.16. Sejam  $n \in \mathbb{N}$  e  $v_1, \dots, v_n, v_{n+1}$  elementos do espaço vetorial real  $\mathbb{R}^n$  tais que a sequência  $(v_1, \dots, v_n)$  é linearmente independente. Diga, justificando, se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações seguintes.

- (a)  $(v_1, \dots, v_n)$  é uma base de  $\mathbb{R}^n$ .
- (b) A sequência de vetores  $(v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n)$  é linearmente independente.
- (c) A sequência de vetores  $(v_1, \dots, v_n, v_{n+1})$  é linearmente dependente.
- (d) Para qualquer  $\alpha \in \mathbb{R}$ , a sequência de vetores  $(v_1, \dots, \alpha v_i, \dots, v_n)$  é linearmente independente.
- (e) Para qualquer  $\alpha \in \mathbb{R}$ , a sequência de vetores  $(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i + \alpha v_j, v_{i+1}, \dots, v_n)$ , onde  $j \neq i$ , é linearmente independente.

3.17. Considere, no espaço vetorial real  $\mathbb{R}^4$ , os subespaços

$$\begin{aligned} U &= \{(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^4 : a_1 - a_4 = 0, a_4 - a_3 = 0\} \\ W_1 &= \{(b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{R}^4 : b_2 + 2b_3 = 0, b_1 + 2b_3 - b_4 = 0\} \\ W_2 &= \langle (1, 1, 1, 0), (-1, 1, 0, 1), (1, 3, 2, 1), (-3, 1, -1, 2) \rangle. \end{aligned}$$

- (a) Diga, justificando, se  $((1, 1, 1, 1), (0, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 1))$  é uma base de  $U$ .
- (b) Determine uma base de:
  - i.  $W_1$ .
  - ii.  $W_2$ .

3.18. Determine uma base de  $W \cap U$  e uma base de  $W + U$  onde

- (a)  $W = \langle (0, 0, -1), (1, 0, 2) \rangle$  e  $U = \langle (0, 1, 1), (-1, 3, 2) \rangle$  são subespaços do espaço vetorial real  $\mathbb{R}^3$ .
- (b)  $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + 2x_4 = 0\}$  e  $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_4 = 0\}$  são subespaços do espaço vetorial real  $\mathbb{R}^4$ .
- (c)  $W = \{(y, 2y - x, x + y, z) \in \mathbb{R}^4 \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$  e  $U = \{(\alpha, 3\alpha, 0, -\alpha) \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$  são subespaços do espaço vetorial real  $\mathbb{R}^4$ .

3.19. Indique, se existir, uma base do espaço vetorial real  $\mathbb{R}^4$  da qual façam parte os vetores:

- (a)  $(1, 0, -1, 2), (1, 0, 1, 0)$ .
- (b)  $(0, 1, 1, -1), (0, 1, 0, 2), (0, 2, 1, 1)$ .
- (c)  $(1, -1, -1, 2), (0, 1, 2, 0), (1, 0, 1, -2)$ .

3.20. Determine um suplementar de:

- (a)  $W = \langle (1, 0, -1, 2), (1, 0, 1, 0) \rangle$  relativamente a  $\mathbb{R}^4$ .
- (b)  $U = \langle (1, -1, -1, 2), (0, 1, 2, 0), (1, 0, 1, -2) \rangle$  relativamente a  $\mathbb{R}^4$ .
- (c)  $F = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : 2a + b = 0 \text{ e } c = 0\}$  relativamente a  $\mathbb{R}^4$ .

3.21. Sejam  $n \in \mathbb{N}$ ,  $W, U$  subespaços do espaço vetorial real  $\mathbb{R}^n$ ,  $(w_1, w_2, w_3, w_4)$  uma base de  $W$  e  $(u_1, u_2, u_3)$  uma base de  $U$ . Sendo  $z_1 = 2w_1 + w_2 - w_3 = u_1 + 2u_2$  e  $z_2 = -w_2 + w_4 = u_2 - u_3$ , admita que  $(z_1, z_2)$  é base de  $W \cap U$ .

Indique, justificando,

- (a) uma base de  $W$  que inclua  $z_1, z_2$ .
- (b) uma base de  $U$  que inclua  $z_1, z_2$ .
- (c) uma base de  $W + U$ .

3.22. Sejam  $n \in \mathbb{N}$  e  $W, U$  subespaços vetoriais do espaço vetorial real  $\mathbb{R}^n$ . Diga, justificando, se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações seguintes:

- (a) Se  $\dim W \leq \dim U$ , então  $W \subseteq U$ .
- (b) Se  $\dim W = \dim U$ , então  $\dim(W + U) = \dim W + \dim U$ .
- (c) Se  $\dim U + \dim W = \dim \mathbb{R}^n$ , então  $\mathbb{R}^n$  é soma direta de  $U$  e  $W$ .
- (d) Se  $\dim(U + W) = \dim \mathbb{R}^n$ , então  $\mathbb{R}^n$  é soma direta de  $U$  e  $W$ .
- (e) Se  $\dim(U + W) = \dim U + \dim W$ , então  $V$  é soma direta de  $U$  e  $W$ .
- (f) Se  $V$  é soma direta de  $U$  e  $W$ , então  $\dim(U + W) = \dim U + \dim W$ .

3.23. Usando o conceito de característica de uma matriz, determine a dimensão dos subespaços vetoriais:

- (a)  $\langle (3, -1, 4), (2, 1, 3), (1, 0, 2) \rangle$  de  $\mathbb{R}^3$ ;
- (b)  $\langle (0, 1, 1, 2), (-2, 1, 0, 1), (3, 1, 5, 2), (1, 0, 3, -1) \rangle$  de  $\mathbb{R}^4$ .
- (c)  $\langle (1, 2, 1, 2), (-2, -4, 0, 2), (3, 2, 1, 0), (6, 0, 3, -3) \rangle$  de  $\mathbb{R}^4$ .

3.24. Considere os seguintes vetores do espaço vetorial real  $\mathbb{R}^3$ :

$$v_1 = (\alpha, 6, -1), v_2 = (1, \alpha, -1), v_3 = (2, \alpha, -3).$$

- (a) Determine os valores do parâmetro real  $\alpha$  para os quais  $(v_1, v_2, v_3)$  é uma base de  $\mathbb{R}^3$ .
- (b) Para um dos valores de  $\alpha$  determinados na alínea anterior, calcule as coordenadas do vetor  $v = (-1, 1, 2)$  em relação à base  $(v_1, v_2, v_3)$ .

3.25. Sejam  $V$  um espaço vetorial real e  $(v_1, v_2, v_3, v_4)$  uma sequência linearmente independente de vetores de  $V$ . Para  $k \in \mathbb{R}$ , seja  $G_k = \langle v_1 + v_4, kv_2 - v_3 - v_4, v_1 + v_2 - v_3, -v_2 + v_3 + k^2v_4 \rangle$ . Seja  $W = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$ .

(a) Determine os valores de  $k$  para os quais

- i.  $\dim G_k = 4$ .      ii.  $\dim G_k = 3$ .

(b) Encontre uma base de  $W$  que inclua os vetores  $v_1 + v_4, -v_2 - v_3 - v_4, v_1 + v_2 - v_3$ .