Exercícios para a unidade curricular

Álgebra Linear CC

Licenciatura em Ciências da Computação

Carla Mendes
Departamento de Matemática
Universidade do Minho
2024/2025

Índice

2 Sistemas de equações lineares

Exercícios e resoluções

Exercício 2.1

Indique quais das seguintes matrizes são matrizes em forma de escada:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -4 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Resolução:

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ e $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Uma matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ diz-se uma ***matriz em escada*** se satisfaz as seguintes condições:

- se o primeiro elemento não nulo numa linha está na coluna j, então a linha seguinte começa com pelo menos j elementos nulos;
- se houver linhas totalmente constituídas por zeros, elas aparecem depois das outras.

Assim, são matrizes em forma de escada as matrizes A, C, E e F.

A matriz B não é uma matriz em escada, pois o primeiro elemento não nulo da linha 2 está na coluna 2 e a linha 3 não começa com 2 elementos nulos.

A matriz D não é uma matriz em escada, pois a linha 2 é uma linha nula e existem linhas abaixo da linha 2 que não são linhas nulas.

A matriz G não é uma matriz em escada, pois o primeiro elemento não nulo da linha 1 está na coluna 4 e a linha 2 não começa com 4 elementos nulos.

Exercício 2.2

Indique uma matriz em forma de escada equivalente por linhas a cada uma das seguintes matrizes.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 6 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -10 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 1 & 7 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Resolução:

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ e $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Uma matriz $Y \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ diz-se equivalente por linhas a uma matriz $X \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ se Y pode ser obtida de X por meio de operações elementares.

Considerando a sequência de operações elementares a seguir indicadas

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_2 \to l_2 - 2l_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3 \to l_3 - l_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = A',$$

obtem-se a matriz A', a qual é uma matriz equivalente por linhas à matriz A (A' é obtida de A por meio de operações elementares) e é uma matriz em forma de escada.

Considerando a sequência de operações elementares a seguir indicadas

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 6 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -10 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{l_2 \to l_2 - 3l_1 \\ l_3 \to l_3 + \frac{1}{2}l_1}]{} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -12 \\ 0 & \frac{5}{2} & -8 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[l_2 \to \frac{1}{2}l_2]{} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -6 \\ 0 & \frac{5}{2} & -8 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3 \to l_3 + \frac{5}{2}l_2]{} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & -23 \end{bmatrix} = B'$$

obtem-se a matriz B', a qual é uma matriz equivalente por linhas à matriz B (B' é obtida de B por meio de operações elementares) e é uma matriz em forma de escada.

Considerando a sequência de operações elementares a seguir indicadas

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 1 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{l_2 \to l_2 - 2l_1 \\ l_3 \to l_3 + l_1}]{} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[l_3 \to l_3 + 3l_2]{} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{bmatrix} = C'$$

obtem-se a matriz C', a qual é uma matriz equivalente por linhas à matriz C (C' é obtida de C por meio de operações elementares) e é uma matriz em forma de escada.

Considerando a sequência de operações elementares a seguir indicadas

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_2 \to l_2 - 2l_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3 \to l_3 + \frac{1}{3}l_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = D'$$

obtem-se a matriz D', a qual é uma matriz equivalente por linhas à matriz D (D' é obtida de D por meio de operações elementares) e é uma matriz em forma de escada.

Exercício 2.3

Indique a característica de cada uma das seguintes matrizes:

$$A=\begin{bmatrix}4&3&2&7\\0&3&0&2\\0&0&7&5\\0&0&0&0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}2&0&0&3\\0&0&1&7\\0&0&0&3\\0&0&0&0\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}0&1&2&0\\0&0&1&2\\0&0&0&5\\0&0&0&0\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}0&0&0&6\\0&0&0&9\\0&0&0&3\\3&0&0&0\end{bmatrix},$$

$$E=\begin{bmatrix}4&0&-2&1\\0&0&2&3\\-1&-1&0&0\\3&-1&0&4\end{bmatrix},\quad F=\begin{bmatrix}1&1&2&0\\-1&-1&2&0\\-1&0&1&1\\0&1&-2&0\end{bmatrix},\quad G=\begin{bmatrix}1&-1&3\\2&0&4\\-1&-3&1\end{bmatrix},\quad H=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&0&6\\1&1&0\end{bmatrix}.$$

Resolução:

Sejam $m,n\in\mathbb{N}$, $\mathbb{K}\in\{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$ e $A\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Designa-se por ***característica*** da matriz A, e representa-se por $\operatorname{car}(A)$, o número de pivots que surgem ao aplicar a A o método de eliminação de Gauss. Isto é, $\operatorname{car}(A)$ é o número de linhas não nulas de qualquer matriz em forma de escada que seja equivalente por linhas a A.

As matrizes A, B e C são matrizes em forma de escada com 3 linhas não nulas, logo $car(A)=3$, $car(B)=3$ e $car(C)=3$.

Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz D, tem-se

$$D=\begin{bmatrix}0&0&0&6\\0&0&0&9\\0&0&0&3\\3&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow[l_1\leftrightarrow l_4]{}\begin{bmatrix}3&0&0&0\\0&0&0&9\\0&0&0&3\\0&0&0&6\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{l_3\to l_3-\frac{1}{3}l_2\\ l_4\to l_4-\frac{2}{3}l_2}]{}\begin{bmatrix}3&0&0&0\\0&0&0&9\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=D'.$$

A matriz D' é uma matriz equivalente por linhas à matriz D (logo $car(D)=car(D')$) e é uma matriz em forma de escada com 2 linhas não nulas. Assim, $car(D)=2$.

Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz E, tem-se

$$E=\begin{bmatrix}4&0&-2&1\\0&0&2&3\\-1&-1&0&0\\3&-1&0&4\end{bmatrix}\xrightarrow[l_1\leftrightarrow l_3]{}\begin{bmatrix}-1&-1&0&0\\0&0&2&3\\4&0&-2&1\\3&-1&0&4\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{l_3\to l_3+4l_1\\ l_4\to l_4+3l_1}]{}\begin{bmatrix}-1&-1&0&0\\0&0&2&3\\0&-4&-2&1\\0&-4&0&4\end{bmatrix}\xrightarrow[l_2\leftrightarrow l_4]{}\begin{bmatrix}-1&-1&0&0\\0&-4&0&4\\0&-4&-2&1\\0&0&2&3\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[l_3\to l_3-l_2]{}\begin{bmatrix}-1&-1&0&0\\0&-4&0&4\\0&0&-2&-3\\0&0&2&3\end{bmatrix}\xrightarrow[l_4\to l_4+l_3]{}\begin{bmatrix}-1&-1&0&0\\0&-4&0&4\\0&0&-2&-3\\0&0&0&0\end{bmatrix}=E'.$$

A matriz E' é uma matriz equivalente por linhas à matriz E (logo $car(E)=car(E')$) e é uma matriz em forma de escada com 3 linhas não nulas. Assim, $car(E)=3$.

Aplicando o método de eliminação de Gauss às matrizes F, G e H, conclui-se que: $car(F)=4$, $car(G)=2$, $car(H)=3$.

Exercício 2.4

Determine, caso existam, os valores de $k \in \mathbb{R}$ para os quais a característica da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & k \end{bmatrix}$$

é inferior a 3.

Resolução:

Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz A, tem-se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & k \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{l_2 \to l_2 - 2l_1 \\ l_3 \to l_3 - l_1}]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & k-1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[l_3 \to l_3 + \frac{1}{3}l_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & k-\frac{4}{3} \end{bmatrix} = A'.$$

A matriz A' é uma matriz equivalente por linhas à matriz A (logo $car(A) = car(A')$) e é uma matriz em forma de escada. Assim,

$$car(A) < 3 \text{ se e só se } k - \frac{4}{3} = 0 \text{ se e só se } k = \frac{4}{3}.$$

Exercício 2.5

Determine, caso existam, os valores de $a \in \mathbb{R}$ para os quais a característica da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 22 & -9 \\ 3 & -1 & a^2-5 & a-3 \end{bmatrix}$$

é 3.

Resolução:

Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz A, tem-se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 22 & -9 \\ 3 & -1 & a^2-5 & a-3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{l_2 \to l_2 - 2l_1 \\ l_3 \to l_3 - 3l_1}]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -7 & 26 & -11 \\ 0 & -7 & a^2+1 & a-6 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[l_3 \to l_3 - l_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -7 & 26 & -11 \\ 0 & 0 & a^2-25 & a+5 \end{bmatrix} = A'.$$

A matriz A' é uma matriz equivalente por linhas à matriz A (logo $car(A) = car(A')$) e é uma matriz em forma de escada. Assim,

$$car(A) = 3 \text{ se e só se } (a^2 - 25 \neq 0 \text{ ou } a + 5 \neq 0) \text{ se e só se } a \neq -5.$$

Exercício 2.6

Determine o conjunto de soluções dos seguintes sistemas de equações lineares:

(a) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 - 5x_5 = 0 \\ x_2 + x_4 + 3x_5 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ 9x_1 - 2x_2 + x_3 = -9 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -9 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 5 \\ 4x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 3x_4 = 8 \\ 6x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 4x_4 = 13 \\ -4x_1 - 2x_2 - 4x_3 - 2x_4 = -10 \end{cases}$

(f) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = -1 \\ -4x_1 - 6x_2 = -2 \\ 12x_1 - 18x_2 = -6 \end{cases}$

Resolução:

(a) Sejam (S) o sistema indicado e

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -3 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

a matriz ampliada do sistema. Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz $[A|b]$, tem-se

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -3 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[l_3 \to l_3 - l_1]{} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -3 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & 5 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[l_3 \to l_3 + l_2]{} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -3 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 8 & 0 \end{array}\right] = [U|c].$$

A matriz $[U|c]$ é equivalente por linhas à matriz $[A|b]$, logo o sistema representado pela matriz $[U|c]$ e a seguir indicado

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 - 5x_5 = 0 \\ x_2 + x_4 + 3x_5 = 0 \\ 4x_3 + 8x_5 = 0 \end{cases}$$

é equivalente ao sistema (S). Deste último sistema obtem-se $x_3 = -2x_5$, $x_2 = -x_4 - 3x_5$, $x_1 = 2x_5$. Assim,

$$Sol_{(S)} = \{(2\alpha_5, -\alpha_4 - 3\alpha_5, -2\alpha_5, \alpha_4, \alpha_5) \,|\, \alpha_4, \alpha_5 \in \mathbb{R}\}.$$

(b) Sejam (S) o sistema indicado e

$$[A|b] = \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

a matriz ampliada do sistema. Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz $[A|b]$, tem-se

$$[A|b] = \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & -2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[l_3 \to l_3 - l_1]{} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[l_3 \to l_3 + 2l_2]{} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = [U|c].$$

A matriz $[U|c]$ é equivalente por linhas à matriz $[A|b]$, logo o sistema representado pela matriz $[U|c]$ e a seguir indicado

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1 \end{cases}$$

é equivalente ao sistema (S). Deste último sistema obtem-se $0 = 1$. Assim, o sistema é impossível e tem-se

$$Sol_{(S)} = \{\}.$$

(c) Sejam (S) o sistema indicado e

$$[A|b] = \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 4 \end{array}\right]$$

a matriz ampliada do sistema. Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz $[A|b]$, tem-se

$$[A|b] = \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow[l_3 \to l_3 - l_1]{} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[l_3 \to l_3 - 3l_2]{} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = [U|c].$$

A matriz $[U|c]$ é equivalente por linhas à matriz $[A|b]$, logo o sistema representado pela matriz $[U|c]$ e a seguir indicado

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

é equivalente ao sistema inicial. Deste último sistema obtem-se $x_2 = 1 - x_3$, $x_1 = 2x_3$. Assim,

$$Sol_{(S)} = \{(2\alpha_3, 1 - \alpha_3, \alpha_3) \mid \alpha_3 \in \mathbb{R}\}.$$

(d) Sejam (S) o sistema indicado e

$$[A|b] = \left[\begin{array}{rrr|r} 3 & -1 & 1 & -1 \\ 9 & -2 & 1 & -9 \\ 3 & 1 & -2 & -9 \end{array}\right]$$

a matriz ampliada do sistema. Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz $[A|b]$, tem-se

$$[A|b] = \left[\begin{array}{rrr|r} 3 & -1 & 1 & -1 \\ 9 & -2 & 1 & -9 \\ 3 & 1 & -2 & -9 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{l_2 \to l_2 - 3l_1 \\ l_3 \to l_3 - l_1}]{} \left[\begin{array}{rrr|r} 3 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -6 \\ 0 & 2 & -3 & -8 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[l_3 \to l_3 - 2l_2]{} \left[\begin{array}{rrr|r} 3 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] = [U|c].$$

A matriz $[U|c]$ é equivalente por linhas à matriz $[A|b]$, logo o sistema representado pela matriz $[U|c]$ e a seguir indicado

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ \quad\;\; x_2 - 2x_3 = -6 \\ \qquad\quad\;\; x_3 = 4 \end{cases}$$

é equivalente ao sistema inicial. Deste último sistema obtem-se $x_3 = 4$, $x_2 = 2$, $x_1 = -1$. Assim,

$$Sol_{(S)} = \{(-1, 2, 4)\}.$$

(e) Sejam (S) o sistema indicado e

$$[A|b] = \left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 7 & 3 & 8 \\ 6 & 4 & 9 & 4 & 13 \\ -4 & -2 & -4 & -2 & -10 \end{array}\right]$$

a matriz ampliada do sistema. Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz $[A|b]$, tem-se

$$[A|b] = \left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 7 & 3 & 8 \\ 6 & 4 & 9 & 4 & 13 \\ -4 & -2 & -4 & -2 & -10 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{l_2 \to l_2 - 2l_1 \\ l_3 \to l_3 - 3l_1 \\ l_4 \to l_4 + 2l_1}]{} \left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[l_3 \to l_3 - l_2]{} \left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = [U|c].$$

A matriz $[U|c]$ é equivalente por linhas à matriz $[A|b]$, logo o sistema representado pela matriz $[U|c]$ e a seguir indicado

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = -1 \\ \qquad\;\; x_2 + 3x_3 + x_4 = -2 \end{cases}$$

é equivalente ao sistema inicial. Deste último sistema obtem-se $x_2 = -2 - 3x_3 - x_4$, $x_1 = \frac{x_3}{2} + \frac{1}{2}$. Assim,

$$Sol_{(S)} = \left\{ \left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha_3}{2}, -2 - 3\alpha_3 - \alpha_4, \alpha_3, \alpha_4 \right) \mid \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R} \right\}.$$

(e) Sejam (S) o sistema indicado e

$$[A|b] = \left[\begin{array}{rr|r} 2 & -3 & -1 \\ -4 & -6 & -2 \\ 12 & -18 & -6 \end{array}\right]$$

a matriz ampliada do sistema. Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz $[A|b]$, tem-se

$$[A|b] = \left[\begin{array}{rr|r} 2 & -3 & -1 \\ -4 & -6 & -2 \\ 12 & -18 & -6 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{l_2 \to l_2 + 2l_1 \\ l_3 \to l_3 - 6l_1}]{} \left[\begin{array}{rr|r} 2 & -3 & -1 \\ 0 & -12 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = [U|c].$$

A matriz $[U|c]$ é equivalente por linhas à matriz $[A|b]$, logo o sistema representado pela matriz $[U|c]$ e a seguir indicado

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & - & 3x_2 & = & -1 \\ & - & 12x_2 & = & -4 \end{array}\right.$$

é equivalente ao sistema inicial. Deste último sistema obtem-se $x_2 = \frac{1}{3}$, $x_1 = 0$. Assim,

$$Sol_{(S)} = \left\{\left(0, \frac{1}{3}\right)\right\}.$$

Exercício 2.7

Efectue os seguintes produtos de matrizes

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}; \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix};$$

Com base nos resultados obtidos indique um sistema de equações lineares:

(a) com três equações e quatro incógnitas que tenha $(0, 1, 1, 0)$ como solução.

(b) com três equações e duas incógnitas que tenha $(-1, 1)$ como solução.

(c) com três equações e três incógnitas que seja possível e indeterminado.

Resolução:

Temos

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

(a) Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

O sistema cuja matriz ampliada é $[A|b]$, ou seja, o sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & = & 2 \\ x_1 & & & - & x_3 & + & 2x_4 & = & -1 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 1 \end{array}\right.,$$

é um sistema a 3 equações e 4 incógnitas e admite $(0, 1, 1, 0)$ como solução, pois

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

O sistema cuja matriz ampliada é $[A|b]$, ou seja, o sistema

$$\begin{cases} x_1 & + & 3x_2 & = & 2 \\ & - & x_2 & = & -1 \\ -x_1 & + & x_2 & = & 2 \end{cases},$$

é um sistema a 3 equações e 2 incógnitas e admite $(-1,1)$ como solução, pois

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

(c) Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

O sistema cuja matriz ampliada é $[A|b]$, ou seja, o sistema

$$\begin{cases} x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 4 \\ & & x_2 & & & = & 3 \end{cases},$$

é um sistema a 3 equações e 3 incógnitas e é indeterminado, pois admite $(-1,3,-2)$ e $(-5,3,0)$ como soluções, uma vez que

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Exercício 2.8

Sejam A uma matriz real de ordem 4×5 e b uma matriz coluna real de ordem 4×1. Classifique o sistema $Ax = b$ sabendo que

(a) $car(A) = car([A|b]) = 4$.

(b) $car(A) = 3$ e $car([A|b]) = 4$.

(c) o vetor $(1, 0, -1, 1, 2)$ é solução do sistema $Ax = b$.

Resolução:

(a) Como $car(A) = car([A|b])$, o sistema $Ax = b$ é possível. Considerando que a matriz simples do sistema é do tipo 4×5, o sistema é um sistema a 4 equações e 5 incógnitas. Uma vez que $car(A) = 4 < 5 =$ nº incógnitas, o sistema é indeterminado.

(b) Como $car(A) \neq car([A|b])$, o sistema $Ax = b$ é impossível.

(c) O sistema é possível, pois admite pelo menos uma solução. Considerando que a matriz simples do sistema é do tipo 4×5, o sistema é um sistema a 4 equações e 5 incógnitas. Como a matriz A tem 4 linhas, então $car(A) \leq 4$. Logo, $car(A) < 5 =$ nº incógnitas, pelo que o sistema é indeterminado.

Exercício 2.9

Diga, justificando, se cada um dos seguintes sistemas de equações lineares sobre $\mathbb{R}$ é possível e, em caso afirmativo, indique se é determinado ou indeterminado:

(a) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 6x_3 = 6 \\ -x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 2 \\ + x_2 + x_3 + 3x_4 = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 + x_3 + 7x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = -2 \end{cases}$

Resolução:

(a) A matriz ampliada do sistema é

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \end{array}\right].$$

Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz $[A|b]$, obtemos a matriz $[U|c]$ a seguir indicada

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow[l_3 \to l_3 - 2l_1]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[l_3 \to l_3 - l_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = [U|c].$$

As matrizes U e $[U|c]$ são equivalentes por linhas às matrizes A e $[A|b]$, respetivamente. Logo, $car(A) = car(U)$ e $car([A|b]) = car([U|c])$. A matriz U é uma matriz em escada com 2 linhas não nulas, pelo que $car(A) = 2$; a matriz $[U|C]$ é uma matriz em escada com 3 linhas não nulas e, portanto $car([A|b]) = 3$. Como $car(A) = 2 \neq 3 = car([A|b])$, conclui-se que o sistema indicado é impossível.

(b) Seja

$$[A|b] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

a matriz ampliada do sistema. Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz $[A|b]$, obtemos a matriz $[U|c]$ a seguir indicada

$$[A|b] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[l_2 \to l_2 - l_1]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[l_3 \to l_3 - l_2]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = [U|c].$$

As matrizes U e $[U|c]$ são equivalentes por linhas às matrizes A e $[A|b]$, respetivamente. Logo, $car(A) = car(U)$ e $car([A|b]) = car([U|c])$. A matriz U é uma matriz em escada com 2 linhas não nulas, pelo que $car(A) = 2$; a matriz $[U|c]$ é uma matriz em escada com 2 linhas não nulas e, portanto

$car([A|b]) = 2$. Como $car(A) = 2 = car([A|b])$, conclui-se que o sistema indicado é possível. Considerando que $car(A) = 2 < 4 =$ nº incógnitas, concluímos que o sistema é indeterminado.

(c) Seja

$$[A|b] = \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 6 & 6 \\ -1 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

a matriz ampliada do sistema. Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz $[A|b]$, obtemos a matriz $[U|c]$ a seguir indicada

$$[A|b] = \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 6 & 6 \\ -1 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{l_2 \to l_2 - 2l_1 \\ l_3 \to l_3 + l_1}]{} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 6 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[l_3 \to l_3 - \frac{1}{4}l_2]{} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{array}\right] = [U|c].$$

As matrizes U e $[U|c]$ são equivalentes por linhas às matrizes A e $[A|b]$, respetivamente. Logo, $car(A) = car(U)$ e $car([A|b]) = car([U|c])$. A matriz U é uma matriz em escada com 3 linhas não nulas, pelo que $car(A) = 3$; a matriz $[U|C]$ é uma matriz em escada com 3 linhas não nulas e, portanto $car([A|b]) = 3$. Como $car(A) = 3 = car([A|b])$, conclui-se que o sistema indicado é possível. Considerando que $car(A) = 3 =$ nº incógnitas, concluímos que o sistema é determinado.

(d) Seja

$$[A|b] = \left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & 3 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 7 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & -2 \end{array}\right]$$

a matriz ampliada do sistema. Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz $[A|b]$, obtemos a matriz $[U|c]$ a seguir indicada

$$[A|b] = \left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & 3 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 7 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{l_3 \to l_3 - 2l_1 \\ l_4 \to l_4 - l_1}]{} \left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & 3 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & -6 & -4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{l_3 \to l_3 + l_2 \\ l_4 \to l_4 + 2l_2}]{} \left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & 3 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = [U|c].$$

As matrizes U e $[U|c]$ são equivalentes por linhas às matrizes A e $[A|b]$, respetivamente. Logo, $car(A) = car(U)$ e $car([A|b]) = car([U|c])$. A matriz U é uma matriz em escada com 2 linhas não nulas, pelo que $car(A) = 2$; a matriz $[U|C]$ é uma matriz em escada com 2 linhas não nulas e, portanto $car([A|b]) = 2$. Como $car(A) = 2 = car([A|b])$, conclui-se que o sistema indicado é possível. Considerando que $car(A) = 2 < 4 =$ nº incógnitas, concluímos que o sistema é indeterminado.

Exercício 2.10

Construa um sistema de equações lineares, de coeficientes reais, de quatro equações a três incógnitas que seja:

(a) Possível e determinado.
(b) Possível e indeterminado.
(c) Impossível.

Resolução:

Sejam $m, n \in \mathbb{K}$ e $Ax = b$ um sistema de equações lineares, com $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Então o sistema $Ax = b$ é:

- possível se e só se $car(A) = car(A|b)$;
- possível determinado se e só se $car(A) = car(A|b) = n$;
- possível indeterminado se e só se $car(A) = car(A|b) = n$.

(a) O sistema (S)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \\ 2x_3 = 0 \end{cases},$$

representado pela matriz ampliada

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right],$$

é um sistema possível e determinado, uma vez que $car(A) = car(A|b) = 3 = \text{n}^{\text{o}}$ incógnitas.

(b) O sistema (S)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases},$$

representado pela matriz ampliada

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right],$$

é um sistema possível e indeterminado, uma vez que $car(A) = car(A|b) = 2 < 3 = \text{n}^{\text{o}}$ incógnitas.

(c) O sistema (S)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases},$$

representado pela matriz ampliada

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right],$$

é um sistema impossível, pois $car(A) = 2 < 3 = car(A|b)$.

Exercício 2.11

Discuta, em função dos parâmetros t e k, cada um dos seguintes sistemas de equações lineares nas incógnitas x_1, x_2, x_3 e de coeficientes em $\mathbb{R}$:

(a) $$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + kx_2 + 6x_3 = 6 \\ -x_1 + 3x_2 + (k-3)x_3 = 0 \end{cases}$$

(b) $$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + kx_3 = 2 \\ x_1 + tx_2 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + kx_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases}$$

(c) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ -x_1 - kx_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 - x_2 + (k+1)x_3 = t-2 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + kx_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = t \end{cases}$

Resolução:

Um sistema com matriz amplidada $[A|b]$ é:

- impossível se e só se $car(A) \neq car([A|b])$,
- possível determinado se e só se $car(A) = car([A|b]) = $ nº incógnitas,
- possível indeterminado se e só se $car(A) = car([A|b]) <$ nº incógnitas,

(a) A matriz ampliada do sistema indicado é

$$[A|b] = \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & k & 6 & 6 \\ -1 & 3 & k-3 & 0 \end{array}\right].$$

Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz $[A|b]$, tem-se

$$[A|b] = \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & k & 6 & 6 \\ -1 & 3 & k-3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{l_2 \to l_2 - 2l_1 \\ l_3 \to l_3 + l_1}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & k+4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & k & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[l_2 \leftrightarrow l_3]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 0 & k+4 & 0 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow[l_3 \to l_3 - (k+4)l_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 0 & 0 & -k(k+4) & -k \end{array}\right] = [U|c].$$

As matrizes U e $[U|c]$ são matrizes em escada equivalentes por linhas às matrizes A e $[A|b]$, respetivamente. Assim, $car(A) = car(U)$ e $car([A|b] = car([U|c])$.

Logo,

- $car(A) = 3$ se e só se $k \in \mathbb{R} \setminus \{0, -4\}$;
- $car(A) = 2$ se e só se $k = 0$ ou $k = -4$;
- $car(A) \neq 1$ para todo $k \in \mathbb{R}$.

Para cada um dos casos anteriores, temos o seguinte:

- se $k \in \mathbb{R} \setminus \{0, -4\}$, então $car(A) = 3 = car(A|b)$, pelo que o sistema é possível. Como $car(A) =$ nº incógnitas, o sistema é determinado;
- se $k = 0$, então $car(A) = 2 = car(A|b)$, pelo que o sistema é possível. Como $car(A) <$ nº incógnitas, o sistema é indeterminado;
- se $k = -4$, então $car(A) = 2 \neq 3 = car(A|b)$, pelo que o sistema é impossível.

Considerando o observado anteriormente, concluímos que o sistema é:

- impossível se e só se $k = -4$;
- possível determinado se e só se $k \in \mathbb{R} \setminus \{0, -4\}$;
- possível indeterminado se e só se $k = 0$.

(b) A matriz ampliada do sistema indicado é

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & k & 2 \\ 1 & t & 0 & 1 \\ 1 & 2 & k & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz $[A|b]$, tem-se

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & k & 2 \\ 1 & t & 0 & 1 \\ 1 & 2 & k & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[l_1 \leftrightarrow l_4]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & t & 0 & 1 \\ 1 & 2 & k & 1 \\ 2 & 4 & k & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{l_2 \to l_2 - l_1 \\ l_3 \to l_3 - l_1 \\ l_4 \to l_4 - 2l_1}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & t-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[l_4 \to l_4 - l_3]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & t-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = [U|c].$$

As matrizes U e $[U|c]$ são matrizes em escada equivalentes por linhas às matrizes A e $[A|b]$, respetivamente. Assim, $car(A) = car(U)$ e $car([A|b] = car([U|c])$.

Logo,

- $car(A) = 3$ se e só se $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $t \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$;
- $car(A) = 2$ se e só se ($k = 0$ e $t \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$) ou ($t \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ e $t = 2$);
- $car(A) = 1$ se e só se ($k = 0$ e $t = 2$).

Para cada um dos casos anteriores, temos o seguinte:

- se $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $t \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, então $car(A) = 3 = car(A|b)$, pelo que o sistema é possível. Como $car(A) =$ nº incógnitas, o sistema é determinado;
- se $k = 0$ e $t \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, então $car(A) = 2 = car(A|b)$, pelo que o sistema é possível. Como $car(A) < 3 =$ nº incógnitas, o sistema é indeterminado;
- se $t \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ e $t = 2$, então $car(A) = 2 = car(A|b)$, pelo que o sistema é possível. Como $car(A) < 3 =$ nº incógnitas, o sistema é indeterminado;
- se $k = 0$ e $t = 2$, então $car(A) = 1 = car(A|b)$, pelo que o sistema é possível. Como $car(A) < 3 =$ nº incógnitas, o sistema é indeterminado.

Considerando o observado anteriormente, concluímos que o sistema é:

- possível, para todo $k, t \in \mathbb{R}$;
- possível determinado se e só se $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $t \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$;
- possível indeterminado se e só se $k = 0$ ou $t = 2$.

(c) A matriz ampliada do sistema indicado é

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -k & 1 & 1 \\ -1 & -1 & k+1 & t-2 \end{array}\right].$$

Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz $[A|b]$, tem-se

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -k & 1 & 1 \\ -1 & -1 & k+1 & t-2 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{l_2 \to l_2 + l_1 \\ l_3 \to l_3 + l_1}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -k+1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & k & t-1 \end{array}\right] = [U|c].$$

As matrizes U e $[U|c]$ são matrizes em escada equivalentes por linhas às matrizes A e $[A|b]$, respetivamente. Assim, $car(A) = car(U)$ e $car([A|b] = car([U|c])$.

Logo,

- $car(A) = 3$ se e só se $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $k \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$;
- $car(A) = 2$ se e só se $k = 0$ ou $k = 1$;
- $car(A) \neq 1$, para todo $k \in \mathbb{R}$.

Para cada um dos casos anteriores, temos o seguinte:

- se $k \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, então $car(A) = 3 = car(A|b)$, pelo que o sistema é possível. Como $car(A) =$ nº incógnitas, o sistema é determinado.
- se $k = 0$ e:
  - $t = 1$, então $car(A) = 2 = car(A|b)$, pelo que o sistema é possível. Como $car(A) < 3 =$ nº incógnitas, o sistema é indeterminado.
  - $t \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, então $car(A) = 2 \neq 3 = car(A|b)$, pelo que o sistema é impossível.
- se $k = 1$, então $car(A) = 2 \neq 3 = car(A|b)$, pelo que o sistema é impossível.

Considerando o observado anteriormente, concluímos que o sistema é:

- impossível sse ($k = 0$ e $t \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$) ou $k = 1$;
- possível determinado se e só se $k \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$;
- possível indeterminado se e só se $k = 0$ e $t = 1$.

(d) A matriz ampliada do sistema indicado é

$$[A|b] = \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & k & 0 \\ 1 & 2 & 1 & t \end{array}\right].$$

Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz $[A|b]$, tem-se

$$[A|b] = \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & k & 0 \\ 1 & 2 & 1 & t \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{l_2 \to l_2 - l_1 \\ l_3 \to l_3 - 2l_1 \\ l_4 \to l_4 - l_1}]{} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & k-2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & t-1 \end{array}\right] = [U|c]$$

$$\xrightarrow[l_4 \to l_4 + \frac{1}{2}l_2]{} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & k-2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & t-\frac{3}{2} \end{array}\right] = [U|c].$$

As matrizes U e $[U|c]$ são matrizes em escada equivalentes por linhas às matrizes A e $[A|b]$, respetivamente. Logo, $car(A) = car(U)$ e $car([A|b] = car([U|c])$. Assim,

- $car(A) = 3$ se e só se $k \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$;
- $car(A) = 2$ se e só se $k = 2$;
- $car(A) \neq 1$ para todo $k \in \mathbb{R}$.

Para cada um dos casos anteriores, temos o seguinte:

- se $k \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ e
  - $t = \frac{3}{2}$, então $car(A) = 3 = car(A|b)$, pelo que o sistema é possível.
    Como $car(A) = \text{n}^{\text{o}}$ incógnitas, o sistema é determinado;
  - $t \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{2}\}$, então $car(A) = 3 < 4 = car(A|b)$, pelo que o sistema é impossível;
- se $k = 2$, então $car(A) = 2 < car(A|b)$, pelo que o sistema é impossível.

Considerando o observado anteriormente, concluímos que o sistema é:

- impossível sse $k = 2$ ou ($k \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ e $t \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{2}\}$),
- possível determinado se e só se $k \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ e $t = \frac{3}{2}$.

Exercício 2.12
Para $t, k \in \mathbb{R}$, sejam

$$A_{k,t} = \begin{bmatrix} k & t & 1 \\ 1 & kt & 1 \\ 1 & t & k \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) \quad \text{e} \quad b_t = \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}).$$

(a) Determine, justificando, os valores de t e k para os quais o sistema $A_{k,t}x = b_t$ é:
   i) possível e determinado;
   ii) impossível.

(b) Resolva os sistemas $A_{0,2}x = b_2$ e $A_{1,1}x = b_1$.

Resolução:

(a) A matriz ampliada do sistema indicado é

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} k & t & 1 & 1 \\ 1 & kt & 1 & t \\ 1 & t & k & 1 \end{array}\right].$$

Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz $[A|b]$, tem-se

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} k & t & 1 & 1 \\ 1 & kt & 1 & t \\ 1 & t & k & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[l_1 \leftrightarrow l_3]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & t & k & 1 \\ 1 & kt & 1 & t \\ k & t & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{l_2 \to l_2 - l_1 \\ l_2 \to l_2 - kl_1}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & t & k & 1 \\ 0 & kt - t & 1 - k & t - 1 \\ 0 & t - kt & 1 - k^2 & 1 - k \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[l_3 \to l_3 + l_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & t & k & 1 \\ 0 & t - kt & 1 - k^2 & 1 - k \\ 0 & 0 & 2 - k - k^2 & t - k \end{array}\right] = [U|c].$$

As matrizes U e $[U|c]$ são matrizes em escada equivalentes por linhas às matrizes A e $[A|b]$, respetivamente. Logo, $car(A) = car(U)$ e $car([A|b] = car([U|c])$.

Um sistema com matriz ampliada $[A|b]$ é:

- impossível se e só se $car(A) \neq car([A|b])$;
- possível determinado se e só se $car(A) = car([A|b]) = \text{n}^{\text{o}}$ incógnitas $= 3$.

Assim, o sistema é:

- impossível sse ($k = 1$ e $t \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$) ou ($k = -2$ e $t \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$) ou ($k = -1$ e $t = 0$);
- possível determinado se e só se $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $k \in \mathbb{R} \setminus \{1, -2\}$.

(b) Resolução do sistema $A_{0,2}x = b_2$.

Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz $[A_{0,2}|b_2]$, obtem-se a seguinte matriz em escada

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right].$$

Assim, o sistema $A_{0,2} = b_2$ é equivalente ao sistema

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 2x_2 & & & = & 1 \\ & & 2x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ & & & & 2x_3 & = & 2 \end{array}\right.$$

Resolvendo este sistema por substituição inversa, obtem-se $x_3 = 1$, $x_2 = 0$ e $x_1 = 1$. Portanto,

$$Sol_{(S)} = \{(1, 0, 1)\}.$$

Resolução do sistema $A_{1,1}x = b_1$.

Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz $[A_{1,1}|b_1]$, obtem-se a seguinte matriz em escada

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Assim, o sistema $A_{1,1} = b_1$ é equivalente ao sistema

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \end{array}\right.$$

donde se obtem $x_1 = 1 - x_2 - x_3$.

Logo,

$$Sol_{(S)} = \{(1 - \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_2, \alpha_3) \,|\, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}\}.$$

Exercício 2.13

Sejam $Ax = 0$ um sistema determinado, de m equações lineares em n incógnitas, e b uma matriz coluna com m linhas. Mostre que o sistema $Ax = b$ ou é impossível ou é possível e determinado.

Resolução: Considerando que $Ax = 0$ é um sistema de m equações lineares em n incógnitas, tem-se $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Admitamos que o sistema $Ax = 0$ é determinado. Então $car(A) = $ nº incógnitas $= n$. O sistema $Ax = b$ ou é impossível ou é possível. Se $Ax = b$ é possível, então o sistema é determinado, uma vez que $car(A) = n = $ nº incógnitas.

Exercício 2.14

Considere o sistema de equações lineares $Ax = b$ onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R}), \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) \quad \text{e } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

(a) Resolva o sistema $Ax = 0$.

(b) Verifique que $[\ -1 \quad 1 \quad 1 \quad 2\ ]^T$ é solução do sistema $Ax = b$. Determine o conjunto de soluções do sistema $Ax = b$.

Resolução:

(a) O sistema (S) correspondente a $Ax = 0$ é sempre possível, pois é um sistema homogéneo. Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz A, tem-se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{l_2 \to l_2 - 2l_1 \\ l_3 \to l_3 - 3l_1}]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[l_3 \to l_3 - l_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U.$$

A matriz U é equivalente por linhas à matriz A, pelo que o sistema homogéneo com matriz simples U é equivalente ao sistema $Ax = 0$. O sistema correspondente a $Ux = 0$ é o sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ - 2x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

donde se obtem $x_2 = -x_3$ e $x_1 = x_3 - x_4$.

Logo,

$$Sol_{(S)} = \{(\alpha_3 - \alpha_4, -\alpha_3, \alpha_3, \alpha_4) \mid \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}\}.$$

(b) O vetor $[\ -1 \quad 1 \quad 1 \quad 2\ ]^T$ é solução do sistema $Ax = b$, pois

$$A \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = b.$$

Dado $w \in \mathcal{M}_{4\times 1}(\mathbb{R})$, w é solução de $Ax = b$ se e só se $w = y + z$, onde y é uma solução de $Ax = b$ e z é uma solução de $Ax = 0$. Assim, o conjunto de soluções do sistema representado por $Ax = b$ é

$$\begin{aligned} & \{(-1, 1, 1, 2) + (\alpha_3 - \alpha_4, -\alpha_3, \alpha_3, \alpha_4) \mid \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}\} \\ = \; & \{(-1 + \alpha_3 - \alpha_4, 1 - \alpha_3, 1 + \alpha_3, 2 + \alpha_4) \mid \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Exercício 2.15

Considere o sistema de equações lineares $Ax = b$ onde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R}),\ b = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 1}(\mathbb{R}) \text{ e } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}.$$

(a) Resolva o sistema $Ax = 0$ e verifique se $[\ -2 \quad 3 \quad 1 \quad -1\ ]^T$ é solução de $Ax = b$.

(b) Determine o conjunto de soluções de $Ax = b$.

Resolução:

(a) O sistema (S) correspondente a $Ax = 0$ é sempre possível, pois é um sistema homogéneo. Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz A, tem-se

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_1 \leftrightarrow l_4]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{l_2 \to l_2 - 2l_1 \\ l_3 \to l_3 - l_1}]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -2 & -9 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_2 \leftrightarrow l_4]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & -2 & -9 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{l_3 \to l_3 + 2l_2 \\ l_4 \to l_4 + 3l_2}]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -9 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_4 \to l_4 - \frac{1}{2}l_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{bmatrix} = U.$$

A matriz U é equivalente por linhas à matriz A, pelo que o sistema homogéneo com matriz simples U é equivalente ao sistema $Ax = 0$. O sistema correspondente a $Ux = 0$ é o sistema a seguir indicado

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ -8x_4 = 0 \end{cases}$$

donde se obtem $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$.

Logo, o conjunto de soluções do sistema (S) é $\{(0,0,0,0)\}$.

O vetor $\begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T$ é solução do sistema $Ax = b$, pois

$$A \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} = b.$$

(b) Dado $w \in \mathcal{M}_{4\times 1}(\mathbb{R})$, w é solução de $Ax = b$ se e só se $w = y + z$, onde y é uma solução de $Ax = b$ e z é uma solução de $Ax = 0$. Assim, o conjunto de soluções do sistema representado por $Ax = b$ é

$$\{(-2,3,1,-1) + (0,0,0,0)\} = \{(-2,3,1,-1)\}.$$

Exercício 2.16

Diga se estão em forma de escada reduzida cada uma das seguintes matrizes:

(a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. (b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. (c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. (e) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$. (f) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Resolução:

Sejam $m, n \in \mathbb{K}$ e $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Diz-se que A é uma ***matriz em escada reduzida*** ou que está em ***forma de escada reduzida*** se satisfaz as seguintes condições:

(i) A é uma matriz em escada;

(ii) se uma linha tem elementos não nulos, então o primeiro elemento não nulo da linha é igual a 1;

(iii) se o primeiro elemento não nulo de uma linha i está na coluna j, então todos os elementos da coluna j, com excepção do elemento que está na linha i, são iguais a zero.

Uma matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ diz-se uma **matriz em escada** se satisfaz as duas condições seguintes:

(1) se o primeiro elemento não nulo numa linha está na coluna j, então a linha seguinte começa com pelo menos j elementos nulos;

(2) se houver linhas totalmente constituídas por zeros, elas aparecem depois das outras.

(a) A matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

não é uma mariz em forma de escada reduzida. Embora as condições (i) e (ii) sejam satisfeitas, a condição (iii) não se verifica (o primeiro elemento não nulo da linha 2 está na coluna 3 e a linha 1 tem um elemento não nulo na coluna 3).

(b) A matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

é uma matriz em escada (satisfaz (1) e (2)) e satisfaz as condições (ii) e (iii), logo é uma matriz em forma de escada reduzida.

(c) A matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

não é uma matriz em forma de escada reduzida, pois não satisfaz a condição (ii) (o primeiro elemento não nulo da linha 2 não é igual a 1).

(d) A matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

não é uma matriz em forma de escada reduzida, pois não é uma matriz em escada (o primeiro elemento não nulo da linha 1 estão na coluna 5 e as linhas de baixo não começam com 5 zeros.

(e) A matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

é uma matriz em escada (satisfaz (1) e (2)) e satisfaz as condições (ii) e (iii), logo é uma matriz em forma de escada reduzida.

(f) A matriz

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

é uma matriz em escada (satisfaz (1) e (2)) e satisfaz as condições (ii) e (iii), logo é uma matriz em forma de escada reduzida.

Exercício 2.17

Usando o algoritmo de Gauss-Jordan calcule, se possível, a inversa de:

(a) $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$. (b) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. (c) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$. (e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$. (f) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

(g) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

Resolução:

(a) Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$. A matriz A é uma matriz do tipo 2×2. Logo, A é invertível se e só se $car(A) = 2$. Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz A, temos

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_2 \to l_2 - \frac{3}{2} l_1]{} \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = U.$$

A matriz U é uma matriz em escada, equivalente por linhas à matriz A e tem 1 linha não nula. Logo $car(A) = 1$. Como $car(A) \neq 2$, a matriz A não é invertível.

(b) Seja

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

A matriz A é uma matriz do tipo 3×3. Logo, A é invertível se e só se $car(A) = 3$. Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz A, tem-se

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_2 \to l_2 - \frac{1}{2} l_1]{} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = U.$$

A matriz U é uma matriz em escada, equivalente por linhas à matriz A e tem 3 linhas não nulas. Logo $car(A) = 3$ e, portanto, a matriz A é invertível.

Determinemos A^{-1}, aplicando o método de eliminação de Gauss-Jordan à matriz $[A|I_3]$:

$$[A|I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[l_2 \to l_2 - \frac{1}{2} l_1]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{l_2 \to l_2 - l_3 \\ l_1 \to l_1 + 2l_3}]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{l_1 \to \frac{1}{2} l_1 \\ l_2 \to -l_2 \\ l_3 \to -l_3}]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right] = [I_3|A^{-1}].$$

Logo,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

(c) Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

A matriz A é uma matriz do tipo 3×3. Logo, A é invertível se e só se $car(A) = 3$. Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz A, tem-se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{l_2 \to l_2 + l_1 \\ l_3 \to l_3 - l_1}]{} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_2 \leftrightarrow l_3]{} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = U.$$

A matriz U é uma matriz em escada, equivalente por linhas à matriz A e tem 3 linhas não nulas, logo $car(A) = 3$. Portanto, a matriz A é invertível.

Determinemos A^{-1}, aplicando o método de eliminação de Gauss-Jordan à matriz $[A|I_3]$:

$$[A|I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{l_2 \to l_2 + l_1 \\ l_3 \to l_3 - l_1}]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[l_2 \leftrightarrow l_3]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[l_1 \to l_1 - \frac{2}{3} l_3]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[l_1 \to l_1 + l_2]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[l_3 \to \frac{1}{3} l_3]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{array}\right] = [I_3|A^{-1}].$$

Logo,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}.$$

(d) Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

A matriz A é uma matriz do tipo 4×4. Logo, A é invertível se e só se $car(A) = 4$. Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz A, tem-se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3 \to l_3 - 3l_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_4 \to l_4 - 3l_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = U.$$

A matriz U é uma matriz em escada, equivalente por linhas à matriz A e tem 4 linhas não nulas, logo $car(A) = 4$. Portanto, a matriz A é invertível.

Determinemos A^{-1}, aplicando o método de eliminação de Gauss-Jordan à matriz $[A|I_4]$:

$$[A|I_4] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 4 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[l_3 \to l_3 - 3l_1]{} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[l_4 \to l_4 - 3l_2]{} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{l_1 \to l_1 + l_4 \\ l_2 \to l_2 + l_4 \\ l_3 \to l_3 - l_4}]{} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -3 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[l_1 \to l_1 + l_3]{} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -3 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[l_1 \to l_1 - l_2]{} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -3 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{l_3 \to -\frac{1}{2}l_3 \\ l_4 \to -\frac{1}{2}l_4}]{} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right] = [I_3|A^{-1}].$$

Logo,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

(e) Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

A matriz A é uma matriz do tipo 3×3. Logo, A é invertível se e só se $car(A) = 3$. A matriz A é equivalente por linhas à matriz em escada

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A matriz U tem 2 linhas não nulas e, portanto, $car(A) = 2$. Como $car(A) \neq 3$, a matriz A não é invertível.

(f) Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

A matriz A é invertível e tem-se

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

(g) Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

A matriz A é invertível e tem-se

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Exercício 2.18

Determine os valores de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ para os quais as seguintes matrizes são invertíveis

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 5+\alpha \end{bmatrix}$. (b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & \alpha+3 & 2 \\ 2 & 4 & \beta \end{bmatrix}$. (c) $\begin{bmatrix} \alpha & \alpha & 1 \\ 1 & \beta & \beta \\ 1 & \alpha+\beta & \beta \end{bmatrix}$.

(d) $\begin{bmatrix} \alpha & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \beta \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. (e) $\begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & \beta \\ \beta & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta & \alpha \end{bmatrix}$. (f) $\begin{bmatrix} \alpha & -1 & 1 & \beta \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & \alpha \end{bmatrix}$.

Resolução:

(a) Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 5+\alpha \end{bmatrix}.$$

A matriz A é uma matriz do tipo 3×3. Logo, A é invertível se e só se $car(A) = 3$. Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz A, tem-se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 5+\alpha \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{l_2 \to l_2 - l_1 \\ l_3 \to l_3 - 2l_1}]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 5+\alpha \end{bmatrix} = U.$$

A matriz U é equivalente por linhas à matriz A. Logo $car(A) = car(U)$ e, portanto,

$$car(A) = 3 \text{ se e só se } \alpha + 5 \neq 0 \text{ se e só se } \alpha \neq -5.$$

Assim, A é invertível se e só se $\alpha \neq -5$.

(b) Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & \alpha+3 & 2 \\ 2 & 4 & \beta \end{bmatrix}.$$

A matriz A é uma matriz do tipo 3×3. Logo, A é invertível se e só se $car(A) = 3$. Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz A, tem-se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & \alpha+3 & 2 \\ 2 & 4 & \beta \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{l_2 \to l_2 - l_1 \\ l_3 \to l_3 - 2l_1}]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & \alpha+1 & 1 \\ 0 & 0 & \beta-2 \end{bmatrix} = U.$$

A matriz U é equivalente por linhas à matriz A. Logo $car(A) = car(U)$ e, portanto,

$$car(A) = 3 \text{ se e só se } \alpha + 1 \neq 0 \text{ e } \beta - 2 \neq 0 \text{ se e só se } \alpha \neq -1 \text{ e } \beta \neq 2.$$

Assim, A é invertível se e só se $\alpha \neq -1$ e $\beta \neq 2$.

(c) Seja

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha & 1 \\ 1 & \beta & \beta \\ 1 & \alpha+\beta & \beta \end{bmatrix}.$$

A matriz A é uma matriz do tipo 3×3. Logo, A é invertível se e só se $car(A) = 3$. Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz A, tem-se

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha & 1 \\ 1 & \beta & \beta \\ 1 & \alpha+\beta & \beta \end{bmatrix} \xrightarrow[l_1 \leftrightarrow l_2]{} \begin{bmatrix} 1 & \beta & \beta \\ \alpha & \alpha & 1 \\ 1 & \alpha+\beta & \beta \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{l_2 \to l_2 - \alpha l_1 \\ l_3 \to l_3 - l_1}]{} \begin{bmatrix} 1 & \beta & \beta \\ 0 & \alpha-\beta\alpha & 1-\beta\alpha \\ 0 & \alpha & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[l_2 \leftrightarrow l_3]{} \begin{bmatrix} 1 & \beta & \beta \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha-\beta\alpha & 1-\beta\alpha \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3 \to l_3 - (1-\beta) l_2]{} \begin{bmatrix} 1 & \beta & \beta \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1-\beta\alpha \end{bmatrix} = U.$$

A matriz U é equivalente por linhas à matriz A. Logo $car(A) = car(U)$ e, portanto,

$$car(A) = 3 \text{ se e só se } \alpha \neq 0 \text{ e } 1 - \beta\alpha \neq 0 \text{ se e só se } \alpha \neq 0 \text{ e } \beta \neq \frac{1}{\alpha}.$$

Assim, A é invertível se e só se $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq \frac{1}{\alpha}$.

(d) Seja

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \beta \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

A matriz A é uma matriz do tipo 3×3. Logo, A é invertível se e só se $car(A) = 3$. Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz A, tem-se

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \beta \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_1 \leftrightarrow l_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \beta \\ \alpha & \alpha & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{l_2 \to l_2 - l_1 \\ l_3 \to l_3 - \alpha l_1}]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \beta-1 \\ 0 & 0 & 1-\alpha \end{bmatrix} = U.$$

A matriz U é equivalente por linhas à matriz A, pelo que $car(A) = car(U)$. Logo

$$car(A) \neq 3, \text{ para quaisquer } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Assim, A não é invertível quaisquer que sejam os valores de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(e) Seja

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & \beta \\ \beta & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta & \alpha \end{bmatrix}.$$

A matriz A é uma matriz do tipo 4×4. Logo, A é invertível se e só se $car(A) = 4$. Para analisar em que condições a matriz A é invertível, dividimos o estudo em dois casos: $\alpha = 0$ e $\alpha \neq 0$.

Caso $\alpha = 0$: Neste caso, tem-se

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \beta \\ \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \end{bmatrix}.$$

Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz A, tem-se

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \beta \\ \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_1 \leftrightarrow l_2]{} \begin{bmatrix} \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_2 \leftrightarrow l_3]{} \begin{bmatrix} \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & \beta & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[l_3 \leftrightarrow l_4]{} \begin{bmatrix} \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{bmatrix} = U.$$

A matriz U é equivalente por linhas à matriz A. Logo $car(A) = car(U)$ e, portanto,

$$car(A) = 4 \text{ se e só se } \beta \neq 0.$$

Caso $\alpha \neq 0$: Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz A, tem-se

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & \beta \\ \beta & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta & \alpha \end{bmatrix} \xrightarrow[l_2 \to l_2 - \frac{\beta}{\alpha} l_1]{} \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & \beta \\ 0 & \alpha & 0 & -\frac{\beta^2}{\alpha} \\ 0 & \beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta & \alpha \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3 \to l_3 - \frac{\beta}{\alpha} l_2]{} \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & \beta \\ 0 & \alpha & 0 & -\frac{\beta^2}{\alpha} \\ 0 & 0 & \alpha & \frac{\beta^3}{\alpha^2} \\ 0 & 0 & \beta & \alpha \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[l_4 \to l_4 - \frac{\beta}{\alpha} l_3]{} \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & \beta \\ 0 & \alpha & 0 & -\frac{\beta^2}{\alpha} \\ 0 & 0 & \alpha & \frac{\beta^3}{\alpha^2} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha - \frac{\beta^4}{\alpha^3} \end{bmatrix} = U.$$

A matriz U é equivalente por linhas à matriz A. Logo $car(A) = car(U)$ e, portanto,

$$car(A) = 4 \text{ se e só se } \alpha \neq 0 \text{ e } \alpha - \frac{\beta^4}{\alpha^3} \neq 0 \text{ se e só se } \alpha \neq 0 \text{ e } \alpha \neq \pm\beta.$$

Assim, A é invertível se e só se ($\alpha = 0$ e $\beta \neq 0$) ou ($\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq \pm\beta$)

(f) Seja

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & -1 & 1 & \beta \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & \alpha \end{bmatrix}.$$

A matriz A é uma matriz do tipo 4×4. Logo, A é invertível se e só se $car(A) = 4$. Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz A, tem-se

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & -1 & 1 & \beta \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & \alpha \end{bmatrix} \xrightarrow[l_1 \leftrightarrow l_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & -1 & 1 & \beta \\ 0 & 1 & 1 & \alpha \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3 \to l_3 - \alpha l_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & -1 & 1 - 2\alpha & \beta - 2\alpha \\ 0 & 1 & 1 & \alpha \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{l_3 \to l_3 + l_2 \\ l_4 \to l_4 - l_2}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 1 - \alpha & 1 + \beta - 2\alpha \\ 0 & 0 & 1 - \alpha & \alpha - 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_4 \to l_4 - l_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 1 - \alpha & 1 + \beta - 2\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 3\alpha - \beta - 2 \end{bmatrix} = U.$$

A matriz U é equivalente por linhas à matriz A. Logo $car(A) = car(U)$ e, portanto,

$$\begin{aligned} car(A) = 4 \quad & \text{se e só se} \quad 1 - \alpha \neq 0 \text{ e } 3\alpha - \beta - 2 \neq 0 \\ & \text{se e só se} \quad \alpha \neq 1 \text{ e } \beta \neq 3\alpha - 2. \end{aligned}$$

Exercício 2.19

Considere a matriz real

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

(a) Mostre que a matriz A é invertível e calcule a sua inversa usando o método de eliminação de Gauss-Jordan.

(b) Resolva o sistema $Ax = b$, onde $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Resolução:

(a) Seja

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

A matriz A é uma matriz do tipo 3×3. Logo, A é invertível se e só se $car(A) = 3$. Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz A, obtemos a matriz em escada U a seguir indicada

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_1 \leftrightarrow l_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[l_3 \to l_3 - 2l_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_2 \leftrightarrow l_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = U.$$

A matriz U é uma matriz em escada, equivalente por linhas à matriz A e tem 3 linhas não nulas, logo $car(A) = 3$. Portanto, a matriz A é invertível.

Determinemos A^{-1}, aplicando o método de eliminação de Gauss-Jordan à matriz $[A|I_3]$:

$$[A|I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[l_1 \leftrightarrow l_2]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[l_3 \to l_3 - 2l_1]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[l_2 \leftrightarrow l_3]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[l_2 \to l_2 + l_3]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[l_1 \to l_1 + 2l_2]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{l_2 \to -l_2 \\ l_3 \to \frac{1}{2}l_3}]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{array}\right] = [I_3|A^{-1}].$$

Logo,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(b) Tem-se

$$\begin{aligned} Ax = b &\Leftrightarrow A^{-1}Ax = A^{-1}b \\ &\Leftrightarrow x = A^{-1}b \\ &\Leftrightarrow x = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Exercício 2.20

Sejam $A = [-2 + 2(i-j)^2]_{\substack{i=1,2,3 \\ j=1,2,3}}$.

(a) Verifique que A é invertível e calcule a sua inversa usando o método de eliminação de Gauss-Jordan.

(b) Resolva o sistema $Ax = b$, onde $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Resolução:

(a) Tem-se

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 0 \\ 6 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

A matriz A é uma matriz do tipo 3×3. Logo, A é invertível se e só se $car(A) = 3$. Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz A, tem-se

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 0 \\ 6 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3 \to l_3 + 3l_1]{} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}.$$

A matriz U é uma matriz em escada, equivalente por linhas à matriz A e tem 3 linhas não nulas, logo $car(A) = 3$. Portanto, a matriz A é invertível.

Determinemos A^{-1}, aplicando o método de eliminação de Gauss-Jordan à matriz $[A|I_3]$:

$$[A|I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[l_3 \to l_3 + 3l_1]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[l_1 \to l_1 - \frac{3}{8}l_3]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 0 & -\frac{1}{8} & 0 & -\frac{3}{8} \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{l_1 \to -\frac{1}{2}l_1 \\ l_2 \to -\frac{1}{2}l_2 \\ l_3 \to \frac{1}{16}l_3}]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{16} & 0 & \frac{3}{16} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{16} & 0 & \frac{1}{16} \end{array}\right].$$

Logo,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{16} & 0 & \frac{3}{16} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{16} & 0 & \frac{1}{16} \end{bmatrix}.$$

(b) Tem-se

$$\begin{aligned} Ax = b &\Leftrightarrow A^{-1}Ax = A^{-1}b \\ &\Leftrightarrow x = A^{-1}b \\ &\Leftrightarrow x = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -2 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$