ÁLGEBRA LINEAR CC

Exercícios - Matrizes

Lic. Ciências da Computação **2024/2025**

1.1. Para as matrizes seguintes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{bmatrix},$$

indique:

(a) O tipo de cada matriz.

(b) Quais das matrizes são quadradas.

(c) Quais das matrizes são triangulares inferiores.

(d) Quais das matrizes são diagonais.

1.2. Escreva a tabela das seguintes matrizes:

(a) $A = [a_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,4 \\ j=1,\dots,5}}$ onde $a_{ij} = i + j$;

(b) $B = [b_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,4 \\ j=1,\dots,5}}$ onde $b_{ij} = |i - j|$;

(c) $C = [c_{ij}]$, quadrada de ordem n, tal que $n = 3$ e $c_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i + j \text{ é par} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$;

(d) $D = [d_{ij}]$, quadrada de ordem n, tal que $n = 3$ e $d_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{se } i > j \\ 0 & \text{se } i = j \\ 1 & \text{se } i < j \end{cases}$;

1.3. Considere as matrizes de $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determine:

(a) $A + B + C$. (b) $2A + B + 3C$.

(c) $A - B$. (d) $2A + 3(B - C)$.

1.4. Seja A uma matriz do tipo $m \times (m + 5)$ e B uma matriz do tipo $n \times (11 - n)$ tais que AB e BA estão definidas. Determine os valores possíveis para m e n.

1.5. Se possível, calcule AB e BA sendo

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$;

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -4 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & \frac{2}{3} \\ 5 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$;

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

1.6. Considere as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix};$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}; \qquad D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 0 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Diga quais das seguintes expressões identificam matrizes, e em tais casos calcule-as.

(a) $A + 2B$; (b) AB; (c) $AC + D$;

(d) $(A + B)C$; (e) ACD; (f) $2ACA + A$.

1.7. Justifique as afirmações seguintes:

(a) Se $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ tem a linha i nula, então, qualquer que seja $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$, a matriz AB tem a linha i nula.

(b) Se $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$ tem a coluna j nula, então, qualquer que seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, a matriz AB tem a coluna j nula.

(c) Se $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ tem as linhas i e s iguais, com $i, s \in \{1, \ldots, m\}$, então, qualquer que seja $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$, a matriz AB tem as linhas i e s iguais.

(d) Se $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$ tem as colunas j e s iguais, com $j, s \in \{1, \ldots, p\}$, então, qualquer que seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, a matriz AB tem as colunas j e s iguais.

1.8. Sejam $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ duas matrizes do tipo $n \times n$.

(a) Escreva o elemento da matriz $A^2 + B$ situado na linha i e na coluna j.

(b) Escreva o elemento da matriz $A - BA + 2I_n$ situado na linha i e na coluna j.

1.9. Sejam A, B matrizes 2×2 reais tais que

$$AB - BA = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Mostre que $a + d = 0$.

1.10. Sejam $D \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ e $D' \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Mostre que se D e D' são matrizes diagonais, então

(a) DD' é uma matriz diagonal.
(b) Para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, $(DD')_{ii} = D_{ii}D'_{ii}$.

1.11. Considere as matrizes reais

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determine uma matriz real X tal que:

(a) $3(X + \frac{1}{2}A) = 5(X - \frac{3}{4}B)$.
(b) $X + A = 2(X - B)$.
(c) $CX = I_2$.

1.12. Dê exemplos de matrizes A e B tais que $A \neq B$ e:

(a) $A^2 = -I_2$,;
(b) $A^2 = 0_{2\times 2}$ e $A \neq 0$.
(c) $AB = 0_{2\times 2}$, com $A \neq 0$ e $B \neq 0$.
(d) $AB = 0_{2\times 2}$, com A e B sem elementos nulos.
(e) A, C e D tais que $AC = AD$ e $C \neq D$.
(f) A e B tais que $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.
(g) A e B tais que $(A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$.

[Sugestão: procurar as condições gerais a satisfazer e depois construir os exemplos.]

1.13. Verifique se:

(a) a inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 4 \end{bmatrix}$ é a matriz $B = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$;

(b) a inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ é a matriz $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

1.14. Use a definição para calcular a inversa de cada uma das seguintes matrizes:

(a) $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$; (b) $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$;

(c) $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; (d) $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ y & z & 1 \end{bmatrix}$, com $x, y \in \mathbb{R}$.

1.15. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e A, B e C matrizes invertíveis de ordem n.

(a) Qual a inversa de $AB^{-1}C$?
(b) As matrizes A^2 e $A + B$ são invertíveis? Em caso afirmativo, indique a respetiva inversa. Em caso negativo, dê um contraexemplo.

1.16. Sejam A uma matriz invertível de ordem m e B, C matrizes do tipo $m \times n$ tais que $AB = AC$. Mostre que $B = C$.

1.17. Indique A^T no caso de A ser

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$.

1.18. Diga quais das seguintes matrizes são simétricas e quais são antissimétricas:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 7 \\ 1 & 0 & 2 \\ 7 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 1 & 0 & 3 \\ 7 & 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

1.19. Sejam $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $n \in \mathbb{N}$, $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. Mostre que se as matrizes A e B são simétricas, então:

i) As matrizes $A + B$ e αA são simétricas;

ii) A matriz AB é simétrica se e só se $AB = BA$.

1.20. Dê exemplo de uma matriz quadrada de ordem 3 que seja simultaneamente simétrica e antissimétrica.

1.21. Diga quais das seguintes matrizes são ortogonais, quais são hermíticas e quais são unitárias:

(a) $A = \begin{bmatrix} 4 & -i & 2i \\ i & 1 & 1-i \\ -2i & 1+i & 0 \end{bmatrix}$; (b) $B = \begin{bmatrix} 2 & 1+i & 5-i \\ 1-i & 7 & i \\ 5+i & -i & -1 \end{bmatrix}$;

(c) $C = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & -1 \end{bmatrix}$; (d) $D = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$.

1.22. Mostre que o produto de quaisquer duas matrizes ortogonais é também uma matriz ortogonal.