

ÁLGEBRA LINEAR CC

Exercícios - Espaços vetoriais

Lic. Ciências da Computação

2024/2025

3.1. Determine se \mathbb{R}^2 , juntamente com as aplicações $\tilde{+} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $\tilde{\cdot} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definidas em cada alínea, é um espaço vetorial real.

(a) Para quaisquer $\alpha \in \mathbb{R}$ e $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, considere

$$(x_1, x_2) \tilde{+} (y_1, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \quad \text{e} \quad \alpha \tilde{\cdot} (x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2).$$

(b) Para quaisquer $\alpha \in \mathbb{R}$ e $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, considere

$$(x_1, x_2) \tilde{+} (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, 0) \quad \text{e} \quad \alpha \tilde{\cdot} (x_1, x_2) = (\alpha x_1, 0).$$

(c) Para quaisquer $\alpha \in \mathbb{R}$ e $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, considere

$$(x_1, x_2) \tilde{+} (y_1, y_2) = (x_1, x_2 - y_2) \quad \text{e} \quad \alpha \tilde{\cdot} (x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2).$$

3.2. Seja $n \in \mathbb{N}$. Mostre que \mathbb{R}^n , algebrizado com as aplicações $+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definidas, respectivamente, por

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n),$$

$$\alpha \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n),$$

para quaisquer $\alpha \in \mathbb{R}$ e $(x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, é um espaço vetorial real.

3.3. Sejam $u, v \in \mathbb{R}^n$ e S um subespaço do espaço vetorial real \mathbb{R}^n . Mostre que

(a) Se $v \in S$, então $-v \in S$.

(b) Se $u, v \in S$, então $u - v \in S$.

(c) Se $u + v \in S$ e $u \in S$, então $v \in S$.

(d) Se existe $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $\alpha v \in S$, então $v \in S$.

3.4. Determine quais dos seguintes conjuntos são subespaços do espaço vetorial real indicado.

(a) $W_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 = 0 \text{ e } x_2 + 2x_3 = 0\}$ em \mathbb{R}^3 .

(b) $W_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 = -5x_2 \text{ e } x_2 - 3x_3 = 0\}$ em \mathbb{R}^4 .

(c) $W_3 = \{(0, a, b, -1) \in \mathbb{R}^4 : a, b \in \mathbb{R}\}$ em \mathbb{R}^4 .

(d) $W_4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_3 = 2 \text{ e } x_2 - 3x_3 = 0\}$ em \mathbb{R}^4 .

(e) $W_5 = \{a(1, 2) \in \mathbb{R}^2 : a \in \mathbb{R}\}$ em \mathbb{R}^2 .

(f) $W_6 = \{a(1, 2) + b(-3, 1) \in \mathbb{R}^2 : a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}_0^+\}$ em \mathbb{R}^2 .

3.5. Considere o espaço vetorial real \mathbb{R}^3 e, para cada $t \in \mathbb{R}$, o conjunto

$$V_t = \{(1-t, (3-t)x, t^2 - 1) \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{R}\}.$$

Determine, caso existam, os valores de t para os quais V_t é subespaço vetorial do espaço vetorial real \mathbb{R}^3 .

3.6. Considere os seguintes subespaços vetoriais do espaço vetorial real \mathbb{R}^3 :

$$\begin{aligned}V_1 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}, \\V_2 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y + z = 0, y - z = 0\}, \\V_3 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y = 0, z = 0\}.\end{aligned}$$

(a) Mostre que

- i. $V_2 = \{(b, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 : b \in \mathbb{R}\}.$
- ii. $V_3 = \{(2a, a, 0) \in \mathbb{R}^3 : a \in \mathbb{R}\}.$

(b) Diga, justificando, se:

- i. $(7, 1, -2) \in V_3 + V_2;$
- ii. $V_1 \subseteq V_2, V_2 \subseteq V_1, V_2 \subseteq V_3, V_3 \subseteq V_2;$
- iii. $V_1 \cap V_3, V_2 + V_3, V_1 \cup V_2, V_2 \cup V_3$ são subespaços vetoriais do espaço vetorial \mathbb{R}^3 ;
- iv. \mathbb{R}^3 é soma direta de V_1 e V_3 ;
- v. \mathbb{R}^3 é soma direta de V_2 e V_3 .

3.7. Verifique se

- (a) $(1, -1)$ é combinação linear de $(3, 6), (1, 2), (2, 4)$, no espaço vetorial real \mathbb{R}^2 .
- (b) $(1, -4, 5)$ é combinação linear de $(1, -1, 1), (2, 1, -2)$, no espaço vetorial real \mathbb{R}^3 .
- (c) $(3, 0, 2)$ é combinação linear de $(-1, 0, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1)$, no espaço vetorial \mathbb{R}^3 .
- (d) $(0, 2, 1)$ é combinação linear de $(-1, 0, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1)$, no espaço vetorial real \mathbb{R}^3 .
- (e) $(1, 2, 0, 3)$ é combinação linear de $(1, -2, 0, 1), (0, 1, -1, 1), (0, 0, 2, 1)$, no espaço vetorial real \mathbb{R}^4 .
- (f) $(1, 0, -4, 2)$ é combinação linear de $(1, -2, 0, 1), (0, 1, -1, 1), (0, 0, 2, 1)$, no espaço vetorial real \mathbb{R}^4 .

3.8. Em cada um dos espaços vetoriais V a seguir indicados, determine o subespaço vetorial de V gerado por S .

- (a) $V = \mathbb{R}^3, S = \{(1, 1, 1)\}.$
- (b) $V = \mathbb{R}^3, S = \{(0, 0, 0)\}.$
- (c) $V = \mathbb{R}^3, S = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}.$
- (d) $V = \mathbb{R}^3, S = \{(1, 2, 3), (-2, -4, -6), (4, 8, 12)\}.$
- (e) $V = \mathbb{R}^4, S = \{(1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 1, 1)\}.$
- (f) $V = \mathbb{R}^4, S = \{(2, 1, 0, 0), (2, 0, 2, 0), (3, 1, 1, 0)\}.$

3.9. Considere o espaço vetorial real \mathbb{R}^3 . Mostre que

- (a) $\{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ é um conjunto gerador de \mathbb{R}^3 .
- (b) $\{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 1, 1)\}$ é um conjunto gerador de \mathbb{R}^3 .
- (c) $\{(1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ não é um conjunto gerador de \mathbb{R}^3 .

3.10. Determine dois conjuntos distintos de geradores de cada um dos seguintes subespaços vetoriais de \mathbb{R}^4 :

- (a) \mathbb{R}^4 .
- (b) $\{(a, c - a, c, 2c) \in \mathbb{R}^4 : a, c \in \mathbb{R}\}.$
- (c) $\{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : a + c = 0, 2b + d + c = 0\}.$

3.11. Seja $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 2y\}$.

- (a) Indique vetores $u, v \in \mathbb{R}^3$ tais que $u \in F$ e $v \notin F$.
- (b) Mostre que F é um subespaço de \mathbb{R}^3 indicando um conjunto gerador de F .
- (c) Diga, justificando, se $F = \langle (6, 3, 0), (-2, -1, 5), (0, 0, 3) \rangle$.

3.12. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e u_1, u_2, u_3 vetores do espaço vetorial real \mathbb{R}^n . Justifique que:

- (a) $\langle u_1, u_2, u_3 \rangle = \langle u_1, u_1 + u_2, u_1 + u_2 + u_3 \rangle$.
- (b) $\langle u_1, u_2, u_3 \rangle = \langle -u_3, -u_1 + u_2, 2u_2 + u_3 \rangle$.

3.13. No espaço vetorial real \mathbb{R}^4 , sejam $v_1 = (1, 0, 0, -1)$, $v_2 = (1, -2, 0, 1)$, $v_3 = (0, 1, 0, -1)$ e $W = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$. Indique, caso exista:

- (a) um conjunto gerador de W que tenha exatamente 4 vetores.
- (b) um conjunto $\{w_1, w_2, w_3\}$ que gere W e tal que $w_j \neq v_1$, $\forall j \in \{1, 2, 3\}$.
- (c) um conjunto gerador de W que tenha exatamente 2 vetores.

3.14. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$. Mostre que;

- (a) Se $X \subseteq Y$, então $\langle X \rangle \subseteq \langle Y \rangle$.
- (b) $\langle X \cup Y \rangle = \langle X \rangle + \langle Y \rangle$.

3.15. Diga se são linearmente independentes as sequências de vetores a seguir indicadas:

- (a) $((1, 0), (1, 1))$ em \mathbb{R}^2 .
- (b) $((1, 0), (1, 1), (0, -1))$ em \mathbb{R}^2 .
- (c) $((2, 0, 1), (0, 0, -1), (-1, 1, 2))$ no espaço vetorial real \mathbb{R}^3 .
- (d) $((1, 2, 3), (-1, 1, 1), (2, 0, 1), (0, 2, 1))$ no espaço vetorial real \mathbb{R}^3 .
- (e) $((0, 1, 1, 0), (-1, 0, 1, 1), (1, 1, 0, -1))$ no espaço vetorial real \mathbb{R}^4 .
- (f) $((1, 1, 1, 0), (2, 0, 2, 3), (-1, 1, 0, 1), (1, 1, 0, 2))$ no espaço vetorial real \mathbb{R}^4 .

3.16. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e v_1, \dots, v_n, v_{n+1} elementos do espaço vetorial real \mathbb{R}^n tais que a sequência (v_1, \dots, v_n) é linearmente independente. Diga, justificando, se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações seguintes.

- (a) (v_1, \dots, v_n) é uma base de \mathbb{R}^n .
- (b) A sequência de vetores $(v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n)$ é linearmente independente.
- (c) A sequência de vetores $(v_1, \dots, v_n, v_{n+1})$ é linearmente dependente.
- (d) Para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$, a sequência de vetores $(v_1, \dots, \alpha v_i, \dots, v_n)$ é linearmente independente.
- (e) Para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$, a sequência de vetores $(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i + \alpha v_j, v_{i+1}, \dots, v_n)$, onde $j \neq i$, é linearmente independente.

3.17. Considere, no espaço vetorial real \mathbb{R}^4 , os subespaços

$$U = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^4 : a_1 - a_4 = 0, a_4 - a_3 = 0\}$$

$$W_1 = \{(b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{R}^4 : b_2 + 2b_3 = 0, b_1 + 2b_3 - b_4 = 0\}$$

$$W_2 = \langle (1, 1, 1, 0), (-1, 1, 0, 1), (1, 3, 2, 1), (-3, 1, -1, 2) \rangle.$$

- (a) Diga, justificando, se $((1, 1, 1, 1), (0, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 1))$ é uma base de U .
- (b) Determine uma base de:
 - i. W_1 .
 - ii. W_2 .

3.18. Determine uma base de $W \cap U$ e uma base de $W + U$ onde

- (a) $W = \langle (0, 0, -1), (1, 0, 2) \rangle$ e $U = \langle (0, 1, 1), (-1, 3, 2) \rangle$ são subespaços do espaço vetorial real \mathbb{R}^3 .
- (b) $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + 2x_4 = 0\}$ e $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_4 = 0\}$ são subespaços do espaço vetorial real \mathbb{R}^4 .
- (c) $W = \{(y, 2y - x, x + y, z) \in \mathbb{R}^4 \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$ e $U = \{(\alpha, 3\alpha, 0, -\alpha) \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ são subespaços do espaço vetorial real \mathbb{R}^4 .

3.19. Indique, se existir, uma base do espaço vetorial real \mathbb{R}^4 da qual façam parte os vetores:

- (a) $(1, 0, -1, 2), (1, 0, 1, 0)$.
- (b) $(0, 1, 1, -1), (0, 1, 0, 2), (0, 2, 1, 1)$.
- (c) $(1, -1, -1, 2), (0, 1, 2, 0), (1, 0, 1, -2)$.

3.20. Determine um suplementar de:

- (a) $W = \langle (1, 0, -1, 2), (1, 0, 1, 0) \rangle$ relativamente a \mathbb{R}^4 .
- (b) $U = \langle (1, -1, -1, 2), (0, 1, 2, 0), (1, 0, 1, -2) \rangle$ relativamente a \mathbb{R}^4 .
- (c) $F = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : 2a + b = 0 \text{ e } c = 0\}$ relativamente a \mathbb{R}^4 .

3.21. Sejam $n \in \mathbb{N}$, W, U subespaços do espaço vetorial real \mathbb{R}^n , (w_1, w_2, w_3, w_4) uma base de W e (u_1, u_2, u_3) uma base de U . Sendo $z_1 = 2w_1 + w_2 - w_3 = u_1 + 2u_2$ e $z_2 = -w_2 + w_4 = u_2 - u_3$, admita que (z_1, z_2) é base de $W \cap U$.

Indique, justificando,

- (a) uma base de W que inclua z_1, z_2 .
- (b) uma base de U que inclua z_1, z_2 .
- (c) uma base de $W + U$.

3.22. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e W, U subespaços vetoriais do espaço vetorial real \mathbb{R}^n . Diga, justificando, se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações seguintes:

- (a) Se $\dim W \leq \dim U$, então $W \subseteq U$.
- (b) Se $\dim W = \dim U$, então $\dim(W + U) = \dim W + \dim U$.
- (c) Se $\dim U + \dim W = \dim \mathbb{R}^n$, então \mathbb{R}^n é soma direta de U e W .
- (d) Se $\dim(U + W) = \dim \mathbb{R}^n$, então \mathbb{R}^n é soma direta de U e W .
- (e) Se $\dim(U + W) = \dim U + \dim W$, então V é soma direta de U e W .
- (f) Se V é soma direta de U e W , então $\dim(U + W) = \dim U + \dim W$.

3.23. Usando o conceito de característica de uma matriz, determine a dimensão dos subespaços vetoriais:

- (a) $\langle (3, -1, 4), (2, 1, 3), (1, 0, 2) \rangle$ de \mathbb{R}^3 ;
- (b) $\langle (0, 1, 1, 2), (-2, 1, 0, 1), (3, 1, 5, 2), (1, 0, 3, -1) \rangle$ de \mathbb{R}^4 .
- (c) $\langle (1, 2, 1, 2), (-2, -4, 0, 2), (3, 2, 1, 0), (6, 0, 3, -3) \rangle$ de \mathbb{R}^4 .

3.24. Considere os seguintes vetores do espaço vetorial real \mathbb{R}^3 :

$$v_1 = (\alpha, 6, -1), v_2 = (1, \alpha, -1), v_3 = (2, \alpha, -3).$$

- (a) Determine os valores do parâmetro real α para os quais (v_1, v_2, v_3) é uma base de \mathbb{R}^3 .
- (b) Para um dos valores de α determinados na alínea anterior, calcule as coordenadas do vetor $v = (-1, 1, 2)$ em relação à base (v_1, v_2, v_3) .

3.25. Sejam V um espaço vetorial real e (v_1, v_2, v_3, v_4) uma sequência linearmente independente de vetores de V . Para $k \in \mathbb{R}$, seja $G_k = \langle v_1 + v_4, kv_2 - v_3 - v_4, v_1 + v_2 - v_3, -v_2 + v_3 + k^2 v_4 \rangle$. Seja $W = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$.

- (a) Determine os valores de k para os quais
- $\dim G_k = 4$.
 - $\dim G_k = 3$.
- (b) Encontre uma base de W que inclua os vetores $v_1 + v_4, -v_2 - v_3 - v_4, v_1 + v_2 - v_3$.