ÁLGEBRA LINEAR CC

Exercícios - Aplicações lineares

Lic. Ciências da Computação **2024/2025**

4.1. Diga quais das aplicações seguintes, entre espaços vetoriais reais, são aplicações lineares:

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(x, y) = (2x + y, x, y - x)$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(b) $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $g(x, y, z) = (y^2, y)$, $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

(c) $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $h(a, b) = 5a - 2b$, $\forall\ (a, b) \in \mathbb{R}^2$.

(d) $s : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^2$ definida por $s(ax^2 + bx + c) = (1, a + b)$, $\forall\ ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_2[x]$.

(e) $t : \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ definida por $t(A) = A^T$, para qualquer $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.

4.2. Para cada $k \in \mathbb{R}$, seja $g_k : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ a aplicação definida por

$$g_k(a_1, a_2, a_3, a_4) = (a_4 - k, 0, 2a_1 + a_3), \forall (a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^4.$$

Determine os valores de k para os quais g_k é aplicação linear.

4.3. Diga, justificando, se existe:

(a) uma aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(1, 0, 0) = (0, 0, 1)$, $f(0, 0, 1) = (1, 0, 0)$, $f(7, 0, 14) = (0, 0, 7)$.

(b) uma aplicação linear $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ tal que $g(-1, 2) = (0, 1, 2, 3)$, $g(2, -1) = (0, -1, -2, -3)$.

4.4. Para cada uma das aplicações lineares a seguir indicadas, determine o seu núcleo, o espaço imagem e uma base de cada um destes espaços vetoriais. Diga, justificando, se cada uma das aplicações lineares é injetiva e se é sobrejetiva.

(a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x, y, z) = (y, x),$$

para qualquer $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

(b) $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$g(x, y, z, w) = (x + y, 0, y - z),$$

para qualquer $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$.

(c) $h : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$h\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (2a + b, b, d - b),$$

para qualquer $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(d) $t : \mathbb{R}_3[x] \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definida por

$$t(ax^3 + bx^2 + cx + d) = \left(\begin{bmatrix} a - c & 0 \\ 0 & b + d \end{bmatrix}\right),$$

para qualquer $ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathbb{R}_3[x]$.

4.5. Sejam $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ uma base do espaço vetorial real $\mathbb{R}^5$, (v_1', v_2', v_3') uma base do espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$ e $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ a aplicação linear definida por

$$f(x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 + x_4v_4 + x_5v_5) = (x_2 - x_3)v_1' + (x_3 - x_2)v_2' + (x_1 + x_4 + x_5)v_3', \quad \forall x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R}.$$

(a) Diga, justificando, se f é sobrejetiva.

(b) Dê exemplo de um vetor $u \in \mathbb{R}^5$ tal que $u \notin \text{Nuc}f$. Justifique.

(c) Verifique que $v_1 - v_4 \in \text{Nuc}f$.

(d) Dê exemplo de um subespaço W de $\mathbb{R}^5$ tal que

$$W \cap \text{Nuc}f =< v_1 - v_4 > \text{ e } \dim(W + \text{Nuc}f) = 4.$$

4.6. Seja $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ a aplicação linear definida por

$$g(1, 0, 0) = (1, 0, 1, 0), \quad g(0, 1, 0) = (0, 1, -2, 0), \quad g(0, 0, 1) = (1, 1, 0, 0).$$

(a) Determine: i. $g(2, 3, 1)$. ii. $g(-1, 2, 0)$.

(b) Determine uma base de $\text{Im}g$ e indique a característica de g.

(c) Diga, justificando, se g é injetiva.

4.7. Diga, justificando, se as afirmações seguintes são verdadeiras para quaisquer espaços vetoriais reais $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$, $n, m \in \mathbb{N}$, e para quaisquer aplicações lineares $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

(a) Se $(v_1, ..., v_n)$ é uma base de $\mathbb{R}^n$, então $(f(v_1), ..., g(v_n))$ é base de $\mathbb{R}^n$.

(b) Se g é sobrejetiva, então $n \geq m$.

(c) Se $n \geq m$, então g é sobrejetiva.

(d) Se $(v_1, ..., v_n)$ é uma base de $\mathbb{R}^n$ e $g(v_i) \neq g(v_j)$ sempre que $i \neq j$ $(i, j \in \{1, ..., n\})$, então g é injetiva.

(e) Se g é sobrejetiva, então g é injetiva.

(f) Se g é injetiva, então g é sobrejetiva.

(g) f é injetiva se e só f é sobrejetiva.

4.8. Considere as aplicações lineares

$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(x, y, z, w) = (x - y, x + w, y + z)$, $\forall (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$;

$g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definida por $g(x, y, z, w) = (x, x + z, -w, 2y + z)$, $\forall (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$;

$h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $h(1, 1, 1) = (2, 0, 1)$, $h(1, 1, 0) = (1, 0, -1)$, $h(1, 0, 0) = (0, 0, 2)$;

$t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definida por $t(x, y, z) = (x - y, 0, 0, x + y + z)$, $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$;

e as bases

$B_1 = ((0, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 1))$ e

$B_2 = ((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$ de $\mathbb{R}^4$;

$B_1' = ((1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0))$ e

$B_2' = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ de $\mathbb{R}^3$.

Determine:

(a) $M(f; B_1, B_1')$. (b) $M(f; B_1, B_2')$. (c) $M(g; B_2, B_1)$. (d) $M(g; B_1, B_2)$.
(e) $M(h; B_1', B_1')$. (f) $M(h; B_2', B_1')$. (g) $M(t; B_2', B_2)$. (h) $M(t; B_1', B_1)$.

4.9. Considere as bases $B = (v_1, v_2)$ de $\mathbb{R}^2$ e $B' = (v'_1, v'_2, v'_3)$ de $\mathbb{R}^3$ em que $v_1 = (-1, 1)$, $v_2 = (1, 1)$ e $v'_1 = (1, 1, 1)$, $v'_2 = (0, 1, 1)$, $v'_3 = (0, 0, 1)$. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ a aplicação linear tal que $M(f; B, B') = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$. Determine:

(a) $f(2, 3)$.
(b) $f(-1, 1)$.
(c) $f(0, 0)$.
(d) $f(0, 2)$.
(e) $f(a, b)$, para todo $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

4.10. Sejam $B = (v_1, v_2, v_3)$ uma base do espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$ e $B' = (v'_1, v'_2, v'_3, v'_4)$ uma base do espaço vetorial real $\mathbb{R}^4$. Sejam $f, g, h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ as aplicações lineares definidas, respectivamente, por

$$f(v_1) = 2v'_1 + v'_3 + v'_4, \quad f(v_2) = v'_2 + 2v'_3, \quad f(v_3) = 2v'_1 - 2v'_2 - 3v'_3 + v'_4;$$

$$g(x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3) = x_1v'_1 - (x_1 + x_3)v'_2 + (x_2 - x_3)v'_3 + x_2v'_4, \quad \forall x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R};$$

$$M(h; B, B') = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Determine:
 i. $M(f; B, B')$.
 ii. $M(g; B, B')$.
(b) Determine:
 i. $h(v_3)$.
 ii. $h(v_1 + 2v_2 - v_3)$.
(c) Diga, justificando, se h é monomorfismo.

4.11. Considere, no espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$, a base $B = ((1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1))$ e o endomorfismo f definido por $f(1, 0, 1) = (1, -1, 1)$, $f(1, 1, 0) = (2, 1, 1)$, $f(0, 1, 1) = (1, 0, 0)$.

(a) Determine $M(f; B, B)$.
(b) Determine $f(a, b, c)$, para todo $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.
(c) Mostre que f é um automorfismo de $\mathbb{R}^3$ e determine f^{-1}.

4.12. Considere o espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$ e seja B base canónica de $\mathbb{R}^3$.
Seja $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear tal que

$$M(g; B, B) = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

(a) Determine $g(-1, 1, 4)$ e $g(1, 1, 0)$.
(b) Mostre que:
 i. $\dim \operatorname{Im} g = 2$.
 ii. $\operatorname{Nuc}(g) =< (0, 1, 2) >$.
(c) Indique um vetor $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $v \neq (1, 1, 0)$ e $g(v) = (0, 0, 1)$. Justifique.

4.13. Sejam $B = (v_1, v_2, v_3)$ uma base de $\mathbb{R}^3$, $B' = (v_1', v_2', v_3', v_4')$ uma base de $\mathbb{R}^4$ e $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ a aplicação linear tal que

$$M(f; B, B') = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determine:

(a) $\mathrm{Im} f$.

(b) $\mathrm{Nuc} f$.

4.14. Considere as aplicações lineares $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ e $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definidas, respectivamente, por

$f(x, y, z) = (2x + z, x + 2z)$, $g(x, y, z) = (x, x - y - z)$, $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$;
$h(a, b) = (2a, a - b, a + b)$, $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Sendo B a base canónica de $\mathbb{R}^3$ e B' a base canónica de $\mathbb{R}^2$, determine:

(a) $M(f + g; B, B')$.

(b) $M(h \circ f; B, B)$.

(c) $M((f + g) \circ (3h); B', B')$.

4.15. Considere, em $\mathbb{R}^3$, as bases $B = (v_1, v_2, v_3)$ e $B' = (v_1', v_2', v_3')$ em que

$$v_1 = (1, 1, 2), v_2 = (1, 1 - 1), v_3 = (1, 0, 0)$$

e

$$v_1' = (0, 0, 1), v_2' = (0, 1, 1), v_3' = (1, 1, 1).$$

(a) Determine $M(id_{\mathbb{R}^3}; B, B')$.

(b) Escreva $3v_1 + 2v_2 - v_3$ como combinação linear de v_1', v_2', v_3'.

4.16. Sejam $B = ((1, 1), (1, 0))$ uma base de $\mathbb{R}^2$, $B' = ((1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0))$ uma base de $\mathbb{R}^3$ e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ a aplicação linear tal que

$$M(g; B, B') = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Determine $M(g; B_1, B_1')$ onde B_1 é a base canónica de $\mathbb{R}^2$ e B_1' é a base canónica de $\mathbb{R}^3$.

(b) $M(g; B_2, B')$ onde $B_2 = ((0, 1), (2, 1))$.

4.17. Sejam B e B' bases de $\mathbb{R}^3$. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a aplicação linear tal que

$$M(f; B, B') = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Verifique que f é um isomorfismo.

(b) Determine $M(f^{-1}; B', B)$.

4.18. Sejam $B = (u_1, u_2, u_3)$, $B' = (v_1, v_2, v_3)$ bases de $\mathbb{R}^3$ e $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a aplicação linear tal que

$$M(f; B, B') = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Determine $f(u_1)$ e $f(2u_2 + 2u_3)$.

(b) Determine $\dim \operatorname{Nuc} f$. Justifique.

(c) Determine $\{v \in \mathbb{R}^3 : f(v) = v_1 + v_3\}$.

(d) Sendo $M(id_{\mathbb{R}^3}; B, B') = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, determine $M(f; B', B)$.