Notas para a unidade curricular

# Álgebra Linear CC

Carla Mendes

2024/2025

# 1. Matrizes

## 1.1 Conceitos básicos

Neste capítulo introduz-se o conceito de matriz e estudam-se operações e propriedades relacionadas com matrizes. As matrizes são um objeto central no estudo de álgebra linear e são bastantes os contextos em áreas da matemática e suas aplicações em que o conceito de matriz se revelou ser fundamental. Por exemplo, para a representação e tratamento de informação que esteja dependente de parâmetros é frequente o recurso a quadros (tabelas) aos quais se dá a designação de matrizes.

Ao longo deste capítulo designamos por $\mathbb{K}$ o conjunto dos números reais ou o conjunto dos números complexos; quando necessário indicaremos explicitamente se nos referimos ao conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais ou ao conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos. Aos elementos de $\mathbb{K}$ damos a designação de **escalares**.

**Definição 1.1.1.** *Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Chama-se **matriz do tipo** $m \times n$ (ou **de ordem** $m \times n$) **sobre** $\mathbb{K}$ a uma aplicação $A : \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\} \to \mathbb{K}$ definida por $A(i, j) = a_{ij}$ e que se representa por um quadro em que os $mn$ elementos $a_{ij}$ são dispostos em $m$ filas horizontais e $n$ filas verticais do seguinte modo*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\,n-1} & a_{1\,n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\,n-1} & a_{2\,n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3\,n-1} & a_{3\,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m-1\,1} & a_{m-1\,2} & \cdots & a_{m-1\,n-1} & a_{m-1\,n} \\ a_{m\,1} & a_{m\,2} & \cdots & a_{m\,n-1} & a_{m\,n} \end{bmatrix}.$$

*Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, chama-se **linha** $i$ **da matriz** $A$ ao elemento $(a_{i1}, \ldots, a_{in})$ de $\mathbb{K}^n$.*
*Para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, chama-se **coluna** $j$ **da matriz** $A$ ao elemento $(a_{1j}, \ldots, a_{mj})$ de $\mathbb{K}^m$.*
*Ao elemento $a_{ij}$ de $\mathbb{K}$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, chama-se **entrada** $(i, j)$ ou **elemento da posição** $(i, j)$ da matriz $A$. Por vezes, representa-se a entrada $(i, j)$ da matriz $A$ por $A_{ij}$.*

**Notação e terminologia:**

- O conjunto das matrizes do tipo $m \times n$ sobre $\mathbb{K}$ representa-se por $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.
- O conjunto de todas as matrizes sobre $\mathbb{K}$ é representado por $\mathcal{M}(\mathbb{K})$.
- Em geral, representaremos as matrizes por letras maiúsculas e as suas entradas pela mesma letra, minúscula ou maiúscula, com índices que indicam a respetiva posição na matriz. Havendo ambiguidade coloca-se uma virgula a separar o índice da linha e o índice da coluna. Por exemplo, escreveremos $a_{2,34}$ ou $A_{2,34}$ para indicar o elemento na linha 2 e coluna 34 da matriz $A$.
- Se
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\,n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m\,1} & \dots & a_{m\,n} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}),$$
representaremos a matriz $A$ abreviadamente de uma das seguintes formas: $A = [a_{ij}]_{\substack{i\,=\,1,\,\dots,\,m \\ j\,=\,1,\,\dots,\,n}}$ ; $A = [a_{ij}]_{m\times n}$; $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Quando o tipo da matriz for claro pelo contexto ou se não for importante para o estudo em questão, podemos escrever simplesmente $A = [a_{ij}]$.
- Uma matriz diz-se **real** ou **complexa** consoante os seus elementos sejam reais ou complexos.

**Exemplo 1.1.2.** A matriz
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$
é uma matriz real do tipo $3 \times 2$, i.e. $A \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$ (é claro que também temos $A \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{C})$). A linha 2 da matriz $A$ é o elemento $(3, 4)$ de $\mathbb{R}^2$. A coluna 2 da matriz $A$ é o elemento $(0, 4, -1)$ de $\mathbb{R}^3$. O elemento $a_{32}$ (situado na linha 3 e coluna 2 da matriz) é o real $-1$.

**Exemplo 1.1.3.** Por $C = [c_{ij}]_{2\times 3}$, onde $c_{ij} = i^j$, para $i \in \{1, 2\}$ e $j \in \{1, 2, 3\}$, representa-se a matriz
$$\begin{bmatrix} 1 & 1^2 & 1^3 \\ 2 & 2^2 & 2^3 \end{bmatrix}.$$

**Definição 1.1.4.** *Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Uma matriz $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ diz-se **matriz nula de ordem** $m \times n$, e representa-se por $0_{m\times n}$ (ou apenas por $0$, caso não haja ambiguidade), se, para todo $i \in \{1, ..., m\}$ e para todo $j \in \{1, ..., n\}$, tem-se $a_{ij} = 0$.*

**Exemplo 1.1.5.** $0_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

**Definição 1.1.6.** *Sejam* $m, n, p, q \in \mathbb{N}$. *Diz-se que as matrizes* $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ *e* $B = [b_{ij}]_{p\times q}$ *são* ***iguais****, e escreve-se* $A = B$*, se* $m = p$*,* $n = q$ *e* $a_{ij} = b_{ij}$*, quaisquer que sejam* $i \in \{1, ..., m\}$ *e* $j \in \{1, ..., n\}$*.*

**Exemplo 1.1.7.** *As matrizes* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ *e* $B = [b_{ij}]_{3\times 3}$*, com* $b_{ij} = m.d.c.(i, j)$ *são matrizes iguais.*

**Definição 1.1.8.** *Sejam* $m, n \in \mathbb{N}$ *e* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$*. Diz-se que:*

- *A é uma* ***matriz linha*** *se* $m = 1$*.*
- *A é uma* ***matriz coluna*** *se* $n = 1$*.*
- *A é uma* ***matriz quadrada*** *se* $m = n$*.*

**Exemplo 1.1.9.** *A matriz* $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ *é uma matriz coluna (do tipo* $3 \times 1$*) e a matriz* $B = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$ *é uma matriz linha (do tipo* $1 \times 4$*).*

**Notação e terminologia:**

- É usual representar matrizes coluna e matrizes linha por letras minúsculas; além disso, é usual omitir o índice 1 que é comum a todos os elementos. Por exemplo,

$$x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

  representam uma matriz linha de ordem 4 e uma matriz coluna de ordem 3, respectivamente.

- O conjunto $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ das matrizes quadradas do tipo $n \times n$ também se representa por $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Uma matriz $A$ pertencente a $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diz-se uma matriz quadrada de ordem $n$ ou, simplesmente, uma matriz de ordem $n$ e pode representar-se por $A = [a_{ij}]_n$.

**Definição 1.1.10.** *Sejam* $n \in \mathbb{N}$ *e* $A = [a_{ij}]_n$ *uma matriz quadrada sobre* $\mathbb{K}$*. Os elementos* $a_{ii}$*,* $i \in \{1, ..., n\}$*, designam-se por* ***elementos principais de*** $A$*. Diz-se que os elementos* $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ *se dispõem na* ***diagonal principal de*** $A$ *e que os elementos* $a_{1n}, a_{2\,n-1}, ..., a_{n1}$ *se dispõem na* ***diagonal secundária*** *de* $A$*.*

**Exemplo 1.1.11.** *Os elementos principais da matriz*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

*são -1, 0 e 2 e os elementos que se dispõem na sua diagonal secundária são* 1*,* 0 *e* $-4$.

**Definição 1.1.12.** Seja $n \in \mathbb{N}$. Uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]_n$ diz-se:

- ***triangular superior*** se, para todos $i, j \in \{1, ..., n\}$,

$$i > j \Longrightarrow a_{ij} = 0;$$

- ***triangular inferior*** se, para todos $i, j \in \{1, ..., n\}$,

$$i < j \Longrightarrow a_{ij} = 0;$$

- ***diagonal*** se é simultaneamente triangular superior e triangular inferior, i.e., se, para todos $i, j \in \{1, ..., n\}$,

$$i \neq j \Longrightarrow a_{ij} = 0.$$

**Exemplo 1.1.13.** *Sejam*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \quad e \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

*A matriz* $A$ *é uma matriz triangular superior,* $B$ *é uma matriz triangular inferior e* $C$ *é uma matriz diagonal.*

**Notação:** Uma matriz diagonal $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ pode representar-se abreviadamente por $A = \mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$.

**Exemplo 1.1.14.** *No exemplo anterior, tem-se* $C = \mathrm{diag}(1, 0, 2, 3)$.

**Definição 1.1.15.** *Uma matriz diagonal em que todos os elementos diagonais são iguais diz-se uma* ***matriz escalar****.*

**Definição 1.1.16.** *Dá-se a designação de* ***matriz identidade de ordem n****, e representa-se por $I_n$, à matriz escalar de ordem $n$ em que todos os elementos diagonais são iguais a 1, i.e., se para todos $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, tem-se*

$$(I_n)_{ij} = \begin{cases} 1 & se\ i = j; \\ 0 & se\ i \neq j. \end{cases}$$

Usualmente, o elemento $(i, j)$ da matriz $I_n$ é representado por $\delta_{ij}$, designado por ***s*ímbolo de Kronecker**.

**Exemplo 1.1.17.** $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

## 1.2 Operações com matrizes

Nesta secção definem-se algumas operações envolvendo matrizes: adição de matrizes, multiplicação de um escalar por uma matriz e multiplicação de matrizes.

**Definição 1.2.1.** *Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ e $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Chama-se* ***matriz soma de*** *A* ***e*** *B, e representa-se por $A + B$, à matriz cuja entrada $(i, j)$ é o elemento $a_{ij} + b_{ij}$, i.e.,*

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{\substack{i\,=\,1,\ldots,m \\ j\,=\,1,\ldots,n}}.$$

**Exemplo 1.2.2.** *Sejam* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$. *Então*

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+3 & 2+0 & 3+4 \\ 2+2 & 1+(-1) & 0+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 7 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Como se poderá verificar no resultado seguinte, a adição de matrizes de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ satisfaz propriedades semelhantes às da adição de elementos de $\mathbb{K}$.

**Teorema 1.2.3.** *Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ e $A, B, C \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Então*

*i)* $A + B = B + A$. *(comutatividade da adição em $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$)*

*ii)* $A + (B + C) = (A + B) + C$. *(associatividade da adição em $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$)*

*iii)* $0_{m\times n} + A = A = A + 0_{m\times n}$. ($0_{m\times n}$ *elemento neutro da adição em* $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$)

*iv) existe uma matriz* $A'$ *tal que* $A + A' = 0_{m\times n} = A' + A$.
(*existência de elemento oposto, para a adição, de qualquer* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$)

*Demonstração.* Demonstramos as propriedades $i)$ e $iv)$, deixando a $ii)$ e a $iii)$ como exercício.

$i)$ Sejam $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. As matrizes $A + B$ e $B + A$ são ambas do tipo $m \times n$. Além disso,

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}},$$

$$B + A = [b_{ij} + a_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$$

e, como a adição em $\mathbb{K}$ é comutativa, temos $a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij}$, para quaisquer $i \in \{1,\dots,m\}$ e $j \in \{1,\dots,n\}$. Portanto, as matrizes $A + B$ e $B + A$ são iguais.

$iv)$ Seja $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e seja $A' = [a'_{ij}]$ a matriz de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ tal que $a'_{ij} = -a_{ij}$. Então $A + A' \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e temos

$$A + A' = [a_{ij} + a'_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}},$$

onde $a_{ij} + a'_{ij} = a_{ij} + (-a_{ij}) = 0$, para quaisquer $i \in \{1,\dots,m\}$ e $j \in \{1,\dots,n\}$. Logo, $A + A' = 0_{m\times n}$. Por i), temos $A' + A = 0_{m\times n}$. □

**Observação:**

- Sendo $A$, $B$ e $C$ matrizes do mesmo tipo, podemos escrever, sem ambiguidade, $A + B + C$ para representar $(A + B) + C$ e $A + (B + C)$, atendendo à associatividade da adição em $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.
- A matriz $A'$ da proposição anterior representa-se por $-A$.
- Dadas duas matrizes $A$ e $B$ com a mesma ordem, representa-se por $A - B$ a soma de matrizes $A + (-B)$.

**Definição 1.2.4.** *Sejam* $m, n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{K}$ *e* $A = [a_{ij}]_{m\times n} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. *Chama--se* ***produto do escalar*** $\alpha$ ***pela matriz*** $A$, *e representa-se por* $\alpha A$, *a matriz de* $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *cujo elemento* $(i, j)$ *é* $\alpha a_{ij}$, *i.e.*,

$$\alpha A = [\alpha a_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}.$$

**Exemplo 1.2.5.** *Se* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ *então* $2A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 4 & 0 & -2 & 6 \end{bmatrix}$.

**Teorema 1.2.6.** *Sejam* $m, n \in \mathbb{N}$, $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *e* $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. *Então*

*i)* $(\alpha\beta)\, A = \alpha\, (\beta A)$.

*ii)* $(\alpha + \beta)\, A = \alpha A + \beta A$.

*iii)* $\alpha\, (A + B) = \alpha A + \alpha B$.

*iv)* $0A = 0_{m\times n}$.

*v)* $1A = A$.

*vi)* $(-\alpha)A = \alpha(-A) = -(\alpha A)$.

*Demonstração.* Mostramos a propriedade $i$), ficando a prova das restantes propriedades como exercício.

$i$) Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Então $(\alpha\beta)A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ e, uma vez que $(\beta A) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, também temos $\alpha(\beta A) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Verifica-se ainda que

$$(\alpha\beta)A = [(\alpha\beta)a_{ij}]_{\substack{i\,=\,1,\,\ldots\,,\,m\\ j\,=\,1,\,\ldots\,,\,n}}\,,$$

$$\alpha(\beta A) = [\alpha(\beta a_{ij})]_{\substack{i\,=\,1,\,\ldots\,,\,m\\ j\,=\,1,\,\ldots\,,\,n}}$$

e, considerando que o produto de elementos de $\mathbb{K}$ é associativo, tem-se $(\alpha\beta)a_{ij} = \alpha(\beta a_{ij})$, para quaisquer $i \in \{1, ..., m\}$, $j \in \{1, ..., n\}$. Portanto, $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$. □

**Observação:** A matriz $A'$ da proposição 1.2.3 é a matriz $(-1)A$ e, tal como já foi referido, escrevemos $-A$ para representar esta matriz.

**Definição 1.2.7.** *Sejam* $m, n, p \in \mathbb{N}$, $A = [a_ij] \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{K})$, $B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{K})$. *Designa-se por* ***produto de*** $A$ ***por*** $B$, *e representa-se por* $AB$, *a matriz de* $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *cuja entrada* $(i, j)$ *é* $\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$, *isto é,*

$$\begin{aligned} AB &= \left[\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}\right]_{\substack{i\,=\,1,\,\ldots\,,\,m\\ j\,=\,1,\,\ldots\,,\,n}} \\ &= [a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{i\,p-1}b_{p-1\,j} + a_{ip}b_{pj}]_{\substack{i\,=\,1,\,\ldots\,,\,m\\ j\,=\,1,\,\ldots\,,\,n}}\,. \end{aligned}$$

**Exemplo 1.2.8.** *Sejam*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

*Então $AB$ é a matriz do tipo $2 \times 4$ sobre $\mathbb{R}$ tal que*

$$\begin{array}{ll} (AB)_{11} = 0 \times 2 + 1 \times 1 + 0 \times 1 = 1, & (AB)_{12} = 0 \times 0 + 1 \times 2 + 0 \times 1 = 2, \\ (AB)_{13} = 0 \times 1 + 1 \times 0 + 0 \times 2 = 0, & (AB)_{14} = 0 \times 0 + 1 \times 2 + 0 \times 1 = 2, \\ (AB)_{21} = 2 \times 2 + 3 \times 1 + 1 \times 1 = 8, & (AB)_{22} = 2 \times 0 + 3 \times 2 + 1 \times 1 = 7, \\ (AB)_{23} = 2 \times 1 + 3 \times 0 + 1 \times 2 = 4, & (AB)_{24} = 2 \times 0 + 3 \times 2 + 1 \times 1 = 9, \end{array}$$

*i.e.,*

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 8 & 7 & 4 & 9 \end{bmatrix}.$$

**Observação:** Contrariamente ao que sucede com a adição de matrizes, a multiplicação de matrizes não é, em geral, comutativa, tal como se pode verificar nos exemplos que a seguir se apresentam.

**Exemplo 1.2.9.** *Considerando as matrizes $A$ e $B$ do exemplo anterior, concluímos que $BA$ não está definido, pois o número de colunas de $B$ não coincide com o número de linhas de $A$.*

**Exemplo 1.2.10.** *Sejam*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}.$$

*Então*

$$AB = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{bmatrix} = BA.$$

**Definição 1.2.11.** *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A$ e $B$ duas matrizes quadradas de ordem $n$. Diz-se que as matrizes $A$ e $B$ são **comutáveis** ou **permutáveis** se $AB = BA$.*

Embora o produto de matrizes não seja comutativo, existem outras propriedades que se prova serem válidas relativamente a esta operação.

**Teorema 1.2.12.** *Sejam $m, n, p \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{K}$ e $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e $B$, $C$ matrizes tais que as operações a seguir indicadas estejam definidas. Então*

*i)* $(AB)\,C = A\,(BC)$. (*associatividade da multiplicação*)

*ii)* $A\,(B + C) = AB + AC$.
(*distributividade, à esquerda, da multiplicação em relação à adição*)

*iii)* $(A + B)\,C = AC + BC$.
(*distributividade, à direita, da multiplicação em relação à adição*)

*iv)* $\alpha\,(AB) = (\alpha A)\,B = A\,(\alpha B)$.

*v)* $0_{p\times m}A = 0_{p\times n}$, $A0_{n\times p} = 0_{m\times p}$.

*vi)* $AI_n = A$, $I_mA = A$.

*vii)* se $m = n$, $\quad I_nA = AI_n = A$.

*Demonstração.* Provam-se as propriedades $i)$ e $ii)$, ficando a prova das restantes propriedades como exercício.

i) Sejam $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$ e $C = [c_{ij}] \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{K})$. As matrizes $A(BC)$ e $(AB)C$ são ambas do tipo $m \times q$. Além disso, para quaisquer $i \in \{1,\ldots,m\}$ e $j \in \{1,\ldots,q\}$, tem-se

$$\begin{aligned}
(A(BC))_{ij} = \textstyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(BC)_{kj} &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\sum_{t=1}^{p} b_{kt}c_{tj}\\
&= \textstyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{t=1}^{p} a_{ik}b_{kt}c_{tj},\\
((AB)C))_{ij} = \textstyle\sum_{t=1}^{p}(AB)_{it}c_{tj} &= \textstyle\sum_{t=1}^{p}(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kt})c_{tj}\\
&= \textstyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{t=1}^{p} a_{ik}b_{kt}c_{tj},
\end{aligned}$$

pelo que $(A(BC))_{ij} = ((AB)C))_{ij}$. Logo, $A(BC) = (AB)C$.

ii) Sejam $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$ e $C = [c_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$. As matrizes $A(B+C)$ e $AB+AC$ são ambas do tipo $m\times p$. Além disso, para quaisquer $i \in \{1,\ldots,m\}$ e $j \in \{1,\ldots,p\}$, tem-se

$$\begin{aligned}
(A(B+C))_{ij} = \textstyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(B+C)_{kj} &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(b_{kj}+c_{kj})\\
&= \textstyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj}\\
&= (AB)_{ij} + (AC)_{ij}\\
&= (AB+AC)_{ij}.
\end{aligned}$$

Logo, $A(B+C) = AB + AC$. □

**Observação:** Sejam $A$, $B$ e $C$ matrizes tais que os produtos $(AB)C$ e $A(BC)$ estão definidos. Então, atendendo à associatividade da multiplicação, podemos escrever $ABC$ para representar qualquer um dos produtos indicados.

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Atendendo à definição de multiplicação de matrizes, é simples concluir que a multiplicação de $A$ por $A$ está definida se e só se $m = n$. Neste caso, faz sentido a definição seguinte.

**Definição 1.2.13.** *Sejam $n \in \mathbb{K}$ e $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Chamamos* **potência de expoente $k$ de** *$A$, com $k \in \mathbb{N}_0$, à matriz de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, que representamos por $A^k$, definida por*

$$A^k = \begin{cases} I_n & \textit{se } k = 0\\ A^{k-1}A & \textit{se } k \in \mathbb{N}\end{cases}.$$

**Teorema 1.2.14.** *Sejam $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ e $k, l \in \mathbb{N}_0$. Então*

*i)* $A^k A^l = A^{k+l}$.

*ii)* $(A^k)^l = A^{kl}$.

*Demonstração.* Exercício. □

## 1.3 Matrizes invertíveis

**Definição 1.3.1.** *Seja $n \in \mathbb{N}$. Uma matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diz-se* ***invertível*** *se existe uma matriz $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que $AX = XA = I_n$.*

**Exemplo 1.3.2.** *A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ é invertível, pois existe $X = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ tal que*

$$AX = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2 \text{ e}$$

$$XA = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2.$$

**Teorema 1.3.3.** *Seja $n \in \mathbb{N}$. Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ é uma matriz invertível, então existe uma e uma só matriz $A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que $AA' = I_n = A'A$.*

*Demonstração.* (Existência) Se $A$ é uma matriz invertível, então existe uma matriz $A'$ tal que $AA' = I_n$ e $A'A = I_n$.
(Unicidade) Sejam $X$ e $Y$ matrizes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tais que $AX = XA = I_n$ e $AY = YA = I_n$. Então

$$X = XI_n = X(AY) = (XA)Y = I_nY = Y.$$ □

**Definição 1.3.4.** *Seja $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ uma matriz invertível. A única matriz $A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que $A'A = I_n = AA'$ designa-se por* **matriz inversa** *de $A$ e representa-se por $A^{-1}$.*

**Exemplo 1.3.5.** *Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Do exemplo 1.3.2 sabe-se que $A$ é invertível e tem-se*

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Tal como se pode verificar no exemplo seguinte, nem toda a matriz quadrada é invertível.

**Exemplo 1.3.6.** *A matriz* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ *não é invertível. Com efeito, se admitirmos que existe* $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ *tal que* $AX = XA = I_2$*, tem-se*

$$AX = \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ -a-c & -b-d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-b & a-b \\ c-d & c-d \end{bmatrix} = XA,$$

*pelo que* $0 = c - d = 1$*. (contradição).*

**Definição 1.3.7.** *Uma matriz quadrada que não admite inversa diz-se uma* ***matriz singular*** *ou* ***não invertível****.*

Dadas matrizes $A, A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, diz-se que $A'$ é a inversa de $A$ se ambas as igualdades $AA' = I_n$ e $A'A = I_n$ são satisfeitas. Contudo, sabendo que $A$ é invertível, pode-se concluir que $A'$ é a inversa de $A$ verificando apenas uma das igualdades indicadas: $AA' = I_n$ ou $A'A = I_n$.

**Teorema 1.3.8.** *Sejam* $n \in \mathbb{N}$*,* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *uma matriz invertível e* $A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *tal que* $A'A = I_n$ *(respectivamente,* $AA' = I_n$*). Então* $A' = A^{-1}$ *e, portanto,* $AA' = I_n$ *(respectivamente,* $A'A = I_n$*).*

*Demonstração.* Seja $n \in \mathbb{N}$ e admitamos que $A$ é uma matriz invertível de ordem $n$ e que $A'$ é uma matriz quadrada de ordem $n$ tal que $A'A = I_n$. Então,

$$A'A = I_n \Rightarrow A'AA^{-1} = I_nA^{-1} \Rightarrow A'I_n = A^{-1} \Rightarrow A' = A^{-1},$$

e, portanto, $AA' = I_n$. □

**Teorema 1.3.9.** *Sejam* $n \in \mathbb{N}$ *e* $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*. Se* $AB = I_n$ *e* $CA = I_n$*, então* $B = C$*,* $A$ *é invertível e* $A^{-1} = B = C$*.*

*Demonstração.* Admitamos que $AB = I_n$ e $CA = I_n$. Então

$$C = CI_n = C(AB) = (CA)B = I_nB = B.$$

Portanto, $A$ é invertível e da Proposição 1.3.3 segue que $A^{-1} = B$. □

Os dois resultados anteriores podem ser generalizados. De facto, se $A$ e $B$ são matrizes quadradas de ordem $n$ tais que $AB = I_n$, então também se tem $BA = I_n$, pelo que $A$ e $B$ são matrizes invertíveis e $A = B^{-1}$ e $B = A^{-1}$. A prova desta generalização é apresentada no próximo capítulo.

A respeito de matrizes invertíveis prova-se também o resultado seguinte.

**Teorema 1.3.10.** *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ matrizes invertíveis. Então:*

*i)* $A^{-1}$ *é invertível e* $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.

*ii)* $AB$ *é invertível e* $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

*Demonstração.* $i$) Imediata pela própria definição de matriz invertível.
$ii$) Como

$$(AB)\left(B^{-1}A^{-1}\right) = A\left(BB^{-1}\right)A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$$

e

$$\left(B^{-1}A^{-1}\right)(AB) = B^{-1}\left(A^{-1}A\right)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n,$$

conclui-se que a inversa de $AB$ existe e é a matriz $B^{-1}A^{-1}$. □

## 1.4 Transposta e transconjugada de uma matriz

**Definição 1.4.1.** *Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Chama-se* ***transposta de** $A$*, e representa-se por $A^T$, à matriz de $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ cuja entrada $(i, j)$ é $a_{ji}$, i.e., $A^T = [b_{ij}]_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,m}}$, onde $b_{ij} = a_{ji}$.*

**Exemplo 1.4.2.** Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$, então $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$.

**Teorema 1.4.3.** *Sejam $\alpha \in \mathbb{K}$ e $A$, $B$ matrizes sobre $\mathbb{K}$ tais que as operações seguintes estejam definidas. Então*

*i)* $\left(A^T\right)^T = A$.

*ii)* $(A + B)^T = A^T + B^T$.

*iii)* $(\alpha A)^T = \alpha A^T$.

*iv)* $(AB)^T = B^TA^T$.

*v)* $(A^k)^T = (A^T)^k$, *para todo* $k \in \mathbb{N}_0$.

*Demonstração.* Demonstramos a propriedade $iv$), ficando a prova das restantes propriedades como exercício.
$iv$) Sejam $m, n, p \in \mathbb{N}$, $A = [a_{ij}]_{m\times p}$ e $B = [b_{ij}]_{p\times n}$. Então $(AB)^T$ e $B^T A^T$ são ambas matrizes do tipo $n \times m$. Além disso, para quaisquer $i \in \{1, \ldots, n\}$ e $j \in \{1, \ldots, m\}$, tem-se

$$(B^T A^T)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ki} a_{jk} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ki} = (AB)_{ji} = ((AB)^T)_{ij}.$$

Logo, $(AB)^T = B^T A^T$. □

**Teorema 1.4.4.** *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Se $A$ é uma matriz invertível, então $A^T$ é invertível e $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.*

*Demonstração.* Pela alínea $iv$) da proposição anterior, tem-se

$$\begin{aligned} (A^{-1})^T A^T &= (AA^{-1})^T = (I_n)^T = I_n \quad \text{e} \\ A^T (A^{-1})^T &= (A^{-1}A)^T = (I_n)^T = I_n. \end{aligned}$$

Logo, a matriz $A^T$ é invertível e $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$. □

**Definição 1.4.5.** *Seja $n \in \mathbb{N}$. Uma matriz quadrada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diz-se:*

*i)* ***simétrica*** *se $A^T = A$;*

*ii)* ***antissimétrica*** *se $A^T = -A$.*

**Exemplo 1.4.6.** *A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ é uma matriz simétrica, mas a matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 7 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ não é, uma vez que os elementos $b_{13}$ e $b_{31}$ não são iguais.*

**Teorema 1.4.7.** *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Então*

*i) $A + A^T$ é uma matriz simétrica.*

*ii) $A - A^T$ é uma matriz antissimétrica.*

*Demonstração.* Pelas alíneas $i$) e $ii$) da Proposição 1.4.3, tem-se

$$\begin{aligned} (A + A^T)^T &= A^T + (A^T)^T = A^T + A = A + A^T, \\ (A - A^T)^T &= A^T - (A^T)^T = A^T - A = -(A - A^T). \end{aligned}$$

Logo, $A + A^T$ é uma matriz simétrica e $A - A^T$ é uma matriz antissimétrica. □

**Teorema 1.4.8.** *Seja $n \in \mathbb{N}$. Toda a matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ pode ser expressa como a soma de uma matriz simétrica e de uma matriz antissimétrica.*

*Demonstração.* Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Tem-se

$$A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T).$$

Pela proposição anterior, $A + A^T$ é uma matriz simétrica e $A - A^T$ é uma matriz anstissimétrica. Logo, $\frac{1}{2}(A + A^T)$ é uma matriz simétrica e $\frac{1}{2}(A - A)^T$ é uma matriz antissimétrica. Portanto, toda a matriz $A$ é a soma de matriz simétrica e de uma matriz antissimétrica. $\square$

**Teorema 1.4.9.** *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Se $A$ é uma matriz simétrica e invertível, então $A^{-1}$ é uma matriz simétrica.*

*Demonstração.* Se $A$ é uma matriz simétrica, temos $A^T = A$. Então,

$$\left(A^{-1}\right)^T = \left(A^T\right)^{-1} = A^{-1}$$

e, portanto, $A^{-1}$ é uma matriz simétrica. $\square$

**Definição 1.4.10.** *Seja $n \in \mathbb{N}$. Uma matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diz-se* ***ortogonal*** *se $AA^T = I_n = A^T A$.*

**Observação:** Se $A$ é uma matriz ortogonal, então $A$ é uma matriz invertível e $A^{-1} = A^T$.

**Exemplo 1.4.11.** *A matriz $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ é uma matriz ortogonal, pois*

$$AA^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

*e*

$$A^T A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2.$$

**Teorema 1.4.12.** *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Se $A$ é uma matriz ortogonal, então, $A^{-1}$ é também uma matriz ortogonal.*

*Demonstração.* Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Se $A$ é uma matriz ortogonal, temos

$$AA^T = I_n = A^T A.$$

Então

$$A^{-1}(A^{-1})^T = A^{-1}(A^T)^{-1} = (A^T A)^{-1} = I_n^{-1} = I_n$$

e

$$(A^{-1})^T A^{-1} = (A^T)^{-1}A^{-1} = (AA^T)^{-1} = I_n^{-1} = I_n,$$

pelo que $A^{-1}$ é também uma matriz ortogonal. □

**Definição 1.4.13.** *Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Chama-se* ***conjugada de*** *$A$, e representa-se por $\overline{A}$, à matriz de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ tal que, para cada $i \in \{1, ..., m\}$ e $j \in \{1, ..., n\}$, $(\overline{A})_{ij} = \overline{A_{ij}}$. Define-se a* ***transconjugada*** *de $A$, e representa-se por $A^*$, como sendo a transposta da conjugada de $A$.*

**Observação:** Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, tem-se $\overline{A} = A$ e, portanto, $A^* = A^T$.

**Exemplo 1.4.14.** *Seja*

$$A = \begin{bmatrix} 1-i & 0 & 3 \\ 2+3i & 4 & i \\ 0 & 0 & 6-4i \end{bmatrix}.$$

*Então*

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 1+i & 0 & 3 \\ 2-3i & 4 & -i \\ 0 & 0 & 6+4i \end{bmatrix} \quad e \quad A^* = \begin{bmatrix} 1+i & 2-3i & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 3 & -i & 6+4i \end{bmatrix}.$$

**Teorema 1.4.15.** *Sejam $A$ e $B$ matrizes sobre $\mathbb{K}$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. Então, sempre que as operações seguintes estejam definidas, tem-se:*

*i)* $(A^*)^* = A$.

*ii)* $(A+B)^* = A^* + B^*$.

*iii)* $(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*$.

*iv)* $(AB)^* = B^* A^*$.

*v)* $\left(A^k\right)^* = (A^*)^k$, *para todo $k \in \mathbb{N}_0$.*

*Demonstração.* i) Sejam $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e $B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. As matrizes $(A+B)^*$ e $A^* + B^*$ são ambas do tipo $n \times m$. Além disso, para quaisquer $i \in \{1, \dots, n\}$ e $j \in \{1, \dots, m\}$, tem-se

$$\begin{aligned}
[(A+B)^*]_{ij} &= [(\overline{A+B})^T]_{ij} = (\overline{A+B})_{ji} \\
&= \overline{(A+B)_{ji}} = \overline{A_{ji} + B_{ji}} \\
&= \overline{A_{ji}} + \overline{B_{ji}} = (\overline{A})_{ji} + (\overline{B})_{ji} \\
&= ((\overline{A})^T)_{ij} + ((\overline{B})^T)_{ij} = A^*_{ij} + B^*_{ij}.
\end{aligned}$$

Logo, $(A+B)^* = A^* + B^*$.

A prova das restantes propriedades é deixada como exercício. □

**Definição 1.4.16.** *Seja $n \in \mathbb{N}$. Uma matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diz-se* ***hermítica*** *se $A^* = A$.*

**Exemplo 1.4.17.** *A matriz* $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2+3i \\ 0 & 2 & -i \\ 2-3i & i & 6 \end{bmatrix}$ *é uma matriz hermítica.*

**Definição 1.4.18.** *Seja $n \in \mathbb{N}$. Uma matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diz-se* ***unitária*** *se $AA^* = I_n = A^*A$.*

**Observação:** Se $A$ é uma matriz unitária, então $A$ é uma matriz invertível e $A^{-1} = A^*$.

**Teorema 1.4.19.** *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Então*

*i) Se $A$ é uma matriz unitária, então $A^{-1}$ é uma matriz unitária.*

*ii) Se $A$ e $B$ são matrizes unitárias, então $AB$ é uma matriz unitária.*

*Demonstração.* Exercício. □