Álgebra Linear CC

Licenciatura em Ciências da Computação

Carla Mendes

2024/2025

Departamento de Matemática

Matrizes

Conceitos básicos

Neste capítulo introduz-se o conceito de matriz e estudam-se operações e propriedades relacionadas com matrizes.

São bastantes os contextos na área da matemática e suas aplicações em que o conceito de matriz se revelou ser fundamental. Por exemplo, para a representação e tratamento de informação que esteja dependente de parâmetros é frequente o recurso a quadros (tabelas) aos quais se dá a designação de matrizes.

Ao longo deste capítulo designamos por $\mathbb{K}$ o conjunto dos números reais ou o conjunto dos números complexos; quando necessário indicaremos explicitamente se nos referimos ao conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais ou ao conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos. Aos elementos de $\mathbb{K}$ damos a designação de **escalares**.

Definição

*Chama-se **matriz do tipo** $m \times n$ (ou **de ordem** $m \times n$) **sobre** $\mathbb{K}$ a uma aplicação $A : \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\} \to \mathbb{K}$ definida por $A(i, j) = a_{ij}$ e que se representa por um quadro em que os mn elementos a_{ij} são dispostos em m filas horizontais e n filas verticais do seguinte modo*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\,n-1} & a_{1\,n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\,n-1} & a_{2\,n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3\,n-1} & a_{3\,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m-1\,1} & a_{m-1\,2} & \cdots & a_{m-1\,n-1} & a_{m-1\,n} \\ a_{m\,1} & a_{m\,2} & \cdots & a_{m\,n-1} & a_{m\,n} \end{bmatrix}.$$

Definição (continuação)

- *Para cada* $i \in \{1, \ldots, m\}$, *chama-se* **linha** i **da matriz** A *ao elemento* $(a_{i1}, \ldots, a_{in})$ *de* $\mathbb{K}^n$.
- *Para cada* $j \in \{1, \ldots, n\}$, *chama-se* **coluna** j **da matriz** A *ao elemento* $(a_{1j}, \ldots, a_{mj})$ *de* $\mathbb{K}^m$.
- *Ao elemento* a_{ij} *de* $\mathbb{K}$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, *chama-se* **entrada** (i, j) *ou* **elemento da posição** (i, j) *da matriz* A. *Por vezes, representa-se a entrada* (i, j) *da matriz* A *por* $A_{i,j}$.

Notação e terminologia:

- O conjunto das matrizes do tipo $m \times n$ sobre $\mathbb{K}$ representa-se por $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.
- O conjunto de todas as matrizes sobre $\mathbb{K}$ é representado por $\mathcal{M}(\mathbb{K})$.
- Em geral, representaremos as matrizes por letras maiúsculas e as suas entradas pela mesma letra, minúscula ou maiúscula, com índices que indicam a respetiva posição na matriz. Havendo ambiguidade coloca-se uma virgula a separar o índice da linha e o índice da coluna. Por exemplo, escreveremos $a_{2,34}$ ou $A_{2,34}$ para indicar o elemento na linha 2 e coluna 34 da matriz A.

Notação e terminologia:

- Se
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\,n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m\,1} & \dots & a_{m\,n} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}),$$
escreve-se abreviadamente $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ ou $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ ou $A = [a_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$. Quando o tipo da matriz for claro pelo contexto ou se não for importante para o estudo em questão, podemos escrever simplesmente $A = [a_{ij}]$.

- Uma matriz diz-se **real** ou **complexa** consoante os seus elementos sejam reais ou complexos.

Exemplo

A matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

é uma matriz real do tipo 3×2, *i.e.* $A \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$.

A linha 2 *da matriz* A *é o elemento* $(3, 4)$ *de* $\mathbb{R}^2$.

A coluna 2 *da matriz* A *é o elemento* $(0, 4, -1)$ *de* $\mathbb{R}^3$.

O elemento a_{32} *(situado na linha* 3 *e coluna* 2 *da matriz) é o real* -1.

Matrizes

Exemplo

A matriz $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 2 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$ *é uma matriz de ordem* 1×3.

Exemplo

Por $C = [c_{ij}]_{2\times 3}$, *onde* $c_{ij} = i^j$, *para* $i \in \{1, 2\}$ *e* $j \in \{1, 2, 3\}$, *representa-se a matriz*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1^2 & 1^3 \\ 2 & 2^2 & 2^3 \end{bmatrix}.$$

Definição

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. *Uma matriz* $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ *diz-se* ***matriz nula de ordem*** $m \times n$*, e representa-se por* $0_{m\times n}$ *(ou apenas por* 0*, caso não haja ambiguidade), se, para todo* $i \in \{1, ..., m\}$ *e para todo* $j \in \{1, ..., n\}$*, tem-se* $a_{ij} = 0$.

Exemplo

$$0_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matrizes

Definição

Sejam $m, n, p, q \in \mathbb{N}$*. Diz-se que as matrizes* $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ *e* $B = [b_{ij}]_{p\times q}$ *são* ***iguais****, e escreve-se* $A = B$*, se* $m = p$*,* $n = q$ *e* $a_{ij} = b_{ij}$*, quaisquer que sejam* $i \in \{1, ..., m\}$ *e* $j \in \{1, ..., n\}$*.*

Exemplo

As matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

e $B = [b_{ij}]_{3\times 3}$*, com* $b_{ij} = m.d.c.(i, j)$ *são matrizes iguais.*

Matrizes

Definição

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ *e* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. *Diz-se que:*

- *A é uma* ***matriz linha*** *se* $m = 1$;
- *A é uma* ***matriz coluna*** *se* $n = 1$;
- *A é uma* ***matriz quadrada*** *se* $m = n$.

Exemplo

A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ *é uma matriz coluna (do tipo* 3×1*) e a matriz* $B = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$ *é uma matriz linha (do tipo* 1×4*).*

Matrizes

Notação e terminologia:

- É usual representar matrizes coluna e matrizes linha por letras minúsculas; além disso, é usual omitir o índice 1 que é comum a todos os elementos. Por exemplo,

$$x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

  representam uma matriz linha de ordem 4 e uma matriz coluna de ordem 3, respectivamente.

- O conjunto $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ das matrizes quadradas do tipo $n \times n$ também se representa por $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Uma matriz A pertencente a $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diz-se uma matriz quadrada de ordem n ou, simplesmente, uma matriz de ordem n e pode representar-se por $A = [a_{ij}]_n$.

Definição

Sejam $n \in \mathbb{N}$ *e* $A = [a_{ij}]_n$ *uma matriz quadrada sobre* $\mathbb{K}$*. Os elementos* a_{ii}*,* $i \in \{1, \ldots, n\}$*, designam-se por* ***elementos principais de*** *A. Diz-se que os elementos* $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ *se dispõem na* ***diagonal principal de*** *A e que os elementos* $a_{1n}, a_{2\,n-1}, \ldots, a_{n1}$ *se dispõem na* ***diagonal secundária*** *de A.*

Exemplo

Os elementos principais da matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

são -1, 0 e 2 e os elementos que se dispõem na sua diagonal secundária são 1, 0 *e* -4.

Definição

Seja $n \in \mathbb{N}$. Uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]_n$ diz-se:

- ***triangular superior*** *se, para todos $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$,*

$$i > j \Longrightarrow a_{ij} = 0;$$

- ***triangular inferior*** *se, para todos $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$,*

$$i < j \Longrightarrow a_{ij} = 0;$$

- ***diagonal*** *se é simultaneamente triangular superior e triangular inferior, i.e., se, para todos $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$,*

$$i \neq j \Longrightarrow a_{ij} = 0.$$

Matrizes

Exemplo

Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \; e \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

A matriz A é uma matriz triangular superior, B é uma matriz triangular inferior e C é uma matriz diagonal.

Notação: Uma matriz diagonal $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ pode representar-se abreviadamente por $A = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$.

Exemplo

No exemplo anterior, tem-se $C = \mathrm{diag}(1, 0, 2, 3)$.

Definição

*Uma matriz diagonal em que todos os elementos diagonais são iguais diz-se uma **matriz escalar**.*

Definição

*Dá-se a designação de **matriz identidade de ordem n**, e representa-se por I_n, à matriz escalar de ordem n em que todos os elementos diagonais são iguais a 1, i.e., se para todos $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, tem-se*

$$(I_n)_{ij} = \begin{cases} 1 & \textit{se } i = j; \\ 0 & \textit{se } i \neq j. \end{cases}$$

Usualmente, o elemento (i, j) da matriz I_n é representado por δ_{ij}, designado por ***símbolo de Kronecker***.

Exemplo

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Operações com matrizes

Nesta secção definem-se algumas operações envolvendo matrizes: adição de matrizes, multiplicação de um escalar por uma matriz e multiplicação de matrizes.

Adição de matrizes

Definição

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ *e* $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. *Chama-se* ***matriz soma de*** A ***e*** B, *e representa-se por* $A + B$, *à matriz cuja entrada* (i, j) *é o elemento* $a_{ij} + b_{ij}$, *i.e.,*

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}.$$

Exemplo

Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$. *Então*

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+3 & 2+0 & 3+4 \\ 2+2 & 1+(-1) & 0+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 7 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Teorema

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ *e* $A, B, C \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. *Então*

i) $A + B = B + A$. (*comutatividade da adição em* $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$)

ii) $A + (B + C) = (A + B) + C$. (*associatividade da adição em* $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$)

iii) $0_{m\times n} + A = A = A + 0_{m\times n}$.

($0_{m\times n}$ *elemento neutro da adição em* $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$)

iv) *existe uma matriz* A' *tal que* $A + A' = 0_{m\times n} = A' + A$.

(*existência de elemento oposto, para a adição, de qualquer* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$)

Demonstração.

i) Sejam $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. As matrizes $A + B$ e $B + A$ são ambas do tipo $m \times n$. Além disso,

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}},$$

$$B + A = [b_{ij} + a_{ij}]_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}}$$

e, como a adição em $\mathbb{K}$ é comutativa, temos $a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij}$, para quaisquer $i \in \{1, \ldots, m\}$ e $j \in \{1, \ldots, n\}$. Portanto, as matrizes $A + B$ e $B + A$ são iguais.

Demonstração (continuação).

iv) Seja $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e seja $A' = [a'_{ij}]$ a matriz de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ tal que ${a'}_{ij} = -a_{ij}$. Então $A + A' \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e temos

$$A + A' = [a_{ij} + a'_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}},$$

onde $a_{ij} + a'_{ij} = a_{ij} + (-a_{ij}) = 0$, para quaisquer $i \in \{1, \dots, m\}$ e $j \in \{1, \dots, n\}$. Logo, $A + A' = 0_{m\times n}$. Por i), temos $A' + A = 0_{m\times n}$.

Observação:

- Sendo A, B e C matrizes do mesmo tipo, podemos escrever, sem ambiguidade, $A+B+C$ para representar $(A+B)+C$ e $A+(B+C)$, atendendo à associatividade da adição em $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$.
- A matriz A' da proposição anterior representa-se por $-A$.
- Dadas duas matrizes A e B com a mesma ordem, representa-se por $A-B$ a soma de matrizes $A+(-B)$.

Multiplicação de um escalar por uma matriz

Definição

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{K}$ *e* $A = [a_{ij}]_{m \times n} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. *Chama--se* ***produto do escalar*** α ***pela matriz*** A, *e representa-se por* αA, *a matriz de* $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ *cujo elemento* (i, j) *é* αa_{ij}, *i.e.,*

$$\alpha A = [\alpha a_{ij}]_{\substack{i = 1, \ldots, m \\ j = 1, \ldots, n}} .$$

Exemplo

Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ *então* $2A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 4 & 0 & -2 & 6 \end{bmatrix}$.

Teorema

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$, $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *e* $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. *Então*

i) $(\alpha\beta)\,A = \alpha\,(\beta A)\,.$

ii) $(\alpha+\beta)\,A = \alpha A + \beta A.$

iii) $\alpha\,(A+B) = \alpha A + \alpha B.$

iv) $0A = 0_{m\times n}.$

v) $1A = A.$

vi) $(-\alpha)A = \alpha(-A) = -(\alpha A).$

Demonstração.

i) Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Então $(\alpha\beta)A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ e, uma vez que $(\beta A) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, também temos $\alpha(\beta A) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Verifica-se ainda que

$$(\alpha\beta)A = [(\alpha\beta)a_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}},$$

$$\alpha(\beta A) = [\alpha(\beta a_{ij})]_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$$

e, considerando que o produto de elementos de $\mathbb{K}$ é associativo, tem-se $(\alpha\beta)a_{ij} = \alpha(\beta a_{ij})$, para quaisquer $i \in \{1, ..., m\}$, $j \in \{1, ..., n\}$. Portanto, $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$.$\square$

Multiplicação de matrizes

Definição

Sejam $m, n, p \in \mathbb{N}$*,* $A = [a_i j] \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{K})$*,* $B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{K})$*.*
Designa-se por ***produto de*** A ***por*** B*, e representa-se por* AB*, a matriz de* $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *cuja entrada* (i, j) *é* $\sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$*, isto é,*

$$\begin{aligned} AB &= \left[\sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}\right]_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}} \\ &= \left[a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{i\,p-1} b_{p-1\,j} + a_{ip} b_{pj}\right]_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}} . \end{aligned}$$

Matrizes

Exemplo

Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Então AB é a matriz do tipo 2×4 sobre $\mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned}
(AB)_{11} &= 0 \times 2 + 1 \times 1 + 0 \times 1 = 1, & (AB)_{12} &= 0 \times 0 + 1 \times 2 + 0 \times 1 = 2, \\
(AB)_{13} &= 0 \times 1 + 1 \times 0 + 0 \times 2 = 0, & (AB)_{14} &= 0 \times 0 + 1 \times 2 + 0 \times 1 = 2, \\
(AB)_{21} &= 2 \times 2 + 3 \times 1 + 1 \times 1 = 8, & (AB)_{22} &= 2 \times 0 + 3 \times 2 + 1 \times 1 = 7, \\
(AB)_{23} &= 2 \times 1 + 3 \times 0 + 1 \times 2 = 4, & (AB)_{24} &= 2 \times 0 + 3 \times 2 + 1 \times 1 = 9,
\end{aligned}$$

i.e.,

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 8 & 7 & 4 & 9 \end{bmatrix}.$$

Observação: Contrariamente ao que sucede com a adição de matrizes, a multiplicação de matrizes não é, em geral, comutativa, tal como se pode verificar nos exemplos que a seguir se apresentam.

Exemplo

Considerando as matrizes A e B do exemplo anterior, concluímos que BA não está definido, pois o número de colunas de B não coincide com o número de linhas de A.

Exemplo

Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}.$$

Então

$$AB = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{bmatrix} = BA.$$

Definição

*Sejam $n \in \mathbb{N}$ e A e B duas matrizes quadradas de ordem n. Diz-se que as matrizes A e B são **comutáveis** ou **permutáveis** se $AB = BA$.*

Teorema

Sejam $m, n, p \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{K}$ *e* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *e* B, C *matrizes tais que as operações a seguir indicadas estejam definidas. Então*

i) $(AB)\,C = A\,(BC)\,.$
(*associatividade da multiplicação*)

ii) $A\,(B+C) = AB + AC.$
(*distributividade, à esquerda, da multiplicação em relação à adição*)

iii) $(A+B)\,C = AC + BC.$
(*distributividade, à direita, da multiplicação em relação à adição*)

iv) $\alpha\,(AB) = (\alpha A)\,B = A\,(\alpha B).$

v) $0_{p\times m}A = 0_{p\times n}$, $A0_{n\times p} = 0_{m\times p}.$

vi) $AI_n = A$, $I_mA = A.$

vii) *se* $m = n$, $\quad I_nA = AI_n = A.$

Demonstração.

Sejam $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$ e $C = [c_{ij}] \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{K})$. As matizes $A(BC)$ e $(AB)C$ são ambas do tipo $m \times q$. Além disso, para quaisquer $i \in \{1, \ldots, m\}$ e $j \in \{1, \ldots, q\}$, tem-se

$$\begin{array}{rcl} (A(BC))_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(BC)_{kj} & = & \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \sum_{t=1}^{p} b_{kt}c_{tj} \\ & = & \sum_{k=1}^{n} \sum_{t=1}^{p} a_{ik}b_{kt}c_{tj}, \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} ((AB)C))_{ij} = \sum_{t=1}^{p}(AB)_{it}c_{tj} & = & \sum_{t=1}^{p}(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kt})c_{tj} \\ & = & \sum_{k=1}^{n} \sum_{t=1}^{p} a_{ik}b_{kt}c_{tj}, \end{array}$$

pelo que $(A(BC))_{ij} = ((AB)C))_{ij}$. Logo, $A(BC) = (AB)C$. $\square$

Observação: Sejam A, B e C matrizes tais que os produtos $(AB)C$ e $A(BC)$ estão definidos. Então, atendendo à associatividade da multiplicação, podemos escrever ABC para representar qualquer um dos produtos indicados.

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$. Atendendo à definição de multiplicação de matrizes, é simples concluir que a multiplicação de A por A está definida se e só se $m = n$. Neste caso, faz sentido a definição seguinte.

Definição

Sejam $n \in \mathbb{K}$ *e* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*. Chamamos* **potência de expoente** k **de** A*, com* $k \in \mathbb{N}_0$*, à matriz de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*, que representamos por* A^k*, definida por*

$$A^k = \begin{cases} I_n & \text{se } k = 0 \\ A^{k-1}A & \text{se } k \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

Teorema

Sejam $n \in \mathbb{N}$*,* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *e* $k, l \in \mathbb{N}_0$*. Então*

i) $A^k A^l = A^{k+l}$.

ii) $(A^k)^l = A^{kl}$.

Matrizes invertíveis

Definição

Seja $n \in \mathbb{N}$. *Uma matriz* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *diz-se* ***invertível*** *se existe uma matriz* $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *tal que* $AX = XA = I_n$.

Exemplo

A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ *é invertível, pois existe* $X = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ *tal que*

$$AX = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2 \text{ e}$$

$$XA = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2.$$

Teorema

Seja $n \in \mathbb{N}$. Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ é uma matriz invertível, então existe uma e uma só matriz $A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que $AA' = I_n = A'A$.

Demonstração.

(Existência) Se A é uma matriz invertível, então existe uma matriz A' tal que $AA' = I_n$ e $A'A = I_n$.

(Unicidade) Sejam X e Y matrizes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tais que $AX = XA = I_n$ e $AY = YA = I_n$. Então

$$X = XI_n = X(AY) = (XA)Y = I_nY = Y. \qquad \square$$

Definição

*Seja $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ uma matriz invertível. A única matriz $A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que $A'A = I_n = AA'$ designa-se por **matriz inversa** de A e representa-se por A^{-1}.*

Exemplo

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Do exemplo anterior sabe-se que A é invertível e tem-se

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Nem toda a matriz quadrada é invertível.

Exemplo

A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ *não é invertível. Com efeito, se admitirmos que existe* $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ *tal que* $AX = XA = I_2$, *tem-se*

$$AX = \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ -a-c & -b-d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-b & a-b \\ c-d & c-d \end{bmatrix} = XA,$$

pelo que $0 = c - d = 1$. *(contradição).*

Definição

*Uma matriz quadrada que não admite inversa diz-se uma **matriz singular** ou **não invertível**.*

Dadas matrizes $A, A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, diz-se que A' é a inversa de A se ambas as igualdades $AA' = I_n$ e $A'A = I_n$ são satisfeitas. Contudo, sabendo que A é invertível, pode-se concluir que A' é a inversa de A verificando apenas uma das igualdades indicadas: $AA' = I_n$ ou $A'A = I_n$.

Teorema

Sejam $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ uma matriz invertível e $A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que $A'A = I_n$ (respectivamente, $AA' = I_n$). Então $A' = A^{-1}$ e, portanto, $AA' = I_n$ (respectivamente, $A'A = I_n$).

Demonstração.

Seja $n \in \mathbb{N}$ e admitamos que A é uma matriz invertível de ordem n e que A' é uma matriz quadrada de ordem n tal que $A'A = I_n$. Então,

$$A'A = I_n \Rightarrow A'AA^{-1} = I_nA^{-1} \Rightarrow A'I_n = A^{-1} \Rightarrow A' = A^{-1},$$

e, portanto, $AA' = I_n$. $\square$

Teorema

Sejam $n \in \mathbb{N}$ *e* $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. *Se* $AB = I_n$ *e* $CA = I_n$, *então* $B = C$, A *é invertível e* $A^{-1} = B = C$.

Demonstração.

Admitamos que $AB = I_n$ e $CA = I_n$. Então

$$C = CI_n = C(AB) = (CA)B = I_nB = B.$$

Portanto, A é invertível e $A^{-1} = B$. $\square$

Matrizes

Os dois resultados anteriores podem ser generalizados. De facto, se A e B são matrizes quadradas de ordem n tais que $AB = I_n$, então também se tem $BA = I_n$, pelo que A e B são matrizes invertíveis e $A = B^{-1}$ e $B = A^{-1}$. A prova desta generalização é apresentada no próximo capítulo.

A respeito de matrizes invertíveis prova-se também o resultado seguinte.

Teorema

Sejam $n \in \mathbb{N}$ *e* $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *matrizes invertíveis. Então:*

i) A^{-1} *é invertível e* $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.

ii) AB *é invertível e* $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Demonstração.

$i)$ Imediata pela própria definição de matriz invertível.

$ii)$ Como

$$(AB)\left(B^{-1}A^{-1}\right) = A\left(BB^{-1}\right)A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$$

e

$$\left(B^{-1}A^{-1}\right)(AB) = B^{-1}\left(A^{-1}A\right)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n$$

conclui-se que a inversa de AB existe e é a matriz $B^{-1}A^{-1}$. $\square$

Transposta e transconjugada de uma matriz

Definição

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ *e* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. *Chama-se* ***transposta de*** A, *e representa-se por* A^T, *à matriz de* $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ *cuja entrada* (i, j) *é* a_{ji}, *i.e., tal que* $A^T = [b_{ij}]_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,m}}$, *onde* $b_{ij} = a_{ji}$.

Exemplo

$$\text{Se } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, \text{ então } A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

Teorema

Sejam $\alpha \in \mathbb{K}$ e A, B matrizes sobre $\mathbb{K}$ tais que as operações seguintes estejam definidas. Então

i) $\left(A^T\right)^T = A$.

ii) $(A + B)^T = A^T + B^T$.

iii) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$.

iv) $(AB)^T = B^T A^T$.

v) $(A^k)^T = (A^T)^k$, *para todo* $k \in \mathbb{N}_0$.

Demonstração.

Demonstramos a propriedade iv), ficando a prova das restantes propriedades como exercício.

iv) Sejam $m, n, p \in \mathbb{N}$, $A = [a_{ij}]_{m\times p}$ e $B = [b_{ij}]_{p\times n}$. Então $(AB)^T$ e $B^T A^T$ são ambas matrizes do tipo $n \times m$. Além disso, para quaisquer $i \in \{1, \ldots, n\}$ e $j \in \{1, \ldots, m\}$, tem-se

$$(B^T A^T)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ki} a_{jk} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ki} = (AB)_{ji} = ((AB)^T)_{ij}.$$

Logo, $(AB)^T = B^T A^T$. $\square$

Teorema

Sejam $n \in \mathbb{N}$ *e* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. *Se* A *é uma matriz invertível, então* A^T *é invertível e* $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Demonstração.

Pela alínea $iv)$ da proposição anterior, tem-se

$$\left(A^{-1}\right)^T A^T = \left(AA^{-1}\right)^T = (I_n)^T = I_n \quad \text{e}$$
$$A^T \left(A^{-1}\right)^T = \left(A^{-1}A\right)^T = (I_n)^T = I_n.$$

Logo, a matriz A^T é invertível e $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$. $\square$

Definição

Seja $n \in \mathbb{N}$. Uma matriz quadrada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diz-se:

i) ***simétrica*** *se $A^T = A$;*

ii) ***antissimétrica*** *se $A^T = -A$.*

Exemplo

A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ é uma matriz simétrica, mas a matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 7 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ não é, uma vez que os elementos b_{13} e b_{31} não são iguais.

Teorema

Sejam $n \in \mathbb{N}$ *e* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*. Então*

i) $A + A^T$ *é uma matriz simétrica.*

ii) $A - A^T$ *é uma matriz antissimétrica.*

Demonstração.

Pelas alíneas i) e ii) do teorema anterior, tem-se

$$(A + A^T)^T = A^T + (A^T)^T = A^T + A = A + A^T,$$

$$(A - A^T)^T = A^T - (A^T)^T = A^T - A = -(A - A^T).$$

Logo, $A + A^T$ é uma matriz simétrica e $A - A^T$ é uma matriz antissimétrica. $\square$

Teorema

Seja $n \in \mathbb{N}$. Toda a matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ pode ser expressa como a soma de uma matriz simétrica e de uma matriz antissimétrica.

Demonstração.

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Tem-se

$$A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T).$$

Pela proposição anterior, $A + A^T$ é uma matriz simétrica e $A - A^T$ é uma matriz anstissimétrica. Logo, $\frac{1}{2}(A + A^T)$ é uma matriz simétrica e $\frac{1}{2}(A - A)^T$ é uma matriz antissimétrica. Portanto, toda a matriz A é a soma de matriz simétrica e de uma matriz antissimétrica. $\square$

Teorema

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Se A é uma matriz simétrica e invertível, então A^{-1} é uma matriz simétrica.

Demonstração.

Se A é uma matriz simétrica, temos $A^T = A$. Então,

$$\left(A^{-1}\right)^T = \left(A^T\right)^{-1} = A^{-1}$$

e, portanto, A^{-1} é uma matriz simétrica. $\square$

Definição

Seja $n \in \mathbb{N}$. Uma matriz $A \in \mathcal{M}_{\boldsymbol{n}}(\mathbb{K})$ diz-se ***ortogonal*** *se $AA^T = I_n = A^T A$.*

Observação: Se A é uma matriz ortogonal, então A é uma matriz invertível e $A^{-1} = A^T$.

Exemplo

A matriz $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ *é uma matriz ortogonal, pois*

$$AA^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

e

$$A^T A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2.$$

Teorema

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Se A é uma matriz ortogonal, então, A^{-1} é também uma matriz ortogonal.

Demonstração.

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Se A é uma matriz ortogonal, temos

$$AA^T = A^T A = I_n.$$

Então

$$A^{-1}(A^{-1})^T = A^{-1}(A^T)^{-1} = (A^T A)^{-1} = I_n^{-1} = I_n$$

e

$$(A^{-1})^T A^{-1} = (A^T)^{-1} A^{-1} = (AA^T)^{-1} = I_n^{-1} = I_n,$$

pelo que A^{-1} é também uma matriz ortogonal. $\square$

Definição

*Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Chama-se **conjugada de** A, e representa-se por $\overline{A}$, à matriz de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ tal que, para cada $i \in \{1, ..., m\}$ e $j \in \{1, ..., n\}$, $(\overline{A})_{ij} = \overline{A_{ij}}$. Define-se a **transconjugada** de A, e representa-se por A^*, como sendo a transposta da conjugada de A.*

Observação: Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, tem-se $\overline{A} = A$ e, portanto, $A^* = A^T$.

Matrizes

Exemplo

Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1-i & 0 & 3 \\ 2+3i & 4 & i \\ 0 & 0 & 6-4i \end{bmatrix}.$$

Então

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 1+i & 0 & 3 \\ 2-3i & 4 & -i \\ 0 & 0 & 6+4i \end{bmatrix} \quad e \quad A^* = \begin{bmatrix} 1+i & 2-3i & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 3 & -i & 6+4i \end{bmatrix}.$$

Matrizes

Teorema

Sejam A e B matrizes sobre $\mathbb{K}$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. Então, sempre que as operações seguintes estejam definidas, tem-se:

i) $(A^*)^* = A$;

ii) $(A+B)^* = A^* + B^*$;

iii) $(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*$;

iv) $(AB)^* = B^* A^*$;

v) $\left(A^k\right)^* = (A^*)^k$, *para todo* $k \in \mathbb{N}_0$.

Definição

*Seja $n \in \mathbb{N}$. Uma matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diz-se **hermítica** se $A^* = A$.*

Exemplo

A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2+3i \\ 0 & 2 & -i \\ 2-3i & i & 6 \end{bmatrix}$ *é uma matriz hermítica.*

Definição

Seja $n \in \mathbb{N}$. Uma matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diz-se ***unitária*** *se $AA^* = I_n = A^*A$.*

Observação: Se A é uma matriz unitária, então A é uma matriz invertível e $A^{-1} = A^*$.

Teorema

Sejam $n \in \mathbb{N}$ *e* $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*. Então*

i) *Se* A *é uma matriz unitária, então* A^{-1} *é uma matriz unitária.*

ii) *Se* A *e* B *são matrizes unitárias, então* AB *é uma matriz unitária.*