Notas de Álgebra Linear

Carla Mendes

2024/2025

4. Espaços Vetoriais

Muitas estruturas matemáticas têm propriedades em comum que podem ser generalizadas através de um estudo mais abstrato. Um dos principais objetos de estudo da Álgebra Linear são os *Espaços Vetoriais*. Esta noção é uma generalização da estrutura que está associada ao conjunto formado por todos os segmentos orientados com origem num determinado ponto, munido das operações de adição de segmentos orientados e da multiplicação de um escalar por um segmento. Os elementos deste conjunto são conhecidos por vetores e é esta designação que está na origem da nomenclatura *espaço vetorial*.

4.1 Definições e propriedades

A noção de espaço vetorial está associada a estruturas designadas por *corpos*. A noção de corpo será estudada com mais detalhe no âmbito de outras unidades curriculares, mas por uma questão de conveniência apresentamos aqui a sua definição.

Definição 4.1.1. *Dá-se a designação de **corpo** a um triplo* $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ *onde* $\mathbb{K}$ *é um conjunto não vazio e* $+$ *e* $\cdot$ *são aplicações de* $\mathbb{K} \times \mathbb{K}$ *em* $\mathbb{K}$ *tais que:*

(C_1) $\forall_{x,y,z \in \mathbb{K}} \quad (x + y) + z = x + (y + z);$ *(associatividade da operação +)*

(C_2) $\forall_{x,y \in \mathbb{K}} \quad x + y = y + x;$ *(comutatividade da operação +)*

(C_3) $\exists_{0_{\mathbb{K}} \in \mathbb{K}} \, \forall_{x \in \mathbb{K}} \quad 0_{\mathbb{K}} + x = x = x + 0_{\mathbb{K}};$

(C_4) $\forall_{x \in \mathbb{K}} \, \exists_{x' \in \mathbb{K}} \quad x + x' = 0_{\mathbb{K}} = x' + x;$

(C_5) $\forall_{x,y,z \in \mathbb{K}} \quad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z);$ *(associatividade da operação ·)*

(C_6) $\forall_{x,y \in \mathbb{K}} \quad x \cdot y = y \cdot x;$ *(comutatividade da operação ·)*

(C_7) $\exists_{1_{\mathbb{K}} \in \mathbb{K}} \, \forall_{x \in \mathbb{K}} \quad 1_{\mathbb{K}} \cdot x = x = x \cdot 1_{\mathbb{K}};$

(C_8) $\forall_{x \in \mathbb{K} \setminus \{0_{\mathbb{K}}\}} \, \exists^1_{x'} \in \mathbb{K} \quad x \cdot x' = 1_{\mathbb{K}} = x' \cdot x;$

(C_9) $\forall_{x,y,z \in \mathbb{K}} \quad x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \;\; e \;\; (y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x;$
(distributividade da operação · relativamente à operação +)

Notação e terminologia: Seja $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ um corpo.

- Diz-se que $\mathbb{K}$ juntamente com as aplicações $+$ e $\cdot$ é um corpo ou, caso não exista ambiguidade quanto às operações envolvidas, diz-se apenas que $\mathbb{K}$ é um corpo.
- Às operações $+$ e $\cdot$ dá-se a designação de *adição* e *multiplicação em* $\mathbb{K}$, respectivamente.
- Existe um único elemento $0_{\mathbb{K}} \in \mathbb{K}$ tal que, para cada $x \in \mathbb{K}$, $0_{\mathbb{K}} + x = x = x + 0_{\mathbb{K}}$. Este elemento designa-se por por **zero de** $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ e, não havendo ambiguidade, pode ser representado apenas por 0.
- Para cada $x \in \mathbb{K}$, existe um único elemento $x' \in \mathbb{K}$ tal que $x+x' = 0_{\mathbb{K}} = x'+x$. Este elemento designa-se por **simétrico de** x e representa-se por $-x$.
- Dados $x, y \in \mathbb{K}$, escreve-se $x - y$ para abreviar $x + (-y)$.
- Existe um único elemento $1_{\mathbb{K}} \in \mathbb{K}$ tal que, para cada $x \in \mathbb{K}$, $1_{\mathbb{K}} \cdot x = x = x \cdot 1_{\mathbb{K}}$. Este elemento designa-se por **identidade de** $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ e, não havendo ambiguidade, pode ser representado apenas por 1.
- Para cada $x \in \mathbb{K} \setminus \{0_{\mathbb{K}}\}$, existe um único elemento $x' \in \mathbb{K} \setminus \{0_{\mathbb{K}}\}$ tal que $x \cdot x' = 1_{\mathbb{K}} = x' \cdot x$. Este elemento designa-se por **inverso de** x e representa-se por x^{-1}.

Exemplo 4.1.2. *O triplo* $(\mathbb{K}, +, \cdot)$, *onde* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ *e* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de adição e multiplicação em* $\mathbb{K}$, *é um corpo.*

Definição 4.1.3. *Sejam* V *um conjunto não vazio,* $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ *um corpo e*

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{+} : V \times V & \to & V \\ (x, y) & \mapsto & x \widetilde{+} y \end{array}, \qquad \begin{array}{rcl} \widetilde{\cdot} : \mathbb{K} \times V & \to & V \\ (\alpha, x) & \mapsto & \alpha \widetilde{\cdot} x \end{array}$$

aplicações. Diz-se que $(V, \mathbb{K}, \widetilde{+}, \widetilde{\cdot})$ *é um* ***espaço vetorial sobre*** $\mathbb{K}$ *ou que* V ***juntamente com as aplicações*** $\widetilde{+}$ ***e*** $\widetilde{\cdot}$ ***é um espaço vetorial sobre o corpo*** $\mathbb{K}$ *se são satisfeitas as condições seguintes:*

(V_1) $\forall_{x,y \in V} \quad x \widetilde{+} y = y \widetilde{+} x;$

(V_2) $\forall_{x,y,z \in V} \quad x \widetilde{+} \left(y \widetilde{+} z\right) = \left(x \widetilde{+} y\right) \widetilde{+} z;$

(V_3) $\exists_{0_V \in V} \, \forall_{x \in V} \quad x \widetilde{+} 0_V = x = 0_V \widetilde{+} x;$

(V_4) $\forall_{x \in V} \, \exists_{x' \in V} \quad x \widetilde{+} x' = 0_V = x' \widetilde{+} x;$

(V_5) $\forall_{x,y \in V} \, \forall_{\alpha \in \mathbb{K}} \quad \alpha \widetilde{\cdot} \left(x \widetilde{+} y\right) = \alpha \widetilde{\cdot} x \widetilde{+} \alpha \widetilde{\cdot} y;$

(V_6) $\forall_{x\in V}\, \forall_{\alpha,\beta\in\mathbb{K}} \quad (\alpha+\beta)\,\tilde{\cdot}\, x = \alpha\,\tilde{\cdot}\, x\,\tilde{+}\,\beta\,\tilde{\cdot}\, x;$

(V_7) $\forall_{x\in V}\, \forall_{\alpha,\beta\in\mathbb{K}} \quad (\alpha\cdot\beta)\,\tilde{\cdot}\, x = \alpha\,\tilde{\cdot}\,(\beta\,\tilde{\cdot}\, x)\,;$

(V_8) $\forall_{x\in V} \quad 1_{\mathbb{K}}\,\tilde{\cdot}\, x = x.$

Notação e terminologia:

- Seja $(V, \mathbb{K}, \tilde{+}, \tilde{\cdot})$ um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$. Para simplificar a linguagem, em vez de dizermos que um conjunto V juntamente com as aplicações $\tilde{+}$ e $\tilde{\cdot}$ é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$, dizemos apenas que V é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$ (subentendendo as operações envolvidas).

- Ao longo deste capítulo consideramos apenas espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ e sobre $\mathbb{C}$ e passamos a representar por $\mathbb{K}$ um destes conjuntos. Um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ diz-se um ***espaço vetorial real*** e a um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ dá-se a designação de ***espaço vetorial complexo***.

- Aos elementos de V dá-se o nome de ***vetores*** e aos elementos de $\mathbb{K}$ o de ***escalares***. O elemento 0_V indicado na propriedade (V_3) da definição de espaço vetorial é único. Ao elemento 0_V dá-se a designação de ***vetor nulo*** e ao zero de $\mathbb{K}$ damos o nome de ***escalar nulo***. Desde que não exista ambiguidade podemos representar tanto o vetor nulo como o escalar nulo por 0.

- A operação $\tilde{+}$ designa-se por ***adição de vetores*** e a operação $\tilde{\cdot}$ por ***multiplicação de um escalar por um vetor***. Simplificamos também a notação, escrevendo $+$ quer se trate da adição em $\mathbb{K}$ quer se trate da adição de vetores e escrevemos $\cdot$ quer seja a multiplicação em $\mathbb{K}$ quer o produto de um escalar por um vetor.

- Para cada $x \in V$, ao elemento x' determinado na condição (V_4), chama-se ***simétrico de*** x e representa-se por $-x$.

Exemplo 4.1.4. *Seja $n \in \mathbb{N}$. O conjunto*

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) : x_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1, 2, ..., n\}\,,$$

dos n-úplos ordenados de elementos de $\mathbb{R}$, algebrizado com as aplicações $+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definidas, respectivamente, por:

- $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$,

  para todos $x = (x_1, x_2, ..., x_n)\,, y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$,

- $\alpha \cdot x = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n)$,

  para todos $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$,

é um espaço vetorial real.

Exemplo 4.1.5. *O conjunto* $\mathbb{R}_2[x] = \{ax^2 + bx + c : a, b, c \in \mathbb{R}\}$ *dos polinómios, na indeterminada* x *e com coeficientes reais, que têm grau menor ou igual a* 2*, algebrizado com as operações* $+ : \mathbb{R}_2[x] \times \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ *e* $\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$*, definidas, respetivamente, por*

- $(a_1x^2 + b_1x + c_1) + (a_2x^2 + b_2x_2 + c_2) = (a_1 + a_2)x^2 + (b_1 + b_2)x + (c_1 + c_2)$*, para quaisquer* $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$*,*
- $\alpha \cdot (ax^2 + bx + c) = (\alpha a)x^2 + (\alpha b)x + \alpha c$*, para quaisquer* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$*.*

é um espaço vetorial real.

Exemplo 4.1.6. *O conjunto* $\mathbb{R}[x]$ *de todos os polinómios na ideterminada* x *e de coeficientes reais, com a adição usual de polinómios e a multiplicação de um número real por um polinómio, é um espaço vetorial real.*

Exemplo 4.1.7. *Sejam* $m, n \in I\!N$*. O conjunto* $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$*, das matrizes reais de ordem* $m \times n$*, algebrizado com a adição de matrizes e a multiplicação de um real por uma matriz, é um espaço vetorial real.*

Exemplo 4.1.8. *O conjunto* $\mathbb{R}$*, juntamente com as aplicações* $\widetilde{+} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e* $\widetilde{\cdot} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definidas por*

$$x\widetilde{+}y = x + y - 3, \text{ para quaisquer } x, y \in \mathbb{R},$$

$$\lambda\widetilde{\cdot}x = \lambda(x - 3) + 3, \text{ para quaisquer } x, \lambda \in \mathbb{R},$$

é um espaço vetorial real.

A partir das propriedades satisfeitas por um espaço vetorial é possível deduzir outras propriedades. Apresentam-se seguidamente algumas dessas propriedades.

Teorema 4.1.9. *Seja* V *um espaço vetorial sobre* $\mathbb{K}$*. Então, para quaisquer* $x, y \in V$ *e para quaisquer* $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$*, tem-se*

i) $\alpha \cdot 0_V = 0_V$*;*

ii) $0_{\mathbb{K}} \cdot x = 0_V$*;*

iii) se $\alpha \cdot x = 0_V$*, então* $\alpha = 0_{\mathbb{K}}$ *ou* $x = 0_V$;

iv) $(-\alpha) \cdot x = -(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot (-x)$*;*

v) $\alpha(x - y) = \alpha x - \alpha y$*;*

vi) $(\alpha - \beta)x = \alpha x - \beta x$.

Demonstração. Demonstramos as propriedades *i)* a *iv)*, deixando a prova das restantes propriedades como exercício.

i) Pelas condições (V_3) e (V_5) da definição de espaço vetorial, tem-se

$$\alpha \cdot 0_V = \alpha \cdot (0_V + 0_V) = \alpha \cdot 0_V + \alpha \cdot 0_V.$$

Por (V_4) é garantida a existência do elemento $-\alpha 0_V$. Adicionando este elemento a ambos os lados da igualdade $\alpha \cdot 0_V = \alpha \cdot 0_V + \alpha \cdot 0_V$, segue que

$$\alpha 0_V + (-\alpha 0_V) = (\alpha 0_V + \alpha 0_V) + (-\alpha 0_V),$$

donde, por (V_2), se obtem

$$\alpha 0_V + (-\alpha 0_V) = \alpha 0_V + (\alpha 0_V + (-\alpha 0_V)).$$

Então, por (V_4) e por (V_3),

$$0_V = \alpha 0_V + 0_V = \alpha 0_V.$$

ii) Pela condição (C_3) da definição de corpo e pela propriedade (V_6) da definição de espaço vetorial, tem-se

$$0_{\mathbb{K}} \cdot x = (0_{\mathbb{K}} + 0_{\mathbb{K}}) \cdot x = 0_{\mathbb{K}} \cdot x + 0_{\mathbb{K}} \cdot x.$$

Somando $-(0_{\mathbb{K}} \cdot x)$ de ambos os lados da igualdade $0_{\mathbb{K}} \cdot x = 0_{\mathbb{K}} \cdot x + 0_{\mathbb{K}} \cdot x$, obtem-se

$$-(0_{\mathbb{K}} \cdot x) + 0_{\mathbb{K}} \cdot x = -(0_{\mathbb{K}} \cdot x) + (0_{\mathbb{K}} \cdot x + 0_{\mathbb{K}} \cdot x)$$

Por (V_6) segue que

$$-(0_{\mathbb{K}} \cdot x) + 0_{\mathbb{K}} \cdot x = (-(0_{\mathbb{K}} \cdot x) + 0_{\mathbb{K}} \cdot x) + 0_{\mathbb{K}} \cdot x$$

e, por (V_3) e (V_4), resulta que

$$0_V = 0_V + 0_{\mathbb{K}} \cdot x = 0_{\mathbb{K}} \cdot x.$$

iii) Admitamos que $\alpha \cdot x = 0_V$ e que $\alpha \neq 0_{\mathbb{K}}$. Como $\alpha \neq 0_{\mathbb{K}}$ existe $\alpha^{-1} \in \mathbb{K}$ e por (V_8), (V_7) e *i)* segue que

$$x = 1_{\mathbb{K}} \cdot x = (\alpha^{-1}\alpha) \cdot x = \alpha^{-1} \cdot (\alpha \cdot x) = \alpha^{-1} \cdot 0_V = 0_V.$$

iv) Por (V_6) e *ii)*, temos

$$\alpha \cdot x + (-\alpha) \cdot x = (\alpha + (-\alpha)) \cdot x = 0_{\mathbb{K}} \cdot x = 0_V,$$

pelo que $(-\alpha) \cdot x$ é o simétrico de $\alpha \cdot x$ em V, i.e., $-(\alpha \cdot x) = (-\alpha) \cdot x$.
Agora, por (V_5), (V_4) e $i)$, tem-se

$$\alpha \cdot x + \alpha \cdot (-x) = \alpha \cdot (x + (-x)) = \alpha \cdot 0_V = 0_V$$

e, portanto, $\alpha \cdot (-x)$ é o simétrico de $\alpha \cdot x$ em V, i.e., $-(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot (-x)$.

v) Por (V_5) e $iv)$, tem-se

$$\alpha(x - y) = \alpha(x + (-y)) = \alpha x + \alpha(-y) = \alpha x + (-(\alpha y)) = \alpha x - \alpha y.$$

vi) Por (V_6) e $iv)$, tem-se

$$(\alpha - \beta)x = (\alpha + (-\beta))x = \alpha x + (-\beta)x = \alpha x + (-(\beta x)) = \alpha x - \beta x.$$

$\square$

4.2 Subespaços vetoriais

Definição 4.2.1. *Sejam $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ um espaço vetorial e U um subconjunto de V. Diz-se que U é um **subespaço vetorial** de V, e escreve-se $U \leq V$, se:*

1) $\forall_{x,y \in U},\ x + y \in U$;

2) $\forall_{x \in U},\ \forall_{\alpha \in \mathbb{K}},\ \alpha \cdot x \in U$;

3) *U, com as aplicações*

$$\begin{array}{rcl} \widehat{+} : U \times U & \to & U \\ (x, y) & \mapsto & x + y \end{array} \quad e \quad \begin{array}{rcl} \widehat{\cdot} : \mathbb{K} \times U & \to & U \\ (\alpha, x) & \mapsto & \alpha \cdot x \end{array},$$

é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$.

Dado um espaço vetorial V sobre um corpo $\mathbb{K}$, existem critérios que permitem caracterizar os subconjuntos de V que são subespaços vetoriais.

Teorema 4.2.2. *Sejam $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ um espaço vetorial e U um subconjunto de V. Então U é um subespaço vetorial de V se e só se são satisfeitas as seguintes condições:*

1') $U \neq \emptyset$;

2') $\forall_{x,y \in U},\ x + y \in U$;

3') $\forall_{x \in U},\ \forall_{\alpha \in \mathbb{K}},\ \alpha \cdot x \in U$.

Demonstração. Suponha-se que U é um subespaço vetorial de V. Então U satisfaz as condições 1) e 2), pelo que as condições 2') e 3') são, obviamente, satisfeitas. Assim, resta mostrar 1'). Como U é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ quando algebrizado com as aplicações $\widehat{+}$ e $\widehat{\cdot}$, existe $0_U \in U$ tal que, para todo $x \in U$, $x\widehat{+}0_U = x = 0_U\widehat{+}x$. Assim, tem-se $U \neq \emptyset$. Logo as condições 1'), 2') e 3') são satisfeitas.
Reciprocamente, suponhamos que U é um subconjunto de V que satisfaz as condições 1'), 2') e 3'). Então, por 2') e 3'), é imediato que as condições 1) e 2) são satisfeitas e $\widehat{+}$ e $\widehat{\cdot}$ são aplicações. Vejamos, agora, que U juntamente com estas aplicações é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Uma vez que $U \subseteq V$ e que as operações de U são as operações de V restringidas a elementos de U, é óbvio que U satisfaz propriedades análogas às propriedades V_1), V_2), V_5), V_6), V_7) e V_8). Resta, então, mostrar que, relativamente à operação $\widehat{+}$, existe elemento neutro e que todo o elemento de U tem simétrico. Ora, como $U \neq \emptyset$, existe $x \in U$. Logo, por 3'), $-1_{\mathbb{K}} \cdot x = -x \in U$ e, por 2'), $x + (-x) = 0_V \in U$. Atendendo a que $U \subseteq V$, temos, para todo $x \in U$, $x\widehat{+}0_V = x + 0_V = x = 0_V + x = 0_V\widehat{+}x$, e, portanto, 0_V é elemento neutro para a operação $\widehat{+}$. Uma vez que, para todo $x \in U$, $-x \in U$ e $x\widehat{+}(-x) = 0_V = (-x)\widehat{+}x$, concluímos que para todo o vetor de U existe um elemento em U que é o seu simétrico relativamente à operação $\widehat{+}$. □

Observação: Note-se que, nesta demonstação, verificou-se que o vetor nulo de um espaço vetorial V tem de pertencer a qualquer subespaço vetorial de V. Caso um subconjunto de V não contenha o vetor nulo de V, ele não poderá ser um subespaço. De facto, o teorema anterior pode ser enunciado de forma equivalente substituindo a condição $U \neq \emptyset$ por $0_V \in U$.

Exemplo 4.2.3. *O conjunto* $W = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0\}$ *é subespaço vetorial do espaço vetorial real* $\mathbb{R}^2$*. De facto,*

i) $W \subseteq \mathbb{R}^2$;

ii) $(0, 0) \in W$, *pelo que* $W \neq \emptyset$;

iii) dados $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in W$, *temos* $x, y \in \mathbb{R}^2$ *e* $x_2 = 0$ *e* $y_2 = 0$, *pelo que* $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \in \mathbb{R}^2$ *e* $x_2 + y_2 = 0 + 0 = 0$ *e, portanto,*

$$x + y \in W;$$

iv) dados $x = (x_1, x_2) \in W$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$, *temos* $x \in \mathbb{R}^2$ *e* $x_2 = 0$, *pelo que* $\alpha \cdot x = (\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot x_2) \in \mathbb{R}^2$ *e* $\alpha \cdot x_2 = \alpha \cdot 0 = 0$ *e, portanto,*

$$\alpha \cdot x \in W.$$

Exemplo 4.2.4. *O conjunto* $W = \{ax^2 + bx + c : a, b \in \mathbb{R} \text{ e } c = 0\}$ *é subespaço vetorial do espaço vetorial real* $\mathbb{R}_2[x]$*. De facto,* *i)* $W \subseteq \mathbb{R}_2[x]$;

ii) $0x^2 + 0x + 0 \in W$, *pelo que* $W \neq \emptyset$;

iii) dados $a_1x^2 + b_1x + c_1, a_2x^2 + b_2x + c_2 \in W$, *temos* $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$, $c_1 = 0$ *e* $c_2 = 0$, *pelo que* $a_1 + a_2 \in \mathbb{R}$, $b_1 + b_2 \in \mathbb{R}$, $c_2 + c_2 = 0 + 0 = 0$ *e, portanto,*

$$(a_1x^2 + b_1x + c_1) + (a_2x^2 + b_2x + c_2) = (a_1 + a_2)x^2 + (b_1 + b_2)x + (c_1 + c_2) \in W;$$

iv) dados $ax^2 + bx + c \in W$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$, *temos* $a, b \in \mathbb{R}$ *e* $c = 0$, *donde* $\alpha a, \alpha b \in \mathbb{R}$ *e* $\alpha c = 0$. *Portanto,*

$$\alpha \cdot (ax^2 + bx + c) = (\alpha a)x^2 + (\alpha b)x + \alpha c \in W.$$

Exemplo 4.2.5. *Seja* $n \in \mathbb{N}$. *O conjunto*

$$W = \{A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) : A \text{ é uma matriz diagonal}\}$$

é subespaço vetorial de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, *pois*

i) $W \subseteq \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$;

ii) $0_{n\times n} \in W$;

iii) para quaisquer $A, B \in W$, $A + B \in W$ *(a soma de matrizes do tipo* $n \times n$ *diagonais é também matriz do tipo* $n \times n$ *diagonal);*

iv) para quaisquer $A \in W$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha A \in W$ *(se* A *é uma matriz do tipo* $n \times n$ *diagonal, a matriz* αA *também é uma matriz do tipo* $n \times n$ *diagonal).*

Exemplo 4.2.6. *O conjunto* $W = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 2\}$ *não é subespaço vetorial do espaço vetorial real* $\mathbb{R}^2$, *pois existem* $x = (1, 2), y = (0, 2)$ *tais que* $x, y \in W$ *e* $x + y = (1, 4) \notin W$.

Dado um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, vamos estudar formas de construir subespaços vetoriais a partir de outros subsespaços vetoriais dados.

Exemplo 4.2.7. *No espaço vetorial* $\mathbb{R}^3$, *consideremos os subespaços vetoriais*

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\} \quad e \quad G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 2z\}.$$

Então

$$\begin{aligned} F \cap G &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \in F \text{ e } (x, y, z) \in G\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0 \text{ e } y = 2z\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = -3z \text{ e } y = 2z\} \\ &= \{(-3z, 2z, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

e é simples verificar que $F \cap G$ *é um subespaço vetorial de* $\mathbb{R}^3$.

De forma geral, a intersecção de quaisquer dois subespaços vetoriais de um espaço vetorial V é também um subespaço vetorial de V.

Teorema 4.2.8. *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e U, W subespaços vetoriais de V. Então $U \cap W$ é um subespaço vetorial de V.*

Demonstração. Provemos, recorrendo ao critério de subespaço, que $U \cap W$ é subespaço vetorial de V.

i) Tem-se $W, U \subseteq V$, pois W e U são subespaços vetorias de V. Logo, $U \cap W \subseteq V$.

ii) Uma vez que U e W são subespaços vetorais de V, pelo teorema anterior tem-se $0_V \in U$ e $0_V \in W$. Logo, $0_V \in U \cap W$ e, portanto, $U \cap W \neq \varnothing$.

iii) Sejam $x, y \in U \cap W$. Então $x, y \in U$ e $x, y \in W$. Logo, $x + y \in U$ e $x + y \in W$, uma vez que U e W são subespaços vetoriais de V. Assim, $x + y \in U \cap W$.

iv) Sejam $x \in U \cap W$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. Então $x \in U$, $x \in W$ e, atendendo a que U e W são subespaços vetoriais de V, tem-se $\alpha \cdot x \in U$ e $\alpha \cdot x \in W$. Logo, $\alpha \cdot x \in U \cap W$.

De *i)*, *ii)*, *iii)* e *iv)* conclui-se que $U \cap W$ é subespaço vetorial de V. □

Generalizando o resultado anterior, prova-se o seguinte

Teorema 4.2.9. *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Se $\{S_i : i \in I\}$ é uma família não vazia de subespaços vetoriais de V, então $\bigcap_{i \in I} S_i$ é subespaço vetorial de V.*

Demonstração. Exercício. □

Na sequência dos resultados anteriores, coloca-se a questão se a união de dois subespaços vetoriais de um espaço vetorial V também será um subespaço vetorial de V.

Exemplo 4.2.10. *Consideremos, novamente, os subespaços vetoriais*

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\} \quad G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 2z\}$$

do espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$. Então

$$F \cup G \;=\; \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \in F \text{ ou } (x, y, z) \in G\}$$

Facilmente se verifica que $F \cup G$ não é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$, uma vez que $(2, 0, -2) \in F \subseteq F \cup G$, $(0, 4, 2) \in G \subseteq F \cup G$, mas $(2, 0, -2) + (0, 4, 2) = (2, 4, 0) \notin F \cup G$.

Como mostra o exemplo anterior, a união de dois subespaços vetoriais de um espaço vetorial V nem sempre é um subespaço vetorial e tal só se verifica nas condições seguintes.

Teorema 4.2.11. *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e U, W subespaços vetoriais de V. Então $U \cup W$ é um subespaço vetorial de V se e só se $U \subseteq W$ ou $W \subseteq U$.*

Demonstração. Suponhamos que $U \subseteq W$ ou que $W \subseteq U$. Então $U \cup W = W$ ou $U \cup W = U$, respectivamente. Logo, $U \cup W$ é um subespaço vetorial de V.
Reciprocamente, admitamos que $U \cup W$ é um subespaço vetorial de V e mostremos que $U \subseteq W$ ou $W \subseteq U$. No sentido de fazermos esta prova, admitamos que $U \nsubseteq W$. Então existe $u \in U$ tal que $u \notin W$. Como $u \in U$, então $u \in U \cup W$. Para todo $w \in W$, também temos $w \in U \cup W$. Como $U \cup W$ é um subespaço vetorial de V, segue que $w + u \in U \cup W$. Logo, $w + u \in U$ ou $w + u \in W$. Como $-u \in U$ e $-w \in W$, resulta que $(w + u) + (-u) \in U$ ou $(-w) + (w + u) \in W$, ou seja, $w \in U$ ou $u \in W$. Atendendo a que $u \notin W$, temos, então, $w \in U$. Fica assim provado que todo o elemento de W é também elemento de U, ou seja, provou-se que $W \subseteq U$. □

Definição 4.2.12. *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e U, W subespaços vetoriais de V. Designa-se por* ***soma dos subespaços*** *U e W, e representa-se por $U + W$, o conjunto $\{u + w : u \in U \text{ e } w \in W\}$.*

Observação:

- Se U e W são subespaços vetoriais de um espaço vetorial V, então $U \subseteq U + W$. Com efeito, se W é subespaço vetorial de V, tem-se $0_V \in W$. Então, considerando que, para todo $u \in U$, $u = u + 0_V$, temos $u \in U + W$. Assim, fica provado que $U \subseteq U + W$. De modo análogo, prova-se que $W \subseteq U + W$.
- Da definição de soma de susbespaços vetoriais e da comutatividade da adição de vetores também é imediato que, sendo U e W subespaços vetoriais de um espaço vetorial V, temos $U + W = W + U$.

Exemplo 4.2.13. *Consideremos, no espaço vetorial real $\mathbb{R}^4$, os subespaços*

$$\begin{array}{rcl} S &=& \{(s,t,u,v) \in \mathbb{R}^4 : s = 0, u = 0\}, \\ U &=& \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : b + d = 0 \text{ e } b - d = 0\}, \\ W &=& \{(x,0,y,2x) \in \mathbb{R}^4 : x, y \in \mathbb{R}\}. \end{array}$$

Então

$$S = \{(0,t,0,v) \in \mathbb{R}^4 : t, v \in \mathbb{R}\} \text{ e } U = \{(a,0,c,0) \in \mathbb{R}^4 : a, c \in \mathbb{R}\}$$

e, portanto,

$$\begin{array}{rcl} U + S &=& \{(a,t,c,v) \in \mathbb{R}^4 : a, c, t, v \in \mathbb{R}\}, \\ U + W &=& \{(x + a, 0, y + c, 2x) \in \mathbb{R}^4 : a, c, x, y \in \mathbb{R}\}, \\ S + W &=& \{(x,t,y,v + 2x) \in \mathbb{R}^4 : x, t, v, y \in \mathbb{R}\}. \end{array}$$

Facilmente se verifica que qualquer um destes conjuntos é um subespaço vetorial do espaço vetorial real $\mathbb{R}^4$.

Generalizando o exemplo anterior, prova-se que a soma de quaisquer dois subespaços do mesmo espaço vetorial V é ainda um subespaço vetorial de V.

Teorema 4.2.14. *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e U, W subespaços vetoriais de V. Então $U + W$ é um subespaço vetorial de V.*

Demonstração. Sejam U e W subespaços vetoriais de V. Então:

i) $U + W \subseteq V$, pois, para qualquer $x \in U + W$, tem-se $x = u + w$, com $u \in U$ e $w \in W$. Então, como $U, W \subseteq V$, tem-se $u, w \in V$. Logo, como V é espaço vetorial, $u + w \in V$;

ii) $U + W \neq \emptyset$, uma vez que $U \neq \emptyset$ e $W \neq \emptyset$;

iii) Dados $x, y \in U + W$, tem-se

$$x = u_1 + w_1 \text{ e } y = u_2 + w_2, \text{ com } u_1, u_2 \in U \text{ e } w_1, w_2 \in W.$$

Logo, recorrendo às propriedades associativa e comutativa da adição de vetores,

$$x + y = (u_1 + w_1) + (u_2 + w_2) = (u_1 + u_2) + (w_1 + w_2).$$

Consequentemente, como U é subespaço vetorial de V e $u_1, u_2 \in U$, o vetor $u_1 + u_2$ é um elemento de U. De modo análogo concluímos que $w_1 + w_2$ é um elemento de W. Logo, $x + y \in U + W$.

iv) Dado $x \in U + W$ tem-se $x = u + w$, com $u \in U$ e $w \in W$. Logo, para qualquer $\alpha \in \mathbb{K}$,

$$\alpha x = \alpha(u + w) = \alpha u + \alpha w.$$

Uma vez que U e W são subespaços vetoriais de V, temos que $\alpha u \in U$ e $\alpha w \in W$. Assim, $\alpha x \in U + W$.

De *i)*, *ii)*, *iii)* e *iv)* conclui-se que $U + W$ é subespaço vetorial de V. □

Definição 4.2.15. *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e U, W subespaços vetoriais de V.*
Diz-se que $U + W$ é uma ***soma direta*** *se $U \cap W = \{0_V\}$.*
Diz-se que V é soma direta de U e W, e escreve-se $V = U \oplus W$, se $V = U + W$ e a soma $U + W$ é direta.
Caso V seja soma direta de U e V, diz-se que U é ***suplementar*** *de W relativamente a V (e que W é suplementar de U relativamente a V ou que U e W são suplementares).*

Exemplo 4.2.16. *Consideremos o espaço vetorial real* $\mathbb{R}^4$ *e os subespaços*

$$\begin{array}{rcl} S & = & \{(s,t,u,v) \in \mathbb{R}^4 : s=0, u=0\}, \\ U & = & \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : b+d=0 \text{ e } b-d=0\}, \\ W & = & \{(x,0,y,2x) \in \mathbb{R}^4 : x,y \in \mathbb{R}\}. \end{array}$$

Então

$$\begin{array}{rcl} S\cap U & = & \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x=0, z=0, y-w=0, y+w=0\} \\ & = & \{(0,0,0,0)\}, \\ U\cap W & = & \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : b+d=0, b-d=0, b=0, d=2a\} \\ & = & \{(0,0,c,0) \,|\, c \in \mathbb{R}\}, \\ S\cap W & = & \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : a=0, c=0, b=0, d=2a\} \\ & = & \{(0,0,0,0)\}. \end{array}$$

Logo, $U+W$ *não é uma soma direta e* $S+U$ *e* $S+W$ *são somas diretas.*
Uma vez que $S+W=\mathbb{R}^4$ *e* $S\cap W=\{0_{\mathbb{R}^4}\}$*, então* $\mathbb{R}^4$ *é soma direta de* S *e* W*; o espaço* W *é um suplementar de* S *relativamente a* $\mathbb{R}^4$*.*
Atendendo a que $\mathbb{R}^4 \subsetneqq U+W$*, pois* $(0,1,0,0) \notin U+W$*, concluímos que* $\mathbb{R}^4$ *não é soma direta de* U *e* W*.*

Como podemos verificar no exemplo que se segue, existem subespaços de espaços vetoriais V que admitem mais do que um suplementar relativamente a V.

Exemplo 4.2.17. *Consideremos no espaço vetorial complexo* $\mathbb{C}^3$*, os subespaços*

$$\begin{array}{rcl} W_1 & = & \{(a,b,c) \in \mathbb{C}^3 : b=c=0\}, \\ W_2 & = & \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 : x=0\}, \\ W_3 & = & \{(s,t,u) \in \mathbb{C}^3 : s=t\}. \end{array}$$

Tem-se $\mathbb{C}^3 = W_1 \oplus W_2$ *e* $\mathbb{C}^3 = W_1 \oplus W_3$ *e* $W_2 \neq W_3$*.*

Teorema 4.2.18. *Sejam* V *um espaço vetorial sobre* $\mathbb{K}$ *e* U, W *subespaços vetoriais de* V*. Então:*

i) *V é soma direta de U e W se e só se cada vetor de V se escreve, de modo único, na forma $u+w$ com $u \in U$ e $w \in W$;*

ii) *V é soma direta de U e W se e só se $V=U+W$ e 0_V se escreve, de modo único, na forma $u+w$ com $u \in U$ e $w \in W$.*

Demonstração. i) Admitamos que V é soma direta de U e W, ou seja, que $V{=}U{+}W$ e $U \cap W = \{0_V\}$. Vamos mostrar que todo o elemento de V se escreve, de modo único, na forma $u+w$ com $u \in U$ e $w \in W$.
Uma vez que $V{=}U{+}W$, então, para todo $v \in V$, existem $u \in U$ e $w \in W$ tais que $v=u+w$. Além disso, se admitirmos que v é um elemento de V tal $v=u+w$ com $u \in U$ e $w \in W$ e $v=u'+w'$ com $u' \in U$ e $w' \in W$, prova-se que $u=u'$ e

$w = w'$. De facto, como $u + w = u' + w'$, vem que $u - u' = w - w'$. Como $u, u' \in U$, e $w, w' \in W$, então $u - u', w - w' \in U \cap W = \{0_V\}$. Logo $u - u' = 0_V$ e $w - w' = 0_V$, pelo que $u = u'$ e $w = w'$.
Reciprocamente, suponhamos que cada elemento de V se escreve, de modo único, na forma $u + w$ com $u \in U$ e $w \in W$. Logo $V = U + W$. Para concluir que V é soma direta de U e W resta provar que $U \cap W = \{0_V\}$. Uma vez que $U \cap W$ é um subespaço vetorial de V, é claro que $\{0_V\} \subseteq U \cap W$. Também se prova que $U \cap W \subseteq \{0_V\}$. De facto, dado $v \in U \cap W$, tem-se $v = v + 0_V$ com $v \in U$ e $0_V \in W$ e $v = 0_V + v$ com $0_V \in U$ e $v \in W$. Então, como $v \in V$ e todo o vetor de V se escreve de, modo único, como soma de um elemento de U com um elemento de W, temos $v = 0_V$. Portanto, $U \cap W \subseteq \{0_V\}$.

ii) Exercício. □

As noções de soma e de soma direta de subespaços podem ser generalizadas a mais de dois subespaços da forma seguinte.

Definição 4.2.19. *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ e W_1, W_2, …, W_n subespaços vetoriais de V.*
Designa-se por ***soma dos subespaços*** *W_1, W_2, …, W_n, e representa-se por $W_1 + W_2 + \ldots + W_n$, o conjunto*

$$W_1 + W_2 + \ldots + W_n = \{x_1 + x_2 + \ldots + x_n : x_1 \in W_1, x_2 \in W_2, \ldots, x_n \in W_n\}.$$

Diz-se que $W_1 + W_2 + \ldots + W_n$ é uma ***soma direta*** *se*

$$W_i \cap (W_1 + \ldots + W_{i-1} + W_{i+1} + \ldots + W_n) = \{0_V\}, \text{ para todo } i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Diz-se que V ***é soma direta*** *de W_1, W_2, …, W_n, e escreve-se*

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_n,$$

se

i) $V = W_1 + W_2 + \ldots + W_n$;

ii) $W_1 + W_2 + \ldots + W_n$ *é uma soma direta.*

Os dois últimos resultados podem também ser generalizados a somas de mais de dois subespaços.

Teorema 4.2.20. *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ e W_1, W_2, …, W_n subespaços vetoriais de V. Então $W_1 + W_2 + \ldots + W_n$ é um subespaço vetorial de V.*

Demonstração. Exercício. □

Teorema 4.2.21. *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ e W_1, W_2, ..., W_n subespaços vetoriais de V. Então são equivalentes as três afirmações seguintes:*

i) *V é soma direta de W_1, W_2, ..., W_n.*

ii) *$V = W_1 + W_2 + \ldots + W_n$ e cada elemento de V escreve-se, de modo único, na forma $w_1 + w_2 + \ldots + w_n$ com $w_1 \in W_1$, $w_2 \in W_2$, ..., $w_n \in W_n$.*

iii) *$V = W_1 + W_2 + \ldots + W_n$ e o vetor 0_V escreve-se, de modo único, na forma $w_1 + w_2 + \ldots + w_n$ com $w_1 \in W_1$, $w_2 \in W_2$, ..., $w_n \in W_n$.*

Demonstração. Exercício. □

4.3 Combinação linear de vetores

Definição 4.3.1. Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e S um subconjunto não vazio de V. Diz-se que:

- $v \in V$ é ***combinação linear dos elementos*** $v_1, v_2, ..., v_n \in V$, $n \in \mathbb{N}$, se existem escalares $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{K}$ tais que

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot v_i = \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + ... + \alpha_n \cdot v_n.$$

  Neste caso, aos escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ dá-se a designação de ***coeficientes*** da combinação linear.

- $v \in V$ é ***combinação linear de elementos de S*** se existem v_1, v_2, ..., $v_n \in S$ tais que v é combinação linear destes elementos.

Exemplo 4.3.2. *No espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$, consideremos os vetores $v_1 = (1,2,0)$, $v_2 = (-2,3,4)$ e $v_3 = (-1,12,8)$. O vetor v_3 é combinação linear de v_1 e v_2, pois*

$$(-1,12,8) = 3 \cdot (1,2,0) + 2 \cdot (-2,3,4).$$

Exemplo 4.3.3. *No espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$, consideremos os vetores $v_1 = (1,2,0)$, $v_2 = (-2,3,0)$ e $v_3 = (-1,2,2)$. O vetor v_3 não é combinação linear de v_1 e v_2, pois*

$$(-1,2,2) \neq \alpha \cdot (1,2,0) + \beta \cdot (-2,3,0), \ \textit{para quaisquer } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 4.3.4. *No espaço vetorial real* $\mathbb{R}^n$*, temos*

$$(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1 \cdot (1, 0, ..., 0) + x_2 \cdot (0, 1, 0, ..., 0) + \cdots + x_n \cdot (0, ..., 0, 1),$$

para qualquer $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$*. Assim, qualquer vetor de* $\mathbb{R}^n$ *é combinação linear dos vetores*

$$e_1 = (1, 0, 0, ..., 0), e_2 = (0, 1, 0, ..., 0), \ldots, e_n = (0, 0, ..., 0, 1).$$

Exemplo 4.3.5. *No espaço vetorial real* $\mathbb{R}^2$*, todo o vetor* (x, y) *é combinação linear dos vetores* $(1, 0)$, $(0, 1)$ *e* $(1, 1)$*, uma vez que*

$$(x, y) = (x - 1) \cdot (1, 0) + (y - 1) \cdot (0, 1) + 1 \cdot (1, 1).$$

Exemplo 4.3.6. *No espaço vetorial* $\mathbb{R}_2[x]$*, todo o vetor* $ax^2 + bx + c$ *é combinação linear dos vetores* $x^2 = 1x^2 + 0x + 0$*,* $x = 0x^2 + 1x + 0$ *e* $1 = 0x^2 + 0x + 1$*, pois*

$$ax^2 + bx + c = a \cdot x^2 + b \cdot x + c \cdot 1.$$

Exemplo 4.3.7. *No espaço vetorial* $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$*, todo o vetor* $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *é combinação linear dos vetores*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

uma vez que

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

4.4 Subespaço gerado por um conjunto de vetores

Teorema 4.4.1. *Sejam* V *um espaço vetorial sobre* $\mathbb{K}$ *e* S *um subconjunto não vazio de* V*. Então,*

i) o conjunto

$$W = \{x : x \text{ é combinação linear de elementos de } S\}$$

é um subespaço vetorial de V*;*

ii) $S \subseteq W$*;*

iii) W *é o menor subespaço vetorial de* V *que contém* S*.*

Demonstração. Sejam V, S e W conjuntos nas condições indicadas no enunciado do teorema.

i) Nestas condições prova-se que W é subespaço vetorial de V. De facto,

a) Uma vez que $S \subseteq V$ e V é espaço vetorial, toda a combinação linear de elementos de S é um elemento de V, ou seja, todo o elemento de W é também elemento de V. Logo, $W \subseteq V$.

b) Dado que $S \neq \emptyset$, existe $x \in S$. Então, como $0_V = 0_{\mathbb{K}} \cdot x$, tem-se que 0_V é combinação linear de elementos de S. Logo, $0_V \in W$ e, portanto, $W \neq \emptyset$.

c) Sejam $x, y \in W$. Então existem $x_1, x_2, ..., x_n$, $y_1, y_2, ..., y_m \in S$ e $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m \in \mathbb{K}$ tais que

$$x = \alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + ... + \alpha_n \cdot x_n \quad \text{e} \quad y = \beta_1 \cdot y_1 + \beta_2 \cdot y_2 + ... + \beta_m \cdot y_m.$$

Assim,

$$x + y = \alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + ... + \alpha_n \cdot x_n + \beta_1 \cdot y_1 + \beta_2 \cdot y_2 + ... + \beta_m \cdot y_m,$$

i.e., $x + y$ é combinação linear de $n + m$ elementos de S. Portanto, $x + y \in W$.

d) Sejam $\alpha \in \mathbb{K}$ e $x \in W$. Uma vez que $x \in W$, existem $x_1, x_2, ..., x_n \in S$ e $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{K}$ tais que $x = \alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + ... + \alpha_n \cdot x_n$. Então

$$\begin{array}{rcl} \alpha \cdot x & = & \alpha \cdot (\alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + ... + \alpha_n \cdot x_n) \\ & = & \alpha \cdot (\alpha_1 \cdot x_1) + \alpha \cdot (\alpha_2 \cdot x_2) + ... + \alpha \cdot (\alpha_n \cdot x_n) \\ & = & (\alpha\alpha_1) \cdot x_1 + (\alpha\alpha_2) \cdot x_2 + ... + (\alpha\alpha_n) \cdot x_n, \end{array}$$

com $\alpha\alpha_1, \alpha\alpha_2, \dots \alpha\alpha_n \in \mathbb{K}$. Portanto, $\alpha \cdot x$ é combinação linear de elementos de S, pelo que $\alpha \cdot x \in W$.

De a), b), c) e d), conclui-se que W é subespaço vetorial de V.

ii) Para todo $x \in S$, $x = 1_{\mathbb{K}} \cdot x$ e, portanto, $x \in W$. Logo, $S \subseteq W$.

iii) Pretendemos mostrar que se U é um subespaço de V tal que $S \subseteq U$, então $W \subseteq U$. De facto, se $x \in W$, existem $x_1, x_2, ..., x_n \in S$ e $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{K}$ tais que

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n.$$

Então, se admitirmos que U é um subespaço vetorial de V tal que $S \subseteq U$, também temos $x_1, x_2, ..., x_n \in U$ e, consequentemente, $x \in U$. Logo $W \subseteq U$. □

Definição 4.4.2. *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e S um subconjunto não vazio de V. Ao subespaço vetorial de V definido por*

$$W = \{x \in V : x \text{ é combinação linear de elementos de } S\}$$

*chama-se **subespaço de V gerado por** S, e representa-se por $\langle S \rangle$. Ao conjunto S chamamos **conjunto gerador** de W.*

Convenciona-se que $\langle \emptyset \rangle = \{0_V\}$.

Notação: Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Se S é um subconjunto de V tal que $S = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, onde $n \in \mathbb{N}$, pode-se representar o subespaço gerado por S por $\langle x_1, x_2, ..., x_n \rangle$ em vez de $\langle \{x_1, x_2, ..., x_n\} \rangle$.

Definição 4.4.3. *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e W um subespaço de V. Se W é gerado por um conjunto finito de vetores de V diz-se que o subespaço W* ***é finitamente gerado****. Caso W seja gerado por um conjunto infinito de vetores de V diz-se que o subespaço W* ***é infinitamente gerado****.*

Exemplo 4.4.4. *Na sequência do exemplo 4.3.5, tem-se*

$$\mathbb{R}^2 = \langle (1,0)\,, (0,1)\,, (1,1) \rangle\,,$$

e portanto, $\mathbb{R}^2$ é um subespaço vetorial finitamente gerado.

Exemplo 4.4.5. *Consideremos o espaço vetorial real $\mathbb{R}^n$ e sejam*

$$e_1 = (1,0,0,...,0)\,, e_2 = (0,1,0,...,0)\,, \ldots, e_n = (0,0,...,0,1)\,.$$

Com base no exemplo 4.3.4, podemos afirmar que

$$\mathbb{R}^n = \langle e_1, ..., e_n \rangle\,.$$

Exemplo 4.4.6. *Considere-se, em $\mathbb{R}^3$, o conjunto $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x - y\}$. Verifica-se facilmente que U é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$. Uma vez que*

$$\begin{aligned} U &= \{(x,y,x-y) \in \mathbb{R}^3 : x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x \cdot (1,0,1) + y \cdot (0,1,-1) \in \mathbb{R}^3 : x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (1,0,1), (0,1,-1) \rangle\,, \end{aligned}$$

conclui-se que $\{(1,0,1), (0,1,-1)\}$ é um conjunto gerador de U.

Exemplo 4.4.7. *Do exemplo 4.3.7 podemos concluir que*

$$\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Exemplo 4.4.8. *Na sequência do exemplo 4.3.6, temos*

$$\mathbb{R}_2[x] = \left\langle x^2, x, 1 \right\rangle.$$

Teorema 4.4.9. *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e $v_1, ..., v_n, v \in V$ tais que v é combinação linear de $v_1, ..., v_n$. Então,*

$$\langle v_1, ..., v_n, v\rangle = \langle v_1, ..., v_n\rangle .$$

Demonstração. Sejam $U = \langle v_1, ..., v_n\rangle$ e $W = \langle v_1, ..., v_n, v\rangle$. Para provar a igualdade $U = W$, vamos mostrar que $U \subseteq W$ e $W \subseteq U$.

($U \subseteq W$): Do teorema anterior segue que $\{v_1, ..., v_n, v\} \subseteq W$. Logo, como U é o menor subespaço de V que contém $\{v_1, ..., v_n\}$ e W é um subespaço de V que também contém este conjunto, temos $U \subseteq W$.

($W \subseteq U$): Por hipótese, v é combinação linear de $v_1, ..., v_n$, pelo que $v \in U$. Logo, como $\{v_1, ..., v_n, v\} \subseteq U$ e W é o menor subespaço de V que contém este conjunto, temos $W \subseteq U$. □

Teorema 4.4.10. *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, v_1,...,$v_n \in V$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}$, $\alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ e $\alpha_i \in \mathbb{K} \setminus \{0_\mathbb{K}\}$. Então*

$$\langle v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n\rangle = \langle v_1, \ldots, v_{i-1}, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j, v_{i+1}, \ldots, v_n\rangle.$$

Demonstração. Exercício. □

4.5 Dependência e independência linear

Definição 4.5.1. *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e $n \in \mathbb{N}$. Uma sequência $(v_1, ..., v_n)$ de vetores de V diz-se **linearmente independente** se, para quaisquer $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$,*

$$\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n = 0_V \Longrightarrow \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

*Caso contrário, isto é, se existirem escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ não todos nulos tais que $\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n = 0_V$, a sequência $(v_1, ..., v_n)$ diz-se **linearmente dependente**.*

Observação: Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$.

- Note-se que se v_1,...,v_n são vetores de V, então é sempre possível escrever 0_V como combinação linear destes vetores, pois $0_V = 0_\mathbb{K} \cdot v_1 + \ldots + 0_\mathbb{K} \cdot v_n$. Logo, a sequência $(v_1, \ldots, v_n)$ é linearmente independente se e só se $0_\mathbb{K} \cdot v_1 + \ldots + 0_\mathbb{K} \cdot v_n$ é a única forma de escrever 0_V como combinação linear de v_1,...,v_n.
- Se $v = 0_V$, então (v) é linearmente dependente pois $0_V = 1_\mathbb{K} \cdot 0_V$ e $1_\mathbb{K} \neq 0_\mathbb{K}$.
- Se $v \in V \setminus \{0_V\}$, é simples verificar que (v) é linearmente independente. De facto, dado $\alpha \in \mathbb{K}$, se $\alpha v = 0_V$, então $\alpha = 0_\mathbb{K}$ ou $v = 0_V$. Como, por hipótese, $v \neq 0_V$, então $\alpha = 0_\mathbb{K}$. Logo (v) é linearmente independente.

Exemplo 4.5.2. *No espaço vetorial real* $\mathbb{R}^4$*, a sequência de vetores*

$$((1,0,0,0),(1,0,-1,1),(2,1,0,1))$$

é linearmente independente, pois, para quaisquer $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$*,*

$$\begin{aligned}
&\alpha(1,0,0,0)+\beta(1,0,-1,1)+\gamma(2,1,0,1)=(0,0,0,0)\\
&\Rightarrow (\alpha+\beta+2\gamma,\gamma,-\beta,\beta+\gamma)=(0,0,0,0)\\
&\Rightarrow \alpha+\beta+2\gamma=0,\gamma=0,-\beta=0,\beta+\gamma=0\\
&\Rightarrow \alpha=\beta=\gamma=0
\end{aligned}$$

Exemplo 4.5.3. *No espaço vetorial real* $\mathbb{R}^2$*, a sequência de vetores*

$$((1,0),(0,1),(1,1))$$

é linearmente dependente, pois

$$1\cdot(1,0)+1\cdot(0,1)+(-1)\cdot(1,1)=(0,0).$$

Note-se que o vetor nulo pode ser escrito como combinação linear dos três vetores indicados utilizando escalares não nulos.

Exemplo 4.5.4. *No espaço vetorial real* $\mathbb{R}^n$*, a sequência de vetores* $(e_1,...,e_n)$*, onde cada* e_i *é o n-uplo cujo elemento na coordenada i é 1 e todos os outros elementos são zero, é linearmente independente. De facto,*

$$\begin{aligned}
&\alpha_1e_1+...+\alpha_ne_n=0_{\mathbb{R}^n}\\
\Rightarrow\ &(\alpha_1,...,\alpha_n)=(0,0,...,0)\ .\\
\Rightarrow\ &\alpha_1=...=\alpha_n=0
\end{aligned}$$

Exemplo 4.5.5. *No espaço vetorial* $\mathbb{R}_2[x]$*, a sequência* $(x^2,x,1)$ *é linearmente independente, pois, para quaisquer* $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$*,*

$$\alpha\cdot x^2+\beta\cdot x+\gamma\cdot 1=0x^2+0x+0\Rightarrow\alpha=\beta=\gamma=0.$$

Exemplo 4.5.6. *No espaço vetorial* $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$*, a sequência de matrizes*

$$\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right)$$

é linearmente independente, pois, para quaisquer $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\in\mathbb{R}$*,*

$$\alpha_1\cdot\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}+\alpha_2\cdot\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}+\alpha_3\cdot\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}+\alpha_4\cdot\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\ \alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=0.$$

Teorema 4.5.7. *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}$ e $v_1, \ldots, v_n \in V$. A sequência de vetores $(v_1, \ldots, v_n)$ é linearmente independente se e só se qualquer combinação linear de $v_1, \ldots, v_n$ tem coeficientes únicos, i.e., se e só se, para quaisquer $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{K}$,*

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \ldots + \alpha_n \cdot v_n = \beta_1 \cdot v_1 + \ldots + \beta_n \cdot v_n \Rightarrow \alpha_1 = \beta_1 \text{ e } \ldots \text{ e } \alpha_n = \beta_n.$$

Demonstração. $\Rightarrow$) Admitamos que $(v_1, \ldots, v_n)$ é linearmente independente e que $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{K}$ são tais que

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \ldots + \alpha_n \cdot v_n = \beta_1 \cdot v_1 + \ldots + \beta_n \cdot v_n.$$

Então

$$(\alpha_1 - \beta_1) \cdot v_1 + \ldots + (\alpha_n - \beta_n) \cdot v_n = 0_V$$

e, uma vez que a sequência $(v_1, \ldots, v_n)$ é linearmente independente, desta igualdade resulta que

$$\alpha_1 - \beta_1 = 0_{\mathbb{K}}, \ \ldots, \ \alpha_n - \beta_n = 0_{\mathbb{K}}$$

i.e.

$$\alpha_1 = \beta_1, \ \ldots, \ \alpha_n = \beta_n.$$

$\Leftarrow$) Suponha-se que qualquer combinação linear dos vetores $v_1, \ldots, v_n$ tem coeficientes únicos i.e., para quaisquer $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n$,

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \ldots + \alpha_n \cdot v_n = \beta_1 \cdot v_1 + \ldots + \beta_n \cdot v_n \Rightarrow \alpha_1 = \beta_1 \text{ e } \ldots \text{ e } \alpha_n = \beta_n.$$

Então a sequência $(v_1, \ldots, v_n)$ é linearmente independente, pois, dados escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tais que

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \ldots + \alpha_n \cdot v_n = 0_V,$$

temos

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \ldots + \alpha_n \cdot v_n = 0_{\mathbb{K}} \cdot v_1 + \ldots + 0_{\mathbb{K}} \cdot v_n,$$

donde segue que $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0_{\mathbb{K}}$. □

Teorema 4.5.8. *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ e $v_1, ..., v_n$ elementos de V. A sequência $(v_1, ..., v_n)$ é linearmente dependente se e só se existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que v_i é combinação linear de $v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n$.*

Demonstração. $\Rightarrow$) Sejam $v_1, ..., v_n$, com $n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$, vetores de V tais que $(v_1, \ldots, v_n)$ é linearmente dependente. Então existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tais que $\alpha_i \neq 0_{\mathbb{K}}$, para algum $i \in \{1, \ldots, n\}$, e

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n = 0_V.$$

Como $\alpha_i \neq 0_{\mathbb{K}}$, existe $\alpha_i^{-1} \in \mathbb{K}$ e da igualdade anterior resulta que

$$\alpha_i^{-1} \cdot (\alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_{i-1} \cdot v_{i-1} + \alpha_i \cdot v_i + \alpha_{i+1} \cdot v_{i+1} + \cdots + \alpha_n \cdot v_n) = \alpha_i^{-1} \cdot 0_V,$$

i.e.,

$$\left(\alpha_i^{-1}\alpha_1\right)\cdot v_1+\cdots+\left(\alpha_i^{-1}\alpha_{i-1}\right)\cdot v_{i-1}+v_i+\left(\alpha_i^{-1}\alpha_{i+1}\right)\cdot v_{i+1}+\cdots\left(\alpha_i^{-1}\alpha_n\right)\cdot v_n=0_V.$$

Assim,

$$v_i=\left(-\alpha_i^{-1}\alpha_1\right)\cdot v_1+\cdots+\left(-\alpha_i^{-1}\alpha_{i-1}\right)\cdot v_{i-1}+\left(-\alpha_i^{-1}\alpha_{i+1}\right)\cdot v_{i+1}+\left(-\alpha_i^{-1}\alpha_n\right)\cdot v_n,$$

e portanto, v_i é combinação linear dos restantes vetores.

$\Leftarrow$) Suponhamos que existe $i\in\{1,\ldots,n\}$ e $\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1},\alpha_{i+1},\ldots,\alpha_n\in\mathbb{K}$ tais que

$$v_i=\alpha_1\cdot v_1+\cdots+\alpha_{i-1}\cdot v_{i-1}+\alpha_{i+1}\cdot v_{i+1}+\cdots+\alpha_n\cdot v_n.$$

Então,

$$\alpha_1\cdot v_1+\cdots+\alpha_{i-1}\cdot v_{i-1}+(-1_{\mathbb{K}})\cdot v_i+\alpha_{i+1}\cdot v_{i+1}+\cdots+\alpha_n\cdot v_n=0_V,$$

i.e.,

$$\alpha_1\cdot v_1+\cdots\alpha_{i-1}\cdot v_{i-1}+\alpha_i\cdot v_i+\alpha_{i+1}\cdot v_{i+1}+\cdots+\alpha_n\cdot v_n=0_V,$$

com $\alpha_i=-1_{\mathbb{K}}\neq 0_{\mathbb{K}}$. Logo, $(v_1,...,v_n)$ é linearmente dependente. □

Corolário 4.5.9. *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e $n\in\mathbb{N}$. Se $v_1,...,v_n$ são vetores de V tais que $v_i=0_V$, para algum $i\in\{1,...,n\}$, então a sequência de vetores $(v_1,...,v_n)$ é linearmente dependente.*

Teorema 4.5.10. *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, $n\in\mathbb{N}$ e $v_1,...,v_n,v$ vetores de V. São válidas as propriedades seguintes:*

i) se a sequência de vetores $(v_1,\ldots,v_{i-1},v_i,v_{i+1},\ldots,v_n)$ é linearmente independente, então a sequência $(v_1,\ldots,v_{i-1},v_{i+1},\ldots,v_n)$ também é linearmente independente;

ii) se a sequência de vetores $(v_1,\ldots,v_n)$ é linearmente dependente, então a sequência $(v_1,\ldots,v_n,v)$ também é linearmente dependente.

iii) se a sequência de vetores $(v_1,\ldots,v_n)$ é linearmente independente e a sequência $(v_1,\ldots,v_n,v)$ é linearmente dependente, então v é combinação linear dos vetores v_1, …, v_n.

Demonstração. i) Admitamos que a sequência $(v_1,\ldots,v_{i-1},v_i,v_{i+1},\ldots,v_n)$ é linearmente independente. Mostremos que a sequência $(v_1,\ldots,v_{i-1},v_{i+1},\ldots,v_n)$ também é linearmente independente. De facto, para quaisquer escalares α_1, …, α_{i-1}, α_{i+1}, …, $\alpha_n\in\mathbb{K}$ tais que

$$\alpha_1\cdot v_1+\ldots+\alpha_{i-1}\cdot v_{i-1}+\alpha_{i+1}\cdot v_{i+1}+\ldots+\alpha_n\cdot v_n=0_V,$$

temos

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \ldots + \alpha_{i-1} \cdot v_{i-1} + 0_{\mathbb{K}} \cdot v_i + \ldots + \alpha_{i+1} \cdot v_{i+1} + \ldots + \alpha_n \cdot v_n = 0_V.$$

Então, como a sequência $(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n)$ é linearmente independente, tem-se $\alpha_1 = \ldots = \alpha_{i-1} = \alpha_{i+1} = \ldots = \alpha_n = 0_{\mathbb{K}}$. Logo, a sequência

$$(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n)$$

é linearmente independente.

ii) Admitamos que a sequência de vetores $(v_1, \ldots, v_n)$ é linearmente dependente. Então existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $\alpha_i \neq 0_{\mathbb{K}}$ e

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \ldots + \alpha_i \cdot v_i + \ldots + \alpha_n v_n = 0_V.$$

Logo,

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \ldots + \alpha_i \cdot v_i + \ldots + \alpha_n v_n + 0_{\mathbb{K}} \cdot v = 0_V,$$

com $\alpha_i \neq 0_{\mathbb{K}}$. Portanto, $(v_1, \ldots, v_n, v)$ é linearmente dependente.

iii) Admitamos que a sequência de vetores $(v_1, \ldots, v_n)$ é linearmente independente e que a sequência $(v_1, \ldots, v_n, v)$ é linearmente dependente. Como a sequência $(v_1, \ldots, v_n, v)$ é linearmente dependente, existem escalares α_1, ..., α_n, α não todos nulos tais que

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \ldots + \alpha_n \cdot v_n + \alpha \cdot v = 0_{\mathbb{K}}.$$

Como a sequência $(v_1, \ldots, v_n)$ é linearmente independente, então $\alpha \neq 0_{\mathbb{K}}$. De facto, se $\alpha = 0_{\mathbb{K}}$, ter-se-ia

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \ldots + \alpha_n \cdot v_n = 0_{\mathbb{K}},$$

com $\alpha_i \neq 0_{\mathbb{K}}$, para algum $i \in \{1, \ldots, n\}$ (contradição). Como $\alpha \neq 0_{\mathbb{K}}$, então

$$v = (-\alpha^{-1}\alpha_1) \cdot v_1 + \ldots + (-\alpha^{-1}\alpha_n) \cdot v_n$$

e, portanto, v é combinação linear de $v_1, \ldots, v_n$.

□

Teorema 4.5.11 (Teorema de Steinitz)**.** *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, U um subsepaço vetorial de V, $n, p \in \mathbb{N}$, e $S = \{u_1, ..., u_n\}$ e $W = \{w_1, \ldots, w_p\}$ subconjuntos de V com, respetivamente, n e p vetores.*
Se $U =< S >$ e $w_1, \ldots, w_p$ são vetores de U tais que $(w_1, ..., w_p)$ é linearmente independente, então $p \leq n$ e é possível substituir p dos vetores de S por $w_1, ..., w_p$ de forma a obter um subconjunto S' de V tal que $U =< S' >$.

Demonstração. Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}$, U um subsepaço vetorial de V e $S = \{u_1, u_2 ..., u_n\}$ um subconjunto de V com n vetores tal que $< S >= U$. Pretendemos mostrar que se $w_1, ..., w_p$, $p \in \mathbb{N}$, são vetores de U tais que $(w_1, ..., w_p)$ é linearmente independente, então $p \leq n$ e é possível substituir p

dos vetores de S por $w_1, ..., w_p$ de forma a obter um subconjunto S' de V tal que $U =< S' >$.

A prova é feita recorrendo ao método de indução matemática aplicado a p (o número de vetores linearmente independentes).

Caso $p = 1$: Suponhamos que $w_1 \in U$ e que (w_1) é linearmente independente.

1) É óbvio que $1 \leq n$, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$.

2) Como (w_1) é linearmente independente, então $w_1 \neq 0_V$. Por outro lado, como $w_1 \in U$, w_1 é combinação linear de u_1, u_2, $\ldots$, u_n e, portanto, existem $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$, com $\lambda_i \neq 0$, para algum $i \in \{1, ..., n\}$, tais que

$$w_1 = \lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \cdots + \lambda_n \cdot u_n.$$

Suponhamos, sem perda de generalidade, que $\lambda_1 \neq 0$. Então, pelo Teorema 4.4.10,

$$U = \langle u_1, u_2, ..., u_n \rangle = \langle w_1, u_2, ..., u_n \rangle .$$

Logo o resultado é válido para $p = 1$.

Passo de indução: Admita-se, por hipótese de indução, que as afirmações são verdadeiras para $k \in \mathbb{N}$, ou seja, admita-se que se $w_1, ..., w_k \in V$, são k vetores de U tais que $(w_1, \ldots, w_k)$ é linearmente independente, então

h_1) $k \leq n$;

h_2) é possível substituir k dos vetores de S por $w_1, ..., w_k$ de forma a obter um subconjunto S' de V tal que $U =< S' >$.

Pretendemos mostrar que o resultado é válido para $k+1$, ou seja, temos de provar que se $w_1, w_2, ..., w_k, w_{k+1}$ são $k+1$ vetores de U tais que $(w_1, \ldots, w_k, w_{k+1})$ é linearmente independente, então

t_1) $k + 1 \leq n$;

t_2) é possível substituir $k + 1$ dos vetores de S por $w_1, ..., w_k, w_{k+1}$ de forma a obter um subconjunto S'' de V tal que $U =< S'' >$.

De facto, se admitirmos que a sequência $(w_1, ..., w_k, w_{k+1})$ é linearmente independente, então, pelo Teorema 4.5.10, a sequência $(w_1, \ldots, w_k)$ é linearmente independente. Logo

t_1) Por h_1), temos $k \leq n$. Se admitirmos que $k = n$, então por h_2) segue que $\langle u_1, \ldots, u_n \rangle = \langle w_1, \ldots w_k \rangle$ pelo que w_{k+1} é combinação linear de $w_1, \ldots w_k$, o que contaria a hipótese de que $(w_1, \ldots, w_k, w_{k+1})$ é linearmente independente. Assim, $k < n$ e, portanto, $k + 1 \leq n$.

t_2) Por h_2) é possível substituir k dos vetores de S por $w_1, w_2, ..., w_k$ de forma a obter um subconjunto S' de V tal que $V = \langle S' \rangle$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que

$$S' = \{w_1, \ldots, w_k, u_{k+1}, u_{k+2}, \ldots, u_n\}.$$

Logo, w_{k+1} é combinação linear dos vetores w_1, ..., w_k, u_{k+1}, u_{k+2}, ..., u_n, isto é, existem λ_1, ..., λ_k, λ_{k+1}, ..., λ_n tais que

$$w_{k+1} = \lambda_1 \cdot w_1 + \ldots + \lambda_k \cdot w_k + \lambda_{k+1} u_{k+1} + \lambda_{k+2} u_{k+2} + \ldots \lambda_n \cdot u_n.$$

Como $(w_1, \ldots, w_k, w_{k+1})$ é linearmente independente, temos $\lambda_i \neq 0_{\mathbb{K}}$, para algum $i \in \{k+1, ..., n\}$, caso contrário viria

$$w_{k+1} = \lambda_1 \cdot w_1 + \ldots + \lambda_k \cdot w_k$$

o que contraria a hipótese de que a sequência $(w_1, w_2, \ldots, w_k, w_{k+1})$ é linearmente independente. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $\lambda_{k+1} \neq 0_{\mathbb{K}}$. Então, pelo Teorema 4.4.10,

$$\langle w_1, \ldots, w_k, u_{k+1}, u_{k+2}, \ldots, u_n \rangle = \langle w_1, \ldots, w_k, w_{k+1}, u_{k+2} \ldots, u_n \rangle.$$

Logo $S'' = \{w_1, \ldots, w_k, w_{k+1}, u_{k+2}, \ldots, u_n\}$ é um conjunto obtido de S substituindo $k+1$ dos vetores de S por $w_1, ..., w_k, w_{k+1}$ e tal que $U = \langle S'' \rangle$. □

Exemplo 4.5.12. *No espaço vetorial* $\mathbb{R}^4$*, consideremos os vetores* $w_1 = (-2, 0, 0, 2)$*,* $w_2 = (1, 0, 2, -1)$*,* $u_1 = (0, 0, 0, 1)$*,* $u_2 = (0, 0, 1, 0)$*,* $u_3 = (1, 0, 0, 0)$*. Seja* U *o subespaço vetorial de* $\mathbb{R}^4$ *gerado por* $S = \{u_1, u_2, u_3\}$*, i.e.,* $U =< u_1, u_2, u_3 >$*.*
Tem-se

$$\begin{aligned} w_1 &= 2u_1 + 0u_2 + (-2)u_3, \\ w_2 &= (-1)u_1 + 2u_2 + 1u_3 \end{aligned}$$

e, portanto, w_1 *e* w_2 *são vetores de* U*. Além disso, é simples verificar que a sequência* (w_1, w_2) *é linearmente independente. Logo, pelo teorema anterior, é possível substituir dois dos vetores de* $S = \{u_1, u_2, u_3\}$ *por* w_1 *e* w_2 *de forma a obter um conjunto* S' *tal que* $U = \langle S' \rangle$*. A substituição faz-se vetor a vetor seguindo o processo descrito na demonstração do referido teorema. Note-se, no entanto, que pode haver mais de uma maneira de efectuar a substituição e o conjunto* S' *obtido no final do processo pode não ser único. Porém, todo o conjunto* S' *obtido pelo processo indicado no teorema anterior gera o mesmo subespaço que o conjunto* $\{u_1, u_2, u_3\}$*. Vamos ver duas formas de efectuar essa substituição.*

1) Temos $w_1 = 2u_1 + 0u_2 + (-2)u_3$ *e* $2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$*, logo, pelo Teorema 4.4.10,*

$$< u_1, u_2, u_3 > = < w_1, u_2, u_3 > .$$

Como w_2 *é combinação linear de* u_1, u_2, u_3*, então também é combinação linear de* w_1, u_2, u_3*. De facto, tem-se*

$$u_1 = \frac{1}{2} w_1 + 0u_2 + 1u_3,$$

pelo que

$$w_2 = (-1)u_1 + 2u_2 + 1u_3 = -\frac{1}{2} w_1 + 2u_2 + 0u_3$$

onde $2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. *Então, novamente pelo Teorema 4.4.10, segue que*

$$< w_1, u_2, u_3 >=< w_1, w_2, u_3 > .$$

Logo $U =< u_1, u_2, u_3 >=< w_1, w_2, u_3 >$.

2) Uma vez que $w_1 = 2u_1 + 0u_2 + (-2)u_3$ *e* $-2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, *então, pelo Teorema 4.4.10, tem-se*

$$< u_1, u_2, u_3 >=< u_1, u_2, w_1 > .$$

Como w_2 *é combinação linear de* u_1, u_2, u_3, *então também é combinação linear de* u_1, u_2, w_1. *De facto, como*

$$u_3 = 1u_1 + 0u_2 - \frac{1}{2}w_1,$$

segue que

$$w_2 = 0u_1 + 2u_2 - \frac{1}{2}w_1,$$

com $2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. *Logo, pelo Teorema 4.4.10,*

$$< u_1, u_2, w_1 >=< u_1, w_2, w_1 >$$

e, portanto, $U =< u_1, u_2, u_3 >=< u_1, w_2, w_1 >$.

Teorema 4.5.13. *Sejam* V *um espaço vetorial sobre* $\mathbb{K}$, $n, p \in \mathbb{N}$ *tais que* $p \leq n$ *e* $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ *e* $W = \{w_1, \ldots, w_p\}$ *subconjuntos de* V *com, respetivamente,* n *e* p *vetores e tais que as sequências* $(v_1, \ldots, v_n)$ *e* $(w_1, \ldots, w_p)$ *são linearmente independentes. Se* S' *é um conjunto que se obtém de* S *substituindo* p *dos vetores de* S *por* $w_1, \ldots, w_p$ *e* $< S' >=< S >$, *então uma sequência formada pelos vetores de* S' *é linearmente independente.*

Demonstração. A prova pode ser feita por indução sobre p. □

A definição de sequências de vetores linearmente independentes pode ser generalizada a sequências infinitas de vetores.

Definição 4.5.14. *Sejam* V *um espaço vetorial sobre* $\mathbb{K}$, I *um conjunto infinito e* $(v_i)_{i \in I}$ *uma sequência de vetores de* V. *Diz-se que a sequência* $(v_i)_{i \in I}$ *é linearmente independente se, para cada* $t \in \mathbb{N}$ *e cada* t *elementos distintos* $i_1, \ldots, i_t \in I$, $(v_{i_1}, \ldots, v_{i_t})$ *é linearmente independente.*

4.6 Bases e dimensão

Definição 4.6.1. *Sejam* V *um espaço vetorial sobre* $\mathbb{K}$, I *um conjunto e* $(v_i)_{i \in I}$ *uma sequência de vetores de* V. *Diz-se que a sequência* $(v_i)_{i \in I}$ *é uma* ***base*** *de* V *se:*

1) *a sequência* $(v_i)_{i \in I}$ *é linearmente independente;*

2) $\bigcup_{i \in I} \{v_i\}$ *é um conjunto gerador de* V.

Convenciona-se que $(v_i)_{i \in \emptyset}$ *é a única base do espaço* $\{0_V\}$.

Dado $n \in \mathbb{N}$, uma sequência $(v_1, \ldots, v_n)$ de vetores de um espaço vetorial V é uma base de V se $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é um conjunto gerador de V e a sequência $(v_1, \ldots, v_n)$ é linearmente independente.

Observação: Uma vez que uma base é definida como sendo uma sequência, duas bases com os mesmos elementos ordenados de forma diferente são distintas.

Definição 4.6.2. *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, $v \in V$ e $(v_1, \ldots, v_n)$ uma base de V. Chamam-se **componentes** ou **coordenadas** de v na base $(v_1, \ldots, v_n)$ aos coeficientes $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ da combinação linear $v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$.*

Exemplo 4.6.3. *Considerando o espaço vetorial $\mathbb{R}^n$, a sequência $(e_1, ..., e_n)$, onde cada e_i é o n-uplo cujo elemento na coordenada i é 1 e todos os outros elementos são zero, é uma base de V. De facto, de exemplos anteriores sabemos que a sequência $(e_1, ..., e_n)$ é linearmente independente e que $\{e_1, ..., e_n\}$ é um conjunto gerador de $\mathbb{R}^n$. À base $(e_1, \ldots, e_n)$ dá-se a designação de* **base canónica** *de $\mathbb{R}^n$.*

Exemplo 4.6.4. *Dos exemplos 4.4.8 e 4.5.5 concluímos que $(x^2, x, 1)$ é uma base do espaço vetorial real $\mathbb{R}_2[x]$.*

Exemplo 4.6.5. *A sequência de matrizes*

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

é uma base do espaço vetorial real $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exemplo 4.6.6. *A sequência $((1,0), (0,1), (1,1))$ não é uma base do espaço vetorial real $\mathbb{R}^2$, pois, embora $\{((1,0), (0,1), (1,1)\}$ seja um conjunto gerador de $\mathbb{R}^2$, a sequência $((1,0), (0,1), (1,1))$ é linearmente dependente.*

Teorema 4.6.7. *Sejam V espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}$, e $(v_1, ..., v_n)$ uma sequência de vetores de V. Então $(v_1, ..., v_n)$ é uma base de V se e só se todo o elemento de V se escreve, de modo único, como combinação linear dos vetores $v_1, ..., v_n$.*

Demonstração. $\Rightarrow$) Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $(v_1, \ldots, v_n)$ uma base de V. Seja $x \in V$. Como $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é um conjunto gerador de V, existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tais que $x = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$. Além disso, como a sequência $(v_1, \ldots, v_n)$ é linearmente independente, sabemos, pelo Teorema 4.6.18, que x se escreve de modo único como combinação linear destes vetores. Logo, cada vetor de V escreve-se de modo único como combinação linear dos vetores $v_1, \ldots, v_n$.

$\Leftarrow$) Reciprocamente, suponha-se que cada vetor de V se escreve de modo único como combinação linear dos vetores $v_1, ..., v_n$. Então, pelo Teorema 4.6.18, a sequência $(v_1, ..., v_n)$ é linearmente independente. Como todo o vetor de V se escreve como combinação linear destes vetores, também temos $V = \langle v_1, ..., v_n \rangle$. Logo $(v_1, ..., v_n)$ é uma base de V. $\square$

Teorema 4.6.8. *Sejam $V \neq \{0_V\}$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e S um conjunto finito gerador de V. Então existem $u_1, \ldots, u_p \in S$, $p \in \mathbb{N}$, tais que $(u_1, \ldots, u_p)$ é uma base de V.*

Demonstração. Pretendemos mostrar que, para todo $n \in \mathbb{N}$, se $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ é um conjunto gerador de V, então existe uma base de V formada por elementos de S. A prova aqui apresentada é feita por indução no número de elementos do conjunto gerador.
Caso base ($n = 1$): Se $S = \{v_1\}$ é um conjunto gerador de V, então $v_1 \neq 0_V$, pois $V \neq \{0_V\}$. Logo v_1 é linearmente independente e, portanto, (v_1) é uma base de V.
Passo de indução: Por hipótese de indução, admitamos que, dado $t \in \mathbb{N}$, se $\{v_1, \ldots, v_t\}$ é um subconjunto de V com t elementos tal que $< v_1, \ldots, v_t >= V$, então existe uma base de V formada por elementos de $\{v_1, \ldots, v_t\}$.
Suponhamos que $S = \{v_1, \ldots, v_{t+1}\}$ é um subconjunto de V com $t + 1$ elementos e que $< v_1, \ldots, v_{t+1} >= V$. Então dá-se um dos seguintes casos:
i) $v_1, \ldots, v_{t+1}$ são linearmente independentes e, portanto, $(v_1, \ldots, v_{t+1})$ é uma base de V formada por elementos de S.
ii) $v_1, \ldots, v_{t+1}$ são linearmente dependentes e, neste caso, um dos vetores v_i é combinação linear dos vetores $v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_{t+1}$. Então

$$< v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_{t+1} >=< v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_{t+1} > .$$

Assim, $S' = \{v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_{t+1}\}$ é um conjunto gerador de V com t elementos e, por hipótese de indução, existe uma base de V formada por elementos de S'. Consequentemente, como $S' \subseteq S$, existe uma base de V formada por elementos de S. $\square$

Corolário 4.6.9. *Todo o espaço vetorial finitamente gerado admite uma base.*

Demonstração. Caso $V = \{0_V\}$, então V admite uma base; por convenção $(v_i)_{i \in \emptyset}$ é uma base de $\{0_V\}$. Caso $V \neq \{0_V\}$, o resultado é imediato a partir do teorema anterior. $\square$

Exemplo 4.6.10. *No espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$, consideremos os vetores*

$$u_1 = (-1, 0, 0), u_2 = (1, 0, 1), u_3 = (0, 0, 2), u_4 = (1, -1, 1), u_5 = (1, 1, 0).$$

É simples verificar que $\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ é um conjunto gerador de $\mathbb{R}^3$.

De facto, dados $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ *e* $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5 \in \mathbb{R}$, *tem-se*

$$(a,b,c) = \alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2+\alpha_3 u_3+\alpha_4 u_4+\alpha_5 u_5 \text{ se e só se } \left\{ \begin{array}{lcl} \alpha_1 & = & -a+b+\alpha_2+2\alpha_4 \\ \alpha_3 & = & (c-\alpha_2-\alpha_4)/2 \\ \alpha_5 & = & b+\alpha_4 \end{array} \right. .$$

Assim,

$$(a,b,c) = (-a+b+\alpha_2+2\alpha_4)u_1+\alpha_2 u_2+((c-\alpha_2-\alpha_4)/2)u_3+\alpha_4 u_4+(b+\alpha_4)u_5.$$

Em particular,

$$(0,0,0) = (\alpha_2+2\alpha_4)u_1+\alpha_2 u_2+((-\alpha_2-\alpha_4)/2)u_3+\alpha_4 u_4+\alpha_4 u_5,$$

para quaisquer $\alpha_2,\alpha_4 \in \mathbb{R}$ *e, portanto, a sequência* (u_1,u_2,u_3,u_4,u_5) *é linearmente dependente. Tomando, por exemplo,* $\alpha_2=-1$ *e* $\alpha_4=1$, *tem-se*

$$u_4 = -u_1+u_2+0u_3-u_5,$$

pelo que $< u_1,u_2,u_3,u_4,u_5 >=< u_1,u_2,u_3,u_5 >$.
Agora, para quaisquer $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5 \in \mathbb{R}$,

$$\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2+\alpha_3 u_3+\alpha_5 u_5 = (0,0,0) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} \alpha_1 & = & \alpha_2 \\ \alpha_3 & = & -(\alpha_2/2) \\ \alpha_5 & = & 0 \end{array} \right.$$

e, portanto,

$$(0,0,0) = \alpha_2 u_1+\alpha_2 u_2+(-\alpha_2/2)u_3+0u_5,$$

para todo $\alpha_2 \in \mathbb{R}$. *Logo* (u_1,u_2,u_3,u_5) *é linearmente dependente. Tomando, por exemplo,* $\alpha_2=1$, *segue que*

$$u_1 = -u_2+(1/2)u_3+0u_5,$$

pelo que $< u_1,u_2,u_3,u_5 >=< u_2,u_3,u_5 >$.
Para quaisquer $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5 \in \mathbb{R}$,

$$\alpha_2 u_2+\alpha_3 u_3+\alpha_5 u_5 = (0,0,0) \Rightarrow \alpha_2=\alpha_3=\alpha_5=0.$$

Assim, a sequência (u_2,u_3,u_5) *é linearmente independente. Portanto,* (u_2,u_3,u_5) *é uma base de* $\mathbb{R}^3$.

Teorema 4.6.11. *Sejam* $V \neq \{0_V\}$ *um espaço vetorial sobre* $\mathbb{K}$ *finitamente gerado,* $t \in \mathbb{N}$ *e* $(u_1,\ldots,u_t)$ *uma sequência de vetores de* V *linearmente independente. Então existe uma base de* V *da qual fazem parte os vetores* $u_1,\ldots,u_t$.

Demonstração. Sejam $V \neq \{0_V\}$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ finitamente gerado, $t \in \mathbb{N}$ e $(u_1,\ldots,u_t)$ uma sequência de vetores de V linearmente independente.
Sendo $V \neq \{0_V\}$ um espaço vetorial finitamente gerado, então V admite uma base; seja $(v_1,\ldots,v_n)$, $n \in \mathbb{N}$, uma dessas bases.

Então $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ é um conjunto gerador de V com n elementos distintos. Logo, pelo Teorema 4.5.11, temos $t \leq n$ e é possível substituir t dos elementos de S pelos vetores $u_1, \ldots, u_t$ de forma a obter um conjunto S' gerador de V.
Se $t = n$, temos $S' = \{u_1, \ldots, u_t\}$ e, portanto, $(u_1, \ldots, u_t)$ é uma base de V.
Se $t < n$, suponhamos, sem perda de generalidade que $S' = \{u_1, \ldots, u_t, v_{t+1}, \ldots, v_n\}$. Uma vez que a sequência $(v_1, \ldots, v_n)$ é linearmente independente e $< S > = < S' >$, do Teorema 4.5.13 conclui-se que $(u_1, \ldots, u_t, v_{t+1}, \ldots, v_n)$ é linearmente independente. Logo $(u_1, \ldots, u_t, v_{t+1}, \ldots, v_n)$ é uma base de V. □

Exemplo 4.6.12. *Consideremos, no espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$, os vetores $u_1 = (0, 1, -1)$ e $u_2 = (1, -1, -1)$.*
A sequência (u_1, u_2) é linearmente independente, logo existe uma base de $\mathbb{R}^3$ da qual fazem parte estes vetores. Vamos determinar uma dessas bases seguindo o processo descrito na demonstração anterior. Sendo $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 0)$, $v_3 = (0, 0, 1)$, a sequência (v_1, v_2, v_3) é uma base de $\mathbb{R}^3$. Uma vez que $u_1 = v_2 - v_3$, tem-se $< v_1, v_2, v_3 > = < v_1, u_1, v_3 >$. Agora, como $u_2 = v_1 - v_2 - v_3$ e $v_2 = u_1 + v_3$, vem $u_2 = v_1 - u_1 - 2v_3$, pelo que $< v_1, u_1, v_3 > = < v_1, u_1, u_2 >$. Logo $< v_1, v_2, v_3 > = < v_1, u_1, u_2 >$. Pelo Teorema 4.5.13 conclui-se que a sequência (v_1, u_1, u_2) é linearmente independente e, portanto, (v_1, u_1, u_2) é uma base de $\mathbb{R}^3$.

Teorema 4.6.13. *Se V é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ finitamente gerado, então todas as bases de V são finitas.*

Demonstração. Seja V um espaço vetorial finitamente gerado.
Se $V = \{0_V\}$, é óbvio que V não admite bases infinitas.
Se $V \neq \{0_V\}$, então, pelo Teorema 4.6.8, o espaço vetorial V admite uma base finita, digamos $(v_1, \ldots, v_n)$. Suponhamos que V admite uma base infinita $(u_i)_{i \in I}$. Em, particular, a sequência $(u_i)_{i \in I}$ é linearmente independente. Logo, tomando $n + 1$ elementos distintos $i_1, \ldots, i_{n+1} \in I$, a sequência $(u_{i_1}, \ldots, u_{i_{n+1}})$ é linearmente independente. Por outro lado, como $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é um conjunto gerador de V, pelo Teorema 4.5.11 vem $n+1 \leq n$ (absurdo). Portanto, V não admite bases infinitas. □

Teorema 4.6.14. *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ finitamente gerado e $(v_1, ..., v_n)$ uma base de V. Então qualquer base de V tem exactamente n vetores.*

Demonstração. O resultado é imediato a partir dos teoremas 4.5.11 e 4.6.13. □

O resultado anterior fundamenta a definição que se segue.

Definição 4.6.15. *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ finitamente gerado. Chama-se* ***dimensão*** *de V, e representa-se por $\dim V$, ao número de elementos de uma sua qualquer base. Por convenção, diz-se ainda que $\dim \{0_v\} = 0$. Se V não é finitamente gerado, diz-se que V tem* ***dimensão infinita****.*

Exemplo 4.6.16. *Para* $n \in \mathbb{N}$, $\dim \mathbb{R}^n = n$.

Exemplo 4.6.17. *O espaço vetorial real* $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *tem dimensão 4.*

Teorema 4.6.18. *Sejam* V *um espaço vetorial sobre* $\mathbb{K}$ *finitamente gerado de dimensão* n. *Então,*

i) *se* $v_1, v_2, ..., v_p$ *são* p *vetores de* V *com* $p > n$, *então* $(v_1, v_2, ..., v_p)$ *é linearmente dependente;*

ii) *se* $(v_1, \dots, v_n)$ *é uma sequência de vetores de* V *linearmente independente, então* $(v_1, \dots, v_n)$ *é uma base de* V*;*

iii) *se* $v_1, \dots, v_n$ *são* n *vetores de* V, *distintos dois a dois, e* $\{v_1, \dots, v_n\}$ *é um conjunto gerador de* V, *então* $(v_1, \dots, v_n)$ *é uma base de* V.

Demonstração. O resultado *i)* é imediato a partir do Teorema 4.5.11, a alínea *ii)* resulta dos teoremas 4.6.14 e 4.6.11, e *iii)* resulta dos teoremas 4.6.14 e 4.6.8. $\square$

Teorema 4.6.19. *Seja* V *um espaço vetorial sobre* $\mathbb{K}$ *finitamente gerado e* W *um subespaço vetorial de* V. *Então*

i) W *tem dimensão finita e* $\dim W \leq \dim V$*;*

ii) *se* $\dim W = \dim V$, *então* $W = V$.

Demonstração. *i)* A prova é feita com base no Teorema 4.5.11.
ii) Resulta do teorema anterior. $\square$

Teorema 4.6.20. *Sejam* V *um espaço vetorial sobre* $\mathbb{K}$ *de dimensão finita e* W *um subespaço de* V. *Então existe um suplementar de* W *relativamente a* V.

Demonstração. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensão n, $n \in \mathbb{N}_0$, e seja W um subespaço de V.
Se $W = \{0_V\}$, então V é um suplementar de W relativamente a V.
Se $W = V$, então $\{0_V\}$ é um suplementar de W relativamente a V.
Se $W \neq \{0_V\}$ e $W \neq V$, seja $p = \text{dimW}$ e $(w_1, \dots, w_p)$ uma base de W. Uma vez que $W \neq V$, temos $p < n$. Por outro lado, como $(w_1, \dots, w_p)$ é linearmente independente, segue, pelo Teorema 4.6.11, que existe uma base de V da qual fazem parte os vetores $w_1, \dots, w_p$. Suponha-se, sem perda de generalidade que $(w_1, \dots, w_p, u_1, \dots, u_{n-k})$ é essa base. Seja $U =< u_1, \dots, u_{n-k} >$. Fica ao cuidado do leitor a verificação de que $V = W \oplus U$. $\square$

Exemplo 4.6.21. *Consideremos, no espaço vetorial real* $\mathbb{R}^3$, *o subespaço* $W =< (0,1,-1),(1,-1,-1) >$. *A sequência* $((0,1,-1),(1,-1,-1))$ *é linearmente independente e* $((1,0,0),(0,1,-1),(1,-1,-1))$ *é uma base de* $\mathbb{R}^3$ *que inclui os vetores* $(0,1,-1)$, $(1,-1,-1)$ *(ver exemplo 4.6.12). Por conseguinte,* $U =< (1,0,0) >$ *é um espaço suplementar de* W *relativamente a* $\mathbb{R}^3$.

Teorema 4.6.22. *Sejam* V *um espaço vetorial sobre* $\mathbb{K}$ *de dimensão finita e* W *e* U *subespaços de* V. *Então* $\mathrm{dim(W+U) = dimW + dimU - dim(W \cap U)}$.

Demonstração. Sejam W e U subespaços de V.
Se $U = \{0_V\}$ ou $W = \{0_V\}$, o resultado é imediato.
Se $U \neq \{0_V\}$ e $W \neq \{0_V\}$, admitamos que $\mathrm{dimW = k} \geq 1$ e $\mathrm{dimU = t} \geq 1$. Sejam $(w_1, \ldots, w_k)$ uma base de W e $(u_1, \ldots, u_t)$ uma base de U. Então

$$W + U =< w_1, \ldots, w_k > + < u_1, \ldots, u_t >=< w_1, \ldots, w_k, u_1, \ldots, u_t > .$$

Consideremos, agora, dois casos:
1) $W \cap U = \{0_V\}$:
Neste caso, prova-se que $(w_1, \ldots w_k, u_1, \ldots, u_t)$ é linearmente independente. De facto, dados $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_t \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned}
& \alpha_1 w_1 + \ldots \alpha_k w_k + \beta_1 u_1 + \ldots + \beta_t u_t = 0_V \\
\Rightarrow\ & \alpha_1 w_1 + \ldots \alpha_k w_k = -\beta_1 u_1 - \ldots - \beta_t u_t \\
\Rightarrow\ & \alpha_1 w_1 + \ldots \alpha_k w_k \in W \cap U \text{ e } -\beta_1 u_1 - \ldots - \beta_t u_t \in W \cap U \\
\Rightarrow\ & \alpha_1 w_1 + \ldots \alpha_k w_k = 0_V \text{ e } -\beta_1 u_1 - \ldots - \beta_t u_t = 0_V \\
\Rightarrow\ & \alpha_1 = \ldots \alpha_k = 0_{\mathbb{K}} \text{ e } -\beta_1 = \ldots = \beta_t = 0_{\mathbb{K}}.
\end{aligned}$$

Assim, $(w_1, \ldots, w_k, u_1, \ldots, u_t)$ é uma base de $W+U$, e tem-se $\mathrm{dim(W+U) = k+t = dimW + dimU - dim(W \cap U)}$.
2) Caso $W \cap U \neq \{0_V\}$:
Sejam $p = \mathrm{dim(W \cap U)}$ e $(v_1, \ldots, v_p)$ uma base de $W \cap U$. Uma vez que $(v_1, \ldots, v_p)$ é linearmente independente, existe uma base de W da qual fazem parte estes vetores; seja $(v_1, \ldots, v_p, w_1, \ldots, w_{k-p})$ essa base. De modo análogo, existe uma base de U da qual fazem parte os vetores $v_1, \ldots, v_p$, seja $(v_1, \ldots, v_p, u_1, \ldots, u_{t-p})$ essa base. Então

$$\begin{aligned}
W + U &= < v_1, \ldots, v_p, w_1, \ldots, w_{k-p} > + < v_1, \ldots, v_p, u_1, \ldots, u_{t-p} > \\
&= < v_1, \ldots, v_p, w_1, \ldots, w_{k-p}, u_1, \ldots, u_{t-p} >
\end{aligned}$$

Vamos, agora, verificar que a sequência $(v_1, \ldots, v_p, w_1, \ldots, w_{k-p}, u_1, \ldots, u_{t-p})$ é linearmente independente. De facto, dados $\lambda_1, \ldots, \lambda_p, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-p}, \beta_1, \ldots, \beta_{t-p} \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned}
& \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_p v_p + \alpha_1 w_1 + \ldots \alpha_{k-p} w_{k-p} + \beta_1 u_1 + \ldots + \beta_{t-p} u_{t-p} = 0_V \\
\Rightarrow\ & \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_p v_p + \alpha_1 w_1 + \ldots \alpha_{k-p} w_{k-p} = -\beta_1 u_1 - \ldots - \beta_{t-p} u_{t-p}.
\end{aligned}$$

Então $-\beta_1 u_1 - \ldots - \beta_{t-p} u_{t-p} \in W \cap U$. Logo, existem $\lambda'_1, \ldots, \lambda'_p \in \mathbb{K}$ tais que

$$-\beta_1 u_1 - \ldots - \beta_{t-p} u_{t-p} = \lambda'_1 v_1 + \ldots + \lambda'_p v_n,$$

donde

$$\lambda'_1 v_1 + \ldots + \lambda'_p v_n + \beta_1 u_1 + \ldots + \beta_{t-p} u_{t-p} = 0_V$$

e, como $(v_1, \ldots, v_p, u_1, \ldots, u_{t-p})$ é base de U, temos

$$\lambda'_1 = \ldots = \lambda'_p = \beta_1 = \ldots = \beta_{t-p} = 0_{\mathbb{K}}.$$

De modo análogo, prova-se que $\lambda'_1 = \ldots = \lambda'_p = \alpha_1 = \ldots = \alpha_{k-p} = 0_{\mathbb{K}}$. Uma vez que $\alpha_1 = \ldots = \alpha_{k-p} = \beta_1 = \ldots = \beta_{t-p} = 0_{\mathbb{K}}$ e $(v_1, \ldots, v_p)$ é linearmente independente, tem-se também $\lambda_1 = \ldots = \lambda_p = 0_{\mathbb{K}}$. Logo, a sequência

$$(v_1, \ldots, v_p, w_1, \ldots, w_{k-p}, u_1, \ldots, u_{t-p})$$

é linearmente independente. Portanto, $(v_1, \ldots, v_p, w_1, \ldots, w_{k-p}, u_1, \ldots, u_{t-p})$ é uma base de $W + U$, e tem-se

$$\begin{aligned} \dim(W+U) &= p + (k-p) + (t-p) \\ &= k + t - p \\ &= \dim W + \dim U - \dim(W \cap U). \end{aligned}$$

$\square$

4.7 Espaço das linhas e espaço das colunas de uma matriz

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Dada uma matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, podemos identificar, sem perda de rigor, cada linha i de A com o elemento $(a_{i1}, \ldots, a_{in})$ de $\mathbb{K}^n$ e a coluna j de A com o elemento $(a_{1j}, \ldots, a_{mj})$ de $\mathbb{K}^m$. Ao subespaço vetorial de $\mathbb{K}^n$ gerado pelas linhas de A damos a designação de ***espaço das linhas*** de A e representamo-lo por $\mathcal{L}(A)$. O subespaço vetorial de $\mathbb{K}^m$ gerado pelas colunas de A é designado por ***espaço das colunas*** de A e é representado por $\mathcal{C}(A)$. Às dimensões dos subespaços $\mathcal{L}(A)$ e $\mathcal{C}(A)$ damos a designação de ***característica linha*** de A e ***característica coluna*** de A, e representamo-las por $car_l(A)$ e $car_c(A)$, respetivamente.

Pelo Teorema 4.6.18 é simples perceber que a característica linha de uma matriz A é igual ao número máximo de linhas de A que são linearmente independentes e, analogamente, a característica coluna de A é igual ao número máximo de colunas de A que são linearmente independentes.

Exemplo 4.7.1. *Se*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

tem-se

$$\mathcal{L}(A) =< (2,0,0), (0,0,1), (0,0,0) >, \quad \mathcal{L}(B) =< (2,0,0), (0,1,0), (0,0,0) >$$

e

$$\mathcal{C}(A) =< (2,0,0),(0,0,0),(0,1,0) >, \quad \mathcal{C}(B) =< (2,0,0),(0,1,0),(0,0,0) > .$$

A respeito destes espaços vetoriais facilmente se verifica que $\mathcal{L}(A) \neq \mathcal{L}(B)$, $\mathcal{C}(A) = \mathcal{C}(B)$, $car_l(A) = car_c(A)$ *e* $car_l(B) = car_c(B)$.

Observação: Para qualquer matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, tem-se $\mathcal{C}(A) = \mathcal{L}(A^T)$.

Teorema 4.7.2. *Sejam* $m, n \in \mathbb{N}$ *e* $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. *Se* B *é uma matriz obtida de* A *por meio de uma operação elementar sobre linhas, então* $car_l(A) = car_l(B)$.

Demonstração. Se B é uma matriz obtida de A por meio de uma operação elementar sobre linhas, então do Teorema 4.4.10 segue que $\mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(B)$. Logo $car_l(A) = car_l(B)$. □

Teorema 4.7.3. *Sejam* $m, n \in \mathbb{N}$ *e* $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. *Se* B *é uma matriz obtida de* A *por meio de uma operação elementar sobre linhas, então* $car_c(A) = car_c(B)$.

Demonstração. Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ tais que B é obtida de A por meio de uma operação elementar sobre linhas.
Pretendemos mostrar que $\dim \mathcal{C}(A) = \dim \mathcal{C}(B)$, ou seja, que o número máximo de colunas de A linearmente independentes é igual ao número máximo de colunas de B linearmente independentes. Para tal, basta mostrar que, para qualquer $k \in \{1, \ldots, n\}$, qualquer sequência (A_{j_1}, A_{j_2}, ..., A_{j_k}) com k colunas de A e quaisquer $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K}$,

$$\alpha_1 A_{j_1} + \alpha_2 A_{j_2} + \ldots \alpha_k A_{j_k} = \mathbf{0}$$

se e só se

$$\alpha_1 B_{j_1} + \alpha_2 B_{j_2} + \ldots \alpha_k B_{j_k} = \mathbf{0},$$

onde A_{j_i} e B_{j_i} representam a coluna j_i de A e de B, respetivamente. Ora, como $B = EA$ para alguma matriz elementar E, tem-se

$$[B_{j_1} B_{j_2} \ldots B_{j_k}] = E[A_{j_1} A_{j_2} \ldots A_{j_k}],$$

onde $[A_{j_1} A_{j_2} \ldots A_{j_k}]$ representa a matriz cuja coluna i é a coluna A_{j_i} de A e $[B_{j_1} B_{j_2} \ldots B_{j_k}]$ é a matriz construída de modo análogo a partir da matriz B. Por conseguinte, e tendo em conta que E é invertível, segue que

$$\alpha_1 A_{j_1} + \alpha_2 A_{j_2} + \ldots \alpha_k A_{j_k} = 0$$

se e só se

$$[A_{j_1} A_{j_2} \ldots A_{j_k}] \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

se e só se

$$E[A_{j_1}A_{j_2}\dots A_{j_k}]\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_k\end{bmatrix}=\mathbf{0}$$

se e só se

$$[B_{j_1}B_{j_2}\dots B_{j_k}]\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_k\end{bmatrix}=\mathbf{0}$$

se e só se

$$\alpha_1 B_{j_1}+\alpha_2 B_{j_2}+\dots\alpha_k B_{j_k}=0.$$

Do que acabámos de provar segue que o número máximo de colunas de A linearmente independentes é igual ao número máximo de colunas de B linearmente independentes e, por conseguinte, $car_c(A)=car_c(B)$. □

Exemplo 4.7.4. *Sejam*

$$A=\begin{bmatrix}1&1\\2&2\end{bmatrix}\quad e\quad B=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}.$$

A matriz B é equivalente por linhas à matriz A, uma vez que

$$\begin{bmatrix}1&1\\2&2\end{bmatrix}\xrightarrow[l_2\to l_2-2l_1]{}\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}.$$

Tem-se $\mathcal{L}(A)=\mathcal{L}(B)$ e, portanto, $car_l(A)=car_l(B)$. Embora $\mathcal{C}(A)\neq\mathcal{C}(B)$ (pois $(1,2)\in\mathcal{C}(A)$, mas $(1,2)\notin\mathcal{C}(B)$), também temos $car_c(A)=car_c(B)$.

Como vamos verificar nos resultados seguintes, a noção de caracteristica linha e de caracaterística coluna estão relacionadas com a noção de característica de uma matriz.

Teorema 4.7.5. *Sejam $m,n\in\mathbb{N}$. Se $A\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ é uma matriz em forma de escada, então a sua característica linha e a sua característica coluna são iguais e coincidem com a característica de A, isto é,*

$$car_l(A)=car_c(A)=car(A).$$

Demonstração. Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ uma matriz em escada. Então temos

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \dots & a_{1j_1} & \dots & a_{1j_2} & \dots & a_{1j_3} & \dots & a_{1j_m} & \dots & a_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & \dots & a_{2j_2} & \dots & a_{2j_3} & \dots & a_{2j_m} & \dots & a_{2n} \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & a_{3j_3} & \dots & a_{3j_m} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & a_{rj_r} & \dots & a_{rn} \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

onde:

- para todo $i \in \{1, \dots, r\}$, $a_{ij_i} \neq 0$,
- para todo $r < i \leq n$, a linha i é nula,
- para todo $j \in \{1, \dots, n\} \setminus (\{j_1, j_2, \dots, j_r\} \cup \{j_{r+1}, \dots, n\})$, a coluna j é nula.

Pretendemos mostrar que $car(A) = car_l(A) = car_c(A)$. Para tal, começamos por observar que $car(A) = r$, uma vez que A é uma matriz em escada com r linhas não nulas.

Como vamos verificar de seguida, também temos $car_l(A) = r$. De facto, se representarmos por l_i o vetor de $\mathbb{K}^n$ que representa a linha i de A, temos

$$\mathcal{L}(A) =< l_1, l_2, \dots, l_r, \dots, l_m >=< l_1, l_2, l_3, \dots, l_r >,$$

uma vez que que, que para todo $i > r$, $l_i = 0_{\mathbb{K}^n}$. Por outro lado, é simples verificar que a sequência $(l_1, l_2, l_3, \dots, l_r)$ é linearmente independente, pois, para quaisquer $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r \in \mathbb{K}$,

$$\alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \alpha_3 l_3 \dots + \alpha_r l_r = 0_{\mathbb{K}^n}$$

se e só se

$$\begin{array}{rlllllllllll} & \alpha_1(0, & \dots, & a_{1j_1}, & \dots, & a_{1j_2}, & \dots, & a_{1j_3}, & \dots, & a_{1j_m}, & \dots, & a_{1n}) \\ + & \alpha_2(0, & \dots, & 0, & \dots, & a_{2j_2}, & \dots, & a_{2j_3}, & \dots, & a_{2j_m}, & \dots, & a_{2n}) \\ + & \alpha_3(0, & \dots, & 0, & \dots, & 0, & \dots, & a_{3j_3}, & \dots, & a_{3j_m}, & \dots, & a_{3n}) \\ + & \dots \\ + & \alpha_r(0, & \dots, & 0, & \dots, & 0, & \dots, & 0, & \dots, & a_{rj_r}, & \dots, & a_{rn}) \\ = & (0, & \dots, & 0, & \dots, & 0, & \dots, & 0, & \dots, & 0, & \dots, & 0) \end{array}$$

se e só se

$$\begin{array}{rl} & (0, \dots, \alpha_1 a_{1j_1}, \dots, \sum_{i=1}^{2} \alpha_i a_{ij_2}, \dots, \sum_{i=1}^{3} \alpha_i a_{ij_3}, \dots, \sum_{i=1}^{r} \alpha_i a_{ij_r}, \dots, \sum_{i=1}^{r} \alpha_i a_{ij_n}) \\ = & (0, \dots, 0, \dots, 0, \dots, 0, \dots, 0, \dots, 0) \end{array}$$

se e só se

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_r = 0.$$

Logo, $(l_1, l_2, l_3, \ldots, l_r)$ é uma base de $\mathcal{L}(A)$ e, por conseguinte, $dim\, \mathcal{L}(A) = r$, isto é, $car_l(A) = r$. Assim, $car_l(A) = car(A)$.

Facilmente também provamos que $car_c(A) = r$. Com efeito, se representarmos por c_j o vetor de $\mathbb{K}^m$ que representa a coluna j da matriz A, é imediato que

$$\mathcal{C}(A) =< c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n >=< c_{j_1}, c_{j_2}, c_{j_3}, \ldots, c_{j_r}, c_{j_{r+1}}, \ldots, c_n >,$$

uma vez que, para todo $j \in \{1, \ldots, n\} \setminus (\{j_1, j_2, j_3, \ldots, j_r\} \cup \{j_{r+1}, \ldots, n\})$, $c_j = 0_{\mathbb{K}^m}$. Além disso, verifica-se que, para todo $k \geq r+1$, c_k é combinação linear de $c_{j_1}, c_{j_2}, c_{j_3}, \ldots, c_{j_r}$, ou seja, existem $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_r \in \mathbb{K}$ tais que

$$\alpha_1 c_{j_1} + \alpha_2 c_{j_2} + \alpha_3 c_{j_3} + \ldots + \alpha_r c_{j_r} = c_k.$$

De facto, se representarmos por A' a matriz que tem as colunas $j_1, j_2, j_3, \ldots, j_r$ de A e por A_k a matriz coluna com a coluna k de A, i.e.,

$$A' = \begin{bmatrix} a_{1j_1} & a_{1j_2} & a_{1j_3} & a_{1j_r} \\ 0 & a_{2j_2} & a_{2j_3} & a_{2j_r} \\ 0 & 0 & a_{3j_3} & a_{3j_r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{rj_r} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad A_k = \begin{bmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ a_{3k} \\ \vdots \\ a_{rk} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

c_k é combinação linear de $c_{j_1}, c_{j_2}, \ldots, c_{j_r}$ se e só se o sistema

$$A' \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_r \end{bmatrix} = A_k$$

é possivel. Ora, para todo $i \in \{1, \ldots, r\}$, $a_{ij_i} \neq 0$, pelo que $car(A') = r = car([A'|A_k])$ e, portanto, o sistema anterior é possivel.
Então, considerando que, para todo $k \geq r+1$, c_k é combinação linear de $c_{j_1}, c_{j_2}, c_{j_3}, \ldots, c_{j_r}$, temos

$$\mathcal{C}(A) =< c_{j_1}, c_{j_2}, \ldots, c_{j_r}, c_{j_{r+1}}, \ldots, c_n >=< c_{j_1}, c_{j_2}, \ldots, c_{j_r} > .$$

Por último, e de forma semelhante ao que foi feito no caso das linhas, prova-se que a sequência $(c_{j_1}, c_{j_2}, \ldots, c_{j_r})$ é linearmente independente. Logo, $(c_{j_1}, c_{j_2}, \ldots, c_{j_r})$ é uma base de $\mathcal{C}(A)$, pelo que $dim\, \mathcal{C}(A) = r$. Assim, $car_c(A) = car(A)$. $\square$

O resultado anterior pode ser generalizado para qualquer matriz.

Teorema 4.7.6. *Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Para qualquer matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, a sua característica linha e a sua característica coluna são iguais e coincidem com a característica de A, isto é,*

$$car_l(A) = car_c(A) = car(A).$$

Demonstração. Por definição de característica de uma matriz, tem-se $car(A) = car(U)$ onde U é uma matriz em escada obtida de A por meio de operações elementares sobre linhas. Por outro lado, pela Proposição 4.7.5, tem-se $car(U) = car_l(U)$. Finalmente, da Proposição 4.7.2 segue que $car_l(A) = car_l(U)$. Logo $car(A) = car_l(A)$. De forma simples também provamos que $car_c(A) = car(A)$. Com efeito, pela Proposição 4.7.5 sabemos que $car_c(U) = car(U)$ e pela Proposição 4.7.3 tem-se $car_c(A) = car_c(U)$. Logo, como $car(A) = car(U)$, temos $car_c(A) = car(A)$. □

Teorema 4.7.7. *Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Para qualquer matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, tem-se*

$$car(A) = car(A^T).$$

Demonstração. O resultado segue de imediato, uma vez que

$$car(A) = car_l(A) = car_c(A) = car_l(A^T) = car(A^T).$$

□