Exercícios para a unidade curricular

Álgebra Linear CC

Licenciatura em Ciências da Computação

Carla Mendes
Departamento de Matemática
Universidade do Minho
2024/2025

Índice

3 Espaços Vetoriais

Exercícios e resoluções

Exercício 3.1

Determine se $\mathbb{R}^2$, juntamente com as aplicações $\widetilde{+} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $\widetilde{\cdot} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definidas em cada alínea, é um espaço vetorial real.

(a) Para quaisquer $\alpha \in \mathbb{R}$ e $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}$, considere

$$(x_1, x_2)\widetilde{+}(y_1, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \quad \text{e} \quad \alpha\widetilde{\cdot}(x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2).$$

(b) Para quaisquer $\alpha \in \mathbb{R}$ e $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}$, considere

$$(x_1, x_2)\widetilde{+}(y_1, y_2) = (x_1 + y_1, 0) \quad \text{e} \quad \alpha\widetilde{\cdot}(x_1, x_2) = (\alpha x_1, 0).$$

(c) Para quaisquer $\alpha \in \mathbb{R}$ e $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}$, considere

$$(x_1, x_2)\widetilde{+}(y_1, y_2) = (x_1, x_2 - y_2) \quad \text{e} \quad \alpha\widetilde{\cdot}(x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2).$$

Resolução:

(a) Considerando as propriedades da adição e da multiplicação de números reais, verificam-se as condições seguintes:

(V_1) Para quaisquer $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} x + y &= (x_1, x_2) + (y_1, y_2) \\ &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2) && \text{(adição de elementos de } \mathbb{R}^2) \\ &= (y_1 + x_1, y_2 + x_2) && \text{(comutatividade da adição em } \mathbb{R}) \\ &= (y_1, y_2) + (x_1, x_2) && \text{(adição de elementos de } \mathbb{R}^2) \\ &= y + x. \end{aligned}$$

(V_2) Para quaisquer $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2), z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} x + (y + z) &= (x_1, x_2) + ((y_1, y_2) + (z_1, z_2)) \\ &= (x_1, x_2) + (y_1 + z_1, y_2 + z_2) && \text{(adição de elementos de } \mathbb{R}^2) \\ &= (x_1 + (y_1 + z_1), x_2 + (y_2 + z_2))) && \text{(adição de elementos de } \mathbb{R}^2) \\ &= ((x_1 + y_1) + z_1, (x_2 + y_2) + z_2,) && \text{(associatividade da adição em } \mathbb{R}) \\ &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2) + (z_1, z_2) && \text{(adição de elementos de } \mathbb{R}^2) \\ &= ((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) + (z_1, z_2) && \text{(adição de elementos de } \mathbb{R}^2) \\ &= (x + y) + z. \end{aligned}$$

(V_3) Existe $0_{\mathbb{R}^2} = (0,0) \in \mathbb{R}^2$ tal que, para qualquer $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{array}{rcll} 0_{\mathbb{R}^2} + x & = & (0,0) + (x_1, x_2) & \\ & = & (0 + x_1, 0 + x_2) & \text{(adição de elementos de } \mathbb{R}^2) \\ & = & (x_1, x_2) & \text{(0 é o elemento neutro da adição usual em } \mathbb{R}) \\ & = & (x_1 + 0, x_2 + 0) & \text{(0 é o elemento neutro da adição usual em } \mathbb{R}) \\ & = & (x_1, x_2) + (0,0) & \text{(adição de elementos de } \mathbb{R}^2) \\ & = & x + 0_{\mathbb{R}^2}. & \end{array}$$

(V_4) Para qualquer $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, existe $x' = (-x_1, -x_2) \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$\begin{array}{rcll} x + x' & = & (x_1, x_2) + (-x_1, -x_2) & \\ & = & (x_1 - x_1, x_2 - x_2) & \text{(adição de elementos de } \mathbb{R}^2) \\ & = & 0_{\mathbb{R}^2} & (-x_i \text{ é o simétrico de } x_i) \\ & = & (-x_1 + x_1, -x_2 + x_2) & (-x_i \text{ é o simétrico de } x_i) \\ & = & (-x_1, -x_2) + (x_1, x_2) & \text{(adição de elementos de } \mathbb{R}^2) \\ & = & x' + x. & \end{array}$$

(V_5) Para quaisquer $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ e $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{rcll} \alpha(x + y) & = & \alpha((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) & \\ & = & \alpha(x_1 + y_1, x_2 + y_2) & \text{(adição de elementos de } \mathbb{R}^2) \\ & = & (\alpha(x_1 + y_1), \alpha(x_2 + y_2)) & \text{(multiplicação de um escalar por um elemento de } \mathbb{R}^2) \\ & = & (\alpha x_1 + \alpha y_1, \alpha x_2 + \alpha y_2) & \text{(distributividade em } (\mathbb{R}, +, \cdot)) \\ & = & (\alpha x_1, \alpha x_2) + (\alpha y_1, \alpha y_2) & \text{(adição de elementos de } \mathbb{R}^2) \\ & = & \alpha(x_1, x_2) + \alpha(y_1, y_2) & \text{(multiplicação de um escalar por um elemento de } \mathbb{R}^2) \\ & = & \alpha x + \alpha y. & \end{array}$$

(V_6) Para quaisquer $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{rcll} (\alpha + \beta)x & = & (\alpha + \beta)(x_1, x_2) & \\ & = & ((\alpha + \beta)x_1, (\alpha + \beta)x_2) & \text{(multiplicação de um escalar por um elemento de } \mathbb{R}^2) \\ & = & (\alpha x_1 + \beta x_1, \alpha x_2 + \beta x_2) & \text{(distributividade em } (\mathbb{R}, +, \cdot)) \\ & = & (\alpha x_1, \alpha x_2) + (\beta x_1, \beta x_2) & \text{(adição de elementos de } \mathbb{R}^2) \\ & = & \alpha(x_1, x_2) + \beta(x_1, x_2) & \text{(multiplicação de um escalar por um elemento de } \mathbb{R}^2) \\ & = & \alpha x + \alpha y. & \end{array}$$

(V_7) Para quaisquer $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{rcll} (\alpha\beta)x & = & (\alpha\beta)(x_1, x_2) & \\ & = & ((\alpha\beta)x_1, (\alpha\beta)x_2) & \text{(multiplicação de um escalar por um elemento de } \mathbb{R}^2) \\ & = & (\alpha(\beta x_1), \alpha(\beta x_2)) & \text{(associatividade da multiplicação em } \mathbb{R}) \\ & = & \alpha(\beta x_1, \beta x_2) & \text{(multiplicação de um escalar por um elemento de } \mathbb{R}^2) \\ & = & \alpha(\beta(x_1, x_2)) & \text{(multiplicação de um escalar por um elemento de } \mathbb{R}^2) \\ & = & \alpha(\beta x). & \end{array}$$

(V_8) Para qualquer $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{array}{rcll} 1 \cdot x & = & (1 \cdot x_1, 1 \cdot x_2) & \text{(multiplicação de um escalar por um elemento de } \mathbb{R}^2) \\ & = & (x_1, x_2) & \text{(1 é o elemento neutro da multiplicação usual em } \mathbb{R}) \\ & = & x. & \end{array}$$

De (V_1), (V_2), ..., (V_8) conclui-se que $\mathbb{R}^2$, juntamente com as aplicações $+$ e $\cdot$, é um espaço vetorial real.

(b) O conjunto $\mathbb{R}^2$, juntamente com as aplicações indicadas, não é um espaço vetorial, uma vez que a condição

$$\forall_{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2} \ 1\tilde{\cdot}(x_1,x_2)=(x_1,x_2)$$

não é satisfeita. De facto, $(2,3)\in\mathbb{R}^2$ e $1\tilde{\cdot}(2,3)=(2,0)\neq(2,3)$.

(c) O conjunto $\mathbb{R}^2$, juntamente com as aplicações indicadas, não é um espaço vetorial, uma vez que a condição

$$\forall_{(x_1,x_2),(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2} \ (x_1,x_2)\tilde{+}(y_1,y_2)=(y_1,y_2)\tilde{+}(x_1,x_2)$$

não é satisfeita. De facto, $(1,2),(3,4)\in\mathbb{R}^2$ e $(1,2)\tilde{+}(3,4)=(1,-2)\neq(3,2)=(3,4)\tilde{+}(1,2)$.

Exercício 3.2

Seja $n\in\mathbb{N}$. Mostre que $\mathbb{R}^n$, algebrizado com as aplicações $+:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ e $\cdot:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ definidas, respetivamente, por

$$(x_1,x_2,...,x_n)+(y_1,y_2,...,y_n)=(x_1+y_1,x_2+y_2,...,x_n+y_n),$$
$$\alpha\cdot(x_1,x_2,...,x_n)=(\alpha x_1,\alpha x_2,...,\alpha x_n),$$

para quaisquer $\alpha\in\mathbb{R}$ e $(x_1,x_2,...,x_n),(y_1,y_2,...,y_n)\in\mathbb{R}^n$, é um espaço vetorial real.

Resolução: Prova similar à do exercício 3.1.(a).

Exercício 3.3

Sejam $u,v\in\mathbb{R}^n$ e S um subespaço do espaço vetorial real $\mathbb{R}^n$. Mostre que

(a) Se $v\in S$, então $-v\in S$.

(b) Se $u,v\in S$, então $u-v\in S$.

(c) Se $u+v\in S$ e $u\in S$, então $v\in S$.

(d) Se existe $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ tal que $\alpha v\in S$, então $v\in S$.

Resolução:

(a) Se S é um subespaço do espaço vetorial real $\mathbb{R}^n$, então, para quaisquer $v\in S$ e $\alpha\in\mathbb{R}$, $\alpha v\in S$. Assim, se $v\in S$, tem-se $(-1)v\in S$. Além disso, $(-1)v=-v$, pois

$$(-1)v+v=-1+1v=0v=0_{\mathbb{R}^n}=0_{\mathbb{R}^n}v=(1_{\mathbb{K}}-1_{\mathbb{K}})v=v+(-1_{\mathbb{K}})v.$$

Logo, $-v\in S$.

(b) Sejam $u,v\in S$. Pela alínea anterior, tem-se $-v\in S$. Como S é um subespaço do espaço vetorial real $\mathbb{R}^n$, então é fechado para a adição de vetores, isto é, para quaisquer $x,y\in S$, tem-se $x+y\in S$. Por conseguinte, como $u\in S$ e $-v\in S$, segue que $u+(-v)=u-v\in S$.

(c) Sejam $u,v\in\mathbb{R}^n$ tais que $u+v\in S$ e $u\in S$. Pela alínea anterior, tem-se $-u\in S$. Como S é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$, então é fechado para a adição de vetores, isto é, para quaisquer $x,y\in S$, tem-se $x+y\in S$. Por conseguinte, como $u+v\in S$ e $-u\in S$, segue que $-u+(u+v)\in S$. Como $-u+(u+v)=(-u+u)+v=0_V+v=v$, então $v\in S$.

(d) Admitamos que existe $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ tal que $\alpha v\in S$. Como $\alpha\neq0$, existe $\alpha^{-1}\in\mathbb{R}$ tal que $\alpha\alpha^{-1}=1=\alpha^{-1}\alpha$. Então, como $\alpha v\in S$ e S é fechado para a operação de multiplicação de um escalar por um vetor, tem-se $\alpha^{-1}(\alpha v)\in S$. Uma vez que $\alpha^{-1}(\alpha v)=(\alpha^{-1}\alpha)v=1v=v$, então $v\in S$.

Exercício 3.4

Determine quais dos seguintes conjuntos são subespaços do espaço vetorial real indicado.

(a) $W_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 = 0 \text{ e } x_2 + 2x_3 = 0\}$ em $\mathbb{R}^3$.

(b) $W_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 = -5x_2 \text{ e } x_2 - 3x_3 = 0\}$ em $\mathbb{R}^4$.

(c) $W_3 = \{(0, a, b, -1) \in \mathbb{R}^4 : a, b \in \mathbb{R}\}$ em $\mathbb{R}^4$.

(d) $W_4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_3 = 2 \text{ e } x_2 - 3x_3 = 0\}$ em $\mathbb{R}^4$.

(e) $W_5 = \{a(1, 2) \in \mathbb{R}^2 : a \in \mathbb{R}\}$ em $\mathbb{R}^2$.

(f) $W_6 = \{a(1, 2) + b(-3, 1) \in \mathbb{R}^2 : a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}_0^+\}$ em $\mathbb{R}^2$.

Resolução:

Sejam V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$. Um conjunto S é um subsepaço vetorial de V se e só se satisfaz as condições seguintes:

(1) $S \subseteq V$.

(2) $S \neq \emptyset$;

(3) $\forall_{x,y \in V}\, (x, y \in S \Rightarrow x + y \in S)$;

(4) $\forall_{x \in V} \forall_{\alpha \in \mathbb{K}}\, (x \in S \Rightarrow \alpha x \in S)$.

(a) O conjunto W_1 é um subespaço vetorial do espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$. De facto:

(1) Por definição de W_1, tem-se $W_1 \subseteq \mathbb{R}^3$.

(2) Uma vez que $0_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0) \in W_1$, então $W_1 \neq \emptyset$.

(3) Para quaisquer $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in W_1$, tem-se $x, y \in \mathbb{R}^3$ e

$$\begin{array}{ll} x_1 - x_2 = 0, & x_2 + 2x_3 = 0, \\ y_1 - y_2 = 0, & y_2 + 2y_3 = 0. \end{array}$$

Por conseguinte, $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) \in \mathbb{R}^3$ e

$$\begin{array}{l} (x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) = 0 + 0 = 0, \\ (x_2 + y_2) + 2(x_3 + y_3) = (x_2 + 2x_3) + (y_2 + 2y_3) = 0 + 0 = 0. \end{array}$$

Logo, $x + y \in W_1$.

(4) Para quaisquer $x = (x_1, x_2, x_3) \in W_1$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, tem-se $x \in \mathbb{R}^3$ e

$$x_1 - x_2 = 0, \quad x_2 + 2x_3 = 0.$$

Logo, $\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3) \in \mathbb{R}^3$ e

$$\begin{array}{l} (\alpha x_1) - (\alpha x_2) = \alpha(x_1 - x_2) = \alpha 0 = 0, \\ (\alpha x_2) + 2(\alpha x_3) = \alpha(x_2 + 2x_3) = \alpha 0 = 0. \end{array}$$

Portanto, $\alpha x \in W_1$.

De 1), 2), 3) e 4) conclui-se que W_1 é um subespaço vetorial do espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$.

(b) O conjunto W_2 é um subespaço vetorial do espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$, pois:

(1) Por definição de W_2, tem-se $W_2 \subseteq \mathbb{R}^4$.

(2) $W_2 \neq \emptyset$, uma vez que $0_{\mathbb{R}^4} = (0,0,0,0) \in W_2$.

(3) Para quaisquer $x = (x_1, x_2, x_3, x_4), y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in W_2$, tem-se $x, y \in \mathbb{R}^4$ e

$$\begin{aligned} x_1 &= -5x_2, \quad x_2 - 3x_3 = 0, \\ y_1 &= -5y_2, \quad y_2 - 3y_3 = 0. \end{aligned}$$

Logo, $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, x_4 + y_4) \in \mathbb{R}^4$ e

$$\begin{aligned} &x_1 + y_1 = -5x_2 - 5y_2 = -5(x_2 + y_2), \\ &(x_2 + y_2) - 3(x_3 + y_3) = (x_2 - 3x_3) + (y_2 - 3y_3) = 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

e, portanto, $x + y \in W_2$.

(4) Para quaisquer $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in W_2$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, tem-se $x \in \mathbb{R}^4$ e

$$x_1 = -5x_2, \quad x_2 - 3x_3 = 0.$$

Logo, $\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3, \alpha x_4) \in \mathbb{R}^4$ e

$$\begin{aligned} &\alpha x_1 = \alpha(-5x_2) = -5(\alpha x_2), \\ &(\alpha x_2) - 3(\alpha x_3) = \alpha(x_2 - 3x_3) = \alpha 0 = 0. \end{aligned}$$

Portanto, $\alpha x \in W_2$.

De 1), 2), 3) e 4) conclui-se que W_2 é um subespaço vetorial do espaço vetorial real $\mathbb{R}^4$.

(c) O conjunto W_3 não é um subespaço vetorial do espaço vetorial real $\mathbb{R}^4$, pois não satisfaz a condição ii). De facto, tem-se $(0,1,1,-1), (0,2,2,-1) \in W_3$ e

$$(0,1,1,-1) + (0,2,2,-1) = (0,3,3,-2) \notin W_3.$$

(d) O conjunto W_4 não é um subespaço vetorial do espaço vetorial real $\mathbb{R}^4$, pois $x = (1,3,1,0) \in W_4$, $y = (3,-3,-1,0) \in W_4$ e $x + y = (4,0,0,0) \notin W_4$.

(e) O conjunto W_5 é um subespaço vetorial do espaço vetorial real $\mathbb{R}^2$. De facto:

(1) Por definição de W_5, tem-se $W_5 \subseteq \mathbb{R}^2$.

(2) Uma vez que $0_{\mathbb{R}^2} = (0,0) = 0(1,2) \in W_5$, então $W_5 \neq \emptyset$.

(3) Para quaisquer $x, y \in W_5$, tem-se $x, y \in \mathbb{R}^2$ e $x = a(1,2)$, $y = b(1,2)$, para alguns $a, b \in \mathbb{R}^2$. Por conseguinte, $x + y = a(1,2) + b(1,2) \in \mathbb{R}^2$ e

$$x + y = a(1,2) + b(1,2) = (a+b)(1,2), \text{ com } a + b \in \mathbb{R}.$$

Logo, $x + y \in W_5$.

(4) Para quaisquer $x \in W_5$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, tem-se $x = a(1,2)$, para algum $a \in \mathbb{R}$, pelo que $\alpha x \in \mathbb{R}^2$ e

$$\alpha x = \alpha(a(1,2)) = (\alpha a)(1,2), \text{ com } \alpha a \in \mathbb{R}.$$

Portanto, $\alpha x \in W_5$.

De 1), 2), 3) e 4) conclui-se que W_5 é um subespaço vetorial do espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$.

(f) O conjunto W_6 não é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$, pois $(-3,1) = 0(1,2) + 1(-3,1) \in W_6$, $-1 \in \mathbb{R}$ e $-1(-3,1) = (3,-1) \notin W_6$ (para quaisquer $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}_0^+$, $(3,-1) \neq a(1,2) + b(-3,1)$).

Exercício 3.5

Considere o espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$ e, para cada $t \in \mathbb{R}$, o conjunto

$$V_t = \{(1-t, (3-t)x, t^2-1) \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{R}\}.$$

Determine, caso existam, os valores de t para os quais V_t é subespaço vetorial do espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$.

Resolução:

Sejam V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ e S um subconjunto de V. Então S é um subsepaço vetorial de V se e só se satisfaz as condições seguintes:

S$_1$) $S \neq \emptyset$;

S$_2$) $\forall_{x,y\in V}\,(x, y \in S \Rightarrow x + y \in S)$;

S$_3$) $\forall_{x\in V}\forall_{\alpha\in\mathbb{K}}\,(x \in S \Rightarrow \alpha x \in S)$.

Note-se que na caracterização anterior, a condição S$_2$) pode ser substituída por $0_V \in S$.

Assim, assumindo que V_t é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$, tem-se $(0, 0, 0) \in V_t$, pelo que

$$(0, 0, 0) = (1-t, (3-t)x, t^2-1)$$

para algum $x \in \mathbb{R}$. Da igualdade anterior resulta que $t = 1$.

Verifiquemos se $V_1 = \{(0, 2x, 0) \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{R}\}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$. Ora, por definição de V_1, é imediato que $V_1 \subseteq \mathbb{R}^3$. Além disso, verificam-se as seguintes condições:

S$_1$) O conjunto V_1 é não vazio, pois $(0, 0, 0) \in V_1$.

S$_2$) Para quaisquer $a, b \in V_1$, tem-se $a = (0, 2x, 0)$ e $b = (0, 2y, 0)$, para alguns $x, y \in \mathbb{R}$. Então $a + b \in \mathbb{R}^3$ e

$$a + b = (0, 2x + 2y, 0) = (0, 2(x + y), 0), \text{ com } x + y \in \mathbb{R}.$$

Logo, $a + b \in V_1$.

S$_3$) Para qualquer $a \in V_1$, tem-se $a = (0, 2x, 0)$ para algum $x \in \mathbb{R}$. Logo, para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha a \in \mathbb{R}^3$ e

$$\alpha a = (0, \alpha(2x), 0) = (0, 2(\alpha x), 0), \text{ com } \alpha x \in \mathbb{R}.$$

Portanto, $\alpha a \in V_1$.

De S$_1$), S$_2$) e S$_3$) conclui-se que V_1 é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

Logo, V_t é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ se e só se $t = 1$.

Exercício 3.6

Considere os seguintes subespaços vetoriais do espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$:

$$V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\},$$
$$V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y + z = 0, y - z = 0\},$$
$$V_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y = 0, z = 0\}.$$

(a) Mostre que

i. $V_2 = \{(b, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 : b \in \mathbb{R}\}$.

ii. $V_3 = \{(2a, a, 0) \in \mathbb{R}^3 : a \in \mathbb{R}\}$.

(b) Diga, justificando, se:

i. $(7,1,-2) \in V_3 + V_2$.
ii. $V_1 \subseteq V_2$, $V_2 \subseteq V_1$, $V_2 \subseteq V_3$, $V_3 \subseteq V_2$.
iii. $V_1 \cap V_3$, $V_2 + V_3$, $V_1 \cup V_2$, $V_2 \cup V_3$ são subespaços vetoriais do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$.
iv. $\mathbb{R}^3$ é soma direta de V_1 e V_3.
v. $\mathbb{R}^3$ é soma direta de V_2 e V_3.

Resolução:

(a) i. Tem-se

$$\begin{aligned} V_2 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y+z=0, y-z=0\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y=-z, y=z\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y=z=0\} \\ &= \{(x,0,0) \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

(a) ii. Tem-se

$$\begin{aligned} V_3 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x-2y=0, z=0\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x=2y, z=0\} \\ &= \{(2y,y,0) \in \mathbb{R}^3 : y \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

(b) i. Por definição de soma de subespaços vetoriais de um mesmo espaço vetorial V, temos

$$\begin{aligned} V_3 + V_2 &= \{u+v : u \in V_3 \text{ e } v \in V_2\} \\ &= \{(b,0,0) + (2a,a,0) : a,b \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(2a+b,a,0) : a,b \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Assim, $(7,1,-2) \in V_3 + V_2$ se e só se existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que

$$(7,1,-2) = (2a+b,a,0).$$

Claramente, $(7,1,-2) \neq (2a+b,a,0)$, para todos $a, b \in \mathbb{R}$. Logo, $a+b \notin V_3 + V_2$.

(b) ii. Temos $(1,1,0) \in V_1$ e $(1,1,0) \notin V_2$. Logo $V_1 \nsubseteq V_2$.

Seja $a = (x,y,z) \in V_2$. Então $(x,y,z) = (b,0,0)$, para algum $b \in \mathbb{R}$, pelo que $z = 0$. Logo, $a \in V_1$. Portanto, $V_2 \subseteq V_1$.

Tem-se $(1,0,0) \in V_2$ e $(1,0,0) \notin V_3$, pois $1 \neq 2 \times 0$. Portanto, $V_2 \nsubseteq V_3$.

Tem-se $(2,1,0) \in V_3$ e $(2,1,0) \notin V_3$. Logo $V_3 \nsubseteq V_2$.

(b) iii. A interseção de subespaços vetoriais de um espaço vetorial V é também um subespaço vetorial de V. Logo, como V_1 e V_3 são subespaços vetoriais do espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$, $V_1 \cap V_3$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

A soma de subespaços vetoriais de um espaço vetorial V é também um subespaço vetorial de V. Logo, como V_2 e V_3 são subespaços vetoriais do espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$, $V_2 + V_3$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

A união de subespaços vetoriais de um espaço vetorial V é um subespaço vetorial de V se e só se um dos subespaços estiver contido no outro. Como $V_2 \subseteq V_1$, então $V_1 \cup V_2$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$. Uma vez que $V_3 \nsubseteq V_2$ e $V_2 \nsubseteq V_3$, então $V_2 \cup V_3$ não é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

(b) iv. Por definição de soma direta de subespaços, $\mathbb{R}^3$ é soma direta de V_1 e V_3 se e só se $\mathbb{R}^3 = V_1 + V_3$ e $V_1 \cap V_3 = \{(0,0,0)\}$. Como $(2,1,0) \in V_1 \cap V_3$ e $(2,1,0) \neq (0,0,0)$, então $\mathbb{R}^3$ não é soma direta de V_1 e V_3.

(b) v. Por definição de soma direta de subespaços, $\mathbb{R}^3$ é soma direta de V_2 e V_3 se e só se $\mathbb{R}^3 = V_2 + V_3$ e $V_2 \cap V_3 = \{(0,0,0)\}$. Tem-se $V_2 \cap V_3 = \{(0,0,0)\}$, mas $V_2 + V_3 \neq \mathbb{R}^3$, pois existe $(7,1,-2) \in \mathbb{R}^3$ tal que $(7,1,-2) \notin V_2 + V_3$. Logo, $\mathbb{R}^3$ não é soma direta de V_2 e V_3.

Exercício 3.7

Verifique se

(a) $(1,-1)$ é combinação linear de $(3,6),(1,2),(2,4)$, no espaço vetorial real $\mathbb{R}^2$.

(b) $(1,-4,5)$ é combinação linear de $(1,-1,1),(2,1,-2)$, no espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$.

(c) $(3,0,2)$ é combinação linear de $(-1,0,1),(1,0,0),(1,0,1)$, no espaço vetorial $\mathbb{R}^3$.

(d) $(0,2,1)$ é combinação linear de $(-1,0,1),(1,0,0),(1,0,1)$, no espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$.

(e) $(1,2,0,3)$ é combinação linear de $(1,-2,0,1),(0,1,-1,1),(0,0,2,1)$, no espaço vetorial real $\mathbb{R}^4$.

(f) $(1,0,-4,2)$ é combinação linear de $(1,-2,0,1),(0,1,-1,1),(0,0,2,1)$, no espaço vetorial real $\mathbb{R}^4$.

Resolução:

(a)

$$\begin{array}{ll} & (1,-1) \text{ é combinação linear de } (3,6),(1,2),(2,4) \\ \text{sse} & \exists_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{R}} \quad (1,-1) = \alpha_1(3,6)+\alpha_2(1,2)+\alpha_3(2,4) \\ \text{sse} & \exists_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{R}} \quad (1,-1) = (3\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3, 6\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3) \\ \text{sse} & \text{o sistema } \left\{\begin{array}{l} 3\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3=1 \\ 6\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3=-1 \end{array}\right. \quad \text{é possível} \end{array}$$

Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz ampliada $[A|b]$ do sistema, temos

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 4 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[l_2 \to l_2 - 2l_1]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right]$$

Como $car([A|b]) = 2 \neq 1 = car(A)$, o sistema é impossível. Logo, $(1,-1)$ não é combinação linear de $(3,6),(1,2),(2,4)$.

(b)

$$\begin{array}{ll} & (1,-4,5) \text{ é combinação linear de } (1,-1,1),(2,1,-2) \\ \text{sse} & \exists_{\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}} \quad (1,-4,5) = \alpha_1(1,-1,1)+\alpha_2(2,1,-2) \\ \text{sse} & \exists_{\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}} \quad (1,-4,5) = (\alpha_1+2\alpha_2, -\alpha_1+\alpha_2, \alpha_1-2\alpha_2) \\ \text{sse} & \text{o sistema } \left\{\begin{array}{l} \alpha_1+2\alpha_2=1 \\ -\alpha_1+\alpha_2=-4 \\ \alpha_1-2\alpha_2=5 \end{array}\right. \quad \text{é possível} \end{array}$$

Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz ampliada $[A|b]$ do sistema, temos

$$[A|b] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{l_2 \to l_2 + l_1 \\ l_3 \to l_3 - l_1}]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -4 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow[l_3 \to l_3 + \frac{4}{3}l_2]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = [U|c]$$

Como $car([A|b]) = 2 = car(A)$, o sistema é possível. Logo, $(1,-4,5)$ é combinação linear de $(1,-1,1),(2,1,-2)$. O sistema representado por $[U|C]$ é o sistema

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha_1+2\alpha_2=1 \\ 3\alpha_2=-3 \end{array}\right.$$

e é equivalente ao sistema inicial. Deste sistema obtem-se

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha_1=3 \\ \alpha_2=-1 \end{array}\right.$$

Assim, $(1,-4,5) = 3(1,-1,1) - (2,1,-2)$.

(c)

$$
\begin{array}{ll}
 & (3,0,2) \text{ é combinação linear de } (-1,0,1),(1,0,0),(1,0,1) \\
\text{sse} & \exists_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{R}} \quad (3,0,2) = \alpha_1(-1,0,1) + \alpha_2(1,0,0) + \alpha_3(1,0,1) \\
\text{sse} & \exists_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{R}} \quad (3,0,2) = (-\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, 0, \alpha_1+\alpha_3) \\
\text{sse} & \text{o sistema} \left\{ \begin{array}{l} -\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = 3 \\ 0 = 0 \\ \alpha_1+\alpha_3 = 2 \end{array} \right. \quad \text{é possível} \\
\text{sse} & \text{o sistema} \left\{ \begin{array}{l} -\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = 3 \\ \alpha_1+\alpha_3 = 2 \end{array} \right. \quad \text{é possível}
\end{array}
$$

Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz ampliada $[A|b]$ do sistema, temos

$$
[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[l_2 \to l_2 + l_1]{} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right] = [U|c]
$$

Como $car([A|b]) = 2 = car(A)$, o sistema é possível. O sistema correspondente à matriz $[U|c]$ é

$$
\left\{ \begin{array}{l} -\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = 3 \\ \alpha_2+2\alpha_3 = 5 \end{array} \right.
$$

e é equivalente ao sistema inicial. Do sistema anterior obtem-se

$$
\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = 2-\alpha_3 \\ \alpha_2 = 5-2\alpha_3 \end{array} \right.
$$

Considerando, por exemplo, $\alpha_3 = 0$, tem-se $\alpha_1 = 2$ e $\alpha_2 = 5$. Assim,

$$
(3,0,2) = 2(-1,0,1) + 5(1,0,0) + 0(1,0,1).
$$

(d)

$$
\begin{array}{ll}
 & (0,2,1) \text{ é combinação linear de } (-1,0,1),(1,0,0),(1,0,1) \\
\text{sse} & \exists_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{R}} \quad (0,2,1) = \alpha_1(-1,0,1) + \alpha_2(1,0,0) + \alpha_3(1,0,1) \\
\text{sse} & \exists_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{R}} \quad (0,2,1) = (-\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, 0, \alpha_1+\alpha_3) \\
\text{sse} & \text{o sistema} \left\{ \begin{array}{l} -\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = 0 \\ 0 = 2 \\ \alpha_1+\alpha_3 = 1 \end{array} \right. \quad \text{é possível}
\end{array}
$$

Claramente, o sistema anterior é impossível. Logo, $(0,2,1)$ não é combinação linear de $(-1,0,1),(1,0,0),(1,0,1)$.

(e)

$$
\begin{array}{ll}
 & (1,2,0,3) \text{ é combinação linear de } (1,-2,0,1),(0,1,-1,1),(0,0,2,1) \\
\text{sse} & \exists_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{R}} \quad (1,2,0,3) = \alpha_1(1,-2,0,1)+\alpha_2(0,1,-1,1)+\alpha_3(0,0,2,1) \\
\text{sse} & \exists_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{R}} \quad (1,2,0,3) = (\alpha_1,-2\alpha_1+\alpha_2,-\alpha_2+2\alpha_3,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) \\
\text{sse} & \text{o sistema } \begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ -2\alpha_1+\alpha_2 = 2 \\ -\alpha_2+2\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = 3 \end{cases} \text{ é possível}
\end{array}
$$

Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz ampliada $[A|b]$ do sistema, temos

$$
[A|b] = \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{l_2 \to l_2+2l_1 \\ l_4 \to l_4 - l_1}]{} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{l_3 \to l_3+l_2 \\ l_4 \to l_4 - l_2}]{} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]
$$

$$
\xrightarrow[l_4 \to l_4 - \frac{1}{2}l_3]{} \left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right] = [U|c]
$$

Como $car([A|b]) = 4 \neq 3 = car(A)$, o sistema é impossível. Logo, $(1,2,0,3)$ não é combinação linear de $(1,-2,0,1),(0,1,-1,1),(0,0,2,1)$

(f)

$$
\begin{array}{ll}
 & (1,0,-4,2) \text{ é combinação linear de } (1,-2,0,1),(0,1,-1,1),(0,0,2,1) \\
\text{sse} & \exists_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{R}} \quad (1,0,-4,2) = \alpha_1(1,-2,0,1)+\alpha_2(0,1,-1,1)+\alpha_3(0,0,2,1) \\
\text{sse} & \exists_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{R}} \quad (1,0,-4,2) = (\alpha_1,-2\alpha_1+\alpha_2,-\alpha_2+2\alpha_3,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) \\
\text{sse} & \text{o sistema } \begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ -2\alpha_1+\alpha_2 = 0 \\ -\alpha_2+2\alpha_3 = -4 \\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = 2 \end{cases} \text{ é possível}
\end{array}
$$

Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz ampliada $[A|b]$ do sistema, temos

$$
[A|b] = \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{l_2 \to l_2+2l_1 \\ l_4 \to l_4 - l_1}]{} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{l_3 \to l_3+l_2 \\ l_4 \to l_4 - l_2}]{} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]
$$

$$
\xrightarrow[l_4 \to l_4 - \frac{1}{2}l_3]{} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = [U|c]
$$

Como $car(A) = 3 = car([A|b])$ o sistema é possível. O sistema correspondente à matriz $[U|c]$ é

$$
\begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = 2 \\ 2\alpha_3 = -2 \end{cases}
$$

e é equivalente ao sistema inicial. Do sistema anterior obtem-se

$$
\begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = 2 \\ \alpha_3 = -1 \end{cases}
$$

Assim, $(1,0,-4,2) = 1(1,-2,0,1)+2(0,1,-1,1)+(-1)(0,0,2,1)$.

Exercício 3.8

Em cada um dos espaços vetoriais V a seguir indicados, determine o subespaço vetorial de V gerado por S.

(a) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(1,1,1)\}$.

(b) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(0,0,0)\}$.

(c) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$.

(d) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(1,2,3),(-2,-4,-6),(4,8,12)\}$.

(e) $V = \mathbb{R}^4$, $S = \{(1,0,0,0),(1,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,1,1)\}$.

(f) $V = \mathbb{R}^4$, $S = \{(2,1,0,0),(2,0,2,0),(3,1,1,0)\}$.

Resolução:

(a) Dados um espaço vetorial V e um suconjunto S de V, o subespaço vetorial gerado por S é o espaço formado por todas as combinações lineares de elementos de S. Assim, temos

$$< (1,1,1) >= \{x(1,1,1) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x \in \mathbb{R}\}.$$

Logo, dado $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{array}{lll} (a,b,c) \in < (1,1,1) > & \text{sse} & \text{existe } x \in \mathbb{R} \text{ tal que } (a,b,c) = x(1,1,1) \\ & \text{sse} & \text{o sistema } \begin{cases} x = a \\ x = b \\ x = c \end{cases} \text{ é possível.} \end{array}$$

Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz ampliada $[A|u]$ do sistema, temos

$$[A|u] = \left[\begin{array}{c|c} 1 & a \\ 1 & b \\ 1 & c \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{l_2 \to l_2 - l_1 \\ l_3 \to l_3 - l_1}]{} \left[\begin{array}{c|r} 1 & a \\ 0 & b-a \\ 0 & c-a \end{array}\right].$$

O sistema é possível sse $car(A) = car([A|u])$. Por conseguinte, o sistema é possível sse $b-a=0$ e $c-a=0$. Assim,

$$< (1,1,1) >= \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \,|\, b-a=0 \text{ e } c-a=0\}.$$

(b) Dados um espaço vetorial V e um suconjunto S de V, o subespaço vetorial gerado por S é o espaço formado por todas as combinações lineares de elementos de S. Assim, temos

$$< (0,0,0) >= \{x(0,0,0) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x \in \mathbb{R}\} = \{(0,0,0)\}.$$

(c) Dados um espaço vetorial V e um suconjunto S de V, o subespaço vetorial gerado por S é o espaço formado por todas as combinações lineares de elementos de S. Assim, temos

$$\begin{array}{rcl} < (1,0,0),(0,1,0),(0,0,1) > & = & \{x(1,0,0)+y(0,1,0)+z(0,0,1) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x,y,z \in \mathbb{R}\} \\ & = & \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x,y,z \in \mathbb{R}\} \\ & = & \mathbb{R}^3. \end{array}$$

(d) Dados um espaço vetorial V e um suconjunto S de V, o subespaço vetorial gerado por S é o espaço formado por todas as combinações lineares de elementos de S. Assim, temos

$$\begin{array}{ll} < (1,2,3),(-2,-4,-6),(4,8,12) > & \\ =< (1,2,3),(-2,-4,-6 > & \text{(pois } (4,8,12) = 4.(1,2,3)) \\ =< (1,2,3) > & \text{(pois } (-2,-4,-6) = -2.(1,2,3)) \\ = \{x(1,2,3) \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{R}\} & \\ = \{(x,2x,3x) \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{R}\} & \end{array}$$

Logo, dado $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$,

$(a,b,c) \in < (1,2,3) >$

sse existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $(a,b,c) = x(1,2,3)$

sse existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $(a,b,c) = (x,2x,3x)$

sse o sistema $\begin{cases} x = a \\ 2x = b \\ 3x = c \end{cases}$ é possível.

Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz ampliada $[A|u]$ do sistema, temos

$$[A|u] = \left[\begin{array}{c|c} 1 & a \\ 2 & b \\ 3 & c \end{array}\right] \xrightarrow[l_2 \to l_2 - 3l_1]{l_2 \to l_2 - 2l_1} \left[\begin{array}{c|r} 1 & a \\ 0 & b-2a \\ 0 & c-3a \end{array}\right].$$

O sistema é possível sse $car(A) = car([A|u])$. Por conseguinte, o sistema é possível sse $b-2a=0$ e $c-3a=0$. Assim,

$$< (1,2,3), (-2,-4,-6), (4,8,12) > = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid b-2a=0 \text{ e } c-3a=0\}.$$

(e) Dado $(a_1,a_2,a_3,a_4) \in \mathbb{R}^4$, tem-se $(a_1,a_2,a_3,a_4) \in < S >$ se e só se existem $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ tais que

$$a(1,0,0,0) + b(1,1,0,0) + c(0,0,1,0) + d(0,0,1,1) = (a_1,a_2,a_3,a_4);$$

i.e., se e só se o sistema seguinte é possível

$$\begin{cases} a+b = a_1 \\ b = a_2 \\ c+d = a_3 \\ d = a_4 \end{cases}$$

Aplicando o método de eliminação de Gauss-Jordan à matriz ampliada do sistema, tem-se

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_4 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{l_1 \leftarrow l_1 - l_2 \\ l_3 \leftarrow l_3 - l_4}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & a_1 - a_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a_3 - a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_4 \end{array}\right]$$

O sistema anterior é possível, para quaisquer $a_1,a_2,a_3,a_4 \in \mathbb{R}$. Assim, $\langle S \rangle = \mathbb{R}^4$.

(f) Dado $(a_1,a_2,a_3,a_4) \in \mathbb{R}^4$, tem-se $(a_1,a_2,a_3,a_4) \in < S >$ se e só se existem $a,b,c \in \mathbb{R}$ tais que

$$a(2,1,0,0) + b(2,0,2,0) + c(3,1,1,0) = (a_1,a_2,a_3,a_4);$$

i.e., se e só se o sistema seguinte é possível

$$\begin{cases} 2a+2b+3c = a_1 \\ a+c = a_2 \\ 2b+c = a_3 \\ 0 = a_4 \end{cases}$$

Aplicando o método de eliminação de Gauss-Jordan à matriz ampliada do sistema, tem-se

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 3 & a_1 \\ 1 & 0 & 1 & a_2 \\ 0 & 2 & 1 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{array}\right] \xrightarrow{L1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{a_1}{2} \\ 1 & 0 & 1 & a_2 \\ 0 & 2 & 1 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L2 \leftarrow L_2 - L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{a_1}{2} \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} & a_2 - \frac{a_1}{2} \\ 0 & 2 & 1 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{array}\right] \xrightarrow[L_1 \leftarrow L_1 + L_2]{L3 \leftarrow L_3 + 2L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a_2 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} & a_2 + a_1 \\ 0 & 0 & 0 & -a_1 + 2a_2 + a_3 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{L2 \leftarrow -L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a_2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -a_2 - a_1 \\ 0 & 0 & 0 & -a_1 + 2a_2 + a_3 \\ 0 & 0 & 0 & a_4 \end{array}\right]$$

O sistema anterior é possível se e só se $-a_1 + 2a_2 + a_3 = 0$ e $a_4 = 0$. Assim,

$$< S >= \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid -a + 2b + c = 0, d = 0\}.$$

Exercício 3.9

Considere o espaço vetorial complexo $\mathbb{R}^3$. Mostre que

(a) $\{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ é um conjunto gerador de $\mathbb{R}^3$.

(b) $\{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 1, 1)\}$ é um conjunto gerador de $\mathbb{R}^3$.

(c) $\{(1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ não é um conjunto gerador de $\mathbb{R}^3$.

Resolução:

(a) O conjunto $\{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ é gerador de $\mathbb{R}^3$ se

$$< (1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0) >= \mathbb{R}^3.$$

Representemos por S o subespaço $< (1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0) >$. Uma vez que $(1, 1, 1)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 0)$ são elementos de $\mathbb{R}^3$, é imediato que $S \subseteq \mathbb{R}^3$, pois S é o menor subespaço de $\mathbb{R}^3$ que contem $\{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$. Assim, resta provar que $\mathbb{R}^3 \subseteq S$.

Dado $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, tem-se

$(a, b, c) \in< (1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0) >$

sse existem $x, y, z \in \mathbb{R}$ tais que $(a, b, c) = x(1, 1, 1) + y(1, 1, 0) + z(1, 0, 0)$

sse existem $x, y, z \in \mathbb{R}$ tais que $(a, b, c) = (x + y + z, x + y, x)$

sse o sistema $\begin{cases} x + y + z = a \\ x + y + 0z = b \\ x + 0y + 0z = c \end{cases}$ é possível.

Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz ampliada $[A|u]$ do sistema, temos

$$[A|u] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 0 & b \\ 1 & 0 & 0 & c \end{array}\right] \xrightarrow[l_3 \to l_3 - l_1]{l_2 \to l_2 - l_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & -1 & b - a \\ 0 & -1 & -1 & c - a \end{array}\right] \xrightarrow{l_2 \leftrightarrow l_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & -1 & c - a \\ 0 & 0 & -1 & b - a \end{array}\right].$$

O sistema é possível sse $car(A) = car([A|u])$. Neste caso, tem-se $car(A) = car([A|u])$, para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$; logo o sistema é sempre possível Assim, para qualquer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, tem-se $(a, b, c) \in S$. Logo, $\mathbb{R}^3 \subseteq S$.

Provámos que $S = \mathbb{R}^3$ e, portanto, o conjunto $\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ é gerador de $\mathbb{R}^3$.

(b) O conjunto $\{(1,0,1),(1,1,0),(0,1,1),(1,1,1)\}$ é gerador de $\mathbb{R}^3$ se

$$< (1,0,1),(1,1,0),(0,1,1),(1,1,1) >= \mathbb{R}^3.$$

Representemos por S o subespaço $< (1,0,1),(1,1,0),(0,1,1),(1,1,1) >$. Uma vez que $(1,0,1)$, $(1,1,0)$, $(0,1,1)$, $(1,1,1)$ são elementos de $\mathbb{R}^3$, então é imediato que $S \subseteq \mathbb{R}^3$, pois S é o menor subespaço de $\mathbb{R}^3$ que contem $\{1,0,1),(1,1,0),(0,1,1),(1,1,1)\}$. Assim, resta provar que $\mathbb{R}^3 \subseteq S$.

Dado $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, tem-se

$(a,b,c) \in < (1,0,1),(1,1,0),(0,1,1),(1,1,1) >$

sse existem $x,y,z,w \in \mathbb{R}$ tais que $(a,b,c) = x(1,0,1) + y(1,1,0) + z(0,1,1) + w(1,1,1)$

sse existem $x,y,z,w \in \mathbb{R}$ tais que $(a,b,c) = (x+y+w, y+z+w, x+z+w)$

sse o sistema $\begin{cases} x+y+0z+w = a \\ 0x+y+z+w = b \\ x+0y+z+w = c \end{cases}$ é possível.

Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz ampliada $[A|u]$ do sistema, temos

$$[A|u] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & 1 & b \\ 1 & 0 & 1 & 1 & c \end{array}\right] \xrightarrow[l_3 \to l_3 - l_1]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & 1 & b \\ 0 & -1 & 1 & 0 & c-a \end{array}\right] \xrightarrow[l_3 \to l_3 + l_2]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 2 & 1 & c-a+b \end{array}\right].$$

O sistema é possível sse $car(A) = car([A|u])$. Neste caso, tem-se $car(A) = car([A|u])$, para quaisquer $a,b,c \in \mathbb{R}$; logo o sistema é sempre possível. Assim, para qualquer $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, tem-se $(a,b,c) \in S$ e, portanto, $\mathbb{R}^3 \subseteq S$.

Provámos que $S = \mathbb{R}^3$, ou seja, mostrámos que o conjunto $\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ é gerador de $\mathbb{R}^3$.

(c) O conjunto $\{(1,1,0),(0,0,1)\}$ é gerador de $\mathbb{R}^3$ se

$$< (1,1,0),(0,0,1) >= \mathbb{R}^3.$$

Tem-se

$$\begin{aligned} < (1,1,0),(0,0,1) > &= \{x(1,1,0) + y(0,0,1) \in \mathbb{R}^3 : x,y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x,x,y) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x,y \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Como $(1,2,1) \in \mathbb{R}^3$ e $(1,2,1) \notin \{(x,x,y) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x,y \in \mathbb{R}\}$, então

$$< (1,1,0),(0,0,1) >\neq \mathbb{R}^3.$$

Logo, $\{(1,1,0),(0,0,1)\}$ não é um conjunto gerador de $\mathbb{R}^3$.

Exercício 3.10

Determine dois conjuntos distintos de geradores de cada um dos seguintes subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^4$:

(a) $\mathbb{R}^4$.

(b) $\{(a, c-a, c, 2c) \in \mathbb{R}^4 \,|\, a,c \in \mathbb{R}\}$.

(c) $\{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \,|\, a+c = 0, 2b+d+c = 0\}$.

Resolução:

(a) O conjunto $\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0)(0,0,0,1)\}$ é gerador de $\mathbb{R}^4$, pois

$$\begin{aligned}&< (1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0)(0,0,0,1) >\\ &= \{x(1,0,0,0)+y(0,1,0,0)+z(0,0,1,0)+w(0,0,0,1)\,|\,x,y,z,w\in\mathbb{R}\}\\ &= \{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}\,|\,x,y,z,w\in\mathbb{R}\}\\ &= \mathbb{R}^4.\end{aligned}$$

Seja $v=(1,2,0,4)$. Como

$$v = 1(1,0,0,0)+2(0,1,0,0)+0(0,0,1,0)+4(0,0,0,1)$$

e a coordenada em v relativa a $(0,0,0,1)$ é diferente de zero, então

$$\begin{aligned}&< (1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1) >\\ = &< (1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(1,2,0,4) > .\end{aligned}$$

Logo, $\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(1,2,0,4)\}$ é um conjunto gerador de $\mathbb{R}^4$.

(b) Seja $S=\{(a,c-a,c,2c)\in\mathbb{R}^4\,|\,a,c\in\mathbb{R}\}$. Tem-se

$$\begin{aligned}\{(a,c-a,c,2c)\in\mathbb{R}^4\,|\,a,c\in\mathbb{R}\} &= \{a(1,-1,0,0)+c(0,1,1,2)\,|\,a,c\in\mathbb{R}\}\\ &= < (1,-1,0,0),(0,1,1,2) > .\end{aligned}$$

Logo, $\{(1,-1,0,0),(0,1,1,2)\}$ é um conjunto gerador de S.

Seja $v=(2,-1,1,2)$. Como

$$v = 2(1,-1,0,0)+1(0,1,1,2)$$

e a coordenada em v relativa a $(1,-1,0,0)$ é diferente de zero, então

$$< (1,-1,0,0),(0,1,1,2) >=< (2,-1,1,2),(0,1,1,2) > .$$

Assim, $\{(2,-1,1,2),(0,1,1,2)\}$ também é um conjunto gerador de S.

(c) Seja $S=\{(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4 : a+c=0, 2b+d+c=0\}$. Tem-se

$$\begin{aligned}&\{(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4 : a+c=0, 2b+d+c=0\}\\ &= \{(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4 : a=-c, d=-c-2b\}\\ &= \{(-c,b,c,-c-2b)\in\mathbb{R}^4 : a=-c, d=-c-2b\}\\ &= \{b(0,1,0,-2)+c(-1,0,1,-1) : b,c\in\mathbb{R}\}\\ &=< (0,1,0,-2),(-1,0,1,-1) > .\end{aligned}$$

Logo, $\{(0,1,0,-2),(-1,0,1,-1)\}$ é um conjunto gerador de S.

Seja $v=(-3,2,3,-7)$. Como

$$v = 2(0,1,0,-2)+3(-1,0,1,-1)$$

e a coordenada em v relativa a $(-1,0,1,-1)$ é diferente de zero, então

$$< (0,1,0,-2),(-1,0,1,-1) >=< (0,1,0,-2),(-3,2,3,-7) > .$$

Assim, $\{(0,1,0,-2),(-3,2,3,-7)\}$ também é um conjunto gerador de S.

Exercício 3.11

Seja $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x=2y\}$.

(a) Indique vetores $u,v\in\mathbb{R}^3$ tais que $u\in F$ e $v\notin F$.

(b) Mostre que F é um subespaço de $\mathbb{R}^3$ indicando um conjunto gerador de $\mathbb{R}^3$.

(c) Diga, justificando, se $F =< (6,3,0), (-2,-1,5), (0,0,3) >$.

Resolução:

(a) Seja $u = (x_1, x_2, x_3) = (2, 1, 0)$. Como $u \in \mathbb{R}^3$ e $x_1 = 2 = 2 \times 1 = 2x_2$, então $u \in F$.

Seja $v = (y_1, y_2, y_3) = (1, 1, 0)$. Uma vez que $y_1 \neq 2y_2$, então $v \notin F$.

(b) Considerando que

$$\begin{aligned} F &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 2y\} \\ &= \{(2y,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y,z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y(2,1,0) + z(0,0,1) \in \mathbb{R}^3 : y,z \in \mathbb{R}\} \\ &= < (2,1,0), (0,0,1) >, \end{aligned}$$

então F é o menor subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ que contem $\{(2,1,0), (0,0,1)\}$ e $\{(2,1,0), (0,0,1)\}$ é um conjunto gerador de F.

Resolução alternativa:

Comecemos por provar que F é um subespaço de $\mathbb{R}^3$. Por definição de F, tem-se $F \subseteq \mathbb{R}^3$. Além disso, veirifca-se o seguinte:

(1) $F \neq \emptyset$, uma vez que $(0,0,0) \in F$.

(2) Para quaisquer $a = (x_1, x_2, x_3), b = (y_1, y_2, y_3) \in F$, tem-se $a, b \in \mathbb{R}^3$ e $x_1 = 2x_2$ e $y_1 = 2y_2$.
Como $a, b \in \mathbb{R}^3$, segue que $a + b = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) \in \mathbb{R}^3$. Também se tem

$$x_1 + y_1 = 2x_2 + 2y_2 = 2(x_2 + y_2)$$

e, portanto, $a + b \in F$.

(3) Para quaisquer $a = (x_1, x_2, x_3) \in F$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, tem-se $a \in \mathbb{R}^3$ e $x_1 = 2x_2$.

Como $a \in \mathbb{R}^3$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, segue que $\alpha a = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3) \in \mathbb{R}^3$. Também se tem

$$\alpha x_1 = \alpha(2x_2) = 2(\alpha x_2).$$

Portanto, $\alpha a \in F$.

De (1),(2),(3),(4) conclui-se que F é um subespaço vetorial do espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$.

Determinemos um conjunto gerador de $\mathbb{R}^3$.

Considerando que

$$\begin{aligned} F &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 2y\} \\ &= \{(2y,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y,z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y(2,1,0) + z(0,0,1) \in \mathbb{R}^3 : y,z \in \mathbb{R}\} \\ &= < (2,1,0), (0,0,1) >, \end{aligned}$$

então $\{(2,1,0), (0,0,1)\}$ é um conjunto gerador de F.

(c) Da alínea anterior, temos

$$F =< (2,1,0), (0,0,1) > .$$

Como $(6,3,0) = 3(2,1,0) + 0(0,0,1)$ e a coordenada relativa a $(2,1,0)$ é não nula, então

$$F =< (6,3,0), (0,0,1) > .$$

Considerando que $(0,0,3) = 0(6,3,0) + 3(0,0,1)$ e a coordenada relativa a $(0,0,1)$ é não nula, temos

$$F =< (6,3,0), (0,0,3) > .$$

Uma vez que $(-2,-1,5) = -\frac{1}{3}(6,3,0) + \frac{5}{3}(0,0,1)$, segue que

$$F =< (6,3,0),(0,0,3),(-2,-1,5) > .$$

Resolução alternativa 1:

Seja $S =< (6,3,0),(-2,-1,5),(0,0,3) >$. Como $(6,3,0)$, $(2,-1,5)$ e $(0,0,3)$ são elementos de F e S é o menor subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ que contem $\{(6,3,0),(-2,-1,5),(0,0,3)\}$, então $S \subseteq F$. Assim, resta provar que $F \subseteq S$. Ora, considerando que $(2,1,0)$ e $(0,0,1)$ são elementos de S, pois

$$\begin{aligned}(2,1,0) &= \tfrac{1}{3}(6,3,0) + 0(-2,-1,5) + 0(0,0,3),\\ (0,0,1) &= 0(6,3,0) + 0(-2,-1,5) + \tfrac{1}{3}(0,0,3),\end{aligned}$$

e $F =< (2,1,0),(0,0,1) >$ é o menor subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ que contem $\{(2,1,0),(0,0,1)\}$, concluímos que $F \subseteq S$.

Portanto, $F =< (6,3,0),(-2,-1,5),(0,0,3) >$.

Resolução alternativa 2:

Seja $S =< (6,3,0),(-2,-1,5),(0,0,3) >$. Como $(6,3,0)$, $(2,-1,5)$ e $(0,0,3)$ são elementos de F e S é o menor subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ que contem $\{(6,3,0),(-2,-1,5),(0,0,3)\}$, então $S \subseteq F$.

Resta provar que $F \subseteq S$. Dado $(x,y,z) \in F$, tem-se $(x,y,z) = (2a,a,c)$ para alguns $a,c \in \mathbb{R}$. Por outro lado, dado $(2a,a,c) \in F$,

$(2a,a,c) \in< (6,3,0),(-2,-1,5),(0,0,3) >$

sse existem $x,y,z \in \mathbb{R}$, $(2a,a,c) = x(6,3,0) + y(-2,-1,5) + z(0,0,3)$

sse existem $x,y,z \in \mathbb{R}$, $(2a,a,c) = (6x-2y, 3x-y, 5y+3z)$

sse o sistema $\begin{cases} 6x-2y+0z = 2a \\ 3x-y+0z = a \\ 0x+5y+3z = c \end{cases}$ é possível.

Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz ampliada $[A|b]$ do sistema tem-se

$$[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 6 & -2 & 0 & 2a \\ 3 & -1 & 0 & a \\ 0 & 5 & 3 & c \end{array}\right] \xrightarrow[l_2 \to l_2 - \frac{1}{2}l_1]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 6 & -2 & 0 & 2a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & c \end{array}\right] \xrightarrow[l_2 \leftrightarrow l_3]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 6 & -2 & 0 & 2a \\ 0 & 5 & 3 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

O sistema é possível sse $car(A) = car([A|b])$. Neste caso, tem-se $car(A) = car([A|b])$, para quaisquer $a,c \in \mathbb{R}$; logo o sistema é sempre possível. Assim, para qualquer $(2a,a,c) \in F$, tem-se $(2a,a,c) \in S$ e, portanto, $F \subseteq S$.

Logo, $S = F$.

Exercício 3.12

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e u_1,u_2,u_3 vetores do espaço vetorial real $\mathbb{R}^n$. Justifique que:

(a) $< u_1,u_2,u_3 >=< u_1, u_1+u_2, u_1+u_2+u_3 >$.

(b) $< u_1,u_2,u_3 >=< -u_3, -u_1+u_2, 2u_2+u_3 >$.

Resolução:

(a) Seja $v = u_1+u_2+u_3$. Uma vez que em v a coordenada respeitante a u_3 é não nula, tem-se

$$< u_1,u_2,u_3 >=< u_1,u_2,v > .$$

Consideremos, agora, $w = u_1 + u_2$. Atendendo a que $w = u_1 + u_2 + 0v$ e em w a coordenada respeitante a u_2 é não nula, tem-se
$$< u_1, u_2, v > = < u_1, w, v > .$$
Logo, $< u_1, u_2, u_3 > = < u_1, u_1 + u_2, u_1 + u_2 + u_3 >$.

Resolução alternativa:

No sentido de provar a igualdade $< u_1, u_2, u_3 > = < u_1, u_1 + u_2, u_1 + u_2 + u_3 >$, vamos mostrar que
$$< u_1, u_2, u_3 > \subseteq < u_1, u_1 + u_2, u_1 + u_2 + u_3 >$$
e
$$< u_1, u_1 + u_2, u_1 + u_2 + u_3 > \subseteq < u_1, u_2, u_3 > .$$
Considerando que

- $u_1 = 1u_1 + 0(u_1 + 1_2) + 0(u_1 + u_2 + u_3)$,
- $u_2 = (-1)u_1 + 1(u_1 + u_2) + 0(u_1 + u_2 + u_3)$,
- $u_3 = 0u_1 + (-1)(u_1 + u_2) + 1(u_1 + u_2 + u_3)$,

tem-se $u_1, u_2, u_3 \in < u_1, u_1 + u_2, u_1 + u_2 + u_3 >$. Logo, como $< u_1, u_2, u_3 >$ é o menor subespaço de V que contem $\{u_1, u_2, u_3\}$ segue que
$$< u_1, u_2, u_3 > \subseteq < u_1, u_1 + u_2, u_1 + u_2 + u_3 > .$$
Por outro lado, como

- $u_1 = 1u_1 + 0u_2 + 0u_3$,
- $u_1 + u_2 = 1u_1 + 1u_2 + 0u_3$,
- $u_1 + u_2 + u_3 = 1u_1 + 1u_2 + 1u_3$,

tem-se $u_1, u_1 + u_2, u_1 + u_2 + u_3 \in < u_1, u_2, u_3 >$. Então, considerando que
$$< u_1, u_1 + u_2, u_1 + u_2 + u_3 >$$
é o menor subespaço de V que contem $\{u_1, u_1 + u_2, u_1 + u_2 + u_3\}$, segue que
$$< u_1, u_1 + u_2, u_1 + u_2 + u_3 > \subseteq < u_1, u_2, u_3 > .$$
Logo, $< u_1, u_2, u_3 > = < u_1, u_1 + u_2, u_1 + u_2 + u_3 >$.

(b) Claramente,
$$< u_1, u_2, u_3 > = < u_3, u_1, u_2 > .$$
Seja $v = u_3 + 2u_2 = u_3 + 0u_1 + 2u_2$. Como em v a coordenada respeitante a u_2 é não nula, então
$$< u_3, u_1, u_2 > = < u_3, u_1, v > .$$
Considerando que $w = -u_1 + u_2 = (-\frac{1}{2})u_3 + (-1)u_1 + \frac{1}{2}v$ e a coordenada respeitante a u_1 é não nula, temos
$$< u_3, u_1, v > = < u_3, w, v > .$$
Uma vez que $t = -u_3 = (-1)u_3 + 0w + 0v$ e a coordenada de u_3 em t é não nula, segue que
$$< u_3, w, v > = < t, w, v > .$$
Logo, $< u_1, u_2, u_3 > = < -u_3, -u_1 + u_2, 2u_2 + u_3 >$.

Exercício 3.13

No espaço vetorial real $\mathbb{R}^4$, sejam $v_1 = (1,0,0,-1)$, $v_2 = (1,-2,0,1)$, $v_3 = (0,1,0,-1)$ e $W = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$. Indique, caso exista:

(a) um conjunto gerador de W que tenha exatamente 4 vetores.

(b) um conjunto $\{w_1, w_2, w_3\}$ que gere W e tal que $w_j \neq v_1$, $\forall\, j \in \{1,2,3\}$.

(c) um conjunto gerador de W que tenha exatamente 2 vetores.

Resolução:

(a) Seja $v = v_1 + v_2 + v_3$. Então $v \notin \{v_1, v_2, v_3\}$ e tem-se

$$< v_1, v_2, v_3 > = < v_1, v_2, v_3, v > .$$

Logo, $\{v_1, v_2, v_3, v\}$ é um conjunto gerador de W com 4 vetores distintos.

(b) Seja $v = v_1 + v_2 + v_3$. Então $v \neq v_1$. Como a coordenada de v_1 em v é não nula, tem-se

$$< v_1, v_2, v_3 > = < v, v_2, v_3 > .$$

Logo, $\{v, v_2, v_3\}$ é um conjunto gerador de W nas condições indicadas.

(c) Como $v_2 = v_1 - 2v_3$, então

$$< v_1, v_2, v_3 > = < v_1, v_3 > .$$

Logo, $\{v_1, v_3\}$ é um conjunto gerador de W com 2 vetores distintos.

Exercício 3.14

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$. Mostre que; Mostre que:

(a) Se $X \subseteq Y$, então $\langle X \rangle \subseteq \langle Y \rangle$.

(b) $\langle X \cup Y \rangle = \langle X \rangle + \langle Y \rangle$.

Resolução:

(a) Admitamos que $X \subseteq Y$. Então, como $Y \subseteq < Y >$, segue que $X \subseteq < Y >$. Assim, considerando que $< X >$ é o menor subespaço de V que contém X, conclui-se que $< X > \subseteq < Y >$.

(b) Tem-se $X \subseteq < X > + < Y >$ e $Y \subseteq < X > + < Y >$. Logo, $X \cup Y \subseteq < X > + < Y >$. Considerando que $< X \cup Y >$ é o menor subespaço de V que contém $X \cup Y$, então $< X \cup Y > \subseteq < X > + < Y >$. Mostremos, agora, que $< X > + < Y > \subseteq < X \cup Y >$. Atendendo a que $X \subseteq X \cup Y$ e $X \cup Y \subseteq < X \cup Y >$, conclui-se que $< X > \subseteq < X \cup Y >$, pois $< X >$ é o menor supespaço de V que contém X. De modo análogo prova-se que $< Y > \subseteq < X \cup Y >$. Então, dado $v \in < X > + < Y >$, resulta que $v \in < X \cup Y >$. De facto, se $v \in < X > + < Y >$, tem-se $v = a + b$ com $a \in < X >$ e $b \in < Y >$. Consequentemente $a, b \in < X \cup Y >$, donde segue que $a + b \in < X \cup Y >$, pois $< X \cup Y >$ é um subespaço de V e, portanto, fechado para a adição. Portanto, $< X > + < Y > \subseteq < X \cup Y >$.

Exercício 3.15

Diga se são linearmente independentes as sequências de vetores a seguir indicadas:

(a) $((1,0),(1,1))$ em $\mathbb{R}^2$.

(b) $((1,0),(1,1),(0,-1))$ em $\mathbb{R}^2$.

(c) $((2,0,1),(0,0,-1),(-1,1,2))$ no espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$.

(d) $((1,2,3),(-1,1,1),(2,0,1),(0,2,1))$ no espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$.

(e) $((0,1,1,0),(-1,0,1,1),(1,1,0,-1))$ no espaço vetorial real $\mathbb{R}^4$.

(f) $((1,1,1,0),(2,0,2,3),(-1,1,0,1),(1,1,0,2))$ no espaço vetorial real $\mathbb{R}^4$.

Resolução:

(a) A sequência de vetores $((1,0),(1,1))$ é linearmente independente sse, para quaisquer $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}$,

$$\alpha_1(1,0)+\alpha_2(1,1)=(0,0)\Rightarrow\alpha_1=\alpha_2=0$$

sse o sistema

$$\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2=0\\ \alpha_2=0\end{cases}$$

é determinado (note-se que o sistema é homogéneo, pelo que é possível). Resolvendo o sistema, obtem-se $\alpha_1=\alpha_2=0$ e, portanto, a sequência de vetores é linearmente independente.

(b) A sequência de vetores $((1,0),(1,1),(0,-1))$ é linearmente independente sse, para quaisquer $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{R}$,

$$\alpha_1(1,0)+\alpha_2(1,1)+\alpha_3(0,-1)=(0,0)\Rightarrow\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$$

sse o sistema

$$\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2=0\\ \alpha_2-\alpha_3=0\end{cases}$$

é determinado (note-se que o sistema é homogéneo, pelo que é possível). Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz simples do sistema, tem-se

$$[A]=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&-1\end{bmatrix}$$

Como $A\in\mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{R})$ e $car(A)=2<$ nº incógnitas, o sistema é indeterminado. Logo, a sequência $((1,0),(1,1),(0,-1))$ é linearmente dependente. Por exemplo, considerando $\alpha_2=1$, temos $\alpha_1=-1$ e $\alpha_3=1$. Logo,

$$-1(1,0)+1(1,1)+1(0,-1)=(0,0),$$

donde se obtem

$$(1,1)=1(1,0)-1(0,-1).$$

(c) A sequência de vetores $((2,0,1),(0,0,-1),(-1,1,2))$ é linearmente independente sse, para quaisquer $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{R}$,

$$\alpha_1(2,0,1)+\alpha_2(0,0,-1)+\alpha_3(-1,1,2)=(0,0,0)\Rightarrow\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$$

sse o sistema

$$\begin{cases}2\alpha_1-\alpha_3=0\\ \alpha_3=0\\ \alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3=0\end{cases}$$

é determinado (note-se que o sistema é homogéneo, pelo que é possível). Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz simples do sistema, tem-se

$$[A]=\begin{bmatrix}2&0&-1\\0&0&1\\1&-1&2\end{bmatrix}\xrightarrow[l_3\to l_3-\frac{1}{2}l_1]{}\begin{bmatrix}2&0&-1\\0&0&1\\0&-1&\frac{5}{2}\end{bmatrix}\xrightarrow[l_2\leftrightarrow l_3]{}\begin{bmatrix}2&0&-1\\0&-1&\frac{5}{2}\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

Como $A\in\mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{R})$ e $car(A)=3=$ nº incógnitas, o sistema é determinado. Logo, a sequência

$$((2,0,1),(0,0,-1),(-1,1,2))$$

é linearmente independente.

(d) A sequência de vetores $((1,2,3),(-1,1,1),(2,0,1),(0,2,1))$ é linearmente independente sse, para quaisquer $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4 \in \mathbb{R}$,

$$\alpha_1(1,2,3)+\alpha_2(-1,1,1)+\alpha_3(2,0,1)+\alpha_4(0,2,1)=(0,0,0) \Rightarrow \alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=0$$

sse o sistema

$$\begin{cases} \alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3=0 \\ 2\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_4=0 \\ 3\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=0 \end{cases}$$

é determinado (note-se que o sistema é homogéneo, pelo que é possível). Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz simples do sistema, tem-se

$$[A]=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{l_2 \to l_2-2l_1 \\ l_3 \to l_3-3l_1}]{} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 4 & -5 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3 \to l_3-\frac{4}{3}l_2]{} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \end{bmatrix}=[U].$$

Como $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ e $car(A)=3<$ n$^{\underline{o}}$ incógnitas, o sistema é indeterminado. Logo, a sequência $((2,0,1),(0,0,-1),(-1,1,2))$ é linearmente dependente. O sistema homogéneo com matriz simples U, equivalente ao sistema inicial, é o sistema

$$\begin{cases} \alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3=0 \\ 3\alpha_2-4\alpha_3+2\alpha_4=0 \\ \frac{1}{3}\alpha_3-\frac{5}{3}\alpha_4=0 \end{cases},$$

donde se obtem

$$\begin{cases} \alpha_1=-4\alpha_4 \\ \alpha_2=6\alpha_4 \\ \alpha_3=5\alpha_4 \end{cases}.$$

Considerando, por exemplo, $\alpha_4=1$, obtemos $\alpha_3=5$, $\alpha_2=6$ e $\alpha_1=-4$. Logo,

$$-4(1,2,3)+6(-1,1,1)+5(2,0,1)+1(0,2,1)=(0,0,0)$$

pelo que temos

$$(0,2,1)=4(1,2,3)-6(-1,1,1)-5(2,0,1).$$

Observação: Note-se que o sistema indicado é homogéneo e, portanto, é possível. Além disso, para avaliar se o sistema indicado é determinado ou é indeterminado, não seria necessário aplicar o método de Gauss à matriz ampliada do sistema. O sistema indicado é um sistema a 3 equações e 4 incógnitas, pelo que a característica da matriz simples do sistema é no máximo 3. Como $3<$ n$^{\underline{o}}$ incógnitas , o sistema é indeterminado.

(e) A sequência de vetores $((0,1,1,0),(-1,0,1,1),(1,1,0,-1))$ é linearmente independente sse, para quaisquer $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \in \mathbb{R}$,

$$\alpha_1(0,1,1,0)+\alpha_2(-1,0,1,1)+\alpha_3(1,1,0,-1)=(0,0,0,0) \Rightarrow \alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$$

sse o sistema

$$\begin{cases} -\alpha_2+\alpha_3=0 \\ \alpha_1+\alpha_3=0 \\ \alpha_1+\alpha_2=0 \\ \alpha_2-\alpha_3=0 \end{cases}$$

é determinado (note-se que o sistema é homogéneo, pelo que é possível). Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz simples do sistema, temos

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_1 \leftrightarrow l_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_2 \to l_2 - l_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{l_3 \to l_3 - l_2 \\ l_4 \to l_4 + l_2}]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [U].$$

Como $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ e $car(A) = 2 <$ nº incógnitas, o sistema é indeterminado. Logo, a sequência

$$((0,1,1,0), (-1,0,1,1), (1,1,0,-1))$$

é linearmente dependente. O sistema homogéneo com matriz simples U, equivalente ao sistema inicial, é o sistema

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ -\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases},$$

donde se obtem

$$\begin{cases} \alpha_1 = -\alpha_3 \\ \alpha_2 = \alpha_3 \end{cases}.$$

Considerando $\alpha_3 = 1$, obtem-se $\alpha_2 = 1$ e $\alpha_1 = -1$. Logo

$$(-1)(0,1,1,0) + 1(-1,0,1,1) + 1(1,1,0,-1) = (0,0,0,0)$$

pelo que se tem, por exemplo,

$$(1,1,0,-1) = 1(0,1,1,0) + (-1)(-1,0,1,1).$$

(f) A sequência de vetores $((1,1,1,0), (2,0,2,3), (-1,1,0,1), (1,1,0,2))$ é linearmente independente sse, para quaisquer $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$,

$$\alpha_1(1,1,1,0) + \alpha_2(2,0,2,3) + \alpha_3(-1,1,0,1) + \alpha_4(1,1,0,2) = (0,0,0,0) \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

sse o sistema

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ 3\alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 = 0 \end{cases}$$

é determinado (note-se que o sistema é homogéneo, pelo que é possível). Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz simples do sistema, tem-se

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{l_2 \to l_2 - l_1 \\ l_3 \to l_3 - l_1}]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[l_4 \to l_4 + \frac{3}{2}l_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_4 \to l_4 - 4l_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Como $A \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$ e $car(A) = 4 =$ nº incógnitas, o sistema é determinado. Logo a sequência de vetores $((1,1,1,0), (2,0,2,3), (-1,1,0,1), (1,3,0,2))$ é linearmente independente.

Exercício 3.16

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e e $v_1, ..., v_n, v_{n+1}$ elementos do espaço vetorial real $\mathbb{R}^n$ tais que a sequência $(v_1, ..., v_n)$ é linearmente independente. Diga, justificando, se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações seguintes.

(a) $(v_1, ..., v_n)$ é uma base de $\mathbb{R}^n$.

(b) A sequência de vetores $(v_1, ..., v_{i-1}, v_{i+1}, ..., v_n)$ é linearmente independente.

(c) A sequência de vetores $(v_1, ..., v_n, v_{n+1})$ é linearmente dependente.

(d) Para qualquer $\alpha \in \mathbb{K}$, a sequência de vetores $(v_1, ..., \alpha v_i, ..., v_n)$ é linearmente independente.

(e) Para qualquer $\alpha \in \mathbb{K}$, a sequência de vetores $(v_1, ..., v_{i-1}, v_i + \alpha v_j, v_{i+1}, ..., v_n)$, onde $j \neq i$, é linearmente independente.

Resolução:

(a) Num espaço vetorial V de dimensão n, qualquer sequência com n vetores que seja linearmente independente é uma base de V.

Logo, como $\dim \mathbb{R}^n = n$ e $(v_1, \ldots, v_n)$ é uma sequência de n vetores de $\mathbb{R}^n$ linearmente independente, a afirmação é verdadeira.

(b) A afirmação é verdadeira, pois, para quaisquer $\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$,

$$
\begin{aligned}
& \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_{i-1} v_{i-1} + \alpha_{i+1} v_{i+1} + \ldots + \alpha_n v_n = 0_{\mathbb{R}^n} \\
\Rightarrow\ & \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_{i-1} v_{i-1} + 0 v_i + \alpha_{i+1} v_{i+1} + \ldots + \alpha_n v_n = 0_{\mathbb{R}^n} \\
\Rightarrow\ & \alpha_1 = ... = \alpha_{i-1} = \alpha_{i+1} = ... = \alpha_n = 0. \quad ((v_1, \ldots, v_n) \text{ é linearmente independente})
\end{aligned}
$$

Logo, a sequência de vetores $(v_1, ..., v_{i-1}, v_{i+1}, ..., v_n)$ é linearmente independente.

(c) A afirmação é verdadeira, pois num espaço vetorial de dimensão n qualquer sequência com mais do que n vetores é linearmente dependente.

(d) A afirmação é falsa. Se $\alpha = 0$, tem-se $(v_1, ..., \alpha v_i, ..., v_n) = (v_1, \ldots, 0_{\mathbb{R}^n}, \ldots, v_n)$. Então, considerando que

$$0 v_1 + \cdots + 1 \cdot 0_{\mathbb{R}^n} \cdots + 0 v_n = 0_{\mathbb{R}^n}, \text{ com } 1 \neq 0,$$

conclui-se que a sequência $(v_1, \ldots, 0, \ldots, v_n)$ é linearmente dependente.

(e) A afirmação é verdadeira, pois, para quaisquer $\alpha_1, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$,

$$
\begin{aligned}
& \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_j v_j + \ldots + \alpha_i (v_i + \alpha v_j) + \ldots + \alpha_n v_n = 0_{\mathbb{R}^n} \\
\Rightarrow\ & \alpha_1 v_1 + \ldots + (\alpha_j + \alpha_i \alpha) v_j + \ldots + \alpha_i v_i + \ldots + \alpha_n v_n = 0_{\mathbb{R}^n} \\
\Rightarrow\ & \alpha_1 = ... = \alpha_j + \alpha_i \alpha = \ldots = \alpha_i = ... = \alpha_n = 0 \quad ((v_1, \ldots, v_n) \text{ é linearmente independente}) \\
\Rightarrow\ & \alpha_1 = ... = \alpha_j = \ldots = \alpha_i = ... = \alpha_n = 0
\end{aligned}
$$

Exercício 3.17

Considere, no espaço vetorial real $\mathbb{R}^4$, os subespaços

$$
\begin{aligned}
& U = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^4 : a_1 - a_4 = 0, a_4 - a_3 = 0\} \\
& W_1 = \{(b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{R}^4 : b_2 + 2b_3 = 0, b_1 + 2b_3 - b_4 = 0\} \\
& W_2 = < (1, 1, 1, 0), (-1, 1, 0, 1), (1, 3, 2, 1), (-3, 1, -1, 2) >.
\end{aligned}
$$

(a) Diga, justificando, se $((1, 1, 1, 1), (0, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 1))$ é uma base de U.

(b) Determine uma base de: i. W_1. ii. W_2.

Resolução:

(a) Sejam $u_1 = (1,1,1,1)$, $u_2 = (0,1,0,0)$, $u_3 = (1,0,0,1)$.

A sequência (u_1, u_2, u_3) é uma base de U sse $U =< (u_1, u_2, u_3 >$ e (u_1, u_2, u_3) é linearmente independente.

Ora, atendendo a que $u_3 \notin U$, então $U \neq< (u_1, u_2, u_3 >$ e, portanto, (u_1, u_2, u_3) não é uma base de U.

(b) i. Pretendemos determinar vetores $v_1, \dots, v_p$ de $\mathbb{R}^4$ tais que $W_1 =< v_1, \dots, v_p >$ e $(v_1, \dots, v_p)$ é linearmente independente.

Tem-se

$$\begin{aligned} W_1 &= \{(b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{R}^4 : b_2 + 2b_3 = 0, b_1 + 2b_3 - b_4 = 0\} \\ &= \{(b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbb{R}^4 : b_2 = -2b_3, b_1 = -2b_3 + b_4\} \\ &= \{(-2b_3 + b_4, -2b_3, b_3, b_4) \in \mathbb{R}^4 : b_3, b_4 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{b_3(-2,-2,1,0) + b_4(1,0,0,1) \in \mathbb{R}^4 : b_3, b_4 \in \mathbb{R}\} \\ &= < (-2,-2,1,0), (1,0,0,1) > . \end{aligned}$$

Verifiquemos se a sequência $((-2,-2,1,0),(1,0,0,1))$ é linearmente independente. Como, para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\alpha(-2,-2,1,0) \neq (1,0,0,1) \text{ e } \beta(1,0,0,1) \neq (-2,-2,1,0),$$

a sequência $((-2,-2,1,0),(1,0,0,1))$ é linearmente independente.

Portanto, $((-2,-2,1,0),(1,0,0,1))$ é uma base de W_1.

(b) ii. Pretendemos determinar vetores $v_1, \dots, v_p$ tais que $W_2 =< v_1, \dots, v_p >$ e $(v_1, \dots, v_p)$ é linearmente independente.

Como $W_2 =< (1,1,1,0), (-1,1,0,1), (1,3,2,1), (-3,1,-1,2) >$, resta verificar se a sequência

$$((1,1,1,0), (-1,1,0,1), (1,3,2,1), (-3,1,-1,2))$$

é linearmente independente.

Sejam $v_1 = (1,1,1,0)$, $v_2 = (-1,1,0,1)$, $v_3 = (1,3,2,1)$, $v_4 = (-3,1,-1,2)$. A sequência (v_1, v_2, v_3, v_4) é linearmente independente sse, para quaisquer α_1, α_2, α_3, $\alpha_4 \in \mathbb{R}$,

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4 = (0,0,0,0) \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$$

sse, para quaisquer α_1, α_2, α_3, $\alpha_4 \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} &(\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - 3\alpha_4, \alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 + \alpha_4, \alpha_1 + 2\alpha_3 - \alpha_4, \alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4) = (0,0,0,0) \\ &\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0 \end{aligned}$$

sse o sistema

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - 3\alpha_4 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_3 - \alpha_4 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 = 0 \end{cases}$$

é determinado (note-se que o sistema é possível, pois é um sistema homogéneo). Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz simples do sistema, temos

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{l_2 \to l_2 - l_1 \\ l_3 \to l_3 - l_1}]{} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{l_3 \to l_3 - \frac{1}{2}l_2 \\ l_4 \to l_4 - \frac{1}{2}l_2}]{} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U.$$

Uma vez que $car(A) = 2 < 4 = \text{n}^{\text{o}}$ incógnitas, o sistema é interminado. O sistema homogéneo com matriz simples U é o sistema

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - 3\alpha_4 = 0 \\ 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + 4\alpha_4 = 0 \end{cases},$$

donde se obtem

$$\begin{cases} \alpha_1 = -2\alpha_3 + \alpha_4 \\ \alpha_2 = -\alpha_3 - 2\alpha_4 \end{cases}.$$

Considerando $\alpha_3 = 1$ e $\alpha_4 = 0$, temos $\alpha_1 = -2$ e $\alpha_2 = -1$. Então

$$-2v_1 - v_2 + v_3 + 0v_4 = 0_{\mathbb{R}^4},$$

donde se obtem $v_3 = 2v_1 + v_2 + 0v_4$. Logo, $< v_1, v_2, v_3, v_4 >=< v_1, v_2, v_4 >$.

Verifiquemos, agora, se (v_1, v_2, v_4) é linearmente independente. A sequência (v_1, v_2, v_4) é linearmente independente sse, para quaisquer $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4 \in \mathbb{R}$,

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_4 v_4 = (0, 0, 0, 0) \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_4 = 0$$

sse, para quaisquer $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4 \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} &(\alpha_1 - \alpha_2 - 3\alpha_4, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4, \alpha_1 - \alpha_4, \alpha_2 + 2\alpha_4) = (0, 0, 0, 0) \\ &\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0 \end{aligned}$$

sse o sistema

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 - 3\alpha_4 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_4 = 0 \\ \alpha_2 + 2\alpha_4 = 0 \end{cases}$$

é determinado (note-se que o sistema é possível, pois é um sistema homogéneo). Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz simples do sistema, temos

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{l_2 \to l_2 - l_1 \\ l_3 \to l_3 - l_1}]{} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{l_3 \to l_3 - \frac{1}{2}l_2 \\ l_4 \to l_4 - \frac{1}{2}l_2}]{} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U.$$

Tem-se $car(A) = 2 < 3 =$ nº incógnitas, logo o sistema é interminado. O sistema homogéneo com matriz simples U é o sistema

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 - 3\alpha_4 = 0 \\ 2\alpha_2 + 4\alpha_4 = 0 \end{cases},$$

donde se obtem

$$\begin{cases} \alpha_1 = \alpha_4 \\ \alpha_2 = -2\alpha_4 \end{cases}.$$

Considerando $\alpha_4 = 1$, temos $\alpha_1 = 1$ e $\alpha_2 = -2$. Então $u_1 - 2u_2 + u_4 = 0_{\mathbb{R}^4}$, donde se obtem $u_4 = -u_1 + 2u_2$. Logo, $< u_1, u_2, u_4 >=< u_1, u_2 >$.

A sequência (u_1, u_2) é linearmente independente, pois, para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $u_1 \neq \alpha u_2$ e $u_2 \neq \beta u_1$.

Uma vez que $W_2 =< u_1, u_2 >$ e (u_1, u_2) é linearmente independente, então (u_1, u_2) é uma base de W_2.

Exercício 3.18

Determine uma base de $W \cap U$ e uma base de $W + U$ onde

(a) $W =< (0, 0, -1), (1, 0, 2) >$ e $U =< (0, 1, 1), (-1, 3, 2) >$ são subespaços do espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$.

(b) $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + 2x_4 = 0\}$ e $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_4 = 0\}$ são subespaços do espaço vetorial real $\mathbb{R}^4$.

(c) $W = \{(y, 2y - x, x + y, z) \in \mathbb{R}^4 \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$ e $U = \{(\alpha, 3\alpha, 0, -\alpha) \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ são subespaços do espaço vetorial real $\mathbb{R}^4$.

Resolução:

(a) Comecemos por determinar uma base de $W+U$, ou seja, pretendemos determinar vetores $v_1,\ldots,v_p$ tais que $W+U =< v_1,\ldots,v_p >$ e $(v_1,\ldots,v_p)$ é linearmente independente.

Tem-se

$$\begin{aligned} W+U &= <(0,0,-1),(1,0,2)> + <(0,1,1),(-1,3,2)> \\ &= <(0,0,-1),(1,0,2),(0,1,1),(-1,3,2)> . \end{aligned}$$

Sejam $v_1 = (0,0,-1)$, $v_2 = (1,0,2)$, $v_3 = (0,1,1)$ e $v_4 = (-1,3,2)$. Verifiquemos se (v_1,v_2,v_3,v_4) é linearmente independente. Como $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, qualquer sequência com mais de 3 vetores de $\mathbb{R}^3$ é linearmente dependente. Logo, (v_1,v_2,v_3,v_4) é linearmente dependente. Uma vez que $v_4 = -1v_1 - 1v_2 + 3v_3$, segue que

$$< v_1,v_2,v_3,v_4 >=< v_1,v_2,v_3 > .$$

Verifiquemos, agora, se (v_1,v_2,v_3) é linearmente independente. A sequência (v_1,v_2,v_3) é linearmente independente sse, para quaisquer $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \in \mathbb{R}$,

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = (0,0,0) \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

sse, para quaisquer $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \in \mathbb{R}$,

$$(\alpha_2, \alpha_3, -\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3) = (0,0,0) \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

sse o sistema

$$\begin{cases} \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

é determinado.

Resolvendo o sistema anterior, obtemos $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Logo, (v_1,v_2,v_3) é linearmente independente.

Como $W+U =< v_1,v_2,v_3 >$ e (v_1,v_2,v_3) é linearmente independente, conclui-se que (v_1,v_2,v_3) é uma base de $W+U$.

Determinamos seguidamente uma base de $W \cap U$. Para tal, comecemos por descrever cada um dos conjuntos em compreensão.

Dado $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, tem-se

$$\begin{aligned} (a,b,c) \in W &\Leftrightarrow \exists_{\alpha,\beta\in\mathbb{R}}\ (a,b,c) = \alpha v_1 + \beta v_2 \\ &\Leftrightarrow \exists_{\alpha,\beta\in\mathbb{R}}\ (a,b,c) = (\beta, 0, -\alpha + 2\beta) \\ &\Leftrightarrow \quad \text{o sistema} \begin{cases} \beta = a \\ 0 = b \\ -\alpha + 2\beta = c \end{cases} \quad \text{é possível.} \end{aligned}$$

Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz ampliada do sistema, temos

$$\left[\begin{array}{rr|c} 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & b \\ -1 & 2 & c \end{array}\right] \xrightarrow[l_1 \leftrightarrow l_3]{} \left[\begin{array}{rr|c} -1 & 2 & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & a \end{array}\right] \xrightarrow[l_2 \leftrightarrow l_3]{} \left[\begin{array}{rr|c} -1 & 2 & c \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & b \end{array}\right].$$

O sistema é possível se e só se $car(A) = car([A|b])$. Logo, o sistema é possível se e só se $b = 0$.

Assim, $W = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid b = 0\}$.

Dado $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, tem-se

$$\begin{aligned} (a,b,c) \in U &\Leftrightarrow \exists_{\alpha,\beta\in\mathbb{R}}\ (a,b,c) = \alpha v_3 + \beta v_4 \\ &\Leftrightarrow \exists_{\alpha,\beta\in\mathbb{R}}\ (a,b,c) = (-\beta, \alpha + 3\beta, \alpha + 2\beta) \\ &\Leftrightarrow \quad \text{o sistema} \begin{cases} -\beta = a \\ \alpha + 3\beta = b \\ \alpha + 2\beta = c \end{cases} \quad \text{é possível} \end{aligned}$$

Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz ampliada do sistema, temos

$$\left[\begin{array}{rr|c} 0 & -1 & a \\ 1 & 3 & b \\ 1 & 2 & c \end{array}\right] \xrightarrow[l_1 \leftrightarrow l_3]{} \left[\begin{array}{rr|c} 1 & 2 & c \\ 1 & 3 & b \\ 0 & -1 & a \end{array}\right] \xrightarrow[l_2 \to l_2 - l_1]{} \left[\begin{array}{rr|c} 1 & 2 & c \\ 0 & 1 & b-c \\ 0 & -1 & a \end{array}\right] \xrightarrow[l_3 \to l_3 + l_2]{} \left[\begin{array}{rr|c} 1 & 2 & c \\ 0 & 1 & b-c \\ 0 & 0 & a+b-c \end{array}\right] = U.$$

O sistema é possível se e só se $car(A) = car([A|b])$. Logo, o sistema é possível se e só se $a + b - c = 0$.

Assim, $U = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a + b - c = 0\}$.

Por conseguinte,

$$\begin{array}{rcl} W \cap U & = & \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \,|\, b = 0 \text{ e } a + b - c = 0\} \\ & = & \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \,|\, b = 0 \text{ e } c = a\} \\ & = & \{(a, 0, a) \in \mathbb{R}^3 \,|\, a \in \mathbb{R}\} \\ & = & \{a(1, 0, 1) \in \mathbb{R}^3 \,|\, a \in \mathbb{R}\} \\ & = & <(1, 0, 1)> \end{array}.$$

Como $(1, 0, -1) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$, a sequência $((1, 0, 1))$ é linearmente independente.

Uma vez que $W \cap U =< (1, 0, -1) >$ e $((1, 0, 1))$ é linearmente independente, então $((1, 0, 1))$ é uma base de $W \cap U$.

(b) Comecemos por determinar uma base de $W \cap U$.

Tem-se

$$\begin{array}{rcl} W \cap U & = & \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + 2x_4 = 0 \text{ e } x_1 + x_2 + x_4 = 0\} \\ & = & \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 = -2x_4 \text{ e } x_2 = x_4\} \\ & = & \{(-2x_4, x_4, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_3, x_4 \in \mathbb{R}\} \\ & = & \{x_3(0, 0, 1, 0) + x_4(-2, 1, 0, 1) \in \mathbb{R}^4 : x_3, x_4 \in \mathbb{R}\} \\ & = & <(0, 0, 1, 0), (-2, 1, 0, 1)>. \end{array}$$

A sequência $((0, 0, 1, 0), (-2, 1, 0, 1))$ é linearmente independente, uma vez que, para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$(0, 0, 1, 0) \neq \alpha(-2, 1, 0, 1) \text{ e } (-2, 1, 0, 1) \neq \beta(0, 0, 1, 0).$$

Assim, considerando que $W \cap U =< (0, 0, 1, 0), (-2, 1, 0, 1) >$ e $((0, 0, 1, 0), (-2, 1, 0, 1))$ é linearmente independente, a sequência$((0, 0, 1, 0), (-2, 1, 0, 1))$ é uma base de $W \cap U$.

Determinemos, agora, uma base de $W + U$.

Temos

$$\begin{array}{rcl} W & = & \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + 2x_4 = 0\} \\ & = & \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 = -2x_4\} \\ & = & \{(-2x_4, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \\ & = & \{x_2(0, 1, 0, 0) + x_3(0, 0, 1, 0) + x_4(-2, 0, 0, 1) \in \mathbb{R}^4 : x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \\ & = & <(0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (-2, 0, 0, 1)> \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcl} W & = & \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_4 = 0\} \\ & = & \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 = -x_2 - x_4\} \\ & = & \{(-x_2 - x_4, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \\ & = & \{x_2(-1, 0, 1, 0) + x_3(0, 0, 1, 0) + x_4(-1, 0, 0, 1) \in \mathbb{R}^4 : x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \\ & = & <(-1, 0, 1, 0), (0, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1)>, \end{array}$$

logo

$$W + U =< (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (-2, 0, 0, 1), (-1, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1) > .$$

Uma vez que

$$(-2, 0, 0, 1) = 0.(0, 1, 0, 0) + (-1).(0, 0, 1, 0) + 1.(-1, 0, 1, 0) + 1.(-1, 0, 0, 1),$$

segue que
$$W+U=<(0,1,0,0),(0,0,1,0),(-1,0,1,0),(-1,0,0,1)>.$$
A sequência $((0,1,0,0),(0,0,1,0),(-1,0,1,0),(-1,0,0,1))$ é linearmente independente, pois, para quaisquer $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
&\alpha_1(0,1,0,0)+\alpha_2(0,0,1,0)+\alpha_3(-1,0,1,0)+\alpha_4(-1,0,0,1)=(0,0,0,0)\\
&\Rightarrow \begin{cases} -\alpha_3-\alpha_4=0\\ \alpha_1=0\\ \alpha_2+\alpha_3=0\\ \alpha_4=0\end{cases}\\
&\Rightarrow \alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=0.
\end{aligned}$$

Logo, $((0,1,0,0),(0,0,1,0),(-1,0,1,0),(-1,0,0,1))$ é uma base de $W+U$.

(c) Comecemos por determinar uma base de $W\cap U$. Nesse sentido comecemos por descrever cada um dos conjuntos W e U em compreensão.

Dado $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$, tem-se

$$\begin{aligned}
(a,b,c,d)\in W &\Leftrightarrow \exists_{x,y,z\in\mathbb{R}}\ (a,b,c,d)=(y,2y-x,x+y,z)\\
&\Leftrightarrow \text{ o sistema } \begin{cases} y=a\\ -x+2y=b\\ x+y=c\\ z=d\end{cases} \text{ é possível}
\end{aligned}$$

Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz ampliada do sistema, temos

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0&1&0&a\\ -1&2&0&b\\ 1&1&0&c\\ 0&0&1&d\end{array}\right] \xrightarrow[l_1\leftrightarrow l_3]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1&1&0&c\\ -1&2&0&b\\ 0&1&0&a\\ 0&0&1&d\end{array}\right] \xrightarrow[l_2\to l_2+l_1]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1&1&0&c\\ 0&3&0&b+c\\ 0&1&0&a\\ 0&0&1&d\end{array}\right]$$
$$\xrightarrow[l_2\leftrightarrow l_3]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1&1&0&c\\ 0&1&0&a\\ 0&3&0&b+c\\ 0&0&1&d\end{array}\right] \xrightarrow[l_3\leftrightarrow l_3-3l_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1&1&0&c\\ 0&1&0&a\\ 0&0&0&b+c-3a\\ 0&0&1&d\end{array}\right] \xrightarrow[l_3\leftrightarrow l_4]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1&1&0&c\\ 0&1&0&a\\ 0&0&1&d\\ 0&0&0&b+c-3a\end{array}\right].$$

O sistema é possível se e só se $car(A)=car([A|b])$. Logo, o sistema é possível se e só se $-3a+b+c=0$.

Assim, $W=\{(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^3: -3a+b+c=0\}$.

Determinemos agora as condições que carcaterizam o subespaço U. Dado $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$, tem-se

$$\begin{aligned}
(a,b,c,d)\in U &\Leftrightarrow \exists_{\alpha\in\mathbb{R}}\ (a,b,c,d)=((\alpha,3\alpha,0,-\alpha)\\
&\Leftrightarrow \text{ o sistema } \begin{cases} \alpha=a\\ 3\alpha=b\\ 0=c\\ -\alpha=d\end{cases} \text{ é possível}
\end{aligned}$$

Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz ampliada do sistema, temos

$$\left[\begin{array}{c|c} 1&a\\ 3&b\\ 0&c\\ -1&d\end{array}\right] \xrightarrow[\substack{l_2\to l_2-3l_1\\ l_4\to l_4+l_1}]{} \left[\begin{array}{c|c} 1&a\\ 0&b-3a\\ 0&c\\ 0&d+a\end{array}\right]$$

O sistema é possível se e só se $car(A)=car([A|b])$. Logo, o sistema é possível se e só se $-3a+b=0$, $c=0$ e $d+a=0$.

Assim, $U = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \,|\, -3a + b = 0, c = 0, d + a = 0\}$.

Temos, então,

$$\begin{array}{rcl} W \cap U & = & \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \,|\, -3a + b + c = 0, -3a + b = 0, c = 0, d + a = 0\} \\ & = & \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \,|\, b = 3a, c = 0, d = -a\} \\ & = & \{(a, 3a, 0, -a) \in \mathbb{R}^4 \,|\, a \in \mathbb{R}\} \\ & = & \{a(1,3,0,-1) \in \mathbb{R}^4 \,|\, a \in \mathbb{R}\} \\ & = & <(1,3,0,-1)>. \end{array}$$

Uma vez que $(1, 3, 0, -1) \neq 0_{\mathbb{R}^4}$, a sequência $((1, 3, 0, -1))$ é linearmente independente. Logo, $((1, 3, 0, -1))$ é uma base de $W \cap U$.

Determinemos, agora, uma base de $W + U$.

Temos

$$\begin{array}{rcl} W & = & \{(y, 2y - x, x + y, z) \in \mathbb{R}^4 \mid x, y, z \in \mathbb{R}\} \\ & = & \{x(0,-1,1,0) + y(1,2,1,0) + z(0,0,0,1) \,|\, x, y, z \in \mathbb{R}\} \\ & = & <(0,-1,1,0),(1,2,1,0),(0,0,0,1)> \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcl} U & = & \{(\alpha, 3\alpha, 0, -\alpha) \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \\ & = & \{\alpha(1,3,0,-1) \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \\ & = & <(1,3,0,-1)>, \end{array}$$

donde

$$W + U =< (0,-1,1,0),(1,2,1,0),(0,0,0,1),(1,3,0,-1)>.$$

A sequência $((0, -1, 1, 0), (1, 2, 1, 0), (0, 0, 0, 1), (1, 3, 0, -1))$ é uma base de $W+U$ se e só se for uma sequência linearmente independente, ou seja, se e só se, para quaisquer $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{R}$,

$$\alpha_1(0,-1,1,0) + \alpha_2(1,2,1,0) + \alpha_3(0,0,0,1) + \alpha_4(1,3,0,-1) = 0_{\mathbb{R}^4} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0.$$

A condição anterior é verdadeira se e só se o sistema sse o sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_2 + \alpha_4 = 0 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_4 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 - \alpha_4 = 0 \end{array} \right.$$

é determinado (note-se que o sistema é possível, pois é um sistema homogéneo). Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz simples do sistema, temos

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_1 \leftrightarrow l_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_2 \to l_2 + l_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[l_2 \leftrightarrow l_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3 \to l_3 - 3l_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3 \to l_4]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U.$$

Uma vez que $car(A) = 3 < 4 =$ nº incógnitas, o sistema é interminado. O sistema homogéneo com matriz simples U é o sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_4 = 0 \\ \alpha_3 - \alpha_4 = 0 \end{array} \right. ,$$

donde se obtem

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = -\alpha_2 \\ \alpha_4 = -\alpha_2 \\ \alpha_3 = -\alpha_2 \end{array} \right. .$$

Considerando $\alpha_2 = 1$, temos $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = -1$. Então

$$-(0,-1,1,0) + (1,2,1,0) - (0,0,0,1) - (1,3,0,-1) = 0_{\mathbb{R}^4},$$

donde se obtem

$$(1,2,1,0) = (0,-1,1,0) + (0,0,0,1) + (1,3,0,-1).$$

Logo,

$$\begin{aligned} W + U &= \ < (0,-1,1,0), (1,2,1,0), (0,0,0,1), (1,3,0,-1) > \\ &= \ < (0,-1,1,0), (0,0,0,1), (1,3,0,-1) > . \end{aligned}$$

Verifiquemos, agora, se a sequência $((0,-1,1,0), (0,0,0,1), (1,3,0,-1))$ é linearmente independente. Esta sequência é linearmente independente sse, para quaisquer $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$,

$$\alpha_1(0,-1,1,0) + \alpha_2(0,0,0,1) + \alpha_3(1,3,0,-1) = 0_{\mathbb{R}^4} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

sse, para quaisquer $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$,

$$(\alpha_3, -\alpha_1 + 3\alpha_3, \alpha_1, \alpha_2 - \alpha_3) = 0_{\mathbb{R}^4} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

sse o sistema

$$\begin{cases} \alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 + 3\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

é determinado (note-se que o sistema é possível, pois é um sistema homogéneo). Resolvendo este sistema, obtem-se $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Logo, a sequência $((0,-1,1,0), (0,0,0,1), (1,3,0,-1))$ é linearmente independente e, portanto, é uma base de $W + U$.

Exercício 3.19

Indique, se existir, uma base do espaço vetorial real $\mathbb{R}^4$ da qual façam parte os vetores:

(a) $(1,0,-1,2), (1,0,1,0)$.

(b) $(0,1,1,-1), (0,1,0,2), (0,2,1,1)\}$.

(c) $(1,-1,-1,2), (0,1,2,0), (1,0,1,-2)$.

Resolução:

(a) Sejam $u_1 = (1,0,-1,2)$ e $u_2 = (1,0,1,0)$. Atendendo a que os vetores u_1 e u_2 só podem fazer parte de uma base de $\mathbb{R}^4$ se a sequência (u_1, u_2) for linearmente independente, comecemos por averiguar a independência linear desta sequência. Ora, como, para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, temos, $u_1 \neq \alpha u_2$ e $u_2 \neq \beta u_1$, a sequência (u_1, u_2) é linearmente independente. Logo, como $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^4$ e (u_1, u_2) é linearmente independente, existe uma base de $\mathbb{R}^4$ da qual fazem parte os vetores u_1 e u_2. No sentido de determinarmos uma base de $\mathbb{R}^4$ nestas condições, consideremos a base canónica de $\mathbb{R}^4$, i.e., a base (e_1, e_2, e_3, e_4) onde $e_1 = (1,0,0,0)$, $e_2 = (0,1,0,0)$, $e_3 = (0,0,1,0)$ e $e_4 = (0,0,0,1)$. Uma vez que

$$u_1 = e_1 + 0e_2 - e_3 + 2e_4$$

e em u_1 a coordenada relativa a e_1 é não nula, tem-se

$$< e_1, e_2, e_3, e_4 > = < u_1, e_2, e_3, e_4 > .$$

Por outro lado, como $e_1 = u_1 + 0e_2 + e_3 - 2e_4$ e $u_2 = e_1 + 0e_2 + e_3 + 0e_4$, segue que

$$u_2 = u_1 + 0e_2 + 2e_3 - 2e_4.$$

Atendendo a que em u_2 a coordenada relativa a e_3 é diferente de zero, temos

$$< u_1, e_2, e_3, e_4 >=< u_1, e_2, u_2, e_4 > .$$

Considerando que $< e_1, e_2, e_3, e_4 >=< u_1, e_2, u_2, e_4 >$, (e_1, e_2, e_3, e_4) é linearmente independente e (u_1, u_2) é linearmente independente, conclui-se que (u_1, e_2, u_2, e_4) é linearmente independente.
Então, como $\mathbb{R}^4 =< u_1, e_2, u_2, e_4 >$ e (u_1, e_2, u_2, e_4) é linearmente independente, a sequência (u_1, e_2, u_2, e_4) é uma base de $\mathbb{R}^4$.

(b) Sejam $u_1 = (0, 1, 1, -1)$, $u_2 = (0, 1, 0, 2)$ e $(0, 2, 1, 1)$. A sequência (u_1, u_2, u_3) é linearmente dependente, pois $u_3 = u_1 + u_2$. Logo, não existe qualquer base de $\mathbb{R}^4$ que inclua estes vetores (uma base de $\mathbb{R}^4$ é uma sequência de vetores linearmente independente; qualquer sequência que inclua os vetores dados será também linearmente dependente).

(c) Sejam $u_1 = (1, -1, -1, 2)$, $u_2 = (0, 1, 2, 0)$ e $u_3 = (1, 0, 1, -2)$. Atendendo a que os vetores u_1, u_2 e u_3 só podem fazer parte de uma base de $\mathbb{R}^4$ se a sequência (u_1, u_2, u_3) for linearmente independente, comecemos por averiguar a independência linear desta sequência.

Ora, atendendo a que, para quaisquer $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} & \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = 0_{\mathbb{R}^4} \\ \Rightarrow\ & (\alpha_1 + \alpha_3, -\alpha_1 + \alpha_2, -\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3, 2\alpha_1 - 2\alpha_3) = (0, 0, 0, 0) \\ \Rightarrow\ & \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 - 2\alpha_3 = 0 \end{cases} \\ \Rightarrow\ & \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0 \end{aligned} ,$$

a sequência (u_1, u_2, u_3) é linearmente independente.

Logo, como $u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}^4$ e (u_1, u_2, u_3) é linearmente independente, existe uma base de $\mathbb{R}^4$ da qual fazem parte os vetores u_1, u_2 e u_3. No sentido de determinarmos uma base de $\mathbb{R}^4$ nestas condições, consideremos a base canónica de $\mathbb{R}^4$, i.e., a base (e_1, e_2, e_3, e_4) onde $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1, 0)$ e $e_4 = (0, 0, 0, 1)$. Uma vez que

$$u_1 = e_1 - e_2 - e_3 + 2e_4$$

e em u_1 a coordenada relativa a e_1 é não nula, tem-se

$$< e_1, e_2, e_3, e_4 >=< u_1, e_2, e_3, e_4 > .$$

Além disso, como $e_1 = u_1 + e_2 + e_3 - 2e_4$ e $u_2 = 0e_1 + e_2 + 2e_3 + 0e_4$, segue que

$$u_2 = 0u_1 + e_2 + 2e_3 + 0e_4.$$

Então, como em u_2 a coordenada relativa a e_2 é diferente de zero, temos

$$< u_1, e_2, e_3, e_4 >=< u_1, u_2, e_3, e_4 > .$$

De $u_3 = e_1 + 0e_2 + e_3 - 2e_4$, $e_1 = u_1 + e_2 + e_3 - 2e_4$ e $e_2 = 0u_1 + u_2 - 2e_3 + 0e_4$, obtem-se $u_3 = u_1 + e_2 + 2e_3 - 4e_4$, donde resulta

$$u_3 = u_1 + u_2 + 0e_3 - 4e_4.$$

Atendendo a que em u_3 a coordenada relativa a e_4 é diferente de zero, segue que

$$< u_1, u_2, e_3, e_4 >=< u_1, u_2, e_3, u_3 > .$$

Considerando que $< e_1, e_2, e_3, e_4 >=< u_1, u_2, e_3, u_3 >$, (e_1, e_2, e_3, e_4) é linearmente independente e (u_1, u_2, u_3) é linearmente independente, conclui-se que a sequência (u_1, u_2, e_3, u_3) também é linearmente independente.

Então, como $\mathbb{R}^4 =< u_1, u_2, e_3, u_3 >$ e (u_1, u_2, e_3, u_3) é linearmente independente, a sequência (u_1, u_2, e_3, u_3) é uma base de $\mathbb{R}^4$.

Exercício 3.20

Determine um suplementar de:

(a) $W =< (1, 0, -1, 2), (1, 0, 1, 0) >$ relativamente a $\mathbb{R}^4$.

(b) $U =< (1, -1, -1, 2), (0, 1, 2, 0), (1, 0, 1, -2) >$ relativamente a $\mathbb{R}^4$.

(c) $F = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : 2a + b = 0 \text{ e } c = 0\}$ relativamente a $\mathbb{R}^4$.

Resolução:

(a) Para determinar um suplementar de W relativamente a $\mathbb{R}^4$, começamos por determinar uma base de W. Da alínea (a) do exercício anterior sabe-se que a sequência $((1, 0, -1, 2), (1, 0, 1, 0))$ é linearmente independente. Logo, $((1, 0, -1, 2), (1, 0, 1, 0))$ é uma base de W.

Seguidamente determinamos uma base de $\mathbb{R}^4$ que inclua os vetores de uma base de W. Também pelo exercício anterior, sabemos que $((1, 0, -1, 2), (0, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$ é uma base $\mathbb{R}^4$ que inclui os vetores da base de W indicada anteriormente.

Logo, $W' =< (0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1) >$ é um suplementar de W relativamente a $\mathbb{R}^4$.

(b) Para determinar um suplementar de U relativamente a $\mathbb{R}^4$ começamos por determinar uma base de U. Da alínea (c) do exercício anterior sabe-se que a sequência $((1, -1, -1, 2), (0, 1, 2, 0), (1, 0, 1, -2))$ é linearmente independente. Logo, $((1, -1, -1, 2), (0, 1, 2, 0), (1, 0, 1, -2))$ é uma base de U.

Seguidamente determinamos uma base de $\mathbb{R}^4$ que inclua os vetores de uma base de U. Do exercício anterior sabe-se que $((1, -1, -1, 2), (0, 1, 2, 0), (0, 0, 1, 0), (1, 0, 1, -2))$ é uma base de $\mathbb{R}^4$ que inclui os vetores da base de U indicada anteriormente.

Logo, $U' =< (0, 0, 1, 0)) >$ é um suplementar de U relativamente a $\mathbb{R}^4$.

(c) Para determinar um suplementar de F relativamente a $\mathbb{R}^4$, começamos por determinar uma base de U. Tem-se

$$\begin{aligned} F &= \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : 2a + b = 0 \text{ e } c = 0\} \\ &= \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : b = -2a \text{ e } c = 0\} \\ &= \{(a, -2a, 0, d) \in \mathbb{R}^4 : a, d \in \mathbb{R}\} \\ &= \{a(1, -2, 0, 0) + d(0, 0, 0, 1) \in \mathbb{R}^4 : a, d \in \mathbb{R}\} \\ &= < (1, -2, 0, 0), (0, 0, 0, 1) > \end{aligned}$$

Os vetores $(1, -2, 0, 0)$ e $(0, 0, 0, 1)$ são linearmente independentes, pois, para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$(1, -2, 0, 0) \neq \alpha(0, 0, 0, 1) \text{ e } (0, 0, 0, 1) \neq \beta(1, -2, 0, 0).$$

Logo, $((1, -2, 0, 0), (0, 0, 0, 1))$ é uma base de U.

Seguidamente, determinamos uma base de $\mathbb{R}^4$ da qual façam parte os vetores $u_1 = (1, -2, 0, 0)$ e $u_2 = (0, 0, 0, 1)$. Para tal, consideremos a base canónica de $\mathbb{R}^4$, i.e., a base (e_1, e_2, e_3, e_4) onde $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1, 0)$ e $e_4 = (0, 0, 0, 1)$. Uma vez que

$$u_1 = e_1 - 2e_2 + 0e_3 + 0e_4$$

e a coordenada de u_1 relativa a e_1 é diferente de zero, tem-se $< e_1, e_2, e_3, e_4 >=< u_1, e_2, e_3, e_4 >$.
Por outro lado, considerando que $< e_1, e_2, e_3, e_4 >=< u_1, e_2, e_3, e_4 >=< u_1, e_2, e_3, u_2 >$, (e_1, e_2, e_3, e_4) é linearmente independente e (u_1, u_2) é linearmente independente, conclui-se que a sequência (u_1, e_2, e_3, u_2) é linearmente independente.
Assim, como $\mathbb{R}^4 =< u_1, e_2, e_3, u_2 >$ e (u_1, e_2, e_3, u_2) é linearmente independente, a sequência (u_1, e_2, e_3, u_2) é uma base de $\mathbb{R}^4$.

Como (u_1, e_2, e_3, u_2) é uma base de $\mathbb{R}^4$ e (u_1, u_2) é uma base de F, então $F' =< e_2, e_3 >$ é um suplementar de F relativamente a $\mathbb{R}^4$.

Exercício 3.21
Sejam $n \in \mathbb{N}$, W, U subespaços do espaço vetorial real $\mathbb{R}^n$, (w_1, w_2, w_3, w_4) uma base de W e (u_1, u_2, u_3) uma base de U. Sendo $z_1 = 2w_1 + w_2 - w_3 = u_1 + 2u_2$ e $z_2 = -w_2 + w_4 = u_2 - u_3$, admita que (z_1, z_2) é base de $W \cap U$.
Indique, justificando,

(a) uma base de W que inclua z_1, z_2.
(b) uma base de U que inclua z_1, z_2.
(c) uma base de $W + U$.

Resolução:

(a) Uma vez que (z_1, z_2) é base de $W \cap U$, então $z_1, z_2 \in W$ e (z_1, z_2) é linearmente independente. Logo existe uma base de W que inclui z_1 e z_2.
Como $z_1 = 2w_1 + w_2 - w_3$ e em z_1 a coordenada relativa a w_2 é diferente de zero, então

$$< w_1, w_2, w_3, w_4 >=< w_1, z_1, w_3, w_4 > .$$

Atendendo a que $w_2 = z_1 - 2w_1 + w_3$ e $z_2 = -w_2 + w_4$, segue que $z_2 = -z_1 + 2w_1 - w_3 + w_4$. Uma vez que em z_2 a coordenada relativa a w_3 é não nula, resulta que

$$< w_1, z_1, w_3, w_4 >=< w_1, z_1, z_2, w_4 > .$$

Como $< w_1, w_2, w_3, w_4 >=< w_1, z_1, z_2, w_4 >$, (w_1, w_2, w_3, w_4) é linearmente independente e (z_1, z_2) é linearmente independente, então (w_1, z_1, z_2, w_4) é linearmente independente. Logo, (w_1, z_1, z_2, w_4) é uma base de W.

(b) Uma vez que (z_1, z_2) é base de $W \cap U$, então $z_1, z_2 \in U$ e (z_1, z_2) é linearmente independente. Logo existe uma base de U que inclui z_1 e z_2.
Como $z_1 = u_1 + 2u_2$ e em z_1 a coordenada relativa a u_1 é diferente de zero, então

$$< u_1, u_2, u_3 >=< z_1, u_2, u_3 > .$$

Atendendo a que $u_1 = z_1 - 2u_2$ e $z_2 = u_2 - u_3$, segue que $z_2 = 0z_1 + u_2 - u_3$. Uma vez que em z_2 a coordenada relativa a u_2 é não nula, temos

$$< z_1, u_2, u_3 >=< z_1, z_2, u_3 > .$$

Como $< u_1, u_2, u_3 >=< z_1, z_2, u_3 >$, (u_1, u_2, u_3) é linearmente independente e (z_1, z_2) é linearmente independente, então (z_1, z_2, u_3) é linearmente independente. Logo, (z_1, z_2, u_3) é uma base de U.

(c) Atendendo a que $\dim(W+U) = \dim W + \dim U - \dim(W \cap U)$, $\dim W = 4$, $\dim U = 3$ e $\dim W \cap U = 2$, temos $\dim(W + U) = 5$. Por outro lado, sabe-se que

$$W + U =< w_1, z_1, z_2, w_4 > + < z_1, z_2, u_3 >=< w_1, z_1, z_2, w_4, u_3 > .$$

Então, como $\dim(W+U) = 5$, $W+U =< w_1, z_1, z_2, w_4, u_3 >$ e $\{w_1, z_1, z_2, w_4, u_3\}$ tem 5 elementos, conclui-se que $(w_1, z_1, z_2, w_4, u_3)$ é uma base de $W + U$.

Exercício 3.22

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e W, U subespaços vetoriais do espaço vetorial real $\mathbb{R}^n$. Diga, justificando, se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações seguintes:

(a) Se $\mathrm{dimW} \leq \mathrm{dimU}$, então $W \subseteq U$.

(b) Se $\mathrm{dimW} = \mathrm{dimU}$, então $\mathrm{dim(W + U)} = \mathrm{dimW} + \mathrm{dimU}$.

(c) Se $\mathrm{dimU} + \mathrm{dimW} = \mathrm{dim}\mathbb{R}^\mathrm{n}$, então $\mathbb{R}^n$ é soma direta de U e W.

(d) Se $\mathrm{dim(U + W)} = \mathrm{dim}\mathbb{R}^\mathrm{n}$, então $\mathbb{R}^n$ é soma direta de U e W.

(e) Se $\mathrm{dim(U + W)} = \mathrm{dimU} + \mathrm{dimW}$, então V é soma direta de U e W.

(f) Se V é soma direta de U e W, então $\mathrm{dim(U + W)} = \mathrm{dimU} + \mathrm{dimW}$.

Resolução:

(a) A afirmação é falsa.

Contra-exemplo: Sejam $V = \mathbb{R}^3$, $W =< (1,0,0) >$ e $U =< (0,1,0),(0,0,1) >$. Neste caso, temos $\dim W = 1 \leq \dim U = 2$, mas $W \nsubseteq U$ (por exemplo, $(1,0,0) \neq \alpha(0,1,0) + \beta(0,0,1)$, para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$).

(b) A afirmação é falsa.

Contra-exemplo: Sejam $V = \mathbb{R}^3$, $W =< (1,0,0),(0,1,0) >$, $U =< (0,1,0),(0,0,1) >$. Para os espaços vetorias indicados, temos $\dim W = 2 = \dim U$, $\dim(W+U) = 3$ (pois $W+U =< (1,0,0),(0,1,0),(0,0,1) >$ e $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ é linearmente independente) e $\dim W + \dim U = 4$.

(c) A afirmação é falsa.

Contra-exemplo: Sejam $V = \mathbb{R}^3$, $W =< (1,0,0) >$, $U =< (1,0,0),(0,0,1) >$. No caso dos espaços vetoriais indicados, temos $\dim W + \dim U = 1 + 2 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, mas $\mathbb{R}^3$ não é soma direta de W e U, pois $W + U =< (1,0,0),(0,0,1) > \neq \mathbb{R}^3$.

(d) A afirmação é falsa.

Contra-exemplo: Sejam $V = \mathbb{R}^3$, $W =< (1,0,0),(0,1,0) >$, $U =< (0,1,0),(0,0,1) >$. Neste exemplo, temos $\dim(W+U) = 3$ (pois $W+U =< (1,0,0),(0,1,0),(0,0,1) >$ e $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ é linearmente independente). Então $\dim(W+U) = \dim \mathbb{R}^3$, mas $\mathbb{R}^3$ não é soma direta de W e U, uma vez que $W \cap U \neq \{(0,0,0)\}$ (note-se que $(0,1,0) \in W \cap U$).

(e) A afirmação é falsa.

Contra-exemplo: Sejam $V = \mathbb{R}^3$, $W =< (1,0,0) >$, $U =< (0,1,0) >$. Tem-se $\dim W + \dim U = 1 + 1 = 2$, $\dim(W+U) = 2$ (pois $W+U =< (1,0,0),(0,1,0) >$ e $((1,0,0),(0,1,0))$ é linearmente independente) e $\mathbb{R}^3$ não é soma direta de W e U, pois $W + U =< (1,0,0),(0,1,0) > \neq \mathbb{R}^3$.

(f) A afirmação é verdadeira.

Se V é soma direta de U e W, então $W \cap U = \{0_V\}$. Logo, como

$$\mathrm{dim(U + W) = dimU + dimW - dim(W \cap U)}$$

e $\dim(W \cap U) = 0$, temos $\mathrm{dim(U + W) = dimU + dimW}$.

Exercício 3.23

Usando o conceito de característica de uma matriz, determine a dimensão dos subespaços vetoriais:

(a) $\langle (3,-1,4),(2,1,3),(1,0,2) \rangle$ de $\mathbb{R}^3$.

(b) $\langle (0,1,1,2),(-2,1,0,1),(3,1,5,2),(1,0,3,-1) \rangle$ de $\mathbb{R}^4$.

(c) $\langle (1,2,1,2),(-2,-4,0,2),(3,2,1,0),(6,0,3,-3) \rangle$ de $\mathbb{R}^4$.

Resolução:

(a) Uma vez que

$$\dim \langle (3,-1,4),(2,1,3),(1,0,2) \rangle = car \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

comecemos por determinar a característica da matriz seguinte

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz A, obtemos

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_1 \leftrightarrow l_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{l_2 \to l_2 - 2l_1 \\ l_3 \to l_3 - 3l_1}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3 \to l_3 + l_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} = U$$

A matriz A é equivalente por linhas à matriz em escada U com 3 linhas não nulas, logo $car(A) = 3$ e, portanto, $\dim \langle (3,-1,4),(2,1,3),(1,0,2) \rangle = 3$.

(b) Considerando que

$$\dim \langle (0,1,1,2),(-2,1,0,1),(3,1,5,2),(1,0,3,-1) \rangle = car \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix},$$

comecemos por determinar a característica da matriz seguinte

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Reduzindo esta matriz a uma matriz em escada conclui-se que $car(A) = 3$. Logo,

$$\dim \langle (0,1,1,2),(-2,1,0,1),(3,1,5,2),(1,0,3,-1) \rangle = 3.$$

(c) Uma vez que

$$\dim \langle (1,2,1,2),(-2,-4,0,2),(3,2,1,0),(6,0,3,-3) \rangle = car \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & -4 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 3 & -3 \end{bmatrix},$$

comecemos por determinar a característica da matriz seguinte

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & -4 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 3 & -3 \end{bmatrix}.$$

Reduzindo a matriz A a uma matriz em escada, conclui-se que $car(A) = 4$. Logo,

$$\dim \langle (1,2,1,2),(-2,-4,0,2),(3,2,1,0),(6,0,3,-3) \rangle = 4.$$

Exercício 3.24

Considere os seguintes vetores do espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = (\alpha, 6, -1), v_2 = (1, \alpha, -1), v_3 = (2, \alpha, -3).$$

(a) Determine os valores do parâmetro real α para os quais (v_1, v_2, v_3) é uma base de $\mathbb{R}^3$.

(b) Para um dos valores de α determinados na alínea anterior, calcule as coordenadas do vetor $v = (-1, 1, 2)$ em relação à base (v_1, v_2, v_3).

Resolução:

(a) Uma vez que $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, uma sequência de 3 vetores de $\mathbb{R}^3$ é uma base de $\mathbb{R}^3$ se e só se é uma sequência linearmente independente. Assim, a sequência (v_1, v_2, v_3) é uma base de $\mathbb{R}^3$ se e só se (v_1, v_2, v_3) é linearmente independente, i.e., se e só se

$$car \begin{bmatrix} \alpha & 6 & -1 \\ 1 & \alpha & -1 \\ 4 & \alpha & -3 \end{bmatrix} = 3.$$

Seja A a matriz anterior. Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz A, temos

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 6 & -1 \\ 1 & \alpha & -1 \\ 4 & \alpha & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_1 \leftrightarrow l_2]{} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & -1 \\ \alpha & 6 & -1 \\ 2 & \alpha & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{l_2 \to l_2 - \alpha l_1 \\ l_3 \to l_3 - 2l_1}]{} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & -1 \\ 0 & 6-\alpha^2 & -1+\alpha \\ 0 & -\alpha & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[l_2 \leftrightarrow l_3]{} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & -1 \\ 0 & -\alpha & -1 \\ 0 & 6-\alpha^2 & -1+\alpha \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3 \to l_3 - \alpha l_2]{} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & -1 \\ 0 & -\alpha & -1 \\ 0 & 6 & -1+2\alpha \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[l_2 \leftrightarrow l_3]{} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & -1 \\ 0 & 6 & -1+2\alpha \\ 0 & -\alpha & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3 \to l_3 + \frac{\alpha}{6}]{} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & -1 \\ 0 & 6 & -1+2\alpha \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\alpha^2 - \frac{1}{6}\alpha - 1 \end{bmatrix}.$$

Assim, $car(A) = 3$ se e só se $\frac{1}{3}\alpha^2 - \frac{1}{6}\alpha - 1 \neq 0$ se e só se $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 3\}$.

(b) Seja $\alpha = 1$. Então $(v_1, v_2, v_3) = ((1, 6, -1), (1, 1, -1), (2, 1, -3))$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.

Tem-se

$$(-1, 1, 2) = \alpha_1(1, 6, -1) + \alpha_2(1, 1, -1) + \alpha_3(2, 1, -3)$$

se e só se

$$\alpha_1 = \frac{1}{5}, \alpha_2 = \frac{4}{5}, \alpha_3 = -1.$$

Logo, as coordenadas de $(-1, 1, 2)$ relativamente à base (v_1, v_2, v_3) são $\frac{1}{5}$, $\frac{4}{5}$, -1.

Exercício 3.25

Sejam V um espaço vetorial real e (v_1, v_2, v_3, v_4) uma sequência linearmente independente de vetores de V. Para cada $k \in \mathbb{R}$, seja

$$G_k = < v_1 + v_4, kv_2 - v_3 - v_4, v_1 + v_2 - v_3, -v_2 + v_3 + k^2 v_4 > .$$

Seja $W = < v_1, v_2, v_3, v_4 >$.

(a) Determine os valores de k para os quais: i. $\dim G_k = 4$. ii. $\dim G_k = 3$.

(b) Encontre uma base de W que inclua os vetores $v_1 + v_4, -v_2 - v_3 - v_4, v_1 + v_2 - v_3$.

Resolução:

(a) i. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & k & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & k^2 \end{bmatrix}.$$

Uma vez que $\dim G_k = car(A)$, tem-se $\dim G_k = 4$ se e só se $car(A) = 4$. Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz A, temos

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & k & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & k^2 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3 \to l_3 - l_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & k & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & k^2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[l_2 \leftrightarrow l_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & k & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & k^2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{l_3 \to l_3 - kl_2 \\ l_4 \to l_4 + l_2}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1+k & -1+k \\ 0 & 0 & 0 & -1+k^2 \end{bmatrix}$$

Logo, $car(A) = 4$ se e só se $k \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Portanto, $\dim G_k = 4$ se e só se $k \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

(a) ii. Tem-se

$$\dim G_k = 3 \quad \Leftrightarrow \quad car \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & k & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & k^2 \end{bmatrix} = 3.$$

Considerando os cálculos da alínea anterior conclui-se que $car(A) = 3$ se e só se $k = -1$.

(b) A sequência $(v_1 + v_4, -v_2 - v_3 - v_4, v_1 + v_2 - v_3)$ é linearmente indepedente, pois, para quaisquer $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} & \alpha_1(v_1 + v_4) + \alpha_2(-v_2 - v_3 - v_4) + \alpha_3(v_1 + v_2 - v_3) = 0_V \\ \Rightarrow \quad & (\alpha_1 + \alpha_3)v_1 + (-\alpha_2 + \alpha_3)v_2 + (-\alpha_2 - \alpha_3)v_3 + (\alpha_1 - \alpha_2)v_4 = 0_V \\ \Rightarrow \quad & \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ -\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ -\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \end{cases} \quad (v_1, v_2, v_3, v_4) \text{ é linear/ independente} \\ \Rightarrow \quad & \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0 \end{aligned}$$

Considerando que $v_1 + v_4, -v_2 - v_3 - v_4, v_1 + v_2 - v_3$ são vetores de W e a sequência

$$(v_1 + v_4, -v_2 - v_3 - v_4, v_1 + v_2 - v_3)$$

é linearmente indepedente, então existe uma base de W que inclui os vetores indicados.
Uma vez que $v_1 + v_4 = v_1 + 0v_2 + 0v_3 + v_4$ e a coordenada relativa a v_1 é diferente de zero, tem-se

$$< v_1, v_2, v_3, v_4 > = < v_1 + v_4, v_2, v_3, v_4 > .$$

Como $-v_2 - v_3 - v_4 = 0(v_1 + v_4) - v_2 - v_3 - v_4$ e a coordenada relativa a v_2 é não nula, segue que

$$< v_1 + v_4, v_2, v_3, v_4 > = < v_1 + v_4, -v_2 - v_3 - v_4, v_3, v_4 > .$$

Agora, como $v_1 + v_2 - v_3 = 1(v_1 + v_4) - 1(-v_2 - v_3 - v_4) - 2v_3 - 2v_4$ e a coordenada relativa a v_3 é não nula, temos

$$< v_1 + v_4, -v_2 - v_3 - v_4, v_3, v_4 > = < v_1 + v_4, -v_2 - v_3 - v_4, v_1 + v_2 - v_3, v_4 > .$$

Atendendo a que

- $W = < v_1, v_2, v_3, v_4 > = < v_1 + v_4, -v_2 - v_3 - v_4, v_1 + v_2 - v_3, v_4 >$,

- (v_1, v_2, v_3, v_4) é linearmente independente,
- $(v_1 + v_4, -v_2 - v_3 - v_4, v_1 + v_2 - v_3)$ é linearmente independente,

a sequência $(v_1 + v_4, -v_2 - v_3 - v_4, v_1 + v_2 - v_3, v_4)$ é linearmente independente.

Então, como

$$W = < v_1 + v_4, -v_2 - v_3 - v_4, v_1 + v_2 - v_3, v_4 >$$

e $(v_1 + v_4, -v_2 - v_3 - v_4, v_1 + v_2 - v_3, v_4)$ é linearmente independente, conclui-se que

$$(v_1 + v_4, -v_2 - v_3 - v_4, v_1 + v_2 - v_3, v_4)$$

é uma base de W.