Exercícios para a unidade curricular

Álgebra Linear CC

Licenciatura em Ciências da Computação

Carla Mendes
Departamento de Matemática
Universidade do Minho
2024/2025

Índice

1 Matrizes

Exercícios e resoluções

Exercício 1.1

Para as matrizes seguintes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{bmatrix},$$

indique:

(a) O tipo de cada matriz.

(b) Quais das matrizes são quadradas.

(c) Quais das matrizes são triangulares inferiores.

(d) Quais das matrizes são diagonais.

Resolução:

(a) Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Uma matriz M diz-se uma matriz do tipo $m \times n$ se tem m linhas e n colunas. Assim,

- a matriz A é do tipo 3×4.
- a matriz B é do tipo 3×3.
- a matriz C é do tipo 3×1.
- a matriz D é do tipo 1×4.
- a matriz E é do tipo 1×1.
- a matriz F é do tipo 4×4.
- a matriz G é do tipo 3×2.
- a matriz H é do tipo 3×3.

(b) Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ e $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Uma matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ diz-se uma matriz quadrada se $m = n$. Logo, das matrizes indicadas são quadradas as matrizes: B (é uma matriz do tipo 3×3); E (é uma matriz do tipo 1×1); F (é uma matriz do tipo 4×4); H (é uma matriz do tipo 3×3).

(c) Seja $n \in \mathbb{N}$ e $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Uma matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ diz-se triangular inferior se, para quaisquer $i, j \in \{1, \dots, n\}$, tem-se $a_{ij} = 0$ sempre que $i < j$. Logo, são matrizes triangulares inferiores as matrizes E, F e H.

(d) Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Uma matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ diz-se uma matriz diagonal se, para quaisquer $i, j \in \{1, \dots, n\}$, tem-se $a_{ij} = 0$ sempre que $i \neq j$. Logo, são matrizes diagonais as matrizes E e F.

Exercício 1.2

Escreva a tabela das seguintes matrizes:

(a) $A = [a_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,4 \\ j=1,\dots,5}}$ onde $a_{ij} = i + j$.

(b) $B = [b_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,4 \\ j=1,\dots,5}}$ onde $b_{ij} = |i - j|$.

(c) $C = [c_{ij}]$, quadrada de ordem n, tal que $n = 3$ e $c_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i + j \text{ é par} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$.

(d) $D = [d_{ij}]$, quadrada de ordem n, tal que $n = 3$ e $d_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{se } i > j \\ 0 & \text{se } i = j \\ 1 & \text{se } i < j \end{cases}$.

Resolução:

(a) A matriz A é uma matriz do tipo 4×5, pois tem 4 linhas e 5 colunas, e o elemento na linha i e coluna j da matriz A é dado por $a_{ij} = i + j$. Assim, a matriz A é a matriz descrita pelo quadro seguinte

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

(b) A matriz B é uma matriz é do tipo 4×5, pois tem 4 linhas e 5 colunas, e o elemento na linha i e coluna j da matriz B é dado por $b_{ij} = |i - j|$. Assim, a matriz B é a matriz descrita pelo quadro seguinte

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(c) A matriz C é uma matriz do tipo 3×3, pois tem 3 linhas e 3 colunas, e o elemento na linha i e coluna j da matriz C é 1 se $i + j$ é par e é 0 se $i + j$ é ímpar. Assim, a matriz C é a matriz descrita pelo quadro seguinte

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(d) A matriz D é uma matriz do tipo 3×3, pois tem 3 linhas e 3 colunas, e o elemento na linha i e coluna j da matriz D é: 1 se o número da linha i é inferior ao número da coluna j; 0 se o número da linha é igual ao número da coluna; -1 se o número da linha é superior ao número da coluna. Assim, a matriz D é a matriz descrita pelo quadro seguinte

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Exercício 1.3

Considere as matrizes de $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determine:

(a) $A + B + C$. (b) $2A + B + 3C$.

(c) $A - B$. (c) $2A + 3(B - C)$.

Resolução:

(a) Por definição de adição de matrizes e considerando a associatividade desta operação, temos

$$\begin{aligned} A + B + C &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 6 & -3 & -1 \\ 3 & 4 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 7 & 4 & 5 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(b) Por definição de adição de matrizes, multiplicação de um escalar por uma matriz e considerando a associatividade da adição de matrizes, temos

$$\begin{aligned} 2A + B + 3C &= 2\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 6 & 4 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & 3 & 9 \\ 12 & 0 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ 6 & 6 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & 3 & 9 \\ 12 & 0 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 18 & 6 & 11 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(c) Por definição de adição de matrizes e multiplicação de um escalar por uma matriz, temos

$$\begin{aligned} A - B &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -4 & 3 & -3 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(d) Por definição de adição de matrizes, multiplicação de um escalar por uma matriz e considerando a associatividade da adição de matrizes, temos

$$\begin{aligned}
2A+3(B-C) &= 2\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} + 3\left(\begin{bmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 6 & 4 & 8 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 7 & -4 & -2 \\ -4 & 2 & -1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 6 & 4 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 21 & -12 & -6 \\ -12 & 6 & -3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 23 & -12 & -10 \\ -6 & 10 & 5 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Exercício 1.4

Seja A uma matriz do tipo $m \times (m+5)$ e B uma matriz do tipo $n \times (11-n)$ tais que AB e BA estão definidas. Determine os valores possíveis para m e n.

Resolução:

A expressão AB define uma matriz se e só se o número de colunas da matriz A for igual ao número de linhas da matriz B, ou seja, se e só se $m+5=n$. Por outro lado, a expressão BA define uma matriz se e só se o número de colunas de B for igual ao número de linhas da matriz A, isto é, se e só se $11-n=m$. No sentido de determinarmos os valores de m e n que satisfazem simultaneamente as duas condições, resolvemos o sistema

$$\begin{cases} m+5=n \\ 11-n=m \end{cases}$$

e obtemos $m=3$ e $n=8$.

Exercício 1.5

Se possível, calcule AB e BA sendo:

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -4 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & \frac{2}{3} \\ 5 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$.

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

Resolução:

(a) A matriz A é do tipo 2×4, a matriz B é do tipo 4×2. Como o número de colunas da matriz A é igual ao número de linhas de B, o produto AB está definido. A matriz AB é uma matriz do tipo 2×2 e temos

$$
\begin{aligned}
AB &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1\cdot 0 + 2\,(-1) + 3\,(-1) + 0\cdot 0 & 1\cdot 1 + 2\cdot 2 + 3\cdot 0 + 0\cdot 3 \\ 1\cdot 0 + (-1)\,(-1) + 0\cdot(-1) + 2\cdot 0 & 1\cdot 1 + (-1)\cdot 2 + 0\cdot 0 + 2\cdot 3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -5 & 5 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

O número de colunas de B é igual ao número de linhas de A, logo o produto BA está definido. A matriz BA é uma matriz do tipo 4×4 e temos

$$
\begin{aligned}
BA &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0\cdot 1 + 1\cdot 1 & 0\cdot 2 + 1\cdot(-1) & 0\cdot 3 + 1\cdot 0 & 0\cdot 0 + 1\cdot 2 \\ (-1)\cdot 1 + 2\cdot 1 & (-1)\cdot 2 + 2\,(-1) & (-1)\cdot 3 + 2\cdot 0 & (-1)\cdot 0 + 2\cdot 2 \\ (-1)\cdot 1 + 0\cdot 1 & (-1)\cdot 2 + 0\cdot(-1) & (-1)\cdot 3 + 0\cdot 0 & (-1)\cdot 0 + 0\cdot 2 \\ 0\cdot 1 + 3\cdot 1 & 0\cdot 2 + 3\,(-1) & 0\cdot 3 + 3\cdot 0 & 0\cdot 0 + 3\cdot 2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & -4 & -3 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 6 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

(b) As matrizes A e B são ambas do tipo 3×3. O número de colunas de A é igual ao número de linhas de B e, portanto, o produto AB está definido. Pelo mesmo motivo, o produto BA também está definido. Tem-se

$$
\begin{aligned}
AB &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & \frac{2}{3} \\ 5 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 0 & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & \frac{10}{3} \end{bmatrix}, \\
BA &= \begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & \frac{2}{3} \\ 5 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -4 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 7 & 2 \\ -\frac{4}{3} & \frac{7}{3} & \frac{2}{3} \\ -5 & \frac{5}{2} & 5 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

(c) A matriz A é do tipo 4×1 e a matriz B é do tipo 1×4. O número de colunas de A é igual ao número de linhas de B e, portanto, o produto AB está definido. A matriz AB é uma matriz do tipo 4×4 e tem-se

$$
AB = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
$$

O número de colunas de B é igual ao número de linhas de A, pelo que o produto BA está definido. A matriz BA é do tipo 1×1 e tem-se

$$
BA = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = [3].
$$

Exercício 1.6

Considere as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 0 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Diga quais das seguintes expressões identificam matrizes, e em tais casos calcule-as.

(a) $A+2B$. (b) AB. (c) $AC+D$.

(d) $(A+B)C$. (e) ACD. (f) $2ACA+A$.

Resolução:

(a) Tem-se $A, B \in \mathcal{M}_{4\times 3}(\mathbb{R})$. Então, por definição de produto de um escalar por uma matriz, $2A \in \mathcal{M}_{4\times 3}(\mathbb{R})$. As matrizes A e $2B$ são do mesmo tipo, logo a soma de A e $2B$ está definida e temos

$$A+2B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 7 & -4 & 3 \\ -2 & 7 & 3 \\ 3 & 6 & -1 \end{bmatrix}.$$

(b) As matrizes A e B são do tipo 4×3. O número de colunas de A não é igual ao número de linhas de B, pelo que a expressão AB não define uma matriz.

(c) Tem-se $A \in \mathcal{M}_{4\times 3}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$ e $D \in \mathcal{M}_{4\times 2}(\mathbb{R})$. O número de colunas de A é igual ao número de linhas de C e, portanto, AC define uma matriz do tipo 4×4. Uma vez que as matrizes AC e D não são do mesmo tipo, então a expressão $AC+D$ não define uma matriz.

(d) Tem-se $A, B \in \mathcal{M}_{4\times 3}(\mathbb{R})$ e $C \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$. As matrizes A e B são do mesmo tipo, pelo que a expressão $A+B$ define uma matriz. Por definição de adição de matrizes, $A+B \in \mathcal{M}_{4\times 3}(\mathbb{R})$. Considerando que o número de colunas de $A+B$ é igual ao número de linhas de C, a expressão $(A+B)C$ define uma matriz do tipo 4×4. Temos

$$\begin{aligned}(A+B)C &= \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5 & 1 & 5 \\ 3 & -3 & 1 \\ -1 & 5 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 12 & 10 & 13 & 18 \\ -2 & 8 & 7 & 18 \\ 11 & -5 & -1 & -14 \\ 9 & 9 & -9 & 6 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

(e) Tem-se $A \in \mathcal{M}_{4\times 3}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$ e $D \in \mathcal{M}_{4\times 2}(\mathbb{R})$. O número de colunas de A é igual ao número de linhas de C e, portanto, AC define uma matriz do tipo 4×4. Uma vez que o número de colunas de AC é igual ao número de linhas de D, então a expressão ACD define uma matriz do tipo 4×2.

Temos

$$\begin{aligned}
ACD &= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 0 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 8 & 2 & 12 & 6 \\ -6 & -2 & 1 & 0 \\ 7 & -1 & -2 & -6 \\ 4 & 8 & 1 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 0 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 & -24 \\ 2 & -9 \\ -15 & -3 \\ 24 & 33 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

(f) Tem-se $A \in \mathcal{M}_{4\times 3}(\mathbb{R})$ e $C \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$. O número de colunas de A é igual ao número de linhas de C e, portanto, AC define uma matriz do tipo 4×4. Uma vez que o número de colunas de AC é igual ao número de linhas A, então ACA define uma matriz do tipo 4×3. Logo, $2ACA$ é também uma matriz do tipo 4×3. Considerando que $2ACA$ e A são matrizes do mesmo tipo, então $2ACA + A$ define uma matriz. Tem-se

$$\begin{aligned}
2ACA + A &= 2 \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= 2 \begin{bmatrix} 8 & 2 & 12 & 6 \\ -4 & -4 & 9 & 0 \\ 7 & -1 & -2 & -6 \\ 4 & 8 & 1 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= 2 \begin{bmatrix} 32 & 40 & 52 \\ -4 & 31 & -11 \\ -3 & 3 & 19 \\ 36 & -9 & 37 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 64 & 80 & 104 \\ -8 & 62 & -22 \\ -6 & 6 & 38 \\ 72 & -18 & 74 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 66 & 81 & 108 \\ -9 & 60 & -21 \\ -6 & 9 & 39 \\ 75 & -18 & 75 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Exercício 1.7

Justifique as afirmações seguintes:

(a) Se $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ tem a linha i nula, então, qualquer que seja $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$, a matriz AB tem a linha i nula.

(b) Se $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$ tem a coluna j nula, então, qualquer que seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, a matriz AB tem a coluna j nula.

(c) Se $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ tem as linhas i e s iguais, com $i, s \in \{1, \ldots, m\}$, então, qualquer que seja $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$, a matriz AB tem as linhas i e s iguais.

(d) Se $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$ tem as colunas j e s iguais, com $j, s \in \{1, \ldots, p\}$, então, qualquer que seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, a matriz AB tem as colunas j e s iguais.

Resolução:

(a) Sejam $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$ e $i \in \{1,\ldots,m\}$. Admitindo que a linha i de A é nula, tem-se $a_{ik} = 0$, para qualquer $k \in \{1,\ldots,n\}$. Assim, considerando que o elemento (i,j) da matriz AB é $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$, da hipótese segue que $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = 0$, para todo $j \in \{1,\ldots,p\}$. Portanto, todos os elementos da linha i da matriz AB são nulos.

(b) Sejam $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$ e $j \in \{1,\ldots,p\}$. Admitindo que a coluna j de B é nula, tem-se $b_{kj} = 0$, para qualquer $k \in \{1,\ldots,n\}$. Assim, considerando que o elemento (i,j) da matriz AB é $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$, da hipótese segue que $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = 0$, para todo $i \in \{1,\ldots,m\}$. Portanto, todos os elementos da coluna j da matriz AB são nulos.

(c) Sejam $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$ e $i, s \in \{1,\ldots,m\}$. Admitindo que as linhas i e s de A são iguais, tem-se $a_{ik} = a_{sk}$, para qualquer $k \in \{1,\ldots,n\}$. Assim, considerando que, para qualquer $j \in \{1,\ldots,p\}$, os elementos (i,j) e (s,j) da matriz AB são dados, respetivamente, por $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$ e $\sum_{k=1}^{n} a_{sk}b_{kj}$, é imediato que as linhas i e s da matriz AB são iguais, pois, para todo $j \in \{1,\ldots,p\}$, $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{sk}b_{kj}$.

(d) Sejam $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$ e $j, s \in \{1,\ldots,p\}$. Admitindo que as colunas j e s de B são iguais, tem-se $b_{kj} = b_{ks}$, para qualquer $k \in \{1,\ldots,n\}$. Assim, considerando que, para qualquer $i \in \{1,\ldots,m\}$, os elementos (i,j) e (i,s) da matriz AB são dados, respetivamente, por $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$ e $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ks}$, é imediato que as colunas j e s da matriz AB são iguais, pois da hipótese segue que $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ks}$, para qualquer $i \in \{1,\ldots,m\}$.

Exercício 1.8

Sejam $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ duas matrizes do tipo $n \times n$.

(a) Escreva o elemento da matriz $A^2 + B$ situado na linha i e na coluna j.

(b) Escreva o elemento da matriz $A - BA + 2I_n$ situado na linha i e na coluna j.

Resolução:

(a) Por definição de adição de matrizes e de multiplicação de matrizes, temos

$$(A^2 + B)_{ij} = (A^2)_{i,j} + B_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{kj} + b_{ij}.$$

(b) Por definição de multiplicação de matrizes, de multiplicação de um escalar por uma matriz, de adição de matrizes e considerando a associatividade da adição de matrizes, temos

$$\begin{array}{rcl} (A - BA + 2I_n)_{ij} & = & A_{ij} + (-BA)_{ij} + 2(I_n)_{ij} \\ & = & a_{ij} - \sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{kj} + 2\delta_{ij}, \end{array}$$

onde $\delta_{ij} = 1$ se $i = j$ e $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$.

Exercício 1.9

Sejam A, B matrizes 2×2 reais tais que

$$AB - BA = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Mostre que $a + d = 0$.

Resolução:

Sejam

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

tais que $AB - BA = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

Então

$$\begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

donde segue que

$$\begin{bmatrix} (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}) - (b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21}) & (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}) - (b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22}) \\ (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}) - (b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21}) & (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}) - (b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$a = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}) - (b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21}) \text{ e } d = (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}) - (b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22})$$

e, claramente, $a + d = 0$.

Exercício 1.10

Sejam $D \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ e $D' \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Mostre que se D e D' são matrizes diagonais. Então

(a) DD' é uma matriz diagonal.

(b) Para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, $(DD')_{ii} = D_{ii}D'_{ii}$.

Resolução:

(a) Sejam $D, D' \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ matrizes diagonais. Então, para quaisquer $p, q \in \{1 \ldots, n\}$ tais que $p \neq q$, tem-se $D_{pq} = 0$ e $D'_{pq} = 0$. Daqui resulta que, para quaisquer $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ tais que $i \neq j$, $(DD')_{ij} = 0$, pois

$$(DD')_{ij} = \sum_{k=1}^{n} D_{ik}D'_{kj}$$

e: se $k = i$, tem-se $k \neq j$, pelo que $D'_{kj} = 0$; se $k \neq i$, temos $D_{ik} = 0$. Assim, $D_{ij} = 0$, sempre que $i \neq j$ e, portanto, D é uma matriz diagonal.

(b) Sejam $D, D' \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ matrizes diagonais. Então, para quaisquer $p, q \in \{1 \ldots, n\}$ tais que $p \neq q$, tem-se $D_{pq} = 0$ e $D'_{pq} = 0$. Logo, como

$$(DD')_{ii} = \sum_{k=1}^{n} D_{ik}D'_{ki},$$

para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, e, para todo $k \neq i$, $D_{ik} = 0$ e $D'_{ki} = 0$, resulta que $(DD')_{ii} = D_{ii}D'_{ii}$.

Exercício 1.11

Considere as matrizes reais

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determine uma matriz real X tal que:

(a) $3(X + \frac{1}{2}A) = 5(X - \frac{3}{4}B)$.

(b) $X + A = 2(X - B)$.

(c) $CX = I_2$.

Resolução:

(a) Considerando propriedades da adição de matrizes e da multiplicação de um escalar por uma matriz, temos

$$\begin{aligned} 3(X + \tfrac{1}{2}A) = 5(X - \tfrac{3}{4}B) &\Leftrightarrow 3X + \tfrac{3}{2}A = 5X - \tfrac{15}{4}B \\ &\Leftrightarrow 3X - 5X = -\tfrac{15}{4}B - \tfrac{3}{2}A \\ &\Leftrightarrow -2X = -\tfrac{15}{4}B - \tfrac{3}{2}A \\ &\Leftrightarrow X = \tfrac{15}{8}B + \tfrac{3}{4}A \\ &\Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} \frac{21}{8} & \frac{15}{8} & \frac{15}{8} \\ \frac{15}{8} & \frac{21}{8} & \frac{15}{8} \\ \frac{15}{8} & \frac{15}{8} & \frac{21}{8} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(b) Considerando as propriedades da adição de matrizes e da multiplicação de um escalar por uma matriz, temos

$$\begin{aligned} X + A = 2(X - B) &\Leftrightarrow X + A = 2X - 2B \\ &\Leftrightarrow X - 2X = -A - 2B \\ &\Leftrightarrow -X = -A - 2B \\ &\Leftrightarrow X = A + 2B \\ &\Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(c) Pretende-se determinar uma matriz $X \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ tal que $CX = I_2$. Então, considerando que o número de colunas de C é 3, o produto CX só está definido se $m = 3$. Por outro lado, se o produto CX estiver definido, a matriz CX será do tipo $2 \times n$, pelo que n terá de ser igual a 2, uma vez que $CX = I_2$ e I_2 é uma matriz do tipo 2×2. Assim, a matriz X tem de ser uma matriz real do tipo 3×2, ou seja,

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{bmatrix},$$

com $x_{ij} \in \mathbb{R}$, para todos $i \in \{1, 2, 3\}$ e $j \in \{1, 2\}$.

Temos

$$\begin{aligned} CX = I_2 &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_{11} + x_{21} - 3x_{31} & x_{12} + x_{22} - 3x_{32} \\ 2x_{11} + x_{31} & 2x_{12} + x_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_{11} + x_{21} - 3x_{31} = 1 \\ x_{12} + x_{22} - 3x_{32} = 0 \\ 2x_{11} + x_{31} = 0 \\ 2x_{12} + x_{32} = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_{21} = 1 - 7x_{11} \\ x_{22} = 3 - 7x_{12} \\ x_{31} = -2x_{11} \\ x_{32} = 1 - 2x_{12} \end{cases} \end{aligned}$$

Assim, no sentido de determinar uma matriz X nas condições indicadas, basta atribuir valores a x_{11} e x_{12}. Por exemplo, considerando $x_{11} = 0$ e $x_{12} = 1$, obtemos $x_{21} = 1$, $x_{22} = -4$, $x_{31} = 0$ e $x_{32} = -1$, pelo que

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

é uma matriz que satisfaz a igualdade $CX = I_2$.

Exercício 1.12

Dê exemplos de matrizes A e B tais que $A \neq B$ e:

(a) $A^2 = -I_2$.

(b) $A^2 = 0_{2\times 2}$ e $A \neq 0$.

(c) $AB = 0_{2\times 2}$, com $A \neq 0$ e $B \neq 0$.

(d) $AB = 0_{2\times 2}$, com A e B sem elementos nulos.

(e) A, C e D tais que $AC = AD$ e $C \neq D$.

(f) A e B tais que $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$.

(g) A e B tais que $(A+B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$.

[Sugestão: procurar as condições gerais a satisfazer e depois construir os exemplos.]

Resolução:

(a) O produto AA só está definido se A for uma matriz quadrada. Uma vez que $A^2 = -I_2$, a matriz A tem de ser do tipo 2×2. Assim, pretendemos determinar uma matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

tal que $A^2 = -I_2$.

Temos

$$\begin{aligned} A^2 = -I_2 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+dc & cb+d^2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a^2+bc = -1 \\ ab+bd = 0 \\ ca+dc = 0 \\ cb+d^2 = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

No sentido de determinar uma matriz A tal que $A^2 = -I_2$, basta atribuir valores a a,b, c e d que satisfaçam as condições anteriores. Por exemplo, $a = 0$, $b = 1$, $c = -1$ e $d = 0$ satisfazem o sistema anterior. Neste caso temos a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ e verifica-se que $A^2 = -I_2$.

(b) O produto AA só está definido se A for uma matriz quadrada. Uma vez que $A^2 = 0_{2\times 2}$, a matriz A tem de ser do tipo 2×2. Assim, pretendemos determinar uma matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

tal que $A^2 = 0_{2\times 2}$. Temos

$$\begin{aligned} A^2 = 0_{2\times 2} \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+dc & cb+d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a^2+bc = 0 \\ ab+bd = 0 \\ ca+dc = 0 \\ cb+d^2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

No sentido de determinar uma matriz A tal que $A^2 = 0_{2\times 2}$, basta atribuir valores a a,b, c e d que satisfaçam as condições anteriores. Por exemplo, $a = 1$, $b = -1$, $c = 1$ e $d = -1$ satisfazem o sistema anterior. Neste caso temos a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ e verifica-se que $A^2 = 0_{2\times 2}$.

(c) Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tem-se $A \neq 0$, $B \neq 0$ e $AB = 0_{2\times 2}$.

Observação: Esta questão poderia ser resolvida por um processo idêntico ao das alíneas anteriores. Note-se que neste caso, as matrizes A e B não têm de ser necessariamente quadradas. De forma a termos $AB = 0_{2\times 2}$, a matriz A tem de ser do tipo $2 \times p$, para algum $p \in \mathbb{N}$, e a matriz B tem de ser do tipo $p \times 2$. Assim, para algum $p \in \mathbb{N}$, podemos começar por determinar as condições que resultam se considerarmos matrizes reais

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ \vdots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} \end{bmatrix}$$

tais que $AB = 0_{2\times 2}$.

Por exemplo, as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

são tais que $A \neq 0$, $B \neq 0$ e $AB = 0_{2\times 2}$.

(d) Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

As matrizes A e B não têm elementos nulos e $AB = 0_{2\times 2}$.

Observação: Esta questão poderia ser resolvida por um processo idêntico ao das alíneas anteriores. Note-se que neste caso, as matrizes A e B não têm de ser necessariamente quadradas. De forma a termos $AB = 0_{2\times 2}$, a matriz A tem de ser do tipo $2 \times p$, para algum $p \in \mathbb{N}$, e a matriz B tem de ser do tipo $p \times 2$. Assim, para algum $p \in \mathbb{N}$, podemos começar por determinar as condições que resultam se considerarmos matrizes reais

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ \vdots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} \end{bmatrix}$$

tais que $AB = 0_{2\times 2}$.

Por exemplo, as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

são matrizes sem elementos nulos e $AB = 0_{2\times 2}$.

(e) Sendo A uma matriz nula, é imediato que, para quaisquer matrizes B e C, temos $AC = AD$. Por exemplo, considerando

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix},$$

temos $C \neq D$ e $AC = 0_{2\times 2} = AD$.

No sentido de termos matrizes nas condições indicadas, não é necessário que a matriz A seja nula. Por exemplo, sendo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}.$$

também temos $C \neq D$ e $AC = 0_{2\times 2} = AD$.

(f) Para que a expressão $(A+B)(A-B)$ defina uma matriz, as matrizes A e B têm de ser matrizes quadradas do mesmo tipo. Além disso, para quaisquer matrizes para as quais a expressão $(A+B)(A-B)$ define uma matriz, temos

$$(A+B)(A-B) = A^2 + AB - BA - B^2.$$

Assim, tem-se

$$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2 \Leftrightarrow A^2 + AB - BA - B^2 = A^2 - B^2 \Leftrightarrow AB = BA.$$

Por conseguinte, A e B têm de ser matrizes quadradas que satisfaçam a condição $AB = BA$.

Considerando as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix},$$

verifica-se que estas matrizes são permutáveis e, portanto,

$$(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2 = A^2 - B + B - B^2 = A^2 - B^2.$$

(g) Para que a expressão $(A+B)^2$ defina uma matriz, as matrizes A e B têm de ser matrizes quadradas do mesmo tipo. Além disso, para quaisquer matrizes para as quais a expressão $(A+B)^2$ define uma matriz, temos

$$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2.$$

Assim, tem-se

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \Leftrightarrow A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + 2AB + B^2 \Leftrightarrow AB = BA.$$

Logo, A e B têm de ser matrizes quadradas que satisfaçam a igualdade $AB = BA$.

Considerando as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix},$$

verifica-se que estas matrizes são permutáveis e tem-se

$$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + B + B + B^2 = A^2 + 2B + B^2 = A^2 + 2AB + B^2.$$

Exercício 1.13

Verifique se:

(a) a inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 4 \end{bmatrix}$ é a matriz $B = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

(b) a inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ é a matriz $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

Resolução: Seja $n \in \mathbb{N}$. Dadas matrizes $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, diz-se que a matriz B é a inversa de A se $AB = I_n$ e $BA = I_n$.

(a) Uma vez que

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$$

e

$$BA = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3,$$

então B é a inversa de A.

(b) Uma vez que

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$$

e

$$BA = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3,$$

então B é a inversa de A.

Exercício 1.14

Use a definição para calcular a inversa de cada uma das seguintes matrizes:

(a) $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.   (b) $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$.

(b) $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.   (d) $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ y & z & 1 \end{bmatrix}$, com $x, y \in \mathbb{R}$.

Resolução: Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, onde $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Uma matriz $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diz-se a inversa da matriz Y se $XY = I_n$ e $YX = I_n$.

(a) Sendo $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ pretende-se determinar $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ tal que $AX = I_2$ e $XA = I_2$.

Tem-se

$$\begin{aligned} AX = I_2 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -c & -d \\ -a & -b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -c = 1 \\ -d = 0 \\ -a = 0 \\ -b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Uma vez que também se tem

$$XA = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

e a inversa de uma matriz (caso exista) é única, conclui-se que $X = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ é a inversa de A, ou seja,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(b) Sendo $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, pretende-se determinar $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ tal que $BX = I_2$ e $XB = I_2$.

Tem-se

$$\begin{aligned} BX = I_2 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2a+3c & 2b+3d \\ 3a+2c & 3b+2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2a+3c=1 \\ 2b+3d=0 \\ 3a+2c=0 \\ 3b+2d=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\frac{2}{5} \\ b=\frac{3}{5} \\ c=\frac{3}{5} \\ d=-\frac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Uma vez que também se tem

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

e a inversa de uma matriz (caso exista) é única, conclui-se que $X = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix}$ é a inversa de B, ou seja,

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix}.$$

(c) Sendo $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, pretende-se determinar $X = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ tal que $CX = I_3$ e $XC = I_3$.

Tem-se

$$\begin{aligned} CX = I_3 \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} a & b & c \\ a+d & b+e & f+c \\ a+d+g & b+e+h & c+f+i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ c=0 \\ a+d=0 \\ b+e=1 \\ f+c=0 \\ a+d+g=0 \\ b+e+h=0 \\ c+f+i=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ c=0 \\ d=-1 \\ e=1 \\ f=0 \\ g=0 \\ h=-1 \\ i=1 \end{cases} \Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Uma vez que também se tem

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$$

e a inversa de uma matriz (caso exista) é única, conclui-se que

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(d) Sendo $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ y & z & 1 \end{bmatrix}$, pretende-se determinar $X = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ tal que $DX = I_3$ e $XD = I_3$.

Tem-se

$$DX = I_3 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} a & b & c \\ ax+d & bx+e & cx+f \\ ay+dz+g & by+e+h & cy+fz+i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ c=0 \\ ax+d=0 \\ bx+e=1 \\ cx+f=0 \\ ay+dz+g=0 \\ by+ez+h=0 \\ cy+fz+i=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ c=0 \\ d=-x \\ e=1 \\ f=0 \\ g=xz-y \\ h=-z \\ i=1 \end{cases} \Leftrightarrow X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -x & 1 & 0 \\ xz-y & -z & 1 \end{bmatrix}.$$

Também se verifica que

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -x & 1 & 0 \\ xz-y & -z & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ y & z & 1 \end{bmatrix} = I_3,$$

Então, considerando que a inversa de uma matriz (caso exista) é unica, conclui-se que

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -x & 1 & 0 \\ xz-y & -z & 1 \end{bmatrix}.$$

Exercício 1.15

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e A, B e C matrizes invertíveis de ordem n.

(a) Qual a inversa de $AB^{-1}C$?

(b) As matrizes A^2 e $A+B$ são invertíveis? Em caso afirmativo, indique a respetiva inversa. Em caso negativo, dê um contraexemplo.

Resolução:

(a) Uma vez que B é invertível, então B^{-1} é invertível e a sua inversa é a matriz B. Como A e B^{-1} são invertíveis e o produto de matrizes invertíveis (caso esteja definido) é ainda uma matriz invertível, AB^{-1} é invertível e a sua inversa é a matriz $(B^{-1})^{-1}A^{-1} = BA^{-1}$. Considerando que AB^{-1} e C são matrizes invertíveis, então $AB^{-1}C$ é invertível e

$$(AB^{-1}C)^{-1} = C^{-1}(AB^{-1})^{-1} = C^{-1}BA^{-1}.$$

(b) Uma vez que A é invertível e o produto de matrizes invertíveis (caso esteja definido) é uma matriz invertível, então A^2 é invertível e $(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$.

Se A e B são matrizes invertíveis, não é necessariamente verdade que $A+B$ seja uma matriz invertível. Por exemplo, as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

são invertíveis, mas $A+B = 0_{2\times 2}$ não é invertível.

Exercício 1.16

Sejam A uma matriz invertível de ordem m e B, C matrizes do tipo $m \times n$ tais que $AB = AC$. Mostre que $B = C$.

Resolução:

Admitamos que $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ é uma matriz invertível. Então existe $A^{-1} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que

$$AA^{-1} = I_n = A^{-1}A.$$

Assim,

$$\begin{aligned} AB = AC \quad &\Rightarrow \quad A^{-1}(AB) = A^{-1}(AC) \\ &\Rightarrow \quad (A^{-1}A)B = (A^{-1}A)C \\ &\Rightarrow \quad I_nB = I_nC \\ &\Rightarrow \quad B = C. \end{aligned}$$

Exercício 1.17

Indique A^T no caso de A ser:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$. (b) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$.

Resolução:

(a) Por definição de transposta de uma matriz, tem-se

$$\begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 8 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

(b) Por definição de transposta de uma matriz, tem-se

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Exercício 1.18

Diga quais das seguintes matrizes são simétricas e quais são antissimétricas:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 7 \\ 1 & 0 & -2 \\ -7 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 1 & 0 & 3 \\ 7 & 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Resolução: Uma matriz $X \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ diz-se uma matriz:

- simétrica se $X^T = X$.
- anitissimétrica se $X^T = -X$.

Temos

$$A^T = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \text{ e } -A = \begin{bmatrix} -4 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Então, como $A = A^T$, a matriz A é simétrica. Uma vez que $A^T \neq -A$ (pois $(A^T)_{11} = 4 \neq -4 = (-A)_{11}$), concluímos que a matriz não é antissimétrica.

Relativamente à matriz B, temos

$$B^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -7 \\ -1 & 0 & 2 \\ 7 & -2 & 0 \end{bmatrix} = -B.$$

Considerando que $B^T \neq B$ (pois $(B^T)_{12} = -1 \neq 1 = B_{12}$), a matriz não é simétrica. A matriz é antissimétrica, uma vez que $B = B^T$.

A matriz C não é simétrica nem antissimétrica, pois

$$C^T = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 2 & 0 & 3 \\ 7 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

e, portanto, $C^T \neq C$ $((C^T)_{12} = 2 \neq 1 = C_{12})$ e $C^T \neq -C$ $((C^T)_{11} = 5 \neq -5 = (-C)_{11})$.

Exercício 1.19

Sejam $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $n \in \mathbb{N}$, $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. Mostre que se as matrizes A e B são simétricas, então:

(a) As matrizes $A + B$ e αA são simétricas.

(b) A matriz AB é simétrica se e só se $AB = BA$.

Resolução:

(a) Seja $n \in \mathbb{N}$. Uma matriz $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diz-se uma matriz simétrica se $X^T = X$.

Se as matrizes A e B são simétricas, tem-se $A^T = A$ e $B^T = B$. Então,

$$(A + B)^T = A^T + B^T = A + B.$$

Logo, a matriz $A + B$ é simétrica.

Sendo A uma matriz simétrica, tem-se $A^T = A$, pelo que

$$(\alpha A)^T = \alpha A^T = \alpha A.$$

Portanto, a matriz αA também é simétrica

(b) Admitamos que A e B são simétricas e que AB é simétrica. Então $A^T = A$, $B^T = B$ e $(AB)^T = AB$. Logo, como $(AB)^T = B^T A^T$, tem-se $(B^T A^T) = AB$, donde resulta $BA = AB$.

Reciprocamente, admitamos que A e B são simétricas e $AB = BA$. Daqui resulta que AB é simétrica, pois

$$\begin{aligned} (AB)^T &= B^T A^T \\ &= BA \qquad (A \text{ e } B \text{ são simétricas}) \\ &= AB \qquad (\text{ por hipótese } AB = BA). \end{aligned}$$

Exercício 1.20

Dê exemplo de uma matriz quadrada de ordem 3 que seja simultaneamente simétrica e antissimétrica.

Resolução:

Uma matriz $X \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ é simétrica se $X^T = X$ e é antissimética se $X^T = -X$. Assim, se X é simétrica e antissimétrica tem-se $X^T = -X^T$, donse resulta $X^T = 0_{n\times n}$ e, consequentemente, $X = 0_{n\times n}$. Por outro lado, para todo $n \in \mathbb{N}$, a matriz $0_{n\times n}$ é uma matriz simétrica e antissimétrica. Assim, uma matriz $X \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ é simultaneamente simétrica e antissimétrica se e só se $X = 0_{n\times n}$.

Logo, $0_{3\times 3}$ é exemplo de uma matriz nas condições indicadas.

Exercício 1.21

Diga quais das seguintes matrizes são ortogonais, quais são hermíticas e quais são unitárias:

(a) $A = \begin{bmatrix} 4 & -i & 2i \\ i & 1 & 1-i \\ -2i & 1+i & 0 \end{bmatrix}$.

(b) $B = \begin{bmatrix} 2 & 1+i & 5-i \\ 1-i & 7 & i \\ 5+i & -i & -1 \end{bmatrix}$.

(b) $C = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & -1 \end{bmatrix}$.

(d) $D = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$.

Resolução:

Uma matriz $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diz-se:

- ortogonal se $XX^T = I_n = X^TX$.
- hermítica se $X^* = (\overline{X})^T = X$.
- unitária se $XX^* = I_n = X^*X$.

(a) Tem-se

$$A^T = \begin{bmatrix} 4 & -i & 2i \\ i & 1 & 1-i \\ -2i & 1+i & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 4 & i & -2i \\ -i & 1 & 1+i \\ 2i & 1-i & 0 \end{bmatrix}.$$

Uma vez que

$$AA^T = \begin{bmatrix} 4 & -i & 2i \\ i & 1 & 1-i \\ -2i & 1+i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & i & -2i \\ -i & 1 & 1+i \\ 2i & 1-i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 5i+2 & -9i+1 \\ 5i+2 & -2i & 3+i \\ -9i+1 & 3+i & -4+2i \end{bmatrix}$$

e $AA^T \neq I_3$, concluímos que A não é ortogonal.

Considerando que

$$A^* = \begin{bmatrix} 4 & -i & 2i \\ i & 1 & 1-i \\ -2i & 1+i & 0 \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} 4 & i & -2i \\ -i & 1 & 1+i \\ 2i & 1-i & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 4 & -i & 2i \\ i & 1 & 1-i \\ -2i & 1+i & 0 \end{bmatrix} = A,$$

concluímos que a matriz é hermítica.

Tem-se

$$AA^* = \begin{bmatrix} 4 & -i & 2i \\ i & 1 & 1-i \\ -2i & 1+i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -i & 2i \\ i & 1 & 1-i \\ -2i & 1+i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & -3i-2 & 7i-1 \\ 3i-2 & 4 & -1-i \\ -1-7i & -1+i & 0 \end{bmatrix}.$$

Como $AA^* \neq I_3$, a matriz A não é unitária.

(b) Tem-se
$$B^T = \begin{bmatrix} 2 & 1+i & 5-i \\ 1-i & 7 & i \\ 5+i & -i & -1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & 1-i & 5+i \\ 1+i & 7 & -i \\ 5-i & i & -1 \end{bmatrix}.$$
Uma vez que
$$BB^T = \begin{bmatrix} 2 & 1+i & 5-i \\ 1-i & 7 & i \\ 5+i & -i & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1-i & 5+i \\ 1+i & 7 & -i \\ 5-i & i & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30-10i & 10+10i & 6+2i \\ 10-4i & 48-2i & 6-12i \\ 4+2i & 6-12i & 24+10i \end{bmatrix}$$
e $BB^T \neq I_3$ concluímos que B não é ortogonal.

Considerando que
$$B^* = \begin{bmatrix} 2 & 1+i & 5-i \\ 1-i & 7 & i \\ 5+i & -i & -1 \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} 2 & 1-i & 5+i \\ 1+i & 7 & -i \\ 5-i & i & -1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & 1+i & 5-i \\ 1-i & 7 & i \\ 5+i & -i & -1 \end{bmatrix},$$
e $B^* = B$, concluímos que a matriz B é hermítica.

Tem-se
$$BB^* = B^*B = \begin{bmatrix} 4 & -i & 2i \\ i & 1 & 1-i \\ -2i & 1+i & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -i & 2i \\ i & 1 & 1-i \\ -2i & 1+i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & -3i-2 & 7i-1 \\ 3i-2 & 4 & -1-i \\ -1-7i & -1+i & 0 \end{bmatrix}.$$
Como $BB^* \neq I_3$, a matriz B não é unitária.

(c) Tem-se
$$C^T = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & -1 \end{bmatrix}.$$
Considerando que
$$CC^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}+i\frac{2}{3} & -\frac{2i}{3} \\ -\frac{2i}{3} & \frac{1}{3}-i\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$
e $CC^T \neq I_2$, conclui-se que a matriz C não é ortogonal.

Uma vez que
$$C^* = (\overline{C})^T = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & -1 \end{bmatrix}$$
e $C^* = C$, então a matriz é hermítica.

Tem-se
$$\begin{aligned} CC^* &= \left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & -1 \end{bmatrix}\right)\left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & -1 \end{bmatrix}\right) \\ &= \left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2 \end{aligned}$$
e
$$\begin{aligned} CC^* &= \left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & -1 \end{bmatrix}\right)\left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & -1 \end{bmatrix}\right) \\ &= \left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\begin{bmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2 \end{aligned}.$$
Logo, a matriz C é unitária.

(d) Tem-se

$$D^T = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}.$$

Considerando que

$$DD^T = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

e

$$D^T D = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2,$$

conclui-se que a matriz D é ortogonal.

Uma vez que

$$D^* = (\overline{D})^T = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

e $D^* \neq D$, então a matriz não é hermítica.

Tem-se $DD^* = DD^T = I_2$ e $D^*D = D^T D = I_2$. Logo, a matriz D é unitária.

Exercício 1.22

Mostre que o produto de quaisquer duas matrizes ortogonais é também uma matriz ortogonal.

Resolução: Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ matrizes ortogonais. Então $AA^T = I_n = A^T A$ e $BB^T = I_n = B^T B$. Logo,

$$(AB)(AB)^T = (AB)(B^T A^T) = A(BB^T)A^T = AI_nA^T = AA^T = I_n$$

e

$$(AB)^T(AB) = (B^T A^T)(AB) = B^T(A^T A)B = B^T I_n B = B^T B = I_n.$$

Portanto, AB é uma matriz ortogonal.